Álgebras de Bernstein: resultados recentes

Lucia Satie Ikemoto

Dissertação apresentada

ao

Instituto de Matemática e Estatística

da

Universidade de São Paulo

para a obtenção do grau de Mestre

em

Matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

- São Paulo, abril de 1995 -

*ao meu querido Ricardo,
com um carinho especial.*

Agradecimentos

À minha mãezinha, pelo exemplo de luta, coragem e persistência.

Ao meu querido Ricardo Murakami, companheiro de todas as horas, pela presença em cada momento importante de minha vida, apoio nas horas difíceis e por fazer mais feliz os meus dias. Estendo o agradecimento a seus pais, Nario e Fumiye Murakami, pelo apoio constante e carinho acolhedor de sempre.

Aqui no IME, gostaria de agradecer a todos os amigos que encontrei, entre os colegas, funcionários e professores, que fizeram com que esta fosse uma fase agradável da minha vida. Não seria possível citar todas as pessoas às quais sou grata, mas não poderia deixar de destacar algumas delas.

Aos meus amigos Vitor de Oliveira Ferreira e Marcelo Dias Passos, o Major, por compartilhar e diminuir as dificuldades encontradas ao longo desse mestrado.

À minha grande amiga Ayumi Kato, com quem divido minhas alegrias, tristezas e dificuldades, por estar sempre pronta para me ajudar, fazendo valer a força da verdadeira amizade.

Ao professor e amigo Rodolfo Baeza, por ter me ensinado a usar o $\text{\LaTeX}$, pelas sugestões no Capítulo 4 e, principalmente, pelas bem humoradas e proveitosas conversas durante sua breve estadia no IME.

Agradeço, de modo muito especial, ao professor Roberto Costa, pela paciência com que tem me orientado ao longo de todos esses anos, pelo apoio e incentivo que nele sempre encontrei e pela participação fundamental que ele teve em muitas fases críticas de minha vida. Gostaria de registrar aqui além de minha gratidão, a grande admiração que tenho por ele.

Lucia Satie Ikemoto

Abstract

After giving the concept of indecomposability for baric algebras, we prove a Krull-Schmidt theorem for these algebras and introduce classes of algebras in which this theorem is valid. Particularly, we study the class of Bernstein algebras. Some questions on the kernel of the weight function of a Bernstein algebra are dealt with, such as nilpotency and relations with the given algebra concerning indecomposability. Moreover, we study the multiplication algebra of a Bernstein algebra in order to obtain information on the structure of the underlying algebra.

Resumo

Introduzindo o conceito de indecomponibilidade em álgebras bárias, provamos um teorema do tipo Krull-Schmidt para essas álgebras e exibimos classes de álgebras nas quais o teorema é válido. Em especial, estudamos a classe das álgebras de Bernstein. São tratadas questões sobre o núcleo da função peso de uma álgebra de Bernstein, como nilpotência e relações com a álgebra dada, no que se refere à indecomponibilidade. Além disso, estudamos a álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein, em busca de informações a respeito da estrutura da álgebra subjacente.

Conteúdo

Introdução	3
1 O Teorema de Krull-Schmidt para álgebras básicas	5
1.1 Caracteres	5
1.2 Álgebras básicas	9
1.3 Álgebras básicas indecomponíveis	12
1.4 Teorema de Krull-Schmidt	18
1.5 Subclasses fechadas	23
2 Exemplos	30
2.1 A duplicada comutativa	31
2.2 Álgebras gaméticas para populações poliplóides	35
2.3 Álgebras gaméticas para loci ligados	38
2.4 Álgebras gaméticas para loci independentes	40
3 Álgebras de Bernstein	42
3.1 Formas invariantes	42
3.2 Decomposição de Peirce	47
3.3 Álgebras excepcionais e conservativas	53
3.4 Álgebras cancelativas	57
3.5 Álgebras de Bernstein-Jordan	61
4 Ideais em uma álgebra de Bernstein	64
4.1 Produto de ideais	64
4.2 Nilpotência	66

5	Indecomponibilidade em álgebras de Bernstein	74
5.1	Indecomponibilidade em álgebras de Bernstein-Jordan	75
5.2	Indecomponibilidade em álgebras de Bernstein excepcionais	78
5.3	Álgebras cancelativas indecomponíveis	83
6	A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein	87
6.1	A álgebra de multiplicações	87
6.2	Decomposição de Peirce	90
6.3	A dimensão da álgebra de multiplicações	93
6.4	Caracteres da álgebra de multiplicações	95
6.5	As álgebras de multiplicações reduzidas	97
	Bibliografia	99

Introdução

Os primeiros artigos sobre álgebras genéticas apareceram entre 1934 e 1938, mas o assunto foi propriamente estabelecido numa série de 5 artigos de I.M.H. Etherington publicados entre 1939 e 1941. Em 1939, Etherington deu uma formulação matemática precisa das leis de Mendel em termos de álgebras. A partir daí, as álgebras correspondendo a mecanismos de hereditariedade têm sido analisados com detalhe. Álgebras que possuem as características daquelas que surgiram através de problemas genéticos mas não necessariamente interpretáveis nesse contexto, têm sido estudados como objetos de interesse matemático, dando origem a problemas puramente algébricos.

Y.I. Lyubich, em 1971 e P. Holgate, em 1975, retomaram o trabalho de Bernstein iniciado em 1923, onde ele tentou determinar e classificar todas as transformações quadráticas que poderiam representar sistemas de hereditariedade nas quais obtém-se equilíbrio após a primeira geração. Ele forneceu uma descrição completa das possibilidades em 3 dimensões e encontrou resultados importantes para dimensões maiores ou iguais a 4. Esse trabalho deu origem ao que hoje conhecemos como álgebras de Bernstein. Desde então, muitos autores têm contribuído no estudo delas, na tentativa de classificá-las. Porém, como resultado das próprias investigações sobre estas álgebras, sabemos hoje que a classificação completa é muito difícil, pois contém como sub-problemas algumas questões clássicas de álgebra.

Em 1993, R. Costa e H. Guzzo introduziram os conceitos de join de álgebras básicas e álgebras básicas indecomponíveis e provaram para estas, um análogo ao Teorema de Krull-Schmidt, que reduz em muitos casos, o problema de classificação ao cálculo das álgebras indecomponíveis.

Essa dissertação tem por objetivo coletar alguns resultados que têm sido obtidos em torno das álgebras de Bernstein, em especial o que se refere à indecomponibilidade.

No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos e propriedades das álgebras básicas e álgebras não associativas em geral. O principal resultado desse capítulo é o Teorema de Krull-Schmidt para álgebras básicas. Ainda nesse capítulo, apresentamos algumas subclasses da classe das álgebras básicas provenientes de modelos genéticos que têm sido bastante estudadas e mostramos que esse teorema se aplica em cada uma das subclasses apresentadas.

No Capítulo 2, estudamos a decomponibilidade de várias álgebras que representam modelos concretos da genética, como as álgebras gaméticas para populações poliplóides, loci ligados ou loci independentes. Como problema aberto, fica a busca da interpretação biológica da indecomponibilidade.

A partir do Capítulo 3, estudamos a classe das álgebras de Bernstein. Obtemos a identidade que caracteriza essas álgebras através de algumas formas lineares e apresentamos algumas de suas subclasses que serão analisadas posteriormente. No Capítulo 4 fazemos um estudo dos ideais de uma álgebra de Bernstein, em particular, do núcleo de sua função peso, quanto à nilpotência.

O Capítulo 5 trata de questões a respeito da decomponibilidade de álgebras pertencentes às subclasses citadas no Capítulo 3. A grande quantidade de exemplos de álgebras indecomponíveis obtidas reforça a dificuldade de classificação de tais álgebras.

Finalmente, no Capítulo 6, estudamos a álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein. Veremos como a estrutura de uma álgebra de Bernstein se reflete na sua álgebra de multiplicações. O fato dessa nova álgebra ser mais conhecida e estudada, nos leva à tentativa de procurar nelas, algumas relações com a álgebra original, que nos permita concluir fatos sobre a estrutura das álgebras de Bernstein.

Capítulo 1

O Teorema de Krull-Schmidt para álgebras bárias

O objetivo principal deste capítulo é provar, para álgebras bárias, um resultado análogo ao Teorema de Krull-Schmidt para M -grupos. Começaremos introduzindo os conceitos necessários envolvendo tais álgebras.

1.1 Caracteres

Sejam F um corpo e A uma álgebra sobre F de dimensão arbitrária, não necessariamente associativa ou comutativa. Uma função $\omega : A \longrightarrow F$ é um *caracter* de A se ω é um homomorfismo não nulo de álgebras, isto é, $\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b)$, $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$ e $\omega(\alpha a) = \alpha\omega(a)$, para todo $a, b \in A$, $\alpha \in F$.

Proposição 1.1 *A correspondência $\omega \longmapsto \ker(\omega)$ é uma bijeção entre o conjunto dos caracteres de uma álgebra A e o conjunto dos ideais bilaterais de A de codimensão 1 não contendo A^2 .*

Demonstração Dado um caracter ω de A , $\ker(\omega)$ é um ideal bilateral de codimensão 1 pois ω é sobrejetora. Além disso, $\ker(\omega)$ não contém A^2 , pois se escolhermos $x \in A$ com $\omega(x) \neq 0$, teremos $\omega(x^2) = \omega(x)^2 \neq 0$. Reciprocamente, para todo subespaço I de A de codimensão 1, existe $\phi : A \longrightarrow F$ linear, tal que $\ker(\phi) = I$. Além disso, para todo $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, temos que $\phi' = \lambda\phi$ tem o mesmo núcleo I e se ϕ' é uma forma não nula com

$\ker(\phi') = I$ então existe λ em F , $\lambda \neq 0$, tal que $\phi' = \lambda\phi$. Supondo I um ideal bilateral não contendo A^2 , vamos mostrar que existe $\lambda \in F$ tal que $\lambda\phi$ é caracter. Se $x_0 \notin \ker(\phi)$, seja $\psi(y) = \phi(x_0 y)\phi(x_0)^{-1}$, para cada y em A . Então $\phi(x_0 y) = \psi(y)\phi(x_0)$. Provaremos que $\phi(xy) = \psi(y)\phi(x)$, para todo x em A . Para cada $y \in A$, seja

$$\begin{aligned} h_y : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto h_y(x) = \phi(xy) - \psi(y)\phi(x). \end{aligned}$$

Temos que h_y é linear, $h_y(x) = 0$ para todo x em $\ker(\phi)$ e $h_y(x_0) = 0$. Assim, $h_y \equiv 0$ e portanto, $\phi(xy) = \psi(y)\phi(x)$, para quaisquer x, y em A . Como $I = \ker(\phi)$ é ideal bilateral, se $y \in I$, tem-se $\phi(xy) = 0$, para todo x em A . Desse modo, ψ é uma forma linear com $\ker(\phi) \subseteq \ker(\psi)$. Logo, $\psi = \lambda\phi$, para algum λ em F . Assim, $\phi(xy) = \lambda\phi(x)\phi(y)$. Se $A^2 \not\subseteq \ker(\phi)$, então $\lambda \neq 0$. Multiplicando a equação acima por λ , temos que $\omega = \lambda\phi$ é um caracter com $\ker(\omega) = I$.

Se ω_1 e ω_2 são caracteres e $\ker(\omega_1) = \ker(\omega_2)$ então $\omega_2 = a\omega_1$ com $a \neq 0$. Logo, $a\omega_1(x)^2 = a\omega_1(x^2) = \omega_2(x^2) = \omega_2(x)^2 = (a\omega_1(x))^2 = a^2(\omega_1(x))^2$, para todo x em A . Assim, $a = a^2$ e como $a \neq 0$, temos $a = 1$. ■

No caso em que A tem dimensão finita, o número de caracteres também é finito, de acordo com a seguinte proposição:

Proposição 1.2 *Todo conjunto de caracteres distintos é linearmente independente.*

Demonstração Provaremos por indução sobre o número de caracteres. Se houver só um caracter, a prova é imediata. Seja $k > 1$ e suponha que o resultado vale para $k - 1$ caracteres. Sejam dados $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ caracteres distintos de A e suponha que existem $a_1, a_2, \dots, a_k \in F$, não todos nulos, tais que para todo x em A ,

$$a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \dots + a_k\omega_k(x) = 0. \quad (1.1)$$

Como vale a hipótese para $k - 1$, podemos supor que todos os a_i são não nulos. Seja $y \in A$ tal que $\omega_1(y) \neq \omega_2(y)$. Temos, para todo x em A :

$$\begin{aligned} 0 &= a_1\omega_1(xy) + a_2\omega_2(xy) + \dots + a_k\omega_k(xy) = \\ &= a_1\omega_1(x)\omega_1(y) + a_2\omega_2(x)\omega_2(y) + \dots + a_k\omega_k(x)\omega_k(y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Multiplicando a equação (1.1) por $\omega_1(y)$, obtemos:

$$a_1\omega_1(x)\omega_1(y) + a_2\omega_2(x)\omega_1(y) + \cdots + a_k\omega_k(x)\omega_1(y) = 0. \quad (1.3)$$

Subtraindo (1.3) de (1.2), obtemos

$$a_2(\omega_2(y) - \omega_1(y))\omega_2(x) + \cdots + a_k(\omega_k(y) - \omega_1(y))\omega_k(x) = 0,$$

ou seja, $\lambda_2\omega_2 + \cdots + \lambda_k\omega_k = 0$ onde $\lambda_i = a_i(\omega_i(y) - \omega_1(y))$, $i = 2, \dots, k$, o que contraria a hipótese de indução, pois $\lambda_2 = a_2(\omega_2(y) - \omega_1(y)) \neq 0$. Logo, $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. ■

Corolário Se $\dim(A) = n < \infty$ então o número de caracteres distintos de A é no máximo n . ■

Para dar exemplos de álgebras sem nenhum caracter, revisaremos o conceito de potência de um elemento em uma álgebra não associativa. No caso das álgebras não associativas, existem várias maneiras de definir potência de um elemento, pois é necessário descrever a ordem de associação dos produtos. Por exemplo, $((xx)x)x$, $(x(xx))x$, $(xx)(xx)$, $x((xx)x)$ e $x(x(xx))$ representam todas as potências de grau quatro. Usaremos árvores binárias para descrever esses produtos.

Uma *árvore binária* T é uma estrutura definida recursivamente num conjunto finito de vértices e arestas, onde T consiste de um único vértice ou é formado por três conjuntos distintos: um vértice R chamado *raiz* de T , duas árvores binárias T_1 e T_2 com raízes R_1 e R_2 , chamadas *sub-árvores esquerda* e *direita* de T , respectivamente, e duas arestas ligando R a R_1 e R a R_2 . Os vértices que são extremo de apenas uma aresta são denominados *folhas* de T .

Exemplo 1.1

Dadas duas árvores binárias T_1 e T_2 , podemos construir uma única árvore T tal que T_1 é sub-árvore esquerda e T_2 é sub-árvore direita de T . Basta colocar uma ao lado da

outra e criar uma raiz comum a elas:

Dadas uma árvore binária T , uma álgebra A e $x \in A$, vamos definir x^T por recorrência: $x^T = x$ se T é árvore binária com apenas um vértice e $x^T = x^{T_1}x^{T_2}$ se T tem mais de um vértice e T_1, T_2 são as sub-árvores esquerda e direita de T , respectivamente. Reciprocamente, para cada potência de grau n definida em $x \in A$, existe uma árvore binária T tal que essa potência é representada por x^T . De fato, se $n = 1$, tomamos T a árvore binária com apenas um vértice. Sejam dados $n > 1$ e uma potência P em x de grau n (ou seja, P estabelece a ordem de associação dos produtos de n fatores x). Essa potência pode ser escrita como produto de duas potências P_1 e P_2 com número de fatores estritamente menor que n . Supondo, por indução no número de fatores, que existem árvores binárias T_1 e T_2 tais que P_i é representado por x^{T_i} , $i = 1, 2$, tomando T a árvore binária que tem T_1 e T_2 como sub-árvores esquerda e direita, respectivamente, temos que P é representado por $x^{T_1}x^{T_2} = x^T$.

Observa-se que o número de fatores em uma potência é exatamente o número de folhas da árvore binária que a representa.

Exemplo 1.2 As árvores binárias do Exemplo 1.1 representam as potências x , xx , $(xx)x$, $x(xx)$, $(xx)(xx)$ e $(x(x(xx)))(xx)$, respectivamente.

Nas álgebras provenientes da biologia, são usadas apenas três tipos de potências, pelo significado genético que elas apresentam. Essas potências são definidas a seguir, recursivamente:

- (i) Potências principais à esquerda: $^1a = a$; $^{n+1}a = {}^naa$;
- (ii) Potências principais à direita: $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^na$;
- (iii) Potências plenas: $a^{[1]} = a$, $a^{[n+1]} = a^{[n]}a^{[n]}$.

Observamos que o grau de uma n -ésima potência plena é 2^{n-1} .

Abaixo, estão representadas as quartas potências principais à esquerda, à direita e plena, respectivamente:

Dizemos que um elemento $x \in A$ é *nilpotente* se existe uma árvore binária T tal que $x^T = 0$. Uma álgebra é *nil* se todos os seus elementos são nilpotentes.

Proposição 1.3 *Uma álgebra A onde cada elemento é nilpotente não possui caracteres.*

Demonstração Seja $\varphi : A \longrightarrow F$ um homomorfismo. Para cada $x \in A$, existe uma árvore binária T_x tal que $x^{T_x} = 0$. Se n_x é o número de folhas de T_x , temos $0 = \varphi(x^{T_x}) = \varphi(x)^{n_x}$. Assim, φ é o homomorfismo nulo. ■

Observação 1.1 Em classes importantes de álgebras estudadas nesta dissertação, cada álgebra terá um único caracter. Uma condição que garante a unicidade do caracter, quando ele existe, vem a seguir:

Proposição 1.4 *Seja A uma álgebra com caracter ω . Se $\ker(\omega)$ é nil então ω é o único caracter de A .*

Demonstração Seja ω_1 outro caracter de A . Como $\ker(\omega)$ é nil, pela Proposição 1.3, temos $\omega_1(x) = 0$, para todo x em $\ker(\omega)$. Assim, $\ker(\omega) \subseteq \ker(\omega_1)$. Como esses subespaços têm codimensão 1, segue que $\ker(\omega) = \ker(\omega_1)$. Logo, pela Proposição 1.1, $\omega = \omega_1$. ■

Um exemplo de uma álgebra com infinitos caracteres é a álgebra de polinômios não associativos sobre um corpo F , com um número infinito de variáveis. Para cada variável x , a função que associa a x o elemento 1 e às demais variáveis o valor 0 é um caracter.

1.2 Álgebras báricas

Uma *álgebra bárica* sobre um corpo F é um par (A, ω) , onde A é uma álgebra sobre F e ω é um caracter de A . Neste caso, ω é chamada *função peso* de (A, ω) e, para cada

$x \in A$, $\omega(x)$ é o *peso* de x . Lembramos que $N = \{x \in A: \omega(x) = 0\} = \ker(\omega)$ é ideal bilateral de A de codimensão 1. Dizemos que (A', ω') é uma *subálgebra bária* de (A, ω) se A' é subálgebra de A não contida em N e ω' é a restrição de ω a A' . Um ideal I de A é um *ideal bário* de (A, ω) se I está contido em N . Observamos que nesse caso, $(A/I, \bar{\omega})$ é uma álgebra bária, onde $\bar{\omega}(a + I) = \omega(a)$, para todo $a \in A$.

Seja $H = \{x \in A: \omega(x) = 1\}$ o conjunto dos elementos de A de peso 1. Se $x \in A$ é um idempotente então $x \in N \cup H$, pois de $x^2 = x$ segue que $\omega(x)^2 = \omega(x^2) = \omega(x)$, logo, $\omega(x) = 0$ ou $\omega(x) = 1$. Se $c \in H$, (A, ω) pode ser decomposta como

$$A = Fc \oplus N. \quad (1.4)$$

Basta observar que todo x em A pode ser escrito na forma $x = \omega(x)c + (x - \omega(x)c)$ e $x - \omega(x)c \in N$. Logo, se J é um ideal à esquerda de N e existe c em H tal que $cJ \subseteq J$, então J é ideal à esquerda de A . Vale um resultado análogo para ideais à direita.

Nesta dissertação será fundamental a existência de idempotentes de peso 1. Denotaremos por Ω a classe das álgebras bárias sobre F que possuem idempotentes de peso 1. Existe uma maneira natural de obter tais álgebras: se N é uma álgebra arbitrária sobre F e $\lambda, \rho : N \longrightarrow N$ são aplicações lineares, definimos em $F \oplus N$ uma multiplicação por

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, ab + \alpha\lambda(b) + \beta\rho(a)) \quad (1.5)$$

e uma função peso por

$$\omega(\alpha, a) = \alpha,$$

onde $\alpha, \beta \in F$ e $a, b \in N$. Observamos de (1.5) que ω é homomorfismo não nulo de álgebras. O elemento $e = (1, 0)$ é idempotente de peso 1. Denotaremos essa álgebra bária por $[N, \lambda, \rho]$. Toda álgebra bária (A, ω) com idempotente e de peso 1 pode ser obtida por esse processo, tomando $N = \ker(\omega)$, $\lambda = L_e$ e $\rho = R_e$, onde $L_e(n) = en$ e $R_e(n) = ne$, para todo $n \in N$.

Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) álgebras bárias. Dizemos que $\varphi : (A_1, \omega_1) \longrightarrow (A_2, \omega_2)$ é um *homomorfismo bário* de (A_1, ω_1) em (A_2, ω_2) se $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ é homomorfismo de álgebras e $\omega_2 \circ \varphi = \omega_1$. Dadas N_1, N_2 álgebras sobre F , λ_i, ρ_i aplicações lineares em N_i , $i = 1, 2$ e $\theta : N_1 \longrightarrow N_2$ um homomorfismo, uma questão natural que se coloca é saber se é possível estender θ a um homomorfismo bário entre $[N_1, \lambda_1, \rho_1]$ e $[N_2, \lambda_2, \rho_2]$ e, em caso afirmativo, se a extensão é única. Uma tentativa natural de definir uma extensão

seria associar a cada (α, a) em $[N_1, \lambda_1, \rho_1]$, o par $(\alpha, \theta(a))$ em $[N_2, \lambda_2, \rho_2]$. Veremos que, de fato, essa aplicação é um homomorfismo bárico, mas em geral não é a única extensão de θ , como mostra a seguinte proposição:

Proposição 1.5 *Sejam N_1, N_2 álgebras sobre o corpo F e $\lambda_i, \rho_i : N_i \longrightarrow N_i$ ($i = 1, 2$) aplicações F -lineares.*

- (a) *Se $\varphi : [N_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow [N_2, \lambda_2, \rho_2]$ é homomorfismo bárico então existem $c \in N_2$ e um homomorfismo $\theta : N_1 \longrightarrow N_2$, tais que*
- (i) $c^2 + \lambda_2(c) + \rho_2(c) = c$;
- (ii) *os diagramas abaixo são comutativos:*

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\theta} & N_2 \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_2 + L_c \\ N_1 & \xrightarrow{\theta} & N_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\theta} & N_2 \\ \downarrow \rho_1 & & \downarrow \rho_2 + R_c \\ N_1 & \xrightarrow{\theta} & N_2 \end{array}$$

- (b) *Reciprocamente, dados um homomorfismo $\theta : N_1 \longrightarrow N_2$ e $c \in N_2$ que verificam (i) e (ii), a aplicação $\varphi : [N_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow [N_2, \lambda_2, \rho_2]$ definida por $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$ é um homomorfismo bárico.*

Demonstração (a) Se $\varphi : [N_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow [N_2, \lambda_2, \rho_2]$ é um homomorfismo bárico então $\omega_2 \circ \varphi = \omega_1$. Denotando por φ_1 e φ_2 as componentes de φ em F e N_2 , respectivamente, temos $\alpha = \omega_1(\alpha, a) = \omega_2\varphi(\alpha, a) = \omega_2(\varphi_1(\alpha, a), \varphi_2(\alpha, a)) = \varphi_1(\alpha, a)$. Portanto, $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \varphi_2(\alpha, a))$. Seja $c = \varphi_2(1, 0)$ e $\theta : N_1 \longrightarrow N_2$ dada por $\theta(a) = \varphi_2(0, a)$. Temos assim, $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \varphi_2(\alpha, a)) = (\alpha, \varphi_2((\alpha, 0) + (0, a))) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$. Logo,

$$\varphi((\alpha, a)(\beta, b)) = \varphi(\alpha\beta, ab + \alpha\lambda_1(b) + \beta\rho_1(a)) = (\alpha\beta, \alpha\beta c + \theta(ab) + \alpha\theta\lambda_1(b) + \beta\theta\rho_1(a)) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, a)\varphi(\beta, b) &= (\alpha, \alpha c + \theta(a))(\beta, \beta c + \theta(b)) = (\alpha\beta, \alpha\beta c^2 + \alpha c\theta(b) + \beta\theta(a)c + \theta(a)\theta(b) + \\ &\quad + \alpha\beta\lambda_2(c) + \alpha\lambda_2\theta(b) + \alpha\beta\rho_2(c) + \beta\rho_2\theta(a)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Igualando (1.6) a (1.7) e agrupando os termos com coeficientes 1 e $\alpha\beta$, obtemos $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$, ou seja, θ é homomorfismo e $c = c^2 + \lambda_2(c) + \rho_2(c)$. As equações obtidas a partir dos termos com coeficientes α e β nos fornecem a comutatividade dos diagramas acima: $c\theta(b) + \lambda_2\theta(b) = \theta\lambda_1(b)$ e $\theta(a)c + \rho_2\theta(a) = \theta\rho_1(a)$.

Assim, mostramos que $\varphi : [N_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow [N_2, \lambda_2, \rho_2]$ é homomorfismo bárico se e somente se $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$, onde $\theta : N_1 \longrightarrow N_2$ é um homomorfismo e $c \in N_2$ satisfazem (i) e (ii).

Logo, temos provado (b). ■

Corolário *Com as notações da proposição anterior, φ é monomorfismo (epimorfismo) se e somente se θ é monomorfismo (epimorfismo).*

Demonstração Temos que φ é monomorfismo se e somente se $\varphi(\alpha, a) = 0$ implica $(\alpha, a) = (0, 0)$ e θ é monomorfismo se e somente se $\theta(a) = 0$ implica $a = 0$. Como $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$, resulta que φ é monomorfismo se e somente se θ é monomorfismo.

Se φ é epimorfismo, então para todo (β, b) em $F \oplus N$ existe (α, a) em $F \oplus N$ tal que $(\alpha, \alpha c + \theta(a)) = \varphi(\alpha, a) = (\beta, b)$. Tomando $\beta = 0$, temos que para todo b em N , existe a em N tal que $\theta(a) = b$. Assim, θ é sobrejetora. Reciprocamente, se θ é sobrejetora, para cada b em N e β em F , existe a em N tal que $\theta(a) = b - \beta c$. Desse modo, $\varphi(\beta, a) = (\beta, \beta c + \theta(a)) = (\beta, b)$. Logo, φ é sobrejetora. ■

1.3 Álgebras báricas indecomponíveis

Para o que segue, precisaremos de alguns conceitos e resultados envolvendo M -grupos. O leitor poderá encontrá-los em [18].

Dados um conjunto M e um grupo G , dizemos que G é um M -grupo se existe uma aplicação φ de M no conjunto $\text{End}(G)$ dos endomorfismos de G . Para cada $m \in M$ e $a \in G$, denotando $\varphi(m)(a)$ por am , temos então que G é um M -grupo se e somente se $(ab)m = (am)(bm)$, para todo a, b em G e m em M .

Um subgrupo H de G é um M -subgrupo de G se H tem estrutura de M -grupo, ou seja, se $hm \in H$, para todo $h \in H$ e $m \in M$. Um M -subgrupo normal de G é um subgrupo normal de G que é um M -subgrupo. Se G e G' são dois M -grupos e $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo, dizemos que φ é um M -homomorfismo se $\varphi(a)m = \varphi(am)$, para todo $a \in G$ e $m \in M$. Do mesmo modo, definem-se M -endomorfismos, M -epimorfismos, M -isomorfismos e M -monomorfismos. Um M -endomorfismo θ de G é uma *projeção* se θ comuta com todos os automorfismos internos de G e $\theta^2 = \theta$.

Dados G e G' dois M -grupos, temos em $G \times G'$ uma estrutura de M -grupo dada

por $(a, a')(b, b') = (ab, a'b')$ e $(a, a')m = (am, a'm)$. Dizemos que um M -grupo G é *decomponível* se existirem dois M -subgrupos H e K de G não triviais tais que $G = H \times K$. Caso contrário, dizemos que G é *indecomponível*.

Um M -grupo G verifica a *condição de cadeias descendentes* (c.c.d.) se toda cadeia estritamente descendente de M -subgrupos de G é finita e G verifica a *condição de cadeias ascendentes* (c.c.a.) se toda cadeia estritamente ascendente de M -subgrupos de G é finita.

Os seguintes resultados encontram-se demonstrados em [18]:

Proposição 1.6 ([18, Teorema 8]) *Um M -grupo G é decomponível se e somente se existe uma projeção não nula θ de G com $\theta \neq id_G$.*

Proposição 1.7 ([18, Teorema 9]) *Todo M -grupo $G \neq \{1\}$ satisfazendo c.c.d. pode ser expresso como $G = H_1 \times \dots \times H_m$, onde H_i são M -subgrupos normais e indecomponíveis de G , $i = 1, \dots, m$.*

Teorema 1.1 ([18, Teorema de Krull-Schmidt]) *Seja G um M -grupo satisfazendo c.c.a. e c.c.d. e sejam*

$$H_1 \times \dots \times H_n = G = K_1 \times \dots \times K_m$$

duas decomposições de G em M -subgrupos normais e indecomponíveis. Então $n = m$ e existe $\sigma \in S_n$, onde S_n é o grupo simétrico de n símbolos, tal que $H_i \cong K_{\sigma(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Além disso, temos para $0 \leq j \leq n$:

$$G = H_1 \times \dots \times H_j \times K_{\sigma(j+1)} \times \dots \times K_{\sigma(n)}.$$

Após essa revisão sobre M -grupos, voltamos às álgebras báricas. Sejam $(A, \omega) \in \Omega$, $e \in A$ idempotente de peso 1, $N = \ker(\omega)$ e $M = \{R_a, L_a: a \in A \cup F\}$ o conjunto das multiplicações à direita e à esquerda por elementos de A ou por escalares. Como N é ideal de A , M pode ser visto como um conjunto de endomorfismos do grupo abeliano $(N, +)$. Assim, $(N, +)$ tem uma estrutura de M -grupo e os M -subgrupos de $(N, +)$ são os ideais bilaterais de A contidos em N . Pela decomposição $A = Fe \oplus N$, temos então que os M -subgrupos de $(N, +)$ são os ideais bilaterais de N que são invariantes sob L_e e R_e . Assim, se N_1, N_2 são ideais bilaterais de A contidos em N , e portanto, $(N_1, +)$ e $(N_2, +)$ são M -grupos, temos que $\varphi: (N_1, +) \longrightarrow (N_2, +)$ é M -homomorfismo se φ é F -linear, $\varphi(nn') = \varphi(n)n' = n\varphi(n')$, $\varphi(en) = e\varphi(n)$ e $\varphi(ne) = \varphi(n)e$, para todo n, n' em N_1 .

Baseados no conceito de M -grupo decomponível, podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 1.1 Uma álgebra bária $(A, \omega) \in \Omega$ é *decomponível* se existem ideais bilaterais não triviais N_1 e N_2 de A , ambos contidos em $N = \ker(\omega)$ tais que $N = N_1 \oplus N_2$. Caso contrário, (A, ω) é *indecomponível*.

Observamos que todas as álgebras de dimensão 2 são indecomponíveis.

Teorema 1.2 Seja $(A, \omega) \in \Omega$. São equivalentes:

- (a) (A, ω) é decomponível.
- (b) Existe um M -endomorfismo θ do M -grupo $(N, +)$ tal que $\theta^2 = \theta$; $\theta \neq 0, id_N$.
- (c) Existe um homomorfismo de F -álgebras $\theta : N \longrightarrow N$ tal que $\theta^2 = \theta$; $\theta \neq 0, id_N$; $\theta(N)$ é ideal bilateral de N e para algum idempotente e de peso 1 em A , $\theta(en) = e\theta(n)$; $\theta(ne) = \theta(n)e$, para todo n em N .
- (d) Existe um endomorfismo bário $\varphi : A \longrightarrow A$ tal que $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi \neq id_A$ e $\varphi(N)$ é ideal bilateral não nulo de N .

Demonstração (a) $\Leftrightarrow$ (b): Segue da Proposição 1.6.

(a) $\Rightarrow$ (c): Se (A, ω) é decomponível então existem N_1, N_2 ideais não triviais de A contidos em N tal que $N = N_1 \oplus N_2$. Seja $\theta : N \longrightarrow N$ a projeção canônica em N_1 , isto é, $\theta(n_1 + n_2) = n_1$, para todo n_1 em N_1 e n_2 em N_2 . É claro que θ é F -linear e $\theta^2 = \theta$. Temos ainda que $\theta \neq 0, id_N$, pois N_1 e N_2 são não triviais. Como N_1 e N_2 são ideais bilaterais e $N_1 \cap N_2 = 0$, resulta que $(n_1 + n_2)(n'_1 + n'_2) = n_1n'_1 + n_2n'_2$, onde $n_1, n'_1, n_1n'_1 \in N_1$ e $n_2, n'_2, n_2n'_2 \in N_2$. Assim, $\theta((n_1 + n_2)(n'_1 + n'_2)) = \theta(n_1n'_1 + n_2n'_2) = n_1n'_1 = \theta(n_1 + n_2)\theta(n'_1 + n'_2)$, para todo $n_1, n'_1 \in N_1$, $n_2, n'_2 \in N_2$. Portanto, θ é homomorfismo de F -álgebras, $\theta(N) = N_1$ é ideal bilateral de N . Além disso, $en = e(n_1 + n_2) = en_1 + en_2$. Dessa maneira, $\theta(en) = en_1 = e\theta(n)$. Do mesmo modo, $\theta(ne) = \theta(n)e$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Seja $\varphi : A \longrightarrow A$ a aplicação dada por $\varphi(\alpha e + a) = \alpha e + \theta(a)$. Pela Proposição 1.5 (lembrando que $A = [N, L_e, R_e]$), φ é homomorfismo bário, com $c = 0$. Além disso, $\varphi^2 = \varphi$, pois $\varphi^2(\alpha e + a) = \varphi(\alpha e + \theta(a)) = \alpha e + \theta^2(a) = \alpha e + \theta(a) = \varphi(\alpha e + a)$, para todo $\alpha e + a \in A$. Como $\theta \neq id_N$, temos $\varphi \neq id_A$. Além disso, $\varphi(N) = \theta(N)$ é ideal bilateral

não nulo de N , pois caso contrário, teríamos $\theta = 0$.

(d) $\Rightarrow$ (a): Decompondo $A = Fe \oplus N$, onde e é idempotente de peso 1, sejam $I = \ker(\varphi)$, $J = \varphi(N)$ e $e_0 = \varphi(e)$ idempotente de peso 1. De $\varphi^2 = \varphi$, resulta que $A = \ker(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$. Assim, $I \cap J = 0$, pois $J \subset \text{Im}(\varphi)$. Além disso, temos para todo $n \in N$, $n = (n - \varphi(n)) + \varphi(n)$, com $n - \varphi(n) \in I$ e $\varphi(n) \in J$. Logo, temos $N = I \oplus J$. Por hipótese, $J = \varphi(N)$ é ideal bilateral não nulo de N . Observando que $e_0\varphi(n) = \varphi(e)\varphi(n) = \varphi(en) \in \varphi(N)$ e, do mesmo modo, $\varphi(N)e_0 \subset \varphi(N)$, resulta que $\varphi(N) \subset N$ é ideal bilateral não nulo de A . Temos ainda que $I = \ker(\varphi)$ é ideal bilateral de A . Pelo fato de φ ser endomorfismo bárico, temos $I \subset N$: note que $\varphi(a) = 0$ implica $0 = \omega\varphi(a) = \omega(a)$ e isto, por sua vez, implica $a \in \ker(\omega) = N$. Como $\varphi \neq id_A$, temos $I \neq 0$. Logo, (A, ω) é decomponível. ■

Existe uma maneira natural de obter álgebras báricas decomponíveis. Sejam (A_1, ω_1) , $(A_2, \omega_2) \in \Omega$, $e_1 \in A_1$, $e_2 \in A_2$ idempotentes de peso 1, $N_1 = \ker(\omega_1)$ e $N_2 = \ker(\omega_2)$. Em $N = N_1 \times N_2$ considere a multiplicação

$$(n_1, n_2)(n'_1, n'_2) = (n_1n'_1, n_2n'_2)$$

e $\lambda, \rho : N \longrightarrow N$ os operadores lineares definidos por:

$$\lambda(n_1, n_2) = (e_1n_1, e_2n_2),$$

$$\rho(n_1, n_2) = (n_1e_1, n_2e_2).$$

Então $[N, \lambda, \rho]$ é uma álgebra bárica com multiplicação

$$(\alpha, n_1, n_2)(\alpha', n'_1, n'_2) = (\alpha\alpha', n_1n'_1 + \alpha e_1n'_1 + \alpha'n_1e_1, n_2n'_2 + \alpha e_2n'_2 + \alpha'n_2e_2).$$

Com as devidas identificações, N_1 e N_2 são ideais bilaterais de $[N, \lambda, \rho]$ e $N = N_1 \oplus N_2$. Se A_1 e A_2 têm pelo menos dimensão 2, $[N, \lambda, \rho]$ é decomponível.

