ESPAÇOS INICIALMENTE κ -COMPACTOS

Stavros Christodoulou

TESE DEFENDIDA
NO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Geral**
Orientador: **Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas**

– São Paulo, dezembro de 1994 –

ESPAÇOS INICIALMENTE κ -COMPACTOS

Este exemplar corresponde à redação
da tese devidamente corrigida
e apresentada por Stravros Cristodoulou
e aprovada pela Comissão Julgadora

São Paulo, 16 de dezembro de 1994

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas (orientadora)
- Prof. Dr. Francisco Miraglia Neto
- Prof. Dr. Newton Affonso Carneiro da Costa
- Prof. Dr. Antonio Mario Antunes Sette
- Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl

Resumo

Este trabalho apresenta algumas generalizações para espaços inicialmente κ -compactos de teoremas originalmente enunciados para espaços compactos; e exhibe alguns contra-exemplos para situações em que tais generalizações não são possíveis. Generaliza também, quanto ao caráter, um resultado enunciado para espaços 1^{a} -enumeráveis. Finalmente mostra que espaços T_2 inicialmente κ -compactos são compactos nos casos em que $\kappa = 2^{t(X)}$ ou $\kappa = 2^{F(X)}$ ou $\kappa = 2^{s(X)}$ ou $\kappa = 2^{\chi(X)}$ ou $\kappa = 2^{\psi_c(X)}$.

Abstract

This work presents some generalizations to initially κ -compact spaces of theorems originally stated for compact spaces; and shows some counter-examples where such generalizations are not possible. Generalizes too, with respect to character, a result stated for first-countable spaces. Finally shows that T_2 initially κ -compact spaces are compact when $\kappa = 2^{t(X)}$ or $\kappa = 2^{F(X)}$ or $\kappa = 2^{s(X)}$ or $\kappa = 2^{\chi(X)}$ or $\kappa = 2^{\psi_c(X)}$.

*À memória de
Jacques Charles Bouchara*

Agradecimentos

À minha orientadora, Profa. Ofelia Teresa Alas, que com simplicidade e através do exemplo de seu próprio trabalho ajudou a vencer velhas inércias e desânimos.

Ao grupo de topologia: Renata, Lúcia, Artur, Cássio e Marcinha (por “adoção”), que propiciaram um excelente ambiente para o trabalho.

Aos professores: Abrão de Moraes, Galdino, Edison Farah, Newton da Costa, Jacob Zimbarg, L.H. Jacy Monteiro, R. Jones, Chico Miraglia e Iole F. Druck, que cada um deles, em algum momento, deixou sua marca.

Ao Prof. I. Juhasz, pelos seus escritos com os quais pareço ter uma grande afinidade.

Ao Prof. Chaim S. Hönig, que me substituiu na minha função de professor durante uma ‘disfonia de etiologia desconhecida’ e o fez com muita simpatia e boa vontade.

Ao pessoal da Biblioteca e do Xerox e ao Walter pelo trabalho de datilografia.

Índice

Introdução	1
Capítulo 1	
Preliminares	2
1.1 Teoria dos conjuntos	2
1.2 Topologia geral	4
1.3 Funções cardinais em topologia	6
Capítulo 2	
Generalizações e contra-exemplos	12
2.1 Algumas topologias sobre um cardinal	12
2.2 O teorema, $t(X) = F(X)$, de Arhangel'skii	25
2.3 Pontos de carácter mínimo	30
2.4 Um resultado de Juhász sobre um problema de van Douwen	32
2.5 O teorema, de extensão de funções contínuas, de Taĭmanov	36
2.6 Espaços inicialmente κ -compactos para $\kappa > \psi(X)$	38
2.7 O teorema, $t(X) = h\pi\chi(X)$, de Sapirovskii	41
Capítulo 3	
Espaços inicialmente κ -compactos para κ 'grande'	48
Referências	63

Introdução

Muitos resultados sobre espaços topológicos compactos T_2 valem para espaços inicialmente κ -compactos (para κ conveniente) e com adequadas condições de separabilidade.

No Capítulo 2 deste trabalho apresentamos algumas generalizações, para espaços inicialmente κ -compactos, de teoremas originalmente enunciados para espaços compactos e uma generalização no caráter de um espaço de um resultado enunciado para espaços l^∞ -enumeráveis. Acompanham também alguns exemplos de situações em que a generalização não é possível.

Por outro lado, se um espaço é inicialmente κ -compacto e κ é grande relativamente a outros números cardinais associados ao espaço, então o espaço é compacto.

No Capítulo 3 mostramos que para alguns valores de κ – por exemplo $\kappa = 2^{t(X)}$ ou $\kappa = 2^{\psi_c(X)}$ etc. –, se X é inicialmente κ -compacto T_2 , então X é compacto. Para isto provamos primeiro a desigualdade $\psi_c(X) \leq 2^{d(X)}$, com a qual mostramos que espaços T_2 inicialmente κ -compactos são λ -limitados para λ tal que $2^\lambda \leq \kappa$ (resultado que era conhecido para espaços T_3).

No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos e resultados conhecidos de topologia e de teoria dos conjuntos, que são usados no trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo uma breve descrição de conceitos e resultados de topologia e de teoria dos conjuntos que usaremos nos capítulos seguintes.

1.1 Teoria dos conjuntos

Estaremos trabalhando em ZFC, a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha. A referência básica é o livro de Kunen [K] (e eventualmente para alguns tópicos sobre cardinais o [Jech]).

Um *ordinal* é um conjunto transitivo e bem ordenado pela relação $\in$ (assim, um ordinal é o conjunto de todos os ordinais que lhe são menores); usaremos letras $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ etc. para designar ordinais. Um ordinal α é um *ordinal sucessor* se existe algum ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1 \stackrel{\text{def.}}{=} \beta \cup \{\beta\}$. Caso contrário α é um *ordinal limite*

Todo conjunto não vazio de ordinais A admite mínimo e supremo, que são designados por $\min A$ e $\sup A$, respectivamente.

Um *cardinal* é um ordinal que não é equipotente a nenhum ordinal menor que ele; usaremos letras κ, θ, μ etc. para designar cardinais. Dado um conjunto A , designaremos por $|A|$ a *cardinalidade* de A , que é o (único) cardinal equipotente a A . Dado um cardinal κ , designaremos por κ^+ o *cardinal sucessor* de κ , que é o menor cardinal estritamente maior que κ (sempre existe um único). Um *cardinal limite* é um cardinal que não é

sucessor de nenhum cardinal.

Dados um conjunto A e um cardinal κ (de preferência com $\kappa \leq |A|$) usaremos as seguintes notações:

$$[A]^\kappa = \{X \subseteq A : |X| = \kappa\}$$

$$[A]^{<\kappa} = \{X \subseteq A : |X| < \kappa\}$$

$$[A]^{\leq \kappa} = \{X \subseteq A : |X| \leq \kappa\}$$

ω , que é o conjunto dos números naturais, é o menor ordinal (cardinal) infinito. Para cada ordinal α , costuma-se designar por ω_α ou $\aleph_\alpha$ (lê-se *aleph-alfa*) o ' α -ésimo' cardinal infinito (começando com $\omega_0 = \omega = \aleph_0$).

Assumiremos os resultados usuais sobre aritmética ordinal e aritmética cardinal – como os do 1º capítulo de [K] ou de [Jech] –. A hipótese do contínuo (CH) é a afirmação $2^\omega = \omega_1$ e a hipótese generalizada do contínuo (GCH) é a afirmação $2^\kappa = \kappa^+$ para todo cardinal κ (exponenciação cardinal).

Dado um conjunto não vazio A , um *filtro* sobre A é um conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ (= as partes de A) tal que:

- (i) $A \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- (ii) Se $B, C \in \mathcal{F}$, então $B \cap C \in \mathcal{F}$;
- (iii) Se $B \in \mathcal{F}$ e $B \subseteq C \subseteq A$, então $C \in \mathcal{F}$.

Um *ultrafiltro* sobre A é um filtro sobre A que é maximal entre todos os filtros sobre A ; equivale a ser um filtro sobre A que satisfaz

- (iv) Para todo $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{F}$ ou $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

(indicamos por $A \setminus B$ a *diferença* dos conjuntos).

Sabe-se que se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ satisfaz a *propriedade da interseção finita* (i.e, interseções de um número finito de elementos de $\mathcal{F}$ são não vazias), então existe algum ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre A contendo $\mathcal{F}$.

A *cofinalidade*, $cf(\alpha)$, de um ordinal α é o menor ordinal β tal que existe alguma função $f : \beta \rightarrow \alpha$ com imagem ‘ilimitada’ em α (i.e. $(\forall \xi < \alpha) (\exists \eta < \beta) \xi \leq f(\eta)$). Se α é um ordinal sucessor, $cf(\alpha) = 1$. Um ordinal limite α tal que $cf(\alpha) = \alpha$ se diz *regular*. Caso contrário, se diz *singular*. Sabe-se que:

- (i) $cf(\alpha)$ é regular para todo α limite;
- (ii) se α é regular, então α é cardinal;
- (iii) ω é regular;
- (iv) para todo cardinal κ , κ^+ é regular;
- (v) se κ é regular e $A \in [\kappa]^{<\kappa}$, então $\sup A < \kappa$.

1.2 Topologia geral

A referência básica para topologia geral é o livro de Engelking [Eng]; para espaços inicialmente κ -compactos uma boa referência é o artigo de Stephenson [St].

O termo *espaço* estará sendo usado como sinônimo de *espaço topológico*. Para um espaço X e um subconjunto A de X , $\text{int}_X(A)$ e $\overline{A}^X$ denotarão o *interior* e o *fecho* de A em X , respectivamente; quando não houver possibilidade de confusão escreveremos simplesmente $\text{int } A$ e $\overline{A}$. Um conjunto $A \subseteq X$ tal que $A = \text{int}(\overline{A})$ se diz um *aberto regular* de X .

Assumiremos familiaridade com os conceitos de *espaço* T_i para $i = 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4$ (§1.5 de [Eng]); e usaremos os sinônimos: *Hausdorff* para T_2 , *Urysohn* para $T_{2\frac{1}{2}}$, *regular*

para T_3 , *completamente regular* para $T_{3\frac{1}{2}}$ e *normal* para T_4 . Os espaços T_i para $i \geq 2$ são supostos T_1 .

Introduziremos as seguintes versões ‘locais’: sejam X um espaço T_1 , $p \in X$ e $H \subseteq X$ fechado.

(i) Diremos que X é T_3 em p se para todo aberto U de X tal que $p \in U$ existe aberto V de X tal que $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(ii) Diremos que X é T_4 em H se para todo aberto U de X tal que $H \subseteq U$ existe aberto V de X tal que $H \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(Assim X é T_3 se e só se X é T_3 em p , para todo $p \in X$ e X é T_4 se e só se X é T_4 em H para todo $H \subseteq X$ fechado).

Lembremos que X se diz *semiregular* se X for T_2 e a família dos abertos regulares de X for uma *base* (i.e. dados $p \in X$ e U aberto de X com $p \in U$, existe V aberto regular de X tal que $p \in V \subseteq U$).

Se τ_0 e τ_1 são topologias sobre X e $\tau_0 \subseteq \tau_1$, dizemos que τ_0 é *menos fina* que τ_1 .

Se $\leq$ é uma ordem linear (total) sobre X , definem-se para $a, b \in X$, $a < b$:

$$]a, b[= \{x \in X : a < x < b\};$$

$$] \leftarrow, b[= \{x \in X : x < a\};$$

$$]a, \rightarrow [= \{x \in X : a < x\}.$$

e chamam-se *intervalos* de X . A família de todos os intervalos de X forma uma base para uma topologia sobre X chamada *topologia da ordem sobre X* (p.56 de [Eng]).

Seja $A \subseteq X$. Um ponto $p \in X$ se diz um *ponto de acumulação completa* de A em X se para toda vizinhança aberta U de p , $|U \cap A| = |A|$.

Sabe-se, por exemplo, que são equivalentes:

(i) X é compacto;

(ii) toda família de fechados de X com a propriedade da interseção finita tem interseção não vazia;

(iii) todo subconjunto infinito de X admite um ponto de acumulação completa.

([Eng], Teorema 3.1.1 e Exercício 3.12.1).

Um espaço X se diz *inicialmente κ -compacto* se toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X com $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ admite uma subcobertura finita.

São equivalentes:

(i) X é inicialmente κ -compacto;

(ii) toda família de fechados de X de cardinalidade $\leq \kappa$, com a propriedade da interseção finita tem interseção não vazia;

(iii) todo subconjunto infinito de X de cardinalidade $\leq \kappa$ admite um ponto de acumulação completa.

([St], Teorema 2.2).

Um espaço X se diz *κ -limitado* se todo $Y \subseteq X$ com $|Y| \leq \kappa$ está contido num subconjunto compacto de X (para X T_2 equivale a dizer que $\overline{Y}$ é compacto).

Se X é κ -limitado, então X é inicialmente κ -compacto e se X é T_3 inicialmente κ -compacto, então X é λ -limitado para todo λ tal que $2^\lambda \leq \kappa$ (Diagrama 3.6 de [St]).

Um espaço Hausdorff X se diz *H -fechado* se X é fechado em todo espaço Hausdorff que o contém (veja o Exercício 3.12.5 de [Eng]).

1.3 Funções cardinais em topologia

As referências básicas para este assunto são o livro de Juhasz [Ju1] e o artigo de Hodel [Ho].

Uma *função cardinal em topologia* é uma função φ definida numa classe $\mathcal{C}$ de espaços topológicos fechada por homeomorfismos, com $\varphi(X)$ sendo um cardinal para cada $X \in \mathcal{C}$ e tal que $\varphi(X) = \varphi(Y)$ para $X, Y \in \mathcal{C}$, X e Y homeomorfos. (Quando houver possibilidade de confusão entre várias topologias sobre X , escreveremos $\varphi(\langle X, \tau \rangle)$ ao invés de $\varphi(X)$.)

Dada uma função cardinal φ , define-se a φ -hereditária, $h\varphi$, por:

$$h\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \subseteq X\}$$

(que só tem interesse quando φ não é crescente).

Segue abaixo uma lista (parcial) de funções cardinais, que estaremos utilizando nos próximos capítulos:

– *peso* de X :

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base para } X\} + \omega;$$

– *densidade* de X :

$$d(X) = \min\{|S| : S \subseteq X, \overline{S} = X\} + \omega;$$

– *celularidade* de X :

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ é uma família celular de } X\} + \omega, \text{ onde } \mathcal{U} \text{ é uma família celular de } X \text{ se } \mathcal{U} \text{ for uma coleção de abertos não vazios de } X \text{ dois-a-dois disjuntos};$$

– *spread* de X :

$$s(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ é discreto}\} + \omega;$$

– *o grau de Lindelöf* de X :

$$L(X) = \min\{\kappa : X \text{ é } \kappa\text{-Lindelöf}\} + \omega, \text{ onde } X \text{ se diz } \kappa\text{-Lindelöf se toda cobertura aberta de } X \text{ admite subcobertura de cardinalidade } \leq \kappa;$$

- $F(X) = \sup\{\kappa : \text{existe seqüência livre em } X \text{ de comprimento } \kappa\} + \omega$, onde $\langle p_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ é uma *seqüência livre de comprimento* κ de X se para todo $\alpha < \kappa$, $\overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \overline{\{p_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa\}} = \emptyset$;

- *tightness* de X :

$$t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\} + \omega ;$$

onde $t(p, X)$ é a *tightness* de p em X que se define por:

$$t(p, X) = \min\{\kappa : (\forall Y \subseteq X)[p \in \overline{Y} \rightarrow (\exists A \in [Y]^{\leq \kappa}) p \in \overline{A}]\} ;$$

- *caráter* de X :

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \omega ;$$

onde $\chi(p, X)$ é o *caráter* de p em X :

$$\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base local para } p \text{ em } X\} ;$$

- π -*caráter* de X :

$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\} + \omega ;$$

onde $\pi\chi(p, X)$ é o π -*caráter* de p em X :

$$\pi\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma } \pi\text{-base para } p \text{ em } X\} ;$$

onde $\mathcal{B}$ é uma π -*base* para p em X se para todo aberto U de X com $p \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ com $V \subseteq U$ ($\emptyset \notin \mathcal{B} \subseteq \tau$);

- *pseudo-caráter* de X :

$$\psi(X) = \sup\{\psi(p, X) : p \in X\} + \omega ,$$

onde, para todo $A \subseteq X$, define-se o ψ -*caráter* de A :

$$\psi(A, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma } \psi\text{-base para } A\} ,$$

onde $\mathcal{B}$ é uma ψ -base para A em X se $\mathcal{B}$ é uma família de abertos de X tal que $\bigcap \mathcal{B} = A$; e $\psi(p, X) = \psi(\{p\}, X)$ é o ψ -caráter de p (ψ só se define para espaços T_1);

– *pseudo-caráter fechado* de X :

$$\psi_c(X) = \sup\{\psi_c(p, X) : p \in X\} + \omega ;$$

onde $\psi_c(p, X)$ é o *pseudo-caráter fechado* de p :

$$\psi_c(p, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma } \psi_c\text{-base para } p\} ;$$

onde $\mathcal{B}$ é uma ψ_c -base para p em X se $\mathcal{B}$ é uma família de abertos de X contendo p e tal que $\bigcap \{\overline{V} : V \in \mathcal{B}\} = \{p\}$ ($\psi_c(p, X)$ e $\psi_c(X)$ só se definem para espaços T_2).

Para espaços T_3 define-se também $\psi_c(H, X)$ para $H \subseteq X$ fechado:

$$\psi_c(H, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \tau, H \subseteq \bigcap \mathcal{B}, H = \bigcap \{\overline{V} : V \in \mathcal{B}\}\} .$$

Vamos agora enunciar alguns resultados envolvendo funções cardinais.

Proposição 1.1 *Seja X um espaço topológico:*

(i) $c(X) \leq \min\{d(X), s(X)\} \leq \max\{d(X), s(X)\} \leq hd(X) \leq \min\{w(X), |X|\}$ (veja a figura 1, p.15 de [Ho]);

(ii) para todo $p \in X$:

– $\max\{t(p, X), \pi\chi(p, X)\} \leq \chi(p, X)$;

– se X for T_1 , $\psi(p, X) \leq \chi(p, X)$;

– se X for T_2 , $\psi(p, X) \leq \psi_c(p, X) \leq \chi(p, X)$

(2.1 de [Ju1]);

(iii) se X for compacto T_2 , $\chi(X) = \psi(X)$ (7.1 de [Ho]).

Proposição 1.2 Para $X \in T_1$, $|X| \leq 2^{s(X) \cdot \psi(X)}$ (4.9 de [Ho]).

Proposição 1.3 Seja X um espaço T_2 .

$$(i) \quad |X| \leq 2^{d(X)} \quad (3.2 \text{ de } [Ho]);$$

$$(ii) \quad |X| \leq d(X) \cdot \chi(X) \quad (4.4 \text{ de } [Ho]);$$

$$(iii) \quad |X| \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)} \quad (4.5 \text{ de } [Ho]);$$

$$(iv) \quad |X| \leq 2^{c(X) \cdot \chi(X)} \quad (4.7 \text{ de } [Ho]).$$

Proposição 1.4 Seja X um espaço T_3 .

$$(i) \quad w(X) \leq 2^{d(X)} \quad (3.3(b) \text{ de } [Ho]);$$

$$(ii) \quad |X| \leq 2^{d(X) \cdot \psi(X)} \quad (4.2 \text{ de } [Ho]).$$

Proposição 1.5 (Lema 4.3 de [Ho]) *Seja κ um cardinal infinito e seja X um espaço topológico tal que*

(1) *para cada $p \in X$, existe uma coleção $\mathcal{V}_p$ de vizinhanças abertas de p tal que $|\mathcal{V}_p| \leq \kappa$ e $\bigcap \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_p\} = \{p\}$;*

(2) *existe um subconjunto S de X tal que*

$$X = \bigcup \{\overline{A} : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}.$$

$$\text{Então } |X| \leq |S|^\kappa.$$

Proposição 1.6 (Proposição 4.8 de [Ho]) *Seja $\mathcal{V}$ uma cobertura aberta de um espaço X e seja $s(X) \leq \kappa$. Então existe $A \subseteq X$ com $|A| \leq \kappa$ e $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ com $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ tais que $X = \overline{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})$.*

Proposição 1.7 *Seja X um compacto T_2 .*

(i) $t(X) = F(X)$ *(Teorema de Arhangel'skii, 7.12 de [Ho]);*

(ii) $h\pi\chi(X) = t(X)$ *(Teorema de Sapirovskii, 7.13 de [Ho]);*

(iii) *se $\chi(p, X) \geq \kappa$ para todo $p \in X$, então $|X| \geq 2^\kappa$ (Teorema de Čech-Pospisil, 7.19 de [Ho]).*

Capítulo 2

Generalizações e contra-exemplos

2.1 Algumas topologias sobre um cardinal

Muitos resultados sobre espaços topológicos compactos T_2 valem para espaços inicialmente κ -compactos (para κ conveniente) e com adequadas condições de separabilidade (geralmente T_3).

Assim, por exemplo, O.T. Alas provou o seguinte resultado: “Seja X um espaço inicialmente κ -compacto tal que nenhum ponto é interseção de menos do que κ subconjuntos abertos (i.e. $\psi(p, X) \geq \kappa$ para todo $p \in X$). Então $|X| \geq 2^\kappa$ se ocorrer ou que $\kappa = \omega$ e X é Urysohn ou que $\kappa > \omega$ e X é regular” ([Al], Teor. 1); generalizando o clássico resultado de 1937 de Cech-Pospisil (Proposição 1.7(iii)).

Surgiu então a pergunta se este resultado valeria para espaços Hausdorff, ao invés de Urysohn e/ou regulares (em correspondência privada entre K. Kunen e O.T. Alas). Aproveitando uma idéia de K. Kunen construímos os seguintes exemplos que mostram que num modelo de ZFC em que $\kappa^+ < 2^\kappa$ existem espaços X inicialmente κ -compactos, T_2 , com $\psi(p, X) \geq \kappa$ para todo $p \in X$ e tais que $|X| = \kappa^+ < 2^\kappa$.

