E-ideais álgebras básicas

Abdón Catalán Sobarzo

Tese apresentada

ao

Instituto de Matemática e Estatística

da

Universidade de São Paulo

para a obtenção do grau de Doutor

em

Matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa

São Paulo, abril de 1995

E-ideais em álgebras báricas

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Abdón Catalán e aprovada
pela Comissão Julgadora

São Paulo, 25 de agosto de 1995.

Banca Examinadora

- Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa (Orientador) IME-USP
- Prof. Dr. Luis Antonio Peresi IME-USP
- Prof. Dr. Cristián Mallol Comandari Montpellier III
- Prof. Dr. Antonio José Engler IMECC-UNICAMP
- Profa. Dra. Ires Dias ICMSC-USP

*A meus
pais
sogros
irmãos*

*À minha esposa Elena
que tem compartilhado minha vida
por mais de 19 anos,
pelo amor, compreensão
e estímulo sempre constante
e aos meus filhos,
Alejandro
Sandra
e o quem vem em caminho*

A meu filho

Daniel Felipe

que nasceu no dia 1 de junho

Agradecimentos

Em primeiro lugar dou graças a Deus por este logro alcançado.

Ao professor Dr. Roberto Costa, don Roberto, o amigo, pela sugestão do assunto, pelo apoio e estímulo constante desde o início de meus estudos de doutorado, faço extensivo um reconhecimento à sua maravilhosa família.

A quem foram meus professores, aos colegas, ao pessoal da CPG e da biblioteca do IME. A meu amigo Luiz Gonzaga e a toda a sua família, pela sua acolhida em São Paulo, além do seu estímulo permanente.

À Universidad de La Frontera de Temuco, Chile, em particular a todos meus colegas de trabalho do Departamento de Matemática y Estadística, e aos que foram chefes do departamento: Germán Alamos, Hernán Burgos e Pedro Valenzuela.

A Cristián Mallol, amigo, pelo apoio na última etapa de minha tese e em particular pelas sugestões no Capítulo 2.

A Rodolfo Baeza, pelo tempo valioso que perdeu para fazer correções nos arquivos $\text{\LaTeX}$ desta tese, durante sua estadia no IME em 1994.

A Raúl Benavides, amigo e colega, que compartimos todas as etapas do doutoramento.

A meus amigos que simbolizo num só nome: ELBA.

Finalmente ao CNPq pela bolsa de estudo por quatro anos e meio dos cinco em que moramos em São Paulo.

Abdón Orlando Catalán Sobarzo

Abstract

To each commutative baric algebra (A, ω) we associate a class $\mathcal{E}_A$ of ideals, which are generated by the values of train polynomials. We study some general properties of $\mathcal{E}_A$ and give some examples showing extreme cases. After this, we assume A satisfies some polynomial equation (Bernstein, train, etc) and study specific properties of $\mathcal{E}_A$. As a rule, in these cases, $\mathcal{E}_A$ is a very small set. Some open questions are also indicated.

Resumo

Para cada álgebra bária comutativa (A, ω) associamos uma classe $\mathcal{E}_A$ de ideais, que são gerados pelos valores de train polinômios. Estudamos algumas propriedades gerais de $\mathcal{E}_A$ e damos alguns exemplos mostrando casos extremos. Depois disso, assumimos que A satisfaz alguma identidade polinomial (Bernstein, train, etc.) e estudamos propriedades específicas de $\mathcal{E}_A$. Como regra geral, nesses casos, $\mathcal{E}_A$ é um conjunto bem pequeno. Algumas questões abertas são também indicadas.

Conteúdo

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Potências em álgebras não associativas	11
1.2 Processo de linearização	12
1.3 Álgebras báricas	14
1.4 Join de álgebras báricas	17
1.5 As funções $(f_1, \dots, f_m)$	19
1.6 Duplicada de uma álgebra	20
1.7 Álgebras graduadas	21
2 Train polinômios	22
2.1 Train álgebras	22
2.2 Train polinômios	23
3 E-ideais: propriedades gerais	28
3.1 E -ideais de uma álgebra bárica	28
3.2 Exemplos	32
3.3 Propriedades dos E -ideais	36
3.4 E -ideais em classes fechadas	39
3.5 Intersecção e soma de E -ideais	42
3.6 A igualdade $E_A(1, -1) = N$	44
4 E-ideais em train álgebras	46
4.1 E -ideais	46
4.2 E -ideais para uma classe de train álgebras de posto n	55

4.3	E -ideais em uma certa classe de train álgebras de posto 4	57
4.4	E -ideais em train álgebras cujo núcleo é uma álgebra graduada	59
5	E-ideais em álgebras de Bernstein	63
5.1	E -ideais em uma álgebra de Bernstein.	63
5.2	E -ideais em álgebras de Bernstein excepcionais	69
5.3	E -ideais em álgebras de Bernstein-Jordan	70
5.4	E -ideais em álgebras de Bernstein nucleares	71
6	E-ideais em álgebras que satisfazem $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$	74
6.1	Preliminares	74
6.2	Tipo e ideais	77
6.3	Cálculo dos E -ideais por seqüências recorrentes	79
	Bibliografia	84

Introdução

O trabalho desenvolvido nesta tese baseia-se em idéias introduzidas há 50 anos por Etherington [13], sendo uma generalização das mesmas. Esta tese está dividida em seis capítulos.

No capítulo 1 nós apresentamos os conceitos, noções e resultados conhecidos em álgebras não associativas e que serão usados nesta tese, como, por exemplo, álgebras graduadas, processo de linearização de identidades, processo de duplicação de álgebras, conceitos que podem ser levados sem muita dificuldade às álgebras báricas, que é nosso objeto principal de trabalho ao longo da tese. Os conceitos de join de álgebras báricas, álgebra bárica decomponível, álgebra bárica indecomponível, desenvolvidos por Guzzo em [18], formam parte deste capítulo, como também em alguns dos capítulos seguintes.

No capítulo 2 estudamos o conceito de train polinômio, fazendo uma construção deles que permite fazer um pouco de aritmética com eles. Aquí obtemos resultados novos. Este capítulo é usado fundamentalmente nos capítulos 3 e 4.

No capítulo 3 desenvolvemos as idéias principais da tese. Definimos o conceito de ideal generalizado de Etherington de uma álgebra bárica, ou simplesmente E -ideal. Damos alguns exemplos do conjunto $\mathcal{E}_A$ dos E -ideais de uma álgebra bárica A de dimensão infinita exibindo “casos extremos” para o conjunto $\mathcal{E}_A$. Provamos que $\mathcal{E}_A$ sempre possui um elemento máximo, que todo E -ideal pode ser gerado por valores em elementos de peso 1 como também pelos valores assumidos na linearização completa de um train polinômio. Dado um homomorfismo bárico entre duas álgebras báricas A_1 e A_2 , estudamos as relações entre seus E -ideais. Em particular, os E -ideais da duplicada são estudados. Estabelecemos também relações entre os E -ideais de A e os E -ideais de uma subálgebra bárica de A . Também estudamos a relação entre os E -ideais de uma família finita de álgebras báricas

e seu correspondente join. Estudamos a interseção e a soma de E -ideais como também temos uma condição suficiente para que uma álgebra básica tenha $N = \ker \omega$ como elemento máximo em $\mathcal{E}_A$.

No capítulo 4 fazemos o estudo dos E -ideais em train álgebras, obtendo um resultado que nos permite encontrar um limite superior para o número de E -ideais em qualquer train álgebra. Obtemos também algumas particularizações. Também estudamos os E -ideais em train álgebras cujo núcleo é uma álgebra graduada, situação que aparece na teoria das álgebras genéticas com bastante frequência.

No capítulo 5 fazemos o estudo dos E -ideais em álgebras de Bernstein, uma classe de álgebras básicas bastante estudada até o momento. Obtemos alguns resultados gerais. A descrição dos E -ideais em álgebras de Bernstein-Jordan, Bernstein normal, Bernstein nuclear é completa. No caso excepcional, esta é só parcial. Esta é mais uma comprovação de que a teoria das álgebras de Bernstein excepcionais é bastante complexa.

No capítulo 6 estudamos o conjunto $\mathcal{E}_A$ dos E -ideais em uma classe de álgebras básicas que foi estudada por Walcher [43], para a qual nós temos alguns resultados novos com respeito a invariantes e ideais. Temos uma descrição total dos E -ideais usando para isto um método que pode ser usado em qualquer outra classe de álgebras básicas onde haja uma decomposição de Peirce e cujo núcleo seja nilpotente.

O estudo do conjunto $\mathcal{E}_A$ dos E -ideais de uma álgebra básica foi apenas iniciado neste trabalho. Muitos problemas abertos existem e serão objeto de estudo no futuro. O que parece ser mais complexo é a caracterização dos conjuntos parcialmente ordenados com maior elemento que são isomorfos a algum $\mathcal{E}_A$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos os conceitos que serão necessários para a leitura deste trabalho. Nenhum resultado é provado aqui pois são fatos bem conhecidos. As demonstrações encontram-se nas referências ao final do trabalho. Usaremos vários resultados da tese de doutorado [18] do colega H. Guzzo Jr., que aparecem também em [10], [11], [19] e [20].

1.1 Potências em álgebras não associativas

Sejam F um corpo, A uma álgebra sobre o corpo F , não necessariamente associativa ou de dimensão finita, mas comutativa. Definimos recursivamente as potências principais de um elemento $a \in A$ como:

$$a^1 = a, a^{n+1} = a^n a \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

e as potências plenas como:

$$a^{[1]} = a, a^{[n+1]} = a^{[n]} a^{[n]} \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Se U e V são subconjuntos de A , definimos:

a) $UV = \langle uv : u \in U, v \in V \rangle$, o subespaço gerado pelos produtos uv .

b) $U^1 = U, U^{k+1} = U^k U, k \geq 1$ (potências principais de U)

Dizemos que U é nilpotente se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $U^k = \{0\}$.

1.2 Processo de linearização

Sejam F um corpo e X um conjunto não vazio de símbolos e consideremos a álgebra não associativa livre $F\{X\}$ gerada por estes símbolos. Se A é uma álgebra sobre F e f é um elemento de $F\{X\}$, então dizemos que A *satisfaz a identidade f* ou f *é uma identidade para A* se a imagem de f é o zero para todo homomorfismo de $F\{X\}$ em A . Claramente f pertence a uma subálgebra de $F\{X\}$ gerada por um subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X , assim f é uma combinação linear de produtos dos x_i . Consequentemente escrevemos $f = f(x_1, \dots, x_n)$. Se $a_1, \dots, a_n$ são elementos arbitrários de A então existe um homomorfismo de $F\{X\}$ em A levando $x_i \mapsto a_i$, $i = 1, \dots, n$. A imagem de f sob este homomorfismo é única e é denotada por $f(a_1, \dots, a_n)$. Assim A satisfaz a identidade f se e somente se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $a_i \in A$. Se I é um subconjunto de $F\{X\}$, denotamos por $\mathcal{V}(I)$ a classe de álgebras que satisfazem todas as identidades $f \in I$ e que chamamos a *variedade definida por I* . Se $I = \{f\}$ onde $f = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$, então $\mathcal{V}(I)$ é a variedade das álgebras associativas. Se $I = \{f, g\}$ onde $f = x_1^2$, $g = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2$ então $\mathcal{V}(I)$ é a variedade das álgebras de Lie. Se $I = \{f, g\}$ onde $f = x_1^2x_2 - x_1(x_1x_2)$, $g = x_2x_1^2 - (x_2x_1)x_1$ então $\mathcal{V}(I)$ é a variedade das álgebras alternativas. Se $I = \{f, g\}$ onde $f = x_1x_2 - x_2x_1$, $g = (x_1^2x_2)x_1 - x_1^2(x_2x_1)$ então $\mathcal{V}(I)$ é a variedade das álgebras de Jordan. Estas são as variedades mais estudadas até o momento.

Se uma álgebra A satisfaz uma identidade f , então toda subálgebra e toda imagem homomorfa de A também satisfazem f . Mais ainda, toda soma direta de álgebras satisfazendo f também satisfaz f . Dizemos que uma classe de F -álgebras é uma *classe fechada de álgebras* se é fechada para as operações de formar subálgebras, imagens homomorfas e somas diretas. Relembramos o enunciado do Teorema de Birkhoff.

Teorema 1.1 ([25, Th 2.4]) *Uma classe de F -álgebras é uma variedade se e somente se é uma classe fechada de álgebras.*

Seja $y \notin X$ e consideremos a álgebra não associativa livre $F\{Z\}$ onde $Z = X \cup \{y\}$. Para cada $i = 1, 2, \dots$ seja λ_i o homomorfismo de $F\{X\}$ em $F\{Z\}$ tal que $x_i \mapsto x_i + y$, $x_k \mapsto x_k$, $k \neq i$. Se $f \in F\{X\}$ tem grau m_i em x_i então podemos escrever

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{m_i} f_{ij}(x_1, \dots, x_n, y) \quad (1.1)$$

onde $f_{ij} = f_{ij}(x_1, \dots, x_n, y)$ é homogêneo de grau j em y . Definimos o operador D_{ij} agindo sobre f como $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)D_{ij}(y) = f_{ij}(x_1, \dots, x_n, y)$. Observamos que $D_{i0} = I$. Se $j > 0$, o operador D_{ij} age substituindo cada monômio pela soma dos monômios que podem ser obtidos dele substituindo j dos x_i por y . Os D_{ij} são lineares e satisfazem

$$(fg)D_{ij} = \sum_{k=0}^j (fD_{ik})(gD_{i,j-k}). \quad (1.2)$$

Se f é uma identidade, y é uma indeterminada diferente de $x_1, \dots, x_n$, $j \geq 1$, e o grau de $x_i \geq k$ em pelo menos um monômio de f , então $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)D_{ij}(y)$ é dita uma *linearização simples* de f . Uma identidade que pode ser obtida de f como uma sequência de uma ou mais linearizações simples de f é dita uma *linearização* de f . Por exemplo, consideremos o elemento $g = (x_1^2 x_2)x_1 - x_1^2(x_2 x_1)$ que é um dos dois elementos que define a classe das álgebras de Jordan. Nós temos

$$\begin{aligned} gD_{11} &= ((x_1 y + y x_1)x_2)x_1 + (x_1^2 x_2)y - (x_1 y + y x_1)(x_2 x_1) - x_1^2(x_2 y) \\ gD_{12} &= (y^2 x_2)x_1 + ((x_1 y + y x_1)x_2)y - (x_1 y + y x_1)(x_2 y) - y^2(x_2 x_1) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Então

$$\begin{aligned} g_1 &= ((x_1 x_3 + x_3 x_1)x_2)x_1 + (x_1^2 x_2)x_3 - (x_1 x_3 + x_3 x_1)(x_2 x_1) - x_1^2(x_2 x_3) \\ g_2 &= (x_3^2 x_2)x_1 + ((x_1 x_3 + x_3 x_1)x_2)x_3 - (x_1 x_3 + x_3 x_1)(x_2 x_3) - x_3^2(x_2 x_1) \end{aligned} \quad (1.4)$$

são linearizações de g . Também

$$\begin{aligned} g_1 D_1 &= g_1 D_{11} = ((y x_3 + x_3 y)x_2)x_1 + ((x_1 x_3 + x_3 x_1)x_2)y \\ &\quad + ((x_1 y + y x_1)x_2)x_3 - (y x_3 + x_3 y)(x_2 x_1) - (x_1 x_3 + x_3 x_1)(x_2 y) \\ &\quad - (x_1 y + y x_1)(x_2 x_3). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Então

$$\begin{aligned} h &= ((x_4 x_3 + x_3 x_4)x_2)x_1 - (x_4 x_3 + x_3 x_4)(x_2 x_1) \\ &\quad + ((x_1 x_3 + x_3 x_1)x_2)x_4 - (x_1 x_3 + x_3 x_1)(x_2 x_4) \\ &\quad + ((x_1 x_4 + x_4 x_1)x_2)x_3 - (x_1 x_4 + x_4 x_1)(x_2 x_3). \end{aligned} \quad (1.6)$$

é uma linearização de g .

Uma linearização na qual em cada monômio não aparecem variáveis com grau > 1 é denominada uma *linearização completa*.

A propriedade mais importante do processo de linearização é que, dada uma identidade em A , cada linearização dela é uma nova identidade para A ([45, Th 5 seção 2 cap 1]).

Quando fazemos linearizações estamos sempre assumindo que o corpo tem um número suficiente de elementos. Uma das dificuldades na teoria das álgebras genéticas é o fato de que as principais classes de álgebras (Bernstein, train, etc.) não formam variedades.

1.3 Álgebras báricas

Seja A uma álgebra sobre o corpo F . Se existe um homomorfismo não nulo de álgebras $\omega : A \rightarrow F$, diremos que o par ordenado (A, ω) é uma álgebra bárica sobre F ; neste caso ω é chamada função peso de (A, ω) . Para todo peso ω , $\ker \omega$ é um ideal bilateral de codimensão 1 e que não contém A^2 , caso contrário $\omega(x^2) = 0 = \omega(x)^2$ implicando $\omega(x) = 0$ para todo x . O seguinte resultado é bem conhecido.

Teorema 1.2 ([29, Th 3.3.1]) *A correspondência $\omega \mapsto \ker \omega$ é uma bijeção entre o conjunto de funções pesos de uma álgebra A e o conjunto dos ideais I de codimensão 1 tal que $A^2 \not\subseteq I$.*

Se I é um ideal de codimensão 1 que contém A^2 então a álgebra quociente A/I é um espaço vetorial unidimensional com multiplicação trivial.

Corolário 1.1 ([29, Cor 3.3.2]) *Se B obtém-se de A por adjunção de um elemento identidade, então B admite uma função peso.*

Nem toda álgebra admite uma função peso. Por exemplo, uma álgebra com produto trivial não tem função peso, pois se houvesse teríamos $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y) \neq 0$, mas $\omega(xy) = 0$ pois $xy = 0$. De maneira análoga, uma álgebra onde cada elemento é nilpotente não admite função peso. Uma álgebra pode, naturalmente, admitir mais de uma função peso. Por exemplo, se $A = F^n$, com o produto coordenada a coordenada, cada aplicação projeção p_i definida por $p_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, é uma função peso.

Teorema 1.3 ([29, Th 3.3.3]) *O número de funções peso de uma álgebra A de dimensão n é no máximo n .*

Se (A, ω) é uma álgebra bárica, uma subálgebra B de A é chamada subálgebra bárica se $B \not\subseteq \ker \omega$, ou equivalentemente, $\omega \neq 0$ em B . Por exemplo A^2 é uma subálgebra

bárica como também qualquer subálgebra que contem A^2 . Um ideal I de A é chamado ideal bário se $I \subseteq \ker \omega$, isto é, $\omega = 0$ em I . Assim um ideal bário não pode ser uma subálgebra bária. Para todo ideal bário I a álgebra quociente A/I é uma álgebra bária com a função peso $\bar{\omega}(a + I) = \omega(a)$. O maior ideal bário é $N = \ker \omega$ e $A/N \cong F$. O anulador de A , denotado $\text{Ann}A$, é um ideal bário como é também qualquer subespaço de $\text{Ann}A$. O ideal A^2 não é ideal bário pois é uma subálgebra bária.

Dadas duas álgebras báricas (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) , um homomorfismo bário $h: (A_1, \omega_1) \rightarrow (A_2, \omega_2)$ é um homomorfismo $h: A_1 \rightarrow A_2$ tal que $\omega_2 \circ h = \omega_1$, isto é, o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{h} & A_2 \\ \omega_1 \searrow & & \swarrow \omega_2 \\ & F & \end{array}$$

A imagem de h é uma subálgebra bária de A_2 e o núcleo de h é um ideal bário de A_1 e temos que $A_1/\ker \omega \cong \text{Im}h$.

Toda álgebra bária (A, ω) pode-se decompor como soma direta de espaços vetoriais $A = Fc \oplus N$, onde $N = \ker \omega$ e c é um elemento de A de peso 1. Se c for um idempotente então Fc é uma subálgebra de A .

Neste trabalho todas as álgebras báricas consideradas admitem uma única função peso. Damos a seguir exemplos de classes de álgebras báricas que têm sido bastante estudadas nos últimos anos. Este estudo constitui basicamente a teoria das álgebras genéticas.

Exemplo 1: Seja T um operador linear num espaço vetorial A e seja $\omega: A \rightarrow F$ uma forma linear T -invariante, isto é, $\omega \circ T = \omega$. Em A definimos a multiplicação $xy = \frac{1}{2}(\omega(y)T(x) + \omega(x)T(y))$. Como ω é T -invariante obtemos $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$ e daí, (A, ω) resulta ser uma álgebra bária.

Exemplo 2: Seja B uma álgebra comutativa não necessariamente associativa sobre F e de dimensão arbitrária e seja $\tau: B \rightarrow B$ um operador linear. No espaço vetorial $F \oplus B$, introduzimos uma multiplicação e uma forma linear ω por:

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, ab + \tau(\alpha b + \beta a)); \omega(\alpha, a) = \alpha, \quad \text{onde } \alpha, \beta \in F; a, b \in B. \quad (1.7)$$

É claro que ω é um homomorfismo não nulo com núcleo B , $e = (1, 0)$ é um idempotente de peso 1, $(1, 0)(0, b) = (0, \tau(b))$, para todo $b \in B$. Denotamos esta álgebra bária por $[B, \tau]$. Com as identificações usuais, cada elemento x de $[B, \tau]$ é da forma $x = \alpha e + n$, $en = \tau(n)$, onde $\alpha \in F$ e $n \in B$.

Exemplo 3: Uma álgebra bária comutativa (A, ω) é dita uma *train álgebra* se existem escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ tais que $x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0$ para todo $x \in A$. Mais adiante, falaremos um pouco mais sobre elas.

Exemplo 4: Uma álgebra bária comutativa (A, ω) de dimensão finita é dita uma *train álgebra especial* se as potências principais do núcleo $N = \ker \omega$ são ideais báricos e se N for nilpotente.

Exemplo 5: Uma álgebra bária comutativa (A, ω) é dita uma *álgebra de Bernstein* se satisfaz a identidade $x^{[3]} = \omega(x)^2 x^{[2]}$.

Exemplo 6: Seja A uma álgebra comutativa de dimensão $m + 1$. Diremos que A é genética segundo Gonshor (ou especial triangular), se para alguma extensão algébrica L de F , $A_L = L \otimes_F A$ admite uma base $c_0, \dots, c_m \in A_L$, para a qual as constantes de estrutura λ_{ijk} definidas por

$$c_i c_j = \sum_{k=0}^m \lambda_{ijk} c_k, \quad 0 \leq i \leq j \leq m$$

verificam as seguintes condições:

- a) $\lambda_{000} = 1$
- b) $\lambda_{0jk} = 0$ para $k < j$
- c) $\lambda_{ijk} = 0$ para $k < j$ se $0 < i \leq j \leq m$.

A base $c_0, \dots, c_m$ é chamada uma base canônica de A_L e λ_{0jj} ($0 \leq j \leq m$) são as *train raízes* desta álgebra (pode-se provar que são invariantes em relação à base canônica escolhida). A função $\omega: A \rightarrow F$ dada por $\omega(c_0) = 1$ e $\omega(c_i) = 0$ ($i = 1, \dots, m$), é um homomorfismo não nulo de álgebras e portanto toda álgebra genética segundo Gonshor é uma álgebra bária. Toda álgebra de Gonshor tem a propriedade que o núcleo da função peso é nilpotente ([39], [44, Lema 3.19]).

Exemplo 7: Se A é uma álgebra sobre um corpo F , indicaremos por $Hom_F(A)$ a álgebra (associativa) dos operadores lineares de A . Se $L(A)$ é o conjunto dos operadores multiplicação à esquerda $L_a: x \mapsto ax$ e $R(A)$ é o conjunto dos operadores multiplicação à direita $R_a: x \mapsto xa$, a subálgebra $T(A)$ de $Hom_F(A)$ gerada por $\{id_A\} \cup L(A) \cup R(A)$ é a álgebra das transformações de A . Os elementos de $T(A)$ podem ser expressos na forma

$$\tau = f(T_1, \dots, T_n) + \lambda id_A, \quad \lambda \in F$$

onde cada $T_j \in L(A) \cup R(A)$ e f é um polinômio em n indeterminadas associativas não comutativas. Para álgebras comutativas, $L_a = R_a$. Diremos que uma álgebra bária comutativa e de dimensão finita (A, ω) é genética segundo Schafer, veja [23] ou [39], se para todo $\tau = \lambda id_A + f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}) \in T(A)$ e $\tau' = \lambda id_A + f(R_{y_1}, \dots, R_{y_n}) \in T(A)$, onde $\omega(x_i) = \omega(y_i)$, temos $\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau')$, onde Λ indica o espectro do operador, isto é, o conjunto dos valores característicos em alguma extensão de F . Toda álgebra genética segundo Schafer é uma train álgebra. Toda álgebra genética segundo Gonshor é genética segundo Schafer ([44, Th 5.12]). Se F é um corpo algebricamente fechado, uma álgebra é genética segundo Gonshor se e somente se é genética segundo Schafer ([44, Th 3.13]). Toda train álgebra especial é genética segundo Schafer ([39]).

1.4 Join de álgebras báricas

Nesta seção nós resumimos os resultados obtidos por H. Guzzo em [18]. Nós particularizamos ao caso comutativo. Estes resultados serão usados nos capítulos seguintes. Em [18] o leitor encontrará todos os detalhes e provas dos resultados enunciados aqui.

Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) duas álgebras báricas comutativas com idempotentes de peso 1, e_1 e e_2 respectivamente. Em $A = ker\omega_1 \oplus ker\omega_2$ definimos a multiplicação componente a componente: $(u_1, v_1)(u_2, v_2) = (u_1u_2, v_1v_2)$, $u_i \in ker\omega_1$, $v_i \in ker\omega_2$ ($i = 1, 2$). Seja $\lambda: A \rightarrow A$ o operador linear definido por: $\lambda(u, v) = (e_1u, e_2v)$. Consideremos agora a nova álgebra bária $[A, \lambda] = F \oplus ker\omega_1 \oplus ker\omega_2$, que possui a multiplicação (de acordo com o que foi visto no exemplo 2 da seção anterior):

$$(\alpha, u, v)(\alpha', u', v') = (\alpha\alpha', uu' + \alpha e_1u' + \alpha' e_1u, vv' + \alpha e_2v' + \alpha' e_2v)$$

onde $\alpha, \alpha' \in F$, $u, u' \in \ker \omega_1$ e $v, v' \in \ker \omega_2$. A construção acima independe dos idempotentes e_1, e_2 escolhidos em A_1 e A_2 , de acordo com a

Proposição 1.1 *Se e'_1 e e'_2 são outros idempotentes em A_1 e A_2 respectivamente e λ' é o operador em A dado por $\lambda'(u, v) = (e'_1 u, e'_2 v)$, então existe um isomorfismo bárico entre $[A, \lambda]$ e $[A, \lambda']$.*

A álgebra bárica $[A, \lambda]$ construída acima é chamada de join de (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) e é denotada por $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ ou simplesmente $A_1 \vee A_2$. O idempotente $e = (1, 0, 0)$ é denotado $e_1 \vee e_2$ e é dito o join de e_1 e e_2 .

Na soma direta usual $A_1 \oplus A_2$ das álgebras A_1 e A_2 , podemos encontrar uma subálgebra que possui um homomorfismo não nulo com valores em F , sendo portanto uma álgebra bárica. De fato $A_1 \oplus A_2 = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$ e o elemento $e = e_1 + e_2$ é um idempotente pois $e_1 e_2 = 0$. A subálgebra $F(e_1 + e_2) \oplus \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$ é bárica ($e_1 + e_2 \mapsto 1$) e é isomorfa à $A_1 \vee A_2$.

Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) como acima, $e_1 \in A_1$, $e_2 \in A_2$ idempotentes de peso 1, $e = e_1 \vee e_2$ e $A'_i = \{\alpha e + u : \alpha \in F, u \in \ker \omega_i\}$ ($i = 1, 2$). Então A'_i é uma subálgebra bárica de $A_1 \vee A_2$ isomorfa, como álgebra bárica, a A_i ($i = 1, 2$). Identificamos A_i com A'_i , fazendo $A_i = A'_i$.

Uma classe Ω de álgebras báricas é dita *fechada para a operação join* se, dadas duas álgebras A_1 e A_2 , então A_1 e A_2 estão em Ω se e somente se $A_1 \vee A_2$ está em Ω . Por exemplo, álgebras de Bernstein, genéticas segundo Gonshor, genéticas segundo Schafer, train álgebras especiais, as álgebras báricas que satisfazem uma identidade polinomial $p(x_1, \dots, x_n) = 0$, são todas subclasses fechadas. Ver [11] para as demonstrações.

Usando o conceito de join podemos falar de álgebras báricas indecomponíveis. Se (A, ω) é um membro de uma classe Ω de álgebras báricas com idempotentes, tal que $\dim A \geq 2$, então (A, ω) é decomponível em Ω se existem (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) em Ω , com $\dim A_i \geq 2$, tais que $(A, \omega) \cong (A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$. Se tais álgebras não existirem, diremos que (A, ω) é indecomponível em Ω . Uma álgebra bárica (A, ω) em Ω satisfaz (c.c.d) se toda cadeia estritamente descendente de ideais de A , contidos no $\ker \omega$, é finita, e satisfaz (c.c.a) se toda cadeia estritamente ascendente de ideais de A , contidos no $\ker \omega$, é finita. Assim temos o seguinte teorema de Krull-Schmidt (ver [10] para a demonstração):

Teorema 1.4 Se (A, ω) pertence a uma classe fechada Ω satisfazendo ambas $(c.c.d)$ e $(c.c.a)$, então existe, salvo isomorfismos e permutações, uma única família $(A_1, \omega_1), \dots, (A_n, \omega_n)$ de álgebras básicas indecomponíveis em Ω tal que:

$$(A, \omega) \cong (A_1 \vee \dots \vee A_n, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_n).$$

1.5 As funções $(f_1, \dots, f_m)$

Nesta seção apresentamos alguns resultados de [18] que serão usados no Capítulo 3.

Seja A uma álgebra arbitrária sobre F e sejam $f_i: A \rightarrow K_i$, onde $K_i = A$ ou F , $i = 1, \dots, m$, funções arbitrárias. Definimos recursivamente a função de m variáveis $(f_1, \dots, f_m): A \oplus \dots \oplus A \rightarrow K$, onde $K = F$ se $K_i = F$ para todo i ou $K = A$ se $K_i = A$ para algum i , do seguinte modo:

$$(1) (f_1) = f_1$$

$$(2) (f_1, \dots, f_m)(a_1, \dots, a_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (f_1, \dots, f_{m-1})(a_{\tau^i(1)}, \dots, a_{\tau^i(m-1)}) f_m(a_{\tau^i(m)})$$

onde $(a_1, \dots, a_m) \in A \oplus \dots \oplus A$ e τ é o ciclo $(12 \dots n)$ no grupo simétrico S_n .

Proposição 1.2 Se as funções $f_i: A \rightarrow K_i$ ($i = 1, \dots, m$) são lineares então $(f_1, \dots, f_m)$ é uma função m -linear simétrica de m variáveis definida em $A \oplus \dots \oplus A$ com valores em A (ou F).

Para $f, g: A \rightarrow K$ como acima, $a, b \in A$, introduzimos as seguintes notações:

$$(a) (f^{(1)}) = f \text{ e } (f^{(m)}) = (f, \dots, f)$$

$$(b) (f^{(m)}, g^{(p)}) = (f, \dots, f, g, \dots, g)$$

$$(c) (f^{(0)}, g^{(p)}) = g^{(p)} \text{ e } (f^{(m)}, g^{(0)}) = f^{(m)}$$

$$(d) (a^{(1)}) = a \text{ e } (a^{(m)}) = (a, \dots, a)$$

$$(e) (a^{(m)}, b^{(p)}) = (a, \dots, a, b, \dots, b)$$

$$(f) (a^{(0)}, b^{(p)}) = b^{(p)} \text{ e } (a^{(m)}, b^{(0)}) = a^{(m)}$$

Proposição 1.3 Se A é uma álgebra arbitrária, não necessariamente associativa e não necessariamente comutativa, sobre um corpo F , $a, b \in A$ e $m \geq 1$ então

$$(a + b)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} id_A^{(m)}(a^{(m-i)}, b^{(i)}) \quad (1.8)$$

onde id_A é a função identidade em A .

Notemos que se A é comutativa e associativa na Proposição 1.3, (1.8) é a fórmula usual do binômio. A Proposição 1.3 será usada no Lema 3.2.

1.6 Duplicada de uma álgebra

O processo de duplicação de uma álgebra foi introduzido por I.M.H. Etherington em 1939, ver [14]. Os resultados a seguir aparecem em [30].

Seja A uma álgebra sobre F e $S^2(A)$ a segunda potência simétrica de A . Consideremos a projeção canônica $A \otimes A \rightarrow S^2(A)$, $x \otimes y \mapsto x \cdot y$, onde $x \cdot y$ denota o produto simétrico de x por y , com $x, y \in A$. Com a multiplicação $(x \cdot y)(x' \cdot y') = xy \cdot x'y'$ (respectivamente $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y'$) com $x, x', y, y' \in A$, definimos sobre $S^2(A)$ (resp. $A \otimes A$) uma estrutura de álgebra comutativa (resp. não comutativa) que é chamada *duplicada comutativa* (resp. *duplicada não comutativa*) de A . A duplicada comutativa será denotada por A^D .

A aplicação F -linear $\mu: A^D \rightarrow A^2$ definida por $x \cdot y \mapsto xy$ é um homomorfismo sobrejetor de F -álgebras e se $N(A) = \ker \mu$, temos o isomorfismo de F -álgebras $A^D/N(A) \cong A^2$. Além disso, $A^D N(A) = N(A) A^D = 0$. A sequência exata de F -espaços vetoriais $0 \rightarrow N(A) \rightarrow A^D \rightarrow A^2 \rightarrow 0$ é cindida, isto é, existe uma aplicação F -linear $\eta: A^D \leftarrow A^2$ tal que $\mu \circ \eta = id_{A^2}$. Temos assim uma aplicação F -bilinear $\varphi: A^2 \times A^2 \rightarrow N(A)$ definida por $(x, y) \mapsto \eta(x)\eta(y) - \eta(xy)$ que conjuntamente à condição $A^D N(A) = N(A) A^D = 0$, nos permite definir sobre o produto semidireto $A^D = A^2 \times_{s.d.} N(A)$ uma estrutura de álgebra dada por $(x, x')(y, y') = (xy, \varphi(x, y))$ para todo $x, y \in A^2$ e $x', y' \in N(A)$.

Lema 1.1 *Se A é uma álgebra e A^D é sua duplicada, então A^D admite uma função peso se A^2 a admite.*

Proposição 1.4 *Se A é uma álgebra tal que A^2 é uma train álgebra de posto r , então A^D é uma train álgebra de posto no máximo $r + 1$.*

Proposição 1.5 *Se A é uma álgebra tal que A^2 é genética então A^D é uma álgebra genética.*

A demonstração desses resultados encontra-se na literatura.

1.7 Álgebras graduadas

Sejam F um corpo, A uma F -álgebra, $\mathbb{N}$ o monóide aditivo dos números naturais. Uma $\mathbb{N}$ -graduação sobre A é uma sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subespaços de A verificando as condições:

$$(1) A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_n \oplus \dots$$

$$(2) \text{ Se } x \in A_n \text{ e } y \in A_m \text{ então } xy \in A_{n+m}$$

O par ordenado $(A, (A_n)_{n \in \mathbb{N}})$ chama-se uma *F -álgebra graduada sobre $\mathbb{N}$* . Um elemento de A_n chama-se *homogêneo de grau n* .

Seja A uma F -álgebra graduada pela graduação $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e B uma subálgebra de A . B é dita uma *subálgebra homogênea* se para todo $x \in B$, as componentes homogêneas de x estão todas em B . Esta condição equivale a dizer que $B = (B \cap A_0) \oplus (B \cap A_1) \oplus \dots \oplus (B \cap A_n) \oplus \dots$. Assim toda subálgebra homogênea B pode ser munida de uma estrutura de F -álgebra graduada, a graduação sendo dada por $B_n = B \cap A_n$ para $n = 0, 1, \dots$. Seja I um ideal bilateral de A . I é dito homogêneo se as componentes homogêneas de qualquer elemento de I estão em I . Pode-se provar que I é homogêneo se e somente se for gerado (como ideal bilateral) por elementos homogêneos. Se I for homogêneo, a álgebra quociente A/I pode ser munida de graduação induzida pela graduação de A .

Observação: Podemos usar também uma graduação finita. Neste caso, $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ se $i+j \leq k$ e $A_i A_j = 0$ se $i+j > k$. Vários exemplos importantes na teoria das álgebras genéticas possuem uma graduação finita. Ver seção 4.4.

Capítulo 2

Train polinômios

Este capítulo contém alguns resultados novos sobre train polinômios, ver [4]. Aqui fazemos uma construção deles para eliminar um certo incômodo que havia antes, quando os train polinômios eram tratados como "expressões formais". Além disso, a construção dada aqui permite fazer um pouco de aritmética dos train polinômios, que será usada nos Capítulos 3 e 4.

2.1 Train álgebras

Usualmente, as train álgebras são definidas como segue. Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ elementos arbitrários do corpo F tais que $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$. A expressão formal

$$p = p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x$$

é chamada de train polinômio com coeficientes $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ e de grau n .

Diremos que uma álgebra bária (A, ω) sobre o corpo F é uma train álgebra se satisfaz a equação $p(a) = 0$ para todo $a \in A$, para algum train polinômio p . O menor grau de um train polinômio p satisfeito por A é chamado de posto de A e a identidade $p(x) = 0$ é chamada de train equação de A . Quando A é uma train álgebra, os elementos a do núcleo de ω satisfazem $a^n = 0$. Os elementos $a \in A$ com $\omega(a) = 1$ satisfazem todos a mesma equação.

Seja (A, ω) uma train álgebra de posto n satisfazendo a train equação

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0.$$

Consideremos agora o polinômio, no sentido usual, $p(X) = X^n + \gamma_1 X^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} X$ em $F[X]$. Sendo L um corpo de raízes de $p(X)$, temos a fatoração

$$p(X) = X(X - 1)(X - t_1) \dots (X - t_{n-2})$$

onde $t_1, \dots, t_{n-2} \in L$, já que 0 e 1 são raízes óbvias de $p(X)$. Os escalares $t_0 = 1, t_1, \dots, t_{n-2}$ são chamados train raízes principais de A . Vamos a seguir buscar uma contrução conjuntista dos train polinômios, para eliminar o incômodo em lidar com expressões formais.

2.2 Train polinômios

Sejam F um corpo e (A, ω) uma álgebra bária sobre F de dimensão finita ou infinita. No espaço vetorial A^A das funções de A em A , consideremos a família infinita $\{\omega^i p_j : A \rightarrow A\}_{i \geq 0, j \geq 1}$ tal que $x \mapsto \omega(x)^i x^j$, ou seja $(\omega^i p_j)(x) = \omega(x)^i x^j$. Esta família gera um subespaço de A^A que chamaremos espaço das train funções generalizadas, denotado por $TFG(A)$. Um elemento arbitrário deste subespaço é uma função da forma

$$f = \sum_{i \geq 0, j \geq 1} \gamma_{ij} \omega^i p_j \text{ (soma finita, } \gamma_{ij} \in F) \quad (2.1)$$

Logo para todo $a \in A$, $f(a) = \sum \gamma_{ij} \omega(a)^i a^j$. Observemos que uma dada f pode-se escrever de várias maneiras em função desta família pois, em geral, a família $\omega^i p_j$ é linearmente dependente. O conjunto das diferentes maneiras de escrever f na forma (2.1) é enumerável. Assim podemos introduzir a noção de grau de f . Se $\varepsilon_k = \sum_{i \geq 0, j \geq 1} \gamma_{kij} \omega^i p_j$, com $k \in \mathbb{N}$, são as diferentes maneiras de escrever f , então a cada ε_k associamos o número $j_k = \max\{j : \gamma_{kij} \neq 0\}$. Assim $gr(f) = \min\{j_k : k \in \mathbb{N}\}$. Usaremos esta representação de f sob a designação de *escritura mínima*. No Corolário 2.1 fica justificada a unicidade desta escritura.

Teorema 2.1 *A álgebra bária (A, ω) é train se e somente se a família $\{\omega^i p_j\}$ é linearmente dependente.*

Demonstração: Se $\{\omega^i p_j\}$ é livre então toda combinação linear $\sum_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \gamma_{ij} \omega^i p_j = 0$ implica que $\gamma_{ij} = 0$ para todo i e j , isto é, a única combinação linear igual a zero é a trivial, assim, (A, ω) não é train álgebra.

Reciprocamente, se a família $\{\omega^i p_j\}$ é linearmente dependente, existem escalares γ_{ij} não todos zeros tal que $\sum_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \gamma_{ij} \omega^i p_j = 0$, isto é, $\sum_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \gamma_{ij} \omega(x)^i x^j = 0$ para todo $x \in A$. Assim para todo $x \in A$ de peso 1 temos

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x^j = 0 \quad (2.2)$$

onde $\alpha_j = \sum_{i=1}^m \gamma_{ij}$. Se em (2.2) substituimos x por $\frac{y}{\omega(y)}$ com $\omega(y) \neq 0$ temos $\sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\frac{y}{\omega(y)}\right)^j = \sum_{j=1}^n \omega(y)^{-n} \alpha_j \omega(y)^{n-j} y^j = 0$, isto é, $\omega(y)^{-n} \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega(y)^{n-j} y^j = 0$ e como $\omega(y)^{-n} \neq 0$ para todo $y \in A$ de peso $\neq 0$ resulta que $\sum_{j=1}^n \alpha_j \omega(y)^{n-j} y^j = 0$ para todo $y \in A$ com $\omega(y) \neq 0$. Como $\{y \in A : \omega(y) \neq 0\}$ é um conjunto denso em A e $\sum_{j=1}^n \alpha_j \omega(y)^{n-j} y^j$ é uma função contínua segundo a topologia de Zariski, resulta finalmente que $\sum_{j=1}^n \alpha_j \omega(y)^{n-j} y^j = 0$ para todo $y \in A$, ou seja, que A é uma train álgebra. ■

Teorema 2.2 (A, ω) é uma train álgebra de posto n se e somente se o conjunto $\mathcal{X} = \{\omega^i p_j : i \geq 0, 1 \leq j \leq n-1\}$ é linearmente independente com n máximo.

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{X}$ é linearmente dependente, logo existem escalares γ_{ij} com $0 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n-1$, não todos nulos, tais que:

$$\sum_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1} \gamma_{ij} \omega^i p_j = 0$$

Usando o mesmo argumento na demonstração do teorema 2.1 concluímos que (A, ω) é uma train álgebra de posto $\leq n-1 < n$, em contradição com a hipótese. Além disso, como (A, ω) é uma train álgebra de posto n , satisfaz uma train equação

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0$$

ou equivalentemente:

$$x^n = -\gamma_1 \omega(x) x^{n-1} - \dots - \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x$$

logo, isto quer dizer:

$$p_n \in \langle \omega^{n-j} p_j : 1 \leq j \leq n-1 \rangle \subseteq \mathcal{X}$$

e $\omega^i p_n \notin \mathcal{X}$, assim $\mathcal{X} \cup \{\omega^i p_n\}$ é linearmente dependente, isto é, $\mathcal{X}$ é um conjunto máximo linearmente independente.

A recíproca é clara, usando o teorema 2.1, pois $\mathcal{X} \cup \{p_n\}$ é linearmente dependente.

■

Proposição 2.1 *Seja (A, ω) uma train álgebra de posto n . Então*

i) *Existe um único train polinômio f de grau n tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$.*

ii) *Toda train função generalizada pode ser escrita como uma train função de grau $\leq n-1$.*

Demonstração: Suponhamos que (A, ω) satisfaz $p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0$.

i) Se (A, ω) também satisfaz $q(x) = x^n + \delta_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \delta_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0$ então para todo $x \in A$ temos $(\gamma_1 - \delta_1) \omega(x) x^{n-1} + \dots + (\gamma_{n-1} - \delta_{n-1}) \omega(x)^{n-1} x = 0$ e como $\{\omega^i p_{n-i} : 1 \leq i \leq n-1\} \subseteq \{\omega^i p_j : i \geq 0, j \geq 1\}$ é um subconjunto linearmente independente, resulta que $\gamma_i = \delta_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$ e assim $p(x) = q(x)$.

ii) Como (A, ω) satisfaz $p(x) = 0$ temos $x^n = -(\gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x)$, isto é, $p_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \omega^i p_{n-i}$ e recursivamente teremos $p_{n+k} = -\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \omega^i p_{n+k-i}$. Assim, $p_{n+k} \in \langle \omega^i p_{n-i} : 1 \leq i \leq n-1 \rangle$ para todo $k \geq 0$. ■

Corolário 2.1 *Dada uma álgebra bária (A, ω) , toda train função generalizada f admite uma única escritura que dá o grau de f .*

Demonstração: Se (A, ω) não é train álgebra, a família $\{\omega^i p_j\}$ é livre e toda f escreve-se de maneira única como combinação linear desta família. Se (A, ω) é train álgebra de posto n , a família $\{\omega^i p_{n-i}\}$ com $i = 0, \dots, n$ é livre e geradora por causa do Teorema 2.1 e Proposição 2.1 ii), conseqüentemente toda f admite uma única escritura. ■

Em $TFG(A)$ consideremos os subconjuntos $TF(A) = \{f = \sum \gamma_{ij} \omega^i p_j : i + j = n\}$ e $TP(A) = \{f \in TF(A) : \sum \gamma_{ij} = 0\}$ que chamaremos conjunto das *train funções* e

conjunto dos *train* polinômios respectivamente. Estes subconjuntos não são subespaços vetoriais.

Consideremos agora o ideal $\langle X \rangle$ da álgebra $F[X]$ dos polinômios numa variável X , gerado pelo polinômio X . Seus elementos são os polinômios sem termo constante. Definamos a função $\mathcal{T}: \langle X \rangle \rightarrow TF(A)$ tal que se $p(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i X^{n-i}$ é um elemento arbitrário em $\langle X \rangle$ então $\mathcal{T}(p(X)) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \omega^i p_{n-i} = p_{\mathcal{T}}$ é um elemento em $TF(A)$. Observemos que $\mathcal{T}$ é uma função sobrejetora por construção. Se $f \in TF(A)$ e $f = \sum \gamma_i \omega^i p_{n-i}$ é a sua escritura mínima, então ao polinômio $p(X) = \sum \gamma_i X^{n-i}$ chamaremos o *antecedente canônico* de f . Assim, daqui para a frente, trabalharemos sempre com os antecedentes canônicos. A riqueza estrutural de $\langle X \rangle$ pode ser levada a $TF(A)$ por meio de $\mathcal{T}$ como segue.

Sejam $p_{\mathcal{T}}$ e $q_{\mathcal{T}}$ em $TF(A)$ e sejam $p(X)$ e $q(X)$ seus antecedentes canônicos respectivamente. Então a soma, o produto e a multiplicação por escalar são dadas por

$$p_{\mathcal{T}} \oplus q_{\mathcal{T}} = (p + q)_{\mathcal{T}}$$

$$p_{\mathcal{T}} \cdot q_{\mathcal{T}} = (pq)_{\mathcal{T}}$$

$$\lambda p_{\mathcal{T}} = (\lambda p)_{\mathcal{T}}$$

Proposição 2.2 *Sejam $p(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i X^{n-i}$ e $q(X) = \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j X^{m-j}$ polinômios em $F[X]$ com $gr(p(X)) = m$ e $gr(q(X)) = n$, $m \geq n$. Então:*

i) $(p + q)_{\mathcal{T}}(x) = p_{\mathcal{T}}(x) + \omega(x)^{m-n} q_{\mathcal{T}}(x)$ para todo $x \in A$, e $p_{\mathcal{T}} \oplus q_{\mathcal{T}} = p_{\mathcal{T}} + q_{\mathcal{T}}$ em todo elemento de A de peso 1.

ii) $p_{\mathcal{T}}(x) \cdot q_{\mathcal{T}}(x) = (pq)_{\mathcal{T}}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j \omega(x)^j R_x^{m-j} p_{\mathcal{T}}(x)$ onde R_x é o operador multiplicação por x .

Assim, por traslado de estrutura temos que $TF(A)$ com a soma, o produto e multiplicação por escalar definidas acima é uma álgebra e $\mathcal{T}$ é um homomorfismo de álgebras, sobrejetor. Notemos que a imagem de $U[X] = \langle X(X-1) \rangle$ sob $\mathcal{T}$ é $TP(A)$. Sendo $U[X]$ um ideal em $\langle X \rangle$, $TP(A)$ é um ideal em $TF(A)$.

Notemos que (A, ω) é *train* álgebra se e somente se $\ker \mathcal{T} \neq 0$. E se (A, ω) é uma *train* álgebra que satisfaz $p_{\mathcal{T}}(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0$ então $\ker \mathcal{T} = \langle p(X) \rangle$. Assim temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3 *Seja (A, ω) uma álgebra bária.*

i) *Se (A, ω) não é train álgebra, então temos os isomorfismos*

$$\langle X \rangle \cong (TF(A), \oplus, \cdot) \quad e \quad U[X] \cong (TP(A), \oplus, \cdot)$$

ii) *Se (A, ω) é uma train álgebra que satisfaz $p_T(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1}x = 0$, temos os isomorfismos*

$$\langle X \rangle / \langle p(X) \rangle \cong (TF(A), \oplus, \cdot) \quad e \quad U[X] / \langle p(X) \rangle \cong (TP(A), \oplus, \cdot)$$

Corolário 2.2 *Seja (A, ω) uma álgebra bária.*

i) *Se (A, ω) não é train álgebra, então $\{p_1, \dots, p_n, \dots\}$ é uma base de $(TF(A), \oplus, \cdot)$ e $\{p_i - \omega^{i-1}p_1 : i \geq 2\}$ é uma base de $(TP(A), \oplus, \cdot)$*

ii) *Se (A, ω) é uma train álgebra que satisfaz $p_T(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1}x = 0$ então $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ é uma base de $(TF(A), \oplus, \cdot)$ e $\{p_i - \omega^{i-1}p_1 : 2 \leq i \leq n-1\}$ é uma base de $(TP(A), \oplus, \cdot)$.*

A divisibilidade, algoritmo da divisão, mínimo múltiplo comum (m.m.c.), máximo divisor comum (m.d.c.) de dois train polinômios e a propriedade da decomposição única de um train polinômio podem ser obtidos por meio do homomorfismo $\mathcal{T}$ de $U[X]$ em $TP(A)$. Por exemplo:

i) O train polinômio f_T divide o train polinômio g_T se existe um polinômio $q(X) \in F[X]$ tal que $g_T(x) = (fq)_T(x)$.

ii) Dado qualquer train polinômio p_T existem, e são únicos, polinômios $p_1(X), \dots, p_k(X)$ em $F[X]$ tal que $p_T(x) = (p_{-1}^{i-1} p_0^{i_0} p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k})_T(x)$ onde os polinômios $p_{-1}(X) = X$, $p_0(X) = X - 1$ e $p_i(X)$ com $i = 1, \dots, k$ são irredutíveis em $F[X]$.

Estes resultados são usados na seção 3.5.

Capítulo 3

E-ideais: propriedades gerais

3.1 *E*-ideais de uma álgebra básica

Grande parte da teoria das álgebras genéticas tem-se desenvolvido sobre o conceito de álgebra básica comutativa, que definimos na seção 1.3, porém repetimos aqui. Sejam F um corpo, A uma álgebra sobre o corpo F , não necessariamente associativa ou de dimensão finita, mas comutativa. Se existir um homomorfismo não nulo de álgebras $\omega : A \rightarrow F$, diremos que o par ordenado (A, ω) é uma álgebra básica sobre F ; neste caso ω é chamada de função peso de (A, ω) , e, para cada $a \in A$, $\omega(a)$ é dito o peso de a . Os elementos de A de peso zero formam um ideal N de codimensão 1 em A . Os elementos de peso 1 formam um hiperplano afim. Quando se faz a teoria de álgebras genéticas com vistas a aplicações à Genética de Populações, boa parte da atenção se localiza nesse hiperplano.

O conceito de álgebra básica sobre os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ foi introduzido em 1939 por I.M.H. Etherington, obtendo assim um objeto matemático apropriado para a formulação das leis de Mendel e muitas de suas inúmeras generalizações. O mesmo autor definiu algumas subclasses da classe das álgebras básicas, como por exemplo, train e especial train, e mostrou que álgebras importantes, provenientes da Genética, pertencem a estas classes. Posteriormente o próprio Etherington, R.D. Schafer, Raffin, H. Gonshor, O. Reiersol, Ph. Holgate e I. Heuch contribuíram para melhor entendimento destas álgebras. Para um estudo mais detalhado ver a monografia de A. Worz “Algebras in Genetics” que contém basicamente tudo o que se conhecia sobre o assunto até 1978. Nos últimos vinte anos, tem crescido o interesse por estas álgebras tanto do ponto de vista das aplicações como

de seu estudo abstrato. Nesta tese trataremos de questões puramente algébricas.

Uma das classes introduzidas por Etherington, as train álgebras, serão importantes neste trabalho. Vamos lembrá-las agora. Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ elementos arbitrários em um corpo F tal que $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$ e consideremos o train polinômio

$$p = p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x \quad (3.1)$$

de grau n com coeficientes $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$, conforme definimos no Capítulo 2. Se uma álgebra bária comutativa (A, ω) satisfaz a identidade

$$p(a) = a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a = 0, \quad (3.2)$$

para todo $a \in A$ então dizemos que (A, ω) é uma train álgebra. O menor grau de um train polinômio $p(x)$ satisfeito por A é chamado de *posto* de A e a correspondente identidade $p(x) = 0$ é chamada de *train equação* de A . Aqui os elementos a^k são as potências principais de a , conforme definimos no Capítulo 1: $a^1 = a$ e $a^n = a^{n-1}a$ se $n \geq 2$.

No trabalho pioneiro de Etherington, ele mostra como obter train álgebras de posto 2 e 3 a partir de uma álgebra bária qualquer. Para obter uma train álgebra de posto 2, como quociente de uma álgebra bária (A, ω) , ele considera o ideal P gerado pelos elementos $a^2 - \omega(a)a$, com $a \in A$, os quais ele chama de p -elementos. Para obter uma train álgebra de posto 3, ele considera o ideal Q_λ ($\lambda \in F$, fixado) gerado pelos elementos $a^3 - (1 + \lambda)\omega(a)a^2 + \lambda\omega(a)^2a$, com $a \in A$, os quais ele chama de q -elementos. Assim a álgebra quociente A/P satisfaz a train equação $x^2 - \omega(x)x = 0$ e A/Q_λ satisfaz a train equação $x^3 - (1 + \lambda)\omega(x)x^2 + \lambda\omega(x)^2x = 0$. Ele prova, entre outros resultados, que:

$$N^2 \subseteq P \subseteq N \quad \text{onde} \quad N = \ker \omega \quad (3.3)$$

$$Q_\lambda \subseteq P \quad \text{para todo} \quad \lambda \in F \quad (3.4)$$

$$Q_\lambda + Q_\mu = P \quad \text{sempre que} \quad \lambda \neq \mu \quad (3.5)$$

O ideal P é conhecido atualmente na literatura como o ideal de Etherington de (A, ω) . Para algumas classes de álgebras báricas onde existe uma decomposição de Peirce pode-se expressar P em função dos subespaços correspondentes a essa decomposição. São casos bem conhecidos na literatura os seguintes:

1.- Se A é uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, então $P = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e$.

