Espaços κ -scattered e Produtos-Box

Cássio Y. Shimuta

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração : *Topologia Geral*
Orientadora : *Prof^a Dr^a Ofelia Teresa Alas*

Este trabalho foi financiado pelo CNPq

ao Prof. Edison Farah

Espaços κ -scattered e Produtos-Box

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação apresentada por Cássio Shimuta,
devidamente corrigida e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, janeiro de 1995.

Comissão julgadora:

Prof^ª Dr^ª Ofelia Teresa Alas (orientadora)

IME-USP

Prof. Dr. Ricardo Bianconi

IME-USP

Prof.Dr. Mário Sette

IFCH-UNICAMP

Resumo

Nesta monografia, estudaremos algumas propriedades de recobrimento e de separação dos espaços κ -scattered, obtendo algumas generalizações parciais de resultados clássicos. Além disso, estudaremos alguns resultados de consistência no caso de produtos-box de espaços paracompactos, localmente compactos, e alguns resultados recentes (1994) envolvendo o produto-box de espaços σ -compactos na ausência de compacidade local.

Abstract

This dissertation is mainly concerned with covering and separation properties of topological spaces. In the first chapter, we study some of these properties regarding a special kind of locally nice topological space, namely, κ -scattered spaces. We present some results, partially improving earlier theorems dealing with scattered spaces. In the remaining chapters, we study some consistency results on paracompactness of box-products where the factors are paracompact, locally compact spaces, and some recent results (1994) about box-products of σ -compact spaces in the absence of local compactness.

Agradecimentos

À minha *orientadora de tese*, Profa. Ofelia Teresa Alas, pelo incentivo e pela paciência desde a época de iniciação científica;

Aos meus amigos, Artur H. Tomita, Eduardo Almeida Prado, Lúcia Renato Junqueira e Renata Grunberg, pelo apoio e amizade durante todos estes anos;

Ao Prof. Frank D. Tall, cujo minicurso ministrado no início de 1990, determinou minha escolha por *Set-Theoretic Topology (propriedades de recobrimento e separação)*, e por permitir que assistisse alguns dos seminários da *University of Toronto*, e alguns dos “joint seminars” desta universidade com a *York University*;

Ao Prof. Newton C.A. da Costa, pelos diversos seminários que assisti, os quais despertaram meu interesse por *Teoria dos Conjuntos*;

Aos docentes do Departamento de Matemática, em especial, Daciberg L. Gonçalves, Lucília Daruiz Borsari, Flávio Ulhoa Coelho, Francisco Rui Tavares de Almeida, Paulo Domingos Cordaro, Iole de Freitas Druck, Elói M. Galego e Mary Lilian Lourenço;

Aos meus amigos de graduação e pós-graduação, em especial, Leônidas, Leonardo, Gaspar e Carlota, pela ajuda com o LaTeX;

Aos funcionários da Biblioteca, Xerox e SPG.

Conteúdo

1	Espaços κ-scattered	1
1.1	Propriedades de Recobrimento	1
1.1.1	Introdução	1
1.1.2	Algumas propriedades de recobrimento	2
1.2	Espaços κ -scattered e propriedades de recobrimento	6
1.3	Propriedades de Separação	15
1.3.1	Introdução	15
1.3.2	Definições e resultados	16
1.4	Espaços κ -scattered e Separação	18
2	Produtos-Box	23
2.1	Produtos Topológicos	23
2.1.1	Introdução	23
2.1.2	Definições básicas	23
2.1.3	Alguns resultados	25
2.2	Grau de Lindelöf de Produtos-Box	36
2.2.1	Fatores compactos	36
2.2.2	Fatores κ -scattered	40
3	Produtos-Box de espaços localmente compactos	44
3.1	Produto-Nabla	44
3.2	Lema-Nabla	50

3.3	Resultados consistentes com ZFC	56
3.3.1	Um pouco de Topologia	56
3.3.2	Assumindo CH	57
3.3.3	Fatores com caráter enumerável	59
3.3.4	Fatores metrizáveis	65
4	Produtos-Box de espaços σ -compactos	70
4.1	Dissecando o produto-box	70
4.2	Propriedades de separação em produtos-box	81
4.3	Mais resultados consistentes com ZFC	94
	Lista de Símbolos	105
	Índice alfabético	107
	Bibliografia	110

Notações

- (a) Se X é conjunto, $|X|$ será sua cardinalidade.
 (b) Dado um conjunto X , $P(X)$ denotará o conjunto de todos os subconjuntos de X .
 (c) $\omega = \omega_0 = \aleph_0$ será o conjunto dos ordinais finitos, e $\omega_1 = \omega^+ = \aleph_1$.
 (d) $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$, onde $\mathbb{R}$ é a reta real.
 (e) Se A é um conjunto e ν um cardinal,

$$[A]^\nu = \{Y \subseteq A : |Y| = \nu\};$$

$$[A]^{<\nu} = \bigcup_{\lambda < \nu} [A]^\lambda;$$

$$[A]^{\leq \nu} = [A]^{<\nu} \cup [A]^\nu.$$

- (f) Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, então
 $\text{dom}(f) = X$,
 $\text{Im}(f) = \{y \in Y : (\exists x \in X)(f(x) = y)\}$.
 Se $A \subseteq X$, então $f|_A = \{\langle x, f(x) \rangle : x \in A\}$.
 (g) Dados conjuntos A e B ,

$${}^A B = \{f \in P(A \times B) : f \text{ é função e } \text{dom}(f) = A\}.$$

- (h) Formalmente, um espaço topológico é um par $\langle X, \tau \rangle$, onde X (o suporte do espaço) é um conjunto e $\tau \in P(P(X))$ satisfaz

- (i) $\phi \in \tau$ e $X \in \tau$;
- (ii) se $\mathcal{A} \in [\tau]^{<\aleph_0}$, então $\bigcap \mathcal{A} \in \tau$;
- (iii) se $\mathcal{A} \in P(\tau)$, então $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Neste trabalho, denotaremos um espaço topológico simplesmente pelo seu suporte X , e quando necessário, $\tau(X)$ designará sua topologia.

- (i) Fixado um espaço topológico X ,

$$A \overset{\text{fech.}}{\subseteq} X,$$

significará que $A \in P(X)$ e A é fechado em X .

Analogamente, $A \overset{\text{ab.}}{\subseteq} X$, significará que $A \in P(X)$ e $A \in \tau(X)$.

- (j) Se X é um espaço topológico e $A \in P(X)$, $\overline{A}^X$ denotará o fecho de A em X . Quando não houver possibilidade de confusão, usaremos a notação $\overline{A}$.
 (k) Se X é um espaço topológico e $A \in P(X)$, $\overset{\circ}{A}$ será o interior de A em X .
 (l) Dado $A \in P(X)$, a fronteira do conjunto A é definida como $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

(m) Quando tivermos uma família de espaços topológicos $\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha \in \nu\}$,

$$\bigoplus_{\alpha \in \nu} X_\alpha$$

denotará a soma topológica de $\mathcal{F}$, i.e., o espaço topológico cujo suporte é $X = \bigcup_{\alpha \in \nu} X_\alpha$, e $\tau(X) = \{U \subseteq X : (\forall \alpha \in \nu)(U \cap X_\alpha \in \tau(X_\alpha))\}$.

(n) **CH** é a hipótese do contínuo, i.e., $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

(o) Dados ordinais α e β , e uma função $f : \alpha \rightarrow \beta$, dizemos que f é **cofinal** se, e somente se, $Im(f)$ não é limitada em β .

A **cofinalidade** de β ($cf(\beta)$) é o menor ordinal α tal que existe uma função $f : \alpha \rightarrow \beta$ cofinal.

(p) Uma ordem parcial é um par ordenado $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, onde $\mathbb{P}$ é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma relação sobre $\mathbb{P}$ transitiva e reflexiva. Uma ordem parcial é *estrita* se for anti-simétrica.

Uma ordem total é uma ordem parcial estrita onde cada par de elementos é comparável.

Um conjunto é bem ordenado se for uma ordem total, onde todo subconjunto não vazio possui mínimo.

(q) Se A é um conjunto bem ordenado pela relação $\mathcal{R}$, então existe um único ordinal λ tal que $\langle A, \mathcal{R} \rangle$ é isomorfo a λ . Este ordinal será chamado de **tipo de ordem** de $\langle A, \mathcal{R} \rangle$ e o denotaremos por $o.t.(\langle A, \mathcal{R} \rangle)$.

(r) Neste trabalho, usaremos a axiomática de Teoria de Conjuntos de **Zermelo-Fraenkel** com o axioma da escolha (**AC**). Para simplificar, denotaremos esta teoria por **ZFC**. A descrição detalhada destes axiomas pode ser encontrada em (Kunen, 1980) ou (Jech, 1978).

Capítulo 1

Espaços κ -scattered

1.1 Propriedades de Recobrimento

1.1.1 Introdução

Teoria de propriedades de recobrimento é um ramo da *Topologia Geral*. O surgimento desta teoria está ligado aos espaços *fully normal* de J.W.Tukey e aos espaços *paracompactos* de J.Dieudonné. O interesse neste assunto se intensificou a partir de 1948, quando A.H. Stone demonstrou que os espaços *metrizáveis* são *paracompactos*.

Em torno de 1950, os espaços *metacompactos* foram definidos por R.Arens e J.Dugundji e por R.H.Bing.

Na década de 1950, E.A.Michael aplicou e estendeu a técnica da demonstração de Stone, obtendo alguns importantes teoremas de *caracterização* de espaços *paracompactos*. As demonstrações destes resultados são extremamente elegantes, e podem ser encontradas em [Engelking, 1989] ou [Burke, 1984].

Esta teoria se desenvolveu muito ao longo das décadas de 1960 e 1970, quando as técnicas de Stone e Michael foram aplicadas a outras propriedades de recobrimento. Em particular, a teoria de *caracterização* foi estendida por J.M.Worrel, Burke e outros, para as seguintes propriedades: *metacompacidade*, *subparacompacidade*, *submetacompacidade*.

Continuando, a *teoria de propriedades de recobrimento* pode ser dividida em *teoria básica* e *teoria especial*.

A *teoria básica* consiste de 3 grandes subáreas. A primeira é a *teoria de caracterização*, a qual já foi mencionada acima. Outra destas subáreas é a *teoria de representação*, a qual se ocupa do estudo das classes importantes de espaços que satisfazem determinadas propriedades de recobrimento. Como exemplo, os espaços *metrizáveis* são “típicos” espaços *paracompactos*. A terceira subárea é a *teoria de preservação*, a qual estuda o comportamento das propriedades de recobrimento sob as várias operações topológicas.

A *teoria de preservação* se divide em duas subáreas: *teoria de produtos* e *teoria de aplicações*.

A *teoria especial* estuda as propriedades de recobrimento de espaços “especiais”, como os espaços scattered, espaços ordenados, espaços locally nice, etc.

1.1.2 Algumas propriedades de recobrimento

Nesta seção daremos as definições de algumas propriedades de recobrimento que serão usadas neste trabalho, além de enunciarmos alguns resultados envolvendo estas propriedades.

Antes das definições, introduziremos uma notação que simplificará muito a escrita.

Fixado um conjunto X e dados $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ e $B \in P(X)$, utilizaremos a seguinte notação

$$\text{ord}(B, \mathcal{A})$$

para designar a cardinalidade do conjunto $\{A \in \mathcal{A} : B \cap A \neq \emptyset\}$.

Quando $B = \{x\}$, escreveremos simplesmente $\text{ord}(x, \mathcal{A})$.

Definição 1.1.1 *Um recobrimento (recouvrement) de um espaço topológico X é uma família $\mathcal{U} \subseteq P(X)$ satisfazendo a condição $X = \bigcup \mathcal{U}$. Se esta família for constituída de abertos (fechados, etc.), então a chamaremos de recobrimento aberto (fechado, etc.).*

Definição 1.1.2 *Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são recobrimentos de um espaço X , a coleção $\mathcal{V}$ é denominada um refinamento da coleção $\mathcal{U}$ se*

$$(\forall V \in \mathcal{V})(\exists U \in \mathcal{U})(V \subseteq U).$$

Caso a coleção $\mathcal{V}$ acima não seja um recobrimento do espaço X , dizemos que $\mathcal{V}$ é um refinamento parcial de $\mathcal{U}$.

Definição 1.1.3 *Um refinamento $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de um determinado recobrimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ será denominado refinamento exato (relativo ao conjunto Λ) se*

$$(\forall \alpha \in \Lambda)(V_\alpha \subseteq U_\alpha).$$

Definição 1.1.4 *Uma coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X é discreta (resp., localmente finita, localmente enumerável) se*

$$(\forall x \in X)(\exists W \in \mathcal{V}_x)(\text{ord}(W, \mathcal{U}) \leq 1)$$

(resp., $\text{ord}(W, \mathcal{U}) < \aleph_0$, $\text{ord}(W, \mathcal{U}) \leq \aleph_0$).

Definição 1.1.5 Uma coleção $\mathcal{U}$ é pontualmente-finita (pontualmente-enumerável) se

$$(\forall x \in X)(\text{ord}(x, \mathcal{U}) < \aleph_0)$$

$$(\text{ord}(x, \mathcal{U}) \leq \aleph_0)$$

Definição 1.1.6 Uma coleção $\mathcal{U}$ preserva fecho (preserva interior) se para qualquer subcoleção $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, temos

$$\bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\} = \overline{\bigcup \mathcal{V}}$$

$$(\bigcap \{\overset{\circ}{V} : V \in \mathcal{V}\} = \overset{\circ}{\bigcap \mathcal{V}}).$$

Claramente, $\mathcal{U}$ preserva fecho se, e somente se $\{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ preserva interior.

Para simplificar, daqui por diante, " $\mathcal{U}$ é c-p" significará que $\mathcal{U}$ preserva fecho.

Definição 1.1.7 Uma coleção $\mathcal{V}$ é denominada "cushioned" em uma coleção $\mathcal{U}$ se existe uma função $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que

$$(\forall \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V})[\overline{\bigcup \mathcal{W}} \subseteq \bigcup \{T(W) : W \in \mathcal{W}\}].$$

A seguir, duas proposições envolvendo algumas das definições dadas.

Proposição 1.1.1 Dado um espaço topológico qualquer, são verdadeiras:

- (i) Toda família localmente finita (loc.enumerável) é pontualmente-finita (pontualmente-enumerável);
- (ii) Se $\mathcal{U}$ é localmente finita (loc.enumerável), então

$$\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$$

também é;

- (iii) Se $\mathcal{U}$ é localmente finita (loc.enumerável) e K é compacto, então

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap K \neq \emptyset\}$$

é finito (enumerável);

- (iv) Se $\mathcal{U}$ é localmente finita e $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$, então

$$\bigcup \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\} = \overline{\bigcup \mathcal{W}}$$

i.e., $\mathcal{U}$ é c-p.

Proposição 1.1.2 *Se $\mathcal{F}$ é uma família c-p formada por fechados de X e $A \subseteq X$ é fechado, então $\{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ é c-p.*

Definição 1.1.8 *Uma coleção $\mathcal{U}$ é dita σ -localmente finita (σ -discreta, etc.) se $\mathcal{U}$ pode ser expressa como*

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}_n$$

onde cada $\mathcal{U}_n$ é localmente finita (discreta, etc.).

Definição 1.1.9 *Um espaço topológico X é paracompacto se todo recobrimento aberto de X admite um refinamento aberto localmente finito.*

Definição 1.1.10 *Um espaço topológico X é Lindelöf se todo recobrimento aberto de X possui um subrecobrimento enumerável.*

Definição 1.1.11 *Um espaço topológico X é ultraparacompacto se todo recobrimento aberto de X admite um refinamento aberto disjunto.*

Logo, todo espaço ultraparacompacto regular é zero-dimensional, i.e., o espaço possui uma base de abertos-fechados.