Observamos que essa construção independe dos idempotentes e_1 e e_2 . Se e'_1 e e'_2 são idempotentes de peso 1 em A_1 e A_2 , respectivamente, e $[N, \lambda', \rho']$ a álgebra obtida pelo processo acima substituindo e_i por e'_i então existe c_i em $\ker(\omega_i)$ tal que $e_i = e'_i + c_i$, $i = 1, 2$. Como $c_i^2 + e'_ic_i + c_ie'_i = (e_i - e'_i)^2 + e'_i(e_i - e'_i) + (e_i - e'_i)e'_i = e_i - e'_i = c_i$, temos para $c = (c_1, c_2)$, $\theta = id_{N_1 \oplus N_2}$ e qualquer $a = (a_1, a_2) \in N_1 \oplus N_2$:

$$c^2 + \lambda'(c) + \rho'(c) = (c_1^2, c_2^2) + (e'_1c_1, e'_2c_2) + (c_1e'_1, c_2e'_2) = (c_1, c_2) = c;$$

$$c\theta(a) + \lambda'\theta(a) = ((c_1 + e'_1)a_1, (c_2 + e'_2)a_2) = (e_1a_1, e_2a_2) = \lambda(a) = \lambda\theta(a);$$

$$\theta(a)c + \rho'\theta(a) + (a_1(c_1 + e'_1), a_2(c_2 + e'_2)) = (a_1e_1, a_2e_2) = \rho(a) = \theta\rho(a).$$

Assim, pela Proposição 1.5, $\varphi : [N, \lambda, \rho] \longrightarrow [N, \lambda', \rho']$ é homomorfismo. Como θ é bijetora, segue pelo Corolário da mesma proposição, que φ é isomorfismo.

Dadas $(A_1, \omega_1), (A_2, \omega_2) \in \Omega$, a álgebra $[N, \lambda, \rho]$ construída acima será chamada *join* de (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) e denotada por $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$. O idempotente $(1, 0, 0)$ será chamado *join* de e_1 e e_2 e denotado por $e_1 \vee e_2$.

Dadas duas álgebras $(A_1, \omega_1), (A_2, \omega_2)$ em Ω e $e_1 \in A_1, e_2 \in A_2$ idempotentes de peso 1, consideremos a soma direta usual $A_1 \oplus A_2$. A multiplicação em $A_1 \oplus A_2$ é dada por $(a_1, a_2)(a'_1, a'_2) = (a_1a'_1, a_2a'_2)$. Desse modo, utilizando a decomposição (1.4), temos $A_1 \oplus A_2 = Fe_1 \oplus N_1 \oplus Fe_2 \oplus N_2$ e $(\alpha_1e_1 + n_1, \alpha_2e_2 + n_2)(\alpha'_1e_1 + n'_1, \alpha'_2e_2 + n'_2) = (\alpha_1\alpha'_1e_1 + \alpha_1e_1n'_1 + \alpha'_1n_1e_1 + n_1n'_1, \alpha_2\alpha'_2e_2 + \alpha_2e_2n'_2 + \alpha'_2n_2e_2 + n_2n'_2)$. Como $Fe_1 \oplus N_1 \oplus Fe_2 \oplus N_2 = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus N_1 \oplus N_2$, identificando $(\alpha_1e_1 + n_1, \alpha_2e_2 + n_2)$ com $(\alpha_1, \alpha_2, n_1, n_2)$, temos $(\alpha_1, \alpha_2, n_1, n_2)(\alpha'_1, \alpha'_2, n'_1, n'_2) = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, \alpha_1e_1n'_1 + \alpha'_1n_1e_1 + n_1n'_1, \alpha_2e_2n'_2 + \alpha'_2n_2e_2 + n_2n'_2)$. Assim, o join $A_1 \vee A_2$ pode ser identificado com uma subálgebra de $A_1 \oplus A_2$, sob o monomorfismo que associa a cada (α, n_1, n_2) em $A_1 \vee A_2$, $(\alpha, \alpha, n_1, n_2)$ em $Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus N_1 \oplus N_2 = A_1 \oplus A_2$.

Observamos que essa subálgebra é formada exatamente pelos elementos (a_1, a_2) de $A_1 \times A_2$ tais que $\omega_1(a_1) = \omega_2(a_2)$. Desse modo, dada uma família de álgebras básicas $((A_i, \omega_i)_{i \in I})$ em Ω , podemos considerar no produto direto $\prod_{i \in I} A_i$, o seguinte subconjunto:

$$\times_{i \in I} (A_i, \omega_i) = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i : \omega_i(x_i) = \omega_j(x_j), \text{ para todo } i, j \text{ em } I\}.$$

Como cada ω_i é homomorfismo de álgebras e as operações em $\prod_{i \in I} A_i$ são feitas componente a componente, temos que $\times_{i \in I} (A_i, \omega_i)$ é uma subálgebra de $\prod_{i \in I} A_i$. Além disso, a condição $\omega_i(x_i) = \omega_j(x_j)$, para todo $(x_i)_{i \in I}$ em $\times_{i \in I} (A_i, \omega_i)$ e i, j em I , nos permite definir um homomorfismo $\omega : \times_{i \in I} (A_i, \omega_i) \longrightarrow F$ tal que $\omega((x_i)_{i \in I}) = \omega_i(x_i)$, onde $i \in I$ é arbitrário. Assim, $(\times_{i \in I} (A_i, \omega_i), \omega)$ é uma álgebra básica em Ω e o elemento $(e_i)_{i \in I}$ com e_i idempotente de peso 1 em A_i , para todo i em I , é um idempotente de peso 1 em $\times_{i \in I} (A_i, \omega_i)$. As projeções canônicas de $\prod_{i \in I} A_i$ sobre seus fatores induzem projeções $\pi_j : \times_{i \in I} (A_i, \omega_i) \longrightarrow (A_j, \omega_j)$. Como $\omega_j\pi_j((x_i)_{i \in I}) = \omega_j(x_j) = \omega((x_i)_{i \in I})$, a aplicação π_j é um epimorfismo básico.

Proposição 1.8 Na categoria Ω , $\{\times_{i \in I}(A_i, \omega_i), (\pi_i)_{i \in I}\}$ é o produto direto da família (A_i, ω_i) .

Demonstração Sejam $(C, \tau) \in \Omega$ e $\phi_i : (C, \tau) \longrightarrow (A_i, \omega_i)$, $i \in I$, homomorfismos de álgebras báricas. Temos que mostrar que existe um único homomorfismo bárico $\phi : (C, \tau) \longrightarrow \times_{i \in I}(A_i, \omega_i)$ tal que $\phi_i = \pi_i \circ \phi$, para todo $i \in I$. A aplicação $\phi : C \longrightarrow \prod_{i \in I} A_i$ dada por $\phi(c) = ((\phi_i(c))_{i \in I})$ é um homomorfismo de álgebras e $\omega_i \phi_i = \tau$, para cada $i \in I$; logo, $\omega_i \phi_i = \omega_j \phi_j$, para todo i, j em I . Isso implica que $\phi(C)$ está contido em $\times_{i \in I}(A_i, \omega_i)$. Desse modo, podemos considerar ϕ como um homomorfismo de C em $\times_{i \in I}(A_i, \omega_i)$. Como $\omega_i \phi_i = \tau$, temos que ϕ é homomorfismo bárico. Além disso, $(\pi_i \circ \phi)(c) = \pi_i((\phi_i(c))_{i \in I}) = \phi_i(c)$, para todo $c \in C$ e claramente ϕ é o único homomorfismo que verifica essa propriedade. Assim, $\times_{i \in I}(A_i, \omega_i)$ é o produto direto da família (A_i, ω_i) em Ω . ■

Observando que $(A, \omega) \cong (F, id_F) \times (A, \omega)$ para todo (A, ω) em Ω , temos que (F, id_F) é sempre um fator direto de (A, ω) . Diremos então, que uma álgebra bárica (A, ω) é *trivial* se $(A, \omega) \cong (F, id_F)$. Assim, temos:

Proposição 1.9 Uma álgebra bárica (A, ω) em Ω é decomponível se e somente se existem $(A_1, \omega_1), (A_2, \omega_2)$ em Ω , não triviais, tais que $(A, \omega) \cong (A_1, \omega_1) \times (A_2, \omega_2)$.

Demonstração Se (A, ω) é decomponível, existem ideais bilaterais não triviais I_1, I_2 de A , ambos contidos em $N = \ker(\omega)$ tais que $N = I_1 \oplus I_2$. Logo, $(A, \omega) \cong (A_1, \omega_1) \vee (A_2, \omega_2) \cong (A_1, \omega_1) \times (A_2, \omega_2)$, onde $(A_i, \omega_i) = [I_i, L_e, R_e]$, $(i = 1, 2)$. Como I_1, I_2 são não nulos, temos que as álgebras báricas correspondentes são não triviais. Reciprocamente, se $(A, \omega) \cong (A_1, \omega_1) \times (A_2, \omega_2)$ é produto direto de álgebras báricas não triviais, então A_1 e A_2 têm pelo menos dimensão 2. Assim, $(A, \omega) \cong (A_1, \omega_1) \times (A_2, \omega_2) \cong (A_1, \omega_1) \vee (A_2, \omega_2)$ é decomponível. ■

Usando as propriedades do produto direto, temos os seguinte isomorfismos báricos:

$$(a) (F \vee A_1, id_F \vee \omega_1) \cong (A_1, \omega_1);$$

$$(b) (A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2) \cong (A_2 \vee A_1, \omega_2 \vee \omega_1);$$

$$(c) ((A_1 \vee A_2) \vee A_3, (\omega_1 \vee \omega_2) \vee \omega_3) \cong (A_1 \vee (A_2 \vee A_3), \omega_1 \vee (\omega_2 \vee \omega_3)).$$

A condição (c) acima nos permite definir recursivamente o join de n membros de Ω e denotá-lo por $(A_1 \vee \dots \vee A_n, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_n)$. Se $e_i \in A_i$ é idempotente de peso 1, e $N_i = \ker(\omega_i)$, $i = 1, \dots, m$, então $(A_1 \vee \dots \vee A_m, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_m) = [N, \lambda, \rho]$, onde $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$, $\lambda(n_1, \dots, n_m) = (e_1 n_1, \dots, e_m n_m)$, $\rho(n_1, \dots, n_m) = (n_1 e_1, \dots, n_m e_m)$ e $e = e_1 \vee \dots \vee e_m \in A_1 \vee \dots \vee A_m$ é idempotente de peso 1. Assim, a multiplicação será dada por $(\alpha, n_1, \dots, n_m)(\alpha', n'_1, \dots, n'_m) = (\alpha\alpha', n_1 n'_1 + \alpha e_1 n'_1 + \alpha' e_1 n_1, \dots, n_m n'_m + \alpha e_m n'_m + \alpha' e_m n_m)$, ou ainda, identificando $(\alpha, n_1, \dots, n_m)$ com $\alpha e + n_1 + \dots + n_m$, $(\alpha + n_1 + \dots + n_m)(\alpha' + n'_1 + \dots + n'_m) = \alpha\alpha' e + n_1 n'_1 + \alpha e_1 n'_1 + \alpha' e_1 n_1 + \dots + n_m n'_m + \alpha e_m n'_m + \alpha' e_m n_m$. Quando todos os A_i têm dimensão finita igual a n_i , $i = 1, 2, \dots, n$, temos que a dimensão de $(A_1 \vee \dots \vee A_n, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_n)$ é $1 + \sum_{i=1}^n (n_i - 1) = 1 - n + \sum_{i=1}^n n_i$.

Descrevemos uma maneira simples de obter álgebras básicas decomponíveis, através da operação join. Por outro lado, a obtenção de álgebras básicas indecomponíveis é mais complicada, pois está diretamente relacionada com o problema de classificação de diversas subclasses de álgebras básicas com idempotentes de peso 1, como veremos nas próximas seções.

1.4 Teorema de Krull-Schmidt

É de se esperar que nem todas as álgebras básicas (A, ω) em Ω possam ser obtidas a partir do join de um número finito de álgebras básicas indecomponíveis. Mas, como no caso dos M -grupos, serão suficientes algumas condições de finitude em A para garantir que (A, ω) satisfaça essa propriedade. Diremos que uma álgebra básica satisfaz a *condição das cadeias descendentes* (c.c.d.) se o M -grupo $(N, +)$ satisfaz c.c.d., isto é, se toda cadeia estritamente decrescente de ideais bilaterais de A contidos em N é finita. Temos, então, o seguinte resultado:

Proposição 1.10 *Se $(A, \omega) \in \Omega$ satisfaz c.c.d. então existe um número finito m de subálgebras básicas indecomponíveis (A_i, ω_i) de (A, ω) , $i = 1, 2, \dots, m$, tais que $(A, \omega) = (A_1 \vee \dots \vee A_m, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_m)$.*

Demonstração Sejam $e \in A$ idempotente de peso 1 e $N = \ker(\omega)$. Como (A, ω) satisfaz c.c.d., temos que o M -grupo $(N, +)$ satisfaz c.c.d.. Assim, pela Proposição 1.7, existem

M -subgrupos indecomponíveis $N_1, \dots, N_m$ de N tais que $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$. Como cada N_j é indecomponível como M -grupo, temos que $A_j = Fe + N_j$ é uma álgebra básica indecomponível com função peso $\omega_j = \omega|_{A_j}$. De fato, se $N_j = I \oplus J$ com I, J ideais bilaterais não triviais de A_j , teríamos $AI = (Fe \oplus N_1 \oplus \dots \oplus N_m)I = (Fe \oplus N_j)I \subseteq I$, pois $I \cap N_i = 0$ se $i \neq j$. Do mesmo modo, $IA \subseteq A$ e $JA, AJ \subseteq J$, ou seja, I, J seriam ideais bilaterais de A e N_j seria um M -grupo decomponível. ■

Proposição 1.11 *Sejam $(A, \omega), (A_i, \omega_i)$, $i = 1, \dots, m$ álgebras básicas em Ω e $e \in A$ idempotente de peso 1. Suponha que exista um isomorfismo básico entre (A, ω) e $(A_1 \vee \dots \vee A_m, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_m)$. Então existem ideais bilaterais $N_1, \dots, N_m$ de A contidos em $N = \ker(\omega)$ tais que:*

(a) $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$;

(b) A álgebra básica $Fe \oplus N_i$ é isomorfa a (A_i, ω_i) .

Demonstração Seja $\varphi : A_1 \vee \dots \vee A_m \longrightarrow A$ um isomorfismo básico. Tomando $e' \in A_1 \vee \dots \vee A_m$ tal que $\varphi(e') = e$, $e_i \in A_i$ idempotentes de peso 1 e $N_i = \varphi(\ker(\omega_i))$, $i = 1, \dots, m$, temos que cada N_i é ideal bilateral de A . De fato, para cada $a \in A$ e $n_i \in N_i$, se $\varphi^{-1}(a) = (\alpha, u_1, \dots, u_m)$ e $\varphi^{-1}(n_i) = (0, \dots, v_i, \dots, 0)$, temos $an_i = \varphi\varphi^{-1}(an_i) = \varphi(\varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(n_i)) = \varphi((\alpha, u_1, \dots, u_m)(0, \dots, v_i, \dots, 0)) = \varphi(0, \dots, u_i v_i + \alpha e_i v_i, \dots, 0) \in \varphi(\ker(\omega_i)) = N_i$. Do mesmo modo, $n_i a \in N_i$. Como φ é isomorfismo básico, temos que $\varphi(\ker(\omega_1) \oplus \dots \oplus \ker(\omega_m)) = N$. Assim, $N = \varphi(\ker(\omega_1) \oplus \dots \oplus \ker(\omega_m)) = \varphi(\ker(\omega_1)) \oplus \dots \oplus \varphi(\ker(\omega_m)) = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$. Observando que $(e')^2 = \varphi^{-1}(e)^2 = \varphi^{-1}(e^2) = \varphi^{-1}(e) = e'$ e $(\omega_1 \vee \dots \vee \omega_m)(e') = \omega\varphi(e') = \omega(e) = 1$, temos que e' é idempotente de peso 1 em $A_1 \vee \dots \vee A_m$. Logo, existe $c = (0, c_1, \dots, c_m) \in \ker(\omega_1 \vee \dots \vee \omega_m)$ tal que $e' = e_0 + c$, onde $e_0 = e_1 \vee \dots \vee e_m$. De $(e_0 + c)^2 = (1, c_1, \dots, c_m)(1, c_1, \dots, c_m) = (1, c_1^2 + e_1 c_1 + c_1 e_1, \dots, c_m^2 + e_m c_m + c_m e_m)$ e $(e')^2 = e'$, resulta que $c_i = c_i^2 + e_i c_i + c_i e_i$, $i = 1, \dots, m$. Dessa maneira, $e'_i = e_i + c_i \in A_i$ é idempotente de peso 1, $i = 1, \dots, m$, e dado $a_1 + \dots + a_m \in \ker(\omega_1) \oplus \dots \oplus \ker(\omega_m)$, temos $e'(a_1 + \dots + a_m) = (e_0 + c)(a_1 + \dots + a_m) = e_1 a_1 + \dots + e_m a_m + c_1 a_1 + \dots + c_m a_m = e'_1 a_1 + \dots + e'_m a_m$. Do mesmo modo, verifica-se que $(a_1 + \dots + a_m)e' = a_1 e'_1 + \dots + a_m e'_m$. Temos então que $\varphi_i : A_i \longrightarrow Fe + N_i$ dada por $\varphi_i(\alpha e'_i + a_i) = \alpha e + \varphi(a_i)$ é isomorfismo básico. De fato, temos φ_i é bijetora e linear, $\omega\varphi_i(\alpha e'_i + a_i) = \alpha = \omega_i(\alpha e'_i + a_i)$ e $\varphi_i((\alpha e'_i + a_i)(\alpha' e'_i + a'_i)) = \varphi_i(\alpha\alpha' e'_i + a_i a'_i + \alpha e'_i a'_i +$

$$\alpha a_i e'_i = \alpha \alpha' e + \varphi(a_i a'_i + \alpha e'_i a'_i + \alpha a_i e'_i) = \alpha \alpha' e + \varphi(a_i) \varphi(a'_i) + \alpha e \varphi(a'_i) + \alpha' \varphi(a_i) e = (\alpha e + \varphi(a_i))(\alpha' e + \varphi(a'_i)) = \varphi_i(\alpha e'_i + a_i) \varphi(\alpha' e'_i + a'_i). \quad \blacksquare$$

A partir de agora, podemos identificar (A_i, ω_i) com (A'_i, ω'_i) , onde $A'_i = Fe \oplus \ker(\omega_i)$ e $\omega'_i = (\omega_1 \vee \dots \vee \omega_m)|_{A'_i}$. As $m+1$ projeções canônicas $\pi_i : A_1 \vee \dots \vee A_m \longrightarrow A_i$, onde $A_0 = Fe$ e $i = 0, 1, \dots, m$, dadas por $\pi_0(\alpha e + n_1 + \dots + n_m) = \alpha e$ e $\pi_i(\alpha e + n_1 + \dots + n_m) = \alpha e + n_i$, se $1 \leq i \leq m$, são epimorfismos báricos, $\pi_1 + \dots + \pi_m - (m-1)\pi_0$ é a aplicação identidade em $A_1 \vee \dots \vee A_m$ e pela multiplicação em $A_1 \vee \dots \vee A_m$, pode-se mostrar que para todo $x \in A_1 \vee \dots \vee A_m$ e $n \geq 1$ vale $x^n = \pi_1(x)^n + \dots + \pi_m(x)^n - (m-1)\pi_0(x)^n$.

Para garantir um certo tipo de unicidade na decomposição de (A, ω) como join de álgebras báricas indecomponíveis, vamos precisar da outra condição de cadeia. Diremos que uma álgebra bárica (A, ω) com $N = \ker(\omega)$ satisfaz a *condição das cadeias ascendentes* (c.c.a.) se o M -grupo $(N, +)$ satisfaz c.c.a.. Podemos então, provar para as álgebras báricas, um resultado análogo ao Teorema de Krull-Schmidt para M -grupos:

Teorema 1.3 *Seja (A, ω) uma álgebra bárica em Ω satisfazendo c.c.d. e c.c.a. e sejam $(A_1, \omega_1), \dots, (A_n, \omega_n), (B_1, \gamma_1), \dots, (B_m, \gamma_m)$ álgebras báricas indecomponíveis em Ω tais que*

$$(A, \omega) \cong (A_1 \vee \dots \vee A_n, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_n),$$

$$(A, \omega) \cong (B_1 \vee \dots \vee B_m, \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_m).$$

Então $n = m$ e existe $\sigma \in S_n$, onde S_n denota o grupo simétrico de n símbolos, tal que $(A_i, \omega_i) \cong (B_{\sigma(i)}, \gamma_{\sigma(i)})$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração Pela Proposição 1.11, existem ideais bilaterais $I_1, \dots, I_n$ de A , todos contidos em $N = \ker(\omega)$ tais que $N = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$ e $(A_i, \omega_i) \cong (A'_i, \omega'_i)$, onde $A'_i = Fe \oplus I_i$ e $\omega'_i = \omega|_{A'_i}$, $i = 1, \dots, n$. Do mesmo modo, existem ideais bilaterais $J_1, \dots, J_m$ de A , todos contidos em N , tais que $N = J_1 \oplus \dots \oplus J_m$ e $(B_j, \gamma_j) \cong (B'_j, \gamma'_j)$, onde $B'_j = Fe \oplus J_j$ e $\gamma'_j = \omega|_{B'_j}$, $j = 1, \dots, m$. Como (A_i, ω_i) e (B_j, γ_j) são indecomponíveis, temos que os M -grupos correspondentes $(I_i, +), (J_j, +)$ são indecomponíveis. Assim, pelo Teorema 1.1 (Krull-Schmidt para M -grupos), temos $n = m$, $I_i \cong J_{\sigma(i)}$ como M -grupos, onde $\sigma \in S_n$ e, para $0 \leq k \leq n$,

$$N = I_1 \oplus \dots \oplus I_k \oplus J_{\sigma(k+1)} \oplus \dots \oplus J_{\sigma(n)}. \quad (1.8)$$

Denotemos por ψ_{k_j} a projeção canônica de N sobre o j -ésimo somando em (1.8). Em particular, ψ_{0_j} é a projeção de N sobre $J_{\sigma(j)}$. Seja ψ'_j a injeção canônica de I_j em N . Vamos mostrar que $\tau_j = \psi_{(j-1)_j} \psi'_j : I_j \longrightarrow J_{\sigma(j)}$ é um isomorfismo de álgebras. Como as operações em (1.8) são feitas componente a componente, temos que τ_j é homomorfismo. Seja $a_j \in \ker(\tau_j)$. Na decomposição $N = I_1 \oplus \cdots \oplus I_{j-1} \oplus J_{\sigma(j)} \oplus \cdots \oplus J_{\sigma(n)}$, se $a_j = a'_1 + \cdots + a'_n$, então $0 = \tau_j(a_j) = \psi_{(j-1)_j}(a_j) = a'_j$. Dessa maneira, mostramos que $a_j \in I_j \cap (I_1 \oplus \cdots \oplus I_{j-1} \oplus J_{\sigma(j+1)} \oplus \cdots \oplus J_{\sigma(n)}) = 0$. Logo, τ_j é monomorfismo. Se $b_j \in J_j$ e $b_j = b'_1 + \cdots + b'_n$ na decomposição $N = I_1 \oplus \cdots \oplus I_j \oplus J_{\sigma(j+1)} \oplus \cdots \oplus J_{\sigma(n)}$, então $b_j = \psi_{(j-1)_j}(b_j) = \psi_{(j-1)_j}(b'_j)$. Assim, τ_j é epimorfismo. Temos então que $\varphi_j : A'_j \longrightarrow B'_j$ dada por $\varphi_j(\alpha e + a) = \alpha e + \tau_j(a)$ é um isomorfismo bárico. ■

A procura de condições suficientes para que uma álgebra bárica seja indecomponível é um problema complicado e muitas vezes os critérios encontrados não são facilmente aplicáveis. Como exemplo, daremos uma condição para garantir a indecomponibilidade de uma álgebra bárica.

Lema 1.1 *Sejam (A, ω) uma álgebra bárica sobre o corpo F , $e \in A$ um elemento de peso 1, $N = \ker(\omega)$ e suponha que a aplicação linear $L_e : N \longrightarrow N$ dada por $L_e(x) = ex$, para todo $x \in A$, é diagonalizável. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\lambda_i \in F$ ($i = 1, \dots, k$) os autovalores distintos de L_e e $N_1, \dots, N_k$ os autoespaços correspondentes. Então:*

- (a) *Todo ideal à esquerda I de N tal que $I = (I \cap N_1) \oplus \cdots \oplus (I \cap N_k)$ é um ideal à esquerda de A .*
- (b) *Todo ideal à esquerda I de A contido em N pode ser expressso na forma $I = (I \cap N_1) \oplus \cdots \oplus (I \cap N_k)$.*

Demonstração (a) Como $A = Fe \oplus N$, basta mostrar que $eI \subseteq I$. Se $a \in I$, então $a = a_1 + \cdots + a_k$, onde $a_i \in I \cap N_i$ ($i = 1, \dots, k$). Logo, $ea = ea_1 + \cdots + ea_k = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \in (I \cap N_1) \oplus \cdots \oplus (I \cap N_k) = I$.

(b) Seja $a \in I \subseteq N$. Então $a = a_1 + \cdots + a_k$, com $a_i \in N_i$ unicamente determinados. Além disso, para cada $r = 1, \dots, k-1$, tem-se $L_e^r(a) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^r a_i$. Essas k igualdades formam um sistema com determinante $\sum_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$. Resolvendo esse sistema, obtemos $a_i \in I$, para cada $i = 1, \dots, k$. Assim, $a = a_1 + \cdots + a_k \in (N_1 \cap I) \oplus \cdots \oplus (N_k \cap I)$. ■

Observação 1.2 Vale um resultado análogo ao do Lema 1.1 se considerarmos $R_e : N \longrightarrow N$ diagonalizável e trocando ‘esquerda’ por ‘direita’.

Lema 1.2 *Sejam (A, ω) uma álgebra bária sobre o corpo F , $e \in A$ um elemento de peso 1 e $N = \ker(\omega)$. Suponha que o operador linear $L_e : N \longrightarrow N$ é diagonalizável com autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e autoespaços correspondentes $N_1, \dots, N_k$. Se $I_1, \dots, I_r$ são ideais à esquerda de A contidos em N tais que $N = I_1 \oplus \dots \oplus I_r$, então para cada $i = 1, \dots, k$, tem-se $N_i = (N_i \cap I_1) \oplus \dots \oplus (N_i \cap I_r)$.*

Demonstração Para cada $i = 1, \dots, k$, temos $(N_i \cap I_1) \oplus \dots \oplus (N_i \cap I_r) \subseteq N_i$. Por outro lado, se $a \in N_i \subseteq N$, decompondo $a = u_1 + \dots + u_r$ com cada $u_j \in I_j$, obtemos $L_e(a) = ea = \lambda_i a = \lambda_i(u_1 + \dots + u_r) = \lambda_i u_1 + \dots + \lambda_i u_r$, ou ainda, $L_e(a) = ea = e(u_1 + \dots + u_r) = eu_1 + \dots + eu_r$. Como cada I_j é ideal à esquerda de A , temos $eu_j \in I_j$. Assim, $eu_j = \lambda_i u_j$, para cada $j = 1, \dots, r$. Desse modo, $u_j \in I_j \cap N_i$, de onde resulta $a \in (I_1 \cap N_i) \oplus \dots \oplus (I_r \cap N_i)$. ■

Teorema 1.4 *Seja (A, ω) uma álgebra bária sobre o corpo F , $N = \ker(\omega)$, $e \in A$ um elemento de peso 1 tal que o operador linear $L_e : N \longrightarrow N$ é diagonalizável. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os autovalores distintos de L_e e $N_1, \dots, N_k$ os autoespaços correspondentes. Suponha que todo ideal bilateral I de A contido em N satisfaz a condição*

$$I \cap N_1 \neq 0 \text{ implica } N_2, \dots, N_k \subseteq I. \quad (1.9)$$

Então (A, ω) é indecomponível.

Demonstração Supondo que (A, ω) é decomponível, sejam I, J ideais não triviais de A tais que $N = I \oplus J$. Pelo Lema 1.1 (b), temos $I = (I \cap N_1) \oplus \dots \oplus (I \cap N_k)$ e $J = (J \cap N_1) \oplus \dots \oplus (J \cap N_k)$. Temos então, três casos a considerar:

- (a) $I \cap N_1 \neq 0$ e $J \cap N_1 \neq 0$;
- (b) $I \cap N_1 = 0 = J \cap N_1$;
- (c) $I \cap N_1 = 0$ e $J \cap N_1 \neq 0$.

(a) Se $I \cap N_1 \neq 0$ e $J \cap N_1 \neq 0$, então $N_2 \oplus \dots \oplus N_k \subseteq I$ e $N_2 \oplus \dots \oplus N_k \subseteq J$, ou seja, $N_2 \oplus \dots \oplus N_k \subseteq I \cap J = 0$, contradição.

(b) Se $I \cap N_1 = 0 = J \cap N_1$, então $I = (I \cap N_2) \oplus \cdots \oplus (I \cap N_k)$ e $J = (J \cap N_2) \oplus \cdots \oplus (J \cap N_k)$. Desse modo, teríamos $N = I \oplus J = (I \cap N_2 \oplus J \cap N_2) \oplus \cdots \oplus (I \cap N_k \oplus J \cap N_k) \subseteq N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$, e portanto, resultaria que $N_1 = 0$, absurdo.

(c) Se $I \cap N_1 = 0$ e $J \cap N_1 \neq 0$, então $I = (I \cap N_2) \oplus \cdots \oplus (I \cap N_k)$ e $N_2 \oplus \cdots \oplus N_k \subseteq J$. Logo, $I \subseteq N_2 \oplus \cdots \oplus N_k \subseteq J$, absurdo. ■

Esse resultado foi inicialmente provado para álgebras de Bernstein que, como veremos adiante, possui elemento e de peso 1 tal que o operador L_e é diagonalizável.

Na próxima seção, veremos que o Teorema 1.3 reduz o problema de classificação de várias classes de álgebras provenientes de modelos genéticos.

1.5 Subclasses fechadas

Seja Ω' uma subclasse de Ω . Diremos que Ω' é uma subclasse *fechada* se tem a seguinte propriedade: $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2) \in \Omega'$ se e somente se $(A_1, \omega_1), (A_2, \omega_2) \in \Omega'$. Assim, segue como consequência do Teorema 1.3, que a classificação de álgebras bárias pertencentes a uma subclasse fechada de Ω e satisfazendo c.c.d. e c.c.a. fica reduzida à determinação das álgebras indecomponíveis. É claro que todas as álgebras de dimensão finita satisfazem as duas condições de cadeia. Veremos a seguir, que as principais classes de álgebras provenientes de modelos genéticos são fechadas. Com essa finalidade, vamos apresentar algumas dessas classes de álgebras.

Seja (A, ω) uma álgebra bária sobre o corpo F e L uma extensão algébrica de F . Definindo $\omega_L : A_L = L \otimes_F A \longrightarrow L$ por $\omega_L(\lambda \otimes a) = \lambda \omega(a)$, temos que ω_L é um caracter de A_L . Assim, (A_L, ω_L) é uma álgebra bária sobre o corpo L . Dizemos que uma álgebra bária comutativa (A, ω) de dimensão $m + 1$ sobre o corpo F é uma *álgebra genética segundo Gonshor* se existe uma extensão algébrica L de F e uma base $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ de A_L , com $\omega_L(c_0) = 1$ e $\omega_L(c_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$, tais que para $1 \leq i \leq j \leq m$, tem-se:

$$c_i c_j = \sum_{k=0}^m \lambda_{ijk} c_k,$$

com λ_{ijk} satisfazendo:

- (i) $\lambda_{000} = 1$;
- (ii) $\lambda_{0jk} = 0$, para $k < j$;
- (iii) $\lambda_{ijk} = 0$, para $k \leq j$ e $0 < i \leq j \leq m$.

ou equivalentemente,

$$c_0^2 = c_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_{00k} c_k; \quad c_0 c_j = \sum_{k=j}^m \lambda_{0jk} c_k, \text{ se } 1 \leq j \leq m;$$

$$c_i c_j = \sum_{k=j+1}^m \lambda_{ijk} c_k, \text{ se } 1 \leq i \leq j < m \text{ e } c_i c_m = 0, \text{ se } 1 \leq i \leq m.$$

Tal base é chamada *base canônica* de A_L . Em geral, a base canônica de uma álgebra genética não é unicamente determinada. No entanto, as constantes de multiplicação $\lambda_{000}, \lambda_{011}, \dots, \lambda_{0mm}$ são únicas. Verifica-se que elas são os autovalores de qualquer operador R_x de A_L , com $\omega(x) = 1$. Essas constantes serão chamadas de *train raízes* de A (ver outro conceito de train raízes na página seguinte).

Dada (A, ω) em Ω , seja $M(A)$ a subálgebra da álgebra de todos os operadores lineares de A gerada pelo conjunto $\{R_x, L_x : x \in A\} \cup \{I_A\}$ das multiplicações à direita e à esquerda por elementos de A e a identidade de A . Assim, os elementos de $M(A)$ são polinômios não comutativos $f(T_{x_1}, \dots, T_{x_n})$, onde $x_i \in A$, $T_{x_i} = R_{x_i}$ ou L_{x_i} , $i = 1, \dots, n$ e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que (A, ω) é uma *álgebra genética segundo Schafer* se o polinômio característico de cada operador $S = f(T_{x_1}, \dots, T_{x_n}) \in M(A)$ depende apenas dos pesos $\omega(x_1), \dots, \omega(x_n)$, ou seja, se $S_1 = f(T_{x_1}, \dots, T_{x_n})$, $S_2 = f(T_{y_1}, \dots, T_{y_n})$ e $\omega(x_i) = \omega(y_i)$ para $i = 1, \dots, n$, então S_1 e S_2 têm o mesmo polinômio característico.

Em particular, o polinômio característico de R_x depende apenas do peso $\omega(x)$. Logo, existem constantes $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ em F tais que

$$\det(XI - R_x) = X^m + \gamma_1 \omega(x) X^{m-1} + \dots + \gamma_m \omega(x)^m.$$

Pelo Teorema de Hamilton-Cayley, temos

$$R_x^m + \gamma_1 \omega(x) R_x^{m-1} + \dots + \gamma_m \omega(x)^m I_A = 0.$$

Calculando em x , temos:

$$x^{m+1} + \gamma_1 \omega(x) x^m + \dots + \gamma_m \omega(x)^m x = 0. \quad (1.10)$$

Se x é um elemento de peso 1 em A , então

$$x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \cdots + \gamma_m x = 0. \quad (1.11)$$

Aplicando a função peso em (1.11), obtemos $1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_m = 0$. Um polinômio $p(X) = X^n + \gamma_1 X^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} X$, onde $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in F$ satisfazem $1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1} = 0$ é chamado um *train polinômio à direita*. Dizemos que uma álgebra bária (A, ω) satisfaz p se cada elemento a em A verifica

$$a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a = 0.$$

Uma álgebra bária (A, ω) é dita uma *train álgebra à direita* se existe um train polinômio à direita p tal que (A, ω) satisfaz p . Temos que uma álgebra bária (A, ω) satisfaz um polinômio p de grau n se e somente se $p(x) = 0$, para todo elemento $x \in A$ de peso 1 e $x^n = 0$, para todo $x \in \ker(\omega)$. Basta observar que se $x \notin \ker(\omega)$, então $\frac{x}{\omega(x)}$ tem peso 1 e $(\frac{x}{\omega(x)})^n + \gamma_1 (\frac{x}{\omega(x)})^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} \frac{x}{\omega(x)} = 0$ implica $x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0$. Se (A, ω) é uma train álgebra, o conjunto dos train polinômios p tais que (A, ω) satisfaz p formam um ideal no anel dos polinômios $F[X]$. O gerador p_m desse ideal é denominado *train polinômio minimal* de (A, ω) e o seu grau é o *posto* da train álgebra. Se L é um corpo de raízes de p_m , temos $p_m(X) = X(X-1)(X-\lambda_1) \cdots (X-\lambda_{r-2})$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-2} \in L$. Os escalares $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}$ são chamados de *train raízes à direita* de (A, ω) .

Considerando os operadores L_x , podemos definir train polinômios e train álgebras à esquerda. Nesse caso, o equivalente a (1.10) é:

$$({}^{s+1}x) + \gamma'_1 \omega(x)({}^s x) + \cdots + \gamma'_s (\omega(x)^s) x = 0.$$

Os train polinômios à esquerda são da forma $g(X) = ({}^s X) + \gamma'_1 ({}^{s-1} X) + \cdots + \gamma'_{s-1} X$.