2.- Se A é uma train álgebra de posto 3 com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, então $P = U_e V_e \oplus V_e$.

3.- Se A satisfaz a equação $(x^2)^2 = \omega(x)^3 x$ com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, então $P = U_e V_e \oplus V_e$.

4.- Toda train álgebra A de posto 4 satisfazendo a train equação

$$x^4 - (1 + r + s)\omega(x)x^3 + (r + s + rs)\omega(x)^2 x^2 - rs\omega(x)^3 x = 0$$

onde $r \neq s$ e ambos são diferentes de $\frac{1}{2}$, possui uma decomposição de Peirce $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_r \oplus A_s$. Se $A_{\frac{1}{2}} = 0$ então $P = U_e \oplus V_e$. Quando $A_{\frac{1}{2}} \neq 0$, não conhecemos a fórmula de P .

A seguir damos uma descrição dos ideais Q_λ nas quatro classes de álgebras básicas acima.

1.- Se A é uma álgebra de Bernstein com decomposição $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ então $Q_\lambda = P$ se $\lambda \neq 0$ e Q_λ está contido propriamente em P quando $\lambda = 0$. Com efeito: de (3.4) temos que $Q_\lambda \subseteq P$ para todo λ . Sejam $\lambda, \mu \in F$ arbitrários com $\lambda \neq 0$ e $a = e + \mu z$, então $a^2 = e + \mu^2 z^2$ e $a^3 = e + \frac{1}{2}\mu^2 z^2 + \mu^3 z^3$, daí vem que $a^3 - (1 + \lambda)\omega(a)a^2 + \lambda\omega(a)^2 a = \mu\lambda z + \mu^2(-\frac{1}{2} - \lambda)z^2 + \mu^3 z^3$ é um elemento no ideal Q_λ para todo $\mu \in F$. Agora se escolhemos μ_i com $i = 1, 2, 3$ diferentes temos que os elementos $a_i^3 - (1 + \lambda)\omega(a_i)a_i^2 + \lambda\omega(a_i)^2 a_i = \mu_i\lambda z + \mu_i^2(-\frac{1}{2} - \lambda)z^2 + \mu_i^3 z^3$ são elementos no ideal Q_λ e como estes formam um sistema de Vandermonde temos que os elementos $\lambda z, (-\frac{1}{2} - \lambda)z^2$ e z^3 pertencem a Q_λ . Em particular como $\lambda \neq 0$ o subespaço $Z_e \subseteq Q_\lambda$ e consequentemente $P \subseteq Q_\lambda$. Sejam $\lambda = 0$ e $a = e + u + z$, então $a^2 = e + u + 2uz + u^2 + z^2$ e $a^3 = e + u + (2uz + u^2 + \frac{1}{2}z^2) + u^2 z + 2(uz)z + z^3$, então $a^3 - (1 + \lambda)\omega(a)a^2 + \lambda\omega(a)^2 a = a^3 - \omega(a)a^2 = -\frac{1}{2}z^2 + u^2 z + 2(uz)z + z^3$ sendo um gerador de Q_λ é um elemento no subespaço U_e e não do subespaço Z_e , assim Q_λ está contido propriamente em P .

2.- Se A é uma train álgebra de posto 3 satisfazendo $x^3 - (1 + \lambda)\omega(x)x^2 + \lambda\omega(x) = 0$, então $Q_\lambda = 0$ e $Q_\mu = P$ se $\mu \neq \lambda$, onde $\lambda, \mu \in F$.

3.- Se A satisfaz $(x^2)^2 = \omega(x)^3 x$, como acima, então $Q_\lambda = U_e V_e \oplus V_e = P$ se $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ e $Q_{-\frac{1}{2}} = U_e V_e^2 \oplus V_e^2$.

4.- Se $A = Fe \oplus A_r \oplus A_s$ satisfaz $x^4 - (1 + r + s)\omega(x)x^3 + (r + s + rs)\omega(x)^2 x^2 - rs\omega(x)^3 x = 0$

onde $r \neq s$ e ambos são diferentes de $\frac{1}{2}$, então $Q_\lambda = A_r \oplus A_s = P$ se $\lambda \neq r$ e $\lambda \neq s$; $Q_s = A_r \oplus A_r^2$ e $Q_r = A_s^2 \oplus A_s$. Este fato é provado na seção 4.3.

No entanto, para uma álgebra bária qualquer, é difícil descrever os ideais P e Q_λ em termos de outros subespaços naturalmente presentes na álgebra.

A seguir introduziremos a noção de E -ideal como uma maneira natural de generalizar a situação acima. Este é o conceito principal deste trabalho.

Definição 3.1 *O ideal generalizado de Etherington (ou simplesmente E -ideal) de uma álgebra bária (A, ω) , associado ao train polinômio $p(x)$ como em (3.1), é o ideal de A gerado por todos os elementos da forma*

$$p(a) = a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a \quad (3.6)$$

quando a varia em A .

Diremos também, abusando da linguagem, que este ideal é *gerado* por $p(x)$. Este ideal será denotado por $E_A(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ ou simplesmente por $E_A(p)$. Assim os ideais P e Q_λ introduzidos por Etherington são, segundo esta notação, $E_A(1, -1)$ e $E_A(1, -(1+\lambda), \lambda)$.

Observemos que para todo $a \in A$

$$\omega(p(a)) = (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}) \omega(a)^n = 0 \quad (3.7)$$

e daí resulta que $E_A(p) \subseteq \ker \omega$ pois todos os seus geradores têm peso zero. Além disso $A/E_A(p)$, que é bária com a função peso $\bar{\omega}(a + E_A(p)) = \omega(a)$, satisfaz $p(x) = 0$ e $E_A(p)$ é o menor ideal I de A , contido em $\ker \omega$, tal que A/I é bária e satisfaz $p(x) = 0$. Note que a álgebra bária (A, ω) é uma train álgebra quando e somente quando a classe de seus E -ideais contem o ideal $\{0\}$.

O objetivo básico deste trabalho é iniciar o estudo do conjunto dos E -ideais de uma álgebra bária A , denotado por $\mathcal{E}_A$. Começamos observando que, em geral, dois train polinômios p e q distintos podem gerar o mesmo E -ideal em uma álgebra bária (A, ω) dada e portanto uma questão natural é saber quando teremos $E_A(p) = E_A(q)$. Mais geralmente, podemos introduzir a:

Definição 3.2 *Seja Ω uma classe não vazia de álgebras báricas sobre o corpo F . Dois train polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes módulo Ω quando $E_A(p) = E_A(q)$ para toda $A \in \Omega$.*

Em particular, quando Ω é formada por uma única álgebra bária (A, ω) , as classes de equivalência de train polinômios módulo Ω correspondem biunivocamente aos E -ideais de A . No extremo oposto, seja Ω a classe de todas as álgebras bárias sobre F . Neste caso, se p e q são equivalentes módulo Ω , segue que $p = q$? Esta questão continua aberta.

3.2 Exemplos

Neste parágrafo tentaremos fazer o cálculo dos E -ideais em algumas álgebras bárias de dimensão infinita, procurando exhibir "casos extremos" para o conjunto $\mathcal{E}_A$ dos E -ideais. O cálculo aqui é possível pois a tábuia de multiplicação é muito simples. Em geral, o cálculo dos E -ideais é penoso, quando não praticamente impossível.

Nos quatro exemplos seguintes, A é um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável sobre um corpo infinito F com uma base $\{c_0, c_1, \dots\}$ e $\omega: A \rightarrow F$ é a forma linear definida por $\omega(c_0) = 1$, $\omega(c_i) = 0$ para todo $i \geq 1$. Todo elemento de A é da forma $\sum_i \alpha_i c_i$ (soma finita) onde $\alpha_i \in F$. Além disso, em todos os exemplos, $p(x)$ será o train polinômio $p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x) x$. Pedimos ao leitor que acredite (por enquanto) que $E_A(p)$ pode ser gerado apenas pelos elementos $p(a)$ com $a \in A$ e $\omega(a) = 1$. Isto será provado na próxima seção.

Exemplo 1. Definamos em A uma multiplicação cuja tabua é $c_i^2 = c_i$ para todo $i \geq 0$, os outros produtos sendo zero. Então (A, ω) é uma álgebra bária que possui um único E -ideal, ou seja, para todo train polinômio $p(x)$, $E_A(p) = N = \ker \omega = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$. Com efeito, já sabemos de (3.7) que $E_A(p) \subseteq N$. Sejam agora $i \geq 1$, $a = c_0 + \alpha c_i$ onde $\alpha \in F$. Temos $\omega(a) = 1$. Então suas potências principais são dadas por $a^k = c_0 + \alpha^k c_i$, conforme se prova facilmente por indução e daí resulta que

$$\begin{aligned} p(a) &= a^n + \gamma_1 a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} a \\ &= (c_0 + \alpha^n c_i) + \gamma_1 (c_0 + \alpha^{n-1} c_i) + \dots + \gamma_{n-1} (c_0 + \alpha c_i) \\ &= (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}) c_0 + (\alpha^n + \gamma_1 \alpha^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \alpha) c_i = p(\alpha) c_i \end{aligned}$$

Se escolhermos $\alpha \in F$ tal que $p(\alpha) \neq 0$ (o que é possível pois F é infinito) temos $c_i = p(\alpha)^{-1} p(a) \in E_A(p)$. Assim, o E -ideal $E_A(p)$ contém todos os c_i , $i \geq 1$, logo $E_A(p) = N$.

A razão desta *pobreza* em E -ideais reside no fato de todos os vetores da base de A serem idempotentes e as train álgebras devem conter elementos nilpotentes.

Exemplo 2. No mesmo espaço vetorial A definimos uma nova multiplicação por $c_i^2 = c_i$ para todo $0 \leq i \leq r$, para algum r fixo tal que $0 \leq r < \infty$, os outros produtos sendo zero. Neste caso também ω é um homomorfismo não nulo. A álgebra bária (A, ω) possui dois E -ideais distintos, um de dimensão infinita (N) e outro de dimensão r (N^2). Observemos, em primeiro lugar que sendo $N = \ker \omega = \langle c_1, \dots, c_i, \dots \rangle$ então $N^2 = \langle c_1, \dots, c_r \rangle$. Seja $a = c_0 + \sum_i \alpha_i c_i$ um elemento arbitrário de A de peso 1 onde os α_i são quase todos nulos. É claro que as potências principais a^k , $k \geq 2$, de a são dadas por $a^k = c_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i^k c_i$ (prova por indução), logo

$$\begin{aligned} p(a) &= (c_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i^n c_i) + \gamma_1 (c_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i^{n-1} c_i) + \dots + \gamma_{n-1} (c_0 + \sum_{i \geq 1} \alpha_i c_i) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^n c_i + \gamma_1 \sum_{i=1}^r \alpha_i^{n-1} c_i + \dots + \gamma_{n-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i c_i + \gamma_{n-1} \sum_{i \geq r+1} \alpha_i c_i \\ &= \sum_{i=1}^r (\alpha_i^n + \gamma_1 \alpha_i^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \alpha_i) c_i + \gamma_{n-1} \sum_{i \geq r+1} \alpha_i c_i \\ &= \sum_{i=1}^r p(\alpha_i) c_i + \gamma_{n-1} \sum_{i \geq r+1} \alpha_i c_i \end{aligned}$$

Assim temos que $p(a) \in N^2$ se $\gamma_{n-1} = 0$, $p(a) \in N - N^2$ se $\gamma_{n-1} \neq 0$ e algum $\alpha_i \neq 0$ para $i \geq r+1$. Como a deve variar em A , temos $E_A(p) \subseteq N^2$ se $\gamma_{n-1} = 0$ mas $E_A(p) \not\subseteq N^2$ se $\gamma_{n-1} \neq 0$. Suponhamos $\gamma_{n-1} = 0$. Para cada $i = 1, \dots, r$, consideremos o elemento $a = c_0 + \alpha c_i$ em A onde $\alpha \in F$ é escolhido de modo que $p(\alpha) \neq 0$. Como as potências principais deste elemento a são dadas por $a^k = c_0 + \alpha^k c_i$, resulta que

$$p(a) = (\alpha^n + \gamma_1 \alpha^{n-1} + \dots + \gamma_{n-2} \alpha^2) c_i = p(\alpha) c_i \neq 0$$

e assim o E -ideal $E_A(p)$ contem os elementos $c_1, \dots, c_r$, logo $E_A(p) = N^2$. Seja $\gamma_{n-1} \neq 0$ e consideremos para cada $i = 1, \dots, r$ o elemento $a = c_0 + \alpha c_i$ onde α não é raiz de $p(x)$. Então $p(a) = p(\alpha) c_i$ e daí segue que $E_A(p)$ contem os elementos $c_1, \dots, c_r$. A seguir, tomemos para cada $j \geq r+1$ o elemento $b = c_0 + c_j$. As potências principais de b são dadas por $b^k = c_0$, $k \geq 2$, de onde vem que $p(b) = (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}) c_0 + \gamma_{n-1} c_j = \gamma_{n-1} c_j$ é um elemento em $E_A(p)$, e como $\gamma_{n-1} \neq 0$ resulta que cada c_j pertence a $E_A(p)$ ou seja $E_A(p) = N$.

Exemplo 3. Fixemos uma sequência $\sigma = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ de elementos distintos dois a dois de F , com $t_0 = 1$ e definamos uma multiplicação em A por: $c_0 c_i = t_i c_i$ para todo $i \geq 0$, os outros produtos sendo zero. Neste caso também ω é um homomorfismo não nulo. Notemos que $N^2 = (\ker \omega)^2 = 0$ portanto todo subespaço de N é um ideal em N . Além disso, todo subespaço gerado por um subconjunto dos $\{c_i\}$, $i \geq 1$, é invariante pelo operador linear R_{c_0} (multiplicação por c_0), sendo assim um ideal de A . Seja $a = c_0 + \sum_i \alpha_i c_i$ (soma finita) um elemento qualquer de A de peso 1. Como $a^2 = c_0 + \sum_i 2\alpha_i t_i c_i$ então $a^2 - a = \sum_i (2t_i - 1)\alpha_i c_i$. Estudemos os seguintes casos:

a) Todos os t_i ($i \geq 1$) são iguais a $\frac{1}{2}$. Temos então que $a^2 - a = 0$. Assim $E_A(1, -1) = 0$, isto é, A é a "versão infinita" da álgebra gamética da herança Mendeliana simples.

b) Existem infinitos $t_i = \frac{1}{2}$ e um número finito de $t_i \neq \frac{1}{2}$. Seja $t_{i_k} \neq \frac{1}{2}$, $k = 1, \dots, r$. Da fórmula para $a^2 - a$ acima, obtemos $a^2 - a = \sum_{k=1}^r (2t_{i_k} - 1)\alpha_{i_k} c_{i_k}$, de onde é fácil ver que $E_A(1, -1) = \langle c_{i_1}, \dots, c_{i_r} \rangle$. Para calcular os demais E -ideais multiplicamos (acima) por a e por t_{i_l} e subtraindo, temos:

$$(a^2 - a)a - (a^2 - a)t_{i_l} = (a^2 - a)(a - t_{i_l}) = \sum_{k=1}^r (2t_{i_k} - 1)(t_{i_k} - t_{i_l})\alpha_{i_k} c_{i_k}$$

Sendo $p_l(x) = x(x-1)(x-t_{i_l})$ é fácil provar que $E_A(p_l) = \langle c_{i_1}, \dots, \hat{c}_{i_l}, \dots, c_{i_r} \rangle$. Recursivamente temos que se $p_{i_{j_1}, \dots, i_{j_s}}(x) = x(x-1)(x-t_{i_{j_1}}) \dots (x-t_{i_{j_s}})$, então $E_A(p_{i_{j_1}, \dots, i_{j_s}}) = \langle c_{i_1}, \dots, \hat{c}_{i_{j_1}}, \dots, \hat{c}_{i_{j_s}}, \dots, c_{i_r} \rangle$ para $1 \leq j_1, \dots, j_s \leq r$; em particular $E_A(p_{i_1, \dots, i_r}) = \{0\}$. Assim temos neste caso que (A, ω) é uma train álgebra de posto ≥ 3 . E por um resultado que será provado mais adiante (Teorema 4.1), estes são todos os E -ideais de A , isto é, A possui 2^r E -ideais.

c) Existem infinitos $t_i = \frac{1}{2}$ e infinitos $t_i \neq \frac{1}{2}$. Consideremos as sequências $\mathcal{N} = \{n_i : t_{n_i} = \frac{1}{2}\}$ e $\mathcal{M} = \{m_i : t_{m_i} \neq \frac{1}{2}\}$. Da fórmula de $a^2 - a$ acima temos que

$$a^2 - a = \sum_{i \in \mathcal{M}} (2t_{m_i} - 1)\alpha_{m_i} c_{m_i}$$

e é fácil ver que $E_A(1, -1) = \langle c_{m_1}, c_{m_2}, \dots \rangle$. Se multiplicamos a expressão acima por a e por t_{m_j} e subtraindo resulta

$$(a^2 - a)a - (a^2 - a)t_{m_j} = (a^2 - a)(a - t_{m_j}) = \sum_{i \in \mathcal{M}} (2t_{m_i} - 1)(t_{m_i} - t_{m_j})\alpha_{m_i} c_{m_i}.$$

Sendo $p_j(x) = x(x-1)(x-t_{m_j})$, é fácil provar que $E_A(p_j) = \langle c_{m_1}, \dots, \hat{c}_{m_j}, \dots \rangle$ para todo $j \neq i$. Recursivamente, se $p_{j_1 \dots j_s}(x)$ é o polinômio $x(x-1)(x-t_{m_{j_1}}) \dots (x-t_{m_{j_s}})$ temos que $E_A(p_{j_1 \dots j_s}) = \langle c_{m_1}, \dots, \hat{c}_{m_{j_1}}, \dots, \hat{c}_{m_{j_s}}, \dots \rangle$. Neste caso A tem infinitos E -ideais.

d) Existem um número finito de $t_i = \frac{1}{2}$ e infinitos $t_i \neq \frac{1}{2}$. Suponhamos $\mathcal{M} = \{m_i : t_{m_i} \neq \frac{1}{2}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Então procedemos como no caso c).

e) Todos os $t_i \neq \frac{1}{2}$. Aqui $\mathcal{M} = \mathbb{N}$ e procedemos como no caso c).

Exemplo 4. Definamos agora sobre A o produto $c_i c_j = t_{i+j} c_{i+j}$ onde os escalares t_k são elementos num corpo ordenado F e $1 = t_0 > t_1 = \frac{1}{2} > \dots > t_m > \dots$. Esta álgebra pode ser considerada como uma generalização da álgebra de poliploides $G(2, 2m)$ para dimensão infinita. Provaremos que esta álgebra básica possui infinitos E -ideais, porém não somos capazes de calcular todos eles. Consideremos os train polinômios $p_1, p_2, \dots, p_n$ onde $p_1(X) = X(X-1)$, $p_2(X) = X(X-1)(X-t_2)$, $\dots$, $p_n(X) = p_{n-1}(X)(X-t_n)$.

Vamos provar por indução sobre n que $E_A(p_n) = \langle c_{n+1}, c_{n+2}, \dots \rangle$. Seja $x = c_0 + \sum_i \alpha_i c_i$ onde $c_k \neq 0$ e $c_j = 0$, $j > k$ um elemento arbitrário de peso 1. Então $x^2 = c_0 + \sum_{i=1}^k 2\alpha_i t_i c_i + \sum_{i=1}^{2k} (\sum_{j=1}^i \alpha_{i-j} \alpha_j) t_i c_i$ logo $x^2 - x = \sum_{i=2}^{2k} \beta_i c_i$ onde $\beta_i = \alpha_i(2t_i - 1) + \sum_{j=1}^i \alpha_i \alpha_j$ se $2 \leq i \leq k$ e $\beta_i = \sum_{j=1}^i \alpha_i \alpha_j$ se $k+1 \leq i \leq 2k$. Assim temos que $E_A(p_1) \subseteq \langle c_2, c_3, \dots \rangle$.

Para provar a inclusão inversa, consideremos os elementos $a(\lambda, i) = c_0 + \lambda c_i$ onde $i \geq 2$ é fixado e $\lambda \in F$. Então $a(\lambda, i)^2 = c_0 + 2\lambda t_i c_i + \lambda^2 t_{2i} c_{2i}$ de onde $a(\lambda, i)^2 - a(\lambda, i) = \lambda(2t_i - 1) + \lambda^2 t_{2i} c_{2i}$ é um elemento em $E_A(p_1)$. Tomando $\lambda = 1$ e depois $\lambda = -1$, temos $(a(1, i)^2 - a(1, i)) - (a(-1, i)^2 - a(-1, i)) = 2(2t_i - 1)c_i \in E_A(p_1)$ e como $2t_i - 1 \neq 0$ para todo $i \geq 2$, resulta que $c_i \in E_A(p_1)$ para todo $i \geq 2$. Assim temos que $E_A(p_1) = \langle c_2, c_3, \dots \rangle$. Assim a afirmação acima foi provada para $n = 1$. Suponhamos agora já provado que $E_A(p_n) = \langle c_{n+1}, c_{n+2}, \dots \rangle$. Então $p_n(x) = \sum_{i=n+1}^s \gamma_i c_i$ e logo temos

$$p_n(x)x - p_n(x)t_{n+1} = p_n(x)(x - t_{n+1}) = \sum_{i=n+2}^{s+k} \eta_i c_i \text{ onde } \eta_i = \gamma_i(t_i - t_{n+1}) + \sum_{j=1}^i \alpha_{i-j} \gamma_j t_i \text{ se}$$

$n+2 \leq i \leq s$, e $\eta_i = \sum_{j=1}^i \alpha_{i-j} \gamma_j t_i$ se $s+1 \leq i \leq s+k$, isto é, $p_{n+1}(x) = p_n(x)(x - t_{n+1}) \in \langle c_{n+2}, \dots \rangle$, assim $E_A(p_{n+1}) \subseteq \langle c_{n+2}, \dots \rangle$. Por outro lado, para cada $\lambda \in F$ e $i > n+1$, consideremos o elemento $a_\lambda = c_0 + \lambda c_i$. Então $a_\lambda^2 = c_0 + 2\lambda t_i c_i + \lambda^2 t_{2i} c_{2i}$, logo

$a_\lambda^2 - a_\lambda = \lambda(2t_i - 1)c_i + \lambda^2 t_{2i} c_{2i}$ e $(a_\lambda^2 - a_\lambda)a_\lambda = \lambda(2t_i - 1)t_i c_i + \lambda^2 t_{2i}^2(2t_i - 1)t_{2i} c_{2i} + \lambda^3 t_{2i} t_{3i} c_{3i}$ logo $(a_\lambda^2 - a_\lambda)(a_\lambda - t_2) = \lambda(2t_i - 1)(t_i - t_2)c_i + \lambda^2 \beta_{2i}^{(3)} c_{2i} + \lambda^3 \beta_{3i}^{(3)} c_{3i}$ e indutivamente temos que $(a_\lambda^2 - a_\lambda)(a_\lambda - t_2) \dots (a_\lambda - t_{n+1}) = \lambda(2t_i - 1)(t_i - t_2) \dots (t_i - t_{n+1})c_i + \lambda^2 \beta_{2i}^{(n+2)} c_{2i} + \dots + \lambda^{n+2} \beta_{n+2}^{(n+2)} c_{(n+2)i}$ Agora, se escolhemos $n + 2$ λ 's distintos temos um sistema de Vandermonde o que implica em particular que $(2t_i - 1)(t_i - t_2) \dots (t_i - t_{n+1})c_i \in E_A(p_{n+1})$ e como $t_i \neq t_j$ para todo $i > n + 1$ resulta que $c_i \in E_A(p_{n+1})$ de onde $E_A(p_{n+1}) = \langle c_{n+2}, \dots \rangle$.

Observação: Estes exemplos ilustram várias possibilidades que podem acontecer no estudo de E -ideais em álgebras bárias. Nos capítulos seguintes estaremos preocupados em estudar E -ideais de álgebras bárias satisfazendo alguma condição de finitude, o que acarreta a finitude do conjunto $\mathcal{E}_A$. A condição de finitude é representada, em geral, por uma equação envolvendo potências principais ou plenas.

3.3 Propriedades dos E -ideais

Vamos estabelecer neste parágrafo algumas propriedades gerais da classe dos E -ideais para uma álgebra bária A , sobre a qual nenhuma condição adicional é imposta. Nos capítulos seguintes, aprofundaremos estes resultados, impondo condições adicionais de caráter finito sobre A .

Proposição 3.1 *Para toda álgebra bária (A, ω) e qualquer train polinômio $p(x)$, $E_A(p) \subseteq E_A(1, -1)$, isto é, o conjunto (parcialmente ordenado por inclusão) $\mathcal{E}_A$ dos E -ideais de A possui um elemento máximo, a saber, o ideal P de Etherington de A .*

Demonstração: Consideremos os train polinômios $p_{n,k} = p_{n,k}(x) = x^n - \omega(x)^{n-k} x^k$, $(1 \leq k \leq n - 1)$. Para cada train polinômio $p(x)$ como em (3.1) e $a \in A$, temos:

$$\begin{aligned} p(a) &= a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a \\ &= a^n - (1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}) \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a \\ &= (a^n - \omega(a) a^{n-1}) - \gamma_2 \omega(a) (a^{n-1} - \omega(a) a^{n-2}) - \dots \\ &\quad - \gamma_{n-1} \omega(a) (a^{n-1} - \omega(a)^{n-2} a) \\ &\in E_A(p_{n,n-1}) + E_A(p_{n-1,n-2}) + \dots + E_A(p_{n-1,1}) \end{aligned}$$

e isto implica que

$$E_A(p) \subseteq E_A(p_{n,n-1}) + \sum_{k=1}^{n-2} E_A(p_{n-1,k}) \quad (3.8)$$

pois os elementos $p(a)$, $a \in A$, geram $E_A(p)$. Analogamente, para cada $k = 1, \dots, n-2$

$$E_A(p_{n-1,k}) \subseteq E_A(p_{n-1,n-2}) + \sum_{r=1}^{n-3} E_A(p_{n-2,r}),$$

que é uma consequência de (3.8). Depois de $n-2$ repetições deste processo de desmembramento, concluímos que $E_A(p) \subseteq \sum_{k=2}^n E_A(p_{k,k-1})$. Mas, cada um dos E -ideais $E_A(p_{k,k-1})$ está contido em $E_A(1, -1)$ uma vez que seus geradores $a^k - \omega(a)a^{k-1}$ podem ser escritos como $a^k - \omega(a)a^{k-1} = (\dots(a^2 - \omega(a)a)\dots)a$, de onde se conclui que pertencem a $E_A(1, -1)$. ■

Nas próximas proposições, estudaremos o problema de achar sistemas de geradores menores para $E_A(p)$. Denotemos $E_A^1(p)$ o ideal de A gerado pelos elementos $p(a)$ com $a \in A$ e $\omega(a) = 1$. É claro que $E_A^1(p) \subseteq E_A(p)$. De maneira similar, $E_A^0(p)$, o ideal gerado por todos os elementos $p(a)$ com $a \in A$ e $\omega(a) = 0$, está contido em $E_A(p)$. Segue daí que $E_A^0(p) + E_A^1(p) \subseteq E_A(p)$.