Exemplo 2.1 Seja θ um cardinal regular não enumerável e sejam $X = \theta \setminus \{0\}$, τ_0 a topologia da ordem sobre X e $\tau_i = \{U \in \tau_0 : (\forall \alpha \in U)\{\eta \in \theta : \eta + \alpha \in U\} \in \mathcal{F}_i\}$, para $i = 1, 2$, onde $\mathcal{F}_1 = \{A \subseteq \theta : (\exists \xi \in \theta)\{\omega^\xi \cdot \gamma : \gamma < \theta\} \subseteq A\}$ e $\mathcal{F}_2$ é o filtro sobre θ gerado

pelos subconjuntos fechados e ilimitados de θ – que é conhecido pelo nome de filtro c.u.b. de θ –. A aritmética usada é aritmética ordinal.

Em [Chr] mostramos que τ_1 e τ_2 são topologias Hausdorff sobre X , menos finas que τ_0 , inicialmente λ -compactas para todo $\lambda < \theta$ e tais que nenhum ponto é interseção de menos do que θ abertos (de fato, $\psi(p, X) = \psi_\tau(p, X) = \theta$ para todo $p \in X$).

Portanto, para $\theta = \kappa^+$ (num modelo de ZFC em que $\kappa^+ < 2^\kappa$), $\langle X, \tau_i \rangle$, $i = 1, 2$, é um espaço Hausdorff inicialmente κ -compacto tal que nenhum ponto é interseção de menos do que κ^+ (e a fortiori do que κ) abertos e no entanto $|X| = \kappa^+ < 2^\kappa$.

Por outro lado, se X for um espaço inicialmente κ -compacto e não compacto, então $|X| \geq \kappa^+$ (senão todo subconjunto infinito de X teria ponto de acumulação completa e X seria compacto). Assim, se $\kappa^+ = 2^\kappa$, então o resultado de O.T. Alas vale trivialmente para espaços inicialmente κ -compactos T_2 ; o que mostra que $\kappa^+ < 2^\kappa$ é uma hipótese necessária para a existência de contra-exemplos.

Vamos aqui estudar esta construção com um pouco mais de generalidade, para obtermos exemplos que permitam comparações entre o caráter, o pseudo-caráter e o pseudo-caráter fechado do espaço (o que não ocorre em espaços compactos).

Seja então $\theta > \omega$ um cardinal regular e sejam $X = \theta \setminus \{0\}$, τ_0 a topologia da ordem sobre X e $\mathcal{F}$ um filtro sobre θ . Para $A, B \subseteq \theta$ vamos denotar por $A+B = \{\alpha+\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$ (isto poderia ocasionar alguma confusão quando A e B fossem eles mesmos ordinais, mas o contexto deve deixar claro de que se trata) e por $A-B = \{\eta \in \theta : (\exists \beta \in B)\{\eta+\beta \in A\}\}$ – em particular, para $\beta \in \theta$, $A - \{\beta\} = \{\eta \in \theta : \eta + \beta \in A\}$ –. Diremos que A *reflete* $\mathcal{F}$ se para todo $\alpha \in A$, $A - \{\alpha\} \in \mathcal{F}$ – i.e. $(\forall \alpha \in A)\{\eta \in \theta : \eta + \alpha \in A\} \in \mathcal{F}$ – e denotaremos por $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \{A \subseteq \theta : A \text{ reflete } \mathcal{F}\}$ e por $\tau_{\mathcal{F}} = \tau_0 \cap \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ (ou simplesmente por τ , quando não houver dúvida sobre o filtro $\mathcal{F}$).

Introduziremos também as seguintes condições:

$$H_1 : (\forall \beta < \theta)(\exists A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}})[0 \in A \& (\forall \alpha \in A)(0 \neq \alpha \rightarrow \beta < \alpha)]$$

$$H_2 : (\forall \beta < \theta)(\exists A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}})[0 \in A \& (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A)(\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \beta < \alpha_2)]$$

Observe que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ satisfazem estas condições, pois dado $\beta < \theta$, $A = \{\omega^{\beta+1} \cdot \gamma : \gamma < \theta\}$ cumpre as exigências necessárias para H_1 e H_2 .

Lema 2.1 (i) *Sejam $A_i \subseteq \theta$ para $i \in I$ (I conjunto qualquer) e $\alpha \in \theta$. Então $\cap\{A_i : i \in I\} - \{\alpha\} = \cap\{A_i - \{\alpha\} : i \in I\}$. Assim, se $\mathcal{F}$ for μ -completo (i.e. fechado para interseções de $< \mu$ elementos), então $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ também será μ -completo.*

(ii) *Seja $F \in \mathcal{F}$. Definindo $\hat{F} = \cup\{F_n : n \in \omega\}$, onde $F_0 = \{0\} \cup F$, $F_{n+1} = F_0 + F_n$ para $n \in \omega$, teremos $0 \in \hat{F} \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$, $F \subseteq \hat{F}$ e $F \cap \Omega = \hat{F} \cap \Omega$, onde $\Omega = \{\omega^\xi : \xi < \theta\}$. Se $F \subseteq \Omega$, então $\hat{F} = \{0\} \cup \{\alpha = \omega^{\beta_1} \ell_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \ell_n : 1 \leq n < \omega, \theta > \beta_1 > \dots > \beta_n \geq 0 \text{ e para todo } i = 1, \dots, n, 1 \leq \ell_i < \omega \text{ e } \omega^{\beta_i} \in F\}$ (i.e. α escrito na Forma Normal de Cantor – ver [K] exer. I.6 – tem todos as potências $\omega^{\beta_i} \in F$).*

(iii) *Se $0 \in A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e $U_0 \in \tau_0$, então $U = A + U_0 \in \tau_{\mathcal{F}}$ e $U \supseteq U_0$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \eta \in \cap\{A_i : i \in I\} - \{\alpha\} \Leftrightarrow \eta + \alpha \in \cap\{A_i : i \in I\} \\ & \Leftrightarrow (\forall i \in I) \eta + \alpha \in A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) \eta \in A_i - \{\alpha\} \\ & \Leftrightarrow \eta \in \cap\{A_i - \{\alpha\} : i \in I\}. \end{aligned}$$

Seja agora $\lambda < \mu$ e sejam $A_\xi \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ para $\xi < \lambda$ e $\alpha \in \cap\{A_\xi : \xi < \lambda\}$. Então, para todo $\xi < \lambda$, $\alpha \in A_\xi$ e $A_\xi - \{\alpha\} \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é μ -completo, $\cap\{A_\xi : \xi < \lambda\} - \{\alpha\} = \cap\{A_\xi - \{\alpha\} : \xi < \lambda\} \in \mathcal{F}$ e portanto $\cap\{A_\xi : \xi < \lambda\} \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.

(ii) *Seja $\alpha \in \hat{F}$, digamos $\alpha \in F_n$ para algum $n \in \omega$. Então $\hat{F} - \{\alpha\} = \{\eta \in \theta : \eta + \alpha \in \hat{F}\} \supseteq \{\eta \in \theta : \eta + \alpha \in F_{n+1}\} \supseteq F$. Como $F \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ é filtro, segue que $\hat{F} - \{\alpha\} \in \mathcal{F}$ e portanto $\hat{F} \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$. É claro que $0 \in \hat{F}$, $F \subseteq \hat{F}$ e $F \cap \Omega \subseteq \hat{F} \cap \Omega$. Vamos mostrar, por indução sobre $n \in \omega$, que para todo $n \in \omega$ $F_n \cap \Omega \subseteq F$; para*

concluir que $\hat{F} \cap \Omega \subseteq F$ e portanto $F \cap \Omega = \hat{F} \cap \Omega$. É claro que $F_0 \cap \Omega \subseteq F$; supondo $F_n \cap \Omega \subseteq F$, seja $\alpha = \omega^\xi \in F_{n+1} \cap \Omega$. Então $\omega^\xi = \beta + \gamma$ para $\beta \in F_0$, $\gamma \in F_n$. Como ω^ξ é indecomponível (ver [K], exerc. I.5) segue que ou $\beta = \omega^\xi$ e $\gamma = 0$ ou $\beta < \omega^\xi$ e $\gamma = \omega^\xi$. No primeiro caso $\alpha = \omega^\xi \in F$, no segundo $\alpha = \omega^\xi \in F_n \cap \Omega \subseteq F$.

Do mesmo modo, vamos mostrar por indução sobre $n \in \omega$ que, se $0 \neq \alpha \in F_n$, então α escrito na Forma Normal de Cantor (i.e. como no enunciado de (ii)) terá todas as potências $\omega^\beta \in F$. Isto é claro para $n = 0$; supondo válido para $n \in \omega$, seja $0 \neq \alpha \in F_{n+1}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ com $\alpha_1 \in F_0$, $\alpha_2 \in F_n$. $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_1 = \omega^\xi \in F$ e $\alpha_2 = 0$ ou $\alpha_2 = \omega^{\beta_1} \cdot \ell_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot \ell_n$ em F.N.C. com todos os $\omega^{\beta_i} \in F$. Como

$$\omega^\xi + \omega^{\beta_1} \cdot \ell_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot \ell_n = \begin{cases} \omega^{\beta_1} \cdot \ell_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot \ell_n & \text{se } \xi < \beta_1 \\ \omega^{\beta_1} \cdot (\ell_1 + 1) + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot \ell_n & \text{se } \xi = \beta_1 \end{cases}$$

(e se $\xi > \beta_1$, então $\omega^\xi + \omega^{\beta_1} \cdot \ell_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot \ell_n$ já está em F.N.C.), concluimos que em qualquer caso $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ escrito em F.N.C. terá todas as suas potências $\omega^\beta \in F$.

(iii) Sejam $0 \in A \in \mathcal{R}_\mathcal{F}$, $U_0 \in \tau_0$ e $U = A + U_0$. Então $U = \bigcup \{ \{\alpha\} + U_0 : \alpha \in A \} \in \tau_0$, pois como $U_0 \in \tau_0$, para todo $\alpha \in \theta$, $\{\alpha\} + U_0 \in \tau_0$.

Seja agora $\beta = \alpha + \beta_0 \in U = A + U_0$, com $\alpha \in A$, $\beta_0 \in U_0$. Então $U - \{\beta\} = \{ \eta \in \theta : \eta + \beta \in U \} = \{ \eta \in \theta : \eta + (\alpha + \beta_0) \in A + U_0 \} \supseteq \{ \eta \in \theta : \eta + \alpha \in A \} = A - \{\alpha\} \in \mathcal{F}$, já que $A \in \mathcal{R}_\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é filtro, segue que $U - \{\beta\} \in \mathcal{F}$ e portanto $U \in \mathcal{R}_\mathcal{F}$.

Assim, $U \in \tau_0 \cap \mathcal{R}_\mathcal{F} = \tau_\mathcal{F}$; e como $0 \in A$, $U_0 \subseteq A + U_0 = U$. $\square$

Proposição 2.1 $\tau_\mathcal{F}$ é uma topologia T_0 sobre X , menos fina que τ_0 e inicialmente λ -compacta para todo cardinal $\lambda < \theta$. Para $i = 1, 2$ se a condição H_i for satisfeita, então $\langle X, \tau_\mathcal{F} \rangle$ é T_i . Em particular, as topologias τ_1 e τ_2 são ambas Hausdorff.

Demonstração: O item (i) do Lema 2.1 mostra que $\mathcal{R}_\mathcal{F}$ é fechado por interseções finitas e consequentemente, $\tau_\mathcal{F}$ também; por outro lado, é claro que $\tau_\mathcal{F}$ é fechado por uniões arbitrárias e que $\phi, X \in \tau_\mathcal{F}$; de modo que $\tau_\mathcal{F}$ é uma topologia sobre X .

Sejam $\alpha, \beta \in X$, $\alpha \neq \beta$; digamos $\alpha < \beta$. Consideremos $U = [\alpha + 1, \theta[= \{\gamma < \theta : \alpha + 1 \leq \gamma\}$. Então $\alpha \notin U$, $\beta \in U$, $U \in \tau_0$ e para todo $\gamma \in U$, $U - \{\gamma\} = \{\eta \in \theta : \eta + \gamma \in U\} = \theta \in \mathcal{F}$; de modo que $U \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e portanto $U \in \tau_{\mathcal{F}}$ e $\tau_{\mathcal{F}}$ é T_0 .

É óbvio que $\tau_{\mathcal{F}}$ é menos fina que τ_0 e consequentemente, como τ_0 é inicialmente λ -compacta para todo $\lambda < \theta$, $\tau_{\mathcal{F}}$ também é.

Sejam $\alpha, \beta \in X$, $\alpha \neq \beta$; digamos $\alpha < \beta$. Suponhamos inicialmente que H_1 é satisfeita. Já vimos como obter $U \in \tau_{\mathcal{F}}$ tal que $\alpha \notin U$, $\beta \in U$. Por outro lado, escolhendo $A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ como na condição H_1 (em relação ao β) e definindo $V = A +]0, \alpha]$ teremos que $\alpha \in V$, $\beta \notin V$ e, devido ao item (iii) do Lema 2.1, $V \in \tau_{\mathcal{F}}$; mostrando que $\tau_{\mathcal{F}}$ é T_1 .

Suponhamos agora H_2 válida e seja $A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ como na condição H_2 (em relação ao β). Sejam $U = A +]0, \alpha]$ e $V = A + [\alpha + 1, \beta]$. Então $\alpha \in U$, $\beta \in V$, $U, V \in \tau_{\mathcal{F}}$ (pelo item (iii) do Lema 2.1) e $U \cap V = \emptyset$ pois, se $\gamma \in U + V$, então $\gamma = \xi_1 + \delta_1 = \xi_2 + \delta_2$ com $\xi_1, \xi_2 \in A$, $0 \leq \delta_1 \leq \alpha$, $\alpha + 1 \leq \delta_2 \leq \beta$. Se $\xi_1 \leq \xi_2$, então $\xi_1 + \delta_1 \leq \xi_2 + \delta_1 < \xi_2 + \delta_2$, contra $\xi_1 + \delta_1 = \xi_2 + \delta_2$; e se $\xi_2 < \xi_1$, então por H_2 , $\xi_2 + \beta < \xi_1$ e portanto $\xi_2 + \delta_2 \leq \xi_2 + \beta < \xi_1 \leq \xi_1 + \delta_1$, novamente contra $\xi_1 + \delta_1 = \xi_2 + \delta_2$. Logo, não pode existir $\gamma \in U \cap V$. Assim, $\tau_{\mathcal{F}}$ é T_2 . $\square$

Observações

(1) Se $\mathcal{F} = \{\theta\}$, então $\tau_{\mathcal{F}} = \{]\alpha, \theta[: \alpha < \theta\}$, que não é T_1 . De modo que alguma condição é necessária para que $\tau_{\mathcal{F}}$ seja mais que T_0 . A Proposição 2.1 mostrou que H_i , para $i = 1, 2$, é suficiente para que $\tau_{\mathcal{F}}$ seja T_i ; mas não sabemos ainda se estas condições são também necessárias.

(2) Uma outra pergunta que surge naturalmente é se a coleção de abertos de $\tau_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{C} = \{U = A + U_0 : 0 \in A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}, U_0 \in \tau_0\}$ fornecida pelo item (iii) do Lema 2.1 é uma base para $\tau_{\mathcal{F}}$. Se o filtro $\mathcal{F}$ for θ -completo (que é o que ocorre com os filtros $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$) não é difícil de ver que a resposta é sim: dados $\alpha \in U \in \tau_{\mathcal{F}}$, escolha $\beta < \alpha$ tal que $]\beta, \alpha] \subset U$ e defina $A = \cap \{U - \{\gamma\} : \gamma \in]\beta, \alpha]\}$. Então $\alpha \in V = A +]\beta, \alpha] \subseteq U$

e $V \in \mathcal{C}$. Porém, para o caso geral, também ainda não conhecemos a resposta.

Proposição 2.2 (i) Se $\mathcal{F}$ for uniforme (i.e. $|F| = \theta$ para todo $F \in \mathcal{F}$), então $|U| = \theta$ para todo $\phi \neq U \in \tau_{\mathcal{F}}$; $|\cap \{\bar{U}_i : i \in I\}| = \theta$ para todo conjunto I tal que $|I| < \theta$ e para todos $\phi \neq U_i \in \tau_{\mathcal{F}}$ para $i \in I$ (fechos em $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$); $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ não é Urysohn, é conexo e (se for T_2) $\psi_c(\alpha, X) = \theta$ para todo $\alpha \in X$. Por outro lado, se $\mathcal{F}$ não for uniforme, então existem pontos isolados em $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$.

(ii) Suponhamos neste item $\mathcal{F}$ uniforme e satisfazendo H_1 (de modo que $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ é T_1 e pode-se falar em $\psi(\alpha, X)$ para todo $\alpha \in X$).

Se $\mathcal{F}$ for μ -completo, então $\psi(\alpha, X) \geq \mu$ para todo $\alpha \in X$. Em particular,

$\psi(\alpha, \langle X, \tau_1 \rangle) = \psi(\alpha, \langle X, \tau_2 \rangle) = \theta$ para todo $\alpha \in X$.

Por outro lado, se existe $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^\mu$ tal que $\cap \mathcal{F}_0 = \emptyset$ e $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega^\xi : \xi < \theta\} \in \mathcal{F}$, então $\psi(\alpha, X) \leq \max\{\mu, cf(\alpha)\}$ para todo $\alpha \in X$.

Demonstração:

(i) Suponhamos que $\mathcal{F}$ seja uniforme e que $\phi \neq U \in \tau_{\mathcal{F}}$. Seja $\alpha \in U$, então $U - \{\alpha\} = \{\eta \in \theta : \eta + \alpha \in U\} \in \mathcal{F}$ e portanto $|U - \{\alpha\}| = \theta$. Se $|U| < \theta$, então $\sigma = \sup U < \theta$ e portanto existe $\eta \in U - \{\alpha\}$ tal que $\sigma < \eta$. Mas então $\sigma < \eta < \eta + \alpha \in U$, contra $\sigma = \sup U$. Logo $|U| = \theta$.

Sejam $\phi \neq U_i \in \tau_{\mathcal{F}}$ para $i \in I$, $|I| < \theta$. $\bar{U}_i$ sendo fechado em $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ é fechado em $\langle X, \tau_0 \rangle$ (pois $X \setminus \bar{U}_i \in \tau_{\mathcal{F}} \subseteq \tau_0$). Como já vimos que $|U_i| = \theta$, segue que $|\bar{U}_i| = \theta$ e portanto $\bar{U}_i$ é um fechado ilimitado em θ (i.e. $\bar{U}_i$ é o que [K] chama de c.u.b em θ). Pelo Lema 6.8 do capítulo II de [K], interseção de $< \theta$ c.u.b em θ é um c.u.b. em θ . Assim, $\cap \{\bar{U}_i : i \in I\}$ é um c.u.b em θ e portanto $|\cap \{\bar{U}_i : i \in I\}| = \theta$.

Desta propriedade (com $|I| = 2$) decorre imediatamente que o espaço não é Urysohn – pois para $\alpha \in U \in \tau_{\mathcal{F}}$ e $\beta \in V \in \tau_{\mathcal{F}}$, $\bar{U} \cap \bar{V} \neq \emptyset$; e é conexo – pois, se existisse

$\emptyset \neq U \neq X$ aberto e fechado, então definindo $V = X \setminus U$, V também seria aberto e fechado e $\emptyset \neq V$; de modo que $\emptyset = U \cap V = \overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$.

Suponhamos agora que $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ seja T_2 (de modo que pode-se falar em $\psi_c(\alpha, X)$ para $\alpha \in X$) e seja $\alpha \in X$. Se $\alpha \in U_{\xi} \in \tau_{\mathcal{F}}$ para $\xi < \lambda$, onde $\lambda < \theta$, então $|\cap \{\overline{U}_{\xi} : \xi < \lambda\}| = \theta$ e portanto $\cap \{\overline{U}_{\xi} : \xi < \lambda\} \neq \{\alpha\}$. Logo $\psi_c(\alpha, X) \geq \theta$ e consequentemente $\psi_c(\alpha, X) = \theta = |X|$.

Finalmente, supondo que $\mathcal{F}$ não seja uniforme, seja $F \subset \mathcal{F}$ tal que $|F| < \theta$. Então $\sigma = \sup F < \theta$. Sejam $\alpha = \omega^{\sigma+1} + 1$ e $U = \{\alpha\}$. $U \in \tau_{\mathcal{F}}$, pois $U \in \tau_0$ e $U - \{\alpha\} = \{\eta < \theta : \eta + \alpha \in U\} = \{\eta < \theta : \eta + \omega^{\sigma+1} + 1 = \omega^{\sigma+1} + 1\} = \{\eta < \theta : \eta < \omega^{\sigma+1}\} \supseteq \{\eta < \theta : \eta < \sigma + 1\} \supseteq F$; logo $U - \{\alpha\} \in \mathcal{F}$ e portanto $U \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$. Assim α é um ponto isolado de $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$.

- (ii) Sejam $\mathcal{F}$ um filtro sobre θ , uniforme, satisfazendo H_1 e μ -completo e $\alpha \in X$. Se $\alpha \in \cap \{U_{\xi} : \xi < \lambda\}$ com $U_{\xi} \in \tau_{\xi}$ para cada $\xi < \lambda$ e $\lambda < \mu$, então para cada $\xi < \lambda$, $U_{\xi} - \{\alpha\} \in \mathcal{F}$ e, pelo item (i) do Lema 2.1, $A = \cap \{U_{\xi} : \xi < \lambda\} - \{\alpha\} = \cap \{U_{\xi} - \{\alpha\} : \xi < \lambda\} \in \mathcal{F}$. Assim $|A| = \theta$ e consequentemente $|\cap \{U_{\xi} : \xi < \lambda\}| = \theta$ (como na demonstração de $|U| = \theta$ em (i)). Logo, $\cap \{U_{\xi} : \xi < \lambda\} \neq \{\alpha\}$; assim $\psi(\alpha, X) > \lambda$ para todo $\lambda < \mu$ e portanto $\psi(\alpha, X) \geq \mu$.