Teorema 1.1.1 *(E.A.Michael)*

Para cada espaço regular X , são equivalentes:

- (i) X é paracompacto;*
- (ii) Todo recobrimento aberto de X admite um refinamento aberto σ -localmente finito;*
- (iii) Todo recobrimento aberto de X admite um refinamento localmente finito;*
- (iv) Todo recobrimento aberto de X admite um refinamento localmente finito fechado.*

Portanto, por (ii), todo espaço Lindelöf regular é paracompacto.

O resultado a seguir mostra a ligação entre a paracompacidade de um espaço topológico, e algumas propriedades de recobrimento consideravelmente mais fracas que a finitude local.

Teorema 1.1.2 *(E.A.Michael)*

Dado um espaço regular X , são equivalentes:

- (i) X é paracompacto;
- (ii) Todo recobrimento aberto de X admite um refinamento aberto σ -c-p;
- (iii) Todo recobrimento aberto de X admite um refinamento fechado c-p;
- (iv) Todo recobrimento aberto de X admite um refinamento aberto σ -cushioned;
- (v) Todo recobrimento aberto de X admite um refinamento cushioned.

Corolário 1.1.1 *Um espaço regular X é paracompacto se, e somente se, todo recobrimento aberto de X admite um refinamento aberto σ -discreto.*

Definição 1.1.12 *Um espaço X é metacompacto se todo recobrimento aberto de X admite um refinamento aberto pontualmente-finito.*

Definição 1.1.13 *Um espaço topológico X é fracamente θ -refinável ou fracamente submetacompacto se todo recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de X admite um refinamento aberto $\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{G}_n$ satisfazendo*

$$(\forall x \in X)(\exists n \in \omega)(1 \leq \text{ord}(x, \mathcal{G}_n) < \omega).$$

Neste caso, a sequência $\langle \mathcal{G}_n : n \in \omega \rangle$ é denominada **recobrimento θ -fraco** de X .

Definição 1.1.14 *Se para cada $n \in \omega$, $\mathcal{G}_n$ for um recobrimento de X , então X é denominado θ -refinável ou submetacompacto.*

A sequência $\langle \mathcal{G}_n : n \in \omega \rangle$ de recobrimentos de X é denominada **θ -sequência de recobrimentos**.

Teorema 1.1.3 *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

- (i) X é fracamente submetacompacto;
- (ii) Dado um recobrimento $\mathcal{U}$ de X , $\mathcal{U}$ admite um refinamento

$$\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{G}_n$$

onde é satisfeita a condição $(\forall x \in X)(\exists n \in \omega)(\text{ord}(x, \mathcal{G}_n) = 1)$;

- (iii) Dado um recobrimento $\mathcal{U}$ de X , $\mathcal{U}$ admite um refinamento $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$, onde cada $\mathcal{F}_n$ é fechado e discreto relativamente a $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$.

1.2 Espaços κ -scattered e propriedades de recobrimento

Nesta seção introduziremos o conceito de espaço κ -scattered, o qual generaliza o conceito de espaço scattered, e veremos quando estes espaços são ultraparacompactos.

Seja X um espaço topológico e κ um cardinal, $\kappa \leq |X|$.

Definição 1.2.1 *Um espaço topológico X é κ -scattered se*

$$(\forall A \in P(X) \setminus \{\emptyset\})(\exists x \in A)(\exists V \in \mathcal{V}_x)(|V \cap A| \leq \kappa)$$

onde $\mathcal{V}_x$ é uma base do sistema de vizinhanças abertas de x em X .

Em outras palavras, um espaço topológico é κ -scattered se todo subespaço A (de X) possui pelo menos um ponto contido em um aberto (da topologia induzida por $\tau(X)$ sobre A) com cardinalidade $\leq \kappa$.

Se $\kappa < \aleph_0$, temos a definição usual de espaço scattered.

Agora, dado um espaço κ -scattered X , podemos formar a sequência $X^{(\alpha)}$, $\alpha \in \text{Ord}$, de *Cantor-Bendixson* de X :

$$X^{(0)} = X,$$

$$X^{(\alpha+1)} = \{y \in X^{(\alpha)} : (\forall V \in \tau(X^{(\alpha)}))(y \in V \Rightarrow |V| > \kappa)\},$$

$$X^{(\alpha)} = \bigcap \{X^{(\beta)} : \beta < \alpha\}, \text{ para } \alpha \text{ ordinal limite.}$$

Observemos que nesta sequência, para todo ordinal α , $X^{(\alpha)}$ é um subconjunto fechado em X e $A \subseteq B$ implica $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$.

Usando a decomposição de *Cantor-Bendixson* de um espaço topológico, podemos dar outra caracterização de espaço κ -scattered:

Definição 1.2.2 *Um espaço topológico X é κ -scattered se existe um ordinal ν tal que*

$$X^{(\nu)} = \emptyset$$

na decomposição de *Cantor-Bendixson* de X .

A seguir, outra definição que utilizaremos muito no decorrer deste trabalho :

Definição 1.2.3 *Dado um espaço κ -scattered X e um ponto $x \in X$, o posto (rank) do ponto x é definido como*

$$r(x) = \min\{\beta : x \notin X^{(\beta+1)}\}.$$

Claramente,

$$r(x) = \alpha \iff (x \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}).$$

Definição 1.2.4 Um espaço topológico X é **totalmente paracompacto** (totalmente **c-p**) se toda base de abertos de X contém um recobrimento de X localmente finito(**c-p**).

Definição 1.2.5 Uma família $\mathcal{B} \subseteq \tau(X)$ é uma **base exterior** de $Y \subseteq X$ se

$$(\forall y \in Y)(\forall \Omega \in \tau(X))((y \in \Omega) \implies (\exists B \in \mathcal{B})(y \in B \subseteq \Omega)).$$

Definição 1.2.6 Seja X um espaço topológico. Um subespaço $Y \subseteq X$ é **totalmente paracompacto** (totalmente **c-p**) com respeito a X se qualquer base exterior de Y em X contém um recobrimento de Y localmente finito (**c-p**) em X .

Lema 1.2.1 Dado um espaço topológico X , sejam Y um subespaço fechado totalmente paracompacto de X e $Z = \overline{Y} \subseteq Y^\circ$.
Então Z é totalmente paracompacto com relação a X .

Demonstração: Sejam $\mathcal{B}_1$ uma base exterior de Z , $\mathcal{B}_2$ uma base exterior de $Y^\circ \setminus Z$ e $\mathcal{B}_3$ uma base exterior de $Y \setminus Y^\circ$ (todas em relação a X).

Tomemos

$$\mathcal{B}^1 = \{B \in \mathcal{B}_1 : (B \cap Z \neq \emptyset) \text{ e } (B \subseteq Y^\circ)\},$$

$$\mathcal{B}^2 = \{B \in \mathcal{B}_2 : (B \subseteq Y^\circ \setminus Z)\} \text{ e}$$

$$\mathcal{B}^3 = \{B \cap Y : (B \in \mathcal{B}_3) \text{ e } (B \cap Fr(Y) \neq \emptyset) \text{ e } (B \cap Z = \emptyset)\}.$$

Temos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^3$ é uma base de abertos de Y .

Como Y é totalmente paracompacto, temos que existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, onde $\mathcal{A}$ é recobrimento aberto de Y , localmente finito em Y .

Seja $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^1$.

Assim, $\mathcal{A}_0$ é um recobrimento de Z e como $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$, então $\mathcal{A}$ é uma família aberta em X .

Logo, $\mathcal{A}_0$ é um recobrimento de Z , localmente finito em X . ■

Lema 1.2.2 Sejam X um espaço topológico $\mathcal{T}_2$ e $M \subseteq X$ um subespaço totalmente **c-p** com respeito a X .

Então M é fechado em X .

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ uma base exterior de M em X .

Fixemos $x \in X \setminus M$. Como X é $\mathcal{T}_2$, temos

$$(\forall y \in M)(\exists U_y \in \mathcal{V}_y)(x \notin \overline{U_y}).$$

Tomando $\mathcal{U} = \{U_y : y \in M\}$, o conjunto

$$\mathcal{B}' = \{\Omega \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U}(\Omega \subseteq U)\}$$

é uma base exterior de M com relação a X .

Logo, existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}'$, recobrimento de M que preserva fecho com respeito a X .
Então,

$$x \notin \bigcup \{\overline{\Omega} : \Omega \in \mathcal{A}\} = \overline{\bigcup \mathcal{A}}.$$

Portanto, $x \notin \overline{M}$. ■

Lema 1.2.3 *Seja X um espaço topológico normal.*

Fixemos $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}_n$ um recobrimento θ -fraco de X , onde para cada $n \in \omega$,

$$(1) \mathcal{U}_n = \{U_s : s \in S_n\}, \text{ e}$$

$$(2) n \neq m \implies S_n \cap S_m = \emptyset.$$

Se $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$, então temos que

$$(\forall s \in S)(\exists V_s \in \tau(X))[\overline{V_s} \subseteq U_s]$$

e a família $\{V_s : s \in S\}$ é um recobrimento de X .

Demonstração: Seja

$$\mathcal{G} = \{G \in {}^S\tau(X) : \underbrace{(\forall s \in S)((G(s) = U_s) \text{ ou } (\overline{G(s)} \subseteq U_s))}_{(1)} \text{ e } \underbrace{(\bigcup_{s \in S} G(s) = X)}_{(2)}\}$$

Consideremos a seguinte ordem sobre $\mathcal{G}$:

$$G_1 \leq G_2 \iff (\forall s \in S)[(G_1(s) \neq U_s) \implies (G_2(s) = G_1(s))]$$

onde $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$.

Afirmção: Para toda família $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$, totalmente ordenada, temos que

$$G_0(s) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_0} G(s), s \in S,$$

define um elemento de $\mathcal{G}$. Com efeito,

- (i) A condição (1) vale em virtude da ordem ser total sobre $\mathcal{G}_0$.
- (ii) Sejam $x \in X$ e $n \in \omega$ com $x \in \bigcup \mathcal{U}_n$ e $\text{ord}(x, \mathcal{U}_n) < \aleph_0$.

Tomemos $S' \subseteq S_n$ t.q. $(\forall s \in S')(x \in \mathcal{U}_s)$ e $(\forall s \in S_n \setminus S')(x \notin \mathcal{U}_s)$.

Se $\exists s \in S'$ com $G_0(s) = U_s$, então $x \in G_0(s) \subseteq \bigcup_{s \in S} G_0(s)$.

Caso ocorra

$$(\forall s \in S')(\exists G_s \in \mathcal{G}_0)(G_s(s) \neq U_s),$$

como $\mathcal{G}_0$ é totalmente ordenado e S' é finito, existe s em S' satisfazendo a condição

$$(\forall s \in S)(G_s \leq G_{s_*}) \quad (\dagger).$$

Como (2) vale para G_{s_*} e $x \in \bigcup \mathcal{U}_n$, temos que $\exists s_1 \in S'$ com

$$x \in G_{s_*}(s_1).$$

Além disso, $(\dagger)$ implica que $G_{s_*}(s_1) = G_{s_1}(s_1) \neq U_{s_1}$.

Assim, como $G_0 \geq G_{s_*}$, temos que $G_0(s_1) = G_{s_*}(s_1)$.

Com isto, $x \in G_0(s_1)$, e portanto $X = \bigcup_{s \in S} G_0(s)$, o que demonstra a afirmação.

A seguir, usando o lema de **Kuratowski-Zorn**, concluímos que existe um elemento maximal $G \in \mathcal{G}$.

Para finalizar, mostraremos que $(\forall s \in S)(\overline{G(s)} \subseteq U_s)$.

Suponha que

$$(\exists n_0 \in \omega)(\exists s_0 \in S)(\overline{G(s_0)} \cap (X \setminus U_{s_0}) \neq \emptyset) \quad (\dagger\dagger).$$

Tomando $A = X \setminus (\bigcup \{G(s) : s \in S \setminus \{s_0\}\})$, temos

(i) A é fechado em X ;

(ii) $A \subseteq G(s_0)$.

Como X é normal, $(\exists U \in \tau(X))(A \subseteq U \subset \overline{U} \subseteq G(s_0))$.

Por (1) e $(\dagger\dagger)$, temos que $G(s_0) = U_{s_0}$.

Assim,

$$G'(s) = \begin{cases} U & s = s_0 \\ G(s) & s \neq s_0 \end{cases}$$

define uma função $G' \in \mathcal{G}$ satisfazendo $G \leq G'$ e $G \neq G'$, contradizendo a maximalidade de G .

Logo, $(\forall s \in S)(\overline{G(s)} \subseteq U_s)$. ■

Teorema 1.2.1 *Sejam X um espaço paracompacto $\mathcal{T}_2$ tal que todo ponto de X possui uma vizinhança totalmente paracompacta com respeito a X .*

Então X é totalmente paracompacto.

Demonstração: Tomemos $\mathcal{U}_0$ um recobrimento de X por abertos cujos fechos são totalmente paracompactos.

Seja $\mathcal{U}$ um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{U}_0$. Pelo lema (1.2.3), para todo $U \in \mathcal{U}$ podemos tomar um aberto U' com $\overline{U'} \subseteq U$, de tal maneira que $\{U' : U \in \mathcal{U}\}$ ainda é um recobrimento de X .

Pelo lema (1.2.1), cada $\overline{U'}$ é totalmente paracompacto com respeito a X .

Se $\mathcal{B}$ é uma base de X , então $\mathcal{B}_U = \{\Omega \in \mathcal{B} : \Omega \subseteq U\}$ é uma base exterior de $\overline{U'}$ para cada $U \in \mathcal{U}$.

Logo existe $\mathcal{B}'_U$ tal que $\mathcal{B}'_U \subseteq \mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}'_U$ é um recobrimento localmente finito de $\overline{U'}$.

Como $\bigcup \mathcal{B}'_U \subseteq U$ para cada $U \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ é localmente finito, temos que $\bigcup \{\mathcal{B}'_U : U \in \mathcal{U}\}$ é um recobrimento localmente finito de X . ■

Teorema 1.2.2 *Seja X um espaço paracompacto T_2 , κ -scattered e satisfazendo a seguinte condição:*

$$(\mathcal{P}) \quad \forall Y \in [X]^{\leq \kappa} (Y \text{ é totalmente paracompacto com respeito a } X).$$

Então X é totalmente paracompacto.

Demonstração: Mostraremos por indução sobre o posto $r(x)$, que todo ponto $x \in X$ admite uma vizinhança totalmente paracompacta.

Se $r(x) = 0$, então $(\exists U \in \tau(X))((x \in U) \wedge (|U| \leq \kappa))$. Logo, U é uma vizinhança totalmente paracompacta.

Se $r(x) = \alpha > 0$ então $(\exists U \in \tau(X^{(\alpha)}))((x \in U) \wedge (|U| \leq \kappa))$.

Como U é totalmente paracompacto com respeito a X , aplicando o lema 2 temos que U é fechado em X . Agora, como $U \subseteq X \setminus (X^{(\alpha)} \setminus U)$ e X é normal, então $\exists W \in \tau(X)$ tal que $U \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq X \setminus (X^{(\alpha)} \setminus U)$.

Observamos que $(\forall y \in X \setminus X^{(\alpha)})(r(y) < \alpha)$ e como $U \subseteq X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$, então $(\forall y \in U)(r(y) = \alpha)$.

Agora,

$$X \setminus (X^{(\alpha)}) = (X \setminus X^{(\alpha)}) \cup U,$$

logo $(\forall y \in \overline{W} \setminus U)(r(y) < \alpha)$ (1).