Lema 3.1 *Para toda álgebra bária (A, ω) sobre um corpo F e todo train polinômio $p = p(x)$ como em (3.1), temos $E_A^0(p) + E_A^1(p) = E_A(p)$.*

Demonstração: Seja $p(a) = a^n + \gamma_1 \omega(a)a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1}a$, com $a \in A$, um gerador de $E_A(p)$. Se $\omega(a) = 0$, então $p(a) = a^n \in E_A^0(p)$. Se $\omega(a) \neq 0$, então podemos escrever

$$p(a) = \omega(a)^n \left(\left(\frac{a}{\omega(a)} \right)^n + \gamma_1 \left(\frac{a}{\omega(a)} \right)^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \left(\frac{a}{\omega(a)} \right) \right) = \omega(a)^n p(b)$$

onde $b = \frac{a}{\omega(a)}$ tem peso 1 e isto quer dizer que $p(a) \in E_A^1(p)$.

Assim $E_A(p) \subseteq E_A^0(p) + E_A^1(p)$ e portanto $E_A^0(p) + E_A^1(p) = E_A(p)$. ■

Lema 3.2 *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.1, e supondo F um corpo infinito, temos $E_A^0(p) \subseteq E_A^1(p)$.*

Demonstração: Os geradores de $E_A^0(p)$ são os elementos b^n , com $\omega(b) = 0$. Fixado um destes geradores b^n , consideremos a família de elementos $a_\lambda \in A$ dados por $a_\lambda = e + \lambda b$,

onde $\lambda \in F$ e e tem peso 1. Temos $\omega(a_\lambda) = 1$ e consequentemente $p(a_\lambda) \in E_A^1(p)$. Mas,

$$\begin{aligned} p(a_\lambda) &= \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (e + \lambda b)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} id^{(n-i)}(e^{(n-i-k)}, (\lambda b)^{(k)}) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \binom{n}{k} id^{(n)}(e^{(n-k)}, b^{(k)}) \\ &+ \gamma_1 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \binom{n-1}{k} id^{(n-1)}(e^{(n-k-1)}, b^{(k)}) + \dots + \gamma_{n-1} \sum_{k=0}^1 \lambda^k \binom{1}{k} id^{(1)}(e^{(1-k)}, b^{(k)}) \\ &= c_0 + \lambda c_1 + \dots + \lambda^n c_n, \end{aligned}$$

onde $c_k = \sum_{j=0}^{n-k} \gamma_j \binom{n-j}{k} id^{(n-j)}(e^{(n-j-k)}, b^{(k)})$ para $k = 1, \dots, n$. Em particular, $c_n = b^n$ e $c_0 = 0$. Assim para todo $\lambda \in F$, $\lambda c_1 + \dots + \lambda^n b^n \in E_A^1(p)$. Escolhendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ todos distintos então $\lambda_i c_1 + \dots + \lambda_i^n b^n$ ($i = 1, \dots, n$) são elementos que pertencem ao ideal $E_A^1(p)$, e como estes diferentes λ_i produzem um sistema de Vandermonde, concluímos que cada c_i , $i = 1, \dots, n$, pertence ao ideal $E_A^1(p)$. Em particular, $b^n \in E_A^1(p)$, isto é, $E_A^0(p) \subseteq E_A^1(p)$. ■

Proposição 3.2 *Para toda álgebra bária (A, ω) sobre um corpo infinito F e todo trinômio $p = p(x)$ como em (3.1) vale a igualdade $E_A(p) = E_A^1(p)$.*

Demonstração: É uma consequência imediata dos Lemas 3.1 e 3.2. ■

De agora em diante, suporemos sempre que F é infinito de modo que vale a Proposição 3.2.

Mostraremos em seguida que $E_A(p)$ pode ser gerado também pelos valores assumidos pela linearização completa de $p(x)$. Para isto lançaremos mão de um resultado de [18].

Lembremos que $\mu = id_A^{(n)} + \gamma_1(\omega, id_A^{(n-1)}) + \dots + \gamma_{n-1}(\omega^{(n-1)}, id_A)$ é chamada a linearização completa de $p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x$, onde as funções $(\omega^{(j)}, id_A^{(n-j)}): A \oplus \dots \oplus A \rightarrow A$, para $0 \leq j \leq n-1$, que são multilineares, foram definidas em [18]. Ver também Seção 1.5.

Lema 3.3 ([18, Cap 5 Th 1]) *Para uma álgebra bária qualquer (A, ω) as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) (A, ω) satisfaz identicamente $a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a = 0$.
- (ii) $\mu = id_A^{(n)} + \gamma_1(\omega, id_A^{(n-1)}) + \dots + \gamma_{n-1}(\omega^{(n-1)}, id_A) = 0$ identicamente em $A \oplus \dots \oplus A$.

Proposição 3.3 *Seja (A, ω) uma álgebra bária e seja o train polinômio $p = p(x)$ dado em (3.1). Então o ideal $E_A(p)$ é gerado pelos valores $\mu(a_1, \dots, a_n)$ onde os elementos a_i variam em A .*

Demonstração: Para cada $a \in A$, $\mu(a^{(n)}) = id_A^{(n)}(a^{(n)}) + \gamma_1(\omega, id_A^{(n-1)})(a^{(n)}) + \dots + \gamma_{n-1}(\omega^{(n-1)}, id_A)(a^{(n)}) = a^n + \gamma_1\omega(a)a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}\omega(a)^{n-1}a = p(a)$, assim cada gerador de $E_A(p)$ pertence ao ideal gerado pelos valores de μ em $A \oplus \dots \oplus A$. Por outro lado, consideremos a álgebra quociente $\bar{A} = A/E_A(p)$ com sua função peso $\bar{\omega}$ definida por $\bar{\omega}(a + E_A(p)) = \omega(a)$. Esta álgebra satisfaz o train polinômio $\bar{p}(x) = x^n + \gamma_1\bar{\omega}(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}\bar{\omega}(x)^{n-1}x$ e pelo Lema 3.3, temos $\bar{\mu}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$ em $\bar{A} \oplus \dots \oplus \bar{A}$. Isto mostra que $\mu(a_1, \dots, a_n) \in E_A(p)$. ■

Corolário 3.1 *Se (A, ω) é uma álgebra bária de dimensão finita e $p(x)$ é um train polinômio, então o E -ideal $E_A(p)$ é gerado pelos valores $\mu(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n})$ onde $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ e $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}$ são escolhidos de uma base de A .*

3.4 E -ideais em classes fechadas

O objetivo principal desta seção é reduzir o cálculo de E -ideais apenas para álgebras que são indecomponíveis.

Proposição 3.4 *Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) duas álgebras báricas, $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ um homomorfismo bário e $p(x)$ um train polinômio como em (3.1). Então $\varphi(E_{A_1}(p)) = E_{\varphi(A_1)}(p) \subseteq E_{A_2}(p)$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que φ leva geradores de $\varphi(E_{A_1}(p))$ em geradores de $E_{A_2}(p)$. Como φ é um homomorfismo bário então $\omega_2 \circ \varphi = \omega_1$. Se a é um elemento arbitrário em A_1 de peso 1 então

$$\varphi(p(a)) = \varphi(a^n + \gamma_1 a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} a) = \varphi(a)^n + \gamma_1 \varphi(a)^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \varphi(a) = p(\varphi(a))$$

que é um elemento em $E_{A_2}(p)$, assim $\varphi(E_{A_1}(p)) \subseteq E_{A_2}(p)$. ■

Corolário 3.2 *Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.4, se φ é sobrejetor, então $\varphi(E_{A_1}(p)) = E_{A_2}(p)$.*

Corolário 3.3 Com as mesmas hipóteses do corolário 3.2, se A_1 satisfaz a train equação $p(x) = 0$ de grau n , então A_2 satisfaz um train polinômio de grau $\leq n$.

Corolário 3.4 Sejam (A, ω) uma álgebra bárica, A^D sua duplicada comutativa e $p(x)$ um train polinômio. Então $\mu(E_{A^D}(p)) = E_{A^2}(p)$, onde $\mu: A^D \rightarrow A^2$ é o único homomorfismo de álgebras báricas que leva um gerador $x.y$ de A^D em xy de A^2 .

Proposição 3.5 Seja (A, ω) uma álgebra bárica, B subálgebra bárica de A , I um ideal de A contido em $\ker \omega$. Então

$$i) \quad E_B(p) \subseteq E_A(p)$$

$$ii) \quad (E_A(p) + I)/I = E_{A/I}(p)$$

Demonstração: i) É só considerar, na Proposição 3.4, $\varphi = i$, a inclusão de B em A .

ii) Seja o homomorfismo canônico $\pi: A \rightarrow A/I$ então $(E_A(p) + I)/I = \pi(E_A(p) + I) = \pi(E_A(p))$ e $\pi(E_A(p)) = E_{A/I}(p)$. ■

Proposição 3.6 Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) duas álgebras báricas comutativas com idempotentes de peso 1 e $p(x)$ o train polinômio como em (3.1).

$$\text{Então } E_{A_1 \vee A_2}(p) = E_{A_1}(p) \oplus E_{A_2}(p)$$

Demonstração: Temos que $A_1 \vee A_2 = Fe \oplus N_1 \oplus N_2$, onde $N_i = \ker \omega_i$, $i = 1, 2$. Consideremos as projeções canônicas $\varphi_0: A_1 \vee A_2 \rightarrow Fe$ e $\varphi_i: A_1 \vee A_2 \rightarrow A_i$, $i = 1, 2$, definidas por $\varphi_0(\alpha e + u + v) = \alpha e$, $\varphi_1(\alpha e + u + v) = \alpha e + u$ e $\varphi_2(\alpha e + u + v) = \alpha e + v$ onde $\alpha \in F$, $u \in N_1$, $v \in N_2$. Estas projeções canônicas são homomorfismos báricos, isto é, os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc} A_1 \vee A_2 & \xrightarrow{\varphi_0} & Fe \cong F \\ \omega_1 \vee \omega_2 \searrow & & \swarrow id_F \\ & F & \end{array}$$

e para $i = 1, 2$

$$\begin{array}{ccc} A_1 \vee A_2 & \xrightarrow{\varphi_i} & A_i \\ \omega_1 \vee \omega_2 \searrow & & \swarrow \omega_i \\ & F & \end{array}$$

isto é, $id_F \circ \varphi_0 = \omega_1 \vee \omega_2$ e $\omega_i \circ \varphi_i = \omega_1 \vee \omega_2$. Assim, dado $a = \alpha e + u + v \in A_1 \vee A_2$, então $a = -\alpha e + (\alpha e + u) + (\alpha e + v) = (-\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2)(a)$ ou equivalentemente $-\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = id_A$. Agora provaremos que todo gerador $p(a)$ de $E_{A_1 \vee A_2}(p)$ pertence ao ideal $E_{A_1}(p) \oplus E_{A_2}(p)$. Como $p(a) = (-\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2)(p(a))$, temos para cada elemento $a \in A_1 \vee A_2$ de peso 1,

$$\begin{aligned}
p(a) &= (-\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2)(p(a)) \\
&= (-\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2)(a^n + \gamma_1 a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} a) \\
&= -(\varphi_0(a)^n + \gamma_1 \varphi_0(a)^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \varphi_0(a)) + (\varphi_1(a)^n + \gamma_1 \varphi_1(a)^{n-1} \\
&\quad + \dots + \gamma_{n-1} \varphi_1(a)) + (\varphi_2(a)^n + \gamma_1 \varphi_2(a)^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \varphi_2(a)) \\
&= -\varphi_0(a)^n (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}) + (\varphi_1(a)^n + \gamma_1 \varphi_1(a)^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \varphi_1(a)) \\
&\quad + (\varphi_2(a)^n + \gamma_1 \varphi_2(a)^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \varphi_2(a)) \\
&= p(\varphi_1(a)) + p(\varphi_2(a))
\end{aligned}$$

que é um elemento em $E_{A_1}(p) \oplus E_{A_2}(p)$, logo $E_{A_1 \vee A_2}(p) \subseteq E_{A_1}(p) \oplus E_{A_2}(p)$. Por outro lado, como A_1 e A_2 são subálgebras báricas de $A_1 \vee A_2$, pela Proposição 3.5 i), temos que $E_{A_i}(p) \subseteq E_{A_1 \vee A_2}(p)$ para $i = 1, 2$ e assim $E_{A_1}(p) \oplus E_{A_2}(p) \subseteq E_{A_1 \vee A_2}(p)$ e finalmente $E_{A_1}(p) \oplus E_{A_2}(p) = E_{A_1 \vee A_2}(p)$. Observemos que a soma é direta porque $E_{A_i}(p) \subseteq N_i$ para $i = 1, 2$ e $N_1 \cap N_2 = 0$. ■

Corolário 3.5 *Se (A, ω) é uma álgebra em uma classe fechada Ω que satisfaz c.c.a. e c.c.d., então $E_A(p) = \bigoplus_i E_{A_i}(p)$ onde A_i são álgebras indecomponíveis em Ω .*

Demonstração: Conforme [18, Cap 3 Prop 1], existe um único conjunto finito de álgebras báricas indecomponíveis $(A_1, \omega_1), \dots, (A_m, \omega_m)$ tais que $(A, \omega) \cong (A_1 \vee \dots \vee A_m, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_m)$. Usando a Proposição 3.6 temos que $E_A(p) = \bigoplus_{i=1}^m E_{A_i}(p)$. Observemos que a decomposição de (A, ω) como join de álgebras indecomponíveis é única, a menos de isomorfismo, devido ao teorema de Krull-Schmidt para álgebras báricas. [18, Cap 3 Th 3]. Veja Seção 1.4. ■

Este corolário, combinado com os resultados de [18], reduz o cálculo de E -ideais em muitas das classes importantes de álgebras báricas, ao cálculo de E -ideais para álgebras indecomponíveis. No entanto esta redução ainda é um problema muito difícil, pois o cálculo de indecomponíveis tem-se mostrado um problema difícil.

3.5 Intersecção e soma de E -ideais

Nesta seção usaremos os resultados do capítulo 2, referentes aos train polinômios.

Proposição 3.7 *Se (A, ω) é uma álgebra bária e $p(x)$ e $q(x)$ são train polinômios tais que $p(x)$ divide $q(x)$, então $E_A(q) \subseteq E_A(p)$.*

Demonstração: Por hipótese existe um polinômio $f(X) \in F[X]$ tal que $q(x) = (pf)_t(x)$ que é um elemento de $E_A(p)$ de acordo com (2.3) e portanto $E_A(q) \subseteq E_A(p)$. ■

Corolário 3.6 $E_A(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, 0) \subseteq E_A(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$, para toda álgebra bária A .

Proposição 3.8 *Sejam (A, ω) uma álgebra bária, $p(x)$, $q(x)$ train polinômios e $r(x)$ o mínimo múltiplo comum de $p(x)$ e $q(x)$. Então $E_A(r) \subseteq E_A(p) \cap E_A(q)$.*

Demonstração: Como $r(x) = m.m.c.(p(x), q(x))$, então $p(x)$ divide $q(x)$ e $q(x)$ divide $r(x)$. Pela Proposição 3.7 temos que $E_A(r) \subseteq E_A(p)$ e $E_A(r) \subseteq E_A(q)$ e assim $E_A(r) \subseteq E_A(p) \cap E_A(q)$. ■

Observemos que a intersecção de E -ideais não é em geral um E -ideal. Com efeito, os únicos E -ideais de uma train álgebra A de posto 4 satisfazendo a train equação

$$x^4 - (1 + r + s)\omega(x)x^3 + (r + s + rs)\omega(x)^2x^2 - rs\omega(x)^3x = 0$$

($r, s, \frac{1}{2}$ distintos) com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_r \oplus A_s$ com $A_{\frac{1}{2}} = 0$ são: o ideal zero, $A_r \oplus A_r^2$, $A_s^2 \oplus A_s$ e $A_r \oplus A_s$, mas $(A_r \oplus A_r^2) \cap (A_s^2 \oplus A_s) = A_s^2 \oplus A_r^2$ como será provado na seção 4.4.

Proposição 3.9 *Sejam (A, ω) uma álgebra bária, $p(x)$, $q(x)$ train polinômios e $r(x)$ o máximo divisor comum de $p(x)$ e $q(x)$. Então $E_A(r) = E_A(p) + E_A(q)$.*

Demonstração: Por hipótese existem polinômios $f(X)$ e $g(X)$ em $F[X]$ tais que $r(x) = (pf)_t(x) + (qg)_t(x)$ e portanto para todo $a \in A$, $r(a) = (pf)_t(a) + (qg)_t(a)$, que é um elemento em $E_A(p) + E_A(q)$ devido a (2.3) de onde $E_A(r) \subseteq E_A(p) + E_A(q)$. Por outro lado, sendo $r(x)$ um divisor de $p(x)$ e de $q(x)$, segue da Proposição 3.7 que $E_A(p) \subseteq E_A(r)$ e $E_A(q) \subseteq E_A(r)$ e portanto também sua soma está contida em $E_A(r)$. ■

Corolário 3.7 (Etherington, caso $Q_\lambda + Q_\mu = P$) Em qualquer álgebra bária (A, ω) temos $E_A(1, -1) = E_A(p) + E_A(q)$ quando $m.d.c(p(X), q(X)) = X(X - 1)$.

As informações que temos até agora sobre os E -ideais permitem visualizar $\mathcal{E}_A$ mais ou menos assim:

Observe que $0 \in \mathcal{E}_A$ se e somente se A é uma train álgebra.

O estudo das propriedades deste conjunto $\mathcal{E}_A$ pode ser um bom instrumento para o conhecimento de algumas classes de álgebras báricas pois é em si um invariante de estrutura.

Uma questão se impõe: dada uma classe $\mathcal{C}$ de álgebras báricas (que supomos relevante na teoria das álgebras genéticas), quais são os conjuntos parcialmente ordenados com maior elemento que são isomorfos a algum $\mathcal{E}_A$, $A \in \mathcal{C}$? No próximo Capítulo trataremos em parte desta questão.

Por último sob que condições, dado um conjunto $\mathcal{X}$, parcialmente ordenado com maior elemento, existe uma classe de álgebras báricas Ω tais que $\mathcal{E}_A \cong \mathcal{X}$ para toda

$A \in \Omega$? Este problema inverso não será tratado aqui.

A seguir, estudamos uma propriedade do conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{E}_A$, ligado à igualdade $N = E_A(1, -1)$.

3.6 A igualdade $E_A(1, -1) = N$

Esta seção é dedicada ao estudo da seguinte questão. Sabemos que para toda álgebra bária A , $E_A(p) \subseteq N$, N sendo o núcleo da função peso. Sob quais condições teremos $E_A(1, -1) = \ker \omega = N$? Conforme já citamos anteriormente, Etherington já havia mostrado que em qualquer álgebra bária, $N^2 \subseteq E_A(1, -1) \subseteq N$. Assim, se $N^2 = N$ temos necessariamente $E_A(1, -1) = N$. A recíproca, em geral, é falsa. O seguinte exemplo ilustra isto. Consideremos a álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, onde $U_e = \langle e_1 \rangle$ e $Z_e = \langle e_2 \rangle$, e o produto é dado por $e^2 = e$; $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$; $e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1$, os outros produtos sendo zero. Aqui temos que $E_A(1, -1) = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle = N$ porém $N^2 = \langle e_1 \rangle$ está contido propriamente em N . Em algumas classes de álgebras bárias conhecemos bem o ideal $E_A(1, -1)$ e com isto é possível responder à pergunta acima (veja Seção 3.1).

1) Se $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ é uma álgebra de Bernstein, então

$$E_A(1, -1) = N \iff U_e Z_e + Z_e^2 = U_e$$

2) Se $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é uma train álgebra de posto 3, então

$$E_A(1, -1) = N \iff U_e V_e = U_e$$

3) Se $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra bária satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)^3 x$, então

$$E_A(1, -1) = N \iff U_e V_e = U_e$$

Um caso bastante geral onde se pode garantir a igualdade $N = E_A(1, -1)$ é dado pela próxima proposição. O operador L_e é definido por $L_e(x) = ex$.

Proposição 3.10 *Seja (A, ω) uma álgebra bária (possivelmente de dimensão infinita) que possui um idempotente e de peso 1 tal que o operador $L_e: N \rightarrow N$ satisfaz uma identidade polinomial $q(L_e) = 0$, onde as raízes de $q(t)$ estão em F , são simples e distintas de $\frac{1}{2}$. Então $N = E_A(1, -1)$.*

Demonstração: De (3.7) sabemos que $E_A(1, -1) \subseteq N$. Por resultados clássicos de Álgebra Linear temos que

$$N = N_{(1)} \oplus \dots \oplus N_{(s)}$$

onde

$$N_{(i)} = \{x \in N | (L_e - \alpha_i \text{id}_N)x = 0\}$$

e α_i são as raízes de $q(t)$. Se $a = e + n_i$, $n_i \in N_{(i)}$, então temos $en_i = \alpha_i n_i$ e portanto $a^2 - \omega(a)a = (2\alpha_i - 1)n_i + n_i^2$ é um elemento de $E_A(1, -1)$. Como $2\alpha_i - 1 \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, s$ e $n_i^2 \in E_A(1, -1)$, já que em geral $N^2 \subseteq E_A(1, -1)$, então $(2\alpha_i - 1)^{-1}[a^2 - \omega(a)a - n_i^2] = n_i \in E_A(1, -1)$ e assim $N_{(i)} \subseteq E_A(1, -1)$ e segue daí que $N = N_{(1)} \oplus \dots \oplus N_{(s)} \subseteq E_A(1, -1)$, logo $N = E_A(1, -1)$. ■

A recíproca é falsa em geral. Para isto consideremos o seguinte exemplo. Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ a álgebra de Bernstein de tipo $(2, 1)$, onde $U_e = \langle u \rangle$; $Z_e = \langle v \rangle$ e cuja multiplicação é dada por $e^2 = e$; $eu = \frac{1}{2}u$; $v^2 = \gamma u$ com $\gamma \in F$, $\gamma \neq 0$, os outros produtos sendo zero. O E -ideal $E_A(1, -1)$ é igual ao núcleo da álgebra, pois $E_A(1, -1) = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e = \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle = N$ mas o operador $L_e: N \rightarrow N$ é raiz do polinômio $q(t) = 2t^2 - t = t(2t - 1)$.

Mais geralmente, em toda álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $r \geq 1$ e tal que, na decomposição de Peirce, tenhamos $U_e Z_e = U_e$ ou $Z_e^2 = U_e$ teremos $N = E_A(1, -1)$ apesar de $\frac{1}{2}$ ser valor próprio de L_e .

Observação: A Prop. 3.10 não é muito eficiente no contexto das álgebras genéticas pois, em muitos casos importantes, $\frac{1}{2}$ é um valor próprio do operador L_e . Isto acontece, por exemplo, para todas as álgebras de Bernstein, com exceção de alguns casos triviais. Uma questão interessante é encontrar condições necessárias e suficientes sobre a álgebra A para que tenhamos $N = E_A(1, -1)$.

Capítulo 4

E -ideais em train álgebras

4.1 E -ideais

O objetivo deste capítulo é estudar algumas propriedades do conjunto $\mathcal{E}_A$ quando A é uma train álgebra. Relembramos que uma álgebra bária comutativa (A, ω) é uma train álgebra se existe um train polinômio $p(x)$ tal que $p(a) = 0$ para todo $a \in A$, o que equivale a dizer que $\{0\} \in \mathcal{E}_A$. Assim para uma train álgebra A , $\mathcal{E}_A$ tem um maior e também um menor elemento.

Relembramos, também, que se $p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x$ é um train polinômio com sua escritura mínima, então o polinômio $p(X) = X^n + \gamma_1 X^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} X$ em $F[X]$ é dito seu antecedente canônico.

Observemos que se $p(x)$ é um train polinômio, pela propriedade da decomposição única, vista no Capítulo 2, existem polinômios $p_{-1}(X) = X, p_0(X) = X - 1, p_1(X), \dots, p_k(X)$, irredutíveis em $F[X]$, tais que $p(x) = (p_{-1}^{i_{-1}} p_0^{i_0} p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k})_t(x)$, onde $i_{-1}, i_0 \geq 1$.

Se (A, ω) é uma álgebra bária qualquer, fica assim determinado um subconjunto de $\mathcal{E}_A$, denotado $\mathcal{E}_A(p)$, formado pelos E -ideais correspondentes aos divisores de $p(x)$. Assim se (A, ω) é uma train álgebra com train equação $p(x) = 0$ temos $\mathcal{E}_A(p) = \mathcal{E}_A$.

A proposição seguinte estabelece que no subconjunto $\mathcal{E}_A(p)$ de $\mathcal{E}_A$ de E -ideais de qualquer álgebra bária (A, ω) pode-se definir um anti-automorfismo de conjunto parcialmente ordenado, de ordem dois.

Proposição 4.1 *Se (A, ω) é uma álgebra bária sobre um corpo F , então para cada train polinômio $p(x)$ existe um anti-automorfismo $\tau: \mathcal{E}_A(p) \rightarrow \mathcal{E}_A(p)$ de ordem dois.*

Demonstração: Seja $p(X) = X(X-1)f(X)$ o antecedente canônico do train polinômio $p(x)$ sendo $f(X)$ um polinômio unitário em $F[X]$. Seja $f = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ a decomposição de f em fatores irredutíveis distintos em $F[X]$ (podendo ser eventualmente $p_i = p_{-1}$ ou $p_i = p_0$ para algum $i = 1, \dots, k$). Seja $g(X)$ um divisor qualquer de $f(X)$ em $F[X]$, isto é, existe um polinômio único $\bar{g}(X)$ em $F[X]$ tal que $f(X) = g(X)\bar{g}(X)$. Assim, os train polinômios $q(x) = (p_{-1}p_1g)_t(x)$, $\bar{q}(x) = (p_{-1}p_1\bar{g})_t(x)$ são divisores do train polinômio $p(x)$. Se definimos τ por $\tau(E_A(q)) = E_A(\bar{q})$, é claro que τ é bijetora e que satisfaz $\tau^2 = id$. Além disso, se q_1 e q_2 são divisores de p tal que q_1 divide q_2 , então da Proposição 3.7 temos $E_A(q_2) \subseteq E_A(q_1)$, resultando assim τ um anti-automorfismo de ordem dois no conjunto $\mathcal{E}_A(p)$. ■

Observação: Se (A, ω) é uma álgebra bária e $p(x)$ um train polinômio tal que $p(X) = X(X-1)(f(X))^2$, então τ tem um ponto fixo. Para isto, basta tomar o train polinômio $q(x) = (p_{-1}p_0f)_t(x)$ que é igual ao train polinômio $\bar{q}(x)$ e assim $\tau(E_A(q)) = E_A(q)$. O recíproco ainda é um problema aberto. Não podemos concluir diretamente de $E_A(\bar{q}) = E_A(q)$ que $\bar{q}(x) = q(x)$.

Corolário 4.1 *Se (A, ω) é uma train álgebra com train equação $p(x)$, então existe um anti-automorfismo τ de ordem dois em $\mathcal{E}_A$.*

Lema 4.1 *Seja (A, ω) uma train álgebra de posto n com train equação $p(x) = 0$ e seja $q(x)$ um train polinômio de grau $\geq n$. Então $E_A(q) = E_A(r)$ onde $r(x)$ é o train polinômio obtido de $r(X)$, que é o resto na divisão de $q(X)$ por $p(X)$.*

Demonstração: De acordo com o algoritmo da divisão em $F[X]$, existem e são únicos polinômios $f(X) \in F[X]$ e $r(X) \in U[X]$ tais que $q(X) = f(X)p(X) + r(X)$ e devido a (2.3) temos $q(x) = (fp)_t(x) + r(x) = \sum_j \alpha R_x^j p(x) + r(x) = r(x)$ para todo $x \in A$ o que acarreta $E_A(q) = E_A(r)$. ■

A partir do Lema 4.1, podemos nos preocupar apenas com os train polinômios de grau $\leq n$, onde n é o posto de A .