Nos restringiremos apenas ao caso comutativo, que engloba os principais exemplos de álgebras obtidas a partir de problemas genéticos.

Por um resultado que garante que uma álgebra bária comutativa (A, ω) é genética segundo Gonshor se e somente se (A, ω) é genética segundo Schafer ([26, Teorema 3.13]), diremos neste caso, simplesmente que (A, ω) é genética.

Observamos que os idempotentes não nulos em uma álgebra genética (A, ω) tem peso 1, pois se $e \in A$ é idempotente de peso 0, temos de (1.10), para $x = e$, que $e = e^{m+1} = 0$.

Se uma álgebra genética (A, ω) sobre F tem idempotente não nulo e e $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ é uma base canônica de A_L para alguma extensão algébrica L de F , então $\{e, c_1, \dots, c_m\}$ também é base canônica de A_L . De fato, se e é idempotente não nulo, e portanto de peso 1, então $e = c_0 + n$, onde $n = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_m c_m \in \ker(\omega_L)$. Como $c_0 c_j = \sum_{k=j}^m \lambda_{0jk} c_k$, se $1 \leq j \leq m$, $c_i c_j = \sum_{k=j+1}^m \lambda_{ijk} c_k$, para $0 \leq i \leq j < m$ e $c_i c_m = 0$, quando $1 \leq i \leq m$, temos $ec_j = (c_0 + n)c_j = \sum_{k=j}^m \lambda_{0jk} c_k + \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i c_j = \sum_{k=j}^m \lambda_{0jk} c_k + \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\sum_{k=j+1}^m \lambda_{ijk} c_k \right) = \lambda_{0jj} c_j + \sum_{k=j+1}^m (\lambda_{0jk} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_{ijk}) c_k$, se $1 \leq j < m$ e $ec_m = (c_0 + n)c_m = \lambda_{0mm} c_m$.

Dizemos que uma álgebra A é *nilpotente* se existe $k \geq 1$ tal que $T_{x_1} \circ \dots \circ T_{x_k} = 0$ para qualquer escolha de $x_1, \dots, x_k$ em A . Observamos que se (A, ω) é uma álgebra genética, então $\ker(\omega)$ é nilpotente, pois a matriz da transformação T_x é triangular com diagonal nula, se $\omega(x) = 0$. Contudo, essa condição não é suficiente para garantir que uma álgebra bária seja genética. Podemos, no entanto, acrescentar uma condição em $\ker(\omega)$ para que a álgebra bária (A, ω) seja genética.

Se A é uma álgebra arbitrária e U, V subálgebras de A , define-se UV como sendo a subálgebra de A gerada pelo conjunto $U \cup V$. Assim, podemos definir as potências principais à direita, à esquerda e as potências plenas de uma subálgebra U :

- (i) $U^1 = U$; $U^{n+1} = U^n U$, para $n > 1$;
- (ii) ${}^1U = U$; ${}^{n+1}U = {}^n U U$, para $n > 1$;
- (iii) $U^{[1]} = U$; $U^{[n+1]} = U^{[n]} U^{[n]}$, para $n > 1$.

Pode-se provar que, para todo $n \geq 1$, $N^{[n]} \subseteq N^n$.

Diremos que uma álgebra bária comutativa (A, ω) é uma *train álgebra especial* se $N = \ker(\omega)$ é nilpotente e para cada $m \geq 1$, N^m é um ideal de A . Um resultado conhecido, cuja demonstração pode ser encontrada em [26], diz que toda train álgebra especial é genética. Podemos observar pelo que foi feito anteriormente, que toda álgebra genética é uma train álgebra. Esse problema de comparação entre as classes de álgebras obtidas da genética é bastante estudado. Não o faremos aqui, pois esse estudo foge dos objetivos desta dissertação.

Outra classe importante de álgebras proveniente de modelos genéticos é a classe das álgebras de Bernstein. Uma álgebra bária comutativa (A, ω) é uma *álgebra de Bernstein* de ordem n se (A, ω) é comutativa e todo elemento a em A satisfaz a identidade $a^{[n+2]} =$

$\omega(a)^{2^n} a^{[n+1]}$. As álgebras de Bernstein de ordem 1 serão o objeto de estudo dos Capítulos 3 a 6 desta dissertação.

Vamos mostrar que as classes de álgebras definidas acima são fechadas.

Proposição 1.12 *Dado um train polinômio $p(X) = X^n + \gamma_1 X^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} X$, a classe de todas as train álgebras comutativas que possuem idempotentes não nulos e satisfazem p é fechada.*

Demonstração Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) duas train álgebras que satisfazem p , com idempotentes não nulos $e_1 \in A_1$ e $e_2 \in A_2$. Seja $a \in A_1 \vee A_2 = Fe \oplus N_1 \oplus N_2$, onde $e = e_1 \vee e_2$, $N_1 = \ker(\omega_1)$ e $N_2 = \ker(\omega_2)$. Desse modo, existem $\alpha \in F$, $u \in N_1$ e $v \in N_2$ tais que $a = \alpha e + u + v$. Assim, para todo $i \geq 1$, tem-se $a^i = \alpha^i e + n$, com $n \in \ker(\omega_1 \vee \omega_2)$. Se π_i são as projeções (página 20) e p' é dado por $p'(a) = a^n + \gamma_1(\omega_1 \vee \omega_2)(a)a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}((\omega_1 \vee \omega_2)(a))^{n-1}a$, temos $\pi_0(p'(a)) = \pi_0(a^n + \gamma_1(\omega_1 \vee \omega_2)(a)a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}((\omega_1 \vee \omega_2)(a))^{n-1}a) = \alpha^n e + \gamma_1 \alpha \alpha^{n-1} e + \dots + \gamma_{n-1} \alpha^{n-1} \alpha e = (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}) \alpha^n e = 0$. Dessa maneira, $p'(a) = (-\pi_0 + \pi_1 + \pi_2)(p'(a)) = \pi_1(p'(a)) + \pi_2(p'(a)) = p'(\pi_1(a)) + p'(\pi_2(a)) = 0$. Logo, $A_1 \vee A_2$ satisfaz p . É claro que toda subálgebra bária de qualquer álgebra satisfazendo p também satisfaz p . ■

Corolário *Se (A_1, ω_1) satisfaz o polinômio p_1 e (A_2, ω_2) satisfaz o polinômio p_2 então $A_1 \vee A_2$ satisfaz o polinômio p que é o mínimo múltiplo comum de p_1 e p_2 .* ■

Seja $f = f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio não associativo sobre o corpo F e considere a variedade definida por f , isto é, a classe das álgebras A sobre o corpo F satisfazendo $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in A$, $i = 1, \dots, n$.

Proposição 1.13 *A subclasse da variedade definida por f que consiste das álgebras que são báricas e têm idempotentes de peso 1 é fechada.*

Demonstração Observamos que $A_1 \vee A_2$ é isomorfa à subálgebra de $A_1 \times A_2$ formada por todos os pares (a_1, a_2) tais que $\omega_1(a_1) = \omega_2(a_2)$. Como $A_1 \times A_2$ claramente satisfaz f , o mesmo vale para $A_1 \vee A_2$. ■

Observando que a intersecção de classes fechadas é fechada, segue como consequência da proposição anterior que, para cada variedade de álgebras sobre um corpo F , a subclasse consistindo das álgebras que são bárias e possuem idempotentes de peso 1 é fechada.

Fixado o corpo F , observamos que se (A, ω) é uma álgebra genética, $L \subset K$ extensões algébricas de F e $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ é uma base canônica de A_L então esse mesmo conjunto é base canônica de A_K . Assim, dadas duas álgebras genéticas, podemos tomar bases canônicas para ambas numa mesma extensão algébrica de F .

Proposição 1.14 *A classe de todas as álgebras bárias sobre o corpo F que são genéticas e tem idempotentes não nulos é fechada.*

Demonstração Sejam $(A_1, \omega_1), (A_2, \omega_2)$ duas álgebras dessa classe. Se L é extensão algébrica de F , $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ e $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ bases canônicas de $(A_1)_L$ e $(A_2)_L$, respectivamente, e $a_0 \in A_1, b_0 \in A_2$ idempotentes de peso 1, temos $a_i a_j = \sum_{k=0}^n \lambda_{ijk} a_k$ e $b_i b_j = \sum_{k=0}^m \gamma_{ijk} b_k$, onde $\lambda_{ijk} \in L$ satisfazem

$$\begin{aligned} \lambda_{0jk} &= 0 \quad (k < j); & \lambda_{ijk} &= 0 \quad (k \leq j, 0 < i \leq j \leq n); \\ \gamma_{0jk} &= 0 \quad (k < j); & \gamma_{ijk} &= 0 \quad (k \leq j, 0 < i \leq j \leq m). \end{aligned}$$

Tomando em $(A_1 \vee A_2)_L$ os $n + m + 1$ elementos $c_0 = a_0 \vee b_0, c_k = a_k$, se $1 \leq k \leq n$ e $c_k = b_{k-n}$, se $n + 1 \leq k \leq n + m$, temos: $c_0^2 = c_0$; se $0 < i \leq j \leq n$ então $c_0 c_j = (a_0 \vee b_0) a_j = a_0 a_j = \sum_{k=j}^n \lambda_{0jk} a_k = \sum_{k=j}^n \lambda_{0jk} c_k, c_i c_j = a_i a_j = \sum_{k=j}^n \lambda_{ijk} a_k = \sum_{k=j}^n \lambda_{ijk} c_k$, com $\lambda_{ijj} = 0$; se $0 < i \leq n < j \leq n + m$ então $c_0 c_j = (a_0 \vee b_0) b_{j-n} = b_0 b_{j-n} = \sum_{k=j}^{n+m} \gamma_{0,j-n,k-n} b_{k-n} = \sum_{k=j}^{n+m} \gamma_{0,j-n,k-n} c_k, c_i c_j = a_i b_{j-n} = 0$ e finalmente, se $n < i \leq j \leq n + m$, temos $c_i c_j = b_{i-n} b_{j-n} = \sum_{k=j}^{n+m} \gamma_{i-n,j-n,k-n} b_{k-n} = \sum_{k=j}^{n+m} \gamma_{i-n,j-n,k-n} c_k$, com $\gamma_{i-n,j-n,j-n} = 0$. Assim, $\{c_0, c_1, \dots, c_{n+m}\}$ é uma base canônica de $(A_1 \vee A_2)_L$.

Reciprocamente, sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) álgebras em Ω de dimensões $n + 1$ e $m + 1$, respectivamente, $a_0 \in A_1, b_0 \in A_2$ idempotentes de peso 1 e suponha que $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ tem uma base canônica $\{c_0, c_1, \dots, c_{n+m}\}$ em uma extensão algébrica L de F , com $c_0 = a_0 \vee b_0$. Se $a_k \in \ker(\omega_1), b_k \in \ker(\omega_2), k = 1, \dots, n + m$ e $\lambda_{ijk} \in L, i, j, k = 0, 1, \dots, n + m$ são tais que $c_k = a_k + b_k$ e $c_i c_j = \sum_{k=0}^{n+m} \lambda_{ijk} c_k$ então $a_0 a_j + b_0 b_j = (a_0 \vee b_0)(a_j + b_j) = c_0 c_j =$

$\sum_{k=j}^n \lambda_{0jk} c_k = \sum_{k=j}^n \lambda_{0jk} a_k + \sum_{k=j}^n \lambda_{0jk} b_k$, se $1 \leq j \leq n+m$; $a_i a_j + b_i b_j = (a_i + b_i)(a_j + b_j) = c_i c_j =$
 $\sum_{k=j+1}^{n+m} \lambda_{ijk} c_k = \sum_{k=j+1}^{n+m} \lambda_{ijk} a_k + \sum_{k=j+1}^{n+m} \lambda_{ijk} b_k$, para $1 \leq i \leq j < n+m$ e $a_i a_{n+m} + b_i b_{n+m} =$
 $c_i c_m = 0$, quando $1 \leq i \leq n+m$. Como $\{a_1, \dots, a_{n+m}\}$ gera $\ker(\omega_1)$, podemos escolher
a seguinte base $\{a_{t_1}, \dots, a_{t_n}\}$ para $\ker(\omega_1)$: $t_n = \max\{j : a_j \neq 0, 1 \leq j \leq n+m\}$ e
 $t_{n-i} = \max\{j : \{a_{t_n}, a_{t_n-1}, \dots, a_{t_n-i+1}, t_j\} \text{ é linearmente independente}, 1 \leq j < t_{n-i+1}\}$,
 $i = 1, \dots, n-1$. Dessa maneira, se $1 \leq j \leq n+m$ então a_j é combinação linear de
 $\{a_{t_r}, \dots, a_{t_n}\}$, onde $r = \min\{i : j \leq t_i, 1 \leq i \leq n\}$. Portanto, para $1 \leq r \leq s < n$,
temos $a_{t_r} a_{t_s} = \sum_{k=t_s+1}^{n+m} \lambda_{t_r t_s k} a_k$ é combinação linear de $\{a_{t_s+1}, \dots, a_{t_n}\}$, $a_0 a_{t_s} = \sum_{k=t_s}^{n+m} \lambda_{0 t_s k} a_k$ é
combinação linear de $\{a_{t_s}, \dots, a_{t_n}\}$, $a_{t_r} a_{t_n} = 0$ e $a_0 a_{t_n} = \lambda_{0 t_n t_n} a_n$. Assim, $\{a_0, a_{t_1}, \dots, a_{t_n}\}$
é base canônica de $(A_1)_L$. Do mesmo modo, obtemos uma base canônica para $(A_2)_L$. ■

Proposição 1.15 *A classe das train álgebras especiais com idempotentes de peso 1 é fechada.*

Demonstração Sejam (A_1, ω_1) , (A_2, ω_2) train álgebras especiais. Temos, então, que $\ker(\omega_i)$ é nilpotente e, para cada $k \geq 1$, $(\ker(\omega_i))^k$ é ideal de A_i , $i = 1, 2$. Como $\ker(\omega_1 \vee \omega_2) = \ker(\omega_1) \oplus \ker(\omega_2)$, temos $(\ker(\omega_1 \vee \omega_2))^k = (\ker(\omega_1))^k \oplus (\ker(\omega_2))^k$. Assim, $(\ker(\omega_1 \vee \omega_2))^k$ é ideal de $A_1 \vee A_2$. Em $\ker(\omega_1 \vee \omega_2)$ a multiplicação é feita componente a componente. Dessa maneira, se o índice de nilpotência de A_i é n_i , $i = 1, 2$ e $n = \max\{n_1, n_2\}$ então $T_{(a_1, b_1)} \dots T_{(a_n, b_n)} = (T_{a_1} \dots T_{a_n}, T_{b_1} \dots T_{b_n}) = (0, 0)$, onde $T = R$ ou $T = L$, $a_i \in \ker(\omega_1)$ e $b_i \in \ker(\omega_2)$, $i = 1, \dots, n$. Portanto, $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ é train álgebra especial. De modo semelhante, mostramos que se $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ é train álgebra especial então (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) também são train álgebras especiais. ■

Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein de ordem n e $x \in A$ tem peso 1 então $(x^{[n+1]})^2 = (x^{[n+1]})(x^{[n+1]}) = x^{[n+2]} = (\omega(x))^{2^n} x^{[n+1]} = x^{[n+1]}$. Logo, toda álgebra de Bernstein tem idempotentes de peso 1. Com argumentos análogos à demonstração da Proposição 1.12, prova-se o seguinte resultado:

Proposição 1.16 *Para todo $n \geq 1$, a classe de todas as álgebras de Bernstein de ordem n sobre um corpo F é fechada.* ■

Na Seção 3.4 mostramos uma subclasse não fechada das álgebras de Bernstein.

Capítulo 2

Exemplos

O estudo da evolução de uma população genética em gerações sucessivas pôde ser feito através das álgebras gaméticas. Essas álgebras puderam facilitar vários cálculos em modelos mais complexos, como no caso das populações poliplóides. Neste capítulo vamos estudar alguns desses exemplos de álgebras provenientes de modelos genéticos, quanto à sua indecomponibilidade. A existência ou não de uma interpretação no contexto da genética dos resultados obtidos é desconhecida.

Dizemos que uma álgebra comutativa A de dimensão finita $n + 1$ sobre o corpo real $\mathbb{R}$ é uma *álgebra gamética* se existe uma base $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ de A tal que as constantes de multiplicação γ_{ijk} com relação a essa base, definidas por

$$a_i a_j = \sum_{k=0}^n \gamma_{ijk} a_k \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

satisfazem

$$\begin{aligned} (i) \quad & 0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1 & i, j, k = 0, 1, \dots, n \\ (ii) \quad & \sum_{k=0}^n \gamma_{ijk} = 1 & i, j = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Tal base é chamada uma *base natural* de A .

Dada uma álgebra gamética A , os elementos $a_0, a_1, \dots, a_n$ de uma base natural de A podem ser interpretados como os genótipos de uma população e o número real γ_{ijk} pode ser considerado como a probabilidade do cruzamento dos genótipos a_i e a_j produzir o genótipo a_k , $i, j, k = 0, 1, \dots, n$; por outro lado, dada uma população com genótipos $a_0, a_1, \dots, a_n$, podemos construir uma álgebra gamética de base $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, onde a multiplicação de dois elementos da base nos fornece a distribuição de tipos gaméticos obtidos pelo cruzamento dos tipos genéticos correspondentes aos elementos dados.

Observamos que se $\omega : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é a forma linear definida por $\omega(a_i) = 1$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$, então $\omega(a_i a_j) = \omega(\sum_{k=0}^n \gamma_{ijk} a_k) = \sum_{k=0}^n \gamma_{ijk} \omega(a_k) = \sum_{k=0}^n \gamma_{ijk} = 1 = \omega(a_i) \omega(a_j)$. Assim, ω é um caracter de A e, portanto, (A, ω) é uma álgebra bária.

Exemplo 2.1 Considere uma população de indivíduos diplóides cujos alelos de um determinado loci são indicados por $a_0, a_1, \dots, a_n$. Vamos supor que os homozigotos $a_i a_i$ produzem apenas gametas a_i e os heterozigotos $a_i a_j$ produzem gametas a_i e a_j na mesma proporção, para todo $i, j = 0, 1, \dots, n$ e $i \neq j$. Dessa maneira, podemos construir uma álgebra gamética para essa população, cujas constantes de multiplicação em relação à base $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ são dadas por $\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} + \delta_{jk})$, para todo $i, j, k = 0, 1, \dots, n$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Assim, o produto de dois elementos da base é dado por $a_i a_j = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$, para todo $i, j = 0, 1, \dots, n$. Tal álgebra será chamada *álgebra gamética para herança mendeliana simples com $n + 1$ alelos*.

Observação 2.1 Podemos definir álgebra gamética para herança mendeliana simples sobre qualquer corpo F de característica diferente de 2.

2.1 A duplicada comutativa

Seja A uma álgebra sobre o corpo F . O espaço vetorial $A \otimes_F A$ com a multiplicação

$$(\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i)(\sum_{j \in J} c_j \otimes d_j) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_i \otimes c_j d_j,$$

onde I, J são subconjuntos finitos de índices, é uma álgebra, em geral não comutativa, chamada de *duplicada não comutativa* de A e denotada por $A \otimes_d A$. Verifica-se que a aplicação $\varphi : A \otimes_d A \longrightarrow A^2$ dada por $\varphi(\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) = \sum_{i \in I} a_i b_i$ é um epimorfismo de álgebras. Logo, se (A, ω) é uma álgebra bária, observando que a restrição de ω a A^2 é não nula, tem-se que $(A \otimes_d A, \omega_d)$ é uma álgebra bária, onde $\omega_d = \omega \circ \varphi$. Sejam $x = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i$ e $y = \sum_{j \in J} c_j \otimes d_j$ elementos em $A \otimes_d A$. Como $xy = (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i)(\sum_{j \in J} c_j \otimes d_j) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_i \otimes c_j d_j = \varphi(x) \otimes \varphi(y)$, resulta que $(A \otimes_d A) \ker(\varphi) = 0 = \ker(\varphi)(A \otimes_d A)$.

Se A é uma álgebra comutativa, podemos construir a duplicada comutativa de A : considere em $A \otimes_d A$ o ideal bilateral L gerado pelo conjunto $\{x \otimes y - y \otimes x : x, y \in A\}$. Denotando por $x * y$ a classe de $x \otimes y$ em $(A \otimes_d A)/L$, a multiplicação em $(A \otimes_d A)/L$ é dada por

$$\left(\sum_{i \in I} x_i * y_i\right) \left(\sum_{j \in J} x_j * y_j\right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_i * x_j y_j,$$

Dessa forma, $(A \otimes_d A)/L$ é uma álgebra comutativa, chamada a *duplicada comutativa* de A e é denotada por $D(A)$. No caso em que (A, ω) é uma álgebra bárica comutativa, tem-se que o ideal L definido acima está contido em $\ker(\omega_d)$. Assim, o homomorfismo $\bar{\omega}_d : D(A) = (A \otimes_d A)/L \longrightarrow F$ dado por $\bar{\omega}_d(\sum_{i \in I} a_i * b_i) = \omega_d(\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i)$ é novamente um caracter. Portanto, $(D(A), \bar{\omega}_d)$ é uma álgebra bárica. Como $L \subseteq \ker(\varphi)$, a aplicação $\psi : D(A) \longrightarrow A^2$ dada por $\psi(\sum_{i \in I} a_i * b_i) = \sum_{i \in I} a_i b_i$ é um epimorfismo de álgebras; assim, $\bar{\omega}_d = \omega \circ \psi$ e $D(A) \ker(\psi) = 0$. Temos ainda, que se $e \in A$ é um idempotente de peso 1 então $e * e$ é um idempotente de peso 1 em $(D(A), \bar{\omega}_d)$.

Observamos que se A tem dimensão finita $m + 1$ sobre F e $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ é base de A então $\{c_i \otimes c_j : 0 \leq i, j \leq m\}$ é base para $A \otimes_d A$ e $\{c_i * c_j : 0 \leq i \leq j \leq m\}$ é base para $D(A)$. Assim, as dimensões de $A \otimes_d A$ e $D(A)$ são $(m + 1)^2$ e $\frac{1}{2}(m + 2)(m + 1)$, respectivamente.

Quando A é uma álgebra gamética, a sua duplicada comutativa tem um sentido genético: se $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ é base natural de A , a base $\{a_{ij} = a_i * a_j : 0 \leq i \leq j \leq n\}$ de $D(A)$ pode ser interpretada como os diferentes tipos de zigotos da população considerada em A . O produto dos elementos dessa base representa a distribuição das probabilidades do cruzamento dos diferentes tipos de zigotos dessa população. A duplicada comutativa de uma álgebra gamética é chamada então, de *álgebra zigótica*.

Exemplo 2.2 Considere a álgebra gamética para herança mendeliana simples com $n + 1$ alelos do Exemplo 2.1. Uma base para a duplicada comutativa dessa álgebra é $\{a_{ij} = a_i * a_j : 0 \leq i \leq j \leq n\}$ e o produto é dado por

$$a_{ij} a_{kl} = (a_i a_j * a_k a_l) = \left(\frac{1}{2}(a_i + a_j) * \frac{1}{2}(a_k + a_l)\right) = \frac{1}{4}(a_{ik} + a_{il} + a_{jk} + a_{jl}).$$

Essa álgebra é denominada *álgebra zigótica $(n + 1)$ -alélica de Mendel*.

Observação 2.2 Como no caso das álgebras genéticas para herança mendeliana simples, podemos definir álgebra zigótica n -alélica de Mendel sobre qualquer corpo de característica

diferente de 2.

Lema 2.1 *Se (A, ω) é uma álgebra bária comutativa com idempotentes de peso 1, denotando por ω' a restrição de ω a A^2 e usando a notação acima, temos:*

- (a) *O ideal $\ker(\omega')$ de A^2 é gerado pelos produtos xa , onde $x \in A$ e $a \in \ker(\omega)$, isto é, $\ker(\omega') = A(\ker(\omega))$.*
- (b) *O ideal $\ker(\bar{\omega}_d)$ de $D(A)$ é gerado pelos elementos $x * a$, com $x \in A$ e $a \in \ker(\omega)$, ou seja, $\ker(\bar{\omega}_d) = A * \ker(\omega)$.*

Demonstração (a) Todo elemento de A pode ser decomposto na forma $\alpha e + a$, onde e é um idempotente de peso 1, $\alpha \in F$ e $\omega(a) = 0$. Assim, cada elemento $x \in A^2$ é da forma $\sum_{i \in I} (\alpha_i e + a_i)(\beta_i e + b_i) = (\sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i) e + \sum_{i \in I} (a_i b_i + \alpha_i e b_i + \beta_i e a_i)$, com $\alpha_i, \beta_i \in F$, $a_i, b_i \in \ker(\omega)$ e I um conjunto finito de índices. Se $x \in \ker(\omega')$, então $\sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i = \omega'(x) = \omega(x) = 0$. Desse modo, temos $x = \sum_{i \in I} [(\alpha_i e + \frac{1}{2} a_i) b_i + (\beta_i e + \frac{1}{2} b_i) a_i] \in A(\ker(\omega))$ e, portanto, $\ker(\omega') \subseteq A(\ker(\omega))$. A outra inclusão é imediata.

(b) A demonstração é análoga à feita no item (a). ■

Veremos como a indecomponibilidade de uma álgebra bária comutativa se reflete na sua duplicada comutativa.

Teorema 2.1 *Para toda álgebra bária comutativa e indecomponível (A, ω) que satisfaz $A^2 = A$, tem-se que sua duplicada comutativa $(D(A), \bar{\omega}_d)$ é indecomponível.*

Demonstração Sejam I e J ideais de $D(A)$, ambos contidos em $\ker(\bar{\omega}_d)$, tais que $\ker(\bar{\omega}_d) = I \oplus J$. Como $A^2 = A$, o homomorfismo $\psi : D(A) \longrightarrow A$ é um epimorfismo. Logo, $\psi(I)$ e $\psi(J)$ são ideais de A , ambos contidos em $\ker(\omega)$ e $\psi(I) \cap \psi(J) = 0$. De fato, se $x \in \psi(I) \cap \psi(J)$ então $x = \sum_{i=1}^r a_i b_i = \psi(\sum_{i=1}^r a_i * b_i) = \sum_{j=1}^s c_j d_j = \psi(\sum_{j=1}^s c_j * d_j)$, com $\sum_{i=1}^r a_i * b_i \in I$ e $\sum_{j=1}^s c_j * d_j \in J$. Assim,

$$x * x = (\sum_{i=1}^r a_i b_i) * (\sum_{j=1}^s c_j d_j) = (\sum_{i=1}^r a_i * b_i) (\sum_{j=1}^s c_j * d_j) \in I \cap J = 0.$$

Logo, temos que $x * x = 0$ e, portanto, $x = 0$. Como ψ é epimorfismo bárico ($\bar{\omega}_d = \omega \circ \psi$), $\ker(\omega) = \psi(\ker(\bar{\omega}_d)) = \psi(I \oplus J) = \psi(I) \oplus \psi(J)$. Assim, devemos ter, por exemplo, $\psi(I) = 0$ e $\psi(J) = \ker(\omega)$. Desse modo, $I = 0$, pois se $x \in I$, pela parte (b) do Lema 2.1, $x = \sum_{i=1}^r x_i * a_i$, onde $x_i \in A$ e $a_i \in \ker(\omega)$. Como $\psi(J) = \ker(\omega)$, temos $a_i = \sum_{j=1}^s b_{ij} c_{ij} = \psi(\sum_{j=1}^s b_{ij} * c_{ij})$, onde $\sum_{j=1}^s b_{ij} * c_{ij} \in J$. Mas $A^2 = A$ implica que cada $x_i = \sum_{k=1}^t d_{ik} f_{ik}$, $d_{ik}, f_{ik} \in A$. Então $x = \sum_{i=1}^r x_i * a_i = \sum_{i=1}^r (\sum_{k=1}^t d_{ik} f_{ik}) * (\sum_{j=1}^s b_{ij} c_{ij}) = \sum_{i=1}^r (\sum_{k=1}^t d_{ik} * f_{ik}) (\sum_{j=1}^s b_{ij} * c_{ij}) \in I \cap J = 0$. Logo, $I = 0$. ■

As próximas proposições mostram que a duplicada comutativa de álgebras genéticas e train álgebras são novamente genéticas e train, respectivamente.

Proposição 2.1 *Seja (A, ω) uma álgebra genética comutativa de dimensão $m+1$ sobre $\mathbb{R}$, com train raízes $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Então a duplicada comutativa de A é novamente uma álgebra genética, com train raízes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, e além dessas, zero, com multiplicidade $\frac{1}{2}m(m+1)$.*

Demonstração Inicialmente, vamos provar que se $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ é uma base canônica para (A, ω) , então $\{c_i * c_j : 0 \leq i \leq j \leq m\}$ é base canônica para a duplicada comutativa $(D(A), \bar{\omega}_d)$ de (A, ω) , com relação à seguinte ordem nos índices:

$$(k, s) \leq (p, q) \text{ se e somente se } s < q \text{ ou } s = q \text{ e } k \leq p.$$

Observando que $(c_i * c_j)(c_p * c_q) = \sum_{k,s=1}^m \lambda_{ijk} \lambda_{pqs} c_k * c_s = \sum_{1 \leq k < s \leq m} (\lambda_{ijk} \lambda_{pqs} + \lambda_{ijs} \lambda_{pqk}) c_k * c_s + \sum_{k=1}^m \lambda_{ijk} \lambda_{pqk} c_k * c_k$, devemos mostrar que

$$\begin{cases} \lambda_{000} \lambda_{000} = 1; \\ \lambda_{00k} \lambda_{pqs} + \lambda_{00s} \lambda_{pqk} = 0, & \text{se } (k, s) < (p, q); \\ \lambda_{ijk} \lambda_{pqs} + \lambda_{ijs} \lambda_{pqk} = 0, & \text{se } (k, s) \leq (p, q) \text{ e } (i, j) > (0, 0). \end{cases}$$

Seja $(k, s) < (p, q)$. Como $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ é base canônica de (A, ω) e $k \leq s$, se $s < q$ então $\lambda_{pqs} = 0 = \lambda_{pqk}$, se $s = q$ e $k < p$ então $\lambda_{pqs} = 0 = \lambda_{pqk}$. No caso em que $(k, s) \leq (p, q)$ e $(k, j) > (0, 0)$, temos: se $s < q$ então $\lambda_{pqs} = 0 = \lambda_{pqk}$, se $s = q$ e $k < p$

temos $\lambda_{pqg} = 0 = \lambda_{pgk}$ quando $p > 0$ e se $p = 0$, resulta que $k = 0 = s$. Como $j > 0$ ou $i > 0$, concluímos que $\lambda_{ij0} = 0$. Dessa maneira, mostramos que $(D(A), \bar{\omega}_d)$ é uma álgebra genética. As train raízes dessa álgebra são $\lambda_{00k}\lambda_{kss} + \lambda_{00s}\lambda_{ksk}$ ($0 \leq k < s \leq m$) e $\lambda_{00k}\lambda_{kkk}$ ($0 \leq k \leq m$). Fazendo $k = 0 = s$, obtemos a train raiz $\lambda_{000}\lambda_{000} = 1 = \lambda_0$. Se $k = 0$ e $s > 0$, tem-se $\lambda_{ksk} = 0$ e $\lambda_{00k} = 1$. Assim, $\lambda_s = \lambda_{00s} = \lambda_{00k}\lambda_{kss} + \lambda_{00s}\lambda_{ksk}$ ($1 \leq s \leq m$) são train raízes de $(D(A), \bar{\omega}_d)$. As train raízes correspondentes a $k > 0$ são nulas, pois neste caso, $\lambda_{kss} = \lambda_{ksk} = 0$. Como a dimensão de $(D(A), \bar{\omega}_d)$ é $\frac{1}{2}(m+2)(m+1)$, temos $\frac{1}{2}(m+2)(m+1) - (m+1) = \frac{1}{2}m(m+1)$ train raízes correspondentes a $k > 0$. ■

Proposição 2.2 *Seja (A, ω) uma train álgebra de posto r e train raízes $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}$. Então a sua duplicada comutativa $(D(A), \bar{\omega}_d)$ é também uma train álgebra de posto no máximo $r+1$ e suas train raízes estão contidas no conjunto $\{0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}\}$.*

Demonstração Seja $p(X) = X^r + \gamma_1 X^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1} X$ o train polinômio minimal de (A, ω) e x um elemento de peso 1 em $D(A)$. Se ψ é o homomorfismo definido na página 32, temos $0 = \psi(x)^r + \gamma_1 \psi(x)^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1} \psi(x) = \psi(x^r + \gamma_1 x^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1} x)$. Logo, $x^r + \gamma_1 x^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1} x \in \ker(\psi)$. Como $\ker(\psi)D(A) = 0$, resulta que $(x^r + \gamma_1 x^{r-1} + \dots + \gamma_{r-1} x)x = 0$. No caso em que $x \in \ker(\bar{\omega}_d)$, concluímos que $x^{r+1} = 0$. Desse modo, o polinômio minimal de $(D(A), \bar{\omega}_d)$ divide $X^{r+1} + \gamma_1 X^r + \dots + X^2$. ■

Nas próximas seções, estudaremos a indecomponibilidade de algumas álgebras proveniente de modelos concretos da genética.

2.2 Álgebras gaméticas para populações poliplóides

Seja $G(n+1, 2m)$ a álgebra gamética de uma população $2m$ -plóide com $n+1$ alelos, denotados por $A_0, A_1, \dots, A_n$. Essa álgebra tem uma base natural formada por todos os monômios de grau m em $A_0, A_1, \dots, A_n$. Cada um desses monômios representa um dos tipos gaméticos dessa população e a multiplicação de dois monômios é uma representação algébrica da distribuição de tipos gaméticos obtidos pelo cruzamento dos tipos genéticos correspondente aos monômios dados. Como o número de monômios distintos é o número binomial $\binom{n+m}{n}$, a dimensão da álgebra $G(n+1, 2m)$ é $\binom{n+m}{n}$. Lembramos que

$(G(n+1, 2m), \omega)$ é uma álgebra bária, onde a função peso ω vale 1 em cada monômio da base natural.

Em [9], Gonshor mostra que se $X_0 = A_0$ e $X_i = A_0 - A_i$, $i = 1, \dots, n$, então o conjunto de monômios $X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ com $i_0 + i_1 + \dots + i_n = m$ forma uma base canônica para $(G(n+1, 2m), \omega)$, onde a multiplicação é dada por

$$(X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n})(X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) = \begin{cases} \binom{2m}{m}^{-1} \binom{i_0 + j_0}{m} X_0^{i_0 + j_0 - m} X_1^{i_1 + j_1} \dots X_n^{i_n + j_n} & \text{se } i_0 + j_0 \geq m \\ 0 & \text{se } i_0 + j_0 < m \end{cases}$$

Em particular, $X_0^m (X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) = \binom{2m}{m}^{-1} \binom{2m-j}{m} X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$. Observamos que $\omega(X_0^m) = 1$ e $\omega(X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) = 0$, se $0 \leq i_0 < m$. O monômio X_0^m é um idempotente de peso 1. Se denotarmos por V_j o subespaço gerado por todos os monômios $X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$, temos que a dimensão de V_j é $\binom{n+j-1}{j}$ e $G(n+1, 2m) = FX_0^m \oplus \ker(\omega) = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_m$. Observando que

$$(X_0^{m-i} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n})(X_0^{m-j} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) = \begin{cases} \binom{2m}{m}^{-1} \binom{2m-i-j}{m} X_0^{m-(i+j)} X_1^{i_1 + j_1} \dots X_n^{i_n + j_n} & \text{se } i+j \leq m \\ 0 & \text{se } m < i+j \end{cases}$$

resulta que $V_i V_j \subseteq V_{i+j}$ se $i+j \leq m$ e $V_i V_j = 0$ se $m < i+j$.

Lema 2.2 *Suponha que $i+j \leq m$, $b \in V_i$, $b \neq 0$ e $L_b : V_j \rightarrow V_{i+j}$ é a aplicação linear definida por $L_b(x) = bx$. Então L_b é injetora.*

Demonstração Considere no conjunto dos monômios $\{X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}\}$, a ordem lexicográfica, isto é, $X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} < X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$, se e somente se tem-se $i_s < j_s$, onde $s = \min\{k : i_k \neq j_k\}$. Como $X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} < X_0^{i'_0} X_1^{i'_1} \dots X_n^{i'_n}$ e $X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n} < X_0^{j'_0} X_1^{j'_1} \dots X_n^{j'_n}$ implicam que

$$(X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n})(X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) < (X_0^{i'_0} X_1^{i'_1} \dots X_n^{i'_n})(X_0^{j'_0} X_1^{j'_1} \dots X_n^{j'_n}),$$

tomando bases ordenadas para V_j e V_{i+j} segundo essa ordem, verifica-se facilmente que o número de colunas linearmente independentes na matriz de L_b nessas bases é $\binom{n+j-1}{j}$, a dimensão de V_j . Logo, L_b é injetora. ■

Teorema 2.2 Para cada $n \geq 1$ e $m \geq 2$, $G(n+1, 2m)$ é indecomponível.