A seguir tomemos $\mathcal{B}$ uma base de abertos de $\overline{W}$.

Temos que $\mathcal{B}' = \{\Omega \in \mathcal{B} : \Omega \subseteq W\}$ é uma base exterior de U , logo existe $\mathcal{U}_1$ contido em $\mathcal{B}'$, recobrimento de U , localmente finito em $\overline{W}$.

Seja $\Omega_* = \bigcup \mathcal{U}_1$. Pela normalidade de $\overline{W}$, temos $(\exists V \in \tau(\overline{W}))$ com

$$U \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega_*.$$

Como $\overline{W} \setminus V$ é fechado em X , temos que $\overline{W} \setminus V$ é paracompacto.

Além disso, $\overline{W} \setminus V \subseteq \overline{W} \setminus U$. Logo,

$$(\forall y \in \overline{W} \setminus V)(r(y) < \alpha).$$

Assim, pela hipótese de indução, $\overline{W} \setminus V$ é totalmente paracompacto.

Como $\overline{W} \setminus \Omega_*$ é fechado e $\overline{W} \setminus \Omega_* \subseteq \overline{W} \setminus V$, temos pelo lema (1.2.1) que $\overline{W} \setminus \Omega_*$ é totalmente paracompacto com respeito a X .

$\mathcal{B}$ é uma base exterior de $\overline{W} \setminus \Omega_*$, logo $\exists \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{B}$, recobrimento de $\overline{W} \setminus \Omega_*$, localmente finito em $\overline{W}$.

Logo, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ satisfaz:

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$$

$\mathcal{U}$ é localmente finito em $\overline{W}$

$\mathcal{U}$ é recobrimento de $\overline{W}$

Assim, $\overline{W}$ é totalmente paracompacto. ■

Definição 1.2.7 Um recobrimento $\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$ de um espaço topológico X é irreduzível se $(\forall S_0 \subseteq S)((S_0 \neq S) \implies (\bigcup_{s \in S_0} A_s \neq X))$.

Lema 1.2.4 Todo recobrimento pontualmente-finito

$$\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$$

de um espaço topológico X , admite um sub-recobrimento irreduzível.

A demonstração é análoga à do lema (1.2.3) tomando o conjunto:

$$\mathcal{G} = \{G \in {}^S P(X) : (\forall s \in S)(G(s) = A_s \text{ ou } G(s) = \emptyset) \text{ e } (\bigcup_{s \in S} G(s) = X)\}.$$

Teorema 1.2.3 Seja X um espaço totalmente paracompacto, $\mathcal{T}_2$ e zero-dimensional. Então X é ultraparacompacto.

Demonstração:

Sejam $\mathcal{U}$ um recobrimento aberto de X e $\mathcal{B}$ uma base do espaço X formada por conjuntos abertos-fechados de X .

$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{\Omega \in \mathcal{B} : (\exists U \in \mathcal{U})(\Omega \subseteq U)\}$ é uma base de X e assim, contém um recobrimento localmente finito de X .

Agora, usando o lema (1.2.4), este admite um sub-recobrimento irredutível $\mathcal{U}_0$.

Seja $\mathcal{C} = \{U \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\}) : U \in \mathcal{U}_0\}$.

Como $\mathcal{U}_0$ é constituído de conjuntos abertos-fechados, então cada conjunto

$$U \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\})$$

é aberto-fechado.

Logo, $\mathcal{C}$ é um refinamento aberto-fechado de $\mathcal{U}_0$.

A seguir, desde que $\mathcal{U}_0$ é irredutível, dado $U \in \mathcal{U}_0$ temos que $X \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\}) \neq \emptyset$. Dado $x \in X \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\})$, claramente $x \notin \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\})$. Logo, $x \in U$.

Assim, temos que

$$(\forall U \in \mathcal{U}_0)[X \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\}) \subseteq U \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\})].$$

Por outro lado, consideremos o conjunto

$$X \setminus \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} (\bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\})).$$

Como, $\mathcal{U}_0$ é pontualmente-finito, então $\bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} (\bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\})) = \emptyset$.

Assim, $\bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} X \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\}) = X$. Com isto, temos que $\mathcal{C}$ é recobrimento de X .

Se $x \in U \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\})$, então $x \notin \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U\})$. Assim,

$$(\forall U' \in \mathcal{U}_0 \setminus \{U\})(x \notin U' \setminus \bigcup(\mathcal{U}_0 \setminus \{U'\})).$$

Logo, $\mathcal{C}$ é disjunto. ■

Definição 1.2.8 Um espaço topológico X é denominado **P-espaço** se toda intersecção enumerável de abertos é aberta.

Como **P-espaços** regulares são zero-dimensionais, temos

Corolário 1.2.1 Seja X um **P-espaço** totalmente paracompacto, T_2 . Então X é ultraparacompacto.

Definição 1.2.9 *Sejam X um espaço regular e $n \in \omega$.*

Definiremos a dimensão ind do espaço X , da seguinte maneira:

- (1) $\text{ind}(X) = -1 \iff X = \emptyset$;
- (2) $\text{ind}(X) \leq n$ se, e somente se, para todo aberto V contendo p , existe um aberto U tal que
 - (i) $p \in U \subseteq V$;
 - (ii) $\text{ind}(\text{Fr}(U)) \leq n - 1$;
- (3) $\text{ind}(X) = n$ se, e somente se, $\text{ind}(X) \leq n$ e não temos $\text{ind}(X) \leq n - 1$;
- (4) $\text{ind}(X) = \infty$ se, e somente se, para todo $n \in \omega$, não ocorre $\text{ind}(X) \leq n$.

Em particular, $\text{ind}(X) = 0$ se, e somente se, o espaço X é zero-dimensional, i.e., o espaço X possui uma base de abertos-fechados.

Teorema 1.2.4 *Seja X um espaço κ -scattered, totalmente $\mathbf{c-p}$, T_2 e para o qual vale a condição:*

$$(\forall Y \in [X]^{\leq \kappa})(Y \text{ é totalmente } \mathbf{c-p} \text{ com respeito a } X).$$

Então $\text{ind}(X) = 0$.

Demonstração:

Mostraremos por indução sobre o posto $r(x)$ que

$$(\forall x \in X)(\forall V \in \mathcal{V}_x)((\exists W)(x \in W \subseteq V))[\text{ind}(\text{Fr}(W)) = -1].$$

i) Se $r(x) = 0$ então $(\exists U \in \tau(X))(|U| \leq \kappa)$.

Assim, como para toda vizinhança V de x contida em U , temos $|V| \leq \kappa$, então esta vizinhança V é totalmente $\mathbf{c-p}$. Logo, $V = \overline{V}$.

Portanto, $\text{ind}(\text{Fr}(V)) = -1$.

ii) Se $r(x) = \alpha > 0$, então $(\exists U \in \tau(X^{(\alpha)}))(|U| \leq \kappa)$.

Seja $(V \in \tau(X))(x \in V)$.

Tomemos $U' = U \cap V$ e $V' = V \cap [X \setminus (X^{(\alpha)} \setminus U')]$.

Assim, $|U'| \leq \kappa$, logo U' é totalmente $\mathbf{c-p}$ e então U' é fechado em X .

Como X é normal¹, temos que existe um aberto Ω satisfazendo:

$$x \in U' \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq V' \subseteq V.$$

¹Um espaço topológico totalmente $\mathbf{c-p}$ e T_2 é normal. A demonstração é análoga ao caso *paracompacto* + $T_2 \implies \text{normal}$.

Agora, como $\overline{\Omega} \subseteq V' \subseteq X \setminus (X^{(\alpha)} \setminus U')$, temos que

$$\overline{\Omega} \setminus \Omega \subseteq \overline{\Omega} \setminus U' \subseteq X \setminus X^{(\alpha)}.$$

Como $X \setminus X^{(\alpha)}$ é aberto em X e para todo ponto y em $X \setminus X^{(\alpha)}$ temos que $r(y) < \alpha$, a hipótese de indução implica que $\text{ind}(X \setminus X^{(\alpha)}) = 0$.

Logo, $X \setminus X^{(\alpha)}$ possui uma base $\mathcal{B}$ de conjuntos aberto-fechados de X .

Tomemos $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : B \cap U' = \emptyset\}$.

Como $\mathcal{B}'$ é uma base exterior de $\overline{\Omega} \setminus \Omega$, existe uma subcoleção $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}'$ tal que $\mathcal{U}$ é **c-p** em X e $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

Logo, $W = \overline{\Omega} \setminus \bigcup \mathcal{U}$ satisfaz:

- (i) $U' \subseteq W$;
- (ii) W é aberto-fechado em $\overline{\Omega}$.

Portanto, $\text{ind}(\text{Fr}(W)) = -1$. ■

Teorema 1.2.5 *Seja X um espaço paracompacto $\mathcal{T}_2$, κ -scattered satisfazendo:*

$$(P) (\forall Y \in [X]^{\leq \kappa})(Y \text{ é totalmente paracompacto com respeito a } X).$$

Então X é ultraparacompacto.

Demonstração:

Pelo Teorema (1.2.2), X é totalmente paracompacto.

A seguir, usando o Teorema (1.2.4), $\text{ind}(X) = 0$.

Portanto, pelo Teorema (1.2.3), X é ultraparacompacto. ■

Corolário 1.2.2 *(Telgárski, 1968)*

Se X é um espaço paracompacto $\mathcal{T}_2$ e scattered, então X é ultraparacompacto.

1.3 Propriedades de Separação

1.3.1 Introdução

Um espaço topológico regular é um *espaço de Moore* se existe uma seqüência de recobrimientos abertos $\langle \mathcal{C}_n : n \in \omega \rangle$ de X satisfazendo

$$(\forall x \in X)[\{St(x, n) : n \in \omega\} \text{ é uma base local de } x \text{ em } X],$$

onde $St(x, n) = \{U \in \mathcal{C}_n : x \in U\}$.

Observamos que todo espaço metrizável é um *espaço de Moore*. Por outro lado, todo *espaço de Moore* X satisfaz $\chi(X) = \aleph_0$ (i.e., todo ponto $x \in X$ possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. A definição geral de χ de um espaço topológico pode ser encontrada na página 26).

Assim, surgiu a seguinte questão: **Quando um espaço de Moore é metrizável?**

F.B.Jones conjecturou que normalidade seria uma condição suficiente (esta conjectura ficou conhecida por Normal Moore Space Conjecture), e em 1937 demonstrou que

$$2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1} \implies \text{todo espaço normal de Moore separável é metrizável.}$$

Em 1937, **K.Gödel** demonstrou que CH (Hipótese do Contínuo) é consistente com ZFC, deste modo, o teorema de **F.B.Jones** é provavelmente o primeiro resultado de consistência em *Topologia Geral*.

Após a criação do forcing por **P.J.Cohen**, e o surgimento do MA (Axioma de Martin), foi provada a independência da afirmação *todo espaço normal de Moore separável é metrizável*.

O problema da metrizabilidade dos espaços normais de *Moore* (NMSC) foi objeto de estudo de diversos pesquisadores, tanto topólogos quanto *set-theorists*. A seguir, destacaremos alguns resultados:

Em 1968, **Tall** demonstrou que algumas versões restritas do NMSC são consistentes.

(**Fleissner**, 1974)

$$V=L \implies \text{espaços normais de Moore são CWH.}$$

Kunen demonstrou, utilizando *random forcing*, que se existem cardinais fortemente compactos ou supercompactos, então o **PMEA** é consistente (**PMEA** é uma afirmação ligada à teoria de medida). Por um resultado extremamente elegante de **Nyikos** (1978), temos

$$\text{PMEA} \implies \text{todo espaço normal de Moore é metrizável.}$$

Para maiores detalhes, veja **Fleissner**, W.G., The Normal Moore Space Conjecture in Handbook of Set Theoretic Topology, North-Holland, 1984.

Complementando o resultado de Kunen-Nyikos, Fleissner (1982) demonstrou que

Todo espaço normal de Moore é metrizável $\implies$ existe um inner model contendo um cardinal mensurável.

Em 1990, Dow, Tall e Weiss apresentaram uma técnica envolvendo cardinais supercompactos e *iterated forcing*, com a qual demonstraram diretamente a consistência do NMSC.

Por outro lado, Fleissner demonstrou que CH implica na existência de um espaço normal de Moore não metrizável.

1.3.2 Definições e resultados

Nesta seção introduziremos duas propriedades de separação que estendem as propriedades de um espaço ser Hausdorff (ou T_2) e a normalidade:

- (1) Coletivamente Hausdorff (*collectionwise Hausdorff*)
- (2) Coletivamente normal (*collectionwise normal*)

Para simplificar, denotaremos estas propriedades por CWH e CWN, respectivamente.

No que segue, λ será um cardinal infinito e X denotará um espaço topológico.

Definição 1.3.1 *Uma família $\mathcal{Y} \subseteq P(X)$ é denominada separada se existe uma família $\mathcal{F}$ de abertos de X disjuntos 2 a 2 satisfazendo*

$$(\forall Y \in \mathcal{Y})(\exists! U \in \mathcal{F})(Y \subseteq U).$$

Definição 1.3.2 *Uma família $\mathcal{Y} \subseteq P(X)$ é denominada normalizada se para qualquer subfamília $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$, existem abertos disjuntos $U, V \in \tau(X)$ com*

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{Z} &\subseteq U; \\ \bigcup (\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Z}) &\subseteq V. \end{aligned}$$

Definição 1.3.3 *Um espaço topológico X é λ -CWH ($<\lambda$ -CWH) se todo conjunto discreto de pontos de cardinalidade $\leq \lambda$ ($< \lambda$) é separado.*

Definição 1.3.4 *Um espaço topológico X é λ -CWN ($<\lambda$ -CWN) se toda família discreta $\mathcal{F}$ de fechados, onde $|\mathcal{F}| \leq \lambda$ ($|\mathcal{F}| < \lambda$), pode ser separada.*

Definição 1.3.5 *Um espaço topológico X é CWH (CWN) se para todo λ , o espaço X é λ -CWH (λ -CWN).*

Em 1951, Bing demonstrou

Um espaço topológico X é metrizável se, e somente se, X é CWN e existe uma seqüência $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ de recobrimentos abertos de X , tal que para todo ponto x de X , temos que $\{St(x, n) : n \in \omega\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x em X .

Assim, para um espaço normal de Moore X ,

$$X \text{ é metrizável} \iff X \text{ é CWN.}$$

Com isto, o NMSC pode ser enunciado da seguinte maneira: Dado um espaço normal, qualquer família discreta de fechados pode ser separada?

A partir desta formulação do NMSC, surgiu a seguinte questão: Dado um espaço topológico, que tipo de famílias discretas de fechados podem ser separadas?

Os seguintes teoremas são alguns resultados ligados a esta questão. As demonstrações podem ser encontrados em [Tall, 1984], [Burke, 1984], ou em F.D.Tall, PHD thesis, 1969, Univ. of Wisconsin.

Proposição 1.3.1 *Espaços normais são $\aleph_0$ -CWN.*

Proposição 1.3.2 *Espaços paracompactos T_2 são CWN.*

Proposição 1.3.3 *Em um espaço regular, famílias enumeráveis e discretas de conjuntos fechados Lindelöf são separadas.*

Definição 1.3.6 *Um espaço topológico X é denominado para-Lindelöf se todo recobrimento do espaço admite um refinamento aberto localmente enumerável.*

Corolário 1.3.1 *Espaços para-Lindelöf regulares são CWN com respeito a conjuntos Lindelöf.*

Definição 1.3.7 *Um espaço topológico X é denominado screenable se todo recobrimento do espaço admite um refinamento aberto σ -disjunto.*

Teorema 1.3.1 *Espaços screenable e normais são CWN com respeito a conjuntos fechados enumeravelmente metacompactos.*

1.4 Espaços κ -scattered e Separação

Inicialmente, usando novamente a decomposição de *Cantor-Bendixson*, observamos que um espaço κ -scattered X pode ser representado como

$$\bigcup_{\alpha \in \lambda} X^{(\alpha)}$$

para um ordinal λ mínimo, onde cada $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in \lambda$.