Teorema 4.1 *Seja (A, ω) uma train álgebra com train equação $p(x) = 0$ onde*

$$p(X) = X(X-1)f(X) \tag{4.1}$$

sendo $f(X)$ um polinômio unitário em $F[X]$. Seja $f = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ a decomposição de f em fatores primos distintos em $F[X]$. Então (A, ω) tem no máximo

$(1 + n_1)(1 + n_2) \dots (1 + n_k)$ E -ideais distintos, correspondentes aos train polinômios $(p_{-1}p_0p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k})_t(x)$ onde $0 \leq m_i \leq n_i$, $i = 1, \dots, k$, e onde $p_{-1}(X) = X$, $p_0(X) = X - 1$.

Demonstração: Pelo Lema 4.1 é suficiente considerar train polinômios $q(x)$ com grau $g(X) \leq \text{grau } p(X)$. Se $g(x)$ é um divisor de $p(x)$, então $g(x) = (p_{-1}p_0p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k})_t(x)$ com $0 \leq m_i \leq n_i$ ($i = 1, \dots, k$), obtendo-se assim os $(1 + n_1)(1 + n_2) \dots (1 + n_k)$ possíveis E -ideais $E_A(q)$. Se $q(x)$ não divide $p(x)$, então $m.d.c.(p(x), q(x)) = (p_{-1}p_0)_t(x) = x^2 - \omega(x)x$ e conseqüentemente pela Proposição 3.10, temos $E_A(1, -1) = E_A(p) + E_A(q)$. Sendo $E_A(p) = 0$ temos $E_A(q) = E_A(1, -1)$. Assim se $q(x)$ não divide $p(x)$, o train polinômio $q(x)$ é equivalente ao train polinômio $(p_{-1}p_0)_t(x)$ (que é obtido de $p(X)$ quando $n_1 = \dots = n_k = 0$). ■

O Teorema 4.1, embora tenha uma demonstração fácil, é bastante abrangente pois muitas classes de álgebras, relevantes na teoria das álgebras genéticas, são formadas por train álgebras. Por exemplo, as álgebras de Bernstein nucleares são train de posto 4.

Este teorema nos coloca o seguinte problema, cuja solução está estreitamente relacionada com o problema de classificação das train álgebras sobre um corpo F algebricamente fechado: dado um conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{A}$, contendo um maior e um menor elemento, encontrar, se possível, uma train álgebra A tal que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{E}_A$ sejam isomorfos, como conjuntos parcialmente ordenados. Nos corolários e proposições que se seguem, apresentamos alguns casos desta questão.

Observação importante: Seja o train polinômio $p_{\mathcal{T}}t(x) = x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x$, cujo antecedente canônico é $p(X) = X^n + \gamma_1X^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}X \in F[X]$. Assim, para todo $a \in A$ de peso 1 temos que $p_{\mathcal{T}}(a) = p(a)$ e devido ao Corolário 3.1 temos que $E_A(p) = E_A^1(p)$. Assim, sem perigo de confusão, diremos que $p(x) = x^n + \gamma_1x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}x$ é um train polinômio e o veremos em $U[x]$ para efeito da fatoração.

Corolário 4.2 *Toda álgebra de Bernstein nuclear possui no máximo quatro E -ideais.*

Demonstração: De [30, Th 3.1] temos que toda álgebra de Bernstein nuclear satisfaz a train equação $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^2 = 0$, cuja forma fatorada é $x(x-1)(x-\frac{1}{2})x = 0$. Pelo Teorema 4.1, A tem no máximo quatro E -ideais, correspondentes aos train polinômios $x(x-1)$, $x(x-1)x$, $x(x-1)(x-\frac{1}{2})$ e $x(x-1)(x-\frac{1}{2})x$. ■

Corolário 4.3 *Se a álgebra bária (A, ω) satisfaz a equação $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$, então A possui no máximo três E -ideais.*

Demonstração: Em [42] foi provado que toda álgebra bária satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ é uma train álgebra de posto quatro que satisfaz a train equação $x^4 - \frac{3}{4}\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{4}\omega(x)^3x = 0$, cuja forma fatorada é $x(x-1)(x+\frac{1}{2})^2 = 0$, e o resultado segue agora diretamente do Teorema 4.1. ■

No Capítulo 5 nós faremos um estudo mais detalhado dos E -ideais para esta classe de álgebras, apresentando um outro método de cálculo dos E -ideais, baseado em sistemas de equações de diferenças.

Utilizando os resultados da Seção (1.6) que podem ser vistos em [30], podemos obter informações sobre E -ideais da duplicada comutativa de uma álgebra bária.

Corolário 4.4 *Seja (A, ω) uma álgebra bária tal que A^2 é uma train álgebra satisfazendo a train equação $p(x) = x(x-1)p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} = 0$, com r E -ideais, sendo então $r \leq (1+n_1) \dots (1+n_k)$. Então o número de E -ideais de sua duplicada comutativa A^D é no máximo:*

- i) $2r$ se $p_i(x) \neq x$ para todo $i = 1, \dots, k$
- ii) $r \frac{2+n_i}{1+n_i}$ se $p_i(x) = x$ para algum i , $1 \leq i \leq k$.

Demonstração: De [30, Th 2.2] sabemos que se A^2 satisfaz a train equação $x(x-1)p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} = 0$ então A^D satisfaz $x(x-1)xp_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} = 0$. Distinguimos dois casos:

i) Se $p_i(x) \neq x$ para todo $i = 1, \dots, k$, então pelo Teorema 4.1, A^D tem no máximo $(1+n_1) \dots (1+n_k)(1+1)$ E -ideais. Este número é $\leq 2r$.

ii) Existe i tal que $p_i(x) = x$. Então o número de E -ideais de A^D é no máximo,

$$\begin{aligned}
(1+n_1)(1+n_2)\dots(1+n_i+1)\dots(1+n_k) &= (1+n_1)(1+n_2)\dots(1+n_i)\dots(1+n_k) + \\
(1+n_1)(1+n_2)\dots(1+n_i)\dots(1+n_k) &= (1+n_1)(1+n_2)\dots(1+n_i)\dots(1+n_k) + \\
(1+n_1)(1+n_2)\dots\frac{(1+n_i)}{(1+n_i)}\dots(1+n_k) &= (1+n_1)(1+n_2)\dots(1+n_i)\dots(1+n_k)(1+\frac{1}{1+n_i}) = \\
(1+n_1)(1+n_2)\dots(1+n_i)\dots(1+n_k)(\frac{2+n_i}{1+n_i}) &\leq r\frac{2+n_i}{1+n_i}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolário 4.5 *A duplicada comutativa A^D de uma álgebra de Bernstein A possui no máximo seis E -ideais.*

Demonstração: Se A é uma álgebra de Bernstein, a subálgebra A^2 de A é uma álgebra de Bernstein nuclear logo satisfaz a train equação $x(x-1)(x-\frac{1}{2})x=0$. Sua duplicada satisfaz $x(x-1)(x-\frac{1}{2})x^2=0$, e o resultado segue do Corolário 4.4, ii). $\blacksquare$

Corolário 4.6 *A duplicada comutativa de uma train álgebra de posto três que satisfaz a equação $x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$ com $\gamma \neq \frac{1}{2}$ e $\gamma \neq 0$ tem no máximo quatro E -ideais.*

Demonstração: É conhecido que toda train álgebra de posto três nestas condições tem a propriedade $A^2 = A$. Consequentemente A^D é uma train álgebra de posto quatro e como A admite só dois E -ideais, o resultado segue do corolário 4.4. $\blacksquare$

Corolário 4.7 *A duplicada comutativa de uma álgebra satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ possui no máximo seis E -ideais.*

Demonstração: O resultado segue dos corolários 4.3 e 4.4 e do fato que esta classe de álgebras tem a propriedade $A^2 = A$. $\blacksquare$

O teorema 4.1 e seus corolários estabelecem um limite superior para o número de elementos de $\mathcal{E}_A$. Vejamos alguns exemplos de train álgebras cujo conjunto de E -ideais é dado *a priori*.

Proposição 4.2 *Seja $f(x) = (x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n)$ um polinômio sobre o corpo F , onde as raízes r_i são distintas duas a duas e distintas de $\frac{1}{2}$. Consideremos o conjunto $\mathcal{X}$ dos divisores de $f(x)$, ordenado parcialmente por divisibilidade. Então existe uma train álgebra A de dimensão $n+1$, satisfazendo a train equação $x(x-1)f(x)=0$ e tal que $\mathcal{E}_A$ é anti-isomorfo a $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Seja (A, ω) a álgebra bária sobre o espaço vetorial de base $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ onde a multiplicação e a função peso são dadas por

$$\begin{cases} c_0^2 = c_0, & c_0 c_i = r_i c_i, \quad (i = 1, \dots, n), & \text{demais produtos são zero} \\ \omega(c_0) = 1, & \omega(c_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

onde, por hipótese, $r_i \neq \frac{1}{2}$ ($i = 1, \dots, n$) e $r_i \neq r_j$ para todo $i \neq j$. Temos $A = Fc_0 \oplus N$ com $N = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$. Em primeiro lugar definamos os seguintes train polinômios: $p(x) = x(x-1)$, $p_{i_1}(x) = p(x)(x-r_{i_1})$ e $p_{i_1, \dots, i_k}(x) = p_{i_1, \dots, i_{k-1}}(x)(x-r_{i_k})$. Provaremos que $E_A(p_{i_1, \dots, i_k}) = \langle c_1, \dots, \widehat{c_{i_1}}, \dots, \widehat{c_{i_k}}, \dots, c_n \rangle$. Para isto, se $a = c_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$ é um elemento arbitrário de A de peso 1, então $a^2 = c_0 + \sum_{i=1}^n 2\alpha_i r_i c_i$, de onde $a^2 - a = \sum_{i=1}^n \alpha_i (2r_i - 1) c_i$, e daí é fácil provar que $E_A(p) = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$. Suponhamos, agora, por indução que $E_A(p_{i_1, \dots, i_{k-1}}) = \langle c_1, \dots, \widehat{c_{i_1}}, \dots, \widehat{c_{i_{k-1}}}, \dots, c_n \rangle$. Logo para o elemento a acima temos que $p_{i_1, \dots, i_{k-1}}(a) = \sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}} \beta_i c_i$ e daí

$$\begin{aligned} p_{i_1, \dots, i_{k-1}}(a)a - p_{i_1, \dots, i_{k-1}}(a)r_{i_k} &= \sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}} (r_i - r_{i_k}) \beta_i c_i \\ &= \sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} (r_i - r_{i_k}) \beta_i c_i \\ &\in \langle c_1, \dots, \widehat{c_{i_1}}, \dots, \widehat{c_{i_k}}, \dots, c_n \rangle. \end{aligned}$$

Assim $E_A(p_{i_1, \dots, i_k}) \subseteq \langle c_1, \dots, \widehat{c_{i_1}}, \dots, \widehat{c_{i_k}}, \dots, c_n \rangle$. Por outro lado, seja $b = c_0 + c_i$ para $i \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$. É fácil ver que $b(b-1)(b-r_{i_1}) \dots (b-r_{i_k}) = (2r_i - 1)(r_i - r_{i_1}) \dots (r_i - r_{i_k}) c_i$, de onde $c_i \in E_A(p_{i_1, \dots, i_k})$ para $i \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$, logo $\langle c_1, \dots, \widehat{c_{i_1}}, \dots, \widehat{c_{i_k}}, \dots, c_n \rangle \subseteq E_A(p_{i_1, \dots, i_k})$. Assim finalmente resulta que $E_A(p_{i_1, \dots, i_k}) \subseteq \langle c_1, \dots, \widehat{c_{i_1}}, \dots, \widehat{c_{i_k}}, \dots, c_n \rangle$. Em particular temos $E_A(p_{1, \dots, n}) = 0$ de onde temos que A é uma train álgebra com train equação $x(x-1)(x-r_1) \dots (x-r_n) = 0$. Pelo Teorema 4.1, A admite o máximo de E -ideais distintos, isto é, 2^n que são:

$$\begin{array}{lll} N = \langle c_1, \dots, c_n \rangle & \text{que corresponde a} & x(x-1) \\ \langle c_1, \dots, \widehat{c_i}, \dots, c_n \rangle & \text{que corresponde a} & x(x-1)(x-r_i) \\ \langle c_1, \dots, \widehat{c_i}, \dots, \widehat{c_j}, \dots, c_n \rangle & \text{que corresponde a} & x(x-1)(x-r_i)(x-r_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 = \langle \widehat{c_1}, \dots, \widehat{c_n} \rangle & \text{que corresponde a} & x(x-1)(x-r_1) \dots (x-r_n). \end{array}$$

Assim o conjunto $\mathcal{E}_A$, ordenado por inclusão, identifica-se com o conjunto $\mathcal{A}'$ dos divisores de $(x-r_1) \dots (x-r_n)$, ordenados por divisibilidade. Isto é, $\mathcal{E}_A$ é anti-isomorfo a $\mathcal{A}'$. ■

Lembremos do exemplo 2 do Capítulo 1 que se B é uma álgebra comutativa não necessariamente associativa e de dimensão arbitrária e $\tau: B \rightarrow B$ um operador linear, então no espaço vetorial $F \oplus B$ introduzimos uma multiplicação e uma forma linear definidas por $(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, ab + \tau(\alpha b + \beta a))$ e $\omega(\alpha, a) = \alpha$, obtendo uma álgebra bária que é denotada por $[B, \tau]$. O elemento $e = (1, 0)$ de $[B, \tau]$ é um idempotente de peso um e $(1, 0)(0, b) = (0, \tau(b))$ e $(0, b)(1, 0) = (0, \tau(b))$. Assim, com as identificações usuais, cada elemento x de $[B, \tau]$ é da forma $x = \alpha e + b$ e $eb = \tau(b)$, $b \in B$.

Proposição 4.3 *Seja B uma álgebra trivial sobre o corpo F (i.e. $B^2 = 0$) e seja $\tau: B \rightarrow B$ um operador linear com polinômio minimal $q(x)$. Então a álgebra bária $[B, \tau]$ é uma train álgebra que satisfaz $x(x - 1)q(x) = 0$.*

Demonstração: Seja $q(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$ o polinômio minimal de τ . Se $a = (1, b)$ é um elemento qualquer de peso 1 em $[B, \tau]$, então as potências principais a^k , $k \geq 2$, são dadas por $a^k = (1, \tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^{k-1}(b))$. Com efeito, $a^2 = (1, b^2 + \tau(b + b)) = (1, 2\tau(b))$ pois $b^2 = 0$. Suponhamos por indução que $a^k = (1, \tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^{k-1}(b))$, então

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= a^k a = (1, \tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^{k-1}(b))(1, b) \\ &= (1, (\tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^{k-1}(b))b + \tau(b + \tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^{k-1}(b))) \\ &= (1, \tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^k(b)) \end{aligned}$$

pois $(\tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^{k-1}(b))b \in B^2 = 0$. Como

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 - x)q(x) \\ &= x^{n+2} + (\alpha_{n-1} - 1)x^{n+1} + (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})x^n \\ &\quad + \dots + (\alpha_1 - \alpha_2)x^3 + (\alpha_0 - \alpha_1)x^2 - \alpha_0x, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} p(a) = (a^2 - a)q(a) &= (1, \tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^{n+1}(b)) \\ &\quad + (\alpha_{n-1} - 1)(1, \tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^n(b)) \\ &\quad + (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})(1, \tau(b) + \tau^2(b) + \dots + 2\tau^{n-1}(b)) + \dots \\ &\quad + (\alpha_1 - \alpha_2)(1, \tau(b) + 2\tau^2(b)) + (\alpha_0 - \alpha_1)(1, 2\tau(b)) - \alpha_0(1, b). \end{aligned}$$

A primeira componente é

$$1 + (\alpha_{n-1} - 1) + (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + \dots + (\alpha_1 - \alpha_0) + (\alpha_0 - \alpha_1) - \alpha_0 = 0$$

A segunda componente é

$$2\tau^{n+1}(b) + (2\alpha_{n-1} - 1)\tau^n(b) + (2\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})\tau^{n-1}(b) + \dots + (2\alpha_1 - \alpha_2)\tau^2(b) \\ + (2\alpha_0 - \alpha_1)\tau(b) - \alpha_0 b - q(\tau)(b) + 2q(\tau)(\tau(b)) = 0$$

Assim, A é uma train álgebra que satisfaz $x(x-1)q(x) = 0$. ■

Observações:

1) O número máximo de E -ideais que pode ter a álgebra básica $[B, \tau]$ pode ser determinado a partir da decomposição do polinômio $q(x)$ em fatores primos distintos e daí usar o Teorema 4.1. Em geral, todo subespaço de B , invariante por τ , será um ideal em $[B, \tau]$. Isto mostra, mais uma vez, que o número de E -ideais é pequeno, quando comparado ao número de ideais.

2) No caso particular quando o operador τ for nilpotente de índice s , então $[B, \tau]$ é uma train álgebra satisfazendo $p(x) = (x^2 - x)x^s = 0$. Esta álgebra tem uma cadeia finita de E -ideais com, no máximo, $s+1$ E -ideais. Mais precisamente, se $p_k(x) = (x^2 - x)x^k$ para $1 \leq k \leq s$, então temos:

$$\{0\} = E_A(p_s) \subseteq \dots \subseteq E_A(p_1) \subseteq E_A(1, -1)$$

Corolário 4.8 *Seja (A, ω) uma álgebra básica com um idempotente e de peso 1 tal que para algum $r \in F$, $ea = ra$ para todo $a \in \ker \omega$. Se $\ker \omega$ é nil de nil-índice $s \geq 2$, então (A, ω) é uma train álgebra satisfazendo*

$$p(x) = x(x-1)(x-r)^{s-1} \quad \text{se } r \neq \frac{1}{2} \\ q(x) = x(x-1)(x-r)^{s-2} \quad \text{se } r = \frac{1}{2}$$

Portanto A tem no máximo s E -ideais se $r \neq \frac{1}{2}$ e $s-1$ E -ideais se $r = \frac{1}{2}$.

Demonstração: De [18, Cap 4 Th 1] ou [19] temos que se $r \neq \frac{1}{2}$, (A, ω) é uma train álgebra de posto $s+1$ que satisfaz a train equação $p(x) = x^{s+1} + \gamma_1 \omega(x)x^s + \dots + \gamma_s \omega(x)^s x = 0$ onde $\gamma_i = (s, i; r) = (-1)^i \left[\binom{s-1}{i} r^i + \binom{s-1}{i-1} r^{i-1} \right]$ para $0 \leq i \leq s$. Sabemos que o train

polinômio $p(x)$ se fatora como $x(x-1)(x^{s-1} + (1+\gamma_1)x^{s-2} + \dots + (1+\gamma_1 + \dots + \gamma_{s-1}))$ mas para cada $j = 1, \dots, s-1$, temos $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_j = (-1)^j \binom{s-1}{j} r^j$ logo

$$p(x) = x(x-1) \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} x^{s-i-1} (-r)^i = x(x-1)(x-r)^{s-1}.$$

Assim esta álgebra tem no máximo s E -ideais determinados pelos train polinômios $x(x-1)(x-r)^i$ para cada i tal que $0 \leq i \leq s-1$.

Agora, se $r = \frac{1}{2}$, por [18, Th 1', Cap 4] ou [18] temos que (A, ω) é uma train álgebra de posto s que satisfaz a train equação $q(x) = x^s + \gamma_1 \omega(x) x^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} \omega(x)^{s-1} x = 0$, onde $\gamma_i = (s-1, i; \frac{1}{2})$ ($0 \leq i \leq s-1$) e neste caso $q(x) = x(x-1)(x-\frac{1}{2})^{s-2}$, logo (A, ω) tem no máximo $s-1$ E -ideais determinados pelos train polinômios $x(x-1)(x-\frac{1}{2})^i$ onde $0 \leq i \leq s-2$. ■

Proposição 4.4 *Seja $f(x) = (x-r)^n \in F[x]$. Consideremos o conjunto $\mathcal{X}$ dos divisores de $f(x)$, ordenados totalmente por divisibilidade. Então existe uma train álgebra A de dimensão $n+1$, satisfazendo a train equação $x(x-1)f(x) = 0$ e tal que $\mathcal{E}_A$ é anti-isomorfo a $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Seja B a álgebra cíclica de dimensão n , isto é, B possui uma base $\{c_1, \dots, c_n\}$ onde o produto é dado por $c_i c_j = c_{i+j}$ se $i+j \leq n$ e zero nos outros casos. Seja $\tau: B \rightarrow B$ o operador homotetia de razão r , isto é, $\tau(c_i) = r c_i$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n$. Consideremos então a álgebra bárica $A = [B, \tau]$ com função peso ω definida por $\omega(c_i) = 0$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n$ e $\omega(c_0) = 1$, onde $c_0 = (1, 0)$ é um elemento idempotente em A . Nesta álgebra bárica, as potências principais do núcleo formam uma cadeia decrescente de ideais:

$$B = \langle c_1, \dots, c_n \rangle \supset B^2 = \langle c_2, \dots, c_n \rangle \supset \dots \supset B^n = \langle c_n \rangle \supset B^{n+1} = \{0\}$$

Observemos que si $b \in B$ então $c_0 b = r b$. É fácil provar por indução que, se $a = c_0 + b$, $b \in B$, então

$$(a^2 - a)(a - r)^k = (2r - 1)b^{k+1} + b^{k+2} \quad \text{para todo } k \geq 0 \quad (4.2)$$

Para cada $k \geq 0$ denotemos por $p_k(x)$ os train polinômios $p_k(x) = x(x-1)(x-r)^k$. Distinguímos dois casos:

(a) $r \neq \frac{1}{2}$. Neste caso temos que A satisfaz a train equação $x(x-1)(x-r)^n = 0$ portanto, pelo Teorema 4.1, A possui no máximo $n+1$ E -ideais. Neste exemplo há exatamente $n+1$. Usando (4.2), temos que para cada $k \geq 0$, $E_A(p_k) \subseteq B^{k+1}$. Por outro lado consideremos os elementos $b = c_0 + c_1$ e $b' = c_0 - c_1$. Temos então que $p_k(b) = (2r-1)c_1^{k+1} + c_1^{k+2} = (2r-1)c_{k+1} + c_{k+2}$ e $p_k(b') = (-1)^{k+1}((2r-1)c_1^{k+1} - c_1^{k+2}) = (-1)^{k+1}((2r-1)c_{k+1} - c_{k+2})$ são elementos em $E_A(p_k)$, e daí $p_k(b') + (-1)^{k+1}p_k(b) = 2(-1)^{k+1}((2r-1)c_{k+1}) \in E_A(p_k)$ e daí temos que $c_{k+1} \in E_A(p_k)$, de onde temos finalmente que $B^{k+1} \subseteq E_A(p_k)$. Consequentemente $E_A(p_k) = B^{k+1}$ e como $B^{k+1} = 0$ para $k \geq n$ obtemos os $n+1$ E -ideais. Assim temos que os conjuntos ordenados $\mathcal{X}$ e $\mathcal{E}_A$ são anti-isomorfos.

(b) $r = \frac{1}{2}$. Neste caso A satisfaz a train equação $x(x-1)(x-r)^{n-1} = 0$ portanto, como no caso (a), A possui exatamente n E -ideais onde temos $E_A(1, -1) = N^2$ e $E_A(p_{n-1}) = 0$. Assim temos que os conjuntos ordenados $\mathcal{X}$ e $\mathcal{E}_A$ são anti-isomorfos. ■

Proposição 4.5 *Seja (A, ω) uma álgebra bária. Se $N = \ker \omega$ é nil de índice r e A é de potências associativas, então (A, ω) é uma train álgebra de posto $\leq 2r$ com no máximo r^2 E -ideais.*

Demonstração: Seja a um elemento arbitrário de A de peso 1. Então, como $a^2 - a$ é um elemento de N , resulta que $(a^2 - a)^r = 0$, e como A é de potências associativas temos que $(a^2 - a)^r = (a^2 a^2 - 2a^3 + a^2)(a^2 - a)^{r-2} = (a^4 - 2a^3 + a^2)(a^2 - a)^{r-2} = a^2(a-1)^2(a^2 - a)^{r-2} = a(a-1)(a-1)^{r-1}a^{r-1}$ e assim A satisfaz a train equação $x(x-1)(x-1)^{r-1}x^{r-1} = 0$ de grau $2r$ e pelo Teorema 4.1, A possui no máximo r^2 E -ideais. ■

4.2 E -ideais para uma classe de train álgebras de posto n

Nesta seção apresentamos a Proposição 4.6 relativa ao conjunto dos E -ideais correspondentes a uma classe de train álgebras de posto n que foi estudada em [18, seção 5.3] e que é uma consequência imediata do Teorema 4.1.

Antes de enunciar a proposição damos alguns resultados obtidos pelo autor de [18].

Seja (A, ω) uma train álgebra que verifica a train equação de grau $n \geq 2$

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0 \quad (4.3)$$

e que admite um idempotente $e \in A$ de peso 1. Ele provou os seguintes resultados:

a) O operador linear R_e anula o polinômio

$$p(x) = (2x - 1)(x^{n-2} + (1 + \gamma_1)x^{n-3} + \dots + (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-2})) \in F[x] \quad (4.4)$$

Assim se $r_1, \dots, r_{n-2}$ são as raízes de $x^{n-2} + (1 + \gamma_1)x^{n-3} + \dots + (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-2}) = 0$, os autovalores possíveis de R_e são $\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}$. Além disso, $1, r_1, \dots, r_{n-2}$ são as t -raízes de (A, ω) pois $x^n + \gamma_1 x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} x = x(x-1)(x^{n-2} + (1 + \gamma_1)x^{n-3} + \dots + (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-2}))$ (aqui utilizamos o fato que $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$). Suponhamos que o polinômio $p(x)$ possui todas as suas raízes no corpo F e que elas são de multiplicidade 1. Então A satisfaz a train equação $(x^2 - x)(x - r_1) \dots (x - r_{n-2}) = 0$. Denotemos $A_k = \{a \in A | ea = ka\}$ o subespaço próprio correspondente ao autovalor k , $k \in \{\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}\}$.

b) Se os subespaços $A_{r_1}, \dots, A_{r_{n-2}}$ são todos não nulos, então (A, ω) é efetivamente uma train álgebra de posto n , isto é, a equação (4.3) é minimal.

c) $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_{r_1} \oplus \dots \oplus A_{r_{n-2}}$ onde as seguintes relações multiplicativas são válidas:

$$A_{\frac{1}{2}}^2 \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n-2} A_{r_i}$$

$$A_{\frac{1}{2}} A_{r_i} \subseteq A_{\frac{1}{2}} \oplus \left(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^{n-2} A_{r_j} \right) \text{ para todo } 1 \leq j \leq n-2$$

$$A_{r_i} A_{r_j} \subseteq \bigoplus_{k=1, k \neq j, k \neq i}^{n-2} A_{r_k}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq n-2$$

Proposição 4.6 *Seja (A, ω) uma train álgebra de posto n que satisfaz a equação $x(x-1)(x-r_1) \dots (x-r_{n-2}) = 0$ para todo elemento x de A de peso 1 e com as hipóteses acima sobre os escalares r_i . Então A possui no máximo 2^{n-2} E -ideais que são determinados pelos train polinômios $q(x) = x(x-1)g(x)$ onde $g(x)$ percorre o conjunto dos divisores do polinômio $(x-r_1) \dots (x-r_{n-2})$.*

4.3 E -ideais em uma certa classe de train álgebras de posto 4

Nesta seção usamos resultados e as notações de [18, Capítulo 6], particularizadas para $n = 4$, obtendo assim uma descrição mais precisa da classe de equivalência de train polinômios. Nestas condições (A, ω) é uma train álgebra de posto 4 que satisfaz

$$x^4 - (1 + r + s)\omega(x)x^3 + (r + s + rs)\omega(x)^2x^2 - rs\omega(x)^3x = 0 \quad (4.5)$$

onde r, s e $\frac{1}{2}$ são distintos 2 a 2.