Demonstração Suponha, por absurdo, que $G(n+1, 2m)$ é decomponível. Assim, existem I, J ideais de $G(n+1, 2m)$ tais que $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m = I \oplus J$. Como $m \geq 2$, I e J não estão ambos contidos em V_m . Temos então, dois casos a considerar:

- (a) $J \subseteq V_m$ (ou $I \subseteq V_m$);
- (b) $I \not\subseteq V_m$ e $J \not\subseteq V_m$.

(a) Seja $X_0^{m-1}X_i$ um monômio em V_1 e sejam $u \in I, v \in J$ tais que $X_0^{m-1}X_i = u + v$. Decompondo $u = a_1 + \cdots + a_m$, onde $a_i \in V_i, i = 1, \dots, m$, tem-se $X_0^{m-1}X_i = a_1 + \cdots + a_{m-1} + (a_m + v) \in V_1$. Logo, $a_2 = \dots = a_{m-1} = a_m + v = 0$. Assim,

$$u = a_1 + a_m = a_1 - v = X_0^{m-1}X_i - v \in I. \quad (2.1)$$

Multiplicando por X_0^m , obtemos:

$$X_0^m(X_0^{m-1}X_i - v) = \binom{2m}{m}^{-1} \left[\binom{2m-1}{m} X_0^{m-1}X_i - v \right] \in I.$$

Portanto,

$$\binom{2m-1}{m} X_0^{m-1}X_i - v \in I \quad (2.2)$$

Como $m \geq 2$, temos $\binom{2m-1}{m} > 1$. Dessa forma, subtraindo (2.2) de (2.1), resulta que $X_0^{m-1}X_i \in I$, para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja, I contém o conjunto $\{X_0^{m-1}X_i : 1 \leq i \leq n\}$ que gera $\ker(\omega)$ como ideal. Daí $I = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, o que é absurdo.

(b) Temos $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m = I \oplus J$. Logo, podemos supor, por exemplo, que I não está contido em $V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$. Dessa maneira, existe $a \in I$ tal que $a = a_1 + \cdots + a_m$, com $a_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ e $a_1 \neq 0$. Seja c um elemento em J que não está em V_m . Assim, se $c = c_1 + \cdots + c_m$, com $c_i \in V_i, i = 1, \dots, m$, então $k = \min\{j : c_j \neq 0\} < m$. Considere então, o operador linear $L_b : V_k \longrightarrow V_{m-1}$ dado por $L_b(x) = bx$, onde $b = X_0^{k+1}X_1^{m-k-1}$. Pelo Lema 2.2, temos que L_b é injetora, portanto, $c'_{m-1} = (X_0^{k+1}X_1^{m-k-1})c_k \neq 0$. Além disso, $c'_m = (X_0^{k+1}X_1^{m-k-1})c_{k+1} \in V_{m-k-1}V_{k+1} \subseteq V_m$ e $(X_0^{k+1}X_1^{m-k-1})c_r = 0$, para $r \geq k+2$. Assim, $c' = (X_0^{k+1}X_1^{m-k-1})c = c'_{m-1} + c'_m \in (V_{m-1} \oplus V_m) \cap J$. Temos então que $ac' \in I \cap J = 0$. Como $V_iV_j = 0$ para $i+j > m$, tem-se: $0 = ac' = (a_1 + \cdots + a_m)(c'_{m-1} + c'_m) = a_1c'_{m-1} = L_{a_1}(c'_{m-1})$. Dessa forma, L_{a_1} não seria injetora,

contrariando o Lema 2.2. Logo, $G(n+1, 2m)$ é indecomponível, para $n \geq 1$ e $m \geq 2$. ■

Corolário *Todas as álgebras zigóticas $D(G(n+1, 2m)) = Z(n+1, 2m)$ são indecomponíveis para $m \geq 2$.*

Demonstração Como $(X_0^m)^2 = X_0^m$ e

$$X_0^m (X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) = \binom{2m}{m}^{-1} \binom{2m-j}{m} X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n},$$

segue que $G(n+1, 2m)^2 = G(n+1, 2m)$. Assim, pelo Teorema 2.1, $Z(n+1, 2m)$ é indecomponível, se $m \geq 2$ e $n \geq 1$. ■

Quando $m = n = 1$, $G(2, 2)$ tem dimensão 2 e portanto, é indecomponível. Uma base canônica para $G(2, 2)$ é $\{X_0, X_1\}$, onde $X_0^2 = X_0$; $X_0 X_1 = \frac{1}{2} X_1$ e $X_1^2 = 0$.

Se $n > 1$ e $m = 1$, $G(n+1, 2)$ é a álgebra genética para herança mendeliana simples com $n+1$ alelos. Uma base canônica para $G(n+1, 2)$ é $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_n\}$, onde $Y_0 = a_0$, $Y_i = a_i - a_0$ e $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ é base natural. Dessa maneira, a multiplicação é dada por: $Y_0^2 = Y_0$; $Y_0 Y_j = \frac{1}{2} Y_j$, se $1 \leq j \leq n$ e $Y_i Y_j = 0$, se $1 \leq i, j \leq n$. Essa álgebra é decomponível. Verifica-se que $G(n+1, 2) = G(2, 2) \vee \dots \vee G(2, 2)$ é join de n cópias de $G(2, 2)$. Basta observar que $Y_0 = X_0 \vee \dots \vee X_0$ e $Y_i = (0, \dots, X_1, \dots, 0)$, onde X_1 aparece na posição $i+1$, para todo $1 \leq i \leq n$. Provaremos na seção 5.4 que as álgebras zigóticas $Z(n+1, 2)$ são indecomponíveis, para todo $n \geq 1$. Esse exemplo mostra que o Teorema 2.1 é falso se trocarmos ‘indecomponível’ por ‘decomponível’.

2.3 Álgebras gaméticas para loci ligados

Seja A_k a álgebra gamética para k loci ligados (sobre o corpo real) e suponha que cada locus admita dois alelos, um dominante e um recessivo. Os gametas são representados por $a(I)$, onde $I \subset \{1, \dots, k\} = K$ representa os loci contendo o alelo recessivo. Assim, o conjunto $\{a(I) : I \subset K\}$ é uma base natural para A_k . Temos então, que (A_k, ω) é uma álgebra bária, onde ω é dada por $\omega(a(I)) = 1$, para todo subconjunto I de K . Se I, J são subconjuntos de K e $\lambda(I, J)$ denota a probabilidade do gameta possuir genes paternos

nos loci indicados em I e genes maternos nos loci indicados em J então

$$\lambda(I, J) = \begin{cases} \sum_{I \subseteq U; J \subseteq V; U \cap V = \emptyset; U \cup V = K} \lambda(U, V) & \text{se } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{se } I \cap J \neq \emptyset \end{cases} \quad (2.3)$$

Em [16], Holgate mostra que se $I \cap J = R$, a multiplicação em (A_k, ω) é dada por

$$a(I)a(J) = \sum_{U \subseteq (I \setminus R); V \subseteq (J \setminus R)} \lambda(((U \cup J) \setminus R) \setminus V, ((V \cup I) \setminus R) \setminus U) a(U \cup V \cup R)$$

e se j é o número de elementos em J então $\{c(I) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^j a(J) : I \subseteq K\}$ é uma base canônica de (A_k, ω) , onde a multiplicação é dada por

$$c(I)c(J) = \lambda(I, J)c(I \cup J).$$

Observamos que $\omega(c(\emptyset)) = 1$ e $\omega(c(I)) = 0$, se $\emptyset \neq I \subseteq K$.

Teorema 2.3 *A álgebra gamética para k loci ligados é indecomponível, desde que os escalares $\lambda(I, K \setminus I)$ sejam não nulos, para todo subconjunto I de $K = \{1, \dots, k\}$.*

Demonstração Se N_i é o subespaço gerado pelos $c(I)$ tais que $I \subseteq K$ tem i elementos, então $\ker(\omega) = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$. Como $\lambda(I, J) = 0$ quando $I \cap J \neq \emptyset$, temos $N_i N_j \subseteq N_{i+j}$, para $1 \leq i + j \leq k$. Sejam L um ideal não nulo de N e $x \in L$, $x \neq 0$. Se $x = x_1 + \dots + x_k$, com $x_i \in N_i$, $i = 1, \dots, k$, seja $s = \min\{i : x_i \neq 0\}$. Desse modo, existe um subconjunto I_0 de K com s elementos tal que x , tem componente não nula $\alpha(I_0)c(I_0)$. Assim,

$$x = \alpha(I_0)c(I_0) + \sum_{|I|=i, I \neq I_0} \alpha(I)c(I) + \sum_{|J| \geq i+1} \alpha(J)c(J)$$

onde $|I|$ denota o número de elementos em I . Observando que $c(I)c(K \setminus I_0) = 0$, se $|I| \geq i$ e $I \neq I_0$, temos $xc(K \setminus I_0) = \alpha(I_0)\lambda(I_0, K \setminus I_0)c(K) \in L$. Assim, $c(K) \in L$. Dessa forma, não é possível decompor $\ker(\omega)$ em uma soma direta de ideais não triviais. Portanto, essa álgebra bária é indecomponível. ■

Corolário *A álgebra zigótica para k loci ligados, cada um com dois alelos, é indecomponível, desde que $\lambda(I, K \setminus I)$ sejam não nulos, para todo subconjunto I de K .*

Demonstração Basta observar que $c(\emptyset)^2 = c(\emptyset)$, $c(\emptyset)c(I) = \lambda(\emptyset, I)c(I)$. Além disso, por (2.3), cada $\lambda(I, K \setminus I)$ sendo não nulo e portanto positivo, implica que $\lambda(\emptyset, I) \neq 0$. Assim, $A_k^2 = A_k$. O resultado segue então, pelo Teorema 2.1. ■

2.4 Álgebras gaméticas para loci independentes

A álgebra gamética que descreve k loci independentes, cada um com dois alelos, é o produto tensorial de k cópias de $G(2, 2)$. Seja $\{c_0, c_1\}$ a base canônica de $G(2, 2)$ dada por $c_0^2 = c_0$; $c_0 c_1 = \frac{1}{2} c_1$ e $c_1^2 = 0$. Então $\otimes^k G(2, 2)$ tem uma base canônica formada por todos os monômios da forma $c(I) = c_{i_1} \otimes \dots \otimes c_{i_k}$, onde $I \subseteq \{1, \dots, k\} = K$ e $i_j = 1$ se e somente se $j \in I$. Assim,

$$c(I)c(J) = \begin{cases} 0 & \text{se } I \cap J \neq \emptyset \\ \frac{1}{2^i} c(I \cup J) & \text{se } I \cap J = \emptyset \text{ e } i = |I \cup J| \end{cases} \quad (2.4)$$

Seja V_i o subespaço de $\otimes^k G(2, 2)$ gerado por todos os $c(I)$ com $|I| = i$. Desse modo, $\otimes^k G(2, 2) = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ e $\dim(V_i) = \dim(V_{k-i}) = \binom{k}{i}$. Além disso, V_0 é gerado por $c_0 \otimes \dots \otimes c_0$ e V_k , por $c_1 \otimes \dots \otimes c_1$. A função peso ω toma o valor 1 em $c_0 \otimes \dots \otimes c_0$ e o valor 0 nos outros elementos da base. Desse modo, $\ker(\omega) = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

Teorema 2.4 *A álgebra bária $(\otimes^k G(2, 2), \omega)$ é uma train álgebra indecomponível satisfazendo o train polinômio $X(X-1)(X-\frac{1}{4})\dots(X-\frac{1}{2^k})$.*

Demonstração A prova da indecomponibilidade é análoga à feita na demonstração do Teorema 2.3. Resta então, verificar que a álgebra $\otimes^k G(2, 2)$ satisfaz o train polinômio $X(X-1)(X-\frac{1}{4})\dots(X-\frac{1}{2^k})$. Seja $x \in \otimes^k G(2, 2)$ com $\omega(x) = 1$. Então $x = c(\emptyset) + x_1 + \dots + x_k$, onde cada $x_i \in V_i$, $i = 1, \dots, k$. Como $c(\emptyset)x_i = \frac{1}{2^i}x_i$, para todo $i = 1, \dots, k$, temos que

$$x^2 = c(\emptyset) + x_1 + (x_1^2 + \frac{1}{2}x_2) + x'_3 + \dots + x'_k,$$

onde $x'_i = \frac{1}{2^{i-1}}x_i + \sum_{j=1}^{i-1} x_j x_{i-j} \in V_i$, $i = 3, \dots, k$. Logo,

$$x^2 - x = (x_1^2 - \frac{1}{2}x_2) + x'_3 - x_3 + \dots + x'_k - x_k.$$

Multiplicando a equação anterior por x , obtemos:

$$x^3 - x^2 = x(x^2 - x) = \frac{1}{4}(x_1^2 - \frac{1}{2}x_2) + y_3 + \dots + y_k,$$

onde $y_i = (x_1^2 - \frac{1}{2}x_2)x_{i-2} + \frac{1}{2^i}(x'_i - x_i) + \sum_{j=3}^{i-1} (x'_j - x_j)x_{i-j} \in V_i$, $i = 3, \dots, k$. Assim,

$$(x^2 - x)(x - \frac{1}{4}) = (x^3 - x^2) - \frac{1}{4}(x^2 - x) = y'_3 + \cdots + y'_k,$$

onde $y'_i = y_i - \frac{1}{4}(x'_i - x_i) \in V_i$, $i = 3, \dots, k$. Novamente, multiplicando por x ,

$$x(x^2 - x)(x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}y'_3 + y''_4 + \cdots + y''_k, \text{ com } y''_i \in V_i, i = 4, \dots, k.$$

Desse modo,

$$(x^2 - x)(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{8}) = x(x^2 - x)(x - \frac{1}{4}) - \frac{1}{8}(x^2 - x)(x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}y''_4 + \cdots + y''_k.$$

Aplicando esse método sucessivamente, obtemos: $(x^2 - x)(x - \frac{1}{4}) \dots (x - \frac{1}{2^k}) = 0$. Mostramos então, que os elementos de peso 1 de $\otimes^k G(2, 2)$ satisfazem o train polinômio $X(X - 1)(X - \frac{1}{4}) \dots (X - \frac{1}{2^k})$. Os elementos $x \in \ker(\omega)$ satisfazem $x^{k+1} = 0$, pela multiplicação dada em (2.4). Assim, $(\otimes^k G(2, 2), \omega)$ satisfaz o train polinômio $X(X - 1)(X - \frac{1}{4}) \dots (X - \frac{1}{2^k})$ e, portanto, é uma train álgebra. ■

Corolário *A álgebra zigótica para k loci independentes com dois alelos é indecomponível e satisfaz o train polinômio $X^2(X - 1)(X - \frac{1}{4}) \dots (X - \frac{1}{2^k})$.*

Demonstração Novamente, observamos que $(\otimes^k G(2, 2))^2 = \otimes^k G(2, 2)$ e usamos o Teorema 2.1 para concluir que a álgebra zigótica para k loci independentes é indecomponível. Pela Proposição 2.2, resulta que $D(\otimes^k G(2, 2))$ satisfaz o train polinômio $X^2(X - 1)(X - \frac{1}{4}) \dots (X - \frac{1}{2^k})$. ■

Outros exemplos de álgebras gaméticas que efetivamente representam modelos de hereditariedade podem ser analisados de maneira semelhante. A existência de álgebras indecomponíveis de dimensões arbitrariamente grandes mostra que o problema de classificação é muito difícil. Também sugere uma indagação, ainda sem resposta: qual o significado biológico da indecomponibilidade?

Capítulo 3

Álgebras de Bernstein

A partir deste capítulo, estudaremos a classe das álgebras de Bernstein de ordem 1. Y.I. Lyubich desenvolveu a teoria dessas álgebras sobre os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, seguindo de perto o problema que a originou, trabalhando com operadores que representam a evolução de sistemas populacionais. Algumas formas lineares relacionadas com esses operadores permanecem invariantes após cada geração. Por esse motivo, foram denominadas formas invariantes. Já vimos que uma álgebra bária (A, ω) é Bernstein se todo elemento $x \in A$ verifica $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$. Começaremos o capítulo introduzindo a noção de formas invariantes e veremos como a identidade acima foi obtida a partir dessas formas. Ao longo dos próximos capítulos, F será um corpo de característica diferente de 2.

3.1 Formas invariantes

Sejam A um espaço vetorial de dimensão finita sobre F , $T : A \rightarrow A$ um operador linear e $\omega : A \rightarrow F$ uma forma linear não nula e T -invariante, isto é, $\omega \circ T = \omega$. Seja H o conjunto dos elementos de A tais que $\omega(x) = 1$. Definimos em A a multiplicação:

$$2xy = \omega(x)T(y) + \omega(y)T(x), \text{ para todo } x, y \in A. \quad (3.1)$$

Como ω é T -invariante, temos

$$2\omega(xy) = \omega(x)\omega(T(y)) + \omega(y)\omega(T(x)) = \omega(x)\omega(y) + \omega(y)\omega(x) = 2\omega(x)\omega(y).$$

Dessa maneira, (A, ω) é uma álgebra bária, denominada *álgebra induzida por T* . Observamos que a equação (3.1) é equivalente a

$$x^2 = \omega(x)T(x), \text{ para todo } x \in A, \quad (3.2)$$

e esta, por sua vez, é equivalente a

$$x^2 = T(x), \text{ para todo } x \in H. \quad (3.3)$$

Para mostrar que (3.3) implica (3.2), seja $x \in A$. Se $x \notin N = \ker(\omega)$, então $\frac{x}{\omega(x)} \in H$; logo, $\frac{x^2}{\omega(x)^2} = T(\frac{x}{\omega(x)})$, o que implica $x^2 = \omega(x)T(x)$. Se $x \in N$, tomando $y \in H$ arbitrário, como $x + y \in H$, temos que $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = T(x + y) = T(x) + T(y)$, ou seja, $T(x) = x^2 + 2xy$, para todo $y \in H$. Desse modo, $x^2 + 2xy = T(x) = x^2 + 2x(x + y) = 3x^2 + 2xy$ e, portanto, $x^2 = 0 = \omega(x)T(x)$. As outras implicações são de verificação imediata. Assim, uma álgebra induzida por um operador linear pode ser caracterizada definindo $x^2 = T(x)$, para todo elemento $x \in H$. Quando o operador T é a identidade em A e ω é uma forma linear não nula, a álgebra (A, ω) induzida por T é chamada de *álgebra unitária*. A multiplicação nessa álgebra é dada por $2xy = \omega(y)x + \omega(x)y$, para todo $x, y \in A$ ou, equivalentemente, $2xy = x + y$, para todo $x, y \in H$. No outro extremo, se a imagem de T tem dimensão 1 e ω é uma forma T -invariante, então a multiplicação em (A, ω) é dada por $xy = \omega(x)\omega(y)e$, onde $e \in H$ é um gerador da imagem de T . De fato, se $e \in H$ gera a imagem de T então $T(x) = \lambda_x e$, onde $\lambda_x \in F$, para todo $x \in A$; logo, $\omega(x) = \omega(T(x)) = \lambda_x \omega(e) = \lambda_x e$, portanto, $T(x) = \omega(x)e$. Substituindo em (3.1), resulta que $xy = \omega(x)\omega(y)e$. Essa álgebra bária é chamada *álgebra constante*. Observamos que as álgebras unitárias coincidem com as álgebras gaméticas para herança mendeliana simples definidas no Exemplo 2.1.

Dada uma álgebra bária comutativa (A, ω) de dimensão finita sobre F , dizemos que f é uma *forma linear invariante* em A se f é uma forma linear em A verificando

$$2f(xy) = \omega(y)f(x) + \omega(x)f(y), \text{ para todo } x, y \in A \quad (3.4)$$

ou equivalentemente,

$$f(x^2) = \omega(x)f(x), \text{ para todo } x \in A. \quad (3.5)$$

Esta última equação é equivalente a

$$f(x^2) = f(x), \text{ para todo } x \in H. \quad (3.6)$$

Observamos que o conjunto $\mathcal{J}$ das formas lineares invariantes forma um subespaço do espaço dual A^* de A . Como ω é uma forma linear não nula e invariante, temos que a dimensão de $\mathcal{J}$ é pelo menos 1. Diremos que $f \in \mathcal{J}$ é uma *forma linear invariante não trivial* se f não é um múltiplo de ω .

Exemplo 3.1 Quando (A, ω) é uma álgebra induzida por um operador T , temos que f é uma forma linear invariante se e somente se $f(T(x)) = f(x)$, para todo $x \in A$. De fato, seja f uma forma linear invariante. Se $x \in N = \ker(\omega)$ então tomando $y \in H$, resulta que $T(x) = 2xy$, pela multiplicação definida em (3.1). Assim, de (3.4) obtemos $f(T(x)) = f(2xy) = f(x)$. Se $x \notin N$, por (3.2) e (3.5) temos $f(T(x)) = f(\frac{x^2}{\omega(x)}) = \frac{f(x^2)}{\omega(x)} = f(x)$. Reciprocamente, se $f(T(x)) = f(x)$ para todo $x \in A$, então $f(x^2) = f(\omega(x)T(x)) = \omega(x)f(x)$. Logo, f é uma forma linear invariante. Portanto, quando (A, ω) é induzida por T , tem-se

$$\mathcal{J} = \ker(I - T^*), \quad (3.7)$$

onde I é a identidade em A e $T^* : A^* \rightarrow A^*$ é a transposta do operador T . Assim, $\mathcal{J}$ é o autoespaço do operador T^* associado ao autovalor 1. Observamos que numa álgebra unitária todas as formas são invariantes e, por outro lado, numa álgebra constante não existem formas lineares invariantes não triviais, pois neste caso, se $f \in \mathcal{J}$ então $f(x) = f(T(x)) = f(\omega(x)e) = \omega(x)f(e)$, o que implica que $f = f(e)\omega$.

Se $\mathcal{J}^\perp = \{x \in A : f(x) = 0, \text{ para todo } f \in \mathcal{J}\}$ e $\text{ann}(A) = \{x \in A : xy = 0, \text{ para todo } y \in A\}$, temos que se $y \in H$ e f é um elemento arbitrário de $\mathcal{J}$, para cada $x \in \text{ann}(A)$,

$$0 = f(0) = 2f(xy) = f(x) + \omega(x)f(y). \quad (3.8)$$

Fazendo $f = \omega$ em (3.8), obtemos $\omega(x) = 0$. Dessa maneira, (3.8) fica: $0 = 2f(xy) = f(x)$. Logo, $x \in \mathcal{J}^\perp$, ou seja,

$$\text{ann}(A) \subseteq \mathcal{J}^\perp. \quad (3.9)$$

Quando a álgebra (A, ω) é gamética, a igualdade em (3.9) está relacionada com a conservação do sistema que ela representa. Diremos que uma álgebra bária comutativa (A, ω) é *conservativa* quando

$$\mathcal{J}^\perp = \text{ann}(A). \quad (3.10)$$

É possível descrever quando uma álgebra induzida por um operador é conservativa:

Proposição 3.1 *Uma álgebra (A, ω) induzida por um operador T é conservativa se e somente se o operador T é uma projeção. Em particular, as álgebras unitárias e constantes são conservativas.*

Demonstração Quando (A, ω) é induzida por T , vamos mostrar que $\text{ann}(A) = \ker(T)$. Pelo fato de ω ser T -invariante, temos que $\ker(T) \subseteq \ker(\omega)$. Assim, se $x \in \ker(T)$ então, pela multiplicação dada em (3.1), $xy = 0$, para todo $y \in A$. Por outro lado, se $x \in \text{ann}(A)$, por (3.2) resulta que $\omega(x)T(x) = x^2 = 0$, isto é, $\omega(x) = 0$. Dessa maneira, tomando $y \in H$, concluímos por (3.1) que $0 = 2xy = T(x)$. Portanto, $\text{ann}(A) = \ker(T)$. Além disso, de (3.7) temos que $\mathcal{J}^\perp = \ker(I - T^*)^\perp = \text{Im}(I - T)$. Logo, (A, ω) é conservativa se e somente se $\text{Im}(I - T) = \mathcal{J}^\perp \subseteq \text{ann}(A) = \ker(T)$, ou seja, se e somente se $T - T^2 = T(I - T) = 0$. ■

Será útil caracterizar as álgebras conservativas através de uma identidade.

Proposição 3.2 *Uma álgebra bária (A, ω) é conservativa se e somente se para todo $x, y \in A$, vale a identidade*

$$x^2y = \omega(x)xy. \quad (3.11)$$

Demonstração Seja f uma forma linear invariante. Assim, $f(x^2) = \omega(x)f(x)$, para todo $x \in A$. Se (A, ω) é uma álgebra conservativa, temos $x^2 - \omega(x)x \in \mathcal{J}^\perp = \text{ann}(A)$. Desse modo, para todo $x, y \in A$, $(x^2 - \omega(x)x)y = 0$, ou seja, $x^2y = \omega(x)xy$. Reciprocamente, se $x^2y = \omega(x)xy$, para todo $x, y \in A$, então $x^2 - \omega(x)x \in \text{ann}(A)$. Assim, se $f \in (\text{ann}(A))^\perp = \{f \in A^* : f(x) = 0, \text{ para todo } x \in \text{ann}(A)\}$, tem-se $f(x^2 - \omega(x)x) = 0$. Logo, $(\text{ann}(A))^\perp \subseteq \mathcal{J}$, o que implica que $\mathcal{J}^\perp \subseteq \text{ann}(A)$. Como a outra inclusão é sempre verdadeira, temos que (A, ω) é conservativa. ■

Corolário *Numa álgebra conservativa, vale a seguinte identidade, para todo elemento $x \in A$:*

$$(x^2)^2 = (\omega(x))^2x^2. \quad (3.12)$$

Demonstração Basta substituir y por x^2 e depois por x em (3.11). ■

Conforme já vimos, as álgebras báricas comutativas (A, ω) onde vale a identidade (3.12) são denominadas *álgebras de Bernstein*. Em alguns momentos será conveniente

denotar a álgebra de Bernstein (A, ω) simplesmente por A . Observamos que ω está bem determinada, pois numa álgebra de Bernstein (A, ω) , os elementos de $\ker(\omega)$ satisfazem $(x^2)^2 = 0$; logo, pela Proposição 1.4, ω é o único caracter de A .

Observação 3.1 Podemos estender as definições de álgebras conservativa e de Bernstein para dimensões arbitrárias, a partir das mesmas identidades que as definem em dimensão finita. Em alguns momentos nesta dissertação, vamos considerar o caso em que a álgebra tem dimensão infinita. Neste capítulo, a menos de menção ao contrário, estaremos trabalhando com dimensão finita.

Veremos adiante, na Proposição 3.6, que nem toda álgebra de Bernstein é conservativa, mas no caso das álgebras induzidas por operadores, elas coincidem:

Proposição 3.3 *Uma álgebra (A, ω) induzida por um operador T é Bernstein se e somente se o operador T é uma projeção. Nesse caso, a álgebra é necessariamente conservativa.*

Demonstração Pela Proposição 3.1 e pelo corolário anterior, se (A, ω) é induzida por uma projeção, então essa álgebra é Bernstein. Reciprocamente, se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein induzida por T então $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 = \omega(x)^2 \omega(x) T(x) = \omega(x)^3 T(x)$; por outro lado, $(x^2)^2 = \omega(x^2) T(x^2) = \omega(x)^2 T(\omega(x) T(x)) = \omega(x)^3 T^2(x)$. Assim, temos a identidade $\omega(x)^3 (T(x) - T^2(x)) = 0$, para todo $x \in A$. Se $x \notin N$, temos $T(x) = T^2(x)$. Se $x \in N$, tomando $y \in H$ temos $x + y \in H$. Logo, de (3.3) resulta $T(x) + T(y) = T(x + y) = T^2(x + y) = T^2(x) + T^2(y)$ e portanto, $T(x) = T^2(x)$. ■

Existe um modo interessante de caracterizar as álgebras induzidas por projeções. Dada uma álgebra bária (A, ω) , consideremos o subespaço $\mathcal{B}$ de A^* formado pelas formas lineares que anulam A^2 , isto é, $\mathcal{B} = (A^2)^\perp = \{f \in A^* : f(x^2) = 0, \text{ para todo } x \in A\}$. Temos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{J} = 0$, pois se $f \in \mathcal{B} \cap \mathcal{J}$ e $x \notin N = \ker(\omega)$ então $0 = f(x^2) = \omega(x)f(x)$, ou seja, $f(x) = 0$; para $x \in N$, tomando $y \in H$ obtemos $0 = 2f(xy) = \omega(x)f(y) + \omega(y)f(x) = f(x)$. Assim, $\dim(\mathcal{J}) + \dim(\mathcal{B}) \leq \dim(A)$. Temos então, o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Uma álgebra bária (A, ω) é induzida por uma projeção se e somente se $\dim(\mathcal{J}) + \dim(\mathcal{B}) = \dim(A)$, ou equivalentemente, $\mathcal{J} \oplus \mathcal{B} = A^*$.*

Demonstração Quando (A, ω) é induzida por um operador T , tem-se $A^2 = \text{Im}(T)$, pela identidade (3.2). Assim, $\mathcal{B} = (A^2)^\perp = \text{Im}(T)^\perp = \ker(T^*)$. Como $\mathcal{J} = \ker(I - T^*)$, resulta que $\mathcal{J} \oplus \mathcal{B} = \ker(I - T^*) \oplus \ker(T^*) = A^*$. Reciprocamente, se $\mathcal{J} \oplus \mathcal{B} = A^*$ então $\mathcal{J}^\perp \oplus \mathcal{B}^\perp = A$. Seja T a projeção definida por $\text{Im}(T) = \mathcal{B}^\perp$ e $\ker(T) = \mathcal{J}^\perp$. Para cada $x \in A$, seja $z = x^2 - \omega(x)T(x)$. Se f é uma forma linear em $\mathcal{B}$ então $f(x^2) = 0$; como $\text{Im}(T) = \mathcal{B}^\perp$, temos também que $f(T(x)) = 0$. Assim, $f(z) = 0$. Além disso, se $f \in \mathcal{J}$ então $f(z) = f(x^2) - \omega(x)f(T(x)) = \omega(x)(f(x) - f(T(x))) = \omega(x)f(x - T(x)) = 0$, pois $x - T(x) \in \ker(T) = \mathcal{J}^\perp$. Dessa maneira, como $A^* = \mathcal{J} \oplus \mathcal{B}$, concluímos que $f(z) = 0$, para todo $f \in A^*$ e, portanto, $z = 0$. Logo, $x^2 = \omega(x)T(x)$, para todo $x \in A$, ou seja, (A, ω) é induzida por T . ■

Corolário Uma álgebra (A, ω) é unitária, se e somente se $A^* = \mathcal{J}$.

Demonstração Já vimos que se (A, ω) é unitária então toda forma linear é invariante. Por outro lado, se $A^* = \mathcal{J}$, pela recíproca do teorema anterior, a álgebra (A, ω) é induzida por uma projeção T . Além disso, $\text{Im}(T) = \mathcal{B}^\perp = A$. Logo, T é a identidade em A , e portanto, (A, ω) é unitária. ■

A partir da próxima seção, vamos estudar com mais detalhe a classe das álgebras de Bernstein.

3.2 Decomposição de Peirce

Já vimos que toda álgebra de Bernstein tem idempotentes de peso 1. O próximo lema descreve o conjunto de todos os idempotentes de uma álgebra de Bernstein.

Lema 3.1 Numa álgebra de Bernstein (A, ω) , o conjunto $\text{Id}(A)$ dos idempotentes é dado por $\text{Id}(A) = \{x^2 : \omega(x) = 1\} \cup \{0\}$.

Demonstração Observamos inicialmente, que todo idempotente não nulo em uma álgebra de Bernstein tem peso 1. De fato, se $x^2 = x \neq 0$, então $x = (x^2)^2 = (\omega(x))^2 x^2 = (\omega(x))^2 x$, ou seja, $(\omega(x))^2 = 1$. Como o peso de um idempotente é sempre 0 ou 1, resulta que $\omega(x) = 1$. Assim, temos $\text{Id}(A) \subseteq \{x^2 : \omega(x) = 1\} \cup \{0\}$. A outra inclusão é con-

seqüência imediata da identidade (3.12). ■

Seja (A, ω) uma álgebra bária e $e \in A$ um idempotente não nulo. Todo elemento $x \in A$ se decompõe da forma $x = \omega(x)e + y$, onde $y \in \ker(\omega)$. Substituindo $x = \omega(x)e + y$ em (3.12) e considerando que o corpo F tem pelo menos quatro elementos, resulta que (A, ω) é uma álgebra de Bernstein se e somente se todo $y \in \ker(\omega)$ verifica as identidades abaixo:

$$2e(2ey) = 2ey; \quad (3.13)$$

$$2ey^2 + (2ey)^2 = y^2; \quad (3.14)$$

$$(2ey)y^2 = 0; \quad (3.15)$$

$$(y^2)^2 = 0. \quad (3.16)$$

Como $N = \ker(\omega)$ é um ideal, temos definido um operador $M_e : N \longrightarrow N$ por $M_e(y) = 2ey$, para cada $y \in N$. A identidade (3.13) nos garante que esse operador é uma projeção. Logo, denotando por U_e e Z_e a imagem e o núcleo de M_e , respectivamente, temos a seguinte decomposição:

$$\ker(\omega) = N = U_e \oplus Z_e.$$

Lema 3.2 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein. Com as notações acima, temos as seguintes inclusões:*

$$(U_e)^2 \subseteq Z_e; \quad (Z_e)^2 \subseteq U_e \text{ e } U_e Z_e \subseteq U_e. \quad (3.17)$$

Demonstração Pela identidade (3.14), temos que $M_e(y^2) + M_e(y)^2 = y^2$, para todo $y \in N$. Linearizando essa equação, obtemos

$$M_e(y_1 y_2) + M_e(y_1) M_e(y_2) = y_1 y_2, \quad (3.18)$$

onde $y_1, y_2 \in N$. Como $M_e(y) = y$ se e somente se $y \in U_e$, e $M_e(y) = 0$ se e somente se $y \in Z_e$, tomando $y_1, y_2 \in U_e$ e substituindo na equação (3.18), resulta $y_1 y_2 = M_e(y_1 y_2) + M_e(y_1) M_e(y_2) = M_e(y_1 y_2) + y_1 y_2$. Logo, $M_e(y_1 y_2) = 0$, ou seja, $(U_e)^2 \subseteq Z_e$. Além disso, se $y_2 \in Z_e$, a equação (3.18) fica $M_e(y_1 y_2) = y_1 y_2$, para qualquer $y_1 \in N$. Assim, $N Z_e \subseteq U_e$. Em particular valem $(Z_e)^2 \subseteq U_e$ e $U_e Z_e \subseteq U_e$. ■

Aplicando essa decomposição a $x = \omega(x)e + y$, podemos estabelecer o seguinte teorema de estrutura:

Teorema 3.2 *Sejam (A, ω) uma álgebra bária com idempotente não nulo e .*

(a) *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, decompondo cada $x \in A$ da forma $x = \omega(x)e + u + z$ com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, tem-se:*

$$x^2 = \omega(x)^2 e + (\omega(x)u + 2uz + z^2) + u^2, \quad (3.19)$$

onde $\omega(x)u + 2uz + z^2 \in U_e$ e $u^2 \in Z_e$. Além disso, valem as seguintes identidades, para quaisquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$:

$$u^3 = 0; \quad u(uz) = 0; \quad uz^2 = 0; \quad (3.20)$$

$$(u^2)^2 = 0; \quad (uz)^2 = 0. \quad (3.21)$$

(b) *Reciprocamente, se $A = Fe \oplus U \oplus Z$ é soma direta de subespaços com a multiplicação satisfazendo (3.19) e as identidades (3.20) e (3.21) então (A, ω) é uma álgebra de Bernstein com $U = U_e$ e $Z = Z_e$.*

Demonstração (a) Lembrando que $2eu = M_e(u) = u$ e $2ez = M_e(z) = 0$, para $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, temos $x^2 = (\omega(x)e + u + z)^2 = \omega(x)^2 e^2 + u^2 + z^2 + 2\omega(x)eu + 2\omega(x)ez + 2uz = \omega(x)^2 e + (\omega(x)u + 2uz + z^2) + u^2$. Pelo lema anterior, segue que $\omega(x)u + 2uz + z^2 \in U_e$ e $u^2 \in Z_e$. Cada $y \in N$ se decompõe da forma $y = su + tz$, onde $s, t \in F$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Desse modo, $2ey = M_e(y) = su$. Substituindo $y = su + tz$ na identidade (3.15), obtemos: $0 = (2ey)y^2 = su(su + tz)^2 = s^3u^3 + 2s^2tu(uz) + st^2uz^2$, para todo $s, t \in F$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Assim, valem as identidades em (3.20). Procedendo da mesma maneira com a identidade (3.16), resulta que $(y^2)^2 = 0$ se e somente se $(u^2)^2 = (uz)^2 = u^2z^2 = (z^2)^2 = u^2(uz) = (uz)z^2 = 0$, para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Em particular, valem as identidades em (3.21).