Suponhamos agora $\mathcal{F}$ uniforme, satisfazendo H_1 , $\Omega \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_0 = \{F_{\xi} : \xi < \mu\} \in [\mathcal{F}]^{\mu}$ tal que $\cap \{F_{\xi} : \xi < \mu\} = \emptyset$; e seja $\alpha \in X$ com $cf\alpha = \kappa$ (se α é sucessor, convencionamos $cf\alpha = 1$). Seja $A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $0 \in A$ e $(\forall \eta \in A) (0 \neq \eta \rightarrow \alpha < \eta)$ – como na condição H_1 – e sejam, para cada $\xi < \mu$, $G_{\xi} = F_{\xi} \cap \Omega \in \mathcal{F}$ e $A_{\xi} = \hat{G}_{\xi} \cap A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$, onde $\hat{G}_{\xi}$ é obtido a partir de G_{ξ} como no item (ii) do Lema 2.1. Então $\cap \{A_{\xi} : \xi < \mu\} = \{0\}$, pois: se $0 \neq \alpha' \in A_{\xi} \subseteq \hat{G}_{\xi}$, então α' escrito em F.N.C. $\alpha' = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$ terá $\omega^{\beta_1} \in G_{\xi}$; assim, se $\alpha' \in \cap \{A_{\xi} : \xi < \mu\} \subseteq \{\hat{G}_{\xi} : \xi < \mu\}$ então $\omega^{\beta_1} \in \cap \{G_{\xi} : \xi < \mu\} \subseteq \cap \{F_{\xi} : \xi < \mu\} = \emptyset$.

Seja $\langle \alpha_\gamma : \gamma < \kappa \rangle$ uma seqüência crescente de ordinais com limite α e sejam $V_\gamma = [\alpha_\gamma + 1, \alpha] \in \tau_0$ para $\gamma < \kappa$ (no caso de α ser sucessor, seja $V_0 = \{\alpha\} \in \tau_0$) e $U_{\gamma,\xi} = A_\xi + V_\gamma \in \tau_{\mathcal{F}}$ para $\gamma < \kappa$ e $\xi < \mu$. Então $\cap\{U_{\gamma,\xi} : \gamma < \kappa, \xi < \mu\} = \{\alpha\}$, pois: fixado $\gamma < \kappa$, $\cap\{U_{\gamma,\xi} : \xi < \mu\} = [\alpha_\gamma + 1, \alpha]$, pois: seja $\delta \in \cap\{U_{\gamma,\xi} : \xi < \mu\}$; para cada $\xi < \mu$, $\delta = \eta_\xi + \zeta_\xi$ com $\eta_\xi \in A_\xi$ e $\alpha_\gamma + 1 \leq \zeta_\xi \leq \alpha$. Se $\delta > \alpha$, então $\eta_\xi \neq 0$ e portanto η_ξ escrito em F.N.C. terá todas as potências $\omega^\beta \in G_\xi$. Por sua vez, $\zeta_\xi \leq \alpha < \omega^\beta$ para todo $\beta < \theta$ tal que $\omega^\beta \in G_\xi$; de modo que a F.N.C. de $\delta = \eta_\xi + \zeta_\xi$ será precisamente a “justaposição” das F.N.C. de η_ξ e ζ_ξ (já que todos os expoentes de ζ_ξ são menores que os de η_ξ) e em particular o primeiro expoente – digamos $\omega^{\beta_1,\xi}$ – terá que ser o mesmo para todos os $\xi < \mu$ – digamos ω^{β_1} –; de modo que, pelo item (ii) do Lema 2.1, $\omega^{\beta_1} \in \cap\{G_\xi : \xi < \mu\} = \emptyset$. Logo, $\delta < \alpha$ e como $\alpha_\gamma \leq \zeta_\xi \leq \delta$, segue que $\alpha_\gamma + 1 \leq \delta \leq \alpha$. Assim,

$$\begin{aligned} \cap\{U_{\gamma,\xi} : \gamma < \kappa, \xi < \mu\} &= \cap\{\cap\{U_{\gamma,\xi} : \xi < \mu\} : \gamma < \kappa\} \\ &= \cap\{[\alpha_\gamma + 1, \alpha] : \gamma < \kappa\} = \{\alpha\} \end{aligned}$$

(no caso em que α é sucessor, $\cap\{U_{0,\xi} : \xi < \mu\} = \{\alpha\}$ também); e portanto $\{U_{\gamma,\xi} : \gamma < \kappa, \xi < \mu\}$ é uma ψ -base para α em $\langle X, \tau_\xi \rangle$ e $\psi(\alpha, X) \leq \kappa \cdot \mu = \max\{cf\alpha, \mu\}$.

Observações:

- (1) Juntando as duas desigualdades obtidas no item (ii) obtemos: se $\mathcal{F}$ for uniforme, μ -completo, existe $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^\mu$ tal que $\cap\mathcal{F}_0 = \emptyset$ e $\Omega \in \mathcal{F}$, então $\psi(\alpha, X) = \max\{cf\alpha, \mu\}$ para todo $\alpha \in X$.
- (2) A condição ‘existe $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^\mu$ tal que $\cap\mathcal{F}_0 = \emptyset$ ’ obviamente implica que $\mathcal{F}$ não é μ^+ -completo (e se $\mathcal{F}$ for um ultrafiltro ambas as condições se equivalem). Mas no caso geral não sabemos se o fato de $\mathcal{F}$ não ser μ^+ -completo, ao invés da 1ª condição, junto com as outras hipóteses de (ii), implica a desigualdade obtida lá.

(3) Para μ como na 1ª observação, certamente $\omega \leq \mu \leq \theta$. No caso em que $\mu = \theta$ (que ocorre em $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$), $\psi(\alpha, X) = \psi_c(\alpha, X) = \theta$ para todo $\alpha \in X$. No caso $\mu = \omega$, $\psi(\alpha, X) = \max\{cf\alpha, \omega\}$; de modo que para $\alpha \in X$ ordinal limite, $\psi(\alpha, X) = cf\alpha =$ pseudocaráter de α em $\langle X, \tau_0 \rangle$ e para $\alpha \in X$ sucessor, α não é ponto isolado em $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ e $\psi(\alpha, X) = \omega$ (enquanto que α é um ponto isolado em $\langle X, \tau_0 \rangle$). Neste caso, para todo $\alpha \in X$, $\psi(\alpha, X) < \psi_c(\alpha, X)$; e se $\theta = \kappa^+$, então $\psi(X) = \kappa < \theta = \psi_c(X)$. Observe finalmente que este caso sempre pode ocorrer; mais ainda, existem ultrafiltros $\mathcal{F}$ contendo o filtro c.u.b. $\mathcal{F}_2$ (e portanto $\Omega \in \mathcal{F}$) e não ω_1 -completos: se $\theta < 1^\circ$ cardinal mensurável, então qualquer ultrafiltro sobre θ serve; se não, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_2 \cup \{F_n : n \in \omega\}$, onde $F_n = \{\alpha < \theta : \aleph_n < cf\alpha < \aleph_\omega\}$ para $n \in \omega$, tem a propriedade da interseção finita e portanto $\mathcal{F}'$ pode ser estendido a um ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre θ , que terá as propriedades requeridas.

Lema 2.2 (item (i) do Lema 5 de [Chr]) *Se $C_\alpha \in [\theta]^\theta$ para cada $\alpha < \theta$, então existe C c.u.b. em θ tal que $(\forall \alpha < \theta) C_\alpha \not\subseteq C$.*

Demonstração: Para cada $\alpha < \theta$, seja $f_\alpha \in {}^\theta\theta$ a enumeração de C_α – i.e. $f_\alpha : \theta \rightarrow \theta$ é uma função crescente com imagem C_α –. Vamos definir $f \in {}^\theta\theta$ recursivamente:

$$f(0) = 0$$

$$f(\alpha + 1) = \max\{f(\alpha) + 1, f_\alpha(\alpha + 1) + 1\}$$

$$\text{para } \alpha < \theta \text{ limite, } f(\alpha) = \sup\{f(\xi) : \xi < \alpha\}$$

f é uma função crescente e contínua – i.e. $f(\alpha) = \sup\{f(\xi) : \xi < \alpha\}$ para α limite – e portanto $C =$ imagem de f é um c.u.b. em θ (veja [Jech], p.57).

Seja $\alpha < \theta$; se $C_\alpha \subseteq C$, então para cada $\xi < \theta$, $f_\alpha(\xi) \in C_\alpha \subseteq C$, de modo que existe $g(\xi) < \theta$ tal que $f_\alpha(\xi) = f(g(\xi))$. Como f_α e f são crescentes, segue que g é crescente e portanto $\xi \leq g(\xi)$ para todo $\xi < \theta$. Em particular, $\alpha + 1 \leq g(\alpha + 1)$, de modo que $f(\alpha + 1) \leq f(g(\alpha + 1)) = f_\alpha(\alpha + 1) < f(\alpha + 1)$. $\square$

Proposição 2.3 (i) Se $\mathcal{F}$ é uniforme e satisfaz (H_1) , então para todo $\alpha \in X$, $\pi\chi(\alpha, X) \geq \theta$;

(ii) se $\mathcal{F}$ estende $\mathcal{F}_2$ – o filtro c.u.b. sobre θ –, então para todo $\alpha \in X$, $\pi\chi(\alpha, X) > \theta$.

Demonstração: (i) Sejam $\alpha \in X$ e $\mathcal{B}$ uma família de abertos não vazios de $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ com $|\mathcal{B}| < \theta$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, seja $\beta_B = \min\{\eta \in B : \alpha < \eta\}$ (existe algum $\eta \in B$ maior que α pois, pela Proposição 2.2(i), $|B| = \theta$ e portanto ilimitado em θ) e seja $\beta = \sup\{\beta_B : B \in \mathcal{B}\} < \theta$ (pois θ é regular e $|\mathcal{B}| < \theta$).

Por (H_1) , seja $A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $0 \in A$ e $\beta < \gamma$ para todo $0 \neq \gamma \in A$ e seja $V = A +]0, \alpha]$. V é um aberto de $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$, $\alpha \in V$, mas para todo $B \in \mathcal{B}$, $B \not\subseteq V$ pois $\beta_B \notin V$, uma vez que um elemento genérico de $V = A +]0, \alpha]$ é do tipo $\gamma + \xi$ com $\gamma \in A$ e $0 < \xi \leq \alpha$. Se $\gamma = 0$, então $\gamma + \xi = \xi \leq \alpha < \beta_B$ (logo $\gamma + \xi \neq \beta_B$) e se $\gamma \neq 0$, então $\beta_B \leq \beta < \gamma + \xi$ (novamente $\gamma + \xi \neq \beta_B$).

Assim α não admite π -base em $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ de cardinalidade $< \theta$ e portanto $\pi\chi(\alpha, X) \geq \theta$.

(ii) Sejam $\alpha \in X$ e $\mathcal{B}$ uma família de abertos não vazios de $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ com $|\mathcal{B}| \leq \theta$. Para cada $B \in \mathcal{B}$ sejam $\alpha_B \in B$, $F_B = B - \{\alpha_B\} = \{\eta < \theta : \eta + \alpha_B \in B\} \in \mathcal{F}$ e $C_B = F_B \cap \{\omega^\xi : \alpha'_B < \xi < \theta\} \in \mathcal{F}$, onde $\alpha'_B = \max\{\alpha, \alpha_B\}$.

Pelo Lema 2.2 existe C c.u.b. em θ tal que $C_B \not\subseteq C$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Sejam $F = C \cap \{\omega^\xi : \alpha < \xi < \theta\} \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ e $U = \hat{F} + [1, \alpha]$ uma vizinhança de α em $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ (onde $\hat{F}$ é obtido a partir de F como no Lema 2.1(ii)).

Vamos verificar que não existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$, mostrando com isto que $\mathcal{B}$ não é uma π -base para α e concluindo que $\pi\chi(\alpha, X) > \theta$.

Suponhamos por absurdo que existisse $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Então $F_B \subseteq \{\eta < \theta : \eta + \alpha_B \in U\} \stackrel{\text{def.}}{=} F_U$. Seja $\gamma \in C_B \setminus C$; $\gamma \in F_B \subseteq F_U$ e $\gamma = \omega^\xi$ para algum ξ tal que $\alpha'_B < \xi < \theta$. De $\gamma \in F_U$ segue que $\gamma + \alpha_B \in U = \hat{F} + [1, \alpha]$, de modo que $\gamma + \alpha_B = \delta + \alpha'$ para algum $\delta \in \hat{F}$ e algum $\alpha' \in [1, \alpha]$.

Como $\alpha_B < \xi$ e $\gamma = \omega^\xi$, concluímos que a 1ª potência da F.N.C. de $\gamma + \alpha_B$ é precisamente ω^ξ ; e, pela unicidade de F.N.C., ω^ξ também será a 1ª potência da F.N.C. de $\delta + \alpha'$. Como $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha'_B < \xi$, segue que ω^ξ será também a 1ª potência da F.N.C. de $\delta \in \hat{F}$; e, pelo Lema 2.1(ii), $\omega^\xi \in F \subseteq C$. Assim $\gamma = \omega^\xi \in C$, contra $\gamma \in C_B \setminus C$. $\square$

Destacando as propriedades dos espaços $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ nos casos em que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ ou $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$ e nos casos em que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro sobre $\theta = \kappa^+$ estendendo o filtro c.u.b. de θ e não ω_1 -completo, teremos

Teorema 2.1 *Seja κ um cardinal infinito qualquer. Então*

- (i) *Existe um espaço X T_2 , conexo, inicialmente κ -compacto, com $|X| = \kappa^+$ e $\psi(p, X) = \kappa^+$ para todo $p \in X$.*
- (ii) *Existe um espaço X T_2 , conexo, inicialmente κ -compacto, com $|X| = \kappa^+$ e $\psi(X) = \kappa < \kappa^+ = \psi_c(X) < \pi\chi(X) \leq \chi(X)$.* $\square$

Sabe-se que nos compactos T_2 as funções χ , ψ e ψ_c coincidem. Na próxima proposição estão reunidas mais algumas situações com igualdades envolvendo estas funções cardinais (lembrando que sempre tem-se $\psi(p, X) \leq \psi_c(p, X) \leq \chi(p, X)$ e $\psi(F, X) \leq \psi_c(F, X) \leq \chi(F, X)$ para $X \subseteq F$ fechado).

Proposição 2.4 (i) *Seja X um espaço T_2 e seja $p \in X$ com X T_3 em p . Então $\psi(p, X) = \psi_c(p, X)$.*

(i') *Seja X um espaço T_3 e seja $F \subseteq X$ fechado com X T_4 em F . Então $\psi(F, X) = \psi_c(F, X)$.*

(ii) *Seja X um espaço T_2 , inicialmente κ -compacto e seja $p \in X$ com $\psi_c(p, X) \leq \kappa$. Então $\psi(p, X) = \psi_c(p, X) = \chi(p, X)$ e X é T_3 em p .*

(ii') *Seja X um espaço T_3 , inicialmente κ -compacto e seja $F \subseteq X$ fechado com $\psi_c(F, X) \leq \kappa$. Então $\psi(F, X) = \psi_c(F, X) = \chi(F, X)$ e X é T_4 em F .*

(iii) Seja X um espaço T_3 e sejam $p \in X$ e $G \subseteq X$ um G_λ de X (i.e. interseção de $\leq \lambda$ abertos) com $p \in G$. Então existe $H \subseteq X$ fechado tal que $p \in H \subseteq G$ e $\psi_c(H, X) \leq \lambda + \omega$.

(iv) Sejam $F_\alpha \subseteq X$ fechados para todo $\alpha < \lambda$. Então $\psi_c(\cap\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}, X) \leq \Sigma\{\psi_c(F_\alpha, X) : \alpha < \lambda\}$.

Demonstração: (i) e (i') são imediatos: por exemplo, se $\mathcal{U}$ é uma ψ -base para p em X com $|\mathcal{U}| = \psi(p, X) \geq \omega$, então para cada $U \in \mathcal{U}$, usando o fato que X é T_3 em p , seja V_U aberto em X tal que $p \in V_U \subseteq \overline{V_U} \subseteq U$; $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ será uma “ ψ_c -base” para p em X (i.e. $\mathcal{V} \subseteq \tau(X)$, $p \in \cap \mathcal{V}$ e $\{p\} = \cap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$) e portanto $\psi_c(p, X) \leq |\mathcal{V}| \leq |\mathcal{U}| = \psi(p, X)$.

(ii) e (ii'): Faremos a demonstração de (ii') (a de (ii) é similar e aparece também em [St], Teorema 3.4). Seja F um fechado não aberto de X (i.e. $\psi_c(F, X) \geq \omega$) e seja $\mathcal{V}$ uma “ ψ_c -base” para F em X (i.e. $\mathcal{V} \subseteq \tau(X)$, $F \subseteq \cap \mathcal{V}$ e $F = \cap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$) com $|\mathcal{V}| = \psi_c(F, X)$. Dado W aberto em X com $F \subseteq W$, então $\emptyset = F \cap (X \setminus W) = \cap\{\overline{V} \cap (X \setminus W) : V \in \mathcal{V}\}$. Temos assim uma interseção vazia de $\leq \kappa$ fechados; sendo X inicialmente κ -compato, existirá $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ finito tal que $\cap\{\overline{V} \cap (X \setminus W) : V \in \mathcal{V}_0\} = \emptyset$ ou $\cap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_0\} \subseteq W$. Seja $U = \cap \mathcal{V}_0$ um aberto em X . Então $F \subseteq \cap \mathcal{V}_0 = U \subseteq \overline{U} = \overline{\cap \mathcal{V}_0} \subseteq \cap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_0\} \subseteq W$. Isto mostra que X é T_4 em F e que $\mathcal{U} = \{\cap \mathcal{V}_0 : \emptyset \neq \mathcal{V}_0 \in [\mathcal{V}]^{<\omega}\}$ é uma base local para F em X ; donde

$$\chi(F, X) \leq |\mathcal{U}| = |\mathcal{V}| = \psi_c(F, X)$$

e conseqüentemente

$$\chi(F, X) = \psi_c(F, X) = \psi(F, X) .$$

(iii) Sejam $p \in G = \cap\{U_\xi : \xi < \lambda\}$, U_ξ abertos para $\xi < \lambda$, $\lambda \geq \omega$ (o caso $\lambda < \omega$ – i.e. G aberto – segue do caso $\lambda = \omega$). Vamos definir, por recursão transfinita sobre $\xi < \lambda$,

abertos V_ξ tais que

- para $\eta = 0$ ou $\eta < \lambda$ ordinal limite, escolhemos V_η aberto tal que $p \in V_\eta \subseteq \overline{V}_\eta \subseteq U_\eta$;
- para $\xi < \lambda$, escolhemos $V_{\xi+1}$ aberto tal que $p \in V_{\xi+1} \subseteq \overline{V}_{\xi+1} \subseteq V_\xi \cap U_{\xi+1}$.

e definimos $H = \cap\{V_\xi : \xi < \lambda\}$. Então

$$H = \cap\{V_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq \cap\{V_{\xi+1} : \xi < \lambda\} \subseteq \cap\{\overline{V}_{\xi+1} : \xi < \lambda\} \subseteq \cap\{V_\xi : \xi < \lambda\} = H.$$

Logo,

$$H = \cap\{V_\xi : \xi < \lambda\} = \cap\{V_{\xi+1} : \xi < \lambda\} = \cap\{\overline{V}_{\xi+1} : \xi < \lambda\}.$$

O que mostra que H é fechado e que $\{V_{\xi+1} : \xi < \lambda\}$ é uma “ ψ_c -base” para H em X ; donde $\psi_c(H, X) \leq |\{V_{\xi+1} : \xi < \lambda\}| \leq \lambda$. Por outro lado, $H = \cap\{V_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq \cap\{U_\xi : \xi < \lambda\} = G$; e $p \in H \subseteq G$.

(iv) Para cada $\alpha < \lambda$, seja $\mathcal{V}_\alpha$ uma ψ_c -base para F_α em X com $|\mathcal{V}_\alpha| = \psi_c(F_\alpha, X)$ e seja $\mathcal{V} = \cup\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Então $\mathcal{V} \subseteq \tau(X)$,

$$\cap\{F_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \cap\{\cap\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \lambda\} = \cap\{V : V \in \cup\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \lambda\}\} = \cap\mathcal{V} \quad \text{e}$$

$$\cap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\} = \cap\{\cap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_\alpha\} : \alpha < \lambda\} = \cap\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}.$$

Assim, $\mathcal{V}$ é uma ψ_c -base para $\cap\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ e portanto

$$\begin{aligned} \psi_c(\cap\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}, X) &\leq |\mathcal{V}| = |\cup\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \lambda\}| \leq \Sigma\{|\mathcal{V}_\alpha| : \alpha < \lambda\} \\ &= \Sigma\{\psi_c(F_\alpha, X) : \alpha < \lambda\}. \end{aligned}$$

□

Corolário

(i) Seja X um espaço regular, inicialmente κ -compacto e seja $p \in X$ com $\psi(p, X) \leq \kappa$.

Então $\psi(p, X) = \chi(p, X)$.

(ii) Seja X um espaço normal, inicialmente κ -compacto e seja $F \subseteq X$ fechado com $\psi(F, X) \leq \kappa$. Então $\psi(F, X) = \chi(F, X)$.

(iii) Seja X um espaço regular, inicialmente κ -compacto e seja $H \subseteq X$ compacto com $\psi(H, X) \leq \kappa$. Então $\psi(H, X) = \chi(H, X)$.

Demonstração: (i) e (ii) são conseqüências imediatas dos itens (i), (ii) e (i'), (ii'), respectivamente da Proposição 2.4. (iii) também seguirá de (i'), (ii'), tão logo se verifique que X é T_4 em H . De fato, seja U um aberto de X com $H \subseteq U$. Para cada $p \in H$, seja V_p um aberto de X com $p \in V_p \subseteq \overline{V_p} \subseteq U$. $\{V_p : p \in H\}$ é uma cobertura aberta do compacto H , logo existe $H_0 \subseteq H$ finito tal que $H \subseteq \bigcup\{V_p : p \in H_0\}$. Seja $V = \bigcup\{V_p : p \in H_0\}$. V é aberto em X e $H \subseteq V \subseteq \overline{V} = \overline{\bigcup\{V_p : p \in H_0\}} = \bigcup\{\overline{V_p} : p \in H_0\} \subseteq U$; o que mostra que X é T_4 em H . $\square$

Observe que o item (ii) do Teorema 2.1 mostra que o item (i) deste corolário não pode ser generalizado para espaços T_2 (e nem o item (ii) da Proposição 2.4 para pontos $p \in X$ tais que $\psi_c(p, X) \leq \kappa^+$).