Assim, definiremos o **posto de um espaço κ -scattered** X , $r(X)$, como este ordinal λ minimal.

O resultado seguinte caracteriza uma classe de espaços κ -scattered, e esta representação utiliza subespaços de posto sucessor.

Lema 1.4.1 *Seja X um espaço paracompacto, T_2 , κ -scattered e satisfazendo a propriedade (P).*

Então $X = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, onde para todo $\alpha \in \Lambda$, $r(X_\alpha)$ é ordinal sucessor.

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que existe um espaço X satisfazendo as hipóteses do lema, e cujo posto $r(X)$ seja ordinal limite.

Afirmção: Existe um contraexemplo X tal que $r(X)$ seja minimal.

Com efeito, suponhamos que a afirmação seja falsa.

Tomemos um espaço topológico X que seja um contraexemplo. Para toda partição deste espaço,

$$X = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha,$$

temos que existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que X_{α_0} é um contraexemplo com $r(X_{\alpha_0}) = \nu_1$, onde ν_1 é ordinal limite e $\nu_1 < r(X)$.

Novamente, podemos particionar este subespaço como

$$X_{\alpha_0} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda_0} X_\alpha,$$

e temos que existe $\alpha_1 \in \Lambda_0$ com $r(X_{\alpha_1}) = \nu_2$, onde X_{α_1} é contraexemplo, ν_2 é ordinal limite e $\nu_2 < \nu_1$.

Continuando este processo, obteríamos uma sequência de contraexemplos

$$\langle X_{\alpha_n} : n \in \omega \rangle$$

satisfazendo a condição: $n < m \implies r(X_{\alpha_m}) < r(X_{\alpha_n})$.

Assim, teríamos uma sequência infinita estritamente decrescente de ordinais, $\langle \nu_n : n \in \omega \rangle$.

Logo, existe um ordinal ν , posto mínimo para um contraexemplo.

Retornando à demonstração do lema, seja X um contraexemplo, onde $r(X) = \nu$ é ordinal limite e minimal.

Aplicando o Teorema (1.2.5), o espaço X admite um recobrimento aberto disjunto constituído por subespaços de posto menor que ν .

Portanto, este recobrimento é uma partição do espaço X como soma topológica de subespaços de posto menor que ν .

Pela minimalidade de ν , cada subespaço pode ser escrito como soma de subespaços com posto sucessor. ■

Teorema 1.4.1 *Seja X um espaço topológico normal, CWN com respeito a famílias $\mathcal{F}$ discretas, fechadas, onde $\mathcal{F} \subseteq [X]^{\leq \kappa}$.*

Então famílias discretas formadas por subespaços fechados

- (1) *paracompactos,*
- (2) *κ -scattered, e*
- (3) *com a propriedade (P),*

são separadas.

Demonstração:

Seja $\langle F_\alpha : \alpha \in \Gamma \rangle$ uma família discreta de conjuntos fechados, paracompactos, κ -scattered e com a propriedade (P).

Inicialmente, para todo $\alpha \in \Gamma$, tomemos

$$F_\alpha^0 = F_\alpha.$$

A seguir, aplicando o Lema (1.4.1) para cada F_α^0 , obtemos uma decomposição $\mathcal{B}_\alpha^0$ de F_α^0 em subespaços de posto sucessor, i.e.,

- (i) $\bigoplus \mathcal{B}_\alpha^0 = F_\alpha^0$;
- (ii) $(\forall B \in \mathcal{B}_\alpha^0)(r(B) \text{ é ordinal sucessor})$.

Agora, para cada $B \in \mathcal{B}_\alpha^0$, tomemos o conjunto D_B dos pontos de posto máximo em B . Observamos que D_B é fechado em B (logo, fechado em X) e, portanto, paracompacto $\mathcal{T}_2$. Além disso, todo ponto de D_B possui uma vizinhança $V \in [D_B]^{\leq \kappa}$.

Logo, podemos escrever cada D_B como soma topológica

$$D_B = \bigoplus \mathcal{V}_B,$$

onde $(\forall V \in \mathcal{V}_B)(|V| \leq \kappa)$.

Com isto, temos que cada D_B é soma topológica de subespaços aberto-fechados em D_B (portanto, fechados em X).

Tomemos

$$\mathcal{V}_\alpha^0 = \bigcup \{\mathcal{V}_B : B \in \mathcal{B}_\alpha^0\}.$$

Pelo que vimos acima, $\mathcal{V}_\alpha^0$ é uma família fechada e discreta em X , onde $\mathcal{V}_\alpha^0 \subseteq [F_\alpha^0]^{\leq \kappa}$. Deste modo,

$$\mathcal{V}^0 = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{V}_\alpha^0$$

também é uma família fechada e discreta em X , onde $\mathcal{V}^0 \subseteq [X]^{\leq \kappa}$.

Pelas hipóteses do Teorema, existe uma família discreta de abertos, $\mathcal{U}^0$, separando $\mathcal{V}^0$, i.e., satisfazendo

$$(\forall V \in \mathcal{V}^0)(\exists! U \in \mathcal{U}^0)(V \subseteq U).$$

Como o espaço é normal, podemos tomar esta família $\mathcal{U}^0$ com a seguinte propriedade adicional,

$$(\forall U \in \mathcal{U}^0)(\exists! \alpha \in \Gamma)(U \cap F_\alpha \neq \emptyset).$$

Façamos $\mathcal{U}_\alpha^0 = \{U \in \mathcal{U}^0 : U \cap F_\alpha \neq \emptyset\}$.

Para finalizar, tomemos para todo $\alpha \in \Gamma$:

$$F_\alpha^1 = F_\alpha^0 \setminus (\bigcup \mathcal{U}_\alpha^0).$$

Assim, obtemos uma sequência

$$\langle F_\alpha^1 : \alpha \in \Gamma \rangle$$

discreta de subespaços fechados, paracompactos, κ -scattered e com a propriedade (P).

Logo, usando indução sobre $n \in \omega$, temos:

(1) uma sequência $\langle F_\alpha^n : \alpha \in \Gamma \rangle$ de subconjuntos fechados em X ;

(2) uma sequência $\langle \mathcal{B}_\alpha^n : \alpha \in \Gamma \rangle$ de partições de cada F_α^n como soma topológica de subespaços de posto sucessor e, $\mathcal{B}_\alpha^{n+1}$ refinando $\mathcal{B}_\alpha^n$;

(3) uma sequência $\langle \mathcal{V}_\alpha^n : \alpha \in \Gamma \rangle$, onde cada $\mathcal{V}_\alpha^n$, $\alpha \in \Gamma$, é uma família fechada e discreta em X , onde $\mathcal{V}_\alpha^n \subseteq [F_\alpha^n]^{\leq \kappa}$.

(4) uma sequência $\langle \mathcal{U}_\alpha^n : \alpha \in \Gamma \rangle$ de famílias de abertos, cujos fechados tem intersecção não vazia com no máximo um F_α^n e

$$(\forall V \in \mathcal{V}_\alpha^n)(\exists! U \in \mathcal{U}_\alpha^n)(V \subseteq U).$$

Caso a seguinte condição seja verdadeira,

$$(\forall \alpha \in \Gamma)(F_\alpha \subseteq \bigcup_{n \in \omega} (\bigcup \mathcal{U}_\alpha^n)), (\dagger)$$

a demonstração estará concluída.

Assim, suponhamos que $(\dagger)$ não seja satisfeita. Portanto, existe $\alpha_0 \in \Gamma$ tal que

$$F_{\alpha_0} \setminus (\bigcup_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{U}_{\alpha_0}^n) \neq \emptyset.$$

Tomemos $p \in F_{\alpha_0} \setminus (\bigcup_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{U}_{\alpha_0}^n)$.

Com isto,

$$p \in \bigcap_{n \in \omega} (F_{\alpha_0} \setminus \bigcup \mathcal{U}_{\alpha_0}^n) = \bigcap_{n \in \omega} F_{\alpha_0}^{n+1} = \bigcap_{n \in \omega} F_{\alpha_0}^n.$$

Desta maneira, temos

$$(\forall n \in \omega)(\exists B_n \in \mathcal{B}_{\alpha_0}^n)(p \in B_n).$$

Como $B_{n+1} \subseteq B_n \setminus \{\text{pontos de posto máximo}\}$, para todo $n \in \omega$, então

$$(\forall n \in \omega)(r(B_{n+1}) < r(B_n)).$$

Logo, $\{r(B_n) : n \in \omega\}$ é uma sequência infinita estritamente decrescente de ordinais, absurdo.

Portanto, $(\dagger)$ é verdadeira para todo $\alpha \in \Gamma$. ■

Teorema 1.4.2 (*Watson, 1988*)

Seja X um espaço normal e CWH.

- (i) Se X é $\lambda^{\aleph_0}$ -CWN, então famílias discretas de conjuntos fechados, Lindelöf e de cardinalidade no máximo λ , são separadas;*
- (ii) Se X é λ -CWN, então famílias discretas de conjuntos compactos de cardinalidade no máximo λ , são separadas.*

Como um corolário ao Teorema (1.4.1) e ao Teorema (1.4.2), temos:

Teorema 1.4.3 *Seja X um espaço topológico normal e CWH.*

- (i) Se X é $\kappa^{\aleph_0}$ -CWN, então X é CWN com respeito a conjuntos fechados, Lindelöf, κ -scattered e com a propriedade (P);*
- (ii) Se X é κ -CWN, então X é CWN com respeito a conjuntos compactos, κ -scattered e com a propriedade (P).*

Teorema 1.4.4 (*Watson, 1988*)

Se X é um espaço topológico normal e CWH, então famílias discretas de subespaços fechados, paracompactos e scattered, são separadas.

Teorema 1.4.5 (*Watson, 1988*)

Se X é um espaço topológico normal e CWH, então famílias discretas de conjuntos enumeráveis são separadas.

Demonstração:

Seja $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ uma família discreta de conjuntos enumeráveis e $\langle x_\alpha^n : n \in \omega \rangle$ uma enumeração de $A_\alpha, \alpha \in \Gamma$.

Seja $\{\mathcal{U}_\alpha^n : \alpha \in \Gamma\}$ uma família discreta de abertos tais que

- (i) $x_\alpha^n \in \mathcal{U}_\alpha^n, \alpha \in \Gamma$;
- (ii) $\alpha \neq \beta \implies \overline{\mathcal{U}_\alpha^n} \cap A_\beta = \emptyset$.

Assim, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha^n : \alpha \in \Gamma \wedge n \in \omega\}$ é uma família σ -discreta de abertos, cujos fechados têm intersecção não vazia com no máximo um A_α , e $\mathcal{U}$ cobre os A_α 's. ■

Como um corolário do Teorema (1.4.5) e da demonstração do Teorema (1.4.1), temos

Corolário 1.4.1 *Se X é um espaço topológico normal e CWH, então X é CWN com respeito a subconjuntos fechados, paracompactos, ω -scattered e satisfazendo a propriedade*

$$(P)(\forall Y \in [X]^{\aleph_0})[Y \text{ é totalmente paracompacto com respeito a } X].$$

Capítulo 2

Produtos-Box

2.1 Produtos Topológicos

2.1.1 Introdução

Ao lidar com propriedades topológicas, uma pergunta *natural* se refere à preservação destas, quando se tomam produtos (finitos ou não).

A primeira topologia criada para o produto infinito de espaços topológicos, foi a *topologia box* (Tietze, 1923): dada uma seqüência $\langle X_\alpha : \alpha \in \Gamma \rangle$ de espaços topológicos, um aberto básico do espaço-produto é do tipo $\prod_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$, onde cada U_α é aberto de X_α .

Esta é uma extensão *natural* da topologia para produtos finitos, mas ela se mostrou ineficiente em preservar propriedades centrais (àquela época) como e.g. compacidade: $\omega + 1$ com a topologia da ordem, é um exemplo simples de espaço topológico infinito não discreto, cujo produto enumerável não é compacto.

Assim, esta topologia foi substituída pela *topologia Tychonoff* (1930): tomando a mesma seqüência considerada anteriormente, este produto tem como abertos básicos, os produtos $\prod_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$, onde a menos de um número finito de α 's, temos $U_\alpha = X_\alpha$.

A *topologia Tychonoff* foi muito estudada, e ainda existem diversas questões em aberto. As propriedades desta topologia e resultados envolvendo a mesma, podem ser encontrados em [Engelking, 1989].

2.1.2 Definições básicas

No que segue, daremos algumas definições e apresentaremos a topologia box e a topologia Tychonoff.

Seja $\langle X_i : i \in I \rangle$ uma família de conjuntos, onde o conjunto de índices I é infinito,

i.e., $|I| \geq \aleph_0$, e ainda temos a seguinte condição sobre os fatores: $(\forall i \in I)(|X_i| \geq 2)$.

O produto cartesiano desta família será denotado por

$$\prod_{i \in I} X_i.$$

Caso todos os X_i 's sejam iguais a um mesmo conjunto fixado X , o produto cartesiano será representado simplesmente como $I X$, i.e., o conjunto das funções de I em X .

Fixado $j \in I$, a aplicação

$$p_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$$

denotará a projeção de $\prod_{i \in I} X_i$ sobre o espaço X_j .

Se $x \in \text{dom}(p_j)$, escreveremos x_j para denotar a projeção $p_j(x)$.

Definição 2.1.1 *Seja $\langle X_i : i \in I \rangle$ uma família de espaços topológicos, onde a topologia de cada espaço X_i será denotada por $\tau(X_i)$.*

Tomemos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{R} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i : (\forall i \in I)(U_i \in \tau(X_i)) \right\}.$$

Dado $U \in \mathcal{R}$, definimos o suporte deste “retângulo” (box) como

$$\text{supp}(U) = \{i \in I : U_i \neq X_i\}.$$

Continuando, definimos o comprimento de $U \in \mathcal{R}$, como

$$l(U) = |\text{supp}(U)|.$$

Agora, fixemos uma família $\langle X_i : i \in I \rangle$ de espaços topológicos.

Definição 2.1.2 *A topologia Tychonoff sobre o produto $\prod_{i \in I} X_i$ tem o conjunto*

$$\{U \in \mathcal{R} : l(U) < \aleph_0\}$$

como base.

Definição 2.1.3 *Seja ν um cardinal infinito, onde $\nu > \aleph_0$.*

(a) Se $\nu \leq |I|$, a topologia box parcial (de comprimento $< \nu$) sobre o produto $\prod_{i \in I} X_i$ é gerada pelo conjunto

$$\{U \in \mathcal{R} : l(U) < \nu\}.$$

(b) Se $\nu > |I|$, a topologia box sobre $\prod_{i \in I} X_i$ tem como base o próprio conjunto $\mathcal{R}$. Neste caso, a topologia é chamada de topologia box total da família $\langle X_i : i \in I \rangle$.

Definição 2.1.4 Denotaremos por

$$T_{i \in I} X_i$$

o espaço topológico cujo suporte é $\prod_{i \in I} X_i$, munido da topologia Tychonoff. Este espaço será chamado simplesmente de produto Tychonoff (da família $\langle X_i : i \in I \rangle$).

Definição 2.1.5 Análogamente,

$$\square_{i \in I}^\nu X_i$$

denotará o espaço topológico cujo suporte é $\prod_{i \in I} X_i$, munido da topologia box parcial de comprimento $< \nu$. Este espaço será denominado produto-box parcial (de comprimento $< \nu$ da família $\langle X_i : i \in I \rangle$).