Se A tem um idempotente e de peso 1, então $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_r \oplus A_s$, onde os subespaços A_k , definidos por $A_k = \{a \in \ker \omega | ea = ka\}$ para $k = \frac{1}{2}, r, s$ satisfazem as relações

$$\begin{array}{ll} a) & A_{\frac{1}{2}}^2 \subseteq A_r \oplus A_s \\ b) & A_{\frac{1}{2}}A_r \subseteq A_{\frac{1}{2}} \oplus A_s \\ c) & A_{\frac{1}{2}}A_s \subseteq A_{\frac{1}{2}} \oplus A_r \\ d) & A_rA_s = 0 \\ e) & A_r^2 \subseteq A_s \\ f) & A_s^2 \subseteq A_r \end{array}$$

como caso particular das relações apresentadas na seção 4.2. Além disso, temos especificamente $A_r^3 = A_s^3 = 0$; $A_r^2A_s = 0$; $A_s^2A_r = 0$ e $(A_r + A_s)^3 = 0$ (resultados provados em [18]).

A train equação pode-se fatorar como $(x^2 - x)(x - r)(x - s)$. Assim, esta classe de álgebras básicas possui no máximo quatro E -ideais: $E_A(1, -1)$; $E_A(1, -(s + 1), s)$; $E_A(1, -(r + 1), r)$ e $E_A(1, -(r + s + 1), r + s + rs, -rs)$. Se o subespaço $A_{\frac{1}{2}} = 0$ podemos precisar mais ainda. Temos que:

$$\begin{aligned} E_A(1, -1) &= A_r \oplus A_s = \ker \omega \\ E_A(1, -(s + 1), s) &= A_r \oplus A_r^2 \\ E_A(1, -(r + 1), r) &= A_s^2 \oplus A_s \\ E_A(1, -(r + s + 1), r + s + rs, -rs) &= 0 \end{aligned}$$

De fato, é claro que $E_A(1, -(r + s + 1), r + s + rs, -rs) = 0$ e pela Proposição 3.10 do Capítulo 3 temos que $E_A(1, -1) = A_r \oplus A_s = \ker \omega$ (o qual coincide com o obtido em [18, Cap 6, Th 3 b]). Resta portanto, provar que $E_A(1, -(s + 1), s) = A_r \oplus A_r^2$ e que

$E_A(1, -(r+1), r) = A_s^2 \oplus A_s$. Observemos primeiro que os subespaços $A_r \oplus A_r^2$ e $A_s^2 \oplus A_s$ são ideais de A pois

$$\begin{aligned} (A_r \oplus A_r^2)(A_r \oplus A_s) &= A_r^2 + A_r A_s + A_r^3 + A_r^2 A_s \\ &= A_r^2 \subseteq A_r \oplus A_r^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (A_s^2 \oplus A_s)(A_r \oplus A_s) &= A_s^2 A_r + A_s^3 + A_s A_r + A_s^2 \\ &= A_s^2 \subseteq A_s^2 \oplus A_s \end{aligned}$$

e além disso estes subespaços são invariantes pelo operador R_e .

Seja agora $a = e + u + v$, $u \in A_r$, $v \in A_s$ um elemento arbitrário de A de peso 1, então

$$a^2 = e + 2ru + 2sv + u^2 + v^2$$

daí

$$a^2 - a = (2r - 1)u + (2s - 1)v + u^2 + v^2$$

Multiplicando respectivamente por a e por s a expressão acima e depois subtraindo, temos

$$(a^2 - a)(a - s) = (2r - 1)(r - s)u + (2r - 1)u^2 + (r + s - 1)v^2$$

que é um elemento em $A_r \oplus A_r^2$, isto é, $E_A(1, -(s+1), -s) \subseteq A_r \oplus A_r^2$

Por outro lado, sendo $b_1 = e + u$ e $b_2 = e - u$ então

$$b_1^3 - (s+1)b_1^2 + sb_1 = (2r - 1)(r - s)u + (2r - 1)u^2$$

e

$$b_2^3 - (s+1)b_2^2 + sb_2 = -(2r - 1)(r - s)u + (2r - 1)u^2$$

são elementos do E -ideal $E_A(1, -(s+1), s)$ e portanto também sua diferença $b_1^3 - b_2^3 = 2(2r - 1)(r - s)u$ está nesse ideal. Como $s \neq \frac{1}{2}$ e $r \neq s$ resulta que $u \in E_A(1, -(s+1), s)$ para todo $u \in A_r$. Assim, $E_A(1, -(s+1), s)$ contem o subespaço A_r e o subespaço A_r^2 logo contem $A_r \oplus A_r^2$, daí $E_A(1, (s+1), s) = A_r \oplus A_r^2$. Similarmente obtemos $E_A(1, (r+1), r) = A_s^2 \oplus A_s$.

Temos o seguinte diagrama dos E -ideais:

$$\begin{array}{ccc}
& E_A(1, -1) & \\
\nearrow & & \nwarrow \\
E_A(p_r) & & E_A(p_s) \\
\nwarrow & & \nearrow \\
& E_A(p_{r,s}) = \{0\} &
\end{array}$$

onde

$$p_k(x) = x^3 - (k+1)x^2 + kx, k = r, s$$

e

$$p_{r,s}(x) = x^4 - (1+r+s)x^3 + (r+s+rs)x^2 - rsx$$

4.4 E -ideais em train álgebras cujo núcleo é uma álgebra graduada

A situação estudada nesta seção aparece várias vezes na teoria das álgebras genéticas. Por exemplo, nas álgebras de poliploides, ver [7], [16] e [21].

Seja $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ uma álgebra graduada sobre o corpo F . Conforme a seção 1.7, temos, $N_i N_j \subseteq N_{i+j}$ se $i+j \leq k$ e $N_i N_j = 0$ se $i+j > k$. Observemos que os subespaços $V_l = N_l \oplus \dots \oplus N_k$ onde $1 \leq l \leq k$ são ideais de N . Consideremos a álgebra bária $A = [N, \tau]$, (ver exemplo 2 capítulo 1), onde τ age como uma homotetia em cada subespaço N_i , isto é, existe $t_i \in F$ tal que, para todo $n_i \in N_i$, $\tau(n_i) = t_i n_i$ para cada $1 \leq i \leq k$. Esta álgebra tem idempotente, assim podemos escrever $A = Fe \oplus N$.

Lema 4.2 . *Suponhamos dada uma álgebra bária (A, ω) como acima. Suponhamos que $t_i \neq t_j$ para todo $i \neq j$ e $i, j = 1, \dots, k$. Então*

i) *Se $t_1 \neq \frac{1}{2}$, A é uma train álgebra de posto $\leq k+2$ que satisfaz*

$$x(x-1)(x-t_1)\dots(x-t_k) = 0 \quad (4.6)$$

ii) *Se $t_1 = \frac{1}{2}$, A é uma train álgebra de posto $\leq k+1$ que satisfaz*

$$x(x-1)(x-t_2)\dots(x-t_k) = 0 \quad (4.7)$$

Demonstração:

i) Observemos inicialmente, conforme Proposição 3.11, que $E_A(1, -1) = N$. Se $a = e + \sum_{i=1}^k n_i$, $n_i \in N_i$ é um elemento arbitrário em A de peso 1, então, para cada $l \geq 0$

$$(a^2 - a)(a - t_1) \dots (a - t_l) \in V_{l+1} \quad (4.8)$$

Com efeito, temos $a^2 = e + \sum_{i=1}^k 2t_i n_i + \sum_{i,j=1}^k n_i n_j$, consequentemente $a^2 - a = \sum_{i=1}^k (2t_i - 1)n_i + \sum_{i,j=1}^k n_i n_j \in V_1$. Suponhamos por indução que (4.8) é válida, isto é,

$$(a^2 - a)(a - t_1) \dots (a - t_l) = \sum_{i=l+1}^k \mu_i m_i$$

com $\mu_i \in N_i$. Multiplicando a expressão acima por a e t_{l+1} e subtraindo obtemos:

$$(a^2 - a)(a - t_1) \dots (a - t_l)(a - t_{l+1}) = \sum_{i=l+2}^k \mu_i (t_{l+1} - t_i) m_i + \sum_{i=l+1}^k \sum_{j=1}^k \mu_i m_i n_j \quad (4.9)$$

que é um elemento em V_{l+2} . Se $l = k - 1$, temos $(a^2 - a)(a - t_1) \dots (a - t_{k-1}) \in V_k = N_k$ e daí $(a^2 - a)(a - t_1) \dots (a - t_k) = 0$. Logo A é uma train álgebra de posto $\leq k + 2$ satisfazendo (4.6).

ii) Neste caso a prova é similar, o único fato que devemos observar é que $a^2 - a \in V_2$ e $(a^2 - a)(a - t_2) \dots (a - t_l) \in V_{l+1}$. ■

Proposição 4.7. *Seja (A, ω) uma train álgebra como acima, então:*

i) *Se $t_1 \neq \frac{1}{2}$, A tem no máximo $k + 1$ E -ideais que são $V_l = N_l \oplus \dots \oplus N_k$ para $l = 1, \dots, k$ e que estão determinados pelos train polinômios $x(x - 1)$ e $p_l(x) = x(x - 1)(x - t_1) \dots (x - t_l)$ para $l = 1, \dots, k$.*

ii) *Se $t_1 = \frac{1}{2}$, A tem no máximo k E -ideais que são $V_l = N_l \oplus \dots \oplus N_k$ para $l = 2, \dots, k$ e que estão determinados pelos train polinômios $x(x - 1)$ e $q_l(x) = x(x - 1)(x - t_2) \dots (x - t_l)$ para $l = 2, \dots, k$.*

Demonstração: Provaremos apenas o primeiro caso, o segundo é similar. De (4.8) temos que $E_A(p_{l-1}) \in V_l$. Seja $a = e + \lambda n_l$, $n_l \in N_l$, $l = 1, \dots, k$, então podemos mostrar por recorrência que $(a^2 - a)(a - t_1) \dots (a - t_{l-1}) = \lambda \alpha_{l-1,1} n_l + \lambda^2 \alpha_{l-1,2} n_l^2 + \dots + \lambda^{l+1} n_l^{l+1}$ onde $\alpha_{l-1,r}$ são certos escalares. Em particular $\alpha_{l-1,1} = (2t_l - 1)(t_l - t_1) \dots (t_l - t_{l-1}) \neq 0$,

é um elemento em $E_A(p_{l-1})$. Se escolhemos $\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1} \in F$ diferentes temos que para cada $i = 1, \dots, l+1$ os elementos

$$\lambda_i \alpha_{l-1,1} n_l + \lambda_i^2 \alpha_{l-1,2} n_l^2 + \dots + \lambda_i^{l+1} n_l^{l+1} \quad (4.10)$$

pertencem ao E -ideal $E_A(p_{l-1})$. A expressão (4.10) representa um sistema de Vandermonde, o que implica que cada $\alpha_{l-1,i} n_l^i \in E_A(p_{l-1})$. Em particular $\alpha_{l-1,1} n_l \neq 0$ pertence a $E_A(p_{l-1})$ e assim $N_l \subseteq E_A(p_{l-1})$, de onde toda potência principal $N_l^i \subseteq E_A(p_{l-1})$, daí $V_l \subseteq E_A(p_{l-1})$ e finalmente temos $E_A(p_{l-1}) = V_l = N_l \oplus \dots \oplus N_k$. ■

Existem muitas álgebras bárias que provêm da biologia e que satisfazem as condições da Proposição 4.7. A seguir damos alguns exemplos.

Exemplo 1. Álgebras gaméticas para poliploides. Estas álgebras, denotadas $G(n+1, 2m)$, têm sido estudadas por vários autores, ver, por exemplo, [7], [15], [40]. Estas álgebras têm uma base no sentido de Gonshor (ver Capítulo 1) que consiste dos monômios formais $X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ com $i_0 + i_1 + \dots + i_n = m$. A multiplicação é dada por:

$$\begin{aligned} (X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n})(X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) = \\ = \begin{cases} \binom{2m}{m}^{-1} \binom{i_0+j_0}{m} X_0^{i_0+j_0-m} X_1^{i_1+j_1} \dots X_n^{i_n+j_n} & \text{se } i_0 + j_0 \geq m \\ 0 & \text{se } i_0 + j_0 < m \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

A função peso ω é 1 em X_0^m e 0 nos outros elementos da base. O monômio X_0^m é um idempotente de peso 1. Se denotarmos por V_j o subespaço gerado por todos os monômios $X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ com $i_1 + \dots + i_n = j$ então

$$G(n+1, 2m) = F X_0^m \oplus \ker \omega = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_m$$

Como caso particular da fórmula do produto (4.11) temos:

$(X_0^m)(X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) = \binom{2m}{m}^{-1} \binom{2m-j}{m} X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$. Os escalares $t_j = \binom{2m}{m}^{-1} \binom{2m-j}{m}$, $j = 0, 1, \dots, m$, são as train raízes no sentido de Gonshor (ver Cap 1). Elas aparecem com multiplicidade $1, n, \dots, \binom{j+n-1}{j}, \dots, \binom{m+n-1}{m}$, que são respectivamente as dimensões de $V_0, V_1, \dots, V_m$. A álgebra $G(n+1, 2m)$ é graduada já que $V_i V_j \subseteq V_{i+j}$ ($i+j \leq m$) e $V_i V_j = 0$ se $m < i+j$. Logo usando o Lema 4.2 e a Proposição 4.7 com $t_1 = \frac{1}{2}$ temos que a álgebra $G(n+1, 2m)$ tem $m+1$ E -ideais que são $V_i \oplus \dots \oplus V_m$ para $i = 1, \dots, m$ e estão determinados pelos train polinômios $x(x-1) p_i(x) = x(x-1)(x-t_2) \dots (x-t_i)$.

Nos dois exemplos a seguir usamos alguns fatos que podem ser vistos em [9].

Exemplo 2. Álgebra Gamética para k loci ligados. Conforme [23], esta álgebra tem uma base canônica $c(I)$, onde I é um subconjunto qualquer de $K = \{1, \dots, k\}$ cuja multiplicação na base é dada por $c(I)c(J) = \lambda(I, J)c(I \cup J)$, onde os escalares $\lambda(I, J)$ são certas probabilidades. O elemento $c(\emptyset)$ é um idempotente de peso 1. A função peso é dada por $\omega(c(\emptyset)) = 1$ e $\omega(c(I)) = 0$ para $I \neq \emptyset$, $\ker \omega$ é gerado como espaço vetorial por todos os $c(I)$, $I \neq \emptyset$. O ideal $\ker \omega$ pode-se decompor como $N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ onde N_i é o subespaço gerado pelos $c(I)$ tal que $\text{card } I = i$. Devido ao fato que $\lambda(I, J) = 0$ quando $I \cap J \neq \emptyset$ temos $N_i N_j \subseteq N_{i+j}$, $1 \leq i, j \leq k$. Se adicionalmente, supomos que as train raízes $\lambda(\emptyset, I)$ são todas distintas, podemos aplicar o Lema 4.2 e Prop 4.7 para calcular seus E -ideais.

Exemplo 3. Álgebra gamética com k loci independentes com dois alelos. Esta álgebra é representada como o produto tensorial de k cópias de $G(2, 2)$, então de [10], temos que $\bigotimes^k G(2, 2) = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, $\dim V_i = \dim V_{k-i} = \binom{k}{i}$. Se $\{c_0, c_1\}$ é a base canônica de $G(2, 2)$, então V_0 é gerado por $c_0 \otimes \dots \otimes c_0$ e V_k por $c_1 \otimes \dots \otimes c_1$. A função peso toma o valor 1 em $c_0 \otimes \dots \otimes c_0$ e zero nos outros, assim o kernel é $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$. Além disso esta álgebra satisfaz a train equação $x(x-1)(x-\frac{1}{4}) \dots (x-\frac{1}{2^k}) = 0$ para todo elemento de peso 1. Desta maneira podemos aplicar a Proposição 7 e prever o número de E -ideais e como consequência, prever as imagens homomorfas que são train álgebras.

Capítulo 5

E -ideais em álgebras de Bernstein

5.1 E -ideais em uma álgebra de Bernstein.

São questões importantes para o conhecimento dos E -ideais de uma álgebra de Bernstein:

1. Estimar o número de elementos de $\mathcal{E}_A$.
2. Expressar, se possível, um E -ideal $E_A(p)$ em função dos subespaços U_e e Z_e , como já acontece com o ideal de Etherington, que é dado por $(U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e$.
3. Determinar explicitamente os E -ideais para as classes mais conhecidas de álgebras de Bernstein: normais, excepcionais, nucleares, etc.
4. Conhecer alguns exemplos extremos. Por exemplo, uma álgebra de Bernstein com infinitos E -ideais.

Neste capítulo procuramos responder, pelo menos parcialmente, estas questões. Como regra geral, as álgebras de Bernstein mais bem comportadas têm poucos E -ideais. De modo geral, a teoria dos ideais de uma álgebra de Bernstein ainda não é muito desenvolvida. Alguns resultados recentes podem ser vistos em [31].

Seja F um corpo de característica $\neq 2$. Conforme já vimos, uma álgebra bária comutativa (A, ω) sobre o corpo F é uma álgebra de Bernstein se para todo $x \in A$ tem-se

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 \quad (5.1)$$

Toda álgebra de Bernstein admite elementos idempotentes, a saber, os elementos $e = a^2 \in A$ com $\omega(a) = 1$. É bem conhecido que o homomorfismo peso ω é único.

Se $e \in A$ é um idempotente fixo em A , a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e é $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, onde $U_e = \{a \in \ker \omega : ea = \frac{1}{2}a\}$ e $Z_e = \{a \in \ker \omega : ea = 0\}$. É bem conhecido que

$$U_e^2 \subseteq Z_e, \quad U_e Z_e \subseteq U_e, \quad Z_e^2 \subseteq U_e, \quad U_e Z_e^2 = 0 \quad (5.2)$$

Embora os subespaços U_e e Z_e dependam da escolha do idempotente e , suas dimensões são invariantes. O par ordenado $(1 + \dim U_e, \dim Z_e)$ chama-se o *tipo* de A . Este invariante tem sido usado fortemente no problema de classificação, veja por exemplo [6], [22], [28]. O seguinte teorema é bem conhecido, ver por exemplo [44].

Teorema 5.1 *Se (A, ω) é uma álgebra comutativa e $e \in A$ um idempotente de peso 1, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) (A, ω) é uma álgebra de Bernstein.
- b) A admite uma decomposição $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ tal que

$$\begin{array}{lll} i) & (n^2)^2 = 0 & ii) \quad u^2(uz) = 0 \quad iii) \quad (uz)z^2 = 0 \\ iv) & u^2z^2 = 0 & v) \quad (uz)^2 = 0 \quad vi) \quad u^3 = 0 \\ vii) & u(uz) = 0 & viii) \quad uz^2 = 0 \end{array} \quad (5.3)$$

para todo elemento $n \in N$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, onde $N = U_e \oplus Z_e$.

Em toda álgebra de Bernstein valem as formas linearizadas de (5.3). Na proposição seguinte destacamos algumas que são importantes para nosso trabalho.

Proposição 5.1 *Em toda álgebra de Bernstein, temos:*

$$\begin{array}{ll} i) & (n_1 n_2)(n_3 n_4) + (n_1 n_3)(n_2 n_4) + (n_1 n_4)(n_2 n_3) = 0 \\ ii) & (u_1^2)u_2 + 2(u_2 u_1)u_1 = 0 \\ iii) & (u_1 u_2)u_3 + (u_2 u_3)u_1 + (u_3 u_1)u_2 = 0 \\ iv) & u_1(u_2 z) + u_2(u_1 z) = 0 \end{array} \quad (5.4)$$

para todos os elementos $n \in N$, $u_i \in U_e$, $z \in Z_e$.

Proposição 5.2 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein não necessariamente de dimensão finita. Então as potências principais do núcleo $N = U_e \oplus Z_e$ são ideais de A .*

Para uma prova deste fato, ver por exemplo [29]. Para novos resultados mais gerais sobre os ideais de uma álgebra de Bernstein, ver [31].

Proposição 5.3 . *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein não necessariamente de dimensão finita. Seja $R_z: N \rightarrow N$ o operador multiplicação por z , $z \in Z_e$. Então as identidades*

$$(i) \quad uR_z^k(u^2) = 0, \quad (ii) \quad uR_z^k(u) = 0, \quad (iii) \quad uR_z^k(z) = 0 \quad (5.5)$$

são válidas para todo $k \geq 1$ e qualquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.

Demonstração: Observemos inicialmente que $R_z(U_e \oplus Z_e) \subseteq U_e$ pois $R_z(u' + z') = u'z + z'z \in U_e$. Provamos as identidades acima por recorrência sobre k .

i) $uR_z(u^2) = u(u^2z) \in U_e Z_e^2$, $uR_z^2(u^2) = u(R_z(u^2)z) = -(uz)(u^2z) \in U_e Z_e^2$, $uR_z^3(u^2) = u(R_z^2(u^2)z) = -(uz)(R_z(u^2)z) = ((uz)z)R_z(u^2) = R_z^2(u)(u^2z) \in U_e Z_e^2$, e recursivamente temos $uR_z^k(u^2) = (-1)^{k-1} R_z^{k-1}(u)(u^2z) \in U_e Z_e^2$. Mas sabemos que sempre $U_e Z_e^2 = 0$.

ii) Aqui distinguimos dois casos segundo seja k par ou ímpar. Se k é ímpar, isto é, $k = 2r - 1$ temos $uR_z^{2r-1}(u) = R_z^{r-1}(u)R_z^r(u) = R_z^{r-1}(u)(R_z^{r-1}(u)z)$ e que é igual a zero, devido a *vii*) de (5.3). Se k é par, isto é $k = 2r$ temos $uR_z^{2r}(u) = R_z^r(u)R_z^r(u) = (R_z^r(u))^2$ e por *v*) de (5.3) é zero.

iii) É fácil provar por recorrência sobre k que $uR_z^k(z) = (-1)^{k-1} R_z^{k-1}(u)z^2$ que é um elemento do subespaço $U_e Z_e^2 = 0$. ■

Proposição 5.4 *Seja $n = u + z$ um elemento arbitrário do núcleo $N = U_e \oplus Z_e$ de uma álgebra de Bernstein A . Então as potências principais de n são dadas recursivamente por $n^k = R_z^{k-2}(n^2) = R_z^{k-2}(u^2 + 2uz + z^2)$, para todo $k \geq 2$.*

Demonstração: Provemos por indução sobre k . É claro que a fórmula é válida para $k = 2$. Suponhamos por indução que a fórmula vale para k , então

$$\begin{aligned} n^{k+1} = n^k n &= R_z^{k-2}(u^2 + 2uz + z^2)(u + z) \\ &= uR_z^{k-2}(u^2 + 2uz + z^2) + zR_z^{k-2}(u^2 + 2uz + z^2) \\ &= uR_z^{k-2}(u^2 + 2uz + z^2) + R_z^{k-1}(u^2 + 2uz + z^2) \end{aligned}$$

mas de (5.5) temos que

$$uR_z^{k-2}(u^2 + 2uz + z^2) = uR_z^{k-2}u^2 + 2uR_z^{k-1}z + uR_z^{k-1}z = 0$$

Assim

$$n^{k+1} = R_z^{k-1}(u^2 + 2uz + z^2) = R_z^{k-1}(n^2)$$

■

Proposição 5.5 *Seja $a = e + n = e + u + z$ um elemento de peso 1 de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. Então para cada inteiro $k \geq 0$*

$$(a^3 - a^2)(a - \frac{1}{2})^k = -\frac{1}{2}z^{k+2} + n^{k+3} \quad (5.6)$$

Demonstração: Provemos por indução sobre k . Com efeito, temos

$$a^2 = e + (u + 2uz + z^2) + u^2, \quad a^3 = e + (u + 2uz + \frac{1}{2}z^2 + (u^2 + 2uz + z^2)z) + u^2$$

e assim $a^3 - a^2 = -\frac{1}{2}z^2 + n^3$, logo a expressão (5.6) é válida para $k = 0$. Suponhamos, por hipótese de indução que (5.6) vale para $k = l - 1$, então

$$(a^3 - a^2)(a - \frac{1}{2})^{l-1} = -\frac{1}{2}z^{l+1} + n^{l+2} \quad (5.7)$$

Multiplicando a expressão dada em (5.7) pelo elemento a , resulta

$$((a^3 - a^2)(a - \frac{1}{2})^{l-1})a = -\frac{1}{4}z^{l+1} + \frac{1}{2}n^{l+2} - \frac{1}{2}z^{l+2} + n^{l+3} \quad (5.8)$$

Agora se da expressão (5.8) subtrairmos a expressão (5.7) multiplicada por $\frac{1}{2}$, temos

$$(a^3 - a^2)(a - \frac{1}{2})^l = -\frac{1}{2}z^{l+2} + n^{l+3}$$

■

Uma localização parcial dos E -ideais em uma álgebra de Bernstein é dada na seguinte proposição.

Proposição 5.6 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein não necessariamente de dimensão finita. Então cada uma das potências principais N^k ($k \geq 1$) contem um E -ideal de A .*

Demonstração: Consideremos os train polinômios $q_k(x) = (x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^k$, com $k \geq 0$. Se $a = e + n = e + u + z \in A$ é um elemento qualquer de peso 1, então de (5.6), temos que $q_k(a) = -\frac{1}{2}z^{k+2} + n^{k+3}$ é um elemento do subespaço $N^{k+2} + N^{k+3} \subseteq N^{k+2}$, e como toda potência principal do núcleo N é um ideal de A , temos que os geradores $q_k(a)$ de $E_A(g_k)$ pertencem ao ideal N^{k+2} e daí $E_A(q_k) \subseteq N^{k+2}$ para todo $k \geq 0$. Além disso, temos que N contém $E_A(1, -1)$ devido a (3.7). ■

Proposição 5.7 . *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein não necessariamente de dimensão finita; suponhamos que $N = U_e \oplus Z_e$ seja nil de índice r , isto é, todo elemento $n \in N$ satisfaz $n^r = 0$. Então A satisfaz a train equação $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^{r-2} = 0$ e portanto tem no máximo $2r - 2$ E -ideais que são determinados pelos train polinômios $f_k(x) = (x^2 - x)(x - \frac{1}{2})^k$ e $g_k(x) = (x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^k$, para $k = 0, \dots, r - 2$.*

Demonstração: Se $a = e + n = e + u + z \in A$, então $q_k(a) = -\frac{1}{2}z^{k+2} + n^{k+3}$. Como N é nil de índice r temos para $k+2 = r$, isto é, para $k = r-2$, $q_{r-2}(a) = (a^3 - a^2)(a - \frac{1}{2})^{r-2} = 0$. Assim (A, ω) é uma train álgebra com train equação $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^{r-2} = 0$. Logo, temos que A possui no máximo $2r - 2$ E -ideais, que correspondem aos train polinômios acima descritos, de acordo com o teorema 4.1. ■

Em particular, se A é uma álgebra de Bernstein com núcleo nil de índice 2, então A é de Bernstein-Jordan. De fato temos, para cada elemento $a = e + u + z$ de A de peso 1, $a^2 - a = -z$ e $a^3 - a^2 = 0$ conforme fórmula (5.6), isto é, A satisfaz a train equação $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. O recíproco desta afirmação não é verdade pois existem álgebras de Bernstein-Jordan com núcleo nil de índice $r > 2$. Por exemplo, consideremos a álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus \langle u \rangle \oplus \langle z \rangle$ cuja tabela de multiplicação é $e^2 = e$; $eu = \frac{1}{2}u$; $u^2 = z$, os outros produtos são zero. Aqui temos que se $n = u + z$ é qualquer elemento de N temos que $n^2 = z \neq 0$ e $n^3 = 0$, e A é de Jordan porque $Z^2 = 0$ e $(uz)z = 0$ para todo $z \in Z$. Mais ainda, A é uma álgebra de Bernstein normal porque vale $UZ = 0$.