2.2 O teorema, $t(X) = F(X)$, de Arhangel'skii

Outro resultado que pode ser generalizado para espaços inicialmente κ -compactos é o Teorema de Arhangel'skii (Prop. 1.7(i)) que diz que em compactos T_2 , $F(X) = t(X)$. Aqui analisaremos separadamente as situações em que $t(X) \leq F(X)$ e $F(X) \leq t(X)$.

Proposição 2.5 *Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal e seja X um espaço regular com $t(X) \geq \kappa^+$ e tal que para todo $H \subseteq X$ fechado, se $\psi_c(H, X) \leq \kappa$, então $\chi(H, X) \leq \kappa$. Então existe em X alguma seqüência livre de comprimento κ^+ (i.e. $F(X) \geq \kappa^+$).*

Demonstração: Aqui utilizaremos o seguinte resultado “técnico” que aparece como um lema dentro da Proposição 3.12 (p.51) de [Jul]: “Para todo espaço X , se $A, B \subseteq X$ e

$A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, então existe $C \subseteq B$ com $|C| \leq \chi(A, X)$ e $A \cap \overline{C} \neq \emptyset$.

Seja agora $p \in X$ tal que $t(p, X) \geq \kappa^+$ e, testemunhando isto, seja $S \subseteq X$ com $p \in \overline{S}$ e $p \notin \overline{T}$ para todo $T \in [S]^{\leq \kappa}$.

Definamos $B = \cup \{\overline{T} : T \in [S]^{\leq \kappa}\}$. Então $p \notin B$, enquanto que, de $S \subseteq B \subseteq \overline{S}$, segue que $p \in \overline{B} = \overline{S}$. Seja $C \in [B]^{\leq \kappa}$. Para cada $q \in C \subseteq B$ seja $T_q \in [S]^{\leq \kappa}$ tal que $q \in \overline{T_q}$ e seja $T = \cup \{T_q : q \in C\} \in [S]^{\leq \kappa}$. Então $C \subseteq \cup \{\overline{T_q} : q \in C\} \subseteq \overline{T} \subseteq B$, e portanto $\overline{C} \subseteq B$.

Vamos definir, por recursão transfinita, para cada $\alpha < \kappa^+$, $p_\alpha \in X$ e $A_\alpha \subseteq X$ tais que para todo $\alpha < \kappa^+$:

(i_α) $p_\alpha \in A_\alpha = \overline{A_\alpha}$ e $\psi_c(A_\alpha, X) \leq |\alpha| + \omega$;

(j_α) $(\forall \gamma < \alpha) A_\gamma \supseteq A_\alpha$;

(k_α) $p_\alpha \in A_\alpha \cap B$ e $A_\alpha \cap \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} = \emptyset$.

Seja $\alpha < \kappa^+$; supondo p_β e A_β escolhidos para todo $\beta < \alpha$ satisfazendo (i_β), (j_β) e (k_β), seja $P_\alpha = \{p_\beta : \beta < \alpha\} \in [B]^{\leq \kappa}$. Pelas considerações anteriores, $p \notin \overline{P_\alpha} \subseteq B$; e portanto $p \in X \setminus \overline{P_\alpha}$ que é um aberto. Logo – da Proposição 2.4(iii) com $\lambda = 1$ – existe $H_\alpha \subseteq X$ fechado com $\psi_c(H_\alpha, X) = \omega$ e $p \in H_\alpha \subseteq X \setminus \overline{P_\alpha}$ – i.e. $H_\alpha \cap \overline{P_\alpha} = \emptyset$ –. Seja $A_\alpha = \cap \{A_\beta : \beta < \alpha\} \cap H_\alpha$ (no caso $\alpha = 0$ pode-se escolher $A_0 = X$). A_α é um fechado de X , $p \in A_\alpha$, $A_\alpha \cap \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} = A_\alpha \cap \overline{P_\alpha} \subseteq H_\alpha \cap \overline{P_\alpha} = \emptyset$ e $A_\alpha \subseteq A_\gamma$ para todo $\gamma < \alpha$. Também, pela fórmula da Proposição 2.4(iv), $\psi_c(A_\alpha, X) \leq \Sigma\{\psi_c(A_\beta, X) : \beta < \alpha\} + \omega \leq \Sigma\{|\beta| + \omega : \beta < \alpha\} + \omega \leq |\alpha| + \omega \leq \kappa$; e consequentemente, pelas hipóteses desta proposição, $\chi(A_\alpha, X) \leq \kappa$.

Como $p \in A_\alpha \cap \overline{B} \neq \emptyset$, segue, do resultado “técnico” citado acima, que existe $C \subseteq B$ com $|C| \leq \chi(A_\alpha, X) \leq \kappa$ e $A_\alpha \cap \overline{C} \neq \emptyset$. Mas de $C \in [B]^{\leq \kappa}$ segue que $\overline{C} \subseteq B$, logo $A_\alpha \cap B \neq \emptyset$ e portanto pode-se escolher $p_\alpha \in A_\alpha \cap B$ concluindo a construção.

Obtém-se assim a seqüência $\langle p_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ a qual é livre, pois para $\alpha < \kappa^+$: $\overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} = \overline{P_\alpha}$, enquanto que $\overline{\{p_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa^+\}} \subseteq \overline{A_\alpha} = A_\alpha$ e $A_\alpha \cap \overline{P_\alpha} = \emptyset$. $\square$

Corolário *Seja X um espaço regular inicialmente $< t(X)$ -compacto (i.e. inicialmente κ -compacto para todo $\kappa < t(X)$). Então $t(X) \leq F(X) \leq s(X)$.*

Demonstração: Seja $\theta = t(X) > \omega$ (como, por convenção $F(X) \geq \omega$, no caso $\theta = \omega$ não há o que se demonstrar).

1º Caso: θ é um cardinal sucessor κ^+ : neste caso X é inicialmente κ -compacto; logo, pela Proposição 2.4(iii), para $H \subseteq X$ fechado, $\psi_c(H, X) \leq \kappa$ implica $\chi(H, X) \leq \kappa$ e a Proposição 2.5 se aplica fornecendo $F(X) \geq \kappa^+ = t(X)$.

2º Caso: θ não é um cardinal sucessor: neste caso, para cada cardinal $\kappa < \theta$, argumentando como no primeiro caso, conclui-se que $F(X) \geq \kappa^+$; e portanto $F(X) \geq \sup\{\kappa^+ : \kappa < \theta\} = \theta$.

A desigualdade $F(X) \leq s(X)$ é sempre válida, pois, se $\langle p_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ for uma seqüência livre, utilizando-se

$$U_\alpha = (X \setminus \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}}) \cap (X \setminus \overline{\{p_\beta : \alpha + 1 \leq \beta < \lambda\}})$$

como vizinhança de p_α , conclui-se que o conjunto $\{p_\alpha : \alpha < \lambda\}$ é discreto. $\square$

A outra desigualdade, $F(X) \leq t(X)$, segue do seguinte argumento tradicional:

Proposição 2.6 *Seja κ um cardinal regular. Se $\langle p_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ for uma seqüência livre num espaço X e $p \in X$ for um ponto de acumulação completa de $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$, então $t(p, X) \geq \kappa$.*

Demonstração: Seja $S = \{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Vamos mostrar que para $B \in [S]^{<\kappa}$, $p \notin \overline{B}$ – isto, junto com o fato que $p \in \overline{S}$, implica que $t(p, X) \geq \kappa$.

Seja então $B \subseteq S$ com $|B| < \kappa$. Para cada $q \in B$, seja $\alpha_q < \kappa$ tal que $q = p_{\alpha_q}$ e seja $\sigma = \sup\{\alpha_q : q \in B\}$. $B \subseteq \{p_\alpha : \alpha \leq \sigma\}$, e, como κ é regular e $|B| < \kappa$, segue que $\sigma < \kappa$.

Se p pertencesse a $\overline{B}$, então $p \notin \overline{\{p_\alpha : \sigma + 1 < \alpha < \kappa\}}$ (pois $\overline{\{p_\alpha : \alpha \leq \sigma + 1\}} \cap \overline{\{p_\alpha : \sigma + 1 < \alpha < \kappa\}} = \emptyset$ e $p \in \overline{B} \subseteq \overline{\{p_\alpha : \alpha \leq \sigma + 1\}}$) e portanto existiria U aberto de X com $p \in U$ e $U \cap \{p_\alpha : \sigma + 1 < \alpha < \kappa\} = \emptyset$. De modo que $U \cap S \subseteq \{p_\alpha : \alpha \leq \sigma + 1\}$ e $|U \cap S| \leq |\sigma| < \kappa$, contradizendo o fato de p ser um ponto de acumulação completa de S . $\square$

Corolário Se X for um espaço inicialmente $F(X)$ -compacto, então $F(X) \leq t(X)$.

Demonstração: Seja $\theta = F(X) > \omega$.

1º Caso: θ é um cardinal sucessor κ^+ : neste caso existe alguma seqüência livre $\langle p_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ em X ; e, como X é inicialmente κ^+ -compacto, o conjunto $S = \{p_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ admite algum ponto de acumulação completa $p \in X$. Pela Proposição 2.6, $F(X) = \kappa^+ \leq t(p, X) \leq t(X)$.

2º Caso: θ é um cardinal limite: neste caso para cada cardinal $\kappa < \theta$, $\kappa^+ < \theta$ e, argumentando como no primeiro caso, existe algum $p \in X$ tal que $t(p, X) \geq \kappa^+$. Logo, $t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\} \geq \sup\{\kappa^+ : \kappa < \theta\} = \theta$. $\square$

Juntando as duas desigualdades obtemos o

Teorema 2.2 Seja X um espaço regular. Se X for inicialmente $t(X)^+$ -compacto ou se for inicialmente $F(X)$ -compacto, então $t(X) = F(X)$.

Demonstração: No primeiro caso (X inicialmente $t(X)^+$ -compacto), segue do Corolário da Proposição 2.5 que $t(X) \leq F(X)$. Se $t(X) < F(X)$, então $t(X)^+ \leq F(X)$ e portanto existe alguma seqüência livre de comprimento $t(X)^+$ em X ; e como no primeiro caso do Corolário da Proposição 2.6, existe $p \in X$ com $t(p, X) \geq t(X)^+$.

No segundo caso (X inicialmente $F(X)$ -compacto), segue do Corolário da Proposição 2.6 que $F(X) \leq t(X)$. Se $\kappa = F(X) < t(X)$, então $t(X) \geq \kappa^+$ e X é um espaço regular

inicialmente κ -compacto, de modo que para todo $H \subseteq X$ fechado, se $\psi_c(H, X) \leq \kappa$, então $\chi(H, X) \leq \kappa$ e a Proposição 2.5 se aplica fornecendo $F(X) \geq \kappa^+ = F(X)^+$. $\square$

Observações: A aparente assimetria entre as duas condições alternativas do teorema (X inicialmente $t(X)^+$ -compacto ou X inicialmente $F(X)$ -compacto) poderia sugerir que talvez fosse suficiente ter-se X inicialmente $t(X)$ -compacto. Que este não é o caso pode-se ver através de alguns exemplos bastante simples:

1. Seja κ um cardinal infinito e seja $X = \kappa^+$ com a topologia da ordem. Sabe-se que X é inicialmente κ -compacto e $t(X) = \kappa$ (pois $t(\alpha, X) = cf\alpha$ para $\alpha \in X$ ordinal limite). Porém, $F(X) = \kappa^+$, pois, por exemplo, a seqüência $\langle \alpha + 1 : \alpha < \kappa^+ \rangle$ é uma seqüência livre de comprimento κ^+ .
2. Pode-se generalizar este exemplo do seguinte modo: sejam κ e λ cardinais infinitos com $\kappa < cf\lambda$ e seja $Y = \{\alpha < \lambda : \alpha \text{ é sucessor ou } cf\alpha \leq \kappa\}$, com a topologia τ de subespaço do espaço $X = \lambda$ com a topologia da ordem (observe que τ não coincide com a topologia τ_0 da ordem sobre Y : o ponto $\alpha = \kappa^+ + 1$ é isolado em $\langle Y, \tau \rangle$ e tem caráter κ^+ em $\langle Y, \tau_0 \rangle$). Neste caso também Y é inicialmente κ -compacto (seja $A \subseteq Y$, $\omega \leq |A| \leq \kappa$; vamos mostrar que A tem um ponto de acumulação completa em Y . Sabe-se que X é inicialmente θ -compacto para todo $\theta < cf\lambda$, logo A tem ponto de acumulação completa α em X . Se $cf\alpha > \kappa$, então $\beta = \sup(A \cap \alpha) < \alpha$ – pois $|A \cap \alpha| \leq |A| \leq \kappa < cf\alpha$ – e portanto $]\beta, \alpha]$ seria uma vizinhança de α em X disjunta de A . Logo α é sucessor ou $cf\alpha \leq \kappa$ e portanto $\alpha \in Y$. Seja U uma vizinhança de α em Y ; $U = V \cap Y$ para alguma vizinhança V de α em X . Assim,

$$|U \cap A| = |(V \cap Y) \cap A| = |V \cap (Y \cap A)| = |V \cap A| = |A|, \quad t(Y) = \kappa$$

(aqui também $t(\alpha, Y) = cf\alpha$ para $\alpha \in Y$ ordinal limite) e $F(Y) = \lambda$, pois a seqüência $\langle \alpha + 1 : \alpha < \lambda \rangle$ é uma seqüência livre de comprimento λ em Y .

Esta necessidade de tanta “compacidade-inicial” se deve à dificuldade em se satisfazer a desigualdade $F(X) \leq t(X)$; uma vez que – pela Proposição 2.5 e seu Corolário – para a outra desigualdade, $t(X) \leq F(X)$ – que é útil quando se precisa de seqüências livres “longas” –, é suficiente que X seja T_3 e inicialmente $< t(X)$ -compacto.

Surge então a pergunta se T_2 ao invés de T_3 seria suficiente para esta desigualdade. Os espaços $\langle X, T_{\mathcal{F}} \rangle$ (estudados nas três primeiras Proposições) quando $\theta = \kappa^+$ e $\mathcal{F}$ é um filtro uniforme sobre θ satisfazendo (H_1) fornecem exemplos de espaços T_1 inicialmente κ -compactos com $t(X) = \kappa^+$ (pois, dado $\alpha \in X$, seja $S =]\alpha, \theta[$. É fácil de ver, pela Proposição 2.2(i), que $\alpha \in \overline{S}$; porém $\alpha \notin \overline{B}$ para $B \in [S]^{\leq \kappa}$, pois se $B \in [S]^{\leq \kappa}$, então $\beta = \sup B < \theta$ e escolhendo $a \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $0 \in A$ e $(\forall \xi \in A) (0 \neq \xi \rightarrow \beta < \xi)$ – como em (H_1) – o aberto $U = A \cup]0, \alpha]$ será uma vizinhança de α disjunta de B ; assim $t(\alpha, X) = \kappa^+$).

Além disso, definindo $Y = X \cup \{\theta\}$ com topologia $\tau_{\mathcal{F}}^*$ estendendo $\tau_{\mathcal{F}}$ e com base de vizinhanças para θ e família $]\alpha, \theta]$ para $\alpha < \theta$, teremos que $\langle Y, \tau_{\mathcal{F}}^* \rangle$ é T_1 , compacto (pois $\tau_{\mathcal{F}}^*$ é menos fina que a topologia da ordem sobre Y , que é compacta) e $t(Y) = \kappa^+$ (estes espaços nunca são T_2).

Para $\mathcal{F} = \{F \subseteq \theta : (\exists \alpha < \theta)]\alpha, \theta[\subseteq F\}$ – que é uniforme e satisfaz (H_1) – é fácil de ver que se $\phi \neq U \in \tau_{\mathcal{F}}$, então existe $\alpha < \theta$ tal que $]\alpha, \theta[\subseteq U$; de modo que se $A \in [X]^{\theta}$, então $\overline{A} = X$ e não podem existir seqüências livres em $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ de comprimento $\theta = \kappa^+$ (e nem em $\langle Y, \tau_{\mathcal{F}}^* \rangle$); i.e. $F(X) < \kappa^+ = t(X)$ (e $F(Y) < \kappa^+ = t(Y)$). Infelizmente estes exemplos não são T_2 e não dispomos até agora de nenhum exemplo T_2 com $F(X) < \kappa^+$ (a pergunta ainda está em aberto).

2.3 Pontos de caráter mínimo

Aproveitando o Teorema 2.2 vamos generalizar o Teorema 1 de [Ju5]: “Seja X um espaço compacto T_2 com $t(X) = \omega$. Então existe $p \in X$ com $\chi(p, X) \leq 2^{\omega}$ ”.

Lema 2.3 *Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal infinito e seja X um espaço regular inicialmente κ -compacto com $F(X) \leq \kappa$. Então existem $S \subseteq X$ com $|S| \leq \kappa$ e $\emptyset \neq H \subseteq X$ fechado com $\psi_c(H, X) \leq \kappa$ tais que $\overline{S} \supseteq H$.*

Demonstração: Suponhamos que não existam S e H como no enunciado. Vamos construir, por recursão transfinita sobre $\alpha < \kappa^+$, $p_\alpha \in X$ e $H_\alpha \subseteq X$ tais que para todo $\alpha < \kappa^+$

$$(i_\alpha) \quad p_\alpha \in H_\alpha = \overline{H_\alpha} \text{ e } \psi_c(H_\alpha, X) \leq \kappa;$$

$$(j_\alpha) \quad (\forall \beta < \alpha) \quad H_\beta \supseteq H_\alpha;$$

$$(k_\alpha) \quad H_\alpha \cap \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} = \emptyset.$$

Podemos começar com $H_0 = X$ e $p_0 \in H_0 = X$ qualquer. Seja $0 < \alpha < \kappa^+$. Supondo p_β e H_β escolhidos para todo $\beta < \alpha$ satisfazendo (i_β) , (j_β) e (k_β) , sejam $S_\alpha = \{p_\beta : \beta < \alpha\}$ e $\widetilde{H}_\alpha = \cap \{H_\beta : \beta < \alpha\}$. Como $|\alpha| \leq \kappa$ e X é inicialmente κ -fechado, segue que $\widetilde{H}_\alpha \neq \emptyset$; e da Proposição 2.4(iv), segue que $\psi_c(\widetilde{H}_\alpha, X) \leq \kappa \cdot |\alpha| \leq \kappa$. Por sua vez $|S_\alpha| \leq \kappa$, logo, pela hipótese sobre S e H , não se pode ter $\widetilde{H}_\alpha \subseteq \overline{S_\alpha}$ e portanto $C_\alpha = \widetilde{H}_\alpha \setminus \overline{S_\alpha} \neq \emptyset$. Seja $p_\alpha \in C_\alpha$; $C_\alpha = \widetilde{H}_\alpha \setminus \overline{S_\alpha} = \widetilde{H}_\alpha \cap (X \setminus \overline{S_\alpha})$ é uma interseção de $\leq \kappa$ abertos, i.e. é um G_k e pela Proposição 2.4(iii) existe $H_\alpha \subseteq X$ fechado com $\psi_c(H_\alpha, X) \leq \kappa$ e $p_\alpha \in H_\alpha \subseteq C_\alpha$. p_α e H_α assim escolhidos satisfazem (i_α) , (j_α) , (k_α) , pois $H_\alpha \cap \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} \subseteq C_\alpha \cap \overline{S_\alpha} \subseteq (X \setminus \overline{S_\alpha}) \cap \overline{S_\alpha} = \emptyset$; e a construção prossegue.

A seqüência $\langle p_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ que se obtem no fim é uma seqüência livre, pois para todo $\alpha < \kappa^+$, $\overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} = \overline{S_\alpha}$, enquanto que $\{p_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa^+\} \subseteq H_\alpha$, donde $\overline{\{p_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa^+\}} \subseteq H_\alpha$ e portanto $\overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \overline{\{p_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa^+\}} \subseteq \overline{S_\alpha} \cap H_\alpha = \emptyset$. E isto contradiz o fato de que $F(X) \leq \kappa$. $\square$

Teorema 2.3 *Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal e seja X um espaço regular. Se X for inicialmente κ -compacto e $F(X) \leq \kappa$ ou se for inicialmente κ^+ -compacto e $t(X) \leq \kappa$, então existe $p \in X$ com $\chi(p, X) \leq 2^\kappa$.*

Demonstração: Suponhamos primeiramente X inicialmente κ -compacto com $F(X) \leq \kappa$ e sejam S e H como no Lema. Então $w(H) \leq w(\overline{S}) \leq 2^{d(\overline{S})} \leq 2^\kappa$ e portanto, para todo $p \in H$, $\chi(p, H) \leq w(H) \leq 2^\kappa$. Vamos mostrar que $\chi(p, X) \leq 2^\kappa$ também.

Seja $p \in H$ e seja $\mathcal{B}$ uma base local para p em H com $|\mathcal{B}| \leq 2^\kappa$. Para cada $B \in \mathcal{B}$ sejam U_B e V_B abertos em X com $B = U_B \cap H$ e $p \in V_B \subseteq \overline{V_B} \subseteq U_B$ (fechos em X). Seja também $\mathcal{W}$ uma ψ_c -base para H em X com $|\mathcal{W}| \leq \kappa$. Vamos verificar que $\mathcal{C} = \{V_B \cap (\cap \mathcal{W}_0) : B \in \mathcal{B}, \mathcal{W}_0 \in [\mathcal{W}]^{<\omega}\}$ é uma base local para p em X .

De fato, seja T um aberto de X com $p \in T$. Então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq T \cap H$ e portanto $\overline{V_B} \cap H \subseteq U_B \cap H = B \subseteq T \cap H \subseteq T$; donde $\overline{V_B} \cap \cap \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\} \subseteq T$ ou $(X \setminus T) \cap \overline{V_B} \cap \cap \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\} = \emptyset$. Esta é uma interseção de $\leq \kappa$ fechados de X , logo existe $\mathcal{W}_0 \in [\mathcal{W}]^{<\omega}$ tal que

$$(X \setminus T) \cap \overline{V_B} \cap \cap \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}_0\} = \emptyset \quad \text{ou} \quad \overline{V_B} \cap \cap \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}_0\} \subseteq T$$

e a fortiori $V_B \cap \cap \{W : W \in \mathcal{W}_0\} \subseteq T$, i.e. $V_B \cap (\cap \mathcal{W}_0) \subseteq T$, que é um elemento de $\mathcal{C}$. Assim, $\chi(p, X) \leq |\mathcal{C}| \leq 2^\kappa$.