Caso ocorra $\nu > |I|$, escreveremos

$$\square_{i \in I} X_i$$

para designar o produto-box (total) da família $\langle X_i : i \in I \rangle$.

Observação: Se para cada $i \in I$, temos $X_i = X$, então

$$T^I X$$

denotará o produto Tychonoff e

$$\square_{i \in I}^\nu X$$

denotará o produto-box parcial de $^I X$.

2.1.2 Alguns resultados

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados envolvendo produtos-box e alguns exemplos importantes.

Proposição 2.1.1 Seja $\langle X_i : i \in I \rangle$ uma família de espaços topológicos. Então

- (i) $p_j : \square_{i \in I}^\nu X_i \longrightarrow X_j$ é contínua e aberta para cada $i \in I$;
- (ii) $\square_{i \in I}^\nu X_i$ é T_0 (T_1 , T_2 , regular, completamente regular, zero-dimensional) se, e somente se, para cada $i \in I$, X_i é T_0 (T_1, T_2 , regular, completamente regular, zero-dimensional);
- (iii) $F = \prod_{i \in I} F_i$ é fechado(aberto) em $\square_{i \in I}^\nu X_i$ se, e somente se,

$$(\forall i \in \text{supp}(F))(F_i \text{ é fechado(aberto) em } X_i).$$

(iv) Se ν é um cardinal regular e $\mathcal{I}$ é uma partição do conjunto I , então a bijeção canônica

$$\prod_{\alpha \in \lambda} X_\alpha \longrightarrow \prod_{J \in \mathcal{I}} \left(\prod_{i \in J} X_i \right)$$

é um homeomorfismo.

Definição 2.1.6 Seja X um espaço topológico e fixemos um ponto $p \in X$. Definimos então,

$$\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ é base local de } p \text{ em } X\}$$

Assim, o caráter do espaço X é definido como

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

Teorema 2.1.1 ([Williams, 1984])

Se $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de espaços topológicos infinitos e não discretos, e $X = \prod_{i \in I} X_i$, então

- (i) X não é localmente compacto;
- (ii) X não é separável;
- (iii) X não é conexo ou localmente conexo;
- (iv) $\chi(X) > \aleph_0$;
- (v) X não é perfeito (Um espaço topológico X é perfeito se os subconjuntos fechados de X são intersecções enumeráveis de abertos).

Com o Teorema (2.1.1), constatamos que mesmo um produto-box enumerável nunca será compacto ou metrizável. Este fato causou a substituição da topologia box pela topologia Tychonoff, no estudo dos espaços-produto infinitos.

A topologia box só foi retomada como objeto de estudo a partir de 1971 (Rudin, M.E.; A normal space X for which $X \times I$ is not normal; Fund. Math.; volume 3; 1971; pág. 179-186), quando M.E. Rudin construiu um espaço Dowker $X \subseteq \prod_{n \in \omega} (\omega_n + 1)$.

Seja X um espaço topológico normal. Então X é um espaço Dowker se X não é enumeravelmente paracompacto, ou equivalentemente, se $X \times I$ não é normal, onde $I = [0, 1]$. Sobre Dowker spaces, consulte o clássico ([Rudin, 1975]), (Rudin, M.E.-Dowker spaces; Handbook of Set Theoretic Topology; ed. K. Kunen and J. Vaughn; North-Holland, Amsterdam; 1984; pág. 761-780), ou (Szeptycki, P.J. and Weiss, W.A.R.-Dowker spaces; The work of M.E. Rudin; ed. F.D. Tall; Ann. New York Acad. Sci.; vol. 706; 1993).

Uma questão natural que surgiu envolvendo esta topologia foi a seguinte: Quando um produto-box enumerável é normal ou paracompacto?

Com os dois exemplos seguintes, veremos que precisamos impôr restrições “fortes” sobre os espaços fatores, se quisermos garantir alguma chance de obter normalidade ou paracompacidade nos produtos-box enumeráveis. Além disso, deve-se notar que estes

exemplos deixam de satisfazer propriedades estritamente mais fracas que normalidade ou paracompacidade.

EXEMPLO 1 (van Douwen, 1975)

O produto-box enumerável de espaços metrizáveis não é necessariamente normal (e assim, não é paracompacto).

Mostraremos que o espaço $\square^\omega \mathbb{P}$ não é paranormal (logo, também não será normal), onde $\mathbb{P}$ denota os irracionais com a topologia induzida da reta real. Observamos que $\mathbb{P}$ é homeomorfo ao produto $T^\omega \omega$ (veja [Engelking, 1989]).

Definição 2.1.7 Um espaço topológico X é **paranormal** se para toda sequência discreta $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ de conjuntos fechados, existem conjuntos abertos $\langle U_{n,k} : n, k \in \omega \rangle$ com $F_n \subseteq U_{n,k}$, para cada $n, k \in \omega$ e $\bigcap_{n,k} \overline{U_{n,k}} = \emptyset$.

Definição 2.1.8 Sejam X um espaço topológico e λ um cardinal infinito.

Então $A \subseteq X$ é um conjunto G_λ se existem $\mu < \lambda$ e $\langle U_\alpha : \alpha < \mu \rangle \subseteq \tau(X)$ tal que

$$A = \bigcap_{\alpha < \mu} U_\alpha.$$

Um conjunto $A \subseteq X$ é chamado de G_λ regular se ocorrer

$$A = \bigcap_{\alpha < \mu} \overline{U_\alpha} (= \bigcap_{\alpha < \mu} U_\alpha).$$

Usaremos a notação G_δ (regular) para designar um conjunto $G_{\aleph_1}$ (regular).

Definição 2.1.9 $G_\lambda(X)$ denotará o espaço topológico de suporte X com a topologia gerada pelo conjunto de todos os conjuntos G_λ do espaço X .

Proposição 2.1.2 Sejam Y um espaço topológico e $K \subseteq Y$ um conjunto fechado que não é um G_δ regular.

Então o conjunto

$$Z = (\omega \times Y) \cup \{\omega\} \times (Y \setminus K)$$

é um subespaço de $(\omega + 1) \times Y$ que não é paranormal.

Demonstração:

Seja $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ uma partição de ω em conjuntos infinitos.

Assim, $\langle C_n \times K : n \in \omega \rangle$ é uma sequência discreta de conjuntos fechados em Z .

Suponha que $U_{n,k}$ é um aberto em Z contendo $C_n \times K$, para todo $n, k \in \omega$.

Para $j, k \in \omega$, se $j \in C_n$, o conjunto

$$V_{j,k} = \{y \in Y : (j, y) \in U_{n,k}\}$$

é aberto em Y e contém K .

Como K não é um G_δ regular, existe $q \in (\bigcap_{j,k} \overline{V_{j,k}}^Y \setminus K)$.

Portanto, $(\omega, q) \in \bigcap_{n,k} \overline{U_{n,k}}^Z$, pois $\omega \in \overline{C_n}^{\omega+1}$, para todo $n \in \omega$. ■

Proposição 2.1.3 *O conjunto ${}^\omega\omega$, quando considerado como subespaço do produto $\square^\omega(\omega+1)$, é aberto mas não é um F_σ (Assim, o produto-box de espaços perfeitos não é necessariamente perfeito).*

Demonstração:

É óbvio que ${}^\omega\omega$ é um subconjunto aberto de $\square^\omega(\omega+1)$.

Seja $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de subconjuntos de ${}^\omega\omega$, fechados em $\square^\omega(\omega+1)$.

Tomando $z \in \square^\omega(\omega+1)$, onde $z_i = \omega, \forall i \in \omega$, então teremos $z \notin {}^\omega\omega$, e assim $z \notin F_n, n \in \omega$.

Portanto, podemos encontrar funções $g_n \in {}^\omega\omega$ satisfazendo a seguinte condição: se definimos para todo $n \in \omega$ que $x_n = \max_{k \leq n} g_k(n)$, então

$$F_n \cap \{y \in \square^\omega(\omega+1) : (y_i = x_i, i < n) \text{ e } (y_i \geq g_n(i), i \geq n)\} = \emptyset.$$

Portanto, $x \in {}^\omega\omega \setminus (\bigcup_{n \in \omega} F_n)$. ■

Observação : Como $(\omega+1) \times \square^\omega(\omega+1)$ e $\square^\omega(\omega+1)$ são homeomorfos, usando as proposições anteriores, temos que o conjunto

$$Z_B = (\omega \times \square^\omega(\omega+1)) \cup (\{\omega\} \times \square^\omega\omega)$$

não é um subespaço paranormal de $(\omega+1) \times \square^\omega(\omega+1)$.

Como veremos mais adiante, este conjunto, Z_B , será usado para demonstrar que $\square^\omega\mathbb{P}$ não é normal.

Lema 2.1.1 *Seja X um conjunto admitindo as topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{B}$, onde $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$.*

Para cada $Y \subseteq X$, denotaremos por $Y_{\mathcal{T}}$ e $Y_{\mathcal{B}}$ o conjunto Y quando considerado como subespaço de $(X, \mathcal{T})$ e de $(X, \mathcal{B})$, respectivamente.

Se $\mathcal{T}$ é uma topologia Hausdorff, então para cada $Y \subseteq X$, o produto $Y_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{B}}$ possui um subespaço fechado homeomorfo a $Y_{\mathcal{B}}$.

Demonstração: Dado $A \subseteq X$, seja a diagonal $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\} \subseteq X_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{B}}$.

A primeira coisa a observar é que a diagonal Δ_X é fechada em $X_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{B}}$, pois $\mathcal{T}$ é uma topologia Hausdorff e temos $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$.

Como $\Delta_Y = \Delta_X \cap (Y_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{B}})$, então Δ_Y é fechado em $Y_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{B}}$.

Para finalizar, observemos que Δ_Y é homeomorfo a $Y_{\mathcal{B}}$. ■

Precisaremos de uma definição e alguns resultados envolvendo espaços metrizáveis:

Definição 2.1.10 *Um espaço topológico X é completamente metrizável se existe uma métrica sobre X que seja completa.*

Lema 2.1.2 ([Engelking, 1989])

*Sejam X um espaço topológico completamente metrizável e $M \stackrel{\text{fech.}}{\subseteq} X$.
Então M é completamente metrizável.*

Lema 2.1.3 ([Engelking, 1989])

*Sejam X um espaço metrizável e $A \subseteq X$, um G_{δ} .
Então A é homeomorfo a um subespaço fechado de $X \times T^{\omega}\mathbb{R}$.*

Lema 2.1.4 ([Engelking, 1989])

Sejam $\langle X_n : n \in \omega \rangle$, seqüência de espaços metrizáveis e $\langle \rho_n : n \in \omega \rangle$, seqüência de métricas tal que para cada $n \in \omega$, ρ_n está definida sobre X_n .

Seja ρ definida por

$$\rho(x, y) = \sum_{n \in \omega} 2^{-n} \cdot \rho_n(x_n, y_n),$$

onde $x, y \in \prod_{n \in \omega} X_n$.

Então $\langle \prod_{n \in \omega} X_n, \rho \rangle$ é completo se, e somente se, para cada $n \in \omega$, (X_n, ρ_n) é completo.

Definição 2.1.11 *Seja X um espaço topológico.*

Então definimos

$$d(X) = \min\{|S| : S \subseteq X \text{ e } \overline{S} = X\} + \omega.$$

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrado em ([Hodel, 1984]).

Teorema 2.1.2 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery)

Se $X = T_{i \in I} X_i$, onde $|I| \leq 2^{\nu}$ e $(\forall i \in I)(d(X_i) \leq \nu)$, então $d(X) \leq \nu$.

Teorema 2.1.3 ([Engelking, 1989])

Seja X um espaço topológico satisfazendo:

- (1) $d(X) = \aleph_0$;
- (2) X é zero-dimensional;
- (3) X é completamente metrizável;
- (4) X não contém subconjuntos compactos com interior não vazio.

Então X é homeomorfo a $\mathbb{P}$.

Teorema 2.1.4 O espaço $\mathbb{P} \times \square^\omega(\omega + 1)$ não é paranormal.

Demonstração: Tomemos o conjunto

$$Y_T = [(\omega \times T^\omega(\omega + 1)) \times T^\omega\omega] \cup [\{\omega\} \times T^\omega\omega \times T^\omega\omega]$$

que é subespaço de $X = (\omega + 1) \times T^\omega(\omega + 1) \times T^\omega(\omega + 1)$.

Pelo Lema (2.1.1), o produto $Y_T \times \square^\omega(\omega + 1)$ possui um subespaço fechado homeomorfo a Y_B . Mas

$$Y_B = [(\omega \times \square^\omega(\omega + 1)) \times \square^\omega\omega] \cup [\{\omega\} \times \square^\omega\omega \times \square^\omega\omega]$$

é homeomorfo ao produto

$$[\omega \times \square^\omega(\omega + 1) \cup \{\omega\} \times \square^\omega\omega] \times \square^\omega\omega = Z_B \times \square^\omega\omega.$$

E este produto é um subespaço de $(\omega + 1) \times \square^\omega(\omega + 1) \times \square^\omega(\omega + 1)$ que não é paranormal.²

Portanto, resta demonstrar que Y_T é homeomorfo a $\mathbb{P}$.

Mostraremos que o espaço Y_T satisfaz as hipóteses do Teorema (2.1.3):

- (1) Pelo Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, $d(Y_T) = \aleph_0$;
- (2) Como X é zero-dimensional, Y_T também é zero-dimensional;
- (3) Como Y_T é um G_δ do espaço X , pelo Lema (2.1.3) temos que Y_T é homeomorfo a um subespaço fechado de $X \times T^\omega\mathbb{R}$. Como este produto é completamente metrizável, então Y_T também é completamente metrizável.
- (4) Y_T não possui subconjuntos compactos com interior não vazio.³ ■

²Veja obs. na página 28.

³E.K. van Douwen utilizou o espaço $Z_T = (\omega \times T^\omega(\omega + 1)) \cup (\{\omega\} \times T^\omega\omega)$ para demonstrar este teorema. Mas este espaço não satisfaz a condição (4) do Teorema (2.1.3). Assim, tomamos o espaço Y_T acima.

Com este resultado, vemos que o produto-box enumerável de espaços metrizáveis não é necessariamente normal, mesmo no caso em que somente um dos fatores não é compacto.

Para finalizar, como os fatores $(\omega + 1)$ são homeomorfos a um subespaço fechado dos irracionais, então:

Corolário 2.1.1 *O produto $\square^\omega \mathbb{P}$ não é paranormal.*

EXEMPLO 2 (van Douwen, 1977)

O produto-box enumerável de espaços compactos não é necessariamente normal.

Proposição 2.1.4 *Sejam X um espaço topológico T_2 e λ um cardinal.*

Então o espaço $G_\lambda(X)$ é homeomorfo a um subespaço fechado do produto $\square^\lambda X$.

Demonstração:

Tomemos a aplicação $g : X \longrightarrow \square^\lambda X$, a qual leva cada ponto x do espaço X na λ -upla cujos elementos são todos iguais a x .

Então a imagem $g(X)$ é a diagonal Δ de $\square^\lambda X$, que por sua vez, é um subespaço fechado do produto $\square^\lambda X$, pois o espaço X é T_2 .

Fixemos um elemento x do espaço X .

Assim, seja $V = \prod_{n \in \omega} V_n$, onde para todo $n \in \omega$:

$$(i) \ x \in V_n;$$

$$(ii) \ V_n \overset{\text{ab.}}{\subseteq} X.$$

Com isto, $g(x) \in V \overset{\text{ab.}}{\subseteq} \square^\lambda X$.