(b) Como $A = Fe \oplus U \oplus Z$, podemos decompor cada $y \in N$ da forma $y = u + z$, onde $u \in U$ e $z \in Z$. Usando (3.19) para $x = e + u + z$, temos $e^2 + u^2 + z^2 + 2eu + 2ez + 2uz = x^2 = e + u + 2uz + z^2 + u^2$. Assim, $2e(u + \overset{\vee}{w}) = u$. Logo, o operador $M_e : N \rightarrow N$ definido por $M_e(y) = 2ey$ é uma projeção com $Im(M_e) = U$ e $ker(M_e) = Z$. Temos então, a identidade (3.13) verificada. Novamente por (3.19), temos $(u + z)^2 = 2uz + z^2 + u^2$, com $2uz + z^2 \in U$ e $u^2 \in Z$, o que implica que $U^2 \subseteq Z$ e $UZ + Z^2 \subseteq U$. Desse modo, $M_e(y^2) + M_e(y)^2 = M_e(u^2 + 2uz + z^2) + u^2 = 2uz + z^2 + u^2 = y^2$. Portanto, vale (3.14). Na

parte (a), mostramos que (3.15) é equivalente a (3.20). Resta então, verificar a identidade (3.16). É suficiente mostrar que

$$(uz)u^2 = u^2z^2 = (uz)z^2 = (z^2)^2 = 0, \quad (3.22)$$

para todo $u \in U$ e $z \in Z$. Linearizando a primeira identidade de (3.20), obtemos

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0, \text{ para todo } u_1, u_2, u_3 \in U. \quad (3.23)$$

As identidades $(uz)u^2 = 0$ e $u^2z^2 = 0$ são obtidas de (3.23) e das duas últimas identidades de (3.20). Basta tomar $u_1 = u_2 = u$ e $u_3 = uz$ para a primeira delas e $u_1 = u_2 = u$ e $u_3 = z^2$ para a outra. Finalmente, $(uz)z^2 = 0 = (z^2)^2$ são casos particulares da última identidade em (3.20), observando que UZ e Z^2 estão contidos em U . ■

Além de (3.22) e (3.23), temos outras identidades obtidas através da linearização das identidades em (3.20) e (3.21):

Corolário 1 *Em uma álgebra de Bernstein valem as seguintes identidades:*

$$u(z_1z_2) = 0; \quad u(u^2z) = 0; \quad (3.24)$$

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0; \quad u^2(u^2z) = 0; \quad (3.25)$$

$$u_1(u_2z) + u_2(u_1z) = 0; \quad u_1^2(u_1u_2) = 0; \quad u_1^2(u_2z) + 2(u_1u_2)(u_1z) = 0; \quad (3.26)$$

$$(u_1z)(u_2z) = 0 = (uz_1)(uz_2); \quad (u_1u_2)z^2 = u^2(z_1z_2) = 0, \quad (3.27)$$

para todo $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $z, z_1, z_2 \in Z_e$.

Demonstração As identidades em (3.24) são obtidas através da linearização de $uz^2 = 0$ e observando que $u^2 \in Z_e$, para todo $u \in U_e$. A primeira identidade em (3.25) vem de (3.23), fazendo $u_1 = u_3$. Assim, lembrando que $u(u^2z) = 0$ obtemos $2u^2(u^2z) = u(u(u^2z)) = 0$. A linearização de $u(uz) = 0$, $(u^2)^2 = 0$ e $u^2(uz)$ nos fornece as identidades em (3.26) e (3.27) é obtida a partir da linearização de $(uz)^2 = 0$ e $u^2z^2 = 0$. ■

Corolário 2 *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein e $e \in A$ é idempotente não nulo, o conjunto $Id_1(A)$ dos idempotentes não nulos de A pode ser parametrizado pelo subespaço U_e ; mais precisamente, a aplicação $\varphi : U \longrightarrow Id_1(A)$ dada por $\varphi(u) = e + u + u^2$ é uma*

bijeção.

Demonstração Para todo $u \in U_e$, tem-se $2eu = M_e(u) = u$, $2eu^2 = M_e(u^2) = 0$, $u^3 = 0$ e $(u^2)^2 = 0$. Assim, $(e + u + u^2)^2 = e + u + u^2$, ou seja, $e + u + u^2$ é idempotente não nulo. Como a decomposição $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ é em soma direta, a função φ é injetora. Se x é um idempotente não nulo, e portanto de peso 1, temos $x = e + u + z$ e $x^2 = x$. Logo, por (3.19), temos $e + (u + 2uz + z^2) + u^2 = x^2 = x = e + u + z$, com $u + 2uz + z^2 \in U_e$ e $u^2 \in Z_e$, de onde resulta que $z = u^2$. Desse modo, temos que φ é sobrejetora. ■

Sejam e, f idempotentes não nulos em uma álgebra de Bernstein (A, ω) . Pelo corolário anterior, existe $u \in U_e$ tal que $f = e + u + u^2$. O próximo resultado relaciona os subespaços U_e e U_f , bem como os subespaços Z_e e Z_f .

Corolário 3 *Com as notações acima, temos que as aplicações $\psi_U : U_e \longrightarrow U_f$ e $\psi_Z : Z_e \longrightarrow Z_f$ dadas por $\psi_U(x) = x + 2ux$, para todo $x \in U_e$ e $\psi_Z(z) = z - 2uz - 2u^2z$, para todo $z \in Z_e$ são isomorfismos de espaços vetoriais.*

Demonstração Vamos mostrar inicialmente que para todo $u, x \in U_e$ e $z \in Z_e$, $x + 2ux \in U_f$ e $z - 2uz - 2u^2z \in Z_f$. A partir das identidades (3.22), (3.24), (3.25) e (3.26) obtemos $2f(x + 2ux) = 2(e + u + u^2)(x + 2ux) = 2ex + 4e(ux) + 2ux + 4u(ux) + 2u^2x + 4u^2(ux) = x + 2ux$ e $f(z - 2uz - 2u^2z) = (e + u + u^2)(z - 2uz - 2u^2z) = ez - 2e(uz) - 2e(u^2z) + uz - 2u(uz) - 2u(u^2z) + u^2z - 2u^2(uz) - 2u^2(u^2z) = 0$. Desse modo, temos que $Im(\psi_U) \subseteq U_f$ e $Im(\psi_Z) \subseteq Z_f$. Como $U_e \cap Z_e = 0$, temos que ψ_U e ψ_Z são monomorfismos. Pelo fato da álgebra A ter dimensão finita sobre F e $U_e \oplus Z_e = U_f \oplus Z_f$, resulta que esses monomorfismos são também epimorfismos. ■

Por esse último corolário, resulta que as dimensões de U_e e Z_e independem da escolha do idempotente não nulo e ; assim, o par $(1 + \dim(U_e), \dim(Z_e))$ é um invariante para álgebras de Bernstein de dimensão finita e é denominado o *tipo* da álgebra (A, ω) . A decomposição

$$A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e \quad (3.28)$$

é denominada *decomposição de Peirce* da álgebra (A, ω) relativa ao idempotente e . Observamos que a decomposição depende do idempotente escolhido, apesar da dimensão de

suas componentes ser invariante.

Observação 3.2 A menos desse último corolário, tudo que foi feito nesta seção não depende da dimensão da álgebra ser finita. Mesmo assim, é possível mudar a demonstração deste para que o resultado seja válido em dimensões arbitrárias. Basta observar que para cada $x_f = u_0 + z_0 \in U_f$ tem-se $\psi_U(u_0) = x_f$ e para cada $z_f = u_1 + z_1 \in Z_f$, $\psi_Z(z_1) = z_f$, onde $u_0, u_1 \in U_e$ e $z_0, z_1 \in Z_e$, para obter a sobrejetividade de ψ_U e ψ_Z . Assim, toda álgebra de Bernstein tem uma decomposição de Peirce do tipo (3.28).

Observação 3.3 Qualquer par de inteiros não negativos (r, s) é tipo de alguma álgebra de Bernstein de dimensão $1 + r + s$. De fato, seja A um espaço vetorial sobre F de dimensão $n = 1 + r + s$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de A . Se U é o subespaço de A gerado por $\{e_1, \dots, e_{r+1}\}$, T a projeção de A sobre U e $\omega : A \longrightarrow F$ é definida por $\omega(e_1) = 1$ e $\omega(e_i) = 0$, para $i = 2, \dots, n$, então ω é uma forma linear T -invariante e assim, a álgebra (A, ω) induzida por T é uma álgebra de Bernstein que verifica $e_1^2 = \omega(e_1)T(e_1) = e_1$, $N = \ker(\omega)$ é o subespaço gerado por $\{e_2, \dots, e_n\}$ e para todo $y \in N$, $M_{e_1}(y) = 2e_1y = \omega(e_1)T(y) + \omega(y)T(e_1) = T(y)$. Logo, M_{e_1} é a restrição de T ao subespaço N . Portanto, o posto de M_{e_1} é r , e assim (A, ω) é de tipo $(1 + r, s)$.

Nos casos extremos onde $r = 0$ ou $s = 0$, temos uma descrição completa das álgebras de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$:

Teorema 3.3 *Seja (A, ω) uma álgebra bária.*

- (a) *(A, ω) é Bernstein de tipo $(n, 0)$ se e somente se (A, ω) é uma álgebra unitária.*
- (b) *(A, ω) é Bernstein de tipo $(1, n - 1)$ se e somente se (A, ω) é uma álgebra constante.*

Demonstração (a) Supondo que (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, seja $e \in A$ um idempotente não nulo. Se $r = n$ então M_e é o operador identidade em N . Assim, $2ey = M_e(y) = y$, para todo $y \in N$. Substituindo em (3.14), obtemos que $y^2 = 0$, para todo $y \in N$. Dessa maneira, se $x = \omega(x)e + y$ é um elemento arbitrário de A , temos $x^2 = (\omega(x)e + y)^2 = \omega(x)^2e + \omega(x)2ey + y^2 = \omega(x)(\omega(x)e + y) = \omega(x)x$. Logo, (A, ω) é uma álgebra unitária. Reciprocamente, se (A, ω) é uma álgebra unitária então (A, ω) é Bernstein. Além disso, $2ey = \omega(e)y + \omega(y)e = y$, para todo $y \in N$, o que implica que o

operador M_e é a identidade em N . Portanto, a álgebra é de tipo $(n, 0)$.

(b) Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1, n - 1)$, temos que M_e é o operador nulo, para qualquer idempotente não nulo e . Conseqüentemente, $2ey = M_e(y) = 0$, para todo $y \in N$. Substituindo novamente em (3.14), obtemos $y^2 = 0$, para todo $y \in N$. Assim, $x^2 = (\omega(x)e + y)^2 = \omega(x)^2e + 2\omega(x)ey + y^2 = \omega(x)^2e$. Portanto, (A, ω) é uma álgebra constante. Suponha agora que (A, ω) é constante. Temos então que (A, ω) é Bernstein e satisfaz $2ey = 2\omega(e)\omega(y)e = 0$, para todo $y \in N$, isto é, M_e é o operador nulo em N . Logo, (A, ω) é Bernstein de tipo $(1, n - 1)$. ■

Corolário 1 *Uma álgebra de Bernstein de dimensão $n \leq 2$ é uma álgebra unitária ou constante.* ■

Corolário 2 *Uma álgebra de Bernstein (A, ω) de dimensão $n > 1$ não possui unidade.*

Demonstração Supondo que A possui unidade 1, seja $e = 1$. Assim, $M_e(y) = 2ey = 2y$, para todo $y \in N$, o que implica que o posto de M_e é $n - 1$. Logo, (A, ω) é uma álgebra unitária. Dessa maneira, para cada $x \in A$, tem-se $2x = 2ex = x + \omega(x)e$, ou seja, $x = 2\omega(x)e$. Portanto, se (A, ω) tem unidade, sua dimensão é 1. ■

3.3 Álgebras excepcionais e conservativas

Nesta seção vamos estudar duas subclasses importante das álgebras de Bernstein. Veremos como elas aparecem a partir das formas lineares invariantes e das formas lineares que anulam o subespaço A^2 . Usaremos a decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ para analisar essas formas. Decompondo cada $x \in A$ como $x = \omega(x)e + u + z$, onde $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, temos $f(x^2) = \omega(x)f(x)$ se e somente se $\omega(x)^2f(e) + \omega(x)f(u) + f((u + z)^2) = \omega(x)^2f(e) + \omega(x)f(u + z)$. Assim, quando $f \in \mathcal{J}$, temos $f(u + z) = f(u)$ e $f((u + z)^2) = 0$ e, portanto, $f(z) = f(u^2) = f(uz) = f(z^2) = 0$, para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Como $U_e^2 \subseteq Z_e$, para garantir que $f \in \mathcal{J}$, é suficiente ter $f(z) = f(uz) = f(z^2) = 0$, para $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Desse modo provamos:

$$\mathcal{J}^\perp = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e. \quad (3.29)$$

Procedendo da mesma maneira com $g \in \mathcal{B} = (A^2)^\perp$, temos que $g(x^2) = 0$ se e somente se $\omega(x)^2 g(e) + \omega(x)g(u) + g((u+z)^2) = 0$. Logo, se $g \in \mathcal{B}$ então $g(e) = g(u) = g(u^2) = g(uz) = g(z^2) = 0$, para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Observando que $U_e Z_e, Z_e^2 \subseteq U_e$, resulta que se $g(e) = 0$ e g se anula em U_e e U_e^2 então $g \in \mathcal{B}$. Assim, temos:

$$A^2 = \mathcal{B}^\perp = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2. \quad (3.30)$$

Uma álgebra A é denominada *nuclear* se $A^2 = A$. Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, temos que A é nuclear se e somente se $\mathcal{B} = 0$.

Observação 3.4 As identidades (3.29) e (3.30) mostram que para qualquer decomposição de Peirce de (A, ω) , os subespaços $(U_e Z_e + Z_e^2) \oplus Z_e$ e $Fe \oplus U_e \oplus U_e^2$ são os mesmos, isto é, não dependem da escolha do idempotente não nulo e .

Observa-se ainda, que $(\mathcal{J} \oplus \mathcal{B})^\perp = \mathcal{J}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp = \mathcal{J}^\perp \cap A^2 = (U_e Z_e + Z_e^2) \oplus U_e^2 = N^2$. Desse modo, obtemos como corolário do Teorema 3.1, o seguinte resultado:

Proposição 3.4 *Uma álgebra de Bernstein é induzida por uma projeção se e somente se $N^2 = 0$.*

Demonstração Pelo Teorema 3.1, uma álgebra é induzida por uma projeção se e somente se $\mathcal{J} \oplus \mathcal{B} = A^*$ e, numa álgebra de Bernstein, isso ocorre se e somente se $N^2 = (\mathcal{J} \oplus \mathcal{B})^\perp = (A^*)^\perp = 0$. ■

O próximo resultado é consequência imediata de (3.29) e (3.30).

Proposição 3.5 *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, então*

$$\dim(\mathcal{J}) \leq 1+r \text{ e } \dim(\mathcal{B}) \leq s. \quad (3.31)$$

Os casos onde ocorre alguma das igualdade em (3.31) são de especial interesse:

Proposição 3.6 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$.*

1. As condições seguintes são equivalentes:

(a) $\dim(\mathcal{J}) = 1 + r$;

(b) $U_e Z_e + Z_e^2 = 0$, isto é, $uz = 0$ e $z^2 = 0$, para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$;

(c) para $x = \omega(x)e + u + z$, tem-se

$$x^2 = \omega(x)^2 e + \omega(x)u + u^2. \quad (3.32)$$

2. As condições seguintes são equivalentes:

(a) $\dim(\mathcal{B}) = s$;

(b) $U_e^2 = 0$, isto é, $u^2 = 0$, para todo $u \in U_e$;

(c) Para $x = \omega(x)e + u + z$, tem-se:

$$x^2 = \omega(x)^2 e + \omega(x)u + 2uz + z^2. \quad (3.33)$$

Demonstração Em (1.), a equivalência entre (a) e (b) é consequência de (3.29) e em (2.), (a) é equivalente a (b) por (3.30). A verificação de que (b) é equivalente a (c) é imediata nas duas partes. ■

Observação 3.5 Dados U e Z espaços vetoriais de dimensões r e s sobre F , respectivamente e uma aplicação bilinear simétrica de $U \times U$ em Z , podemos usar (3.32) para definir uma estrutura de álgebra em $F \times U \times Z$ com homomorfismo peso $\omega(\alpha, u, z) = \alpha$. Essa álgebra é Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ e satisfaz as condições (1.) da Proposição 3.6: observamos que uma aplicação bilinear simétrica de $U \times U$ em Z define uma multiplicação comutativa entre os elementos de U com $U^2 \subseteq Z$. Seja $A = F \times U \times Z$. Denotando por e o elemento $(1, 0, 0)$ e identificando cada $x = (\alpha, u, z) \in A$ com $\alpha e + u + z$, podemos definir uma multiplicação em A por $x^2 = \alpha^2 e + \alpha u + u^2$. Como $U^2 \subseteq Z$, temos que vale (3.19) com $UZ = 0$ e $Z^2 = 0$. Desse modo, temos $(uz)^2 = u(uz) = 0 = uz^2$, $u^3 \in UZ = 0$ e $(u^2)^2 \in Z^2 = 0$; logo, as condições (3.20) e (3.21) estão verificadas. Assim, pela parte (b) do Teorema 3.2, (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, onde $\omega(\alpha, u, z) = \alpha$, $U = U_e$ e $Z = Z_e$ e, portanto, satisfaz as condições (a), (b) e (c) da Proposição 3.6 (1.).

Do mesmo modo, dados U e Z espaços vetoriais de dimensões r e s sobre F , respectivamente, uma aplicação bilinear de $U \times Z$ em U e uma aplicação bilinear simétrica de $Z \times Z$ em U , podemos usar (3.33) para definir uma estrutura de álgebra em $F \times U \times Z$, com homomorfismo peso $\omega(\alpha, u, z) = \alpha$. Essa álgebra é Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ e

satisfaz as condições do item (2.) da Proposição 3.6. Essas álgebras serão denominadas *álgebras excepcionais*. As que satisfazem as condições do item (1.) não receberão nome especial, pois vamos mostrar que essas álgebras são exatamente as álgebras conservativas.

Lema 3.3 *Para qualquer decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ de uma álgebra de Bernstein (A, ω) , temos as seguintes inclusões:*

$$\text{ann}(A) \subseteq Z_e \subseteq \mathcal{J}^\perp.$$

Demonstração A inclusão $Z_e \subseteq \mathcal{J}^\perp$ é consequência de (3.29). Tomando $x \in \text{ann}(A)$, temos $x \in \ker(\omega)$, pois $x^2 = 0$. Além disso, $M_e(x) = 2ex = 0$, o que implica $x \in Z_e$. ■

Proposição 3.7 *Uma álgebra bária (A, ω) é conservativa se e somente se ela é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $\dim(\mathcal{J}) = 1 + r$.*

Demonstração Se (A, ω) é conservativa então (A, ω) é Bernstein e $\text{ann}(A) = \mathcal{J}^\perp$. Logo, pelo lema anterior, $Z_e = \mathcal{J}^\perp$ e, assim $\dim(\mathcal{J}) = 1 + r$. Reciprocamente, se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$, com $\dim(\mathcal{J}) = 1 + r$ então $\dim(\mathcal{J}^\perp) = s$. Novamente pelo Lema 3.3, $\mathcal{J}^\perp = Z_e$. Além disso, $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ implica $AZ_e = FeZ_e \oplus (U_eZ_e + Z_e^2) = 0$, pela Proposição 3.6. Desse modo, mostramos que $Z_e \subseteq \text{ann}(A)$ e, pelo Lema 3.3, $\text{ann}(A) = Z_e$. Portanto, $\text{ann}(A) = Z_e = \mathcal{J}^\perp$ e (A, ω) é conservativa. ■

Corolário *Uma álgebra de Bernstein (A, ω) é conservativa e excepcional se e somente se é uma álgebra induzida por uma projeção.*

Demonstração Seja $e \in A$ um idempotente não nulo. Pelas Proposições 3.6 e 3.7, temos que (A, ω) é conservativa e excepcional se e somente se $U_eZ_e + Z_e^2 = 0$ e $U_e^2 = 0$, isto é, se e somente se $N^2 = 0$. O resultado segue então da Proposição 3.4. ■

Observação 3.6 Mesmo em dimensão infinita, vale a equivalência: (A, ω) é uma álgebra conservativa se e somente se $U_eZ_e + Z_e^2 = 0$, para toda decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. De fato, se (A, ω) é conservativa, para $z \in Z_e$ arbitrário, seja $x = z$ e $y = e$. De (3.11) conclui-se que $\frac{1}{2}z^2 = 0$, o que implica $Z_e^2 = 0$. Tomando agora $x = u + z$ e $y = e$, para quaisquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, novamente pela identidade (3.11) e de $Z_e^2 = 0$ resulta $0 = (u^2 + 2uz + z^2)e = uz$. Logo, $U_eZ_e + Z_e^2 = 0$. A recíproca é de verificação imediata.

Observação 3.7 Podemos estender também a definição de álgebra de Bernstein excepcional para dimensões arbitrárias através da identidade $U_e^2 = 0$, para todo idempotente não nulo e .

A próxima proposição mostra como construir álgebras excepcionais a partir de álgebras solúveis (lembramos que uma álgebra A é *solúvel* se existe um inteiro k tal que a potência plena $A^{[k]}$ é nula). Usaremos a seguinte construção: se N é uma álgebra comutativa satisfazendo a identidade $(x^2)^2 = 0$ e $\tau : N \longrightarrow N$ é um operador linear tal que para todo $a \in N$ valem:

$$2\tau^2(a) = \tau(a), 4\tau(a)^2 + 2\tau(a^2) = a^2 \text{ e } a^2\tau(a) = 0, \quad (3.34)$$

então verifica-se que a álgebra $(A, \omega) = [N, \tau, \tau]$ definida na seção 1.2 é uma álgebra de Bernstein. Denotando por e o idempotente $(1, 0)$, temos ainda que $ea = \tau(a)$ para todo $a \in N$.

Proposição 3.8 *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein excepcional e não conservativa, então $N = \ker(\omega)$ é solúvel de índice 3. Reciprocamente, toda álgebra comutativa solúvel de índice 3 é núcleo de alguma álgebra de Bernstein excepcional não conservativa.*

Demonstração Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma decomposição de Peirce de A . Temos $N^2 = (U_e \oplus Z_e)^2 = U_e Z_e + Z_e^2 \subseteq U_e$ é não nula, pois A não é conservativa e, assim, $(N^2)^2 \subseteq U_e^2 = 0$, ou seja, N é solúvel de índice 3. Reciprocamente, seja N uma álgebra comutativa solúvel de índice 3. Temos então que $N^2 \neq 0$. Seja Z um subespaço de N complementar a N^2 . Desse modo, $N = N^2 \oplus Z$. Seja $\tau : N \longrightarrow N$ o operador linear dado por $\tau|_{N^2} = \frac{1}{2}id_{N^2}$ e $\tau|_Z = 0$. Temos que τ satisfaz (3.34). De fato, se $a = u + z \in N^2 \oplus Z$ então $2\tau^2(a) = 2\tau^2(u + z) = 2\tau(\frac{1}{2}u) = \tau(u) = \tau(u + z) = \tau(a)$, $4\tau(a)^2 + 2\tau(a^2) = 4(\frac{1}{2}u)^2 + 2\tau(2uz + z^2) = 2uz + z^2 = a^2$ e $a^2\tau(a) = (2uz + z^2)u = 0$, pois $uz, z^2, u \in N^2$. Assim, $A = Fe \oplus N$ é uma álgebra de Bernstein excepcional com $U_e = N^2$ e $Z_e = Z$, onde $e = (1, 0)$. Além disso, como N é solúvel de índice 3, temos $0 \neq N^2 = (N^2 \oplus Z)^2 = N^2 Z + Z^2 = U_e Z_e + Z_e^2$; logo, A é não conservativa. ■

3.4 Álgebras cancelativas

Dada uma álgebra de Bernstein (A, ω) de tipo $(1 + r, s)$ e $e \in A$ um idempotente não nulo, temos que a dimensão do subespaço U_e^2 é no máximo $\frac{1}{2}r(r + 1)$. O caso em que

$U_e^2 = 0$ já foi considerado na Proposição 3.6. No outro extremo, quando a dimensão de U_e^2 é $\frac{1}{2}r(r+1)$, se $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base para U_e , temos que $\{u_i u_j : 1 \leq i \leq j \leq r\}$ é uma base para U_e^2 . Nesse caso, para quaisquer $u, u' \in U_e$, $uu' = 0$ implica $u = 0$ ou $u' = 0$: de fato, se $u \neq 0$, seja $\{u_1, \dots, u_r\}$ base de U_e com $u_1 = u$. Escrevendo $u' = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$, ($\alpha_i \in F$) e supondo $uu' = 0$, resulta $0 = uu' = u(\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_1 u_i$, ou seja, $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ e, portanto, $u' = 0$. Logo, a aplicação linear $L_u : U_e \rightarrow Z_e$ dada por $L_u(u') = uu'$ é injetora.

Diremos que uma álgebra de Bernstein (A, ω) é *cancelativa* em relação a um idempotente e se a aplicação linear $L_u : U_e \rightarrow Z_e$ definida por $L_u(u') = uu'$ é injetora, para cada $u \in U_e$, $u \neq 0$.

Lema 3.4 *Se (A, ω) é cancelativa em relação a um idempotente e então ela é cancelativa em relação a qualquer outro idempotente e_0 . Nesse caso, diremos simplesmente que (A, ω) é cancelativa.*

Demonstração Seja $e_0 = e + u_0 + u_0^2$, $u_0 \in U_e$. Temos então $U_{e_0} = \{u' = u + 2uu_0 : u \in U_e\}$. Sejam $0 \neq u' = u + 2uu_0$ e $x = u_1 + 2u_1 u_0$ elementos de U_{e_0} e suponha que $L_{u'}(x) = 0$, isto é, $0 = u'x = (u + 2uu_0)(u_1 + 2u_1 u_0) = uu_1 + 2u(u_1 u_0) + 2(uu_0)u_1 + 4(uu_0)(u_1 u_0)$. Pelas relações dadas em (3.17), obtemos que a única parcela em Z_e é uu_1 . Assim, $0 = uu_1 = L_u(u_1)$. Como L_u é injetora, resulta que $u_1 = 0$ e, conseqüentemente, $x = 0$, mostrando que (A, ω) é cancelativa em relação a e_0 . ■

Corolário *Numa álgebra de Bernstein cancelativa de tipo $(1 + r, s)$, temos $r \leq s$.* ■

Proposição 3.9 *Toda álgebra de Bernstein cancelativa é conservativa e nenhuma delas é excepcional, quando $r \geq 1$.*

Demonstração Por definição, é claro que toda álgebra de Bernstein cancelativa não é excepcional. Para a outra afirmação, dada uma decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, sejam $u \in U_e$, $u \neq 0$ e $z \in Z_e$. Por (3.20), temos $u(uz) = 0$ e $uz^2 = 0$. Como $uz, z^2 \in U_e$ e $u \neq 0$, temos $uz = 0 = z^2$. Assim, $U_e Z_e = 0$ e $Z_e^2 = 0$, mostrando que a álgebra é conservativa. ■

Observação 3.8 A condição $\dim(U_e^2) = \frac{1}{2}r(r+1)$, onde $r = \dim(U_e)$ é suficiente mas não necessária para que (A, ω) seja cancelativa. Por exemplo, seja N uma álgebra comutativa de dimensão 4 sobre o corpo real $\mathbb{R}$ com base $\{u_1, u_2, z_1, z_2\}$ e multiplicação dada por

$$\begin{aligned} u_1^2 &= z_1; \quad u_2^2 = z_2; \quad u_1 u_2 = z_1 + 2z_2; \\ \text{outros produtos} &\text{ são zero.} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Essa álgebra satisfaz $(x^2)^2 = 0$ e o operador linear τ definido por $\tau(u_i) = \frac{1}{2}u_i$ e $\tau(z_i) = 0$ ($i = 1, 2$) satisfaz (3.34), assim, obtemos uma álgebra de Bernstein de tipo (3,2), com $\dim(U^2) = \dim(Z) = 2 < 3$. No entanto, (A, ω) é cancelativa: de fato, para cada $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, a matriz de L_u é

$$L_u = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 \\ 2\alpha_2 & 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 = (\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1)^2 + \frac{7}{4}\alpha_1^2$. Assim, $\det(L_u) = 0$ se e somente se $u = 0$.

A próxima proposição mostra que, salvo isomorfismos, existe uma única álgebra de Bernstein nuclear cancelativa satisfazendo $\dim(U_e^2) = \frac{1}{2}r(r+1)$.

Teorema 3.4 *Todas as álgebras de Bernstein nucleares de tipo $(1 + r, \frac{1}{2}r(r+1))$ são isomorfas.*

Demonstração Sejam (A, ω) e (A', ω') duas álgebras de Bernstein nucleares de tipo $(1 + r, \frac{1}{2}r(r+1))$ com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2$ e $A' = Fe' \oplus U_{e'} \oplus (U_{e'})^2$, respectivamente. Observamos que (A, ω) e (A', ω') são cancelativas, pois $\dim(U_e^2) = \frac{1}{2}r(r+1) = \dim((U_{e'})^2)$ e, portanto, conservativas pela Proposição 3.9. Tomando $\{u_1, \dots, u_r\}$ base de U_e e $\{u'_1, \dots, u'_r\}$ base de $U_{e'}$, temos que $\{u_i u_j : 1 \leq i \leq j \leq r\}$ e $\{u'_i u'_j : 1 \leq i \leq j \leq r\}$ são bases de U_e^2 e $(U_{e'})^2$, respectivamente. Seja $\psi : A \longrightarrow A'$ o isomorfismo de espaços vetoriais dado por $\psi(e) = e'$, $\psi(u_i) = u'_i$ e $\psi(u_i u_j) = u'_i u'_j$, para $1 \leq i \leq j \leq r$. Como as álgebras (A, ω) e (A', ω') são conservativas e $\psi(u_i u_j) = u'_i u'_j = \psi(u_i) \psi(u_j)$, resulta que ψ é um isomorfismo de álgebras e é bárico, pois $\omega = \omega' \circ \psi$. ■

Para caracterizar essas álgebras de Bernstein nucleares de tipo $(1 + r, \frac{1}{2}r(r+1))$, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.5 *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein conservativa e $e_0, e_1, \dots, e_m$ idempotentes não nulos de A . Se os produtos $e_{ij} = e_i e_j$ ($0 \leq i \leq j \leq m$) constituem um conjunto linearmente independente, então o subespaço gerado pelos e_{ij} é uma subálgebra bária isomorfa à álgebra zigótica $(m+1)$ -alélica de Mendel.*

Demonstração Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma decomposição de Peirce de A e para cada e_i , seja $u_i \in U_e$ tal que $e_i = e + u_i + u_i^2$. Como a álgebra é conservativa, temos que $U_e Z_e + Z_e^2 = 0$. Logo, $e_{ij} = e_i e_j = e + \frac{1}{2}(u_i + u_j) + u_i u_j$. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
 e_{ij} e_{kl} &= \left(e + \frac{1}{2}(u_i + u_j) + u_i u_j \right) \left(e + \frac{1}{2}(u_k + u_l) + u_k u_l \right) = \\
 &= e + \frac{1}{4}(u_i + u_j + u_k + u_l) + \frac{1}{4}(u_i + u_j)(u_k + u_l) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(e + \frac{1}{2}(u_i + u_k) + u_i u_k + e + \frac{1}{2}(u_i + u_l) + u_i u_l + \right. \\
 &\quad \left. + e + \frac{1}{2}(u_j + u_k) + u_j u_k + e + \frac{1}{2}(u_j + u_l) + u_j u_l \right) = \\
 &= \frac{1}{4}(e_{ik} + e_{il} + e_{jk} + e_{jl}). \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Como os e_{ij} são linearmente independentes, o subespaço vetorial gerado por $\{e_{ij} : 0 \leq i \leq j \leq m\}$ é isomorfa à álgebra zigótica $(m+1)$ -alélica de Mendel. ■

Observando que toda subálgebra bária de uma álgebra de Bernstein é ainda uma álgebra de Bernstein, segue como consequência do lema anterior que toda álgebra zigótica multialélica de Mendel é Bernstein. Para calcular o tipo de uma álgebra zigótica $(r+1)$ -alélica de Mendel (A, ω) com base natural dada por $\{e_{ij} : 0 \leq i \leq j \leq r\}$, considere a nova base dada por $\{e = e_{00}, v_{ij} = e_{ij} - e_{00} : (i, j) \neq (0, 0)\}$. Os elementos v_{ij} ($0 \leq i \leq j \leq r$ e $(i, j) \neq (0, 0)$) formam uma base de $N = \ker(\omega)$ e verificam

$$M_e(v_{0j}) = 2e_{00}(e_{0j} - e_{00}) = (e_{00} + e_{0j}) - 2e_{00} = v_{0j}, \text{ para } j = 1, \dots, r;$$

$$M_e(v_{ij}) = 2e_{00}(e_{ij} - e_{00}) = e_{0i} + e_{0j} - 2e_{00} = v_{0i} + v_{0j}, \text{ para } i \neq 0 \neq j.$$

Dessa maneira, temos $U_e = \text{Im}(M_e) = \langle v_{01}, \dots, v_{0r} \rangle$. Assim, $\dim(Z_e) = \frac{1}{2}(r+1)(r+2) - 1 - r = \frac{1}{2}r(r+1)$. Além disso, para cada $0 \leq i \leq j \leq r$, temos $e_{ii} e_{jj} = e_{ij}$, ou seja, A é nuclear. Desse modo, provamos:

Proposição 3.10 *Todas as álgebras de Bernstein nucleares de tipo $(1+r, \frac{1}{2}r(r+1))$ são isomorfas à álgebra zigótica $(r+1)$ -alélica de Mendel.* ■

3.5 Álgebras de Bernstein-Jordan

A importância das álgebras de Bernstein-Jordan no estudo das álgebras de Bernstein vem do fato que essas álgebras aparecem naturalmente como quociente de álgebras de Bernstein. Lembramos que uma álgebra comutativa A é uma *álgebra de Jordan* se quaisquer $x, y \in A$ verificam a identidade

$$(x^2y)x = x^2(yx). \quad (3.37)$$

Diremos que uma álgebra de Bernstein (A, ω) é uma *álgebra de Bernstein-Jordan* se A for uma álgebra de Jordan.

Proposição 3.11 *Para uma álgebra de Bernstein (A, ω) , as condições seguintes são equivalentes:*

- (a) A é uma álgebra de Jordan;
- (b) $Z_e^2 = 0$, para todo idempotente não nulo e ;
- (c) Para todo idempotente não nulo e , tem-se $Z_e^2 = 0$ e $(uz)z = 0$, para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.
- (d) Para algum idempotente não nulo e , tem-se $Z_e^2 = 0$ e $(uz)z = 0$, para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.
- (e) A satisfaz a identidade $x^3 = \omega(x)x^2$.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b): Seja $e \in A$ um idempotente não nulo. Usando as identidades dadas em (3.22) a (3.27), basta decompor cada elemento de A na forma $x = \alpha e + u + z$, com $\alpha \in F$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$ e substituir na equação (3.37).

(b) $\Rightarrow$ (c): Seja $e \in A$ um idempotente não nulo e $u_0 \in U_e$, $z_0 \in Z_e$. Considere o idempotente e' dado por $e' = e + u_0 + u_0^2$. Pelo Corolário 3 do Teorema 3.2, temos que $U_{e'} = \{u + 2u_0u : u \in U_e\}$ e $Z_{e'} = \{z - 2(u_0 + u_0^2)z : z \in Z_e\}$. Como por hipótese $Z_e^2 = 0$, se $z'_0 = z_0 - 2(u_0 + u_0^2)z_0$, temos $0 = (z'_0)^2 = z_0^2 - 4(u_0z_0)z_0 - 4(u_0^2z_0)z_0 + 4(u_0 + u_0^2)^2z_0^2 = -4(u_0z_0)z_0$. Portanto, $(u_0z_0)z_0 = 0$, para quaisquer $u_0 \in U_e$ e $z_0 \in Z_e$ e para todo idempotente não nulo $e \in A$.

(c) $\Rightarrow$ (d): É imediato.

(d) $\Rightarrow$ (e): Decompondo $x = \alpha e + u + z$ com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, obtemos $x^3 - \omega(x)x^2 = u^3 + u^2z + uz^2 + z^3 + 2u(uz) + 2(uz)z - \frac{1}{2}\alpha z^2 = 0$.