No segundo caso (X inicialmente κ^+ -compacto e $t(X) \leq \kappa$), pelo Teorema 2.2, $F(X) = t(X) \leq \kappa$ e recaímos no primeiro caso. $\square$

2.4 Um resultado de Juhász sobre um problema de van Douwen

Os espaços $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ fornecem também um exemplo para uma limitação numa generalização de um resultado recente de Juhász sobre um problema de Van Douwen. Em [Ju4] Juhász prova no Teorema 2 que se κ é um cardinal fortemente compacto, então $D(\kappa)$ é válida; onde $D(\kappa)$ é a afirmação: “Um espaço T_1 , 1^o enumerável, no qual todo par de subconjuntos fechados disjuntos de cardinalidade $< \kappa$ pode ser separado (por abertos disjuntos) é normal”. van Douwen em [vD] tinha perguntado se $D(c^+)$ seria válida ($c = 2^\omega$).

Este teorema pode ser estendido para espaços X tais que $\chi(p, X) < \kappa$ para todo $p \in X$ (Teorema 2.4 logo adiante); e este resultado pode ser combinado com teoremas como o de Morita (X é normal e λ -paracompacto se e só se $X \times I^\lambda$ é normal) para fornecer por exemplo: “Seja κ um cardinal fortemente compacto. Para todo cardinal $\lambda < \kappa$, se X é um espaço T_1 , com $\chi(p, X) < \kappa$ para todo $p \in X$ e tal que todo par de subconjuntos fechados disjuntos de cardinalidade $< \kappa$ de $X \times I^\lambda$ pode ser separado, então X é λ -paracompacto.” Observe que mesmo o análogo a este resultado para X primeiro enumerável (que é mais fraco do que este) não é consequência do Teorema 2 de [Ju4] (pois $X \times I^\lambda$ não será primeiro enumerável).

Por outro lado, o espaço $\langle X, \tau_1 \rangle$, para $\theta = \kappa$, um cardinal regular (visto nas Proposições 2.1, 2.2 e 2.3, como um dos espaços $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ para $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{A \subseteq \theta : (\exists \xi < \theta) \{\omega^\xi \cdot \gamma : \gamma < \theta\} \subseteq A\}$) mostra que para todo κ regular existe algum espaço X T_2 , não normal, com $\chi(X) = \kappa$ e no qual todo par de subconjuntos fechados disjuntos de cardinalidade $< \kappa$ pode ser separado; conforme mostraremos agora:

Sejam F_0 e F_1 dois fechados disjuntos de cardinalidade $< \kappa$ de $\langle X, \tau_1 \rangle$. Então $\beta = \sup(F_0 \cup F_1) < \kappa$, uma vez que κ é regular; de modo que $F_0 \cup F_1 \subseteq]0, \beta] \subseteq X$. F_0 e F_1 sendo fechados em $\langle X, \tau_1 \rangle$ serão fechados em $\langle X, \tau_0 \rangle$ (τ_0 é a topologia da ordem sobre X) e também em $\langle Y, \tau'_0 \rangle$, onde $Y =]0, \beta]$ e τ'_0 é a topologia da ordem sobre Y . Como $\langle Y, \tau'_0 \rangle$ é normal, existem U_0 e U_1 abertos em $\langle Y, \tau'_0 \rangle$ com $F_i \subseteq U_i$ para $i \in 2$ e $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Seja $A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}_1}$ tal que $0 \in A$ e $(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A) (\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \beta < \alpha_2)$ – por exemplo, $A = \{\omega^\xi \gamma : \gamma < \alpha\}$ para $\beta < \xi < \kappa$; a formulação genérica que estamos apresentando mostra que este argumento vale para todos os espaços $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ que satisfazem (H_2) –; e sejam $V_i = A + U_i$ para $i \in 2$. Então, para $i \in 2$, pelo Lema 2.1(iii), $V_i \in \tau_1$, $F_i \subseteq U_i \subseteq V_i$ e $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, pois, caso contrário, existiriam $\alpha_0, \alpha_1 \in A$ e $\eta_i \in U_i$ para $i \in 2$ tais que $\alpha_0 + \eta_0 = \alpha_1 + \eta_1 \in V_0 \cap V_1$. De $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ segue que $\eta_0 \neq \eta_1$. Supondo, sem perda de generalidade, que $\eta_0 < \eta_1$ concluimos que não se pode ter $\alpha_0 \leq \alpha_1$ –

senão $\alpha_0 + \eta_0 \leq \alpha_1 + \eta_0 < \alpha_1 + \eta_1$ -; assim $\alpha_1 < \alpha_0$ e portanto $\alpha_1 + \beta < \alpha_0$. Logo, $\alpha_1 + \eta_1 \leq \alpha_1 + \beta < \alpha_0 \leq \alpha_0 + \eta_0$, uma vez que $\eta_1 \in U_1 \subseteq Y =]0, \beta]$.

Se $\mathcal{F}$ satisfaz (H_2) , o argumento acima sugere o seguinte fenômeno: se $Y \subseteq X$ e $|Y| < \theta$, então $\tau_{\mathcal{F}}|Y$, a topologia sobre Y induzida por $\tau_{\mathcal{F}}$, é a mesma que $\tau_0|Y$, a topologia induzida por τ_0 . De fato, é óbvio que $\tau_{\mathcal{F}}|Y \subseteq \tau_0|Y$ (pois $\tau_{\mathcal{F}} \subseteq \tau_0$); por outro lado, dado $V \in \tau_0|Y$, seja $U_0 \in \tau_0$ tal que $V = U_0 \cap Y$ e seja $\beta = \sup Y < \theta$. Como $]0, \beta]$ é um aberto de X na topologia τ_0 , $U = U_0 \cap]0, \beta] \in \tau_0$ e $V = U_0 \cap Y = (U_0 \cap]0, \beta]) \cap Y = U \cap Y$ (pois $Y \subseteq]0, \beta]$). Seja agora $A \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $0 \in A$ e $(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A) (\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \beta < \alpha_2)$. Como acima, $W = A + U \in \tau_{\mathcal{F}}$ e $W \cap Y = U \cap Y = V$; de modo que $V \in \tau_{\mathcal{F}}|Y$.

Voltemos agora à generalização do teorema de Juhász. Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal e sejam $D'(\kappa)$ a afirmação: “Um espaço T_1 , com $\chi(p, X) < \kappa$ para todo $p \in X$ e no qual todo par de subconjuntos fechados disjuntos de cardinalidade menor do que κ pode ser separado é normal” e $S'(\kappa)$ a afirmação: “Num espaço X com $\chi(p, X) < \kappa$ para todo $p \in X$ toda família κ -separável é separável”; onde uma família $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se diz *separável* se existe uma família $\{U_H : H \in \mathcal{H}\}$ de abertos dois a dois disjuntos com $H \subseteq U_H$ para todo $H \in \mathcal{H}$; e $\mathcal{H}$ se diz κ -*separável* se para todo $Z \in [X]^{<\kappa}$ a família $\mathcal{H}|Z \stackrel{\text{def}}{=} \{H \cap Z : H \in \mathcal{H}\}$ for separável.

Lembremos que κ se diz um cardinal *limite forte* se $2^\lambda < \kappa$ para todo cardinal $\lambda < \kappa$; e que uma das propriedades que caracteriza o fato de um cardinal regular κ ser *fortemente compacto* é a seguinte: para todo conjunto A com $|A| \geq \kappa$ existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $[A]^{<\kappa}$ tal que $\mathcal{U}$ é κ -completo e para todo $P \in [A]^{<\kappa}$, $\{Q \in [A]^{<\kappa} : P \subseteq Q\} \in \mathcal{U}$ (um tal $\mathcal{U}$ se diz uma medida fina sobre $[A]^{<\kappa}$; veja o Lema 33.1 de [Jech] para maiores detalhes).

Lema 2.4 *Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal limite forte. Se $S'(\kappa)$ vale, então $D'(\kappa)$ vale.*

Demonstração: Seja X um espaço T_1 , com $\chi(p, X) < \kappa$ para todo $p \in X$, no qual todo par de fechados disjuntos de cardinalidade $< \kappa$ pode ser separado e sejam F_0 e F_1 dois fechados disjuntos quaisquer de X .

Observe que X é certamente T_2 , pois dados $p, q \in X$ com $p \neq q$, $\{p\}$ e $\{q\}$ são dois fechados disjuntos de cardinalidade $< \kappa$ e consequentemente podem ser separados.

Vamos mostrar que a família $\mathcal{H} = \{F_0, F_1\}$ é κ -separável, para concluir, a partir de $S'(\kappa)$, que F_0 e F_1 podem ser separados.

Seja $Z \in [X]^{<\kappa}$. Então $|F_i \cap Z| < \kappa$ e portanto $|\overline{F_i \cap Z}| \leq 2^{2^{|F_i \cap Z|}} < \kappa$, uma vez que κ é limite forte (usando o resultado de 1937 de Pospisil: “se X é T_2 , então $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ – veja o Teorema 3.2 de [Ho] –; neste caso com $X = \overline{F_i \cap Z}$ e $d(X) \leq |F_i \cap Z| < \kappa$), para $i \in 2$. Assim, $\overline{F_0 \cap Z}$ e $\overline{F_1 \cap Z}$ são dois fechados disjuntos de cardinalidade $< \kappa$ e portanto podem ser separados; e a fortiori $F_0 \cap Z$ e $F_1 \cap Z$ também podem ser separados, mostrando que $\mathcal{H}|Z = \{F_0 \cap Z, F_1 \cap Z\}$ é uma família separável e que $\mathcal{H}$ é κ -separável. $\square$

Teorema 2.4 *Se κ é um cardinal fortemente compacto, então $D'(\kappa)$ vale.*

Demonstração: Sendo κ fortemente compacto, ele é em particular um limite forte; logo, pelo Lema 2.4, é suficiente provar que $S'(\kappa)$ vale.

Seja então X um espaço com $|X| \geq \kappa$ (se $|X| < \kappa$ não há o que provar), $\chi(p, X) < \kappa$ para todo $p \in X$ e seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma família κ -separável.

Para cada $p \in X$, seja $\mathcal{V}_p$ uma base local para p em X com $|\mathcal{V}_p| = \chi(p, X) < \kappa$; e seja $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}([X]^{<\kappa})$ um ultrafiltro sobre $[X]^{<\kappa}$ κ -completo e tal que para todo $p \in X$, $F_p \stackrel{\text{def}}{=} \{Z \in [X]^{<\kappa} : p \in Z\} \in \mathcal{U}$ (observe que $F_p = \{Q \in [X]^{<\kappa} : P \subseteq Q\}$, onde $P = \{p\} \in [X]^{<\kappa}$; assim qualquer medida fina $\mathcal{U}$ sobre $[X]^{<\kappa}$ serve).

Para cada $Z \in [X]^{<\kappa}$, como $\mathcal{H}|Z$ é separável, seja $\mathcal{V}_Z = \{V(H, Z) : H \in \mathcal{H}\}$ uma família de abertos dois a dois disjuntos com $H \cap Z \subseteq V(H, Z)$ para cada $H \in \mathcal{H}$.

Seja $p \in \bigcup \mathcal{H}$ e seja $Z \in F_p$. Então existe um (único) $H \in \mathcal{H}$ tal que $p \in H \cap Z \subseteq V(H, Z)$. Como $\mathcal{V}_p$ é uma base local para p (e $V(H, Z)$ é aberto) podemos escolher $W(p, Z) \in \mathcal{V}_p$ tal que $W(p, Z) \subseteq V(H, Z)$; e para $p \in \bigcup \mathcal{H}$ e $V \in \mathcal{V}_p$ vamos definir $Y(p, V) = \{Z \in F_p : W(p, Z) = V\} \subseteq F_p$. Para cada $Z \in F_p$, certamente

$Z \in Y(p, W(p, Z))$; assim $\cup\{Y(p, V) : V \in \mathcal{V}_p\} = F_p \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ é κ -completo e $|\mathcal{V}_p| < \kappa$, segue que existe $V_p \in \mathcal{V}_p$ tal que $T(p) \stackrel{\text{def.}}{=} Y(p, V_p) \in \mathcal{U}$.

Para cada $H \in \mathcal{H}$, seja $U_H = \cup\{V_p : p \in H\}$. U_H é um aberto contendo H . Vamos verificar que os U_H são dois a dois disjuntos para concluir que a família $\mathcal{H}$ é separável.

Sejam $H_0, H_1 \in \mathcal{H}$, $H_0 \neq H_1$ e sejam $p_0 \in H_0$, $p_1 \in H_1$. $T(p_0) \cap T(p_1) \neq \emptyset$ (pois $T(p_i) \in \mathcal{U}$ para $i \in 2$ e $\mathcal{U}$ é filtro); logo existe $Z \in T(p_0) \cap T(p_1) = Y(p_0, V_{p_0}) \cap Y(p_1, V_{p_1})$. Pela definição de $Y(p, V)$ segue que $W(p_i, Z) = V_{p_i}$; e pela escolha de $W(p_i, Z)$ segue que $W(p_i, Z) \subseteq V(H_i, Z)$ para $i \in 2$. Mas $V(H_0, Z) \cap V(H_1, Z) = \emptyset$ (pois $H_0 \cap H_1 = \emptyset$); logo $V(p_0) \cap V(p_1) = \emptyset$. Como isto vale para todos $p_0 \in H_0$ e $p_1 \in H_1$, segue que $U_{H_0} \cap U_{H_1} = \emptyset$. □

2.5 O teorema, de extensão de funções contínuas, de Taïmanov

Nas próximas duas generalizações – de propriedades de espaços compactos para espaços inicialmente κ -compactos – a condição de separabilidade necessária parece ser a de Urysohn.

A primeira generalização será a do teorema de 1952 de Taïmanov, que fornece um critério para a existência de extensões de funções contínuas com valores em compactos: “Sejam A um subespaço denso de um espaço topológico X e f uma função contínua de A num espaço compacto (T_2) Y . A função f tem uma extensão contínua sobre X se e só se para todo par de subconjuntos fechados disjuntos B_0 e B_1 de Y as imagens inversas $f^{-1}(B_0)$ e $f^{-1}(B_1)$ tem fechos disjuntos em X ” (veja o Teorema 3.2.1 de [Eng]).

Este resultado permanece válido se Y for um espaço inicialmente $\chi(X)$ -compacto, Urysohn:

Teorema 2.5 *Sejam A um subespaço denso de um espaço topológico X e f uma função contínua de A num espaço Y inicialmente $\chi(X)$ -compacto, Urysohn. A função f tem uma*

extensão contínua sobre X se e só se para todo par de subconjuntos fechados disjuntos B_0 e B_1 de Y as imagens inversas $f^{-1}(B_0)$ e $f^{-1}(B_1)$ tem fechos disjuntos em X .

Demonstração: Para que a notação de fecho de um conjunto não fique sobrecarregada, usaremos sempre $\overline{E}$ para indicar o fecho de E com a convenção que se $E \subseteq X$ o fecho será em relação a X (e nunca em relação a A ; mesmo que $E \subseteq A$) e se $E \subseteq Y$ o fecho será em relação a Y – e o contexto sempre deixa claro se $E \subseteq X$ ou $E \subseteq Y$ –.

Suponhamos inicialmente que existe $F : X \rightarrow Y$ contínua estendendo f . Então, para $B_0, B_1 \subseteq Y$ fechados disjuntos,

$$f^{-1}(B_i) \subseteq F^{-1}(B_i)$$

e portanto

$$\overline{f^{-1}(B_i)} \subseteq \overline{F^{-1}(B_i)} = F^{-1}(B_i), \text{ para } i \in 2.$$

Donde

$$\overline{f^{-1}(B_0)} \cap \overline{f^{-1}(B_1)} \subseteq F^{-1}(B_0) \cap F^{-1}(B_1) = \emptyset.$$

Reciprocamente, suponhamos que a condição do enunciado (sobre fechados disjuntos) seja válida. Para cada $p \in X$ fixemos uma base local de p em X , $\mathcal{U}_p$ com $|\mathcal{U}_p| = \chi(p, X) \leq \chi(X)$ e seja $\mathcal{F}_p = \{\overline{f[A \cap U]} : U \in \mathcal{U}_p\}$.

$\mathcal{F}_p$ é uma família de $\leq \chi(X)$ fechados de Y com a propriedade da interseção finita (i.e. interseções finitas de elementos de $\mathcal{F}_p$ são não vazias), pois dados $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_p$, para $n \in \omega$, $p \in U_1 \cap \dots \cap U_n$ e portanto $U_1 \cap \dots \cap U_n$ é um aberto não vazio de X . Logo, $A \cap (U_1 \cap \dots \cap U_n) \neq \emptyset$, uma vez que A é denso em X e consequentemente

$$\begin{aligned} \phi \neq f[A \cap (U_1 \cap \dots \cap U_n)] &\subseteq f[A \cap U_1] \cap \dots \cap f[A \cap U_n] \\ &\subseteq \overline{f[A \cap U_1]} \cap \dots \cap \overline{f[A \cap U_n]}. \end{aligned}$$

Como Y é inicialmente $\chi(X)$ -compacto, segue que $\bigcap \mathcal{F}_p \neq \emptyset$.

Seja $y \in \bigcap \mathcal{F}_p$. Vamos verificar que $p \in \overline{f^{-1}(V)}$ para toda vizinhança V de y : de fato, seja W uma vizinhança de p e seja $U \in \mathcal{U}_p$ tal que $U \subseteq W$. $y \in \bigcap \mathcal{F}_p \subseteq \overline{f[A \cap U]} \subseteq \overline{f[A \cap W]}$ e portanto $V \cap f[A \cap W] \neq \emptyset$. Seja $a \in A \cap W$ tal que $f(a) \in V$. Então $a \in W \cap f^{-1}(V)$ e assim $W \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ mostrando que $p \in \overline{f^{-1}(V)}$.

Suponhamos agora – em busca de uma contradição – que existissem $y_0, y_1 \in \bigcap \mathcal{F}_p$ com $y_0 \neq y_1$, e sejam V_0 e V_1 vizinhanças de y_0 e y_1 respectivamente com $\overline{V_0} \cap \overline{V_1} = \emptyset$ (pois Y é Urysohn). Então $\overline{f^{-1}(\overline{V_0})} \cap \overline{f^{-1}(\overline{V_1})} = \emptyset$, pela condição do enunciado, contra $p \in \overline{f^{-1}(V_0)} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{V_0})}$ e $p \in \overline{f^{-1}(V_1)} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{V_1})}$.

Logo $\bigcap \mathcal{F}_p$ é um conjunto unitário, digamos, $\bigcap \mathcal{F}_p = \{y_p\}$.

Seja $F : X \rightarrow Y$ definida por $F(p) = y_p$. Para $p \in A$, $f(p) \in \overline{f[A \cap U]}$ para todo $U \in \mathcal{U}_p$ e portanto $f(p) \in \bigcap \mathcal{F}_p = \{F(p)\}$; i.e. $f(p) = F(p)$ e F estende f .

Resta provar que f é contínua: seja $p \in X$ e seja V uma vizinhança de $F(p)$ em Y . É suficiente exibir $U \in \mathcal{U}_p$ tal que $F(U) \subseteq V$. De $\bigcap \{\overline{f[A \cap U]} : U \in \mathcal{U}_p\} = \bigcap \mathcal{F}_p = \{F(p)\} \subseteq V$ segue que $\bigcap \{\overline{f[A \cap U]} \setminus V : U \in \mathcal{U}_p\} = \emptyset$; o que mostra que a família de $\leq \chi(X)$ fechados de Y , $\{\overline{f[A \cap U]} \setminus V : U \in \mathcal{U}_p\}$ não pode ter a propriedade da interseção finita (senão sua interseção seria $\neq \emptyset$) e portanto existem $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_p$ tais que $\bigcap \{\overline{f[A \cap U_i]} \setminus V : i = 1, \dots, n\} = \emptyset$ ou $\bigcap \{\overline{f[A \cap U_i]} : i = 1, \dots, n\} \subseteq V$. Seja $U \in \mathcal{U}_p$ tal que $U \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_n$. Então $\overline{f[A \cap U]} \subseteq \bigcap \{\overline{f[A \cap U_i]} : i = 1, \dots, n\} \subseteq V$; de modo que para todo $q \in U$, $F(q) \in \bigcap \mathcal{F}_q \subseteq \overline{f[A \cap U]} \subseteq V$ e portanto $F[U] \subseteq V$. $\square$

2.6 Espaços inicialmente κ -compactos para $\kappa > \psi(X)$

A segunda generalização é sobre espaços cuja cardinalidade é maior que seu pseudo-caráter: Malyhin em [Ma] provou que um espaço compacto, T_1 , primeiro enumerável e não enumerável tem cardinalidade $\geq 2^\omega$. A. Bella em [Be] (Teoremas 1 e 2) estendeu este resultado para: se X é um espaço compacto, T_1 , infinito e $|X| > \psi(X)$ (ou $|X| > \psi(p, X)$ para todo $p \in X$ e $|X|$ é regular), então $|X| \geq 2^\omega$.

Para os espaços inicialmente κ -compactos podemos provar:

Teorema 2.6 *Seja $\theta \geq \omega$ um cardinal regular e seja X um espaço inicialmente θ -compacto, Urysohn com $|X| \geq \theta$ e tal que $\psi(p, X) < \theta$ para todo $p \in X$. Então $|X| \geq 2^\omega$.*

E deste segue facilmente o seguinte:

Corolário: *Seja X um espaço inicialmente $\psi(X)^+$ -compacto, Urysohn com $|X| > \psi(X)$. Então $|X| \geq 2^\omega$.*

Demonstração (do teorema): Seja $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F = \overline{F} \text{ e } |F| \geq \theta\}$. Vamos começar provando o seguinte fato:

Para todo $F \in \mathcal{F}$ existem $F_0, F_1 \in \mathcal{F}$ tais que $F_0, F_1 \subseteq F$ e $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.

Como, dado $F \in \mathcal{F}$, F também é um espaço inicialmente θ -compacto, Urysohn com $|F| \geq \theta$ e tal que $\psi(p, F) < \theta$ para todo $p \in F$ (pois $\psi(p, F) \leq \psi(p, X)$), é suficiente provar o fato para $F = X$.