Tomemos $W = \bigcap_{n \in \omega} V_n$. Observemos que $x \in W$ e $W \in \tau(G_\delta(X))$. Além disso,

$$g(W) = V \cap \Delta.$$

Portanto, $g : G_\delta(X) \longrightarrow \Delta$ é contínua e é uma aplicação aberta. Logo, é um homeomorfismo. ■

Com este ultimo resultado, temos

$$G_\delta(T^{\omega_2} 2) \approx \Delta \overset{\text{fech.}}{\subseteq} \square^\omega(T^{\omega_2} 2).$$

Definição 2.1.12 *Dado um conjunto X qualquer,*

$$D(X)$$

denotará o espaço topológico cujo suporte é o conjunto X , munido da topologia discreta.

Definição 2.1.13 Uma função parcial é qualquer $p \subseteq \nu^+ \times \nu$ que é uma função.

Definição 2.1.14 Para todo $p \subseteq \nu^+ \times \nu$, definimos

$$E(p) = \{x \in {}^{\nu^+}\nu : p \subseteq x\}.$$

Observação: $E(p) \neq \emptyset \iff p$ é uma função parcial.

Observação: Dado $x \in {}^{\nu^+}\nu$, a coleção

$$\{E(x|_D) : D \in [\nu^+]^{<\nu}\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças abertas em $\square^{\nu^+} D(\nu)$ para x .

Teorema 2.1.5 Seja ν um cardinal tal que $\nu \geq \aleph_0$.

Então o espaço $\square^{\nu^+} D(\nu)$ não é paranormal.

Demonstração:

Para todo $\alpha < \nu$, defina

$$F_\alpha = \{x \in {}^{\nu^+}\nu : (\forall \beta \in \nu \setminus \{\alpha\})(|x^{-1}(\{\beta\})| \leq 1)\}.$$

Afirmção : $\mathcal{F} = \langle F_\alpha : \alpha < \nu \rangle$ é uma família discreta de fechados em $\square^{\nu^+} D(\nu)$, onde $\alpha \neq \beta \implies F_\alpha \neq F_\beta$.

De fato, dado $x \in {}^{\nu^+}\nu$, primeiro mostraremos que $\mathcal{F}$ é discreta.

Como $\nu < \nu^+$, existem $\xi, \eta < \nu^+$, tal que $\xi \neq \eta$, e existe $\alpha < \nu$, satisfazendo

$$x(\xi) = x(\eta) = \alpha,$$

então $V = E(\{\xi, \eta\} \times \{\alpha\})$ é uma vizinhança aberta de x com

$$\beta \neq \alpha \implies V \cap F_\beta = \emptyset.$$

Agora, veremos que para todo $\alpha < \nu$, F_α é fechado.

Se $x \notin F_\alpha$, então existem $\xi', \eta' < \nu^+$ e $\beta \neq \alpha$, satisfazendo

$$x(\xi') = x(\eta') = \beta.$$

Logo, $V' = E(\{\xi', \eta'\} \times \{\beta\})$ é uma vizinhança de x tal que

$$V' \cap F_\alpha = \emptyset.$$

Retornando à demonstração do Teorema, para todo $\alpha, \beta < \nu$, seja $U_{\alpha, \beta}$ um aberto de $[\nu]^{\nu^+} D(\nu)$, onde $F_\alpha \subseteq U_{\alpha, \beta}$.

Mostraremos que $\bigcap_{\alpha, \beta < \nu} \overline{U_{\alpha, \beta}} \neq \emptyset$.

Enumere os $U_{\alpha, \beta}$'s como $\langle U_\xi : \xi < \nu \rangle$, de tal modo que cada $U_{\alpha, \beta}$ apareça ν vezes como U_ξ .

Seja $\alpha : \nu \rightarrow \nu$ uma bijeção satisfazendo

$$F_{\alpha(\xi)} \subseteq U_\xi,$$

para todo $\xi < \nu$.

Além disso, para todo $\xi < \nu$ e $x \in F_{\alpha(\xi)}$, defina

$$W_{x, \xi} = U_\xi,$$

e tomemos para todo $\xi < \nu$, $K_\xi \in [\nu]^\nu$, tal que

$$\xi < \eta < \nu \implies K_\xi \cap K_\eta = \emptyset.$$

Construíremos por indução sobre $\xi < \nu$,

- (i) uma função parcial injetora p , e
- (ii) $D_\xi \in [\nu^+]^{<\nu}$,

satisfazendo as seguintes condições :

- (1)(a) $p_\xi \subseteq p_\eta$, se $\xi < \eta < \nu$;
- (b) $Im(p_\xi) \subseteq \bigcup_{\eta < \xi} K_\eta$;
- (2)(a) $D_\xi = dom(p_{\xi+1}) \setminus dom(p_\xi)$;
- (b) Se $x_\xi \in [\nu]^{\nu^+} D(\nu)$ é definido por

$$x_\xi = p_\xi \cup (\nu^+ \setminus dom(p_\xi)) \times \{\alpha(\xi)\},$$

$$\text{então } E(x_\xi |_{dom(p_{\xi+1})}) \subseteq W_{x_\xi, \xi};$$

- (c) p_ξ não assume o valor 0.

Para o caso em que $\gamma < \nu$ é limite (e no caso $\gamma = 0$), se temos p_ξ , para $\xi < \gamma$, então fazemos $p_\gamma = \bigcup_{\xi < \gamma} p_\xi$ (assim, $p_0 = \emptyset$).

Logo, p_γ é uma função parcial injetora, por (1.a).

Resta mostrar como obter $p_{\gamma+1}$ e D_γ , a partir de p_γ .

Seja x_γ com em (2.b).

Então $x_\gamma \in F_{\alpha(\gamma)}$, e assim $W_{x_\gamma, \gamma}$ está bem definido.

Como $x_\gamma \in W_{x_\gamma, \gamma}$ e este conjunto é aberto, existe $D \in [\nu^+]^{<\nu}$ tal que $E(x_\gamma|_D) \subseteq W_{x_\gamma, \gamma}$.

Façamos $D_\gamma = D \setminus \text{dom}(p_\gamma)$, e seja $f : D_\gamma \longrightarrow K_\gamma \setminus \{0\}$ uma função injetora. Tomemos $p_{\gamma+1} = p_\gamma \cup f$.

Por (1.a), podemos definir uma função parcial p como

$$p = \bigcup_{\xi < \nu} p_\xi.$$

Agora, fixemos $f \in E(p)$ e sejam $D \in [\nu^+]^{<\nu}$ e $\alpha, \beta < \nu$ quaisquer.

Como os D_ξ 's são disjuntos e $U_{\alpha, \beta}$ aparece ν vezes como U_ξ , e há ν conjuntos D_ξ 's, então existe algum $\gamma < \nu$ com

$$D_\gamma \cap D = \emptyset, \text{ e}$$

$$U_\gamma = U_{\alpha, \beta}.$$

Se x_γ é tomado como em (2.b), então

$$x_\gamma|_{\text{dom}(p_\gamma)} = p_\gamma \subseteq p \subseteq f.$$

Como $(\text{dom}(p_{\gamma+1}) \setminus \text{dom}(p_\gamma)) \cap D = D_\gamma \cap D = \emptyset$, segue que $E(x_\gamma|_{\text{dom}(p_{\gamma+1})}) \cap (f|_D) \neq \emptyset$.

Logo, $E(f|_D) \cap U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset$, pois $W_{x_\gamma, \gamma} = U_\gamma$.

Portanto, $f \in \bigcap_{\alpha, \beta < \nu} \overline{U_{\alpha, \beta}}$. ■

Corolário 2.1.2 *O espaço $G_\delta(T^{\omega_2}2)$ não é paranormal.*

Demonstração:

Como podemos constatar facilmente,

$$G_\delta(T^{\omega_2}2) \approx [\omega_1]^{\omega_2} D(2).$$

Afirmção : Os seguintes produtos

$$[\omega_1]^{\omega_2} D(2) , [\omega_1]^{\omega_2} D(c) , [\omega_1]^{\omega_2} D(\omega_1)$$

são homeomorfos.

De fato, como os espaços abaixo são discretos,

$$[\omega_1]^\omega D(2) , D(c) , [\omega_1]^\omega D(\omega_1) ,$$

então as bijeções são homeomorfismos.

Como ω_1 é regular e $\omega_2 = \bigcup \{I_\gamma : \gamma \in \omega_2\}$, onde $(\forall \gamma \in \omega_2)(|I_\gamma| = \aleph_0)$, então

$$\boxed{\omega_1}_{\alpha \in \omega_2} D_\alpha(2) \approx \boxed{\omega_1}_{\gamma \in \omega_2} (\boxed{\omega_1}_{\alpha \in I_\gamma} D_\alpha(2)) \approx \boxed{\omega_1}_{\gamma \in \omega_2} (\boxed{\omega_1}_{\alpha \in I_\gamma} D_\alpha(\omega_1)) \approx \boxed{\omega_1}_{\alpha \in \omega_2} D_\alpha(\omega_1).$$

Assim, $\boxed{\omega_1}^{\omega_2} D(2) \approx \boxed{\omega_1}^{\omega_2} D(\omega_1)$.

Portanto, $G_\delta(T^{\omega_2} 2) \approx \boxed{\omega_1}^{\omega_2} D(\omega_1)$ e o espaço $\boxed{\omega_1}^{\omega_2} D(\omega_1)$ não é paranormal pelo Teorema anterior. ■

Teorema 2.1.6 *O espaço $\square^\omega(T^{\omega_2} 2)$ não é paranormal.*

Demonstração:

Como temos que

$$G_\delta(T^{\omega_2} 2) \approx \Delta \stackrel{\text{fech.}}{\subseteq} \square^\omega(T^{\omega_2} 2),$$

então a diagonal Δ é um subespaço fechado não paranormal de $\square^\omega(T^{\omega_2} 2)$. ■

2.2 Grau de Lindelöf de Produtos-Box

Nesta seção, determinaremos o grau de Lindelöf do produto-box quando os fatores são espaços compactos e quando são espaços Lindelöf κ -scattered.

Veremos que $L(\prod_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$ é uma das condições necessárias para que o espaço $\prod_{n \in \omega} X_n$ seja paracompacto, no caso de fatores compactos.

2.2.1 Fatores compactos

Observamos que as definições de ordem parcial, ordem total e o.t. de um conjunto bem ordenado, podem ser encontradas na página (iv), onde estão algumas notações adotadas neste trabalho.

Definição 2.2.1 *Dada uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, uma cadeia em $\mathbb{P}$ é um subconjunto $C \subseteq \mathbb{P}$, totalmente ordenado.*

Definição 2.2.2 *Uma árvore é uma ordem parcial no sentido estrito, $\langle T, \leq \rangle$, tal que*

$$(\forall x \in T)(\{y \in T : y < x\} \text{ é bem ordenado por } <).$$

Definição 2.2.3 *Seja T uma árvore.*

(a) *Se $x \in T$, a altura de x em T , ou $ht(x, T)$, é definida por*

$$o.t.(\{y \in T : y < x\}),$$

onde o.t. é o tipo de ordem do conjunto indicado;

(b) *Para cada ordinal α , o α -ésimo nível de T , ou $Lev_\alpha(T)$, é o conjunto*

$$\{x \in T : ht(x, T) = \alpha\};$$

(c) *A altura de T , ou $ht(T)$, é o menor ordinal α tal que $Lev_\alpha(T) = \emptyset$.*

Definição 2.2.4 *Dado um cardinal regular λ , uma λ -árvore é uma árvore T de altura λ tal que*

$$(\forall \alpha \in \lambda)(|Lev_\alpha(T)| < \lambda).$$

Definição 2.2.5 *Se T é uma λ -árvore, um caminho através de T é uma cadeia C que tem intersecção não vazia com cada $Lev_\alpha(T)$, $\alpha \in \lambda$.*

Equivalentemente, um caminho é uma cadeia maximal de cardinalidade λ .

Definição 2.2.6 *Seja X um espaço topológico.*

Então definimos o grau de Lindelöf do espaço X como:

$$L(X) = \min\{\nu : (\forall \mathcal{C} \in P(\tau(X))[(X = \bigcup \mathcal{C}) \implies (\exists \mathcal{C}' \in [\mathcal{C}]^{\leq \nu})(X = \bigcup \mathcal{C}')])\} + \omega.$$

Teorema 2.2.1 (*Arkhangel'skii*)

Se X é um espaço topológico T_2 , então

$$|X| \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)}.$$

Precisaremos do seguinte lema envolvendo árvores, para obter um tipo particular de refinamentos em espaços paracompactos.

Lema 2.2.1 (*König*)

Se T é uma ω -árvore, então T possui uma cadeia infinita.

Lema 2.2.2 (*Kunen, 1978*)

Sejam X um espaço paracompacto e $\mathcal{B}$ uma base de X .

Então todo recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de X admite um refinamento $\mathcal{F}$ tal que

(1) Os elementos de $\mathcal{F}$ são da forma $\bigcap_{n \in \omega} B_n$, onde cada $B_n \in \mathcal{B}$ e

$$B_0 \supseteq \overline{B_1} \supseteq B_1 \supseteq \overline{B_2} \supseteq \dots;$$

(2) $(\forall H \in \mathcal{F})(\text{ord}(H, \mathcal{F}) \leq \mathfrak{c})$.

Demonstração:

Usaremos paracompacidade ω vezes para construir uma sequência de recobrimentos de Z , $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$, com $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}$ e satisfazendo as seguintes condições:

- (a) Cada $\mathcal{V}_{n+1}$ é um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{V}_n$;
- (b) Se $V \in \mathcal{V}_{n+1}$, então $\text{ord}(V, \mathcal{V}_n) < \aleph_0$;
- (c) Se $V_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$, então existe $B \in \mathcal{B}$ e $V_n \in \mathcal{V}_n$ satisfazendo

$$V_{n+1} \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq V_n.$$

Agora, façamos $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}$ e tomemos

$$\mathcal{U}_0 = \{B \in \mathcal{B} : (\exists U \in \mathcal{U})(B \subset \overline{B} \subset U) \wedge (\text{ord}(B, \mathcal{U}) < \aleph_0)\}.$$

Observamos que $\mathcal{U}_0$ é recobrimento aberto de X , logo admite um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{U}'_0$.

Pela normalidade de Z , $(\forall U \in \mathcal{U}'_0)(\exists V_U \in \tau(Z))(\overline{V_U} \subseteq U)$ tal que

$$\mathcal{V}_1 = \{V_U : U \in \mathcal{U}'_0\}$$

é um recobrimento de X .

O refinamento $\mathcal{V}_1$ é localmente finito e satisfaz as outras condições.

Repetindo este procedimento para $n \in \omega$, obteremos a sequência $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$ desejada.

Denotaremos um elemento $\langle V_n : n \in \omega \rangle$ de $\prod_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ por V^∞ e um elemento $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ de ${}^\omega \mathcal{B}$ por B^∞ .

Assim, tomemos o conjunto

$$\mathcal{W} = \{V^\infty \in \prod_{n \in \omega} \mathcal{V}_n : (\exists B^\infty \in {}^\omega \mathcal{B})(V_0 \supseteq \overline{B_0} \supseteq B_0 \supseteq V_1 \supseteq \dots)\}.$$

Agora, seja

$$\mathcal{F} = \{W \in \mathcal{P}(X) : (\exists V^\infty \in \mathcal{W})(W = \bigcap V^\infty)\}.$$

Como vale $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} B_n$ para todo elemento de $\mathcal{W}$, então $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (2) do lema por causa da propriedade (b).

Para concluir esta demonstração, mostraremos que $\mathcal{F}$ é um recobrimento de X .