(e) $\Rightarrow$ (a): Linearizando a identidade $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$, obtemos

$$2x(xy) + x^2y - \omega(y)x^2 - 2\omega(x)xy = 0. \quad (3.38)$$

Multiplicando (3.38) por x ,

$$2x(x(xy)) + x(x^2y) - \omega(y)x^3 - 2\omega(x)x(xy) = 0. \quad (3.39)$$

Por outro lado, substituindo y por xy em (3.38), resulta

$$2x(x(xy)) + x^2(xy) - \omega(x)\omega(y)x^2 - 2\omega(x)x(xy) = 0. \quad (3.40)$$

Assim, subtraindo (3.40) de (3.39), concluímos que

$$0 = x(x^2y) - x^2(xy) - \omega(y)(x^3 - \omega(x)x^2) = x(x^2y) - x^2(xy)$$

e, portanto, A é uma álgebra de Jordan. ■

A partir da proposição anterior, obtemos um modo de caracterizar os ideais I de uma álgebra de Bernstein (A, ω) cujo quociente A/I é Jordan:

Corolário 1 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein e I um ideal de A contido em $N = \ker(\omega)$. Uma condição necessária e suficiente para que o quociente A/I seja uma álgebra de Jordan é que $Z_e^2 \subseteq I$, para cada decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. ■*

Para cada decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, considere o subespaço $L = \{u \in U_e : uU_e = 0\}$. Observamos que L é um ideal de A : de fato, para cada $u_0 \in L$, temos $2eu_0 = M_e(u_0) = u_0 \in L$; $u_0u = 0$, para todo $u \in U_e$. Resta verificar que $LZ_e \subseteq L$. Se $u_1 = u_0$ e $u_2 = u$ é um elemento arbitrário de U_e , temos $uz \in U_eZ_e \subseteq U_e$, ou seja, $u_0(uz) = 0$. Substituindo na primeira identidade de (3.26), resulta $u(u_0z) = 0$, para todo $u \in U_e$, o que mostra que $u_0z \in L$, qualquer que seja $z \in Z_e$. Assim, L é ideal de A . Além disso, a próxima proposição mostra que esse ideal independe da escolha do idempotente e .

Proposição 3.12 *Seja A uma álgebra de Bernstein. Então L é a intersecção de todos os subespaços U_e , onde e percorre o conjunto de todos os idempotentes não nulos de A , isto é, $L = \bigcap_{e \in Id_1(A)} U_e$.*

Demonstração Sejam $e, f \in Id_1(A)$. Então existe $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$ e $U_f = \{u + 2u_0u : u \in U_e\}$. Dessa maneira, se $u \in U_e \cap U_f$ então existe $u' \in U_e$ satisfazendo $u = u' + 2u_0u'$. Assim, $u - u' = 2u_0u' \in U_e \cap U_e^2 \subseteq U_e \cap Z_e = 0$, ou seja, $u = u'$ e $u_0u = 0$. Como $Id_1(A) = \{e + u_0 + u_0^2 : u_0 \in U_e\}$, se $u \in \bigcap_{e \in Id_1(A)} U_e$ então $u_0u = 0$, para todo $u_0 \in U_e$; portanto, $u \in L$. Por outro lado, se $u \in L$ então $u = u + 2uu_0 \in U_{e+u_0+u_0^2}$, para cada $u_0 \in U_e$, logo, $u \in \bigcap_{e \in Id_1(A)} U_e$. ■

Como o ideal L está contido em $\ker(\omega)$, a álgebra quociente A/L é Bernstein com peso $\bar{\omega}(x + L) = \omega(x)$, para todo $x \in A$. A primeira identidade (3.24) e o resultado dessa última proposição nos permitem concluir que $Z_e^2 \subseteq L$, para todo idempotente e . Assim, temos como consequência do Corolário 1 acima:

Corolário 2 *Para toda álgebra de Bernstein (A, ω) , a álgebra quociente $(A/L, \bar{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan.* ■

Desse modo, toda álgebra de Bernstein (A, ω) que satisfaz $L = 0$ é Jordan. Podemos determinar uma condição para garantir que uma álgebra de Bernstein seja Jordan:

Corolário 3: *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ relativa ao idempotente e e $\delta = \dim(U_e^2)$. Se $\delta > \frac{1}{2}r(r - 1)$ então A é uma álgebra de Jordan.*

Demonstração Seja U' um subespaço complementar de L em U_e , isto é, $U_e = L \oplus U'$. Desse modo, $U_e^2 = (U')^2$. Se $L \neq 0$, temos $\dim(U') = r - \dim(L) \leq r - 1$ e portanto, $\dim(U_e^2) = \dim(U'^2) \leq \frac{1}{2}r(r - 1)$. Logo, se $\dim(U_e^2) > \frac{1}{2}r(r - 1)$, necessariamente $L = 0$. Assim, $A = A/L$ é uma álgebra de Jordan. ■

Diremos que uma álgebra de Bernstein (A, ω) é *reduzida* quando $L = 0$. Observamos que toda álgebra de Bernstein cancelativa é reduzida. A existência de álgebras de Bernstein reduzidas que não são cancelativas será tratada no Capítulo 5.

Capítulo 4

Ideais em uma álgebra de Bernstein

4.1 Produto de ideais

Em uma álgebra não associativa, o produto de dois ideais não é necessariamente um ideal. Isto também ocorre com as álgebras de Bernstein. Por exemplo, seja F um corpo de característica diferente de 2 e considere a álgebra comutativa A de dimensão 7 sobre F cuja tabela de multiplicação em relação à base $\{e, u_1, u_2, u_3, z_1, z_2, z_3\}$ é dada por

$$\begin{aligned} e^2 &= e; \quad eu_i = \frac{1}{2}u_i (i = 1, 2, 3); \quad u_3^2 = z_3; \quad z_1^2 = u_2; \\ u_1z_1 &= u_1; \quad u_1z_2 = u_2; \quad \text{outros produtos iguais a zero.} \end{aligned}$$

Com o homomorfismo $\omega : A \longrightarrow F$ dado por $\omega(e) = 1$ e $\omega(u_i) = \omega(z_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, (A, ω) é uma álgebra de Bernstein. Denotando por $\langle S \rangle$ o subespaço vetorial de A gerado pelo subconjunto S de A , verifica-se também que $L = \{u \in U_e : uU_e = 0\} = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $I = \langle u_1, u_2, z_1 \rangle$ é um ideal de A . No entanto, o produto $IL = \langle u_1 \rangle$ não é ideal de A pois $u_1z_2 = u_2 \notin IL$.

Dada uma álgebra de Bernstein (A, ω) , vamos determinar condições sobre os seus ideais que garantam que o produto de dois deles continue sendo um ideal.

Lema 4.1 *Uma condição necessária e suficiente para que um subespaço vetorial I de A seja um ideal de A contendo um idempotente não nulo é que $A^2 \subseteq I \subseteq A$.*

Demonstração Sejam $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente não nulo e e I um ideal de A contendo e . Assim, $U_e = Ae \subseteq I$ e, conseqüentemente, $U_e^2 \subseteq I$. Desse modo, resulta que $A^2 = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2 \subseteq I \subseteq A$.

Reciprocamente, se I é um subespaço vetorial de A satisfazendo $A^2 \subseteq I \subseteq A$, temos $AI \subseteq A^2 \subseteq I$ e $e = e^2 \in A^2 \subseteq I$. Logo, I é um ideal de A contendo o idempotente e . ■

Observação 4.1 Se o ideal I contém um idempotente não nulo, pelo lema anterior, $A^2 \subseteq I$. Dessa maneira, I contém todos os idempotentes.

Observação 4.2 Se I é um ideal de A não contido em N , então I contém um elemento x de peso 1. Pelo Lema 3.1, $x^2 \in I$ é um idempotente não nulo. Assim, se I é um ideal de A não contido em N então I contém todos os idempotentes.

Corolário O produto de dois ideais contendo idempotentes é também um ideal.

Demonstração Se I e J são ideais não contidos em N então $A^2 = (A^2)^2 \subseteq IJ \subseteq A$. Portanto, pelo Lema 4.1, IJ é novamente um ideal de A contendo idempotentes. ■

No caso em que um dos ideais é $N = \ker(\omega)$, temos:

Proposição 4.1 Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein e $N = \ker(\omega)$. Se I é um ideal de A então NI também é ideal de A .

Demonstração Se I é ideal de A , temos que $NI \subseteq I$ e, portanto, $N(NI) \subseteq NI$. Além disso, para quaisquer $x \in A$ e $y \in N$, substituindo $x - \omega(x)e$ e y em (3.18), resulta que $M_e((x - \omega(x)e)y) + M_e(x - \omega(x)e)M_e(y) = (x - \omega(x)e)y$. Desenvolvendo essa igualdade, obtemos

$$e(xy) = \frac{1}{2}xy + \omega(x)ey - 2(ex)(ey). \quad (4.1)$$

Temos ainda, pelas duas observações acima, que se $x \in I$ então $\omega(x)e \in I$. Assim, se $x \in I$ e $y \in N$, temos que $e(xy) \in NI$ e, portanto, NI é ideal de A . ■

Em particular, vale:

Corolário Para cada $k \geq 1$, temos que N^k é ideal de A . ■

Estamos em condições de determinar uma condição para que o produto de dois ideais em uma álgebra de Bernstein continue sendo um ideal.

Proposição 4.2 *Se I e J são ideais de A com pelo menos um deles não contido em N , então o produto IJ é ideal de A .*

Demonstração O caso $I \not\subseteq N$ e $J \not\subseteq N$ já foi provado no Lema 4.1. Assim, podemos supor que I contém um idempotente não nulo e e $J \subseteq N$. Pela identidade (4.1), obtemos $e(IJ) \subseteq IJ$. Observando que $IJ \subseteq I \cap J$, resulta que $N(IJ) \subseteq N(I \cap J)$. Logo, basta mostrar que $N(I \cap J) \subseteq IJ$. Pela identidade (3.18), se $x \in N$ e $y \in I \cap J \subseteq N$, temos $xy = 2e(xy) + 4(ex)(ey) \in IJ$. Assim, IJ é ideal de A . ■

A partir dos resultados obtidos, podemos concluir que se I e J são ideais de uma álgebra de Bernstein (A, ω) tais que o produto IJ não é ideal de A então necessariamente I e J estão propriamente contidos em $N = \ker(\omega)$.

4.2 Nilpotência

A nilpotência do núcleo da função peso (ou simplesmente núcleo) de uma álgebra de Bernstein é um problema bastante estudado. No caso em que (A, ω) é uma álgebra de Bernstein de dimensão finita, temos que (A, ω) é genética se e somente se $N = \ker(\omega)$ é nilpotente. De fato, toda álgebra genética tem o núcleo nilpotente e pelo Corolário da Proposição 4.1, as potências de N são ideais de A ; assim, se N é nilpotente, a álgebra (A, ω) é train especial e, portanto, genética.

No entanto, nem toda álgebra de Bernstein tem núcleo nilpotente.

Exemplo 4.1 Seja (A, ω) uma álgebra bária sobre o corpo F tal que $\ker(\omega)$ é gerado como espaço vetorial por símbolos formais x^i ($i \geq 1$) verificando as condições:

$$\begin{aligned} x^1 &= x; \quad xx^{i-1} = x^i \text{ para todo } i > 1; \\ x^i x^j &= 0, \text{ para quaisquer } i \geq 2 \text{ e } j \geq 2; \\ ex &= 0; \quad ex^i = \frac{1}{2}x^i, \text{ para todo } i \geq 2, \end{aligned}$$

onde $e \in A$ é um idempotente de peso 1. Essa álgebra é Bernstein: se $y = \alpha e + \alpha_1 x + \sum_{i=2}^k \beta_i x^i$ é um elemento arbitrário de A , temos $y^2 = \alpha^2 e + \alpha_1 x^2 + \sum_{i=2}^k (\alpha \beta_i x^i + \alpha_1 \beta_i x^{i+1})$. Assim,

$(y^2)^2 = \alpha^4 e + \alpha^2 \alpha_1 x^2 + \sum_{i=2}^k \alpha^2 (\alpha \beta_i x^i + \alpha_1 \beta_i x^{i+1}) = \alpha^2 y^2 = \omega(y)^2 y^2$. Dessa maneira, (A, ω) admite uma decomposição de Peirce da forma $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, onde $U_e = \langle x^2, x^3, \dots \rangle$ e $Z_e = Fx$. Como $U_e^2 = 0$, temos $L = U_e$. Além disso, $N^2 = \langle x^2, x^3, \dots \rangle = U_e$. Desse modo, temos $N^3 = (U_e \oplus Z_e)U_e = U_e Z_e \oplus U_e^2 = U_e Z_e = \langle x^3, x^4, \dots \rangle$; $N^4 = N^3 N = \langle x^4, x^5, \dots \rangle$, e assim sucessivamente, $N^k = \langle x^k, x^{k+1}, \dots \rangle$, para todo $k \geq 1$ e, portanto, N não é nilpotente.

Em dimensão finita também existem álgebras de Bernstein cujo núcleo não é nilpotente.

Exemplo 4.2 Seja N a álgebra comutativa de dimensão 5 sobre o corpo F cuja multiplicação em relação à base $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ é dada por

$$c_1 c_2 = c_2 c_4 = -c_1 c_5 = c_3; \quad c_1 c_3 = c_4; \quad c_2 c_3 = c_5;$$

outros produtos iguais a zero.

Essa álgebra satisfaz $N^2 = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle \neq 0$ e $(N^2)^2 = 0$ e portanto, é solúvel de índice 3. Pela Proposição 3.8, N é núcleo de alguma álgebra de Bernstein. Além disso, N não é nilpotente, pois como $N^3 = N^2$, temos que $N^k = N^2 \neq 0$, para todo $k \geq 2$.

Uma hipótese bastante natural do ponto de vista genético seria supor que a álgebra de Bernstein em questão é nuclear, isto é, $A^2 = A$. Mesmo nesse caso, não é possível garantir a nilpotência de seu núcleo, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 4.3 Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$ um conjunto enumerável de indeterminadas e F um corpo de característica diferente de 2 e 3. Diremos que a expressão formal $u = x_{i_1} \dots x_{i_s}$ é uma *palavra regular*, se $s \geq 1$ e $i_1 < i_2 < \dots < i_s$. Para cada palavra regular u , denotaremos por $d(u)$ o comprimento de u , ou seja, o número de letras de u . Seja P o conjunto das palavras regulares formadas por elementos de X e N o espaço vetorial sobre F livremente gerado por P . Definimos em N uma multiplicação comutativa $*$ da seguinte maneira: para $u = x_{i_1} \dots x_{i_s}, v \in P$ e $x_i, x_j \in X$,

1. $x_i * x_j = x_i x_j$, para $i < j$;
2. $u * v = 0$, se $d(u) \geq 2$ e $d(v) \geq 2$;

3. $u * x_i = 0$, se $d(u) \geq 2$ e $i < i_1$ ou se $i = i_k$, para algum $k = 1, \dots, s$;
4. $u * x_i = (-1)^k x_{i_1} \dots x_{i_k} x_i \dots x_{i_s}$, se $s \geq 2$ e k é o número de índices i_j em $\{i_1, \dots, i_s\}$ tais que $i > i_j$.

Dessa maneira, temos que $(N^2)^2 = 0$. Além disso, N não é nilpotente pois para todo $n \geq 1$ tem-se

$$(\dots((x_1 * x_2) * x_3) * \dots) * x_n = x_1 \dots x_n \neq 0.$$

Verifica-se também que os elementos de N satisfazem a identidade de Jacobi:

$$(u * v) * w + (v * w) * u + (w * u) * v = 0, \text{ para todo } u, v, w \in N. \quad (4.2)$$

Ficamos reduzidos a verificar essa identidade quando $u = x_{i_1} \dots x_{i_s}$, $v = x_i$ e $w = x_j$, para $i < j$, pois a verificação nos outros casos é trivial. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned} (u * v) * w &= ((-1)^k x_{i_1} \dots x_{i_k} x_i \dots x_{i_s}) * x_j = (-1)^{k+t} x_{i_1} \dots x_{i_k} x_i \dots x_{i_t} x_j \dots x_{i_s}, \\ (w * u) * v &= ((-1)^{t-1} x_{i_1} \dots x_{i_t} x_j \dots x_{i_s}) * x_i = (-1)^{t-1+k} x_{i_1} \dots x_{i_k} x_i \dots x_{i_t} x_j \dots x_{i_s} \text{ e} \\ (v * w) * u &= (x_i x_j) * (x_{i_1} \dots x_{i_s}) = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, N satisfaz (4.2).

Se U e Z são os subespaços gerados respectivamente pelos conjuntos $\{u \in P : d(u) \text{ é ímpar}\}$ e $\{u \in P : d(u) \text{ é par}\}$, temos a decomposição $N = U \oplus Z$. Construiremos uma álgebra de Bernstein (A, ω) com $\ker(\omega) = N$, introduzindo um novo elemento e satisfazendo

$$e * e = e; e * u = \frac{1}{2}u; e * z = 0, \text{ para todo } u \in U, z \in Z, \quad (4.3)$$

e definindo ω por $\omega(\alpha e + n) = \alpha$, para todo $\alpha \in F$ e $n \in N$. Vamos verificar que (A, ω) com $A = Fe \oplus N$ é uma álgebra de Bernstein. Com o produto dado em (4.3), se $x = \alpha e + u + z \in Fe \oplus U \oplus Z$, temos que $(\alpha e + u + z)^2 = \alpha^2 e + \alpha u + 2uz + u^2$. Temos ainda, $\alpha u + 2uz \in U$ e $u^2 \in Z$. Portanto, a multiplicação em A satisfaz (3.19) com $z^2 = 0$. Em particular, vale $uz^2 = 0$, para todo $u \in U$ e $z \in Z$. Além disso, pela identidade (4.2), obtemos $u^3 = 0$ e $u(uz) = -\frac{1}{2}u^2 z \in Z^2 = 0$. Por fim, pela identidade $(N^2)^2$, resulta $(u^2)^2 = 0$ e $(uz)^2 = 0$. Logo, temos verificadas as hipóteses do Teorema 3.2 (b). Portanto, (A, ω) é uma álgebra de Bernstein. Temos ainda que A é nuclear: $e = e * e \in A^2$, se $u = x_i \in X$ então $u = 2e * u \in A^2$ e se $u = x_{i_1} \dots x_{i_s}$ com $s \geq 2$ então $u = (-1)^{s-1} (x_{i_1} \dots x_{i_{s-1}}) * x_{i_s} \in A^2$ e, assim, (A, ω) é uma álgebra de Bernstein nuclear cujo núcleo não é nilpotente.

Em 1987, Odoni e Stratton (em [21]) e Grishkov (em [11]) provaram independentemente que uma álgebra de Bernstein nuclear de dimensão finita possui núcleo nilpotente. Em [11], Grishkov conjecturou que o núcleo de uma álgebra de Bernstein nuclear de tipo finito também é nilpotente (lembramos que uma álgebra A sobre um corpo F é de *tipo finito* se A é uma álgebra gerada sobre F por um número finito de elementos). Essa conjectura foi provada por Peresi (veja [22]), em 1991. Nesta seção, faremos um estudo a respeito da nilpotência do núcleo de uma álgebra de Bernstein arbitrária de tipo finito e daremos uma outra demonstração dessa conjectura. Inicialmente, faremos um breve resumo de alguns resultados que nos serão necessários.

Dada uma álgebra associativa A sobre um corpo F de característica diferente de 2, podemos construir a álgebra de Jordan $A^{(+)}$, definindo uma nova multiplicação $\cdot$ no espaço vetorial A por

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Uma álgebra de Jordan B é chamada uma *álgebra de Jordan especial* se B é isomorfa a alguma subálgebra de uma álgebra de Jordan $A^{(+)}$.

Em [28] estão demonstrados os seguintes resultados:

Teorema 4.1 ([28, página 114]) *Toda álgebra de Jordan especial nil com índice limitado e de tipo finito é nilpotente.*

Teorema 4.2 ([28, Teorema 4.2]) *Uma álgebra de Jordan solúvel e de tipo finito é nilpotente.*

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein-Jordan e $End(N)$ a álgebra associativa formada pelos endomorfismos de $N = \ker(\omega)$ e $End(N)^{(+)}$ a álgebra de Jordan associada a $End(N)$. Pela condição (e) da Proposição 3.11, temos que $n^3 = 0$, para todo $n \in N$. Ou seja, linearizando essa identidade, temos que

$$(n_1 n_2) n_3 + (n_2 n_3) n_1 + (n_3 n_1) n_2 = 0, \text{ para todo } n_1, n_2, n_3 \in N. \quad (4.4)$$

Assim, se R_a é o operador linear de N definido por $R_a(x) = xa$, para todo $a \in N$, (4.4) fica

$$-R_{ab} = (-R_a)(-R_b) + (-R_b)(-R_a) = (-R_a) \cdot (-R_b).$$

Dessa maneira, a aplicação de N a $End(N)^{(+)}$ que associa a cada elemento $a \in N$ o operador $-R_a$ é um homomorfismo de álgebras.

A partir da identidade (4.4), podemos ainda concluir que o núcleo de toda álgebra de Bernstein-Jordan é nil com índice no máximo 3.

Teorema 4.3 *O núcleo de toda álgebra de Bernstein de tipo finito é solúvel.*

Demonstração Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo finito e $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e . Como N/L é uma álgebra de Bernstein-Jordan, temos definido um homomorfismo Φ de N/L em $End(N/L)^{(+)}$ que associa a cada elemento $\bar{n}$ de N/L , o operador $-R_{\bar{n}}$. Portanto, $\Phi \circ \pi$ é um homomorfismo de N em $End(N/L)^{(+)}$, onde π é a projeção canônica de N sobre N/L . Observamos ainda, que o núcleo de $\Phi \circ \pi$ é $I = \{x \in N : xN \subseteq L\}$. Dessa maneira, N/I é isomorfa a uma subálgebra de $End(N/L)^{(+)}$ e, portanto, é uma álgebra de Jordan especial. Assim, pelo Teorema 4.1 resulta que N/I é nilpotente. Logo, existe $r \geq 1$ tal que $N^r \subseteq I$. Como $N^{[r]} \subseteq N^r$, temos:

$$N^{[r+2]} = (N^{[r+1]})^2 = ((N^{[r]})^2)^2 \subseteq ((N^r)^2)^2 \subseteq (I^2)^2 \subseteq L^2 = 0.$$

Conseqüentemente, N é solúvel. ■

Observação 4.3 O resultado acima ainda vale para álgebras de Bernstein arbitrárias. Em [14], os autores demonstram que o núcleo de toda álgebra de Bernstein é solúvel de índice no máximo 4 ([14, Teorema 6]). Além disso, provam que em toda álgebra de Bernstein (A, ω) , $ker(\omega)^2$ é nilpotente, com índice de nilpotência no máximo 9 ([14, Teorema 5]). Esses resultados não serão demonstrados aqui, pois dependem de métodos computacionais. Para o que faremos nesta seção, será suficiente o resultado do Teorema 4.3.

Observação 4.4 A partir dos dois teoremas anteriores, podemos concluir que, para toda álgebra de Bernstein (A, ω) de tipo finito, existe $r \geq 1$ tal que $N^r \subseteq L$, pois para toda álgebra de Bernstein (A, ω) , o quociente A/L é uma álgebra de Jordan.

A partir de agora, (A, ω) será uma álgebra de Bernstein sobre o corpo F com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ relativa ao idempotente e e W um subespaço complementar a U_e^2 em Z_e , isto é, W satisfaz $Z_e = U_e^2 \oplus W$. Vamos relacionar a nilpotência de $N = ker(\omega)$ com o subespaço W .

Lema 4.2 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo finito. Se I é um subespaço vetorial de A tal que $NI = I$ então I é um ideal de A contido em L .*

Demonstração Temos $I = NI \subseteq N$. Dessa maneira, como $I = NI = N(NI) = \dots$, resulta que $I \subseteq N^k$, para todo $k \geq 2$. Concluimos então, pela Observação 4.4, que $I \subseteq L \subseteq U_e$. Assim, $eI = I$ e com a condição $NI = I$, resulta que I é ideal de A . ■

Lema 4.3 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo finito e I um subespaço vetorial de A . Então $NI = I$ se e somente se $WI = I$.*

Demonstração Pelo Lema 4.2, se $NI = I$, então I é um ideal de A contido em L . Assim, $I = NI = (U_e \oplus U_e^2 \oplus W)I = WI$. Reciprocamente, se $WI = I$ temos que $I = WI \subseteq NI \subseteq N$ e como A é de tipo finito, existe um inteiro $r \geq 1$ tal que $N^r \subseteq L$. Logo, $I = W(W(\dots W(WI)\dots)) \subseteq N^r \subseteq L$, ou seja, $(U_e \oplus U_e^2)I = 0$. Portanto, $NI = (U_e \oplus U_e^2 \oplus W)I = WI = I$. ■

Corolário *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo finito e I um subespaço vetorial de A . Se $IW = I$ então $I(U_e \oplus U_e^2) = 0$.*

Demonstração Pelo Lema 4.3, temos que $IW = I$ se e somente se $NI = I$. Dessa maneira, concluimos pelo Lema 4.2, que $I \subseteq L$ e, portanto, $(U_e \oplus U_e^2)I = 0$. ■

Considere o conjunto $L(W) = \{L_w : w \in W\}$ das multiplicações à esquerda por elementos de W e $E(W)$ a álgebra envolvente de $L(W)$, que consiste dos operadores lineares de A obtidos por combinação linear de produtos finitos do tipo $L_1 \dots L_t$, onde cada $L_i \in L(W)$, $i = 1, \dots, t$. Para o próximo teorema, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 4.4 ([24, Teorema 2.4]) *Um ideal B de uma álgebra A é nilpotente se e somente se a álgebra envolvente $E(B)$ é nilpotente.*

Teorema 4.4 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo finito e suponha que A verifica a condição das cadeias descendentes para ideais. Então as condições seguintes são equivalentes:*

- (a) *O ideal $N = \ker(\omega)$ é nilpotente;*

(b) A álgebra associativa $E(W)$ é nilpotente;

(c) $I = 0$ é o único subespaço vetorial de A verificando $WI = I$.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b): A álgebra $E(W)$ é uma subálgebra da álgebra $E(N)$. Pelo Lema 4.4, a nilpotência de N é equivalente à nilpotência de $E(N)$. Logo, $E(W)$ é também nilpotente.

(b) $\Rightarrow$ (c): Seja I um subespaço verificando $WI = I$. Como $E(W)$ é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $I = W(W(\dots W(WI)\dots)) = 0$, para k fatores W .

(c) $\Rightarrow$ (a): Como as potências principais N^k são ideais de A , temos que $N \supseteq N^2 \supseteq N^3 \supseteq \dots$ é uma cadeia decrescente de ideais de A . Como A verifica c.c.d. para ideais, existe $r \geq 1$ tal que $N^r = N^{r+1}$. Pelo Lema 4.3, resulta que $WN^r = N^r$ e, portanto, $N^r = 0$. ■

O próximo exemplo nos mostra que a hipótese ‘ A satisfaz c.c.d.’ é necessária no teorema acima:

Exemplo 4.4 Seja (A, ω) a álgebra de Bernstein do Exemplo 4.3. Nessa álgebra, temos $N^k = \langle x^k, x^{k+1}, \dots \rangle$, para todo $k \geq 1$. Assim, $N \supset N^2 \supset N^3 \supset \dots$ é uma cadeia estritamente decrescente de ideais de A e, portanto, A não verifica c.c.d.. Para essa álgebra, temos $L = U_e$; logo, $W = Z_e = Fx$. Além disso, pode-se verificar que se I é um subespaço de A verificando $IW = I$, necessariamente devemos ter $I = 0$.

No entanto, a implicação (b) $\Rightarrow$ (a) do teorema anterior continua válida, mesmo que A não satisfaça a c.c.d. para ideais:

Lema 4.5 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo finito. Se a álgebra $E(W)$ é nilpotente, então o ideal $N = \ker(\omega)$ é também nilpotente.*

Demonstração Pela Observação 4.4, existe $r \geq 1$ tal que $N^r \subseteq L$. Portanto, $N^{r+k} = W(W(\dots W(WN^r)\dots))$, onde o subespaço W aparece k vezes, para todo $k \geq 1$. Se a álgebra $E(W)$ é nilpotente, existe $s \geq 1$ tal que $W(W(\dots W(WN^r)\dots)) = 0$, para s fatores W . Assim, N é nilpotente de índice no máximo $r + s$. ■

Corolário (Conjectura de Grishkov) *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo*

finito. Se A é nuclear, isto é, se $U_e^2 = Z_e$ então $N = \ker(\omega)$ é nilpotente.

Demonstração Se $U_e^2 = Z_e$, então $W = 0$. Dessa maneira, $E(W) = 0$ é nilpotente. O resultado segue então pelo Lema 4.5. ■

Observação 4.5 Em 1994, S. Gonzalez e C. Martinez obtiveram uma estimativa para o índice de nilpotência do núcleo de uma álgebra de Bernstein nuclear de tipo finito. Mais especificamente, eles mostraram que se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein nuclear gerada por r elementos então $\ker(\omega)^{2r+2} = 0$. Veja [10, Teorema 4.1].

A partir dos Teoremas 4.2 e 4.3, podemos obter outra classe de álgebras de Bernstein que possuem núcleo nilpotente:

Proposição 4.3 *Toda álgebra de Bernstein-Jordan de tipo finito tem núcleo nilpotente.*

Demonstração O núcleo de toda álgebra de Bernstein de tipo finito é solúvel pelo Teorema 4.3. A nilpotência segue então pelo Teorema 4.2. ■

A proposição anterior é falsa se a hipótese “tipo finito” é eliminada. Observe que a álgebra definida no Exemplo 4.3 também é uma álgebra de Jordan. Contudo, para uma subclasse das álgebras de Bernstein-Jordan, o resultado pode ser estendido:

Proposição 4.4 *Toda álgebra de Bernstein conservativa tem núcleo nilpotente.*

Demonstração Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein conservativa. Como $U_e Z_e + Z_e^2 = 0$, para toda decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ de A , temos $N^2 = U_e^2$ e $N^3 = NN^2 = U_e^3 + U_e^2 Z_e \subseteq U_e Z_e + Z_e^2 = 0$. ■

Observação 4.6 Pela Proposição 4.3, temos que toda álgebra de Bernstein reduzida de tipo finito também tem núcleo nilpotente, mas também nesse caso, o resultado não vale para álgebras que não são de tipo finito. O mesmo Exemplo 4.3 serve como contra-exemplo. Basta verificar que $L = 0$ nessa álgebra.

Capítulo 5

Indecomponibilidade em álgebras de Bernstein

Neste capítulo, vamos estudar algumas relações entre a indecomponibilidade de uma álgebra de Bernstein (A, ω) e a indecomponibilidade de outras estruturas algébricas naturalmente relacionadas à álgebra (A, ω) como, por exemplo, $\ker(\omega)$ e A^2 . Observamos que se (A, ω) é uma álgebra bária decomponível então $N = \ker(\omega)$ é necessariamente decomponível na variedade definida pelo monômio $(x^2)^2$ (uma álgebra N é decomponível se existem ideais bilaterais não nulos I e J de N tais que $N = I \oplus J$). Veremos que, no caso das álgebras de Bernstein-Jordan, a recíproca é verdadeira, isto é, se N é decomponível então (A, ω) é decomponível; mas em geral, esse resultado é falso.

No contexto das álgebras de Bernstein, podemos melhorar o resultado obtido no Teorema 1.4. Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein com $N = \ker(\omega)$, temos que o operador L_e é diagonalizável, para todo idempotente não nulo e e os subespaços U_e e Z_e da decomposição de Peirce de A são os autoespaços associados aos autovalores $\frac{1}{2}$ e 0 , respectivamente. Assim, como consequência dos Lemas 1.1 e 1.2, obtemos: se $I \subseteq N$ é ideal de A então $I = (I \cap U_e) \oplus (I \cap Z_e)$ e se I, J são ideais de A tais que $N = I \oplus J$ então $U_e = (U_e \cap I) \oplus (U_e \cap J)$ e $Z_e = (Z_e \cap I) \oplus (Z_e \cap J)$. Além disso, temos:

Proposição 5.1 *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein relativa a um idempotente e . Suponha que, para cada ideal I de A contido em N , a seguinte implicação é verdadeira:*

$$I \cap Z_e \neq 0 \text{ implica } U_e \subseteq I. \quad (5.1)$$

Então a mesma implicação é verdadeira para todos os idempotentes de A .

Demonstração Seja $e_0 = e + u_0 + u_0^2$ outro idempotente. Então $A = Fe_0 \oplus U_{e_0} \oplus Z_{e_0}$ e pelo Corolário 3 do Teorema 3.2, temos que $U_{e_0} = \{u + 2u_0u : u \in U_e\}$ e $Z_{e_0} = \{z - 2(u_0 + u_0^2)z : z \in Z_e\}$. Se I é um ideal que satisfaz $I \cap Z_{e_0} \neq 0$, seja $0 \neq z_0 = z - 2(u_0 + u_0^2)z \in I \cap Z_{e_0}$. Então $ez_0 = e(z - 2(u_0 + u_0^2)z) = -(u_0 + u_0^2)z \in I$. Dessa maneira, obtemos que também $z \in I$, ou seja, $Z_e \cap I \neq 0$. Logo, $U_e \subseteq I$ e, conseqüentemente, I também contém U_e^2 . Assim, $U_{e_0} \subseteq U_e + U_e^2 \subseteq I$. ■

Como caso particular do Teorema 1.4, temos:

Proposição 5.2 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$, $r \geq 1$, $s \geq 1$. Se a implicação (5.1) é verdadeira para um idempotente não nulo $e \in A$ então (A, ω) é indecomponível.* ■

5.1 Indecomponibilidade em álgebras de Bernstein-Jordan

Nosso objetivo agora será provar que uma álgebra de Bernstein-Jordan é decomponível se e somente se o núcleo da sua função peso é decomponível na variedade definida pelo monômio $(x^2)^2 = 0$. Esse resultado reduz a classificação das álgebras de Bernstein-Jordan de dimensão arbitrária à classificação de álgebras comutativas satisfazendo $(x^2)^2 = 0$. Observamos que, no entanto, mesmo com essa redução, o problema continua sendo muito difícil.

Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre o corpo F , $N = \ker(\omega)$, $e \in A$ um idempotente não nulo e I um ideal de N . Como I é apenas um ideal de N , nem sempre vale $I = (I \cap U_e) \oplus (I \cap Z_e)$. Supondo $Z_e^2 = 0$, vamos mostrar que $I^2 \subseteq (I \cap U_e) \oplus (I \cap Z_e)$. Decompondo $x \in I$ na forma $x = u + z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, temos $xz = (u + z)z = uz + z^2 = uz \in I \cap U_e$ e $xu = u^2 + uz \in I$. Como $uz \in I$, resulta $u^2 \in I$. Assim, $u^2 \in I \cap Z_e$ e, portanto, $x^2 = u^2 + 2uz \in (I \cap U_e) \oplus (I \cap Z_e)$. Logo, $I^2 \subseteq (I \cap U_e) \oplus (I \cap Z_e)$. Suponha agora que existe um ideal J de N tal que $N = I \oplus J$. Fixado $x_0 = u_0 + z_0 \in I$, onde $u_0 \in U_e$ e $z_0 \in Z_e$, para cada $u \in U_e$ tem-se $ux_0 = u(u_0 + z_0) = uu_0 + uz_0 \in NI =$

$(I \oplus J)I = I^2 \subseteq (I \cap U_e) \oplus (I \cap Z_e)$. Logo, $uu_0 \in I \cap Z_e$ e $uz_0 \in I \cap U_e$. Portanto, se $x = u_0 + z_0 \in I$ então

$$u_0U_e \subseteq I \cap Z_e \text{ e } z_0U_e \subseteq I \cap U_e. \quad (5.2)$$

Do mesmo modo, multiplicando x_0 por $z \in Z_e$ prova-se que

$$u_0Z_e \subseteq U_e \cap I. \quad (5.3)$$

Com esses resultados, é possível provar o seguinte lema:

Lema 5.1 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre o corpo F . Suponha que existe um idempotente $e \in A$ tal que $Z_e^2 = 0$. Suponha, além disso, que o ideal $N = U_e \oplus Z_e$ é decomposto na forma $N = I \oplus J$, onde I e J são ideais não triviais de N . Então existe um ideal não nulo I_1 de A , contido em N , tal que $I_1 \cap J = 0$.*

Demonstração No caso em que $U_e \cap I = 0 = Z_e \cap I$, seja $x_0 = u_0 + z_0$ um elemento não nulo em I , onde $u_0 \in U_e$ e $z_0 \in Z_e$. Temos que u_0 e z_0 são ambos não nulos pois, por exemplo, se $u_0 = 0$, então $0 \neq x_0 = z_0 \in I \cap Z_0 = 0$. Além disso, se $u_0 \in J$ e $z_0 \in J$, teríamos $u_0 + z_0 \in I \cap J = 0$. Logo, $u_0 \notin J$ ou $z_0 \notin J$. Supondo $u_0 \notin J$, seja, $I_1 = Fu_0$. Temos $I_1 \cap J = 0$. Para verificar que I_1 é ideal de A , seja $x \in N$, $x = u + z$ com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Assim, usando as inclusões obtidas em (5.2) e (5.3), $u_0x = u_0(u + z) = u_0u + u_0z \in (I \cap Z_e) \oplus (I \cap U_e) = 0$. Temos ainda, $eu_0 = \frac{1}{2}u_0$. Assim, I_1 é ideal de A . Quando $z_0 \notin J$, tomamos $I_1 = Fz_0$. Resta verificar o caso em que $U_e \cap I \neq 0$ ou $Z_e \cap I \neq 0$. Tomando $I_1 = (U_e \cap I) \oplus (Z_e \cap I)$, temos $I_1 \cap J = 0$, pois $I_1 \subseteq I$. Além disso, $NI_1 \subseteq NI = (I \oplus J)I = I^2 \subseteq (I \cap U_e) \oplus (I \cap Z_e) = I_1$ e $eI_1 = e((I \cap Z_e) \oplus (I \cap U_e)) = I \cap U_e \subseteq I_1$. Portanto, I_1 é ideal de A . ■

Teorema 5.1 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein tal que para algum idempotente não nulo $e \in A$, tem-se $Z_e^2 = 0$. Suponha que o ideal $N = \ker(\omega) = U_e \oplus Z_e$ é soma direta de dois ideais de N não nulos I e J . Então existe um ideal não nulo $\bar{I}$ de A tal que $N = \bar{I} \oplus J$.*

Demonstração Pelo Lema 5.1, existe um ideal não nulo I_1 de A contido em N tal que $I_1 \cap J = 0$. Observamos que o ideal I_1 obtido na demonstração do lema satisfaz $(U_e \cap I) \oplus (Z_e \cap I) \subseteq I_1$. Seja $\mathcal{C}$ a classe de todos os ideais K de A tais que

$(U_e \cap I) \oplus (Z_e \cap I) \subseteq K \subseteq N$ e $K \cap J = 0$. Essa classe é não vazia, pois $I_1 \in \mathcal{C}$. Ordenada pela inclusão, $\mathcal{C}$ é indutiva: se $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ é uma cadeia ascendente de ideais de $\mathcal{C}$, o ideal $K = \bigcup_i K_i$ satisfaz $K \cap J = 0$ e $(U_e \cap I) \oplus (Z_e \cap I) \subseteq K \subseteq N$. Portanto, $K \in \mathcal{C}$. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal $\bar{I}$ em $\mathcal{C}$. Vamos provar que $\bar{I} \oplus J = N$. Como $\bar{I} \in \mathcal{C}$, temos $\bar{I} \oplus J \subseteq N$. Suponha, por absurdo, que $N \not\subseteq \bar{I} \oplus J$, isto é, que I não está contido em $\bar{I} \oplus J$. Seja $x = u + z$ ($u \in U_e, z \in Z_e$) um elemento em I tal que $x \notin \bar{I} \oplus J$. Temos então, $u \notin \bar{I} \oplus J$ ou $z \notin \bar{I} \oplus J$. No caso em que $u \notin \bar{I} \oplus J$ temos, em particular, $u \notin \bar{I}$. Como $uA = u(Fe \oplus U_e \oplus Z_e) \subseteq Fu + (U_e \cap I) + (Z_e \cap I) \subseteq \bar{I} \oplus Fu$, temos que $\bar{I} \oplus Fu$ é um ideal de A contido em N que contém $(I \cap U_e) \oplus (I \cap Z_e)$. Além disso, $(\bar{I} \oplus Fu) \cap J = 0$ pois caso contrário existiriam $m \in \bar{I}, \lambda \in F, u_2 \in J$ tais que $u_2 = m + \lambda u$, isto é, $\lambda u = u_2 - m$. Se $\lambda = 0$, teríamos $\bar{I} \cap J \neq 0$ e se $\lambda \neq 0$, $u \in \bar{I} \oplus J$, o que é absurdo. Logo, $\bar{I} \oplus Fu \in \mathcal{C}$, o que contraria a propriedade de $\bar{I}$ ser maximal em $\mathcal{C}$. De modo análogo, chegamos a uma contradição supondo $v \notin \bar{I} \oplus J$. Portanto, $\bar{I} \oplus J = N$. ■

Aplicando novamente o teorema anterior para a decomposição $N = J \oplus \bar{I}$, obtemos:

Corolário 1 *Sob as mesmas hipóteses do teorema, existem ideais não nulos $\bar{I}$ e $\bar{J}$ de A , ambos contidos em N , tais que $N = \bar{I} \oplus \bar{J}$. Desse modo, (A, ω) é decomponível se e somente se N é decomponível.* ■

Como toda álgebra de Bernstein-Jordan verifica $Z_e^2 = 0$, para todo idempotente não nulo e , temos:

Corolário 2 *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein-Jordan de dimensão arbitrária, são equivalentes:*

(a) (A, ω) é uma álgebra bária indecomponível;

(b) $N = \ker(\omega)$ é decomponível na variedade definida pelo monômio $(x^2)^2 = 0$. ■

5.2 Indecomponibilidade em álgebras de Bernstein excepcionais

Nesta seção, veremos que o resultado obtido para as álgebras de Bernstein-Jordan na seção anterior não é verdadeiro para as álgebras de Bernstein em geral. Construiremos uma sequência crescente e infinita de álgebras de Bernstein excepcionais indecomponíveis (A_k, ω_k) de tipo $(1+k, k)$ (todas subálgebras de uma álgebra A) que possuem núcleo decomponível. Além disso, mostraremos que $A = \bigcup_k A_k$ e que A tem núcleo indecomponível e, portanto, é indecomponível.

Sejam U e Z espaços vetoriais de dimensão infinita sobre F , livremente gerados por $u_1, u_2, \dots$ e $z_1, z_2, \dots$, respectivamente. Na soma direta $N = U \oplus Z$ definimos uma multiplicação comutativa dada por:

$$\begin{aligned} u_i z_i &= u_i \ (i \geq 1); \ z_i z_j = -2(u_i + u_j), \text{ se } i \neq j; \\ &\text{outros produtos iguais a zero.} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Com essa multiplicação, tem-se $N^2 = U$ e $U^2 = 0$, portanto $N^{[3]} = (N^2)^2 = 0$, ou seja, N é solúvel de índice 3. Observamos ainda, que N não é nil, pois $(u_1 + z_1)^n = 2u_1$, para todo $n \geq 2$, e portanto, N não é nilpotente. Além disso, $UZ = U$ e $Z^2 = U$.

Proposição 5.3 *A álgebra N definida acima é indecomponível na variedade definida pelo monômio $(x^2)^2 = 0$.*

Demonstração Suponha que existem ideais não triviais I, J de N tais que $N = I \oplus J = U \oplus Z$. Assim, cada z_j da base de Z pode ser escrito da forma $z_j = a_j + b_j$, com $a_j \in I$ e $b_j \in J$. Decompondo a_j e b_j como $a_j = x_j + y_j$; $b_j = t_j + v_j$, com $x_j, t_j \in U, y_j, v_j \in Z$, temos $z_j = x_j + y_j + t_j + v_j = (x_j + t_j) + (y_j + v_j)$ e, portanto, $x_j + t_j = 0$ e $y_j + v_j = z_j$. Escrevendo $y_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} z_k$, $v_j = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{jk} z_k$, onde os coeficientes α_{jk} e β_{jk} são nulos, a menos de um conjunto finito, obtemos que $y_j + v_j = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{jk} + \beta_{jk}) z_k = z_j$. Assim,

$$\alpha_{jj} + \beta_{jj} = 1 \text{ e } \alpha_{jk} + \beta_{jk} = 0, \text{ se } j \neq k. \quad (5.5)$$

Além disso, temos para todo l ,

$$\begin{aligned} u_l a_j &= u_l(x_j + y_j) = u_l y_j = u_l \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} z_k \right) = \alpha_{jl} u_l \in I; \\ u_l b_j &= u_l(t_j + v_j) = u_l v_j = u_l \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{jk} z_k \right) = \beta_{jl} u_l \in J. \end{aligned}$$

Observando que $I \cap J = 0$, temos que $\alpha_{jl} = 0$ ou $\beta_{jl} = 0$, para todo l . Comparando esse resultado com (5.5), concluímos que existem duas possibilidades para z_j , dependendo se $\alpha_{jj} = 0$ ou $\beta_{jj} = 0$:

$$z_j = a_j + b_j = (x_j + z_j) + t_j, \text{ com } x_j + z_j \in I \text{ e } t_j \in U \cap J; \quad (5.6)$$

$$z_j = a_j + b_j = x_j + (t_j + z_j), \text{ com } x_j \in U \cap I \text{ e } t_j + z_j \in J. \quad (5.7)$$

Observa-se ainda, que não é possível todos os z_j ($j = 1, 2, \dots, \infty$) serem da forma (5.6), pois nesse caso, teríamos $(x_j + z_j)u_j = z_j u_j = u_j \in I$, para todo j , isto é, $U \subseteq I$ e, além disso, como $x_j \in U \subseteq I$ e $x_j + z_j \in I$, teríamos também $Z \subseteq I$ e, portanto, $N = U \oplus Z \subseteq I$, contradição. Do mesmo modo, não é possível que todos os z_j sejam da forma (5.7). Podemos assumir então que

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1 + z_1) + t_1, \quad x_1 + z_1 \in I, t_1 \in U \cap J, \\ z_2 &= x_2 + (t_2 + z_2), \quad x_2 \in U \cap I, t_2 + z_2 \in J. \end{aligned}$$

Decompondo x_1 e t_2 da forma $x_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_i$ e $t_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i u_i$, seja r o maior índice tal que $\gamma_r \neq 0$ ou $\delta_r \neq 0$. Então para todo $k > r$,

$$z_k(x_1 + z_1) = z_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_i \right) + z_k z_1 = \gamma_k u_k - 2(u_1 + u_k) = -2(u_1 + u_k) \in I,$$

$$z_k(t_2 + z_2) = z_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i u_i \right) + z_k z_2 = \delta_k u_k - 2(u_k + u_2) = -2(u_k + u_2) \in J.$$

Como $u_1 = u_1(x_1 + z_1) \in I$ e $u_2 = u_2(t_2 + z_2) \in J$, concluímos que $u_k \in I \cap J$, contradição. Assim, provamos que N é indecomponível. ■

Para cada $k \geq 1$, sejam U_k o subespaço de U gerado por $\{u_1, \dots, u_k\}$, Z_k o subespaço de Z gerado por $\{z_1, \dots, z_k\}$ e $N_k = U_k \oplus Z_k$. Com a multiplicação definida em (5.4), N_k é subálgebra de N . Verifica-se também que $U_k^2 = 0$ e $U_k Z_k = U_k$, para todo k .

Proposição 5.4 Para todo $k \geq 2$, N_k pode ser decomposto como soma direta de dois ideais não triviais de dimensões 2 e $2k - 2$.

Demonstração Considere os subespaços I_k e J_k gerados respectivamente por $\{u_1, z_1 + 2(u_1 + \dots + u_k)\}$ e $\{u_2, \dots, u_k, 2u_1 + z_2, \dots, 2u_1 + z_k\}$. Temos que as dimensões de I_k e J_k são 2 e $2k - 2$, respectivamente e $I_k \oplus J_k = N_k$. A verificação de que I_k e J_k são ideais de N_k é imediata. ■

Como $N^2 = U$ e $(N^2)^2 = 0$, pela Proposição 3.8, N é núcleo de uma álgebra de Bernstein excepcional e para um idempotente e conveniente, tem-se $U_e = N^2 = U$ e $Z_e = Z$. Assim, $A = Fe \oplus U \oplus Z$ é uma álgebra de Bernstein excepcional de dimensão infinita, com N indecomponível. Logo, (A, ω) também é indecomponível. Do mesmo modo, cada N_k é núcleo de uma álgebra de Bernstein excepcional $A_k = Fe \oplus U_k \oplus Z_k$. Observamos que cada A_k tem tipo $(1 + k, k)$. Para essas álgebras, temos:

Proposição 5.5 Para todo $k \geq 1$, A_k é indecomponível.

Demonstração Suponha que existam ideais não triviais I e J de A_k tais que $N_k = U_k \oplus Z_k = I \oplus J$. Lembrando que $Z_k = (I \cap Z_k) \oplus (J \cap Z_k)$, fixado um vetor z_{i_0} da base de Z_k , podemos escrever $z_{i_0} = t + s$ com $t \in I \cap Z_k$ e $s \in J \cap Z_k$. Decompondo $t = \sum_{j=1}^k \alpha_j z_j$ e $s = \sum_{j=1}^k \beta_j z_j$, devemos ter

$$\alpha_{i_0} + \beta_{i_0} = 1 \text{ e } \alpha_i + \beta_i = 0 \text{ se } i \neq i_0. \quad (5.8)$$

Temos ainda, para todo i ,

$$tu_i = \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j z_j \right) u_i = \alpha_i z_i u_i = \alpha_i u_i \in I,$$

$$su_i = \left(\sum_{l=1}^k \beta_l z_l \right) u_i = \beta_i z_i u_i = \beta_i u_i \in J.$$

Como $I \cap J = 0$, concluímos que $\alpha_i = 0$ ou $\beta_i = 0$, para cada i . Comparando esse resultado com (5.8), obtemos que $t = z_i \in I$ ou $s = z_i \in J$. Se existirem i, j tais que $z_i \in I$ e $z_j \in J$, teríamos $z_i z_j = -2(u_i + u_j) \in I \cap J$. Logo, podemos supor que $Z_k \subseteq I$. Conseqüentemente, $U_k = Z_k U_k \subseteq I$. Desse modo, temos $N_k = U_k \oplus Z_k \subseteq I$, contradição.

Assim, mostramos que A_k é indecomponível. ■

A partir da construção descrita na Proposição 3.8, podemos obter várias álgebras de Bernstein excepcionais indecomponíveis:

Proposição 5.6 *Dados inteiros $r \geq s \geq 1$, existe uma álgebra de Bernstein excepcional (A, ω) de tipo $(1+r, s)$ sobre o corpo F tal que $N = \ker(\omega)$ é indecomponível na variedade definida pelo monômio $(x^2)^2$.*

Demonstração Construiremos uma álgebra comutativa solúvel N de dimensão $r+s$ tal que $\dim(N^2) = r$ e N é indecomponível. Sejam U e Z espaços vetoriais gerados livremente pelos símbolos $u_1, \dots, u_r$ e $z_1, \dots, z_s$, respectivamente. No espaço vetorial $N = U \oplus Z$ definimos uma multiplicação comutativa por:

$$\begin{aligned} u_i z_j &= u_i \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s); \quad z_j^2 = u_j \quad (j = 1, \dots, s); \\ \text{outros produtos} &\text{ iguais a zero.} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Observe que $N^2 = U$ e $(N^2)^2 = U^2 = 0$, isto é, N é solúvel de índice 3 e N^2 tem dimensão r . Pela Proposição 3.8, existe uma álgebra de Bernstein excepcional (A, ω) com $\ker(\omega) = N$, de tipo $(1 + \dim(N^2), \dim(N) - \dim(N^2)) = (1+r, s)$. Resta provar que a álgebra N definida acima é indecomponível. Seja $\varphi : N \rightarrow F$ a forma linear definida por $\varphi(u_i) = 0$ ($i = 1, \dots, r$) e $\varphi(z_j) = 1$ ($j = 1, \dots, s$). Para cada $x = u + z$ em N com $u \in U$ e $z \in Z$, temos $\varphi(x) = \varphi(u + z) = \varphi(z)$ e $\ker(\varphi) = U \oplus \ker(\varphi|_Z)$ e como $xu_i = (u + z)u_i = zu_i = \varphi(z)u_i$, temos que $xu_i = 0$ se e somente se $x \in \ker(\varphi)$, ou seja, $xU = 0$ se e somente se $x \in \ker(\varphi)$. Sejam I, J ideais de N tais que $I \oplus J = N$ e mostremos que $I = 0$ ou $J = 0$. Se $IU = JU = 0$, teríamos $N = I \oplus J \subseteq \ker(\varphi)$, absurdo, pois φ é não nula. Desse modo, existe um elemento $x \in I \cup J$ tal que $xU \neq 0$ e portanto, $\varphi(x) \neq 0$. Podemos supor, por simetria, que $x \in I$. Assim, $xu_i = \varphi(x)u_i \in I$, isto é, $u_i \in I$, para cada $i = 1, \dots, r$. Logo, $U \subseteq I$ e, conseqüentemente, $U \cap J = 0$. Seja $b \in J$ um elemento arbitrário e decomponha $b = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^s \beta_j z_j$, onde $\alpha_i, \beta_j \in F$ ($i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s$).

Dessa maneira, $bz_1 = (\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i) + \beta_1 u_1 \in U \cap J = 0$. Logo,

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0 \text{ e } \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0 \quad (5.10)$$

Se $s = 1$, temos $b = \alpha_1 u_1 + \beta_1 z_1$, de onde resulta $bu_1 = \beta_1 u_1 \in U \cap J = 0$, isto é, $\beta_1 = 0$ e, por (5.10), $b = 0$. Se $s > 1$, para cada $j = 2, \dots, s$, também vale

$bz_j = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \beta_j u_j \in U \cap J = 0$. Assim, $\alpha_j + \beta_j = 0$ e $\alpha_k = 0$, se $k \neq j$, para cada $j = 1, \dots, k$. Portanto, $b = 0$, ou seja, $J = 0$. Concluimos então que N é indecomponível. ■

A proposição anterior nos fornece exemplos de álgebras de Bernstein excepcionais indecomponíveis de tipo $(1+r, s)$ sobre um corpo de característica diferente de 2, quando $r \geq s \geq 1$. Podemos também exibir exemplos de álgebras de Bernstein excepcionais indecomponíveis de cada tipo $(1+r, s)$, fazendo uma pequena modificação no exemplo anterior e assumindo que F tem característica zero.

Proposição 5.7 *Seja F um corpo de característica zero. Dados inteiros arbitrários $r, s \geq 1$, existe uma álgebra de Bernstein excepcional (A, ω) de tipo $(1+r, s)$, tal que $N = \ker(\omega)$ é indecomponível e, portanto, (A, ω) é indecomponível.*

Demonstração Sejam U e Z espaços vetoriais livremente gerados por $\{u_1, \dots, u_r\}$ e $\{z_1, \dots, z_s\}$, respectivamente. Considere no espaço vetorial $N = U \oplus Z$ a seguinte multiplicação comutativa:

$$u_i z_j = u_i \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s); \quad z_j^2 = u_1 \quad (j = 1, \dots, s); \quad (5.11)$$

outros produtos iguais a zero.

Vamos mostrar que N é indecomponível. Suponha que existem ideais não nulos I e J de N tais que $N = I \oplus J$. Fixado u_i na base de U , considere o subespaço $M = Fu_i$. Pela multiplicação dada em (5.11), M é ideal de N . Se $u_i \notin I$ e $u_i \notin J$, então $M \cap I = 0 = M \cap J$ e, conseqüentemente, $Fu_i = MN = M(I \oplus J) \subseteq MI \oplus MJ \subseteq (M \cap I) \oplus (M \cap J) = 0$, contradição, pois $\dim(M) = 1$. Dessa maneira, $u_i \in I$ ou $u_i \in J$. Suponha que para cada i , $u_i \in I$. Seja $y \in J$ um elemento arbitrário e decompõe-se $y = u + z$, $u \in U$ e $z \in Z$. Então $0 = u_i y = u_i(u + z) = u_i z$. Se $z = \sum_{k=1}^s \beta_k z_k$, temos $0 = u_i(\sum_{k=1}^s \beta_k z_k) = (\sum_{k=1}^s \beta_k) u_i$ e, portanto, $\sum_{k=1}^s \beta_k = 0$. Para cada z_i na base de Z , tem-se $z_j y = z_j(u + z) = u + z_j z = u + \beta_j u_1 \in U \subseteq I$. Mas $z_j y$ também está em J . Assim, $z_j y = 0$ e então $u = -\beta_j u_1$, para todo $j = 1, \dots, s$; logo, $\beta_1 = \dots = \beta_s$. Desse modo, temos $\sum_{k=1}^s \beta_k = s\beta_1 = 0$. Como F tem característica zero, $\beta_1 = \dots = \beta_s = 0$ e, portanto, $z = 0$ e $y = u$. Assim, $J \subseteq U \subseteq I$, contradição. Se $U \subseteq J$, obtemos uma contradição análoga. Assim, existem $i_0 \neq j_0$ tais que $u_{i_0} \in I$ e

$u_{j_0} \in J$. Decompondo $z_1 = x + y$, com $x \in I$ e $y \in J$ e estes por sua vez, $x = a_1 + b_1$, $y = a_2 + b_2$, onde $a_1, a_2 \in U$, $b_1, b_2 \in Z$, temos $b_1 = \sum_{i=1}^s \lambda_i z_i$ e $b_2 = \sum_{i=1}^s \mu_i z_i$, $\lambda_i, \mu_j \in F$. Desse modo, concluímos que $\lambda_1 + \mu_1 = 1$ e $\lambda_j + \mu_j = 0$, para $j \geq 2$. Além disso, $u_{j_0} x \in I \cap J = 0$, isto é, $0 = u_{j_0} x = u_{j_0} (a_1 + b_1) = u_{j_0} b_1 = u_{j_0} (\sum_{i=1}^s \lambda_i z_i) = (\sum_{i=1}^s \lambda_i) u_{j_0}$ e, portanto, $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 0$. Do mesmo modo, $u_{i_0} y \in I \cap J = 0$, resultando que $\sum_{j=1}^s \mu_j = 0$. Logo, $0 = \sum_{i=1}^s \lambda_i + \sum_{i=1}^s \mu_i = \sum_{i=1}^s (\lambda_i + \mu_i) = (\lambda_1 + \mu_1) + \sum_{i=2}^s (\lambda_i + \mu_i) = \lambda_1 + \mu_1 = 1$, contradição. Provamos então que N é indecomponível. Observando que $N^2 = U$ e $U^2 = 0$, a Proposição 3.8 nos garante a existência de uma álgebra de Bernstein excepcional (A, ω) com $\ker(\omega) = N$ de tipo $(1 + \dim(N^2), \dim(N) - \dim(N^2)) = (1 + r, s)$. ■

Observação 5.1 A proposição anterior continua válida se F tem característica $p > 0$ e p não é divisor de s .

Podemos também comparar a indecomponibilidade de uma álgebra de Bernstein excepcional (A, ω) com a indecomponibilidade de $(A^2, \omega|_{A^2})$: seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1 + r, s)$, com $r \geq 2$. Se $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ é uma decomposição de Peirce de (A, ω) , então $A^2 = Fe \oplus U_e$ é a álgebra unitária de dimensão $1 + r$ e, portanto, isomorfa à álgebra gamética $G(r + 1, 2)$, que pode ser decomposta como $G(2, 2) \vee G(2, 2) \vee \dots \vee G(2, 2)$. Se (A, ω) é excepcional de tipo $(2, s)$, então A^2 é isomorfa a $G(2, 2)$, que é indecomponível. A existência de álgebras excepcionais de todo tipo sobre qualquer corpo de característica zero é garantida pela Proposição 5.7. Dessa maneira, na classe de álgebras excepcionais, todas as quatro possibilidades envolvendo a decomponibilidade de A e A^2 ocorrem.

5.3 Álgebras cancelativas indecomponíveis

Nosso objetivo aqui será investigar a existência de álgebras de Bernstein cancelativas de cada tipo $(1 + r, s)$ sobre um corpo F , para $r \leq s$. Além disso, daremos uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra de Bernstein cancelativa seja indecomponível.

Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) álgebras de Bernstein de tipos $(1 + r_1, s_1)$ e $(1 + r_2, s_2)$, respectivamente, e $A_1 = Fe_1 \oplus U_{e_1} \oplus Z_{e_1}$ e $A_2 = Fe_2 \oplus U_{e_2} \oplus Z_{e_2}$ as decomposições de Peirce relativas aos idempotentes $e_1 \in A_1$ e $e_2 \in A_2$. Observando que $2(1, 0, 0)(0, u_1 +$

$z_1, u_2 + z_2) = (0, u_1, u_2)$, para $u_i \in U_i$ e $z_i \in Z_i$ ($i = 1, 2$), concluímos que o tipo do join $A = A_1 \vee A_2$ é $(1 + r_1 + r_2, s_1 + s_2)$. Em particular, se T_n é a álgebra de Bernstein de tipo $(1, n)$ e (A, ω) é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r_0, s_0)$, então o join $A \vee T_n$ tem tipo $(1 + r_0, n + s_0)$. Além disso, se $e_1 \in A$ e $e_2 \in T_n$ são idempotentes não nulos, o subespaço $U_{e_1 \vee e_2}$ é isomorfo ao subespaço U_{e_1} . Dessa maneira, se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein cancelativa, o mesmo ocorre com o join $A \vee T_n$, para todo $n \geq 1$. Assim, o trabalho de encontrar álgebras de Bernstein cancelativas de tipo $(1 + r, s)$, para cada $s \geq r \geq 1$ fica reduzido a encontrar álgebras de Bernstein cancelativas de tipo $(1 + r, r)$, para cada $r \geq 1$.

Seja B uma álgebra comutativa de dimensão r sobre F . Definindo em $N = U \oplus Z$, onde $U = Z = B$, a operação $(u, z)(u', z') = (0, uu')$ e considerando o operador linear $\tau : N \rightarrow N$ dado por $\tau(u, z) = (\frac{1}{2}u, 0)$, a álgebra $(A, \omega) = [N, \tau, \tau]$ satisfaz $(\alpha, u, z)(\alpha, u, z) = (\alpha^2, \alpha u, u^2)$. Se $e = (1, 0, 0)$ e $\omega : A \rightarrow F$ é dada por $\omega(\alpha, u, z) = \alpha$ então para todo $x = \alpha e + u + z$ (com as devidas identificações), temos $x^2 = \omega(x)^2 e + \omega(x)u + u^2$; portanto, pela Observação 3.5, (A, ω) é conservativa de tipo $(1 + r, s)$, onde $U_e = U$ e $Z_e = Z$.

Suponha agora que existe uma extensão separável K de F de grau r . Podemos tomar K no lugar de B na construção feita acima. Nesse caso, a função norma $N_{K/F}$ está definida em cada $x \in K$ como o produto dos conjugados de x em K . Logo, $N_{K/F}(x) = 0$ se e somente se $x = 0$. Lembrando que para toda extensão separável K de F e todo $x \in K$ tem-se $N_{K/F}(x) = \det(L_x)$, onde $L_x : K \rightarrow K$ é dada por $L_x(y) = xy$, resulta que $\det(L_x) = 0$ se e somente se $x = 0$. Pela construção da álgebra conservativa $[K \oplus K, \tau, \tau]$, temos para cada $u = (0, x, 0) \in U_e$, $\det(L_u) = \det(L_x)$. Logo, $\det(L_u) = 0$ se e somente se $x = 0$, ou seja, $u = 0$. Portanto, a álgebra $[K \oplus K, \tau, \tau]$ é cancelativa de tipo $(1 + r, r)$.

No caso das álgebras de Bernstein cancelativas, temos:

Proposição 5.8 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein cancelativa. As condições seguintes são equivalentes:*

- (a) A é nuclear, isto é, $A^2 = A$;
- (b) (A, ω) é indecomponível.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b): Suponha que (A, ω) não é indecomponível e sejam I e J ideais não triviais de A tais que $N = I \oplus J$. Então $U_e = (U_e \cap I) \oplus (U_e \cap J)$

e $U_e^2 = (U_e \cap I)^2 \oplus (U_e \cap J)^2$. Como A é nuclear, $N = U_e \oplus Z_e = U_e \oplus U_e^2 = (U_e \cap I) \oplus (U_e \cap I)^2 \oplus (U_e \cap J) \oplus (U_e \cap J)^2 = I \oplus J$. Logo, $(U_e \cap I) \oplus (U_e \cap I)^2 = I$ e $(U_e \cap J) \oplus (U_e \cap J)^2 = J$. Assim, devemos ter ambos $(U_e \cap I)$ e $(U_e \cap J)$ não nulos. Seja então $u \in (U_e \cap I)$ e $x \in (U_e \cap J)$ ambos não nulos. Temos $xy \in I \cap J = 0$, contrariando a hipótese que L_u é injetora. Desse modo, concluímos que (A, ω) é indecomponível.

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponha que A não é nuclear. Assim, existe um subespaço Z' de dimensão maior ou igual a um tal que $Z_e = U_e^2 \oplus Z'$. Como (A, ω) é conservativa e $Z' \subseteq Z_e$, temos que $AZ' = 0$. Dessa maneira, $N = (U_e \oplus U_e^2) \oplus Z'$ e temos uma decomposição não trivial de N como soma direta de ideais de A , mostrando que (A, ω) é decomponível. Com essa contradição, concluímos que A é nuclear. ■

Corolário 1 *Seja F um corpo e suponha que existe uma extensão separável K de grau r sobre F . Então existe uma álgebra de Bernstein cancelativa indecomponível de tipo $(1+r, r)$ (e, portanto, uma álgebra de Bernstein cancelativa decomponível de tipo $(1+r, s)$, para cada $s > r$).*

Demonstração Basta considerar a álgebra $[K \oplus K, \tau, \tau]$ construída anteriormente e observar que $(Fe \oplus K \oplus K)^2 = Fe \oplus K \oplus K^2$ e $K^2 = K$. O resultado segue então, da Proposição 5.8. ■

Corolário 2 *Para cada $r \geq 1$, a álgebra zigótica $(r+1)$ -alélica de Mendel é indecomponível. Assim, para todo $r \geq 1$, existe um exemplo de uma álgebra de Bernstein cancelativa indecomponível de tipo $(1+r, \frac{1}{2}r(r+1))$.*

Demonstração O resultado segue das Proposições 3.10 e 5.8. ■

A próxima construção nos fornece exemplos de álgebras de Bernstein reduzidas, que não são cancelativas, de tipo $(1+r, s)$, para cada $2 \leq r \leq s$. Sejam U e Z espaços vetoriais livremente gerados por $u_1, \dots, u_r$ e $z_1, \dots, z_s$ e $N = U \oplus Z$. Definindo em N a multiplicação comutativa dada por:

$$u_i u_j = z_j (1 \leq i < j \leq r); \text{ outros produtos iguais a zero,} \quad (5.12)$$

temos $Z^2 = 0$ e $N^2 \subseteq Z$; portanto, N satisfaz a identidade $(x^2)^2 = 0$. O operador linear

$\tau : N \longrightarrow N$ definido por $\tau(u + z) = \frac{1}{2}u$ satisfaz (3.34); logo, a álgebra $(A, \omega) = [N, \tau, \tau]$ é Bernstein. Como $u_i^2 = 0$, para cada $i = 1, \dots, r$, temos que (A, ω) não é cancelativa; no entanto, $L = 0$: se $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i \in L$ então $xu_1 = \sum_{i=2}^r \alpha_i z_i = 0$ implica que $\alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ e, portanto, $x = \alpha_1 x_1$. Temos ainda, $0 = xu_2 = \alpha_1 u_1 u_2 = \alpha_1 z_2$, ou seja, $x = 0$.

Capítulo 6

A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein

Nosso objetivo, neste capítulo, é estudar relações entre uma álgebra de Bernstein e sua álgebra de multiplicações. Expomos alguns resultados obtidos recentemente sobre essas álgebras. Esse tipo de investigação já tem sido feito com álgebras não associativas em geral. Foi iniciado por N. Jacobson, A.A. Albert e R.D. Schafer. Em [24] encontram-se alguns resultados básicos. Mais recentemente, F.L. Pritchard, D.L. Finston e S.M. Farrand obtiveram novos resultados (ver [8], [23]). A vantagem em trabalhar com a álgebra de multiplicações vem do fato que a álgebra $End(A)$ é associativa, mesmo que A não seja. Além disso, a subálgebra de $End(A)$ gerada pelos operadores L_x e R_x ($x \in A$) possui várias propriedades herdadas de A , pois sua estrutura depende fortemente da multiplicação em A . Esta linha de investigações sobre álgebras de Bernstein está apenas começando.

6.1 A álgebra de multiplicações

Dada uma álgebra arbitrária A sobre o corpo F , consideremos a subálgebra da álgebra $End(A)$ dos endomorfismos de A gerada pelos operadores R_x e L_x , com $x \in A$. Um elemento dessa subálgebra é uma soma finita de operadores $S_{y_1} \circ \dots \circ S_{y_k}$, onde $S = L$ ou $S = R$ e $y_i \in A$, ($i = 1, \dots, k$). Essa subálgebra é denominada *álgebra de multiplicações* de A e será denotada por $M^*(A)$. Note que se A é comutativa, $R_x = L_x$, para todo $x \in A$.

Podemos relacionar ideais de A com ideais de $M^*(A)$. Dado $I \subseteq A$ ideal bilateral de

A , $(I : A) = \{\tau \in M^*(A) : \tau(A) \subseteq I\}$ é um ideal bilateral de $M^*(A)$ e dado $\mathcal{I}$ ideal à esquerda de $M^*(A)$, podemos considerar o ideal bilateral $\mathcal{I}(A)$ de A gerado pelo conjunto $\{\tau(a) : \tau \in \mathcal{I} \text{ e } a \in A\}$.

Seja (A, ω) uma álgebra bárica comutativa com um idempotente e de peso 1. Com a decomposição $A = Fe \oplus N$, onde $N = \ker(\omega)$, temos que cada $x \in A$ é escrito na forma $x = \omega(x)e + n$, com $n \in N$. Assim, $L_x = \omega(x)L_e + L_n$. Logo, se $y_1, \dots, y_k$ são elementos de A , decompondo $y_i = \alpha_i e + n_i$, com $\alpha_i \in F$ e $n_i \in N$ ($i = 1 \dots k$), obtemos $L_{y_1} \circ \dots \circ L_{y_k} = (\alpha_1 \dots \alpha_k)L_e^k + T$, onde T é soma finita de operadores $L_{x_1} \circ \dots \circ L_{x_k}$ com pelo menos um dos $x_i \in N$. Denotemos por $\tilde{N}$ o subespaço vetorial de $M^*(A)$ gerado pelos operadores da forma $L_{x_1} \circ \dots \circ L_{x_k}$ com algum $x_i \in N$. Observa-se facilmente que $\tilde{N}$ é um ideal bilateral de $M^*(A)$ contido em $(N : A)$. Seja τ um elemento arbitrário em $M^*(A)$. Então τ é uma soma finita de operadores do tipo $L_{y_1} \circ \dots \circ L_{y_k}$. Desse modo, podemos escrevê-lo na forma

$$\tau = \beta_1 L_e^{k_1} + \dots + \beta_p L_e^{k_p} + T, \quad (6.1)$$

com $T \in \tilde{N}$. Observamos ainda que $L_e^k - L_e \in (N : A)$, para todo $k \geq 1$, pois $\omega \circ L_e^k = \omega \circ L_e$. Assim, $L_e^k - L_e = \sigma_k \in (N : A)$, isto é, $L_e^k = L_e + \sigma_k$. Substituindo em (6.1), obtemos $\tau = (\beta_1 + \dots + \beta_p)L_e + \theta$, onde $\theta = \sum_{k=1}^p \beta_k \sigma_k + T \in (N : A)$. Como $L_e(e) = e \notin N$, temos que $L_e \notin (N : A)$. Assim, temos uma decomposição de $M^*(A)$ na forma $M^*(A) = FL_e \oplus (N : A)$. Conseqüentemente, $(N : A)$ é um ideal bilateral de $M^*(A)$ de codimensão 1 e não contém $M^*(A)^2$ (pois $L_e^2(e) = e \notin N$). Pela Proposição 1.1, existe um único caracter $\bar{\omega} : M^*(A) \longrightarrow F$ com $\ker(\bar{\omega}) = (N : A)$. Dessa maneira, provamos o seguinte resultado:

Proposição 6.1 *Seja (A, ω) uma álgebra bárica comutativa sobre o corpo F contendo idempotentes de peso 1. Então a álgebra de multiplicações $M^*(A)$ admite (pelo menos) um caracter.* ■

Vamos analisar um pouco mais esse caracter $\bar{\omega}$. Observando que $L_e^2 = L_e + \sigma_2$ e $\sigma_2 \in (N : A)$, concluímos que $\bar{\omega}(L_e^2) = \bar{\omega}(L_e)$, ou seja, $\bar{\omega}(L_e) = 1$ ou 0. Como $\bar{\omega}$ é não nula e $\bar{\omega}((N : A)) = 0$, temos $\bar{\omega}(L_e) = 1$. Assim, se $x \in A$ é um elemento arbitrário, decompondo $x = \omega(x)e + n$, temos

$$\bar{\omega}(L_x) = \bar{\omega}(\omega(x)L_e + L_n) = \omega(x)\bar{\omega}(L_e) = \omega(x).$$

Diremos que a função $\bar{\omega}$ obtida acima é o *caracter de $M^*(A)$ induzido por ω* .

Quando (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, a induzida por ω está caracterizada pelo valor que ela assume no operador L_e . Observamos, inicialmente, que em toda álgebra de Bernstein vale $2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0$, para todo idempotente não nulo e . De fato, a linearização da identidade $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$ nos fornece a identidade

$$2(xy)(zt) + 2(xz)(ty) - \omega(xy)zt - \omega(zt)xy - \omega(xz)ty - \omega(ty)(xz) = 0.$$

Fazendo $y = z = t = e$, obtemos $2e(ex) - \omega(x)e - ex$, para todo $x \in A$. Substituindo x por xe , temos $2e(e(ex)) - \omega(x)e - e(ex) = 0$. Assim, subtraindo as duas últimas equações, obtemos $2e(e(ex)) - 3e(ex) + ex = 0$, o que nos leva à identidade desejada.