Seja $A \subseteq X$ com $|A| = \theta$. Como X é inicialmente θ -compacto, existe $p \in X$ ponto de acumulação completa de A – i.e. $|U \cap A| = |A| = \theta$ para toda vizinhança U de p –. Seja $\mathcal{U}_p$ uma ψ -base para p em X com $|\mathcal{U}_p| = \psi(p, X) < \theta$. Então $\{p\} = \bigcap \mathcal{U}_p$ e portanto $X \setminus \{p\} = \bigcup \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}_p\}$. Como θ é regular, $|X \setminus \{p\}| \geq \theta$ e $|\mathcal{U}_p| < \theta$, segue da fórmula $|\bigcup \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}_p\}| \leq |\mathcal{U}_p| \sup\{|X \setminus U| : U \in \mathcal{U}_p\}$ que deve existir $U \in \mathcal{U}_p$ tal que $|X \setminus U| \geq \theta$.

Seja $B \subseteq X \setminus U$ com $|B| = \theta$ e seja $q \in X$ um ponto de acumulação completa de B . De $q \in \overline{B} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U$ conclui-se que $p \neq q$. Sejam então V_p e V_q vizinhanças de p e q , respectivamente, tais que $\overline{V_p} \cap \overline{V_q} = \emptyset$. Como $|\overline{V_p}| \geq |V_p| \geq |V_p \cap A| = |A| = \theta$, segue que $\overline{V_p} \in \mathcal{F}$ e analogamente $\overline{V_q} \in \mathcal{F}$, comprovando o fato.

Podemos agora, para cada $s \in {}^{<\omega}2$ (o conjunto de todas as seqüências finitas de zeros e uns), definir um fechado $F_s \in \mathcal{F}$ de tal modo que:

(i) se $s \subseteq s'$, então $F_s \supseteq F_{s'}$;

(ii) para todo $s \in {}^{<\omega}2$, $F_{s\hat{\ } \langle 1 \rangle} \cap F_{s\hat{\ } \langle 0 \rangle} = \emptyset$

(onde $s\hat{\ } \langle i \rangle$ indica a concatenação das seqüências s e $\langle i \rangle$). Começamos com $F_{\langle \rangle} = X$ e usamos o fato para obter, a partir de F_s , os fechados $F_{s\hat{\ } \langle 0 \rangle}$ e $F_{s\hat{\ } \langle 1 \rangle} \in \mathcal{F}$ contidos em F_s e disjuntos.

Obtidos todos os F_s , definimos para cada $\sigma \in {}^\omega 2$ (o conjunto de todas as seqüências infinitas enumeráveis de zeros e uns) o conjunto $F_\sigma = \bigcap \{F_{\sigma|_n} : n \in \omega\}$. De (i) segue que $F_\sigma \neq \emptyset$, pois X sendo inicialmente θ -compacto é em particular enumeravelmente compacto. E de (ii) segue que os F_σ são dois a dois disjuntos. Temos assim 2^ω subconjuntos (fechados) de X não vazios e dois a dois disjuntos mostrando que $|X| \geq 2^\omega$. $\square$

Observações: Um fato que deve ter saltado à vista do leitor é que nos teoremas de Malyhin e de A. Bella os espaços são apenas T_1 (em 1980 Juhasz dizia a respeito do resultado de Malyhin que “é até o presente o único resultado não trivial envolvendo o (pseudo) caráter de espaços compactos T_1 ”; veja [Ju1], p.61); e na generalização impusemos que X fosse Urysohn ($T_{2,5}$).

Se no contexto do Teorema 2.6 fosse possível garantir-se a existência de algum subespaço fechado Y de X de cardinalidade θ (ou, no caso do Corolário, de cardinalidade $\theta = \psi(X)^+$), então Y também seria inicialmente θ -compacto e consequentemente compacto. Por outro lado, $\psi(p, Y) \leq \psi(p, X) < \theta$ para todo $p \in Y$, de modo que bastaria que X fosse T_1 (donde Y também seria T_1) para concluir-se dos teoremas de A. Bella que $|Y| \geq 2^\omega$ e a fortiori $|X| \geq 2^\omega$.

Outra situação que também recai trivialmente nos teoremas de A. Bella é quando X é θ -limitado (no caso do Corolário para $\theta = \psi(X)^+$); porque então, começando com $A \subseteq X$ de cardinalidade θ , existiria $Y \subseteq X$ compacto contendo A (e consequentemente $|Y| \geq \theta$) e novamente bastaria que X fosse T_1 para que $|Y| \geq 2^\omega$.

Porém, o Teorema 2.6 propriamente não parece recair nos teoremas de A. Bella; pois o argumento para a demonstração do ‘fato’ (que dado $F \in \mathcal{F}$ existem $F_0, F_1 \in \mathcal{F}$ contidos em F e disjuntos), que é a peça básica em todas estas demonstrações, no caso dos compactos T_1 , usa a (completa) compacidade de uma forma aparentemente essencial.

Por outro lado, a tentativa de se achar contra-exemplos quando X não é Urysohn esbarra numa dificuldade que será o tema do próximo capítulo. Trata-se de que: um espaço inicialmente κ -compacto, quando κ é grande em relação a outros números cardinais associados ao espaço, é automaticamente compacto. Por exemplo, isto ocorre quando $\kappa \geq 2^{t(X)}$ ou $\kappa \geq 2^{s(X)}$ etc. Infelizmente não conseguimos nenhum resultado envolvendo $\psi(X)$. Assim, não dispomos até o momento de espaços inicialmente $\psi(X)^+$ -compactos T_2 e não compactos (apesar de termos esperança que existam) e nem sabemos se espaços inicialmente $2^{\psi(X)}$ -compactos T_2 devem ser compactos (enquanto que se forem T_3 serão compactos).

2.7 O teorema, $t(X) = h\pi\chi(X)$, de Sapirovskii

Para a próxima generalização – que será a do teorema de Šapirovsckii: X compacto T_2 implica $h\pi\chi(X) = t(X)$ – precisaremos (aparentemente) mais do que regularidade. Vamos destacar uma condição que usaremos neste trabalho e que é consequência de completa-regularidade ($T_{3,5}$):

Lema 2.5 *Seja X um espaço completamente regular. Então $\mathcal{B} = \{X \setminus F : F \text{ é fechado em } X \text{ e } \psi_c(F, X) \leq \omega\}$ é uma base para a topologia de X .*

Demonstração: Sejam $p \in U$ com $p \in X$ e U aberto em X . Queremos $V \in \mathcal{B}$ tal que $p \in V \subseteq U$.

Seja $H = X \setminus U$. H é fechado em X e $p \notin H$; logo existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$ para todo $q \in H$.

Sejam, para $n \in \omega$, $V_n = f^{-1}([0, 1 - \frac{1}{n+2}])$. Então, para cada $n \in \omega$, $p \in V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq V_{n+1}$ e V_n é aberto em X . De modo que $p \in V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{V_n : n \in \omega\} = \bigcup \{\overline{V}_n : n \in \omega\} = f^{-1}([0, 1])$ e portanto $V \cap H = \emptyset$ ou $V \subseteq X \setminus H = U$.

Só falta agora verificar que $V \in \mathcal{B}$, ou seja, que $\psi_c(F, X) \leq \omega$ para $F = X \setminus V$. Sejam, para $n \in \omega$, $W_n = X \setminus \overline{V}_n$. Então, para todo $n \in \omega$, $F = X \setminus V \subseteq X \setminus \overline{V}_n = W_n$ e de $W_{n+1} = X \setminus \overline{V}_{n+1} \subseteq X \setminus V_{n+1}$ que é fechado, segue que $\overline{W}_{n+1} \subseteq X \setminus V_{n+1} \subseteq X \setminus \overline{V}_n = W_n$. De modo que

$$\begin{aligned} \bigcap \{\overline{W}_n : n \in \omega\} &= \bigcap \{W_n : n \in \omega\} = \bigcap \{X \setminus \overline{V}_n : n \in \omega\} \\ &= X \setminus \bigcup \{\overline{V}_n : n \in \omega\} = X \setminus V = F; \end{aligned}$$

o que mostra que $\{W_n : n \in \omega\}$ é uma ψ_c -base para F em X e $\psi_c(F, X) \leq \omega$. $\square$

Vamos enunciar também um resultado “técnico” cuja demonstração pode ser vista no livro de Juhasz (lema dentro da demonstração da Proposição 3.14(a) de [Jul]):

Lema 2.6 *Sejam κ um cardinal, X um espaço topológico, $p \in X$ com $\pi\chi(p, X) \geq \kappa^+$ e $\mathcal{H}$ uma família de subconjuntos não vazios de X com $|\mathcal{H}| \leq \kappa$ e $\chi(H, X) \leq \kappa$ para todo $H \in \mathcal{H}$. Então existe uma vizinhança V de p tal que $H \setminus V \neq \emptyset$ para todo $H \in \mathcal{H}$.*

Teorema 2.7 *Seja X um espaço completamente regular inicialmente $t(X)^+$ -compacto. Então $t(X) = h\pi\chi(X)$.*

Demonstração: A desigualdade $t(X) \leq h\pi\chi(X)$ vale para qualquer espaço topológico; pois dado um ponto não isolado $p \in S$ com $t(p, X) = \kappa \geq \omega$, seja $S \subseteq X$ tal que $p \in \overline{S}$ e $p \notin \overline{A}$ para todo $A \subseteq S$ com $|A| < \kappa$. Vamos mostrar que $\pi\chi(p, S \cup \{p\}) \geq \kappa$ (o que demonstra que $h\pi\chi(X) \geq \kappa$ e consequentemente $h\pi\chi(X) \geq \sup\{t(p, X) : p \in X\} = t(X)$). Seja $\mathcal{U}$ uma π -base para p em $S \cup \{p\}$ com $|\mathcal{U}| = \pi\chi(p, S \cup \{p\})$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ escolhemos $q_U \in U$ com $q_U \neq p$ (logo $q_U \in S$) e seja $A = \{q_U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq S$.

$p \in \overline{A}^{S \cup \{p\}} \subseteq \overline{A}^X$, pois dada uma vizinhança V de p em $S \cup \{p\}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$ e portanto $q_U \in V \cap A$. Logo, $|A| \geq \kappa$ e portanto $\pi\chi(p, S \cup \{p\}) = |\mathcal{U}| \geq |A| \geq \kappa$.

Para a outra desigualdade é suficiente provar que, nas condições do enunciado, $\pi\chi(X) \leq t(X)$; pois, supondo isto provado, seja $Y \subseteq X$. Então $\overline{Y}$ será também completamente regular e inicialmente $t(X)^+$ -compacto e a fortiori inicialmente $t(\overline{Y})^+$ -compacto, já que $t(\overline{Y}) \leq t(X)$. Logo, pela suposição, $\pi\chi(\overline{Y}) \leq t(\overline{Y}) \leq t(X)$ e como $\pi\chi(Y) \leq \pi\chi(\overline{Y})$ (Lema 2.6(a) de [Jul]), segue que $\pi\chi(Y) \leq t(X)$ e assim $h\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(Y) : Y \subseteq X\} \leq t(X)$.

Suponhamos, por absurdo, que $\pi\chi(X) > t(X) = \kappa$ e seja $p \in X$ tal que $\pi\chi(p, X) \geq \kappa^+$. Vamos construir, por recursão transfinita (sobre $\nu < \kappa^+$), uma “matriz triangular” $\langle F_\nu^\mu : \mu \leq \nu < \kappa^+ \rangle$ de subconjuntos não vazios de X de tal modo que para todo $\nu < \kappa^+$

(i_ν) para todo $\mu \leq \nu$, F_ν^μ é fechado e $\psi_c(F_\nu^\mu, X) \leq \kappa$;

(j_ν) para todos μ, ρ tais que $\mu \leq \rho \leq \nu$, $F_\rho^\mu \supseteq F_\nu^\mu$;

(k_ν) $p \in F_\nu^\nu$.

A recursão será sobre $\nu < \kappa^+$; para cada $\nu < \kappa^+$ definiremos todos os F_ν^μ para $\mu \leq \nu$. Seja então $\nu < \kappa^+$ e suponhamos que já foram obtidos todos os $F_{\nu'}^\mu$ para μ, ν' tais que $\mu \leq \nu' < \nu$ de tal modo que (i_{ν'}), (j_{ν'}) e (k_{ν'}) valem para todo $\nu' < \nu$. Para cada $\mu < \nu$, seja $H_\nu^\mu = \bigcap \{F_{\nu'}^\mu : \mu \leq \nu' < \nu\} \neq \emptyset$ (por ser uma interseção de $|\nu| < \kappa^+$ fechados decrescentes e não vazios num espaço inicialmente κ^+ -compacto). H_ν^μ é fechado e $\psi_c(H_\nu^\mu, X) \leq \Sigma\{\psi_c(F_{\nu'}^\mu, X) : \mu \leq \nu' < \nu\} \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$ (pela Proposição 2.4(iii)); e, pela Proposição 2.4(ii), $\chi(H_\nu^\mu, X) = \psi_c(H_\nu^\mu, X)$. Consideremos agora a família $\mathcal{H}_\nu = \{H_\nu^\mu : \mu < \nu\}$. Temos que $|\mathcal{H}_\nu| \leq |\nu| \leq \kappa$ e $\chi(H, X) \leq \kappa$ para todo $H \in \mathcal{H}_\nu$. Logo, pelo Lema 2.6, segue que existe uma vizinhança V_ν de p tal que $H \setminus V_\nu \neq \emptyset$ para todo $H \in \mathcal{H}_\nu$.

Devido ao Lema 2.5 podemos supor sem perda de generalidade que $V_\nu \in \mathcal{B}$, i.e. que $\psi_c(X \setminus V_\nu, X) \leq \omega$. Seja agora $F_\nu^\mu = H_\nu^\mu \setminus V_\nu$. F_ν^μ é um fechado não vazio e $\psi_c(F_\nu^\mu, X) \leq$

$\psi_c(H_\nu^\mu, X) + \psi_c(X \setminus V_\nu, X) \leq \kappa$, uma vez que $F_\nu^\mu = H_\nu^\mu \cap (X \setminus V_\nu)$. Assim (i_ν) é satisfeito; e é óbvio que (j_ν) também.

Finalmente, para definir F_ν^ν , escolhemos (usando a regularidade de X e a Proposição 2.4(iii)) $Z_\nu \subseteq X$ fechado com $\psi_c(Z_\nu, X) \leq \omega$ e $p \in Z_\nu \subseteq V_\nu$ e definimos $F_\nu^\nu = Z_\nu \cap \bigcap \{F_\mu^\mu : \mu < \nu\}$.

Concluída a construção, vamos escolher para cada $\mu < \kappa^+$, um ponto $p_\mu \in \bigcap \{F_\nu^\mu : \mu \leq \nu < \kappa^+\} \neq \emptyset$ (novamente por ser uma interseção de $\leq \kappa^+$ fechados não vazios e decrescentes num espaço inicialmente κ^+ -compacto).

A seqüência $\langle p_\mu : \mu < \kappa^+ \rangle$ será uma seqüência livre, pois para $\nu < \kappa^+$, $\overline{\{p_\mu : \mu < \nu\}} \subseteq X \setminus V_\nu \subseteq X \setminus Z_\nu$, uma vez que $p_\mu \in F_\nu^\mu = H_\nu^\mu \setminus V_\nu \subseteq X \setminus V_\nu$ e $X \setminus V_\nu$ é um fechado; enquanto que $\overline{\{p_\mu : \nu \leq \mu < \kappa^+\}} \subseteq F_\nu^\nu \subseteq Z_\nu$.

Logo, $F(X) \geq \kappa^+$ e, pelo Teorema 2.2, $t(X) = F(X) \geq \kappa^+$ contra $t(X) = \kappa$. $\square$

Corolário: Se X é um espaço completamente regular e inicialmente $h\pi\chi(X)$ -compacto, então $t(X) = h\pi\chi(X)$.

Demonstração: Já vimos que $t(X) \leq h\pi\chi(X)$. Se tivéssemos $t(X) < h\pi\chi(X)$, então X seria inicialmente $t(X)^+$ -compacto e, pelo Teorema 2.7, teríamos $t(X) = h\pi\chi(X)$. Logo, $t(X) = h\pi\chi(X)$. $\square$

Observações:

- (1) Não sabemos se existem espaços X $T_{3,5}$, inicialmente $t(X)^+$ -compactos (a hipótese do Teorema 2.7) e não compactos; mas existem espaços X $T_{3,5}$, inicialmente $h\pi\chi(X)$ -compactos (a hipótese do Corolário) e não compactos. Por exemplo, os espaços ordinais $X = \kappa^+$ são $T_{3,5}$, inicialmente κ -compactos e $h\pi\chi(X) = \kappa$.
- (2) Percebe-se, pela demonstração do Teorema 2.7, que ao invés de termos que a família $\mathcal{B} = \{X \setminus F : F \text{ é fechado e } \psi_c(F, X) \leq \omega\}$ seja uma base para X , seria suficiente

que tivéssemos que a família $\{X \setminus F : F \text{ é fechado e } \psi_c(F, X) \leq \kappa\}$ fosse uma base (o que parece um pouco mais fraco; mas mesmo assim não sabemos se regularidade + κ^+ -completude inicial implicam esta condição).

- (3) Na demonstração do Teorema 2.7 concluiu-se, a partir de $\pi\chi(p, X) \geq \kappa^+$, que $t(X) \geq \kappa^+$, sem porém estimar-se o valor de $t(p, X)$. No caso em que $\pi\chi(p, X) = \kappa^+$ (ou, mais genericamente, no caso em que $\pi\chi(p, X) = \theta$ regular e X é inicialmente θ -compacto) pode-se, modificando um pouco a construção dos F_ν^μ , provar que $t(p, X) \geq \kappa^+$ (ou que $t(p, X) \geq \theta$ no caso mais geral):

Seja $\mathcal{B}$ uma π -base para p em X com $|\mathcal{B}| = \pi\chi(p, X) = \kappa^+$ – digamos que $\mathcal{B} = \{B_\nu : \nu < \kappa^+\}$ –. Usando a Proposição 2.4(iii) vamos escolher, para cada $\nu < \kappa^+$, um fechado não vazio $G_\nu \subseteq B_\nu$ com $\psi_c(G_\nu, X) \leq \omega$ e vamos definir por recursão $\langle F_\nu^\mu : \mu \leq \nu < \kappa^+ \rangle$ satisfazendo (i $_\nu$) e (j $_\nu$) como no Teorema 2.7, mas não mais (k $_\nu$): dado $\nu < \kappa^+$ e supondo $F_{\nu'}^\mu$ definidos para $\mu \leq \nu' < \nu$, seja novamente $H_\nu^\mu = \bigcap \{F_{\nu'}^\mu : \mu \leq \nu' < \nu\} \neq \emptyset$, fechado com $\psi_c(H_\nu^\mu, X) \leq \kappa$. Consideremos desta vez $\mathcal{H}_\nu = \{G_\nu\} \cup \{H_\nu^\mu : \mu \leq \nu' < \nu\}$ e usemos o Lema 2.6 como antes para escolher uma vizinhança V_ν de p tal que $H \setminus V_\nu \neq \emptyset$ para todo $H \in \mathcal{H}_\nu$.

Definimos $F_\nu^\mu = H_\nu^\mu \setminus V_\nu$ para $\mu < \nu$ e $F_\nu^\nu = G_\nu \setminus V_\nu$ prosseguindo a construção. Terminada a construção escolhemos para cada $\mu < \kappa^+$, $p_\mu \in \bigcap \{F_\nu^\mu : \mu \leq \nu < \kappa^+\} \neq \emptyset$ e formamos o conjunto $S = \{p_\mu : \mu < \kappa^+\}$.

Teremos então que $p \in \overline{S}$, pois dada uma vizinhança U de p seja $\mu < \kappa^+$ tal que $B_\mu \subseteq U$ (por $\mathcal{B}$ ser π -base); então $p_\mu \in U$, uma vez que $p_\mu \in F_\mu^\mu \subseteq G_\mu \subseteq B_\mu$ e portanto $U \cap S \neq \emptyset$.

Por outro lado, dado $A \subseteq S$ com $|A| < \kappa^+$, existe $\nu < \kappa^+$ tal que $A \subseteq \{p_\mu : \mu < \nu\} \subseteq X \setminus V_\nu$, pois $p_\mu \in F_\nu^\mu = H_\nu^\mu \setminus V_\nu$ para todo $\mu < \nu$. Logo $\overline{A} \subseteq \overline{X \setminus V_\nu} = X \setminus V_\nu$, já que $X \setminus V_\nu$ é fechado e portanto $p \notin \overline{A}$, já que $p \in V_\nu$.

Isto mostra que $t(p, X) \geq \kappa^+$.

Notas e comentários

Em [Chr] construímos os espaços $\langle X, \tau_1 \rangle$ e $\langle X, \tau_2 \rangle$ para responder (negativamente) à pergunta se o teorema de O.T. Alas – que generaliza o teorema de Cech-Pospisil – valeria para espaços T_2 . Aqui apresentamos (nas três primeiras proposições) um estudo genérico dos espaços $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$ – dos quais $\langle X, \tau_1 \rangle$ e $\langle X, \tau_2 \rangle$ são exemplos particulares – com ênfase nas funções cardinais ψ , ψ_c , χ e $\pi\chi$ (χ indiretamente, na Proposição 2.3, uma vez que $\pi\chi \leq \chi$), como resultado de tentativas – infrutíferas – de obtermos algum contra-exemplo para o resultado de O.T. Alas (no caso $\kappa > \omega$) em espaços Urysohn. A Proposição 2.2(i) mostra que isto não é possível nos espaços $\langle X, \tau_{\mathcal{F}} \rangle$; de modo que um contra-exemplo – caso exista – teria que surgir de alguma idéia nova. Por outro lado, parece-nos que seria bem interessante se fosse possível provar-se a validade do resultado em espaços Urysohn (eventualmente com algumas hipóteses adicionais, como semi-regularidade).

A maioria dos itens da Proposição 2.4 e de seu corolário são mais ou menos “folklore”: 2.4(ii) aparece em [St], Teorema 3.4; 2.4(iii) é bastante conhecida na versão: num espaço regular X , dados $p \in G$ com G aberto, existe um fechado G_δ , H (i.e. $\psi(H, X) \leq \omega$) tal que $p \in H \subseteq G$. Demos ênfase ao ψ_c ao invés de ψ (tanto em 2.4(iii), como em 2.4(iv), a qual também valeria para ψ) pois ψ_c se mostrou muito útil nas aplicações que seguiram. A formulação “local” ($X \ T_3$ em p e $X \ T_4$ em F) é nova, bem como o item (iii) do corolário, que foi uma decorrência desta formulação.