Observação 1 O fato provado acima (uma álgebra de Bernstein não necessariamente de dimensão finita com núcleo nil de índice r é uma train álgebra de posto $\leq r - 2$), melhora o resultado obtido por Koulibaly e Ouattara [26], que sob as mesmas hipóteses sobre A , provaram que A é uma train álgebra de posto $\leq 2r - 3$.

Observação 2 Embora não seja possível descrever todos os E -ideais em termos de U_e e Z_e numa álgebra de Bernstein geral, a Proposição 5.6 nos dá uma localização parcial deles.

Observação 3 Em uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ temos que $E_A(1, -1) = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e$ de onde sai como consequência que $\dim(U_e Z_e + Z_e^2)$ é um invariante. Como consequência, temos que $E_A(1, -1) = N$ se e somente se $U_e Z_e + Z_e^2 = U_e$. Um problema importante e não resolvido na teoria das álgebras de Bernstein é tentar descrever os seus E -ideais em função dos subespaços U_e e Z_e , generalizando a fórmula $E_A(1, -1) = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e$. Muitos invariantes numéricos surgiriam desta descrição.

Mostraremos agora, através de exemplos, que existem álgebras de Bernstein de dimensão infinita com poucos E -ideais, e também existem álgebras de Bernstein com infinitos E -ideais.

Exemplo 1 Seja A o espaço vetorial de dimensão infinita enumerável sobre um corpo de característica $\neq 2$ com uma base $\{c_0, c_1, \dots\}$ e seja $\omega: A \rightarrow F$ a forma linear definida por $\omega(c_0) = 1$, $\omega(c_i) = 0$ para todo $i \geq 1$. Definamos em A uma multiplicação cuja tábua é $c_0^2 = c_0$, $c_0 c_1 = 0$, $c_0 c_i = \frac{1}{2} c_i$ para todo $i \geq 2$, $c_1 c_i = c_{i+1}$. É fácil ver que A é uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fc_0 \oplus U \oplus Z$ onde $U = \langle c_2, c_3, \dots \rangle$ e $Z = \langle c_1 \rangle$. Esta álgebra de Bernstein é excepcional pois $U^2 = 0$. Além disso as potências principais do núcleo $N = U \oplus Z$, que são ideais de A , são dadas por $N^2 = U = \langle c_2, \dots \rangle$, $N^3 = \langle c_3, \dots \rangle$ e recursivamente $N^k = \langle c_k, \dots \rangle$ para todo $k \geq 1$. Assim temos uma cadeia infinita de ideais de A todos distintos, $N \supset N^2 \supset N^3 \supset \dots$. Usando a Proposição 5.6 concluímos que esta álgebra possui infinitos E -ideais.

Exemplo 2 Consideremos a álgebra de Bernstein de dimensão infinita $A = Fe \oplus U \oplus Z$, onde $U = \langle u_1, \dots, u_i, \dots \rangle$ e $Z = \langle z_1, \dots, z_i, \dots \rangle$ e cuja multiplicação é dada por $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2} u_i$, $u_i^2 = z_i$, e os outros produtos são zeros. Então ela possui só dois E -ideais que são $E_A(1, -1) = Z$ e $E_A(1, -1, 0) = 0$. Em primeiro lugar consideremos a álgebra de Bernstein, de dimensão 3, $A_1 = Fe \oplus \langle u_1 \rangle \oplus \langle z_1 \rangle$ cuja tábua de multiplicação é dada por $e^2 = e$, $eu_1 = \frac{1}{2} u_1$, $u_1^2 = z_1$, os outros produtos sendo zero. Tomemos a seguir o join de k cópias de A_1 , assim obtendo a álgebra de Bernstein $A_k = Fe \oplus \langle u_1, \dots, u_k \rangle \oplus \langle z_1, \dots, z_k \rangle$ cuja tábua de multiplicação é $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2} u_i$, $u_i^2 = z_i$ para $1 \leq i \leq k$ e os outros produtos sendo zero. Assim temos que nossa

álgebra A é $\bigvee_{k=1}^{\infty} A_k$. Seja $a = e + \alpha u_1 + \beta z_1$ um elemento arbitrário de peso 1 em A_1 , então temos que $a^2 = a^3 = e + \alpha u_1 + \alpha^2 z_1$. Assim A_1 satisfaz a train equação $x^2(x-1) = 0$ e pelo Teorema 4.1 resulta que A_1 possui dois E -ideais que são $E_{A_1}(1, -1) = \langle z_1 \rangle$ e $E_{A_1}(1, -1, 0) = 0$. Agora, usando Proposição 3.6 temos que os únicos E -ideais de A_k são $E_{A_k}(1, -1) = \langle z_1, \dots, z_k \rangle$ e $E_{A_k}(1, -1, 0) = 0$. Logo, finalmente temos que os únicos E -ideais de A são $E_A(1, -1) = \langle z_1, \dots, z_k, \dots \rangle = Z$ e $E_A(1, -1, 0) = 0$. ■

5.2 E -ideais em álgebras de Bernstein excepcionais

Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein não necessariamente de dimensão finita. Dizemos que A é excepcional se $U_e^2 = 0$. Lyubich em [29] define o conceito de álgebra de Bernstein excepcional em dimensão finita. O seguinte lema caracteriza a classe das álgebras de Bernstein excepcionais, ver [5] para uma prova:

Lema 5.1 *São equivalentes para uma álgebra de Bernstein A :*

- i) A é excepcional
- ii) $(xy)^2 = \omega(xy)xy$ para todo $x, y \in A$.

Proposição 5.8 *Seja A uma álgebra de Bernstein excepcional não necessariamente de dimensão finita. Então*

- i) O subespaço U_e é um ideal de A
- ii) $N^k \subseteq U_e$, para todo $k \geq 2$
- iii) Se $a = e + u + z$ é um elemento em A , então $a^k = e + u_k$ para cada $k \geq 2$, onde u_k é um determinado elemento em U_e .

Demonstração:

i) Segue de $U_e^2 = 0$, $U_e Z_e \subseteq U_e$ e do fato de que o subespaço U_e é invariante pela multiplicação por e .

ii) Fazemos indução sobre $k \geq 2$. De fato $N^2 = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus U_e^2 = U_e Z_e + Z_e^2 \subseteq U_e$. Agora se $N^k \subseteq U_e$, então $N^{k+1} = N^k N \subseteq U_e N \subseteq U_e$.

iii) Indução sobre k . É claro que $a^2 = e + u_2$, onde $u_2 = 2uz + z^2$. Se $a^k = e + u_k$, então $a^{k+1} = a^k a = e + u_{k+1}$, onde $u_{k+1} = \frac{1}{2}(u + u_k) + u_k z \in U_e$. ■

Proposição 5.9 *Seja A uma álgebra de Bernstein excepcional não necessariamente de dimensão finita. Seja o train polinômio $p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)x$. Então:*

$$E_A(p) \not\subseteq U_e \text{ se } \gamma_{n-1} \neq 0 \text{ e,}$$

$$E_A(p) \subseteq U_e \text{ se } \gamma_{n-1} = 0.$$

Demonstração: Sabemos da Proposição 3.1 que $E_A(p) \subseteq E_A(1, -1)$ para todo train polinômio $p(x)$, assim resta provar que se $\gamma_{n-1} \neq 0$, então $E_A(p) \not\subseteq U_e$ e se $\gamma_{n-1} = 0$ então $E_A(p) \subseteq U_e$. Para isto consideremos $a = e + u + z \in A$ um elemento arbitrário de peso um. Logo

$$\begin{aligned} p(a) &= (e + u_n) + \gamma_1(e + u_{n-1}) + \dots + \gamma_{n-1}(e + u + z) \\ &= u_n + \gamma_1 u_{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} u + \gamma_{n-1} z \end{aligned}$$

Assim temos que se $\gamma_{n-1} = 0$, $p(a) \in U_e$, consequentemente $E_A(p) \subseteq U_e$. Se $\gamma_{n-1} \neq 0$ $p(a) \in U_e \oplus Z_e \not\subseteq U_e$. ■

5.3 E -ideais em álgebras de Bernstein-Jordan

Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein não necessariamente de dimensão finita. O seguinte lema caracteriza a classe das álgebras de Bernstein que são também de Jordan.

Lema 5.2 *São equivalentes para uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$:*

- i) A é de Jordan.
- ii) $Z_e^2 = 0, (uz)z = 0$ para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.
- iii) $x^3 = \omega(x)x^2$ para todo $x \in A$.

Referências para o assunto: [1], [17], [42].

Proposição 5.10 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein-Jordan. Então seus únicos E -ideais são $E_A(1, -1) = U_e Z_e \oplus Z_e$ e $E_A(1, -1, 0) = 0$.*

Demonstração: Do Lema 5.2 iii) temos que toda álgebra de Bernstein-Jordan é uma train álgebra que satisfaz $x^3 - x^2 = 0$ para todo elemento x de A de peso 1. A train equação $x^3 - x^2$ pode-se fatorar como $(x^2 - x)x$, logo pelo Teorema 4.1, existem em A no máximo dois E -ideais que são $E_A(1, -1)$ e $E_A(1, -1, 0)$. Resulta claro que $E_A(1, -1, 0) = 0$, e do Lema 5.2 ii) temos que $E_A(1, -1) = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z = U_e Z_e \oplus Z_e$. ■

Corolário 5.1 *A álgebra zigótica $Z(n+1, 2)$ é Bernstein-Jordan portanto tem dois E -ideais.*

Uma subclasse bastante importante das álgebras de Bernstein-Jordan são as Bernstein normais. Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein não necessariamente de dimensão finita. Dizemos que uma álgebra de Bernstein é *normal* se satisfaz a equação $x^2y = \omega(x)xy$ para todo $x, y \in A$. Lyubich em [29] define álgebra de Bernstein normal em dimensão finita. O seguinte lema caracteriza a classe das álgebras de Bernstein que são também normais.

Lema 5.3 *São equivalentes para uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$:*

- i) *A é normal*
- ii) $U_e Z_e = Z_e^2 = 0$

Referências: [5], [28], [29].

Corolário 5.2 *Toda álgebra de Bernstein normal de dimensão arbitrária possui exatamente dois E -ideais, a saber, $E_A(1, -1) = Z_e$ e $E_A(1, -1, 0) = 0$.*

5.4 E -ideais em álgebras de Bernstein nucleares

Dizemos que uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ é nuclear se $A^2 = A$, isto é, se e somente se $U_e^2 = Z_e$. É fácil ver que se A é uma álgebra de Bernstein qualquer então A^2 é uma álgebra de Bernstein nuclear, o que mostra a existência de subálgebras nucleares em álgebras de Bernstein arbitrárias.

A seguir damos alguns resultados conhecidos, ver [32].

Proposição 5.11 *Em uma álgebra de Bernstein nuclear A , os ideais de A contidos em N são da forma $I = U' \oplus Z'$ onde $U' \subseteq U_e$ e $Z' \subseteq Z_e$.*

Demonstração: Seja $I \neq 0$ um ideal de A . Tomemos $a = \lambda e + u_0 + z_0$ um elemento qualquer de I , então os elementos $ea = \lambda e + \frac{1}{2}u_0$ e $e(ea) = \lambda e + \frac{1}{4}u_0$ pertencem ao ideal I , e também sua diferença $ea - e(ea) = \frac{1}{4}u_0$, logo $\lambda e = (\lambda e + \frac{1}{2}u_0) - \frac{1}{2}u_0$ e $z_0 = (\lambda e + u_0 + z_0) - (\lambda e + u_0)$, estão no ideal I . Se $\lambda \neq 0$, temos que $Fe \subseteq I$, logo

$U_e = (Fe)U_e \subseteq IU_e \subseteq I$ $Z_e = U_e^2 \subseteq (U_e I)(U_e I) \subseteq I^2 \subseteq I$, assim temos neste caso que $I = A$. Se $\lambda = 0$, então $I \subseteq N$ e $u_0 + z_0 \in N$, de onde $u_0, z_0 \in I$. Então $I = U' \oplus Z'$, com $U' = U_e \cap I$ e $Z' = Z_e \cap I$. ■

Para $S \subseteq A$, seja o anulador de S definido por $\text{Ann}(S) = \{a \in A \mid sa = 0, \forall s \in S\}$. Para todo S , $\text{Ann}(S)$ é um subespaço vetorial de A . Em contraste com o caso associativo, $\text{Ann}(S)$ não é em geral um ideal. Mas temos:

Proposição 5.12 *O anulador de N , $\text{Ann}(N)$, é um ideal em A tal que $\text{Ann}(N) \subseteq N$. De fato $\text{Ann}(N) = U' \oplus Z'$ com $U' = U_e \cap \text{Ann}(U_e)$ e $Z' = \text{Ann}(A)$.*

Demonstração: É claro que $N\text{Ann}(N) = 0 \subseteq \text{Ann}(N)$. Devemos provar, agora, que $e\text{Ann}(N) \subseteq \text{Ann}(N)$. para isto, seja $a = \lambda e + u_0 + z_0 \in \text{Ann}(N)$, logo temos que provar que $ea = \lambda e + \frac{1}{2}u_0 \in \text{Ann}(N)$. Primeiro mostramos que $u_0 \in \text{Ann}(N)$. Como $(\lambda e + u_0 + z_0)u = (\frac{1}{2}\lambda u + uz_0) + uu_0 = 0$ para todo $u \in U_e$, então $uu_0 = 0$ e $\frac{1}{2}\lambda u + uz_0 = 0$ para todo $u \in U_e$. Logo, usando a identidade (5.4) ii) obtemos $0 = uu_0 = 2u(uu_0) = -u^2u_0$ para todo $u \in U_e$. Assim para todo $u_1, u_2 \in U_e$ temos $0 = (u_1 + u_2)^2u_0 = u_1^2u_0 + 2(u_1u_2)u_0 + u_2^2u_0 = 2(u_1u_2)u_0$, de onde $(u_1u_2)u_0 = 0$, isto é, $u_0U_e^2 = u_0Z_e = 0$, logo $u_0 \in \text{Ann}(N)$. Para $u_1, u_2 \in U_e$ temos $\frac{1}{2}\lambda u_1 + u_1z_0 = 0$ e $\frac{1}{2}\lambda u_2 + u_2z_0 = 0$ de onde multiplicando a primeira igualdade por u_2 e a segunda por u_1 e somando obtemos $\lambda u_1u_2 = 0$ ou equivalentemente $\lambda z = 0$ para todo $z \in Z_e$. Se $\lambda \neq 0$ então $Z_e = 0$ assim, como $a - u_0 = \lambda e + z_0 = \lambda e \in \text{Ann}(N)$, $e \in \text{Ann}(N)$. Então $U_e = eU_e \subseteq U_e\text{Ann}(N) = 0$ que implica que $N = 0$ e consequentemente $\text{Ann}(N) = A \cong F$. Se $\lambda = 0$, $e(u_0 + z_0) = \frac{1}{2}u_0 \in \text{Ann}(N)$ e pelo anterior $\text{Ann}(N)$ é ideal de A tal que $\text{Ann}(N) \subseteq N$. É claro que $u_0 \in \text{Ann}(N)$ que é equivalente a $u_0 \in \text{Ann}(U_e) \cap U_e$ e além disso $Z_e \cap \text{Ann}(N) = \text{Ann}(A)$. ■

Proposição 5.13 *Se $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ é uma álgebra de Bernstein nuclear, então*

- i) $Z_e^2 \subseteq \text{Ann}(N)$
- ii) $(uz)z \in \text{Ann}(N)$ para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$

Demonstração: i) De $Z_e^2 \subseteq U_e$ e $U_eZ_e^2 = 0$ concluímos que $Z_e^2 \subseteq \text{Ann}(U)$, e $Z_e^2 \subseteq U \cap \text{Ann}(U) \subseteq \text{Ann}(N)$.

ii) É suficiente mostrar que o elemento $(uz)z$ anula U . De fato temos $u_1((uz)z) = -\frac{1}{2}(uu_1)z^2 = 0$, a última igualdade sendo zero como uma linearização de $u^2z^2 = 0$ ■

Proposição 5.14 *Toda álgebra de Bernstein nuclear é uma train álgebra que satisfaz a train equação $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^2 = 0$.*

Demonstração: Em uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, as potências principais, até grau quatro, de todo elemento $a = e + u + z$ são dadas por $a^2 = e + u + u^2 + 2uz + z^2$, $a^3 = e + u + u^2 + 2uz + \frac{1}{2}z^2 + u^2z + z^3$ e $a^4 = e + u + u^2 + 2uz + \frac{1}{4}z^2 + \frac{3}{2}u^2z + z^3 + (u^2z)z + z^4$. Mas, se A for nuclear temos que os elementos $(u^2z)z = 0$ e $z^3 = 0$, consequentemente $z^4 = 0$ pois $u^2z, z^2 \in Z_e^2 \subseteq \text{Ann}(N)$. Daí, é fácil ver que $a^4 - \frac{3}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^2 = 0$. Ver também [34]. ■

Proposição 5.15 *Toda álgebra de Bernstein nuclear possui no máximo três E -ideais.*

Demonstração: Da Proposição 5.14 segue que todo elemento de peso 1 de A satisfaz o train polinômio $x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = 0$ que pode-se fatorar como $(x^2 - x)x(x - \frac{1}{2}) = 0$. Pelo Teorema 1 do Cap 4 existem no máximo 4 E -ideais que são $E_A(1, -1) = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e = [U_e^3 + (U_e^2)^2] \oplus U_e^2$, $E_A(1, -1, 0)$, $E_A(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e $E_A(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0) = 0$. Agora vamos calcular o E -ideal $E_A(1, -1, 0)$ e para isto, seja $a = e + u + z$ um elemento genérico de A de peso 1. Então

$$\begin{aligned} a^2 &= e + u + u^2 + 2uz + z^2 \\ a^3 &= e + u + u^2 + 2uz + \frac{1}{2}z^2 + u^2z + 2(uz)z \end{aligned}$$

logo

$$a^3 - a^2 = -\frac{1}{2}z^2 + 2u^2z + 2(uz)z$$

é um elemento em U_e e observamos que as duas primeiras parcelas pertencem a $Z_e^2 \subseteq U_e$.

Por outro lado, sejam $b_1 = e + z$ e $b_2 = e - z$, onde $z \in Z_e$ é elemento qualquer. Então temos $(b_2^3 - b_2^2) + (b_1^3 - b_1^2) = -z^2$, assim para todo elemento $z \in Z_e$, $z^2 \in E_A(1, -1, 0)$ e como para todo $z_1, z_2 \in Z_e$, $z_1 z_2 = \frac{1}{2}((z_1 + z_2)^2 - z_1^2 - z_2^2)$ resulta que $Z_e^2 = (U_e^2)^2 \subseteq E_A(1, -1, 0)$. Além disso, $\frac{1}{2}((a^3 - a^2) + \frac{1}{2}z^2 + 2u^2z) = (uz)z \in E_A(1, -1, 0)$ para todo elemento $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Daí, temos que $E_A(1, -1, 0)$ é a soma dos subespaços $Z_e^2 = (U_e^2)^2$ e aquele gerado pelos elementos da forma $(uz)z$ com $u \in U_e$, $z \in Z_e$. Finalmente, é fácil provar que $E_A(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = E_A(1, -1)$. Assim (A, ω) tem no máximo 3 E -ideais. ■

Problema É possível descrever o ideal gerado pelos produtos $(uz)z : u \in U_e, z \in Z_e$, em termos dos subespaços U_e e Z_e ?

Capítulo 6

E -ideais em álgebras que satisfazem

$$(x^2)^2 = \omega(x)^3 x$$

6.1 Preliminares

Neste capítulo F é um corpo de característica diferente de 2 e 3, e (A, ω) uma álgebra bária comutativa não associativa de dimensão finita sobre F . Seja $\delta \in F$. Etherington [13] provou que toda train álgebra comutativa que satisfaz a train equação em potências principais

$$x^3 - (1 + \delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = 0 \quad (6.1)$$

também satisfaz a train equação em potências plenas

$$x^2x^2 - (1 + 2\delta)\omega(x)^2x^2 + 2\delta\omega(x)^3x = 0 \quad (6.2)$$

O problema recíproco foi estudado por S. Walcher [43]. Ele provou que toda álgebra que satisfaz (6.2) também satisfaz (6.1), com exceção dos valores $\delta = 0$ e $\delta = -\frac{1}{2}$. O caso $\delta = 0$, isto é, álgebras que satisfazem $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$, corresponde à classe das álgebras de Bernstein, que é uma classe de álgebras báricas bastante estudada. O caso $\delta = -\frac{1}{2}$, isto é, álgebras que satisfazem $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$, é o mais desconhecido. A seguir, vamos reproduzir aqui resultados obtidos por Walcher em [38], que serão necessários para o cálculo dos E -ideais nesta classe de álgebras. Vamos provar também alguns resultados sobre ideais destas álgebras.

Seja (A, ω) uma álgebra bária que satisfaz

$$(x^2)^2 = \omega(x)^3 x \quad (6.3)$$

Então A também satisfaz as linearizações de (6.3):

$$x^2(xy) = \frac{3}{4}\omega(x)^2\omega(y)x + \frac{1}{4}\omega(x)^3y \quad (6.4)$$

$$2x^2(yz) + 4(xy)(xz) = 3\omega(x)\omega(y)\omega(z)x + \frac{3}{2}\omega(x)^2(\omega(y)z + \omega(z)y) \quad (6.5)$$

Sustituindo x por x^2 em (6.4) e usando (6.3) obtem-se:

$$2\omega(x)^3x(x^2y) = 2(x^2)^2(x^2y) = \frac{3}{2}\omega(x)^4\omega(y)x^2 + \frac{1}{2}\omega(x)^6y$$

e se usamos o argumento de densidade como na prova do Teorema 2.1 resulta:

$$x(x^2y) = \frac{3}{4}\omega(x)\omega(y)x^2 + \frac{1}{4}\omega(x)^3y \quad (6.6)$$

Para $y \in N$ em (6.4) e (6.6) temos

$$x^2(xy) = \frac{1}{4}\omega(x)^3y = x(x^2y) \quad (6.7)$$

Se $x, y \in N$ em (6.7), temos $x^2(xy) = x(x^2y) = 0$, além disso, se $x = y$ temos $x^2x^2 = x^4 = 0$ mostrando que N é uma nilálgebra de Jordan, portanto nilpotente, devido a [39, Th 4.3]. Será de utilidade no futuro, a linearização completa da identidade $n^2n^2 = 0, n \in N$, a saber

$$(n_1n_2)(n_3n_4) + (n_1n_3)(n_2n_4) + (n_1n_4)(n_2n_3) = 0 \quad (6.8)$$

As potências principais N^k de N são ideais de A , para todo $k \geq 1$. Com efeito, é óbvio para $k = 1$. Agora procedemos por indução. É claro que N^k é ideal de N para todo $k \geq 1$, pois de $N^2 \subseteq N$ concluímos N é ideal de N , e se N^k é ideal de N , temos $N^{k+1}N = (N^kN)N \subseteq N^kN = N^{k+1}$. Agora mostramos por indução que as potências principais N^r são invariantes pelo operador L_c onde $c \in A$ com $\omega(c) = 1$. A afirmação é trivial para $r = 1$. Suponhamos que N^k é invariante por L_c . Usando $c^2 = c + n$ para algum elemento $n \in N$ e (6.5) com $x = c, y \in N$ e $z \in N^k$ encontramos que

$$2c(yz) + 2n(yz) + 4(cy)(cz) = 0$$

onde $2n(yz) \in N(NN^k) \subseteq NN^k = N^{k+1}$ e $4(cy)(cz) \in NN^k + N^{k+1}$, assim $c(xy) \in N^{k+1}$, isto é, N^{k+1} é invariante pelo operador L_c . Assim (A, ω) é uma train álgebra especial, portanto genética e que satisfaz a train equação

$$x^4 - \frac{3}{4}\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{4}\omega(x)^3x = 0 \quad (6.9)$$

Para provar (6.9) é só tomar $y = x$ em (6.6).

Para cada $d \in A$ com $\omega(d) = 1$ o elemento $e = \frac{1}{8}(3d + 3d^2 + 2d^3)$ é um idempotente de peso 1. A verificação deste fato é um simples cálculo. Fixamos um idempotente e de peso 1 em A e seja y um elemento arbitrário em $N = \ker \omega$. Usando (6.4), resulta $4e(ey) = y$, assim a restrição do operador L_e a N é anulada pelo polinômio $4X^2 - 1 = (2X - 1)(2X + 1)$ em uma indeterminada X . Desta maneira, o núcleo N escreve-se como $N = U_e \oplus V_e$ onde $U_e = \{x \in N | ex = \frac{1}{2}x\}$ e $V_e = \{x \in N | ex = -\frac{1}{2}x\}$. Assim temos uma decomposição de Peirce de A com respeito ao idempotente fixado e , isto é, $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$. Além disso, pode-se provar usando as linearizações de (6.3) e que

$$U_e^2 \subseteq V_e \quad ; \quad U_e V_e \subseteq U_e \quad ; \quad V_e^2 \subseteq V_e \quad (6.10)$$

Em [43, Th 3] aparece um exemplo de uma álgebra que satisfaz (6.3) que não é train álgebra de posto 3. Por último, uma álgebra que satisfaz (6.3) é uma train álgebra de posto ≤ 3 se e somente se $V_e^2 = 0$. Notemos que de [9] segue que para toda álgebra que satisfaz (6.1) com $\delta = -\frac{1}{2}$, $V_e^2 = 0$, e toda álgebra de posto 2 sempre satisfaz $N^2 = 0$.

Observação: Nem toda álgebra que satisfaz (6.9) satisfaz (6.3). Con efeito, consideremos a álgebra bária (A, ω) gerada como espaço vetorial por $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$, cujo produto é dado por $c_0^2 = c_0$; $c_0c_1 = \frac{1}{2}c_1$; $c_0c_2 = -\frac{1}{2}c_2$; $c_0c_3 = -\frac{1}{2}c_3$; $c_1^2 = c_2$; $c_1c_2 = c_3$; os outros produtos são zeros, e tal que $\omega(c_0) = 1$, $\omega(c_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Se $a = c_0 + \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 + \alpha_3c_3$ é um elemento arbitrário de A de peso 1 então, $a^2 = c_0 + \alpha_1c_1 + (\alpha_1^2 - \alpha_2)c_2 + (2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)c_3$ logo $a^2 - a = (\alpha_1^2 - \alpha_2)c_2 + (2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3)c_3$. Multiplicando a expressão acima por a obtemos $(a^2 - a)a = -\frac{1}{2}((\alpha_1^2 - 2\alpha_2)c_2 + (2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3)c_3) + \alpha_1(2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3)c_3$ e daí $(a^2 - a)a + (a^2 - a)\frac{1}{2} = (a^2 - a)(a + \frac{1}{2}) = \alpha_1(2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3)c_3$ ou equivalentemente, temos $a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a = \alpha_1(2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3)c_3$. Multiplicando por a a expressão acima obtemos $(a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a)a = -\frac{1}{2}\alpha_1(2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3)c_3$ e assim $(a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a)(a + \frac{1}{2}) = 0$, isto é, todo elemento $a \in A$ de peso 1 satisfaz $a^4 - \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a = 0$. Desta maneira vemos que A é uma train álgebra de posto 4 com train equação (6.9), porém esta álgebra A não satisfaz

(6.3). Para isto, consideremos o elemento $b = c_0 + c_1$ em A . Então $b^2 = c_0 + c_1 + c_2$ e daí, $(b^2)^2 = c_0 + c_1 + 2c_3 \neq b$.