Proposição 6.2 *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre o corpo F e $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente não nulo e . Se $\tilde{\omega} : M^*(A) \rightarrow F$ é um homomorfismo tal que $\tilde{\omega}(L_e) = 1$ então $\ker(\tilde{\omega}) = (N : A)$ e, conseqüentemente, $\tilde{\omega}$ é o caracter de $M^*(A)$ induzido por ω .*

Demonstração Com a identidade $2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0$, podemos verificar que $2L_e^2 - L_e$ é um idempotente: $(2L_e^2 - L_e)^2 = 4L_e^4 - 4L_e^3 + L_e^2 = 6L_e^3 - 2L_e^2 - 4L_e^3 + L_e^2 = 2L_e^3 - L_e^2 = 3L_e^2 - L_e - L_e^2 = 2L_e^2 - L_e$. Além disso, $\tilde{\omega}(2L_e^2 - L_e) = 2\tilde{\omega}(L_e)^2 - \tilde{\omega}(L_e) = 1$. Logo, $2L_e^2 - L_e$ é um idempotente de peso 1 na álgebra básica $(M^*(A), \tilde{\omega})$. Portanto, $M^*(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \ker(\tilde{\omega})$. Como $(2L_e^2 - L_e)(e) = e$, temos que $2L_e^2 - L_e \notin (N : A)$. Assim, temos outra decomposição para $M^*(A)$: $M^*(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus (N : A)$. Para cada $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, temos $(2L_e^2 - L_e)(u + z) = 2L_e(\frac{1}{2}u) - \frac{1}{2}u = 0$, ou seja, $(2L_e^2 - L_e)(N) = 0$. Conseqüentemente, $(2L_e^2 - L_e) \circ \varphi = 0$, para todo $\varphi \in (N : A)$. Aplicando a função peso $\tilde{\omega}$ nessa identidade, obtemos $\tilde{\omega}(2L_e^2 - L_e)\tilde{\omega}(\varphi) = 0$, isto é, $\tilde{\omega}(\varphi) = 0$. Dessa maneira, mostramos que $(N : A) \subseteq \ker(\tilde{\omega})$. Como esses subespaços têm codimensão 1 em $M^*(A)$, resulta que $(N : A) = \ker(\tilde{\omega})$ e, assim, $\tilde{\omega}$ é o caracter induzido por ω . ■

Corolário *Para toda álgebra de Bernstein, existe um único homomorfismo $\bar{\omega} : M^*(A) \rightarrow F$ tal que $\bar{\omega}(L_e) = 1$.* ■

6.2 Decomposição de Peirce

Veremos, a seguir, que $(M^*(A), \bar{\omega})$ tem uma decomposição de Peirce relativa ao idempotente $2L_e^2 - L_e$.

Proposição 6.3 *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre o corpo F e $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e . Então $M^*(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{Z}$, onde*

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \{\sigma \in (N : A) : \sigma \circ (2L_e^2 - L_e) = \sigma\}, \\ \tilde{Z} &= \{\sigma \in (N : A) : \sigma \circ (2L_e^2 - L_e) = 0\}.\end{aligned}$$

Demonstração Seja Φ o operador linear de $(N : A)$ definido por $\Phi(\sigma) = \sigma \circ (2L_e^2 - L_e)$, para todo $\sigma \in (N : A)$. Como $2L_e^2 - L_e$ é um idempotente, resulta que Φ é uma projeção ($\Phi^2 = \Phi$). Denotando por $\tilde{U}$ e $\tilde{Z}$ a imagem e o núcleo de Φ , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \{\sigma \in (N : A) : \sigma \circ (2L_e^2 - L_e) = \sigma\}, \\ \tilde{Z} &= \{\sigma \in (N : A) : \sigma \circ (2L_e^2 - L_e) = 0\}\end{aligned}$$

e $M^*(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{Z}$. ■

Podemos dar outra caracterização para os subespaços $\tilde{U}$ e $\tilde{Z}$ que aparecem na decomposição de $M^*(A)$ relativa ao idempotente $2L_e^2 - L_e$.

Proposição 6.4 *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre o corpo F , $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e e $M^*(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{Z}$. Se $\sigma \in (N : A)$ então:*

- (a) $\sigma \in \tilde{Z}$ se e somente se $\sigma(e) = 0$;
- (b) $\sigma \in \tilde{U}$ se e somente se $\sigma(N) = 0$;
- (c) Se $\mathcal{I}$ é um ideal bilateral de $M^*(A)$ contido em $(N : A)$ então $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap \tilde{U}) \oplus (\mathcal{I} \cap \tilde{Z})$;
- (d) $\tilde{U}^2 = 0$, $\tilde{U}\tilde{Z} = 0$, $\tilde{Z}\tilde{U} \subseteq \tilde{U}$ e $\tilde{Z}^2 \subseteq \tilde{Z}$;
- (e) $\tilde{U}$ é um ideal bilateral de $M^*(A)$ e $\tilde{Z}$ é um ideal à esquerda de $M^*(A)$.

Demonstração Como $(2L_e^2 - L_e)(N) = 0$ e $(2L_e^2 - L_e)(e) = e$, temos que $\sigma \circ (2L_e^2 - L_e)(N) = 0$ e $\sigma \circ (2L_e^2 - L_e)(e) = \sigma(e)$. Logo, temos:

(a) $\sigma \in \tilde{Z}$ se e somente se $\sigma \circ (2L_e^2 - L_e) = 0$, ou seja, se e somente se $\sigma(e) = 0$.

(b) $\sigma \in \tilde{U}$ se e somente se $\sigma \circ (2L_e^2 - L_e) = \sigma$, isto é, se e somente se $\sigma(N) = \sigma \circ (2L_e^2 - L_e)(N) = 0$.

A parte (c) é consequência da Observação 1.2.

(d) Pela caracterização de $\tilde{U}$ e $\tilde{Z}$ dada em (a) e (b) acima, temos que $M^*(A)\tilde{U} \subseteq \tilde{U}$ e $M^*(A)\tilde{Z} \subseteq \tilde{Z}$, em particular, $\tilde{Z}\tilde{U} \subseteq \tilde{U}$ e $\tilde{Z}^2 \subseteq \tilde{Z}$. Tomando $\tau \in (N : A)$ arbitrário, como $\tau(A) \subseteq N$, resulta pela parte (b) acima que $\tilde{U}(N : A) = 0$. Assim, $\tilde{U}^2 = 0$ e $\tilde{U}\tilde{Z} = 0$.

(e) Observando que $\sigma \circ (2L_e^2 - L_e) = \sigma$, para todo $\sigma \in \tilde{U}$, e pelas relações obtidas em (d) temos que $\tilde{U}$ é ideal bilateral de $M^*(A)$ e $\tilde{Z}$ é ideal à esquerda de $M^*(A)$. ■

Como a estrutura da álgebra $M^*(A)$ depende da multiplicação dos elementos de A , duas álgebras de mesma dimensão podem produzir álgebras de multiplicações com dimensões distintas. Do mesmo modo, não é de se esperar que a dimensão dos subespaços $\tilde{U}$ e $\tilde{Z}$ dependam apenas do tipo da álgebra A ou do idempotente e . No entanto, veremos que se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein nuclear, a dimensão de $\tilde{U}$ está fortemente relacionada com a dimensão da álgebra A . Com o objetivo de demonstrar esse resultado, provaremos o seguinte lema:

Lema 6.1 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ relativa ao idempotente e e seja $M^*(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{Z}$ a correspondente decomposição de Peirce de $M^*(A)$. Então:*

(a) *Dado $u \in U_e$, existe $\varphi_u \in \tilde{U}$ tal que $\varphi_u(e) = u$.*

(b) *Dados $u_1, u_2 \in U_e$, existe $\varphi_{u_1 u_2} \in \tilde{U}$ tal que $\varphi_{u_1 u_2}(e) = u_1 u_2$.*

Demonstração Basta tomar $\varphi_u = 2L_e \circ L_u + 2L_u \circ L_e - L_u$ e $\varphi_{u_1 u_2} = 2L_{u_1 u_2} \circ L_e + L_{u_2} \circ L_{u_1} + L_{u_1} \circ L_{u_2}$. O resultado é consequência da identidade (3.23) e da primeira identidade de (3.26). ■

Corolário *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein nuclear então para cada $x \in N = \ker(\omega)$*

existe $\varphi_x \in \tilde{U}$ tal que $\varphi_x(e) = x$.

Demonstração Todo $x \in N$ pode ser decomposto na forma $x = u + \sum_i u_i x_i$, onde $u, u_i, x_i \in U_e$. Assim, basta tomar $\varphi_x = \varphi_u + \sum_i \varphi_{u_i x_i}$. ■

Teorema 6.1 *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein nuclear com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2$ e $M^*(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{Z}$ a decomposição de Peirce de $M^*(A)$ relativa ao idempotente $2L_e^2 - L_e$. Então:*

- (a) *A aplicação $\Psi : N \longrightarrow \tilde{U}$ que a cada $n \in N$ associa o operador φ_n definido no corolário anterior é linear bijetora e, portanto, $\dim(N) = \dim(\tilde{U})$.*
- (b) *se $\mathcal{I}$ é um ideal bilateral de $M^*(A)$ contido em $(N : A)$ então $\mathcal{I}(A) = \Psi^{-1}(\mathcal{I} \cap \tilde{U})$.*

Demonstração (a) Para cada $x \in N$, definimos $\Psi(x) = \varphi_x$, onde φ_x é o operador definido no corolário anterior. Observamos que, de fato, a imagem de Ψ está contida em $\tilde{U}$. Como os operadores de $\tilde{U}$ se anulam em N , eles estão bem determinados com o valor que assumem no idempotente e . Assim, para cada $\tau \in \tilde{U}$, temos $\Psi(\tau(e)) = \varphi_{\tau(e)} = \tau$, isto é, Ψ é sobrejetora. Para verificar que Ψ é linear, basta observar que $\varphi_{\lambda x + y}(e) = \lambda x + y = \lambda \varphi_x(e) + \varphi_y(e)$ e, portanto, $\Psi(\lambda x + y) = \lambda \Psi(x) + \Psi(y)$, para todo $x, y \in N$ e $\lambda \in F$. Por fim, se $\Psi(x) = 0$ então $x = \varphi_x(e) = 0$, ou seja, Ψ é injetora.

(b) Devemos mostrar que $\Psi^{-1}(\mathcal{I} \cap \tilde{U})$ é o ideal de A gerado por $\{\sigma(a) : \sigma \in \mathcal{I} \text{ e } a \in A\}$. Para cada $\sigma \in \mathcal{I}$ e $a \in A$, decompondo $a = \alpha e + n$, com $\alpha \in F$ e $n \in N$, temos $\sigma L_{\alpha e} + \sigma \varphi_n \in \mathcal{I}$ e $(\sigma L_{\alpha e} + \sigma \varphi_n)(e) = \sigma(\alpha e + n) = \sigma(a)$. Assim, $\mathcal{I}(A)$ é o ideal gerado por $\{\sigma(e) : \sigma \in \mathcal{I}\}$. Como $\mathcal{I} \subseteq (N : A) = \tilde{U} \oplus \tilde{Z}$, temos $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap \tilde{U}) \oplus (\mathcal{I} \cap \tilde{Z})$, pela Proposição 6.4 (c). Logo, para cada $\sigma \in \mathcal{I}$, existe $\tau \in \tilde{U}$ e $\eta \in \tilde{Z}$ tal que $\sigma = \tau + \eta$. Portanto, $\sigma(e) = \tau(e) + \eta(e) = \tau(e) = \Psi^{-1}(\tau)$, ou seja, $\mathcal{I}(A)$ coincide com o ideal gerado por $\Psi^{-1}(\mathcal{I} \cap \tilde{U})$. Resta mostrar que $\Psi^{-1}(\mathcal{I} \cap \tilde{U})$ é um ideal de A . Observe que $\Psi^{-1}(\mathcal{I} \cap \tilde{U}) \subseteq N$. Dados $x, y \in \Psi^{-1}(\mathcal{I} \cap \tilde{U})$ e $\lambda \in F$, temos $\lambda x + y = \Psi^{-1}(\varphi_{\lambda x + y}) = \Psi^{-1}(\lambda \varphi_x + \varphi_y)$. Além disso, se a é um elemento arbitrário de A , temos $xa = ax = \Psi^{-1}(\varphi_{ax}) = \Psi^{-1}(L_a \varphi_x)$. Como $\mathcal{I}$ e $\tilde{U}$ são ideais bilaterais de $M^*(A)$, resulta que $\lambda \varphi_x + \varphi_y, L_a \varphi_x \in \mathcal{I} \cap \tilde{U}$ e, assim,

$$\lambda x + y, xa, ax \in \Psi^{-1}(\mathcal{I} \cap \tilde{U}).$$

■

Corolário Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein nuclear de dimensão finita de tipo $(1 + r, s)$ então os números $\tilde{r} = r + s = \dim(\tilde{U})$ e $\tilde{s} = \dim(\tilde{Z})$ são invariantes de $M^*(A)$ e, portanto, invariantes de A . ■

Existe uma relação entre a decomponibilidade de (A, ω) e a decomposição de $\tilde{U}$ em soma direta de ideais de $M^*(A)$.

Proposição 6.5 Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein nuclear com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2$. São equivalentes:

(a) A é decomponível;

(b) Existem ideais bilaterais não nulos $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ de $M^*(A)$ tais que $\tilde{U} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b): Sejam I_1 e I_2 ideais não nulos de A tais que $N = I_1 \oplus I_2$. Como Ψ é isomorfismo entre $\tilde{U}$ e N , temos $\tilde{U} = \Psi(N) = \Psi(I_1) \oplus \Psi(I_2)$. Além disso, $\Psi(I_1) = \tilde{U} \cap (I_1 : A)$ e $\Psi(I_2) = \tilde{U} \cap (I_2 : A)$ são ideais de $M^*(A)$. Assim, basta tomar $\mathcal{I}_1 = \Psi(I_1)$ e $\mathcal{I}_2 = \Psi(I_2)$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Se $\tilde{U} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ com $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ ideais bilaterais não nulos de $M^*(A)$ então, pela parte (b) do Teorema 6.1, $N = \Psi^{-1}(\mathcal{I}_1) \oplus \Psi^{-1}(\mathcal{I}_2) = \mathcal{I}_1(A) \oplus \mathcal{I}_2(A)$. Logo, (A, ω) é decomponível. ■

Corolário Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein nuclear e suponha que $(M^*(A), \bar{\omega})$ é uma álgebra bária decomponível. Sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ ideais bilaterais de $M^*(A)$ tais que $(N : A) = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$. Se $\mathcal{I}_1 \cap \tilde{U} \neq 0$ e $\mathcal{I}_2 \cap \tilde{U} \neq 0$ então (A, ω) é decomponível.

Demonstração Temos que $\tilde{U} = (\mathcal{I}_1 \cap \tilde{U}) \oplus (\mathcal{I}_2 \cap \tilde{U})$ é soma direta de ideais bilaterais não triviais de $M^*(A)$. O resultado segue como consequência da Proposição 6.5. ■

6.3 A dimensão da álgebra de multiplicações

Dada uma álgebra de Bernstein nuclear (A, ω) , vimos que a dimensão do subespaço $\tilde{U}$ de $M^*(A)$ está bem relacionada com a dimensão da álgebra A . Logo, o problema de obter

a dimensão da álgebra $M^*(A)$ fica reduzido ao estudo do subespaço $\tilde{Z}$. Mesmo assim, esse estudo parece ser bastante complexo. Nosso próximo passo será tentar estimar um valor mínimo para a dimensão de $M^*(A)$, quando A é uma álgebra de Bernstein nuclear.

Proposição 6.6 *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein nuclear de tipo $(1 + r, s)$ e k a dimensão do ideal $L = \{u \in U_e : uU_e = 0\}$. Se $A = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2$ é a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente não nulo e e $M^*(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{Z}$ então $\dim(\tilde{Z}) \geq r - k + 1$ e, conseqüentemente, $\dim(M^*(A)) \geq 2 + 2r + s - k = \dim(A) + 1 + r - k$.*

Demonstração Considere a aplicação $\phi : U \longrightarrow \tilde{Z}$ definida por $\phi(u) = L_u - 2L_e \circ L_u$. Assim definida, temos de fato que $\text{Im}(\phi) \subseteq \tilde{Z}$, pois $(L_u - 2L_e \circ L_u)(e) = \frac{1}{2}u - 2L_e(\frac{1}{2}u) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u = 0$. Observamos ainda que ϕ é linear e $\ker(\phi) = \{u \in U_e : L_u - 2L_e \circ L_u = 0\} = \{u \in U_e : uu' - 2e(uu') = uu' = 0, \text{ para todo } u' \in U_e\} = L$. Assim, a imagem de ϕ em $\tilde{Z}$ tem dimensão $r - k$. Além disso, se $L_e^2 - L_e \in \text{Im}(\phi)$, isto é, $L_e^2 - L_e = \sum_i (L_{u_i} - 2L_e \circ L_{u_i})$ então, para todo $u \in U_e$, teríamos $-\frac{1}{4}u = (L_e^2 - L_e)(u) = \sum_i (L_{u_i} - 2L_e \circ L_{u_i})(u) = \sum_i u_i u \in U_e^2$, o que é um absurdo. Portanto, $\dim(\tilde{Z}) \geq r - k + 1$. Como $\dim(\tilde{U}) = \dim(N) = r + s$, resulta que $\dim(M^*(A)) \geq 2 + 2r + s - k = \dim(A) + 1 + r - k$. ■

Corolário *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein nuclear de tipo $(1 + r, s)$ com $s \geq 1$. Então $\dim(M^*(A)) \geq r + s + 3 = 2 + \dim(A)$.*

Demonstração Se $s \geq 1$ então $L \neq U_e$. Logo, $\dim(L) = k < r$. Pela proposição anterior, $\dim(M^*(A)) \geq \dim(A) + 1 + r - k \geq \dim(A) + 2$. ■

Quando (A, ω) é uma álgebra de Bernstein nuclear de tipo $(1 + n, 0)$, isto é, $A = G(n + 1, 2)$ é a álgebra gamética para herança mendeliana simples, podemos determinar a dimensão de $M^*(A)$.

Proposição 6.7 *Sejam $(A, \omega) = G(n + 1, 2)$, $e \in A$ um idempotente não nulo e $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de $U_e = \ker(\omega)$. Então $M^*(A)$ é o espaço vetorial livremente gerado pelos operadores $2L_e^2 - L_e$, $L_e^2 - L_e$ e L_{u_i} ($i = 1, \dots, n$). Assim, $\dim(M^*(A)) = n + 2 = \dim(A) + 1$.*

Demonstração Observemos inicialmente que os operadores $2L_e^2 - L_e$, $L_e^2 - L_e$ e L_{u_i} ($i = 1, \dots, n$) formam um conjunto linearmente independente em $M^*(A)$. De fato, se

$\alpha(2L_e^2 - L_e) + \beta(L_e^2 - L_e) + \delta_1 L_{u_1} + \cdots + \delta_n L_{u_n} = 0$, calculando em e resulta $2\alpha e + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_n u_n = 0$, ou seja, $\alpha = \delta_1 = \cdots = \delta_n = 0$ e, conseqüentemente, resulta que também $\beta = 0$. Vamos provar que esses operadores geram $M^*(A)$. Como $N^2 = U_e^2 = 0$, temos que $2L_u = \varphi_u$, para todo $u \in U_e$, onde φ_u é o operador definido no Lema 6.1. Assim, $L_u L_x = 0$, $(2L_e^2 - L_e) \circ L_u = 0$, $L_u \circ (2L_e^2 - L_e) = L_u$, $(L_e - L_e^2) \circ L_u = \frac{1}{4}L_u$ e $L_u \circ (L_e - L_e^2) = 0$, para todo $u, x \in U_e$. Temos ainda, $(L_e^2 - L_e)(e) = 0$. Portanto, esse operador pertence a $\tilde{Z}$. Dessa maneira, observando também que $(2L_e^2 - L_e)(N) = 0$, concluímos que $(L_e^2 - L_e) \circ (2L_e^2 - L_e) = 0 = (2L_e^2 - L_e) \circ (L_e^2 - L_e)$. Por fim, como $(L_e - L_e^2)^2 = \frac{1}{4}(L_e - L_e^2)$, $2L_e^2 - L_e$ é idempotente, $L_e = 2L_e^2 - L_e - 2(L_e^2 - L_e)$ e todo $\sigma \in M^*(A)$ se decompõe na forma

$$\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \beta(L_e^2 - L_e) + T, \text{ com } T \in \tilde{N}, \quad (6.2)$$

temos que os operadores dados formam uma base para $M^*(A)$ e, portanto, $\dim(M^*(A)) = n + 2 = \dim(A) + 1$. ■

6.4 Caracteres da álgebra de multiplicações

Como $(L_e - L_e^2)^2 = \frac{1}{4}(L_e - L_e^2)$, temos que $4L_e - 4L_e^2$ é outro idempotente em $M^*(A)$ e $\bar{\omega}(4L_e - 4L_e^2) = 0$. Logo, $4L_e - 4L_e^2$ é um idempotente de peso 0 na álgebra bária $(M^*(A), \bar{\omega})$. Poderíamos questionar se existe algum caracter $\tilde{\omega}$ de $M^*(A)$ tal que $4L_e - 4L_e^2$ tem peso 1 em $(M^*(A), \tilde{\omega})$ ou ainda, quantos e quais são os caracteres de $M^*(A)$, quando (A, ω) é uma álgebra de Bernstein. Se e é um idempotente não nulo em uma álgebra de Bernstein (A, ω) , temos que $2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0$. Dessa maneira, se $\tilde{\omega} : M^*(A) \rightarrow F$ é um homomorfismo de F -álgebras, devemos ter $2\tilde{\omega}(L_e)^3 - 3\tilde{\omega}(L_e)^2 + \tilde{\omega}(L_e) = 0$, ou seja, $\tilde{\omega}(L_e) = 1$, $\tilde{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$ ou $\tilde{\omega}(L_e) = 0$. Pelo Corolário da Proposição 6.2, o caracter $\bar{\omega}$ induzido por ω é o único homomorfismo verificando $\bar{\omega}(L_e) = 1$. Vamos analisar os casos onde $\tilde{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$ ou $\tilde{\omega}(L_e) = 0$.

Proposição 6.8 *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein, $e \in A$ um idempotente não nulo e $\tilde{\omega} : M^*(A) \rightarrow F$ um homomorfismo tal que $\tilde{\omega}(L_e) = 0$. Então $\tilde{\omega} = 0$.*

Demonstração Como $\varphi_u = 2L_e \circ L_u + 2L_u \circ L_e - L_u$ (ver Lema 6.1), temos $\tilde{\omega}(\varphi_u) = -\tilde{\omega}(L_u)$. Observando que $\varphi_u \circ L_u = 0$, resulta que $-\tilde{\omega}(L_u)^2 = 0$, ou seja, $\tilde{\omega}(L_u) = 0$, para

todo $u \in U_e$. Além disso, $2L_e \circ L_z = L_z$, para $z \in Z_e$. Logo, $\tilde{\omega}(L_z) = 0$ e, assim, $\tilde{\omega} = 0$. ■

Para verificar a existência de um caracter ω^* de $M^*(A)$ com $\omega^*(L_e) = \frac{1}{2}$, observamos que $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ é um ideal bilateral de $M^*(A)$, pois $\tilde{N}$ é ideal bilateral de $M^*(A)$ e $2L_e^2 - L_e$ é um idempotente. Como todo $\sigma \in M^*(A)$ se decompõe na forma (6.2), a codimensão de $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ em $M^*(A)$ é no máximo 1. Observamos ainda, que $L_e^2 - L_e \notin F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$, pois nesse caso, teríamos $L_e = 2L_e^2 - L_e - 2(L_e^2 - L_e) \in F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$, o que é absurdo (se $L_e = \alpha(2L_e^2 - L_e) + T$, com $T \in \tilde{N}$ então $L_e - \alpha(2L_e^2 - L_e) = T$. Calculando em e , teríamos $(1 - \alpha)e = T(e) \in N$, ou seja, $\alpha = 1$ e, assim, resultaria que $-2L_e^2 \in \tilde{N}$). Dessa maneira, concluímos que $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ tem codimensão 1 em $M^*(A)$ e não contém $M^*(A)^2$, pois $(4L_e - 4L_e^2)^2 = (4L_e - 4L_e^2) \notin F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$. Pela Proposição 1.1, existe um único caracter ω^* de $M^*(A)$ tal que $\ker(\omega^*) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$. Como $\omega^*(2L_e^2 - L_e) = 0$, e $L_e \notin \ker(\omega^*)$, temos que $\omega^*(L_e) = \frac{1}{2}$.

Supondo que (A, ω) é uma álgebra de Bernstein nuclear, podemos garantir a unicidade do caracter que toma o valor $\frac{1}{2}$ em L_e .

Proposição 6.9 *Sejam $A = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2$ a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein nuclear e $\tilde{\omega} : M^*(A) \rightarrow F$ um homomorfismo tal que $\tilde{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$. Então $\tilde{\omega}(L_n) = 0$, para todo $n \in N$ e, portanto, $\tilde{\omega}$ é o homomorfismo ω^* definido acima.*

Demonstração Consideremos novamente os operadores $\varphi_u = 2L_e \circ L_u + 2L_u \circ L_e - L_u$ e $\varphi_{ux} = 2L_{ux} \circ L_e + L_u \circ L_x + L_x \circ L_u$, onde $u, x \in U_e$. Como $\tilde{\omega}(L_e) = \frac{1}{2}$, temos $\tilde{\omega}(\varphi_u) = \tilde{\omega}(L_u) + \tilde{\omega}(L_u) - \tilde{\omega}(L_u) = \tilde{\omega}(L_u)$. Observando que $\varphi_u \circ L_u = 0$, concluímos que $\tilde{\omega}(L_u) = 0$. Assim, aplicando $\tilde{\omega}$ no operador φ_{ux} , obtemos $\tilde{\omega}(\varphi_{ux}) = \tilde{\omega}(L_{ux})$. Dessa maneira, como $\varphi_{ux} \circ L_{ux} = 0$, resulta $\tilde{\omega}(L_{ux}) = 0$. Conseqüentemente, $\tilde{\omega}(L_n) = 0$, para todo $n \in N$ e, portanto, $\ker(\tilde{\omega}) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$. Logo, $\tilde{\omega} = \omega^*$. ■

Em resumo obtivemos exatamente dois homomorfismos não nulos de $M^*(A)$ em F , quando A é nuclear. A questão parece ser bem mais complexa se A não é nuclear. Por exemplo, se A é excepcional de tipo $(1 + r, s)$ com $s \geq 1$.

6.5 As álgebras de multiplicações reduzidas

Dada uma álgebra de Bernstein (A, ω) vimos que a álgebra $M^*(A)$ admite dois caracteres, denotados nas seções anteriores por $\bar{\omega}$ e ω^* (no caso das álgebras de Bernstein nucleares, vimos que estes são os únicos caracteres de $M^*(A)$). Observando que $F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}$ e $F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}$ são subálgebras báricas de $(M^*(A), \bar{\omega})$ e $(M^*(A), \omega^*)$, respectivamente, podemos considerar as álgebras báricas $(F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}, \bar{\omega})$ e $(F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}, \omega^*)$. Estas álgebras serão denominadas *álgebras de multiplicações reduzidas* de A . Nesta seção, vamos estudar algumas relações entre a álgebra (A, ω) e sua reduzida $(F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{N}, \bar{\omega})$. Denotaremos essa álgebra bárica por $M_0^*(A)$.

Veremos, inicialmente, como se comporta a nilpotência do núcleo.

Proposição 6.10 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein. Considere sua reduzida $M_0^*(A)$ definida acima. Então $N = \ker(\omega)$ é nilpotente se e somente se $\tilde{N}$ é nilpotente.*

Demonstração Como a álgebra envolvente $E(N)$ (ver Capítulo 4, página 71) está contida em $\tilde{N}$, temos pelo Lema 4.4, que se $\tilde{N}$ é nilpotente então o mesmo ocorre com N . Suponha agora, que N é nilpotente e seja k seu índice de nilpotência. Como os elementos de $\tilde{N}$ são somas finitas de operadores do tipo $L_{y_1} \circ \dots \circ L_{y_k}$, onde pelo menos um y_i está em N , temos que $T(a) \in N$ e $T(n) \in N^r$, para todo $T \in \tilde{N}$, $a \in A$, $n \in N^{r-1}$ e $r \geq 1$. Dessa maneira, se $T_1, \dots, T_k \in \tilde{N}$ então $T_1 \circ \dots \circ T_k = 0$, ou seja, $\tilde{N}$ é nilpotente. ■

Vamos, a seguir, estudar a relação entre a decomponibilidade dessas álgebras. Observamos que dado um ideal I de A , o conjunto $(I : A_0) = \{\tau \in M_0^*(A) : \tau(A) \subseteq I\}$ é um ideal bilateral de $M_0^*(A)$. Além disso, se $I \subseteq \ker(\omega)$, observando que $(2L_e^2 - L_e)(e) = e$ e $T(e) \in N$, para todo $T \in \tilde{N}$, resulta que $(I : A_0) = \{\tau \in \tilde{N} : \tau(A) \subseteq I\}$. Dessa maneira, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 6.2 *Suponha que (A, ω) é uma álgebra de Bernstein decomponível. Sejam I_1 e I_2 ideais não triviais de A tais que $N = I_1 \oplus I_2$. Suponha, além disso, que I_1 e I_2 não estão contidos em $\text{Ann}(A)$. Então $M_0^*(A)$ também é decomponível.*

Demonstração Considere os ideais $(I_1 : A_0)$ e $(I_2 : A_0)$. Vimos que $(I_1 : A_0) = \{\tau \in \tilde{N} : \tau(A) \subseteq I_1\}$ e $(I_2 : A_0) = \{\tau \in \tilde{N} : \tau(A) \subseteq I_2\}$. Como I_1 não está

contido em $\text{Ann}(A)$, existe $u_1 \in I_1$ tal que $u_1 A \neq 0$, ou seja, $L_{u_1} \neq 0$. Observando que $L_{u_1} \in (I_1 : A_0)$, temos $(I_1 : A_0) \neq 0$. Do mesmo modo, $(I_2 : A_0) \neq 0$. Vamos mostrar que $\tilde{N} = (I_1 : A_0) \oplus (I_2 : A_0)$. Seja $\tau \in \tilde{N}$. Então $\tau = \sum_j T_j$, onde cada T_j tem a forma $L_{y_1} \circ \dots \circ L_{y_k}$, com algum $y_i \in N$. Decompondo esse y_i como $y_i = m_i + n_i$ com $m_i \in I_1$ e $n_i \in I_2$, temos $T_j = L_{y_1} \circ \dots \circ L_{y_{i-1}} \circ L_{m_i+n_i} \circ \dots \circ L_{y_k} = L_{y_1} \circ \dots \circ L_{m_i} \circ \dots \circ L_{y_k} + L_{y_1} \circ \dots \circ L_{n_i} \circ \dots \circ L_{y_k}$. Como $m_i \in I_1$ e $n_i \in I_2$, temos que $L_{y_1} \circ \dots \circ L_{m_i} \circ \dots \circ L_{y_k} \in (I_1 : A_0)$ e $L_{y_1} \circ \dots \circ L_{n_i} \circ \dots \circ L_{y_k} \in (I_2 : A_0)$. Assim, podemos decompor $\tau = \tau_1 + \tau_2$, onde $\tau_1 \in (I_1 : A_0)$ e $\tau_2 \in (I_2 : A_0)$, ou seja, $\tilde{N} = (I_1 : A_0) + (I_2 : A_0)$. Além disso, se $\tau \in (I_1 : A_0) \cap (I_2 : A_0)$, teríamos $\tau(A) \subseteq I_1 \cap I_2 = 0$ e, portanto, $\tau = 0$. Dessa maneira, mostramos que $\tilde{N} = (I_1 : A_0) \oplus (I_2 : A_0)$. ■

Como no caso da álgebra de multiplicações $M^*(A)$, a decomponibilidade de $M_0^*(A)$ também nos fornece informação sobre a decomponibilidade de (A, ω) .

Teorema 6.3 *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein nuclear. Suponha que existem ideais bilaterais $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ de $M_0^*(A)$ tais que $\ker(\bar{\omega}) = \tilde{N} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$. Se $\mathcal{I}_1(A) \neq N$ e $\mathcal{I}_2(A) \neq N$ então (A, ω) é decomponível.*

Demonstração Temos $\tilde{U} = (\mathcal{I}_1 \cap \tilde{U}) \oplus (\mathcal{I}_2 \cap \tilde{U})$. Assim, pelo Teorema 6.1, $N = \Psi^{-1}(\tilde{U}) = \Psi^{-1}(\mathcal{I}_1 \cap \tilde{U}) \oplus \Psi^{-1}(\mathcal{I}_2 \cap \tilde{U}) = \mathcal{I}_1(A) \oplus \mathcal{I}_2(A)$. Como $\mathcal{I}_1(A) \neq N \neq \mathcal{I}_2(A)$, concluímos que (A, ω) é decomponível. ■

O estudo da álgebra $M^*(A)$, onde A é Bernstein, parece ser um instrumento poderoso para um melhor conhecimento destas álgebras. O assunto está apenas começando a ser estudado.

Bibliografia

- [1] CORREA I., *Identidades polinomiais em álgebras de Bernstein*, Tese de Doutorado, IME-USP (1993).
- [2] CORTÉS, T. AND MONTANER, F., On the structure of Bernstein algebras (preprint).
- [3] COSTA, R., On the derivations of gametic algebras for polyploidy with multiple alleles, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, (2) 13: 69-81 (1982).
- [4] COSTA, R. AND GUZZO JR, H., Indecomposable baric algebras, *Linear Algebra and its Appl.*, 183: 223-236 (1993).
- [5] COSTA, R. AND GUZZO JR, H., Indecomposable baric algebras. II, *Linear Algebra and its Appl.*, 196: 233-242 (1994).
- [6] COSTA, R.; NEUBURG, M. AND SUAZO, A., On indecomposable Bernstein algebras (submitted to *Proc. Edinb. Math. Soc.*).
- [7] COSTA, R. AND SUAZO, A., The transformation algebra of a Bernstein algebra (preprint).
- [8] FINSTON, R.D., On multiplication algebras, *Trans. Am. Math. Soc.* (2) 293: 807-818 (1986).
- [9] GONSHOR, H., Special train algebras arising in genetics, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, (2) 12: 41-53 (1960).
- [10] GONZALEZ, S. AND MARTINEZ, C., On Bernstein algebras, *Non-Associative Algebra and its Applications* (editor: Gonzalez, S.), 164-170, Mathematics and its Applications 303, Kluwer Academic Publishers (1994).

- [11] GRISHKOV, A.N., On the genetic property of Bernstein algebras, *Soviet. Math. Dokl.*, (3) 35: 489-492 (1987).
- [12] GUZZO JR, H., *Contribuições à teoria das álgebras não associativas*, Tese de Doutorado, IME-USP (1992).
- [13] HENTZEL, I.R. AND PERESI, L.A., Semi-prime Bernstein algebras, *Arch. Math.* 52: 539-543 (1989).
- [14] HENTZEL ET AL, Solvability of the ideal of all weight zero elements in Bernstein algebras, *Comm. in Algebra*, (9) 22: 3265-3275 (1994).
- [15] HOLGATE, P., Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc.* (2) 9: 613-623 (1975).
- [16] HOLGATE, P., Canonical multiplication for linked loci, *Linear Algebra and its Appl.*, 26: 281-286 (1979).
- [17] HOLGATE, P., Three aspects of genetic algebra. Lectures notes, XI Escola de Álgebra (1990).
- [18] JACOBSON, N., *Lectures in Abstract Algebra*, vol I, Van Nostrand (1966).
- [19] LYUBICH, Y.I., *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics 22, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1992).
- [20] MICALI, A. AND OUATTARA, M., Structure des algèbres de Bernstein, *Linear Algebra and its Appl.* (to appear).
- [21] ODONI, R.W.K. AND STRATON A.E., Structure of Bernstein algebras, *Algèbres Génétiques*, ed. A. Micali, Hermann, Paris (1987).
- [22] PERESI, L.A., Nilpotence in Bernstein algebras, *Arch. Math.* 56: 437-439 (1991).
- [23] PRITCHARD, F.L., The radical and the multiplication algebra of a non-associative K -algebra, *Algebras, Groups and Geometries* 11: 329-345 (1994).
- [24] SCHAFER, R.D., *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York (1966).

- [25] WALCHER, S., Bernstein algebras which are Jordan algebras, *Arch. Math.*, 50: 218-222 (1988).
- [26] WÖRZ-BUSEKROS, A., *Algebras in Genetics*, Lectures Notes in Biomathematics 36, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1980).
- [27] WÖRZ-BUSEKROS, A., Bernstein algebras, *Arch. Math.*, 48: 388-398 (1987).
- [28] ZHEVLAKOV ET AL, *Rings That Are Nearly Associative*, Academic Press, New York (1982).

Álgebras de Bernstein: resultados recentes

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Lucia Satie Ikemoto
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 2 de junho de 1995.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Luiz Antônio Peresi - IME - USP
- Prof. Dr. Antônio Paques - IMECC - UNICAMP.