Generalizações do teorema de Arhangel'skii para espaços inicialmente κ -compactos não devem ter passado despercebidas, se bem que não temos notícia de alguma publicada. Aqui, antes de apresentarmos a generalização no Teorema 2.2, procuramos estudar separadamente as duas desigualdades – $t(X) \leq F(X)$ e $F(X) \leq t(X)$ –, nas Proposições 2.5 e 2.6 e seus corolários, evitando assim a utilização de hipóteses desnecessárias e aumentando

a classe de espaços que satisfazem cada um dos casos.

O Teorema 1 de [Ju5], do qual o Teorema 2.3 é uma generalização, é, por enquanto, talvez o melhor resultado em ZFC para o seguinte fenômeno: num espaço X , T_2 compacto com $t(X) = \omega$ devem existir pontos de caráter ‘pequeno’ (no caso $\leq 2^\omega$). Isto tinha levado Arhangel'skii a conjecturar que em tais espaços sempre haveria pontos de caráter enumerável. Hoje sabe-se que esta conjectura independe de ZFC: A. Dow em [D3] provou sua validade assumindo o PFA (o ‘Proper-Forcing Axiom’), enquanto que Fedorčuk, Malyhin e Juhasz (o último em [Ju3]) construíram modelos de ZFC com contra-exemplos. Como em todos os contra-exemplos conhecidos todos os pontos têm caráter ω_1 , permanece naturalmente a pergunta se nos espaços compactos T_2 de tightness enumerável sempre haveria pontos de caráter $\leq \omega_1$. Sabe-se que isto ocorre em muitos modelos de ZFC: por exemplo, em todos os modelos de ZFC obtidos acrescentando-se ω_1 reais de Cohen num modelo qualquer de ZFC; e nestes modelos é suficiente que X seja inicialmente ω_1 -compacto ([Ju5]). Porém, ainda não se sabe se vale de fato em ZFC e por outro lado não se dispõe até agora de contra-exemplos.

O Teorema 2.4 é uma adaptação do Teorema 2 de [Ju4] (assim como o Lema 2.4 é uma adaptação do Lema 1 de [Ju4]) para o caso em que o caráter dos pontos é $< \kappa$; mostrando que, num certo sentido, se a possibilidade de separar fechados disjuntos quaisquer (normalidade) é decorrência da possibilidade de separar fechados disjuntos menores que κ , então é irrelevante o valor do caráter dos pontos (desde que $< \kappa$). E o exemplo apresentado mostra que a limitação no caráter é a melhor possível. O que não se sabe ainda é se a ‘magnitude’ imposta ao cardinal κ (fortemente compacto) é a melhor possível.

Capítulo 3

Espaços inicialmente κ -compactos para κ ‘grande’

Se um espaço topológico X for inicialmente κ -compacto e κ for suficientemente grande em relação a outros números cardinais do espaço – por exemplo, $\kappa = |X|$ ou $\kappa = \omega(X)$ ou $\kappa = L(X)$ –, então X é compacto. A. Dow em [D1] perguntava se existe algum espaço T_2 primeiro enumerável, inicialmente ω_1 -compacto e não compacto (este também é o problema 354 de [MR]) e provava que, se valer a Hipótese do Contínuo, então a resposta é não. Fremlin também mostrou que a resposta é não se valer o PFA (veja em [BDFN]).

Aqui mostraremos que espaços T_2 inicialmente κ -compactos são de fato compactos para alguns valores de κ , por exemplo, $\kappa = 2^{d(X)}$, $\kappa = 2^{t(X)}$, $\kappa = 2^{s(X)}$ etc. Para isto começaremos estendendo o bem conhecido resultado de que espaços T_3 inicialmente κ -compactos são λ -limitados para todo λ tal que $2^\lambda \leq \kappa$, de T_3 para T_2 ; usando uma avaliação para o pseudocaráter fechado de espaços T_2 : $\psi_c(X) \leq 2^{d(X)}$.

Aproveitaremos também a ocasião para apresentar alguns resultados de funções cardinais envolvendo o $\psi_c(X)$ de espaços T_2 : $|X| \leq d(X)^{t(X)\psi_c(X)}$ e $|X| \leq 2^{d(X)\psi_c(X)}$; e um resultado recente (e não publicado) de O.T. Alas para espaços Urysohn: $\psi_c(X) \leq 2^{s(X)}$.

Proposição 3.1 (i) *Seja X um espaço T_2 . Então $\psi_c(X) \leq 2^{d(X)}$.*

(ii) *Seja X um espaço Urysohn. Então $\psi_c(X) \leq 2^{s(X)}$.*

Demonstração: (i) Dado $p \in X$, seja $\mathcal{V}_p$ o conjunto de todas as vizinhanças abertas de p em X e seja $D \subseteq X$ um subconjunto denso de X de cardinalidade $d(X)$.

Seja $\mathcal{A} = \{V \cap D : V \in \mathcal{V}_p\} \subseteq \mathcal{P}(D)$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ vamos escolher um $V_A \in \mathcal{V}_p$ tal que $A = V_A \cap D$ e formar $\mathcal{B} = \{V_A : A \in \mathcal{A}\}$. Então:

$$\begin{aligned} \{p\} &= \bigcap \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_p\} = \bigcap \{\overline{V \cap D} : V \in \mathcal{V}_p\} = \bigcap \{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\} \\ &= \bigcap \{\overline{V_A \cap D} : A \in \mathcal{A}\} = \bigcap \{\overline{V_A} : A \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{B}$ é uma ψ_c -base para p em X e portanto

$$\psi_c(p, X) \leq |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}| \leq |\mathcal{P}(D)| = 2^{d(X)}.$$

(ii) Seja $p \in X$. Para cada $q \in X \setminus \{p\}$, sejam U_q e V_q vizinhanças abertas de p e q respectivamente tais que $\overline{U_q} \cap \overline{V_q} = \emptyset$.

$\mathcal{V} = \{V_q : q \in X \setminus \{p\}\}$ é uma cobertura aberta de $X \setminus \{p\}$. Logo, pela Proposição 1.6 aplicada ao espaço $X \setminus \{p\}$ e à cobertura $\mathcal{V}$, existem $A, B \subseteq X \setminus \{p\}$ de cardinalidade $\leq s(X)$ tais que

$$X \setminus \{p\} \subseteq \overline{A} \cup \bigcup \{V_q : q \in B\}.$$

Seja $\mathcal{C} = \{C \subseteq A : (\exists q \in X \setminus \{p\}) \emptyset \neq C = V_q \cap A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Para cada $C \in \mathcal{C}$ vamos escolher $q_C \in X \setminus \{p\}$ tal que $C = V_{q_C} \cap A$; e vamos mostrar que $\mathcal{U} = \{U_{q_C} : C \in \mathcal{C}\} \cup \{U_q : q \in B\}$ é uma ψ_c -base para p em X :

De fato, seja $y \in X \setminus \{p\}$. Então $y \in \overline{A}$ ou $y \in \bigcup \{V_q : q \in B\}$.

No primeiro caso, $C = V_y \cap A \neq \emptyset$ e portanto $C \in \mathcal{C}$. Assim,

$$y \in \overline{V_y \cap A} = \overline{C} = \overline{V_{q_C} \cap A} \subseteq \overline{V_{q_C}}$$

e portanto $y \notin \overline{U_{q_C}}$.

No segundo caso, $y \in V_q$ para algum $q \in B$ e portanto $y \notin \overline{U_q}$. Em qualquer caso, $y \notin \bigcap \{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$ e portanto $\bigcap \{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\} = \{p\}$.

Assim, $\psi_c(p, X) \leq |\mathcal{U}| \leq |\mathcal{C}| + |B| \leq 2^{s(X)} + s(X) = 2^{s(X)}$. $\square$

Proposição 3.2 *Seja X um espaço T_2 . Então:*

$$(i) \quad |X| \leq 2^{d(X) \cdot \psi_c(X)};$$

$$(ii) \quad |X| \leq d(X)^{t(X) \cdot \psi_c(X)}.$$

Demonstração: Ambos os resultados obtem-se aplicando a Proposição 1.5:

Para o primeiro caso, seja $\kappa = d(X) \cdot \psi_c(X)$ e seja $S \subseteq X$ denso com $|S| = d(X)$. Então as hipóteses da proposição estão satisfeitas, pois $X = \overline{S} = \bigcup \{\overline{A} : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}$ (já que $S \subseteq S$ e $|S| = d(X) \leq \kappa$).

Logo,

$$|X| \leq |S|^\kappa = (d(X))^{d(X) \cdot \psi_c(X)} \leq \left(2^{d(X)}\right)^{d(X) \cdot \psi_c(X)} = 2^{d(X) \cdot \psi_c(X)}.$$

Para o segundo caso, seja $\kappa = t(X) \cdot \psi_c(X)$ e seja novamente $S \subseteq X$ denso com $|S| = d(X)$. Então $X = \overline{S} = \bigcup \{\overline{A} : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}$, pois dado $x \in \overline{S}$, existe $A \subseteq S$ com $|A| \leq t(x, X) \leq t(X) \leq \kappa$ tal que $x \in \overline{A}$; e assim $x \in \bigcup \{\overline{A} : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}$.

Logo,

$$|X| \leq |S|^\kappa = d(X)^{t(X) \cdot \psi_c(X)}.$$

□

Observações: Destas desigualdades decorrem algumas desigualdades já conhecidas:

- de $\psi_c(X) \leq 2^{d(X)}$ decorre que $|X| \leq 2^{d(X) \cdot 2^{d(X)}} = 2^{2^{d(X)}}$;
- para $X \in T_3$, $\psi_c(X) = \psi(X)$; de modo que para espaços T_3 :

$$|X| \leq 2^{d(X) \cdot \psi(X)} \quad \text{e} \quad |X| \leq d(X)^{t(X) \cdot \psi(X)};$$

- como $t(X) \leq \chi(X)$ e $\psi_c(X) \leq \chi(X)$, (ii) implica que

$$|X| \leq d(X)^{\chi(X)};$$

- como $\psi_c(X) \leq \psi(X).L(X)$ (veja 2.8(c) de [Ju1]), (ii) implica que

$$|X| \leq d(X)^{L(X).t(X).\psi(X)} .$$

- Em 1.0 de [Ju2], Juhasz apresenta um espaço X T_3 tal que

$$d(X)^{\psi(X)} < |X| \text{ e, conseqüentemente, } d(X)^{\psi_c(X)} < |X| ;$$

mostrando que as desigualdades de (i) e (ii) não podem ser estendidas para $|X| \leq d(X)^{\psi_d(X)}$.

- A desigualdade $|X| \leq 2^{d(X).\psi_c(X)}$ que tem um estilo parecido com o das desigualdades:

$$|X| \leq 2^{L(X).\chi(X)} , \quad |X| \leq 2^{s(X).\psi(X)} , \quad |X| \leq 2^{c(X).\chi(X)}$$

(o expoente é sempre o produto de uma função definida “globalmente”: d, L, s, c ; com uma definida “localmente”: ψ, ψ_c, χ), pode, em alguns casos, ser mais precisa que todas estas: Em [Ju1], no exemplo 7.1, para um cardinal infinito κ fixado, define-se um espaço X , T_2 tal que $|X| = s(X) = \exp_2(\kappa)$, $d(X) = \kappa$ e $\chi(X) = w(X) = \exp_3(\kappa)$ (a notação $\exp_n(\kappa)$ é usada aqui por conveniência notacional; define-se por: $\exp_0(\kappa) = \kappa$ e $\exp_{n+1}(\kappa) = 2^{\exp_n(\kappa)}$).

De $\psi_c(X) \leq 2^{d(X)}$, segue que $\psi_c(X) \leq 2^\kappa = \exp_1(\kappa)$; e portanto

$$\exp_2(\kappa) = |X| \leq 2^{d(X).\psi_c(X)} \leq 2^{\kappa \exp_1(\kappa)} = \exp_2(\kappa)$$

donde

$$|X| = 2^{d(X).\psi_c(X)} .$$

Por outro lado,

$$2^{s(X).\psi(X)} = \exp_3(\kappa) > |X| \quad \text{e}$$

$$2^{c(X).\chi(X)} = 2^{L(X).\chi(X)} = \exp_4(\kappa) > |X| .$$

Deixando as funções cardinais e voltando aos espaços inicialmente κ -compactos:

Teorema 3.1 *Seja X um espaço T_2 inicialmente κ -compacto. Então X é λ -limitado para todo λ tal que $2^\lambda \leq \kappa$.*

Demonstração: Seja $Y = \overline{A}$ para $A \subseteq X$ com $|A| = \lambda$, onde $2^\lambda \leq \kappa$. Então Y também é um espaço T_2 inicialmente κ -compacto (uma vez que é um subespaço fechado de X). Além disso, $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y = Y$ – i.e. A é denso em Y – de modo que $d(Y) \leq |A| \leq \lambda$ e portanto, pela Proposição 3.1(i), $\psi_c(Y) \leq 2^{d(Y)} \leq 2^\lambda \leq \kappa$. Disto segue, da Proposição 2.4(ii), que Y é T_3 ; de modo que podemos usar a fórmula $w(Y) \leq 2^{d(Y)} \leq \kappa$ (Proposição 1.4).

Já dispomos de todos os elementos para concluir que Y é compacto: seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de Y e seja $\mathcal{B}$ uma base para Y com $|\mathcal{B}| = w(Y) \leq \kappa$. Para cada $p \in Y$, seja $U_p \in \mathcal{U}$ tal que $p \in U_p$ e seja $V_p \in \mathcal{B}$ tal que $p \in V_p \subseteq U_p$. Então $\mathcal{V} = \{V_p : p \in Y\} \subseteq \mathcal{B}$ também cobre Y e $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{B}| \leq \kappa$. Como Y é inicialmente κ -compacto existem $p_1, \dots, p_n \in Y$ tais que $Y = V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_n}$ e como $V_p \subseteq U_p$ para todo $p \in Y$, $Y = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}$; e $\mathcal{U}$ admite uma subcobertura finita. $\square$

Corolário:

- (i) *Seja X um espaço T_2 inicialmente $2^{d(X)}$ -compacto. Então X é compacto.*
- (ii) *Seja X um espaço T_2 inicialmente κ -compacto e seja Y um subespaço de X tal que $2^{d(Y)} \leq \kappa$. Então Y é completamente regular.*

Demonstração: (i) é imediato: seja $D \subseteq X$ denso em X com $|D| = d(X)$. Então $X = \overline{D}$ será compacto, uma vez que, pelo teorema, X é $d(X)$ -limitado.

(ii) Seja $Y \subseteq X$, $d(Y) = \lambda$ com $2^\lambda \leq \kappa$ e seja $D \subseteq Y$ denso em Y com $|D| = d(Y) = \lambda$. Consideremos $Z = \overline{D}$ (fecho em X). Como X é λ -limitado, Z é compacto e em particular é completamente regular. Sendo Y um subespaço de Z , Y será também completamente regular. $\square$

Observações:

É fácil de ver que o item (ii) do corolário vale também para espaços T_2 que admitem extensão T_2 , inicialmente κ -compacta (ou λ -limitada). Mais precisamente: sejam λ um cardinal infinito e X um espaço T_2 . Se X admite uma extensão T_2 inicialmente 2^λ -compacta (ou λ -limitada), então todo subespaço Y de X de densidade $\leq \lambda$ é completamente regular (e consequentemente Y admite, pelo teorema de Tychonoff, uma extensão T_2 compacta).

Poderíamos tentar inverter a situação e perguntar se uma equivalência análoga à de Tychonoff valeria a nível de κ -compacidade inicial. Por exemplo, será que: num espaço T_2 todo subespaço de densidade $\leq \lambda$ é completamente regular se e só se o espaço admite uma extensão T_2 inicialmente 2^λ -compacta (ou λ -limitada)?

Uma dificuldade que surge de imediato é que podemos obter modelos de ZFC onde $2^\lambda = 2^{\lambda^+} = \lambda^{++}$; e, neste caso, partindo de um espaço X T_2 no qual os subespaços de densidade $\leq \lambda$ são $T_{3,5}$, mas que há subespaços de densidade λ^+ que não são $T_{3,5}$ (por exemplo, os espaços $\langle X, \tau_\theta \rangle$ do começo do Capítulo 2, para $\theta = \lambda^+$), se X admitisse uma extensão T_2 inicialmente 2^λ -compacta ($\Leftrightarrow$ inicialmente λ^{++} -compacta) ($\Leftrightarrow$ inicialmente 2^{λ^+} -compacta), então todos os subespaços de X de densidade λ^+ teriam que ser $T_{3,5}$.

Assim, o melhor que poderíamos esperar encontrar seria uma extensão inicialmente λ^+ -compacta. Porém, isto também não é verdade; conforme o exemplo $\langle X, \tau_1 \rangle$ (do começo do Capítulo 2) para $\theta = \lambda^+$ mostra:

Sabemos que $\langle X, \tau_1 \rangle$ é inicialmente λ -compacto, mas, de fato, é λ -limitado; pois dado $A \subseteq X$ com $|A| \leq \lambda$, existe $\alpha < \lambda^+ = \theta$ tal que $A \subseteq]0, \alpha]$. $]0, \alpha]$ é fechado em $\langle X, \tau_1 \rangle$, consequentemente, também é inicialmente λ -compacto e, como $||0, \alpha|| \leq \lambda$, segue que é compacto; e portanto $\overline{A} \subseteq]0, \alpha]$ também é compacto. Assim, em particular, X satisfaz a condição de que seus subespaços de densidade $\leq \lambda$ são $T_{3,5}$.

Suponhamos agora que existisse um espaço Z T_2 inicialmente λ^+ -compacto do qual X

fosse um subespaço denso.

É fácil de ver – e em [Chr] se mostra em detalhe – que a família $\mathcal{B} = \{U_{\alpha,\beta}^\xi : \alpha + 1 < \beta < \theta\}$, onde $U_{\alpha,\beta}^\xi = \{\omega^\xi \cdot \eta + \delta : \eta < \theta, \alpha < \delta < \beta\}$ é uma base para a topologia de $\langle X, \tau_1 \rangle$, de cardinalidade $\theta = \lambda^+$.

Consideremos $\{\overline{B}^Z : B \in \mathcal{B}\}$. Trata-se de uma família de fechados de Z de cardinalidade $\leq \lambda^+$ e com a propriedade da interseção finita (pois na Proposição 2.2(i) vimos que $\overline{B}^X$ é um c.u.b. de θ para cada B aberto não vazio; e $\overline{B}^Z \supseteq \overline{B}^X$). Sendo Z inicialmente λ^+ -compacto, segue que $\bigcap \{\overline{B}^Z : B \in \mathcal{B}\} \neq \emptyset$ – enquanto que, por ser X T_2 ,

$$\emptyset = \bigcap \{\overline{B}^X : B \in \mathcal{B}\} = \bigcap \{\overline{B}^Z \cap X : B \in \mathcal{B}\} = \bigcap \{\overline{B}^Z : B \in \mathcal{B}\} \cap X.$$

Seja $z_0 \in \bigcap \{\overline{B}^Z : B \in \mathcal{B}\}$ e seja $x_0 \in X$. Então $z_0 \neq x_0$ e sendo Z T_2 existe alguma vizinhança aberta V de x_0 em Z tal que $z_0 \notin \overline{V}^Z$. $V \cap X$ é uma vizinhança aberta de x_0 em X , logo existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V \cap X$. Assim, $z_0 \in \overline{B}^Z \subseteq \overline{V \cap X}^Z \subseteq \overline{V}^Z$, contra $z_0 \notin \overline{V}^Z$.

(Por outro lado, X admite extensões T_1 compactas. Por exemplo, $Z = X \cup \{p\}$ com $p \notin X$ e base de vizinhanças para $p : \{\{p\} \cup \alpha, \theta[: \alpha < \theta\}$.)

Como $\langle X, \tau_1 \rangle$ é λ -limitado resta a possibilidade de que os espaços T_2 cujos subespaços de densidade $\leq \lambda$ são $T_{3,5}$ admitam extensões λ -limitadas, T_2 . Porém isto também não é verdade, conforme o seguinte exemplo – que foi baseado no exemplo 4.8.d de [PW] de um espaço H -fechado, não compacto – mostrará:

Exemplo 3.1 Seja $X = (\omega \times \omega_1 \times 2) \cup (\omega \times \{\omega_1\}) \cup \{p_0, p_1\}$, onde p_0, p_1 são distintos entre si e distintos dos outros elementos de X ; com a topologia:

(i) base de vizinhanças para $\langle m, \beta, i \rangle \in \omega \times \omega_1 \times 2$:

$$\{\{m\} \times]\gamma, \beta] \times \{i\} : \gamma < \beta\} \quad (\text{para } \beta = 0, \{\langle m, 0, i \rangle\} \text{ é aberto})$$

– i.e. cada $\{m\} \times \omega_1 \times \{i\}$ para $m \in \omega, i \in 2$, é homeomorfo a ω_1 com a topologia da ordem;

(ii) base de vizinhanças para $\langle n, \omega_1 \rangle \in \omega \times \{\omega_1\}$:

$$\{(\{n\} \times (\omega_1 \setminus C) \times 2) \cup \{\langle n, \omega_1 \rangle\} : C \subseteq \omega_1, |C| \leq \omega\};$$

(iii) base de vizinhanças para p_i ($i \in 2$):

$$\{((\omega \setminus F) \times \omega_1 \times \{i\}) \cup \{p_i\} : F \subseteq \omega, F \text{ finito}\}.$$

Isto fornece uma topologia Hausdorff, semiregular, não-Urysohn sobre X tal que X é H -fechado, todo subespaço separável de X é normal (e consequentemente completamente regular) e existem subespaços enumeráveis fechados e não-compactos; consequentemente X não é ω -limitado e nem sequer enumeravelmente compacto, e sendo H -fechado não admite extensão própria, de modo que X não admite extensões ω -limitadas e nem enumeravelmente compactas.