6.2 Tipo e ideais

Proposição 6.1 *Seja (A, ω) uma álgebra bária que satisfaz (6.3), tal que $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é a decomposição de Peirce com respeito ao idempotente e . Sejam u e v elementos arbitrários em U_e e em V_e respectivamente. Então são válidas as identidades:*

$$\begin{array}{ll}
 i) & u^3 = 0 \\
 ii) & 2u(uv) = u^2v \\
 iii) & 2(uv)v = uv^2 \\
 iv) & v^3 = 0 \\
 v) & (u^2)^2 = 0 \\
 vi) & u^2(uv) = 0 \\
 vii) & 2(uv)^2 + u^2v^2 = 0 \\
 viii) & (uv)v^2 = 0 \\
 ix) & (v^2)^2 = 0
 \end{array} \tag{6.11}$$

Demonstração: (sucinta) Ao vetor genérico $x = \omega(x)e + \lambda u + \mu v$, onde $\lambda, \mu \in F$ impomos a identidade $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ e igualamos os termos que contêm as diferentes potências de λ e μ . ■

Observação: As identidades v) e ix) de (6.11) são casos particulares da identidade $(n^2)^2 = 0$ válida para todo $n \in N$.

Para nosso trabalho serão úteis algumas linearizações de i), ii), iii) e iv) de (6.11), a saber,

$$\begin{array}{ll}
 i) & 2(u_1u_2)u_2 + u_1u_2^2 = 0 \\
 ii) & (u_1u_2)u_3 + (u_2u_3)u_1 + (u_3u_1)u_2 = 0 \\
 iii) & u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = (u_1u_2)v \\
 iv) & (uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 = u(v_1v_2) \\
 v) & 2(v_1v_2)v_2 + v_1v_2^2 = 0 \\
 vi) & (v_1v_2)v_3 + (v_2v_3)v_1 + (v_3v_1)v_2 = 0
 \end{array} \tag{6.12}$$

válidas para elementos arbitrários $u, u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $v, v_1, v_2, v_3 \in V_e$.

Proposição 6.2 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ satisfazendo (6.3). Então os elementos idempotentes de A são da forma $e + u + \frac{1}{2}u^2$, onde $u \in U_e$.*

Demonstração: Se $u \in U_e$, então $(e + u + \frac{1}{2}u^2)^2 = e + u^2 + \frac{1}{4}(u^2)^2 + u - \frac{1}{2}u^2 + u^3 = e + u + \frac{1}{2}u^2$, o que se baseia em (i) e (v) de (6.11). Por outro lado, seja $f = e + u + v$, $u \in U_e$ e $v \in V_e$ um elemento idempotente em A . Como $f^2 = e + (u + 2uv) + (u^2 + v^2 - v)$, então de $f^2 = f$ resulta que $uv = 0$ e $u^2 + v^2 = 2v$, e daí $v = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(u^2 + v^2))^2 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{8}((u^2)^2 + 2u^2v^2 + (v^2)^2) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{8} - 4(uv)^2 = \frac{1}{2}u^2$. Esta igualdade usa (v), (ix) e (vii) de (6.11) e assim $f = e + u + \frac{1}{2}u^2$. ■

Proposição 6.3 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de Peirce de uma álgebra básica A satisfazendo (6.3), relativa ao idempotente e . Para $u_0 \in U_e$ fixo, consideremos o idempotente $f = e + u_0 + \frac{1}{2}u_0^2$. Então a decomposição de Peirce de A com respeito ao idempotente f é $A = Ff \oplus U_f \oplus V_f$, onde $U_f = \{u + uu_0 | u \in U_e\}$ e $V_f = \{v - vu_0 | v \in V_e\}$.*

Demonstração: Seja $x = u + v$, $u \in U_e$, $v \in V_e$ um elemento arbitrário em $N = \ker \omega$. Suponhamos que $x \in U_f$. Então $fx = \frac{1}{2}x$, que, por sua vez, é equivalente a

$$\left(\frac{1}{2}u + u_0v + \frac{1}{2}u_0^2u\right) + \left(-\frac{1}{2}v + u_0u + \frac{1}{2}u_0^2v\right) = \frac{1}{2}(u + v)$$

e esta igualdade implica que $u_0v + \frac{1}{2}u_0^2u = 0$ e $u_0u + \frac{1}{2}u_0^2v = v$. Multiplicando a primeira por u_0 obtemos $u_0(u_0v) + \frac{1}{2}u_0(u_0^2u) = 0$, de onde usando ii) de (6.11) e o fato de N ser de Jordan resulta que esta igualdade é equivalente a $u_0^2v + u_0^2(u_0u) = 0$. Finalmente, usando (6.8) resulta $u_0^2v = 0$, daí $v = u_0u$, de onde $x = u + uu_0$. Reciprocamente, temos

$$fx = (e + u_0 + \frac{1}{2}u_0^2)(u + uu_0) = \frac{1}{2}(u + uu_0) + (u_0(u_0u) + \frac{1}{2}u_0^2u) + \frac{1}{2}u_0^2(u_0u)$$

Mas, usando, respectivamente, i) de (6.11) e (6.8) resulta que a segunda e terceira parcelas são zeros. Portanto $fx = \frac{1}{2}(u + uu_0) = \frac{1}{2}x$. De maneira análoga provamos que $V_f = \{v - vu_0 : v \in V_e\}$. ■

Observemos que as funções $u \mapsto u + uu_0$ e $v \mapsto v - vu_0$ estabelecem isomorfismos de espaços vetoriais entre U_e e U_f e entre V_e e V_f respectivamente. Isto quer dizer que, ainda que os subespaços U_e e V_e dependam da escolha do idempotente, suas dimensões são invariantes. Assim, podemos definir o invariante *tipo* de A como o par $(1 + r, s)$ onde $\dim U_e = r$ e $\dim V_e = s$.

Proposição 6.4 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra básica que satisfaz (6.3). Então os seguintes subespaços são ideais de A : $U_e V_e \oplus V_e$, $U_e V_e^2 \oplus V_e^2$, $U_e V_e \oplus (U_e^2 + V_e^2)$ e $U_e V_e^2 \oplus U_e^2 V_e$.*

Demonstração: É suficiente provar que estes subespaços são ideais do núcleo N , porque é claro que cada um deles é invariante pela multiplicação por e . Por exemplo se $u_1v_1 + u_2u_3 + v_2v_3$ é um gerador aditivo de $U_eV_e \oplus (U_e^2 + V_e^2)$ então $e(u_1v_1 + u_2u_3 + v_2v_3) = \frac{1}{2}(u_1v_1 - u_2u_3 - v_2v_3) \in U_eV_e \oplus (U_e^2 + V_e^2)$ e consequentemente o subespaço $U_eV_e \oplus (U_e^2 + V_e^2)$ é invariante pela multiplicação por e . Agora temos:

(i) $(U_eV_e \oplus V_e)(U_e \oplus V_e) = U_e(U_eV_e) + (U_eV_e)V_e + U_eV_e + V_e^2 \subseteq U_e^2 + U_eV_e + V_e^2 \subseteq U_eV_e \oplus V_e$. Assim $U_eV_e \oplus V_e$ é ideal de A .

(ii) $(U_eV_e^2 \oplus V_e^2)(U_e \oplus V_e) = U_e(U_eV_e^2) + (U_eV_e^2)V_e + U_eV_e^2 + V_e^3$. Mas $V_e^3 = V_e^2V_e \subseteq V_e^2$, e segue de iv), iii) de (6.12) e de (6.8) que

$$\begin{aligned} u_1(u_2(v_1v_2)) &= u_1((u_2v_1)v_2 + (u_2v_2)v_1) \\ &= (u_1(u_2v_1))v_2 - (u_2v_1)(u_1v_2) + (u_1(u_2v_2))v_1 - (u_2v_2)(u_1v_1) \\ &= (u_1(u_2v_1))v_2 + (u_1(u_2v_2))v_1 + (u_1u_2)(v_1v_2) \end{aligned}$$

isto é, o elemento $u_1(u_2(v_1v_2))$ pertence ao subespaço $U_e^2V_e + U_e^2V_e^2$ que está contido em V_e^2 , assim $U_e(U_eV_e^2) \subseteq U_e^2V_e + U_e^2V_e^2 \subseteq V_e^2$. Agora usando iii) de (6.12) temos $(u(v_1v_2))v_3 = u(v_3(v_1v_2)) - (uv_3)(v_1v_2) \in UV^2$, assim $(U_eV_e^2)V_e \subseteq U_eV_e^2$ e daí temos que $(U_eV_e^2 \oplus V_e^2)(U_e \oplus V_e) \subseteq U_eV_e^2 \oplus V_e^2$.

(iii) $(U_eV_e \oplus (U_e^2 + V_e^2))(U_e \oplus V_e) = [(U_eV_e)V_e + U_e^2U_e + U_eV_e^2] \oplus [U_e(U_eV_e) + U_e^2V_e + V_eV_e^2] \subseteq U_eV_e \oplus (U_e^2 + V_e^2)$. Assim $U_eV_e \oplus (U_e^2 + V_e^2)$ também é um ideal de A .

(iv) Da parte (ii) acima temos que $U_e(U_eV_e^2) \subseteq U_e^2V_e + U_e^2V_e^2 \subseteq U_e^2V_e$ e usando iii) de (6.12) temos que $((u_1u_2)v_1)v_2 = (u_1(u_2v_1))v_2 + (u_2(u_1v_1))v_2$ pertence a $U_e^2V_e$, então $(U_e^2V_e)V_e \subseteq U_e^2V_e$ e de iv) de (6.12) temos $u(v_1v_2)v_3 = u((v_1v_2)v_3) - (uv_3)(v_1v_2) \in U_eV_e^2$. Assim $(U_eV_e^2)V_e \subseteq U_eV_e^2$ e como $U_e(U_e^2V_e) \subseteq U_eV_e^2$ resulta que $U_eV_e^2 \oplus U_e^2V_e$ é um ideal de A . ■

6.3 Cálculo dos E -ideais por seqüências recorrentes

Vimos que toda álgebra bária que satisfaz $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ é uma train álgebra de posto quatro com train equação $x^4 - \frac{3}{4}\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{4}\omega(x)^3x = 0$. Este train polinômio se

fatora como $(x^2 - x)(x + \frac{1}{2})^2 = 0$ e portanto usando o Teorema 1 do Capítulo 4, resulta que cada álgebra satisfazendo (6.3) tem no máximo três E -ideais, determinados pelos train polinômios $x^2 - \omega(x)x$; $x^3 - \frac{1}{2}\omega(x)x^2 - \frac{1}{2}\omega(x)^2x$ e $x^4 - \frac{3}{4}\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{4}\omega(x)^3x$. Assim para determinar efetivamente estes E -ideais, devemos considerar geradores $a^2 - \omega(a)a$, $a^3 - \frac{1}{2}\omega(a)a^2 - \frac{1}{2}\omega(a)^2a$ e $a^4 - \frac{3}{4}\omega(a)^2a^2 - \frac{1}{4}\omega(a)^3a$ para um elemento arbitrário de peso 1 $a = e + u + v$ em $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ e assim obter os E -ideais $E_A(1, -1)$, $E_A(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $E_A(1, 0, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$, em termos dos subespaços U_e e V_e . É claro que $E_A(1, 0, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}) = 0$.

Vamos a seguir determinar os E -ideais na classe das álgebras bárias que satisfazem $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ usando um método que, em princípio, pode ser usado em outras classes de álgebras bárias onde haja uma decomposição de Peirce. Basta que o núcleo da função peso seja nilpotente. Isto ficará claro após os cálculos que seguem. Porém, se o índice de nilpotência do núcleo for muito alto, o método apresentado aqui exige cálculos mais elaborados.

Seja $x = e + u + v$ um elemento arbitrário em A de peso 1. Então para todo $k \geq 1$,

$$x^k = e + u + a_k v + b_k u^2 + c_k uv + d_k v^2 + f_k u^2 v + g_k uv^2 \quad (6.13)$$

onde $a_k, \dots, g_k$ são números racionais convenientes. Naturalmente os valores numéricos das sequências $a_k, \dots, g_k$ dependem da álgebra A que está em questão. Monômios em u e em v de grau ≥ 4 não aparecem ao calcular as potências de x por causa das relações (6.11). Por exemplo o monômio $(uv^2)(uv)$ sempre é zero: $(uv^2)(uv) = -u^2v^3 - (uv)uv^2 = 0$ (aqui usamos (6.8); i) e viii) de (6.11) respectivamente). Para melhor conhecer as sequências $a_k, \dots, g_k$, tomamos a expressão de x^{k+1} dada por (6.13) e comparamos com $x^k x$, obtendo o seguinte sistema de equações de diferenças, com valores iniciais: $a_1 = 1, b_1 = c_1 = d_1 = f_1 = g_1 = 0$

$$\begin{cases} 2a_{k+1} + a_k + 1 = 0 \\ 2b_{k+1} + b_k - 2 = 0 \\ 2c_{k+1} - c_k - 2a_k - 2 = 0 \\ 2d_{k+1} + d_k - 2a_k = 0 \\ 2f_{k+1} + f_k - 2b_k - c_k = 0 \\ 2g_{k+1} - g_k - c_k - 2d_k = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

É fácil provar por indução, usando (6.14), que para todo $k \geq 1$,

$$a_k + c_k = 1, a_k + 2b_k = 1, 2d_k + 2f_k + a_k = 1, f_k = g_k \quad (6.15)$$

Deixamos esta tarefa para o leitor. Denotemos por $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{G}$ as sequências

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (g_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Assim de (6.15) temos

$$\mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathbf{1}, \mathcal{A} + 2\mathcal{B} = \mathbf{1}, 2\mathcal{D} + 2\mathcal{F} + \mathcal{A} = \mathbf{1}, \mathcal{F} = \mathcal{G} \quad (6.16)$$

onde $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$. Seja para cada $k \geq 1$, $\mathcal{A}_k = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_1) \in F^k$ e similarmente para $\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k, \mathcal{D}_k, \mathcal{F}_k, \mathcal{G}_k, \mathbf{1}_k$. As relações (6.16) também são válidas para estes vetores de F^k .

Um dado train polinômio $p(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x) x$ pode ser identificado com o vetor $p = (1, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \in F^n$. O conjunto de todos os train polinômios de grau n é identificado com a variedade linear de F^n definida pelas equações $x_1 + \dots + x_n = 0$ e $x_1 = 1$.

Lema 6.1 *Para toda álgebra bária (A, ω) que satisfaz (6.3), o ideal P de Etherington é dado por $U_e V_e \oplus V_e$. Em particular, $\dim(U_e V_e)$ é um invariante para estas álgebras.*

Demonstração: Para todo elemento $a = e + u + v \in A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, temos

$$a^2 - a = (e + u + v)^2 - (\omega(a)e + u + v) = 2uv + (u^2 + v^2 - 2v).$$

Como $2uv \in U_e V_e$ e $u^2 + v^2 - 2v \in V_e$, temos que $a^2 - a \in U_e V_e \oplus V_e$, devido a que este subespaço é um ideal, conforme já provamos na Proposição 6.4. Reciprocamente se $v \in V_e$ então $(e + v)^2 - (e + v) = -2v + v^2$ assim $v = -\frac{1}{2}(e + v)^2 - (e + v) - v^2 \in E_A(1, -1)$, daí temos que V_e , e conseqüentemente $U_e V_e \oplus V_e$, está contido em $E_A(1, -1)$. ■

Seja agora $\langle, \rangle$ a forma bilinear usual em F^n , isto é, $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Se substituimos cada potência x^k de x dada por (6.13) em $p(x)$ dado por (3.1), obtemos após as devidas simplificações (que omitimos aqui):

$$\begin{aligned} p(x) = & \langle \mathbf{1}_n, p \rangle e + \langle \mathbf{1}_n, p \rangle u + \langle \mathcal{A}_n, p \rangle v \\ & + \langle \mathcal{B}_n, p \rangle u^2 + \langle \mathcal{C}_n, p \rangle uv + \langle \mathcal{D}_n, p \rangle v^2 \\ & + \langle \mathcal{F}_n, p \rangle u^2 v + \langle \mathcal{G}_n, p \rangle uv^2 \end{aligned}$$

Como $\langle 1_n, p \rangle = 1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$, os dois primeiros termos desaparecem. Além disso, por (6.16), podemos expressar $\mathcal{A}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n$ e $\mathcal{G}_n$ como combinações lineares de $\mathcal{B}_n, \mathcal{F}_n$ e 1_n . Ao fazer isto, obtemos:

$$\begin{aligned} p(x) &= \langle 1_n - 2\mathcal{B}_n, p \rangle v + \langle \mathcal{B}_n, p \rangle u^2 + \langle 2\mathcal{B}_n, p \rangle uv \\ &\quad + \langle \mathcal{B}_n - \mathcal{F}_n, p \rangle v^2 + \langle \mathcal{F}_n, p \rangle (u^2v + uv^2) \\ &= \langle \mathcal{B}_n, p \rangle (-2v + u^2 + 2uv) + \langle \mathcal{B}_n - \mathcal{F}_n, p \rangle v^2 \\ &\quad + \langle \mathcal{F}_n, p \rangle (u^2v + uv^2) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Agora provamos que existem 3 classes de equivalências de train polinômios, descritas geometricamente pelo teorema seguinte.

Teorema 6.1 *Seja (A, ω) uma álgebra bária satisfazendo (6.3):*

- i) *Se os vetores p e $\mathcal{B}_n$ não são ortogonais, então $E_A(p) = U_e V_e \oplus V_e = E_A(1, -1)$.*
- ii) *Se p e $\mathcal{B}_n$ são ortogonais mas p e $\mathcal{F}_n$ não são, então $E_A(p) = U_e V_e^2 \oplus V_e^2$.*
- iii) *Se p é ortogonal a $\mathcal{B}_n$ e a $\mathcal{F}_n$, então $E_A(p) = 0$.*

Demonstração:

i) Sabemos que $E_A(1, -1) = U_e V_e \oplus V_e$ e $E_A(p) \subseteq E_A(1, -1)$. Para provar a proposição é suficiente mostrar que $V_e \subseteq E_A(p)$. Se $v \in V$, então

$$p(e + v) = -2 \langle \mathcal{B}_n, p \rangle v + \langle \mathcal{B}_n - \mathcal{F}_n, p \rangle v^2$$

e

$$p(e - v) = 2 \langle \mathcal{B}_n, p \rangle v + \langle \mathcal{B}_n - \mathcal{F}_n, p \rangle v^2$$

e daí

$$v = \frac{1}{4} \langle \mathcal{B}_n, p \rangle^{-1} (p(e - v) - p(e + v)) \in E_A(p)$$

ii) Como $\langle \mathcal{B}_n, p \rangle = 0$, a igualdade (6.17) se reduz a

$$p(x) = \langle \mathcal{F}_n, p \rangle (-v^2 + u^2v + uv^2) \quad (6.18)$$

que pertence a $U_e V_e^2 \oplus V_e^2$. Como este subespaço é um ideal devido à Proposição 6.4, temos que $E_A(p) \subseteq U_e V_e^2 \oplus V_e^2$. Para provar a inclusão inversa é suficiente mostrar que $V_e^2 \subseteq E_A(p)$ quando p não é ortogonal a $\mathcal{F}_n$. Suponhamos inicialmente que $v^2 \in V^2$. Então $p(e + v) = - \langle \mathcal{F}_n, p \rangle v^2$ assim $v^2 = - \langle \mathcal{F}_n, p \rangle^{-1} p(e + v) \in E_A(p)$. Para um gerador aditivo $v_1 v_2$ de V_e^2 , é suficiente lembrar que $2v_1 v_2 = (v_1 + v_2)^2 - v_1^2 - v_2^2 \in E_A(p)$.

iii) É suficiente ver de (6.18) que $p(x) = 0$ quando p e $\mathcal{F}_n$ são ortogonais. ■

Nota: Os E -ideais para álgebras que satisfazem $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ estão determinados pelos train polinômios $x^2 - \omega(x)x$; $x^3 - \frac{1}{2}\omega(x)x^2 - \frac{1}{2}\omega(x)^2x$ e $x^4 - \frac{3}{4}\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{4}\omega(x)^3x$ respectivamente, em grau mínimo.

Para finalizar o capítulo temos a seguinte

Proposição 6.5 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra bária satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$. Então $U_eV_e \oplus (U_e^2 + V_e^2)$ é o ideal gerado pelos quadrados dos elementos de A de peso 0 e $U_eV_e^2 \oplus U_e^2V_e$ é o ideal gerado pelos cubos dos elementos de A de peso zero.*

A demonstração desta proposição é essencialmente igual à demonstração do Lema 6.1 e porisso será omitida.

Observemos que o teorema 6.1 e o Lema 6.1 nos dizem que $\dim U_eV_e$, $\dim(U_eV_e^2 \oplus V_e^2)$, $\dim(U_e^2 + V_e^2)$ e $\dim(U_eV_e^2 \oplus U_e^2V_e)$ são invariantes, o que é útil para o problema de classificação destas álgebras. Esta classificação, ao que tudo indica, ainda não foi iniciada. O estudo destas álgebras poderia ajudar no estudo de train álgebras de posto 4, um assunto ainda muito incipiente e cheio de problemas difíceis.

Bibliografia

- [1] Alcalde M.T., Baeza R.; Burgueño C., *Autour des algèbres de Bernstein*. Arch.Math. **53**, 134-140 (1989).
- [2] Andrade R; Labra A; Catalán A., *The identity $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$ in baric algebras*. Kluwer Academic Publishers, (to appear).
- [3] Catalán A.; Costa R., *Acerca de álgebras báricas satisfaciendo $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$* , Cubo **8**, 25-29 (1992).
- [4] Catalán A.; Costa R.; Mallol C., *E-ideals in baric algebras*, (Pre-print).
- [5] Correa I., *Identidades polinomiais em álgebras de Bernstein*. Tese de doutorado, IME-USP (1993).
- [6] Cortes T., *Classification of 4-dimensional Bernstein algebras*. Comm. in Alg. **19**(5), 1429-1443 (1991).
- [7] Costa R., *On the derivations of gametic algebras for polyploidy with multiple alleles*. Bol. Soc. Bras. Mat. (20) **13**, 69-81 (1982).
- [8] Costa R., *A note on Bernstein algebras*. LAA **112**, 195-205 (1989).
- [9] Costa R., *Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 5* , Proc. Edinb. Math. Soc. **33**, 61-70 (1990).
- [10] Costa R.; Guzzo Jr. H., *Indecomposable baric algebras*. LAA **183**, 223-236 (1993).
- [11] Costa R.; Guzzo Jr. H., *Indecomposable baric algebras II*. LAA **196**, 233-242 (1994).
- [12] Etherington I.M.H., *Genetic algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **59**, 242-258 (1939).

- [13] Etherington I.M.H., *Commutative train algebras of rank 2 and 3*, J. London Math.Soc. **15**, 136-149 (1940).
- [14] Etherington I.M.H., *Duplication of linear algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2)**6**, 222-230 (1941).
- [15] Etherington I.M.H., *Special train algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)**12**, 1-8 (1941).
- [16] Gonshor H., *Special train algebras arising in genetics*. Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **12**, 41-53 (1960).
- [17] Gonzalez S.; Martinez C., *Idempotent elements in a Bernstein algebra*. J. London Math. Soc. (2) **42**, 430-436 (1990).
- [18] Guzzo H., *Contribuições à teoria das algebras não associativas*, Tese de Doutorado, IME-USP (1992).
- [19] Guzzo H., *Embedding nil algebras in train algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. **37**, 463-470 (1994).
- [20] Guzzo H., *The Peirce decomposition for commutative train algebras*, Comm. in Algebra (to appear).
- [21] Holgate P., *Genetic algebras associated with polyploidy*. Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **15**, 1-9 (1966). Corrigendum *ibid.* **17**, 120 (1970).
- [22] Holgate P., *Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle*. J. London Math. Soc. (2) **9**, 613-623 (1975).
- [23] Holgate P., *Canonical multiplication in the genetic algebra for linked loci*. LAA. **26**, 281-287 (1979).
- [24] Holgate P., *A train algebra that is not special triangular*. Arch. Math. **50**, 122-124 (1988).
- [25] Jacobson N., *Structure and Representations of Jordan algebras*. Am. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXXIV (1968).

- [26] Koulibaly A.; Ouattara M., *Structure et théorie de Frattini d'une algèbre de Bernstein*, Algebras, Groups and Geometries **8**, 145-158 (1991)
- [27] Lyubich Ju. I., *Bernsteinche Algebren*. Uspehi Mat. Nauk. **32**, 6 (198), 261-262 (1977).
- [28] Lyubich Ju. I., *The classification of some types of Bernstein algebras*. Sel. Math. Sov. **6**, 1-14 (1987).
- [29] Lyubich Ju. I., *Mathematical Structures in Population Genetics*. Springer-Verlag, (1993).
- [30] Micali A.; Ouattara M., *Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington*. LAA **153**, 193-207 (1991).
- [31] Micali A.; Ouattara M., *Structure des algèbres de Bernstein*. (to appear).
- [32] Odoni R.W.K.; Straton A.E., *Structure of Bernstein algebras* in Algèbres Génétiques, ed. A. Micali. Hermann, Paris, (1987).
- [33] Osborn J.M., *Varieties of Algebras*, Advances in Math. **8**, 163-369 (1972).
- [34] Ouattara M., *Sur les algèbres de Bernstein qui sont des T-algèbres*. LAA. **148**, 171-178 (1991).
- [35] Ouattara M., *Algèbres de la génétique des populations*. Thèse de Doctorat d'État. Université de Ouagadougou.
- [36] Peresi L.A., *Nilpotency in Bernstein algebras*. Arch. Math. **56**, 437-439 (1991).
- [37] Raffin., *Axiomatisation des algèbres génétiques*. Acad. R. Belgique, Bull. Cl. Sci. (5) **37**, 359-366 (1951).
- [38] Reiersol O., *Genetic algebras studied recursively and by means of differential operators*. Math. Scand. **10**, 25-44 (1962).
- [39] Schafer R.D., *Structure of genetic algebras*. Amer. J. Math. **71**, 121-135 (1949).
- [40] Schafer R.D., *An introduction to non associative algebras*, Academic Press, New York, (1966).

- [41] Varro R., *Algèbres de Bernstein Périodiques*, Thèse, Université Montpellier II (1993).
- [42] Walcher S., *Bernstein algebras which are Jordan algebras*. Arch. Math. **50**, 218-222 (1988).
- [43] Walcher S., *Algebras which satisfy a train equation for the first three plenary powers*, Arch. Math. **56**, 547-551 (1991).
- [44] Worz A., *Algebras in genetics*, Lecture. Notes in Biomath. 36, Springer-Verlag, Berlin. (1980).
- [45] Zevlakov K. A. et al., *Rings that are nearly associative*, Academic Press, (1982).