Dado $p \in X$, seja para todo $k \in \omega$,

$$\mathcal{V}^k = \{\langle V_1, \dots, V_k \rangle \in \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k : p \in V_k\}$$

e tomemos o conjunto

$$T = \{\langle V_1, \dots, V_k \rangle \in \mathcal{V}^k : (\exists \langle B_1, \dots, B_{k-1} \rangle \in {}^{k-1} \mathcal{B})(V_1 \supseteq \overline{B_1} \supseteq B_1 \supseteq \dots \supseteq B_{k-1} \supseteq V_k)\}.$$

Com isto, temos que

(i) Cada nível de T é finito:

Dado $\langle V_1, \dots, V_k \rangle$, como $p \in V_k$, então existe uma quantidade finita de sequências finitas tal que $p \in V_k$, pois $\mathcal{V}_k$ é pontualmente finito;

(ii) $(\forall \langle V_1, \dots, V_k \rangle \in T)(ht(\langle V_1, \dots, V_k \rangle) < \aleph_0)$, então $ht(T) = \aleph_0$.

Logo, T é uma ω -árvore.

Aplicando o lema de König, temos que existe uma cadeia C infinita em T , satisfazendo

$$(\forall \alpha \in \omega)(C \cap Lev_\alpha(T) \neq \emptyset).$$

Logo, C é um caminho através de T e $(\forall H \in C)(p \in \cap H)$.

Portanto, $p \in \cap C$ e $\cap C \in \mathcal{F}$, e assim $\mathcal{F}$ é um recobrimento de Z . ■

Além do lema acima, utilizaremos a seguinte versão do Teorema de Arkhangel'skii, para o cálculo do grau de Lindelöf de um produto-box de espaços compactos:

Teorema 2.2.2 *Se X é um espaço compacto e $\mathcal{F}$ é um recobrimento de X por G_δ 's fechados, e $\mathcal{F}$ satisfaz*

$$(\forall H \in \mathcal{F})(\text{ord}(H, \mathcal{F}) \leq \mathfrak{c}),$$

então $|\mathcal{F}| \leq \mathfrak{c}$.

Com o resultado abaixo, veremos que existe uma ligação entre a paracompacidade e o grau de lindelöf de um produto-box de espaços compactos.

Teorema 2.2.3 *(Kunen, 1978)*

Se $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ é uma sequência de espaços topológicos compactos e $\square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto, então $L(\square_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$.

Demonstração:

Tomemos $X = \square_{n \in \omega} X_n$ e $Y = T_{n \in \omega} X_n$.

Como X é paracompacto e $\mathcal{R}$ é uma base de X , aplicando o lema (2.2.2), então dado um recobrimento $\mathcal{U}$ de X , existe um refinamento $\mathcal{F}$ de $\mathcal{U}$, satisfazendo (1) e (2).

Agora, cada elemento de $\mathcal{F}$ é um G_δ fechado em Y e satisfaz a condição

$$(\forall H \in \mathcal{F})(\text{ord}(H, \mathcal{F}) \leq \mathfrak{c}).$$

Logo, pelo Teorema (2.2.2), concluímos que

$$|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}.$$

Portanto, $L(X) = \mathfrak{c}$. ■

2.2.2 Fatores κ -scattered

Agora, determinaremos o grau de Lindelöf de um produto-box de espaços κ -scattered, assumindo a condição $\kappa^\omega = \kappa$.

Suponhamos que $\alpha > \beta$ e $(\forall \gamma < \alpha)(\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha)$. Assim, se $\aleph_\alpha$ é regular ou temos $cf(\aleph_\alpha) > \aleph_\beta$, então $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

Portanto, assumindo **GCH**, temos que $cf(\aleph_\alpha) > \aleph_\beta$ implica $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

Observamos que $\aleph_0 = \aleph_1$.

Dados um cardinal λ e um cardinal infinito ν , definimos

$$\lambda^{<\nu} = \sup\{\lambda^\mu : \mu < \nu\}.$$

Em particular, $\lambda^{<\nu^+} = \lambda^\nu$.

Mais algumas definições:

- (1) $T = {}^{<\omega_1}\kappa (= \bigcup\{\xi\kappa : \xi \in \omega_1\})$, i.e., a ordem parcial das funções (ou seqüências) com domínio $\xi \in \omega_1$, e imagem contida em κ , onde a ordem é a inclusão.
- (2) Dado $s \in T$, $l(s)$ denotará o comprimento (domínio) de s .
- (3) Se $\eta < l(s)$ então $s|_\eta$ é a η -seqüência obtida restringindo o domínio de s a η .
- (4) Dados $s \in T$ e $\mu \in \kappa$, $s \wedge \mu$ denotará a $(l(s) + 1)$ -seqüência que começa com s e termina com μ .
- (5) O símbolo 0 denotará a seqüência vazia de comprimento 0 .

Notação (1): Sejam $\mathcal{U}$ um recobrimento de um espaço topológico X , e $K \in P(X)$. Escreveremos $K \triangleleft \mathcal{U}$ se, e somente se, $(\exists U \in \mathcal{U})(K \subseteq U)$.

Notação (2): Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$. Então

$$(\mathcal{C})_k = \{V_k : \prod_{n \in \omega} V_n \in \mathcal{C}\} (= \{p_k(V) : V \in \mathcal{C}\}).$$

Teorema 2.2.4 *Se $\kappa^\omega = \kappa$ e $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ é uma seqüência de espaços topológicos compactos κ -scattered, então*

$$L(\square_{n \in \omega} X_n) = \kappa.$$

Esboço da demonstração :

Dado $\mathcal{U}$, recobrimento aberto de $\square_{n \in \omega} X_n$, usaremos a árvore T para indexar as tentativas de refinamento de $\mathcal{U}$ por retângulos fechados $K \subseteq \square_{n \in \omega} X_n$. Mais precisamente: Usando indução sobre $l(s)$, $s \in T$, definiremos $K(s) = \prod_{n \in \omega} K_n(s)$, um retângulo fechado em $\square_{n \in \omega} X_n$. Em seguida, verificaremos que $(\forall p \in \square_{n \in \omega} X_n)(\exists s \in T)(p \in K(s) \triangleleft \mathcal{U})$. Assim, como $|T| = \kappa$, teremos que existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ tal que $|\mathcal{U}'| = \kappa$ e $\square_{n \in \omega} X_n = \bigcup \mathcal{U}'$.

Demonstração:

Definiremos $K(s)$ de tal modo que $K(0) = \square_{n \in \omega} X_n$ e para todo $s \in T$ sejam satisfeitas:

(1) sucessor:

Dado $K(s)$, então $K(s) = \bigcup \{K(s \wedge \mu) : \mu \in \kappa\}$.

(2) limite:

Neste caso faremos simplesmente $K(s) = \bigcap \{K(s|_\xi) : \xi \in l(s)\}$.

(3) Para cada $\mu \in \kappa$, temos:

(i) $K(s \wedge \mu) \triangleleft \mathcal{U}$, ou

(ii) $(\exists n \in \omega)(r(K_n(s \wedge \mu)) < r(K_n(s)))$.

Indução : Para definir $K(s)$, procederemos por indução, tomando intersecções nos estágios limites. Assim, basta verificar somente os estágios sucessores, i.e., se as condições (1) e (3) são satisfeitas.

Seja $s \in T$ e tomemos para todo $n \in \omega$, $\beta_n = r(K_n(s))$ ⁴ e $Y_n = (K_n(s))^{(\beta_n)}$ ⁵.

Como Y_n é compacto, então $|Y_n| \leq \kappa$. Logo, temos que $|\prod_{n \in \omega} Y_n| = \kappa^\omega = \kappa$.

Como $(\forall p \in \prod_{n \in \omega} Y_n)(\exists U_p \in \mathcal{U})(p \in U_p)$, então $(\exists V_p \in \mathcal{R})(p \in V_p \subseteq \overline{V_p} \subseteq U_p)$.

Então façamos $\mathcal{V} = \{V_p : p \in \prod_{n \in \omega} Y_n\}$. Portanto pelo que vimos anteriormente, temos $|\mathcal{V}| = \kappa$.

Seja $\{K(s \wedge \mu) : \mu \in \kappa\}$ uma enumeração de todos os κ retângulos fechados $K = \prod_{n \in \omega} K_n$, onde

(a) $K = \overline{V} \cap K(s)$, para algum $V \in \mathcal{V}$, ou

(b) Existe $n \in \omega$ tal que:

$$K_n = K_n(s) \setminus (\bigcup (\mathcal{C})_n), \text{ para algum } \mathcal{C} \in [\mathcal{V}]^\omega \text{ com } Y_n \subseteq (\bigcup (\mathcal{C})_n), \text{ e}$$

$$K_m = K_m(s), \text{ para todo } m \neq n.$$

Agora, temos que a condição (3) é satisfeita porque (a) implica que

$$K \subseteq \overline{V} \subseteq U \in \mathcal{U},$$

e (b) implica que $K_n^{(\beta_n)} = \emptyset$. Logo, $r(K_n) < \beta_n = r(K_n(s))$.

Para ver que (1) é satisfeita, seja $p \in K(s)$.

⁴Veja definição de posto de um espaço κ -scattered à página 18.

⁵Veja definição de $X^{(\alpha)}$, α ordinal, à página 6.

Afirmção (1): Se p não pertence a algum K satisfazendo (b), então

$$(\forall n \in \omega)(\exists q_n \in Y_n)(\forall V \in \mathcal{V})((q_n \in V) \implies (p_n \in V_n)).(\dagger)$$

Suponha que esta afirmação não é verdadeira.

Logo, teremos

$$(\exists n \in \omega)(\forall q_n \in Y_n)(\exists V \in \mathcal{V}) \underbrace{((q_n \in V) \wedge (p_n \notin V_n))}_{(*)}.$$

Seja $\mathcal{C}'$ o conjunto dos $V \in \mathcal{V}$ satisfazendo (*).

Como $(\mathcal{C}')_n$ é um recobrimento de Y_n , existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ tal que $|\mathcal{C}| \leq \aleph_0$ e $Y_n \subseteq \bigcup(\mathcal{C})_n$.

Portanto, $p_n \in K_n(s) \setminus \bigcup(\mathcal{C})_n$.

Com isto, concluímos que existe K do tipo (b) com $p \in K$, contradição.

Agora, para cada $n \in \omega$, tomemos $q_n \in Y_n$ satisfazendo ($\dagger$) e façamos $q = \langle q_0, q_1, \dots \rangle$.
Então

$$(\forall V \in \mathcal{V})((q_n \in V_n) \implies (p_n \in V_n)),$$

e assim

$$(\forall V \in \mathcal{V})((q \in V) \implies (p \in V)).$$

Como $q \in \prod_{n \in \omega} Y_n$, existe $V_* \in \mathcal{V}$ com $q \in V_*$, e portanto $p \in V_*$.

Logo, temos que

$$p \in V_* \cap K(s) \subseteq \overline{V_*} \cap K(s),$$

e $\overline{V_*} \cap K(s)$ é um retângulo do tipo (a).

A seguir, tomemos

$$\mathcal{K} = \{K(s) : s \in T\}.$$

Mostraremos que $\mathcal{K}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$.

Afirmção (2): Dado $p \in \square_{n \in \omega} X_n$, existe $f \in {}^{\omega_1} \kappa$ tal que

$$(\forall \xi \in \omega_1)(p \in K(f|_\xi)).$$

Observamos que $p \in \square_{n \in \omega} X_n = K(0)$ e assim, por (1),

$$K(0) = \bigcup \{K(\mu) : \mu \in \kappa\}.$$

Logo, existe $\mu_1 \in \kappa$ tal que $p \in K(\mu_1)$.

Repetindo este argumento para os estágios sucessores e usando (2) nos estágios limites, obteremos uma $f \in {}^{\omega_1}\kappa$, como queríamos.

Agora, se $\xi_1 < \xi_2$, então para todo $n \in \omega$,

$$K_n(f|_{\xi_2}) \subseteq K_n(f|_{\xi_1}),$$

a portanto, temos

$$r(K_n(f|_{\xi_2})) \leq r(K_n(f|_{\xi_1})),$$

para todo $n \in \omega$.

Assim, para todo $n \in \omega$,

$$A_n = \langle r(K_n(f|_{\xi})) : \xi \in \omega_1 \rangle$$

é uma sequência de ordinais não crescente.

Logo,

$$(\forall n \in \omega)(\exists i_n \in \omega_1)[(\forall \xi \geq \xi_n)(r(K_n(f|_{\xi})) = r(K_n(f|_{\xi_n})))].$$

Seja $\xi_* = \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$. Observemos que $\xi_* < \omega_1$, e portanto

$$(\forall \xi \geq \xi_*)(\forall n \in \omega)[r(K_n(f|_{\xi})) = r(K_n(f|_{\xi_*}))].$$

Assim, por (3), temos que $K(f|_{\xi_*}) \triangleleft \mathcal{U}$.

Com isto, concluímos que

$$p \in K(f|_{\xi_*}) \triangleleft \mathcal{U}.$$

E isto termina a demonstração. ■

Corolário 2.2.1 *Se $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ é uma sequência de espaços topológicos compactos c -scattered, então*

$$L(\square_{n \in \omega} X_n) = c.$$

Corolário 2.2.2 *(Kunen, 1978)*

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de espaços compactos scattered.

Então $L(\square_{n \in \omega} X_n) = c$.

Capítulo 3

Produtos-Box de espaços localmente compactos

M.E.Rudin demonstrou, assumindo **CH**, que o produto-box enumerável de espaços métricos, σ -compactos e localmente compactos é paracompacto ([Rudin, 1972]), e que o produto-box enumerável de ordinais σ -compactos é ultraparacompacto ([Rudin, 1974]). Nestas demonstrações, o uso dos produtos-nabla está implícito.

K.Kunen (1978) foi o primeiro a definir estes espaços-quociente (produtos-Nabla), determinar quando a projeção de um produto-box enumerável sobre este espaço-quociente é fechada, e estabelecer condições sob as quais a paracompacidade do espaço-quociente implica a paracompacidade do produto-box.

3.1 Produto-Nabla

Nesta seção, definiremos o espaço quociente (produto-Nabla), veremos algumas propriedades do mesmo e condições necessárias e suficientes para a projeção canônica ser uma aplicação fechada.

Seja $\langle X_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ uma sequência de espaços topológicos.

Definimos uma relação de equivalência $\equiv$ sobre o produto $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ da seguinte maneira:

$$x \equiv y \text{ se } |\{\alpha \in \nu : x(\alpha) \neq y(\alpha)\}| < \nu,$$

onde $x, y \in \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$.

Definição 3.1.1 O produto-nabla de $\langle X_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ é definido como o conjunto

$$\nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} (\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha) / \equiv,$$

munido da topologia quociente.

A projeção canônica será denotada por $\sigma : \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha \longrightarrow \nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha$.

Quando todos os fatores X_α 's são iguais a um mesmo espaço topológico X , $\nabla^\nu X$ denotará o produto-nabla destes espaços.

Proposição 3.1.1 *Suponha que $\langle X_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ é uma família de espaços topológicos e para todo $\alpha \in \nu$, temos $A_\alpha, B_\alpha \subseteq X_\alpha$. Então:*

(i) *Se $x, y \in \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$, então*

$$\sigma(x) = \sigma(y) \iff |\{\alpha \in \nu : x(\alpha) \neq y(\alpha)\}| < \nu :$$

(ii) $\sigma(x) \in \sigma(\prod_{\alpha \in \nu} A_\alpha) \iff |\{\alpha \in \nu : x(\alpha) \notin A_\alpha\}| < \nu;$

(iii) $\sigma(\prod_{\alpha \in \nu} A_\alpha) \subseteq \sigma(\prod_{\alpha \in \nu} B_\alpha) \iff |\{\alpha \in \nu : A_\alpha \not\subseteq B_\alpha\}| < \nu;$

(iv) $\sigma(\prod_{\alpha \in \nu} A_\alpha)$ é aberto(fechado) $\iff |\{\alpha \in \nu : A_\alpha \text{ não é aberto(fechado)}\}| < \nu.$

Observação: Se para cada $\alpha \in \nu$, A_α tem a topologia induzida de X_α , e

$$\sigma_A : \square_{\alpha \in \nu} A_\alpha \longrightarrow \nabla_{\alpha \in \nu} A_\alpha,$$

$$\sigma_X : \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha \longrightarrow \nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha$$

são as projeções, então $h : \nabla_{\alpha \in \nu} A_\alpha \longrightarrow \sigma_X(\prod_{\alpha \in \nu} A_\alpha)$ definida como

$$h(p) = \sigma_X(y) \text{ , onde } y \in \sigma_A^{-1}(p),$$

é um homeomorfismo, onde $\sigma_X(\prod_{\alpha \in \nu} A_\alpha)$ está munido da topologia induzida de $\nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha$.