Vamos verificar sucintamente as afirmações acima: que X é Hausdorff e que subespaços separáveis são normais pode-se verificar caso por caso (é trabalhoso, porém não é difícil). X é semi-regular pois os elementos da base são abertos regulares: para U do tipo (i) e (ii), $\overline{U} = U$ e portanto $\text{int } \overline{U} = U$; para $U = ((\omega \setminus F) \times \omega_1 \times \{i\}) \cup \{p_i\}$, $\overline{U} = U \cup ((\omega \setminus F) \times \{\omega_1\})$ e $\text{int } \overline{U} = U$. X não é Urysohn, pois se U_0, U_1 são vizinhanças de p_0, p_1 , respectivamente, então existe $F \subseteq \omega$, F finito (" $F = F_0 \cup F_1$ ") tal que $(\omega \setminus F) \times \omega_1 \times \{i\} \subseteq U_i$ para $i \in 2$ e portanto $\overline{U}_0 \cap \overline{U}_1 \supseteq (\omega \setminus F) \times \{\omega_1\} \neq \emptyset$. Para mostrar que X é H -fechado, vamos mostrar que dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X existe $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ finita tal que $X = \overline{\mathcal{U}_0}$ (veja 3.12.5(a) de [Eng] ou 4.8.b de [PW]): dada então $\mathcal{U}$, sejam $U_i \in \mathcal{U}$ tais que $p_i \in U_i$ para $i \in 2$ e seja $F \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $U_i \supseteq ((\omega \setminus F) \times \omega_1 \times \{i\}) \cup \{p_i\}$. Então $\overline{U}_i \supseteq U_i \cup ((\omega \setminus F) \times \{\omega_1\})$ de modo que

$$X \setminus (\overline{U}_0 \cup \overline{U}_1) \subseteq (F \times \omega_1 \times 2) \cup (F \times \{\omega_1\}).$$

Para cada $n \in F$ seja $V_n \in \mathcal{U}$ tal que $\langle n, \omega_1 \rangle \in V_n$ e seja $\beta_n \in \omega$ tal que $V_n \supseteq$

$\{n\} \times]\beta_n, \omega_1[\times 2$. Então

$$X \setminus [\overline{U}_0 \cup \overline{U}_1 \cup \bigcup \{V_n : n \in F\}] \subseteq \bigcup \{\{n\} \times [0, \beta_n] \times 2 : n \in F\}.$$

Para cada $n \in F$ e $i \in 2$, $\{n\} \times [0, \beta_n] \times \{i\}$ é compacto (sendo homeomorfo ao subespaço $[0, \beta_n]$ de ω_1) e como F é finito

$$\bigcup \{\{n\} \times [0, \beta_n] \times 2 : n \in F\} = \bigcup \{\{n\} \times [0, \beta_n] \times \{i\} : n \in F, i \in 2\}$$

é uma reunião finita de compactos e portanto compacto. Logo existe $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ finito que o cobre. Finalmente,

$$X = \overline{U}_0 \cup \overline{U}_1 \cup \bigcup \{V_n : n \in F\} \cup (\bigcup \mathcal{W}) = \overline{\bigcup \mathcal{U}_0}$$

para $\mathcal{U}_0 = \{U_0, U_1\} \cup \{V_n : n \in F\} \cup \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ finito.

O subespaço $\omega \times \{\omega_1\}$ é um subespaço enumerável fechado (pois os abertos dos tipos (i) e (iii) são disjuntos de $\omega \times \{\omega_1\}$) e não compacto (pois $\mathcal{V} = \{(\{n\} \times \omega_1 \times 2) \cup \{n, \omega_1\} : n \in \omega\}$ é uma cobertura aberta de $\omega \times \{\omega_1\}$ que não admite subcobertura finita).

Um espaço Urysohn, semiregular e H -fechado é compacto (veja 4.8.k de [PW]). De modo que, para evitar contra-exemplos através de H -fechados não-compactos (como o anterior), parece-nos razoável acrescentar nas hipóteses que o espaço seja Urysohn semiregular. Assim a conjectura (na sua versão final) será: um espaço Urysohn, semiregular no qual todo subespaço de densidade $\leq \lambda$ é $T_{3,5}$ admite uma extensão T_2 , λ -limitada.

O próximo teorema utiliza uma idéia do Teorema 2 de [D1], isolando e generalizando a construção que aparece lá:

Teorema 3.2 *Seja $\kappa > \omega$ um cardinal e seja X um espaço $< \kappa$ -limitado (i.e. λ -limitado para todo $\lambda < \kappa$) e não compacto. Então X admite uma seqüência livre de comprimento κ (i.e. $F(X) \geq \kappa$).*

Demonstração: Sendo X não compacto, existe alguma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X que não admite subcobertura finita. Mais ainda, sendo X inicialmente λ -compacto para todo $\lambda < \kappa$ (por ser λ -limitado), segue que não pode existir subfamília $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ de cardinalidade $< \kappa$ cobrindo X (senão $\mathcal{V}$ admitiria uma subcobertura finita).

Vamos definir, por recursão transfinita sobre $\alpha < \kappa$, uma seqüência $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ de pontos de X e uma seqüência crescente $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ de abertos de X tais que para todo $\alpha < \kappa$:

- (i) U_α é união de $\leq \max\{|\alpha|, \omega\}$ elementos de $\mathcal{U}$;
- (ii) $x_\alpha \notin U_\alpha$;
- (iii) $\overline{\{x_\gamma : \gamma < \alpha\}} \subseteq U_\alpha$.

Começamos com $U_0 \in \mathcal{U}$ qualquer e como $U_0 \neq X$, escolhemos $x_0 \in X \setminus U_0$.

Seja $0 < \alpha < \kappa$ e suponhamos que x_γ e U_γ foram escolhidos para todo $\gamma < \alpha$ satisfazendo as três condições acima. Seja $A_\alpha = \{x_\gamma : \gamma < \alpha\}$. $|A_\alpha| \leq |\alpha| < \kappa$, de modo que $K_\alpha = \overline{A_\alpha}$ é compacto. Logo, existe $\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{V}_\alpha$ finito tal que $K_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{V}_\alpha$. Seja $U_\alpha = \bigcup \{U_\gamma : \gamma < \alpha\} \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha$. Como cada U_γ é uma união de $\leq \max\{|\gamma|, \omega\} \leq \max\{|\alpha|, \omega\}$ elementos de $\mathcal{U}$, então U_α será uma união de $\leq \max\{|\alpha|, \omega\} \cdot |\alpha| + \omega = \max\{|\alpha|, \omega\}$ elementos de $\mathcal{U}$; e (i) está satisfeita. (iii) também está satisfeita pois $\overline{\{x_\gamma : \gamma < \alpha\}} = \overline{A_\alpha} = K_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$. Finalmente, como $\max\{|\alpha|, \omega\} < \kappa$, $U_\alpha \neq X$ (senão existiria subfamília de cardinalidade $< \kappa$ de $\mathcal{U}$ cobrindo X); e podemos escolher $x_\alpha \in X \setminus U_\alpha$ dando prosseguimento à construção.

A seqüência $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ obtida no fim do processo será uma seqüência livre, pois para $\alpha < \kappa$:

$\overline{\{x_\gamma : \gamma < \alpha\}} \subseteq U_\alpha$; enquanto que por (ii) e pelo fato que a seqüência $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ é crescente, $\{x_\gamma : \alpha \leq \gamma < \kappa\} \subseteq X \setminus U_\alpha$, de modo que $\overline{\{x_\gamma : \alpha \leq \gamma < \kappa\}} \subseteq \overline{X \setminus U_\alpha} = X \setminus U_\alpha$ e

portanto

$$\overline{\{x_\gamma : \gamma < \alpha\}} \cap \overline{\{x_\gamma : \alpha \leq \gamma < \kappa\}} = \emptyset .$$

□

Em particular, se X é κ -limitado e não-compacto, então $F(X) \geq \kappa^+$; e mais genericamente, se X é não-compacto, então está bem definido $\kappa = \min\{\theta : \theta \text{ é cardinal e } X \text{ não é } \theta\text{-limitado}\}$ e vale que $F(X) \geq \kappa$ (se $\kappa = \omega$, o teorema não se aplica, mas neste caso $F(X) \geq \omega$ vale por definição).

Como consequência imediata do Teorema 3.2 obtemos:

Corolário 1 *Se X é um espaço κ -limitado e $\kappa = F(X)$, ou $\kappa = s(X)$, então X é compacto.*

□

Por outro lado, os espaços $X = \kappa^+$, para κ um cardinal infinito, com a topologia da ordem, mostram que X pode ser κ -limitado com $\kappa = t(X)$ ou $\kappa = \chi(X)$ sem ser compacto. Porém:

Corolário 2 *Se X é um espaço κ -limitado, inicialmente κ^+ -compacto e $\kappa = t(X)$, ou $\kappa = \chi(X)$, ou X é T_2 e $\kappa = \psi_c(X)$, então X é compacto.*

Demonstração: Seja $\kappa = t(X)$. Pelo Teorema 3.2, se X não for compacto, então X admite alguma seqüência livre de comprimento κ^+ ; a qual, sendo X inicialmente κ^+ -compacto, terá algum ponto de acumulação completa $p \in X$, para o qual, pela Proposição 2.5, $t(p, X) \geq \kappa^+$ – contradizendo $t(X) = \kappa$.

Se $\kappa = \chi(X)$, recaímos no caso anterior, pois $\chi(X) \geq t(X)$.

Se X é T_2 e $\kappa = \psi_c(X)$, então a Proposição 2.4(ii) implica que $\chi(X) = \psi_c(X)$, e recaímos no caso anterior.

□

Em combinação com o Teorema 3.1, obtemos:

Corolário 3 Se X é um espaço T_2 inicialmente θ -compacto e $\theta = 2^{F(X)}$ ou $\theta = 2^{s(X)}$ ou $\theta = 2^{t(X)}$ ou $\theta = 2^{\chi(X)}$ ou $\theta = 2^{\psi_c(X)}$, então X é compacto.

Demonstração: O Teorema 3.1 faz os dois primeiros casos recaírem no Corolário 1 e os três últimos recaírem no Corolário 2 (pois, por exemplo, se $\kappa = t(X)$, então $\kappa^+ = t(X)^+ \leq 2^{t(X)} = \theta$ e portanto X é κ -limitado e inicialmente κ^+ -compacto). $\square$

Observações:

- (1) Estes resultados não valem para espaços T_1 : considere $X = \theta$, onde $\theta > \omega$ é algum cardinal regular, com a topologia dada pela topologia cofinita sobre θ refinada pelos segmentos iniciais – i.e. $\emptyset \neq U \subseteq X$ é aberto se e só se existem $\alpha \leq \theta$ e $F \subseteq \alpha$ finitos tais que $U = \{\xi < \alpha : \xi \notin F\}$ – (Este exemplo, com $\theta = \omega_1$, aparece no começo do oitavo capítulo de [MR]). Isto define uma topologia T_1 (porém não T_2) sobre X , inicialmente κ -compacta para todo $\kappa < \theta$, não-compacta e $d(X) = s(X) = F(X) = t(X) = \omega$, conforme mostraremos a seguir:

- Dados $\alpha \neq \beta$ em X , seja $U = \{\xi < \alpha + 1 : \xi \neq \beta\}$. U é um aberto com $\alpha \in U$ e $\beta \notin U$, mostrando que X é T_1 .
- Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X com $|\mathcal{U}| = \kappa < \theta$, considere, para cada $U \in \mathcal{U}$, $\beta_U = \sup U \leq \theta$. Se $\beta_U < \theta$ para todo $U \in \mathcal{U}$, então $\gamma = \sup\{\beta_U : U \in \mathcal{U}\} < \theta$ e $\gamma + 1$ não pertenceria a $\bigcup \mathcal{U}$; logo, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ com $\sup U_0 = \theta$ e portanto $U_0 = \{\xi < \theta : \xi \notin F\}$ para algum $F \subseteq \theta$ finito. Sejam $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$. Então $X = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$, mostrando que X é inicialmente κ -compacto.
- A família $U_\alpha = \alpha$ para $\alpha < \theta$ é uma cobertura aberta que não admite subcobertura finita, mostrando que X não é compacto.
- De fato $hd(X) = \omega$ (e disto seguem as outras igualdades), pois dado $Y \subseteq X$

(infinito), digamos $Y = \{\alpha_\xi : \xi < \eta\}$ escrito em enumeração crescente, com η = o tipo de ordem de Y (veja 7.7 do Cap. 1 de [K]); considere $A = \{\alpha_\xi : \xi < \omega\} \subseteq Y$. Não é difícil de ver que $\overline{A} = Y$.

Assim, para $\theta = (2^\omega)^+$, X é um espaço T_2 inicialmente κ -compacto com $\kappa = 2^\omega = 2^{d(X)} = 2^{F(X)} = 2^{s(X)} = 2^{t(X)}$ e não-compacto (e nem também ω -limitado, uma vez que $d(X) = \omega$, mostrando que também que o Teorema 3.1 não vale para espaços T_1).

(2) Por outro lado, nestes espaços $\psi(X) = \chi(X) = \theta$ se θ é cardinal limite e $\psi(X) = \chi(X) = \kappa$ se $\theta = \kappa^+$, de modo que X não é inicialmente $2^{\chi(X)}$ -compacto. E, de fato, não sabemos se X T_1 inicialmente $2^{\chi(X)}$ -compacto implica que X é compacto. Quanto ao $\psi(X)$, também não sabemos se X T_2 inicialmente $2^{\psi(X)}$ -compacto implica que X é compacto (enquanto que se X for T_3 , então $\psi(X) = \psi_c(X)$ e X será compacto) e nem dispomos de exemplos de espaços X T_1 inicialmente $\psi(X)^+$ -compactos e não compactos.

(3) Estes resultados não valem para a celularidade: vamos mostrar um exemplo de um espaço X T_2 inicialmente $2^{c(X)}$ -compacto (e conseqüentemente $c(X)$ -limitado) e não compacto. Para comodidade notacional sejam $\kappa = 2^\omega$ e $\theta = 2^\kappa$ e seja, para cada $\alpha < \theta$, $X_\alpha = \{0, 1\}$ com a topologia usual. Consideremos o espaço produto $Y = \prod\{X_\alpha : \alpha < \theta\}$. Então Y é compacto T_2 , $|Y| = 2^\theta$ e, como $d(X_\alpha) = \omega \leq \kappa$ e temos $\theta = 2^\kappa$ fatores, pelo Teorema 2.3.15 de [Eng], $d(Y) \leq \kappa$ e, pelo Teorema 2.3.17 de [Eng], $c(Y) = \omega$. Seja $A \subseteq Y$, $|A| \leq \kappa$ tal que $\overline{A} = Y$. Pela construção 3.5 de [St] existe $X \subseteq Y$, $|X| \leq 2^\kappa$ tal que $A \subseteq X$ e X é inicialmente κ -compacto. Como $|X| \leq 2^\kappa = \theta < 2^\theta = |Y|$, segue que $X \neq Y$ e como X é denso em Y (pois $X \supseteq A$ e A é denso em Y), segue que X não é compacto (senão X seria fechado em Y e portanto $X = Y$). Também por ser X denso em Y , $c(X) \leq c(Y) = \omega$ e

portanto $c(X) = \omega$. Assim, X satisfaz todas as condições prometidas.

- (4) Seja $\langle \kappa_n : n \in \omega \rangle$ a seqüência de cardinais definida recursivamente por $\kappa_0 = \omega$, $\kappa_{n+1} = 2^{\kappa_n}$ e seja $\kappa = \sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$. κ é um cardinal limite forte (i.e. $2^\lambda < \kappa$ para $\lambda < \kappa$) e $cf(\kappa) = \omega$.

Consideremos o espaço $X = \kappa^+$ com a topologia da ordem. X é T_2 (de fato T_4), inicialmente κ -compacto, não-compacto e $\kappa > 2^{t(\alpha, X)}$ para todo $\alpha \in X$ (pois $t(\alpha, X) = cf(\alpha) < \kappa$ para todo $\alpha < \kappa^+ = X$).

Este exemplo mostra que o resultado do Corolário 3 não vale se, ao invés de $\theta = 2^{t(X)}$, tivermos apenas $\theta > 2^{t(p, X)}$ para todo $p \in X$.

Porém, pode-se demonstrar que:

Teorema 3.3 *Seja X um espaço T_2 inicialmente θ -compacto com $t(X) = \kappa$; e suponhamos que $\theta \geq 2^{t(p, X)}$ para todo $p \in X$, $\theta \geq \kappa^+$ e $\theta \geq \kappa^{<\kappa}$. Então X é compacto.*

Demonstração: Se existe $p_0 \in X$ com $t(p_0, X) = \kappa = t(X)$, então $\theta \geq 2^{t(X)}$ e, pelo Corolário 3, X é compacto.

Suponhamos então que $t(p, X) < \kappa$ para todo $p \in X$ (em particular, κ será um cardinal limite).

Pelo Corolário 2, é suficiente provar que X é κ -limitado. Seja então $S \subseteq X$, $|S| \leq \kappa$ e consideremos $Y = \overline{S}$.

$Y = \bigcup \{\overline{A} : A \subseteq S, |A| < \kappa\}$, pois dado $p \in Y = \overline{S}$, existe $A \subseteq S$ com $|A| \leq t(p, X) < \kappa$ tal que $p \in \overline{A}$.

Para cada $\lambda < \kappa$, X é λ -limitado, pois se $\lambda < \kappa = \sup\{t(p, X) : p \in X\}$, então existe $p \in X$ tal que $\lambda \leq t(p, X)$, donde $2^\lambda \leq 2^{t(p, X)} \leq \theta$ e o resultado segue do Teorema 3.1. Assim, para cada $A \subseteq S$ com $|A| < \kappa$, $\overline{A}$ é compacto e Y é uma reunião de

$$\leq |\{A \subseteq S : |A| < \kappa\}| = |[S]^{<\kappa}| \leq \kappa^{<\kappa} \leq \theta \text{ compactos.}$$

Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de Y . Para cada $A \subseteq S$, $|A| < \kappa$, seja $\mathcal{U}_A \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ cobrindo $\overline{A}$ e seja

$$\mathcal{V} = \bigcup \{\mathcal{U}_A : A \subseteq S, |A| < \kappa\} \subseteq \mathcal{U}.$$

$\mathcal{V}$ também cobre Y e $|\mathcal{V}| \leq \omega \cdot \kappa^{<\kappa} \leq \theta$. Como Y é inicialmente θ -compacto (por ser um subespaço fechado de X) segue que existe $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ finito e cobrindo Y ; e portanto Y é compacto. $\square$

Para finalizar, algumas considerações sobre a possibilidade de existência de um espaço X T_2 inicialmente ω_1 -compacto, não-compacto, com $t(X) = \omega$ (ou $\chi(X) = \omega$) – a pergunta de A. Dow em [D1] –.

É claro que um tal espaço não pode ser construído em ZFC, pois se valer a hipótese do contínuo todo espaço T_2 inicialmente ω_1 -compacto de tightness (ou caráter) enumerável é compacto.

Por outro lado, supondo que um tal X existisse, pelo Corolário 2 do Teorema 3.2, X não poderia ser ω -limitado. Portanto, existiria $A \subseteq X$, $|A| = \omega$ tal que $Y = \overline{A}$ não seria compacto. Mas então Y também seria um espaço T_2 inicialmente ω_1 -compacto, não-compacto, com $t(Y) = \omega$ (ou $\chi(Y) = \omega$) e além disso $d(Y) = \omega$.

Em particular, Y seria enumeravelmente compacto; e existe um vasto estudo – principalmente por P.J. Nyikos, veja o Cap. 8 de [MR] – sobre espaços T_2 enumeravelmente compactos, não-compactos com d e χ enumeráveis: não se sabe se existem em ZFC e dispõe-se de exemplos em extensões de ZFC. É claro que nenhum deles é também inicialmente ω_1 -compacto (o que nos parece ser bastante mais difícil).

Referências

- [Al] O.T. Alas. On initially κ -compact spaces. (1994), pre-print.
- [BDFN] Z. Balogh, A. Dow, D.H. Fremlin, P.J. Hyikos. Countable tightness and proper forcing. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **19**, (1988), 295–298.
- [Be] A. Bella. On the cardinality of a compact T_1 space. *Proc. of The Amer. Math. Soc.*, **99**, nº 1, (1987), 176–178.
- [Chr] S. Christodoulou. Some topologies over a cardinal. *Q & A in General Topology*, **10**, (1992), 143–148.
- [vD] E. van Douwen. Problem A.19. *Top. Proc.*, **9**, (1984), 367.
- [D1] A. Dow. On initially κ -compact spaces. Em: *Rings of Cont. Functions*, C. Aull ed., *Lecture Notes in Pure and Applied Math.*, **95**, (1985), 103–108.
- [D2] ———. An introduction to applications of elementary submodels to topology. *Top. Proc.*, **13**, (1988), 17–72.
- [D3] ———. Compact spaces of countable tightness in the Cohen model. Em: *Set Theory and Its Appl.*, *LN*M, **1401**, (1989), 55–67.
- [Eng] R. Engelking. *General topology*. Heldermann Verlag, Berlin (Sigma Series in Pure Mathematis, vol. 6), (1989).
- [Ho] R. Hodel. Cardinal functions I. Em: *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen e J.E. Vaughan eds., cap. 1, 1–61, North-Holland, Amsterdam, (1984).
- [Jech] T. Jech. *Set theory*. Acad. Press, N.Y., (1978).
- [Jul] J. Juhasz, *Cardinal functions in topology - ten years later*. Mathematical Centre Tracts 123, Mathematisch Centrum - Amsterdam (1980).

- [Ju2] ——— Cardinal functions II. Em: *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen e J.E. Vaughan eds., cap.2, 63–109, North-Holland, Amsterdam (1984).
- [Ju3] ——— A weakening of Club, with applications to topology. *Comm. Math. Univ. Carolin.*, **29**(4), (1988), 767–773.
- [Ju4] ——— On a problem of van Douwen. *Studia Scientiarum Math. Hungarica*, **24**, (1989), 385–773.
- [Ju5] ——— On the minimum character of points in compact spaces. A aparecer em *Topology' 89, Coll. Math. Soc. J. Bolyai*.
- [K] K. Kunen. *Set theory, an introduction to independence proofs*. North-Holland, Amsterdam, (1980).
- [Ma] V.I. Malyhin. On the power of first countable T_1 -bicomacta. Em: *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, North-Holland, Amsterdam, (1978), 827–828.
- [MR] J. van Mill e G.M. Reed (eds.) *Open problems in topology*. North-Holland, (1990).
- [PW] J.R. Porter e R.G. Woods. *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*. Springer-Verlag, N.Y., (1988).
- [St] R.M. Stephenson Jr. Initially κ -compact and related spaces. Em: *Handbook of Set-Theoretic Topology*, cap. 13, 603–632, North-Holland (1984).