A seguir, alguns resultados básicos sobre produtos-nabla.

Analogamente a (ii) da proposição (2.1.1), temos

Proposição 3.1.2 *Se cada fator X_α é $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, regular, completamente regular, ou zero-dimensional, então o produto-nabla $\nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ também será.*

Proposição 3.1.3 (van Douwen, 1980)

Dada uma sequência $\langle X_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ de espaços topológicos, são equivalentes:

(a) $cf(\nu) = \omega$ ou $|\{\alpha \in \nu : X_\alpha \text{ não é } P\text{-espaço}\}| < \nu;$

(b) $\nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ é um P -espaço.

Demonstração:

(a) $\implies$ (b)

Dado $x \in \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$, para cada $k \in \omega$, seja V_k uma vizinhança de $\sigma(x)$ em $\nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha$.
Tomemos para cada $k \in \omega$, uma vizinhança $U_{\alpha,n}$ de x_α tal que $\nabla_{\alpha \in \nu} U_{\alpha,n} \subseteq V_k$.

Caso 1: $\text{cf}(\nu) = \omega$.

Seja $\{N_k : k \in \omega\}$ uma partição de ν , onde $|N_k| < \nu$, $k \in \omega$.
Para cada $\alpha \in \nu$, se $\alpha \in N_k$, então fazemos

$$W_\alpha = \bigcap_{n \leq k} U_{\alpha,n}.$$

Assim, fixado $k_o \in \omega$, se $k \geq k_o$, então

$$(\alpha \in N_k) \implies W_\alpha = \bigcap_{n \leq k} U_{\alpha,n} \subseteq \bigcap_{n \leq k_o} U_{\alpha,n} \subseteq U_{\alpha,k_o}$$

portanto, $(\forall k \geq k_o)(\forall \alpha \in N_k)(W_\alpha \subseteq U_{\alpha,k_o})$.

Deste modo,

$$\{\alpha \in \nu : W_\alpha \not\subseteq U_{\alpha,k_o}\} \subseteq \bigcup_{k < k_o} N_k$$

assim, $|\{\alpha \in \nu : W_\alpha \not\subseteq U_{\alpha,k_o}\}| < \nu$.

Logo, para todo $k \in \omega$,

$$\nabla_{\alpha \in \nu} W_\alpha \subseteq \nabla_{\alpha \in \nu} U_{\alpha,k}$$

e com isto, temos que para todo $k \in \omega$,

$$\nabla_{\alpha \in \nu} W_\alpha \subseteq V_k.$$

Portanto, $\sigma(x) \in \nabla_{\alpha \in \nu} W_\alpha \subseteq \bigcap_{k \in \omega} V_k$. O que demonstra este caso.

Caso 2: $|\{\alpha \in \nu : X_\alpha \text{ não é P-espaco}\}| < \nu$

Dado $x \in \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$, sejam $\langle V_k : k \in \omega \rangle$ e $\langle U_{\alpha,k} : \alpha \in \nu \wedge k \in \omega \rangle$ como no caso anterior.

Seja $A = \{\alpha \in \nu : X_\alpha \text{ não é P-espaco}\}$.

Agora, para cada $\alpha \in (\nu \setminus A)$, tomemos

$$W_\alpha = \bigcap_{k \in \omega} U_{\alpha,k} \in \tau(X_\alpha).$$

Se $\alpha \in A$, tomemos $W_\alpha = U_{\alpha,0}$.

Deste modo, para todo $k \in \omega$, teremos

$$\sigma(x) \in \nabla_{\alpha \in \nu} W_\alpha \subseteq \nabla_{\alpha \in \nu} U_{\alpha,k}$$

pois o conjunto $\{\alpha \in \nu : W_\alpha \not\subseteq U_{\alpha,k}\} = A$ e $|A| < \nu$.

Logo, $\nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ é um P-espço.

(b) $\implies$ (a)

Suponha que $|A| = \nu$.

Dado $x \in \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$, tomemos para cada $\alpha \in A$, uma sequência $\langle U_{\alpha,k} : k \in \omega \rangle$ de vizinhanças de x_α em X_α tal que

$$\bigcap_{k \in \omega} U_{\alpha,k}$$

não é vizinhança de x_α em X_α .

Como $\nabla_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ é P-espço, podemos escolher, para cada $\alpha \in \nu$, uma vizinhança V_α de x_α tal que para todo $k \in \omega$,

$$\nabla_{\alpha \in \nu} \subseteq \nabla_{\alpha \in \nu} U_{\alpha,k}$$

portanto, para todo $k \in \omega$, teremos que

$$|\{\alpha \in \nu : V_\alpha \not\subseteq U_{\alpha,k}\}| < \nu.$$

A seguir, para cada $\alpha \in A$, tomemos

$$k(\alpha) = \min\{k \in \omega : V_\alpha \not\subseteq U_{\alpha,k}\}$$

e $A_k = \{\alpha \in A : k(\alpha) = k\}$.

Assim, $A = \bigcup_{k \in \omega} A_k$ e para todo $k \in \omega$, temos $|A_k| < \nu$.

Portanto, concluímos que $\text{cf}(\nu) = \omega$. ■

Corolário 3.1.1 (Rudin, 1974)

Todo produto-nabla enumerável é um P-espço.

Corolário 3.1.2 *Todo produto-nabla enumerável de espaços regulares é zero-dimensional.*

Lema 3.1.1 ([Engelking, 1989])

Sejam X e Y , espaços topológicos.

Uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$ é fechada se, e somente se, para todo $y \in Y$ e para todo aberto U contendo $f^{-1}(y)$, existe uma vizinhança V de y tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Lema 3.1.2 *Se A é um subespaço compacto de um espaço X e y é um ponto do espaço Y , então para todo aberto $W \subseteq X \times Y$ contendo $A \times \{y\}$, existem abertos $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ satisfazendo*

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Teorema 3.1.1 (*van Douwen, 1980*)

Se $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ é uma sequência de espaços σ -compactos, localmente compactos, então a projeção

$$\sigma : \prod_{n \in \omega} X_n \longrightarrow \bigvee_{n \in \omega} X_n$$

é fechada.

Demonstração:

Pelo lema (3.1.1), basta demonstrar que dado $x \in \prod_{n \in \omega} X_n$ e uma vizinhança U de $\sigma^{-1}(\sigma(x))$, existe uma vizinhança W de $\sigma(x)$ satisfazendo $\sigma^{-1}(W) \subseteq U$.

Assim, sejam x e U como acima.

Para cada $n \in \omega$, tomemos uma sequência $\mathcal{D}_n = \langle D_{n,k} : k \in \omega \rangle$ de subconjuntos compactos de X_n satisfazendo

- (i) $D_{n,0}$ é uma vizinhança de x_n ;
- (ii) $(\forall k \in \omega)(D_{n,k} \subseteq D_{n,k+1})$;
- (iii) $X_n = \bigcup_{n \in \omega} D_{n,k}$.

Afirmção: Para cada $k \in \omega$, podemos escolher uma sequência $\mathcal{V}_k = \langle V_{n,k} : n \in \omega \rangle$, onde cada $V_{n,k}$ é uma vizinhança de x_n com

$$\left(\prod_{n \leq k} D_{n,k} \right) \times \left(\prod_{n \geq k} V_{n,k} \right) \subseteq U.$$

Com efeito, para cada $k \in \omega$, podemos identificar $\prod_{n \in \omega} X_n$ com o espaço-produto

$$\left(\prod_{n \leq k} X_n \right) \times \left(\prod_{n > k} X_n \right).$$

Então U é uma vizinhança de $P_k = \left(\prod_{n \leq k} D_{n,k} \right) \times (\{(x_{k+1}, \dots)\})$, onde $k \in \omega$, pois $P_k \subseteq \sigma^{-1}(\sigma(x))$.

Como $\prod_{n \leq k} D_{n,k}$ é compacto, podemos aplicar o lema (3.1.2), e deste modo, temos que existe uma vizinhança V_k de $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$ em $\prod_{n > k} X_n$ com

$$\left(\prod_{n \geq k} D_{n,k} \right) \times V_k \subseteq U.$$

Podemos assumir que V_k é da forma $\prod_{n > k} V_{n,k}$, para $k \in \omega$.

A seguir, definiremos para cada $n \in \omega$ uma vizinhança W_n de x_n da seguinte maneira

$$W_0 = D_{n,0};$$

$$W_n = D_{n,0} \cap \left(\bigcap_{k < n} V_{n,k} \right), k > 0.$$

Então $\nabla_{n \in \omega} W_n$ é uma vizinhança de $\sigma(x)$.

Logo, existe $m \in \omega$ com $y_n \in W_n$, para todo $n > m$.

Tomemos $k \geq m$ tal que $y_n \in D_{n,k}$ para $n \leq k$.

Como $y_n \in W_n \subseteq D_{n,0} \subseteq D_{n,k}$, para $n > m$ e ainda temos $y_n \in W_n \subseteq V_{n,k}$, para $n \geq k$, então

$$y \in \left(\prod_{n \leq k} D_{n,k} \right) \times \left(\prod_{n > k} V_{n,k} \right) \subseteq U.$$

O que conclui esta demonstração. ■

EXEMPLO 1 : A σ -compacidade dos fatores é necessária para a projeção σ ser fechada.

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços topológicos, onde

$$X_n = \begin{cases} D({}^\omega\omega) & n = 0 \\ (\omega + 1) & n > 0 \end{cases}$$

Como X_0 tem a topologia discreta e $|X_0| > \aleph_0$, então X_0 é paracompacto e localmente compacto, mas não é σ -compacto.

Façamos $X = \square_{n \in \omega} X_n$. Podemos identificar X com o produto $D({}^\omega\omega) \times \square_{n > 0} X_n$. Desta maneira, podemos representar um elemento de X como um par ordenado (x, y) , onde $x \in {}^\omega\omega$ e $y \in {}^\omega(\omega + 1)$.

A diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in {}^\omega\omega\}$ é fechada em X . Mostraremos que $\sigma(\Delta)$ não é fechado em $\nabla_{n \in \omega} X_n$. Isto equivale a mostrar que $A = \sigma^{-1}(\sigma(\Delta))$ não é fechado em X .

Agora, observemos que

$$A = \{(x, y) \in X : |\{n \in \omega : y_n = \omega\}| < \aleph_0\}.$$

Seja $z \in V = \prod_{n \in \omega} V_n$, onde $(\forall n \in \omega)(V_n \stackrel{\text{ab.}}{\subseteq} X_n)$. Podemos supor que $V_0 = \{y_0\}$, pois tomamos X_0 é discreto.

Para $n > 0$ tomemos $y_n \in V_n$. Então $y = \langle y_{n-1} : n \in \omega \rangle \in {}^\omega\omega$, e assim $(z_0, y) \in A$.

Mas, além disso,

$$(z_0, y) \in V,$$

portanto, $\overline{A} = X$.

Como $A \neq X$, concluímos que A não é fechado em X .

EXEMPLO 2 : Complementando o exemplo anterior, a compacidade local dos fatores também é necessária para a projeção σ ser fechada.

Tomando $\mathbb{P}$, os irracionais com a topologia induzida da reta real, podemos identificá-lo com $T^\omega\omega$. Desta maneira, se $X_0 = T^\omega\omega$ e $(\forall n > 0)(X_n = (\omega + 1))$, através da mesma demonstração usada acima, vemos que a projeção σ não é fechada. Observamos que neste caso, somente um fator não é localmente compacto (mas é metrizável e Lindelöf) e os restantes são compactos.

Assim, com estes dois exemplos e o Teorema anterior, temos:

Teorema 3.1.2 (*van Douwen, 1980*)

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços topológicos.

Então $\sigma : \prod_{n \in \omega} X_n \longrightarrow \bigcap_{n \in \omega} X_n$ é fechada se, e somente se:

- (a) $(\forall n \in \omega)(X_n \text{ é } \sigma\text{-compacto});$
- (b) $(\forall n \in \omega)(X_n \text{ é localmente compacto}).$

Observamos que o conjunto dos racionais ($\mathbb{Q}$) com a topologia induzida de $\mathbb{R}$, é um exemplo de espaço σ -compacto que não é localmente compacto.

3.2 Lema-Nabla

Usando o lema (de preservação de paracompacidade) abaixo, junto com o Teorema (3.1.1) sobre a projeção canônica, veremos mais um motivo porque a compacidade local nos fatores é uma condição essencial na técnica desenvolvida por Rudin-Kunen.

Lema 3.2.1 (*Kunen, 1978*) (lema de preservação de paracompacidade)

Sejam X e Y espaços topológicos $\mathcal{T}_2$, e $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua, sobrejetora e fechada.

Então

- (i) *Se X é paracompacto, então Y também será paracompacto;*
- (ii) *Se Y é paracompacto e $(\forall y \in Y)(L(f^{-1}(y)) = \aleph_0)$, então o espaço X também será paracompacto.*

Lema 3.2.2 (*Kunen, 1978*)

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua, sobrejetora e fechada.

Se para cada $y \in Y$, $L(f^{-1}(y)) = \aleph_0$, então $L(X) = L(Y)$.

Lema 3.2.3 (*Kunen, 1978*)

Dado um espaço topológico regular X e uma sequência $\langle K_j : j \in \omega \rangle$ de subespaços fechados e paracompactos, então

$$Y = \bigcup_{j \in \omega} \overset{\circ}{K}_j$$

é paracompacto.

Demonstração:

Seja $\mathcal{U}$ um recobrimento aberto de Y .

Para todo $j \in \omega$, existe $\mathcal{V}_j \subseteq \tau(X)$, satisfazendo:

- (i) $\mathcal{V}_j$ é um refinamento parcial de $\mathcal{U}$;
- (ii) $K_j \subseteq \bigcup \mathcal{V}_j$;
- (iii) $\mathcal{V}_j$ é localmente finito em K_j .

A seguir, façamos $\mathcal{W}_j = \{V \cap \overset{\circ}{K}_j : V \in \mathcal{V}_j\}$, onde $j \in \omega$.

Logo, temos:

- (a) $\mathcal{W}_j \subseteq \tau(X)$;
- (b) $\mathcal{W}_j$ é localmente finito em X ;
- (c) $\overset{\circ}{K}_j \subseteq \bigcup \mathcal{W}_j$.

Assim, $\mathcal{W} = \bigcup_{j \in \omega} \mathcal{W}_j$ é um refinamento σ -localmente-finito de $\mathcal{U}$.

Portanto, Y é paracompacto. ■

Definição 3.2.1 Uma família $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é *finitamente-estrela* (*star-finite*) se

$$(\forall U \in \mathcal{U})(\text{ord}(U, \mathcal{U}) < \aleph_0).$$

Analogamente, uma família $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é *enumerávelmente-estrela* (*star-countable*) se

$$(\forall U \in \mathcal{U})(\text{ord}(U, \mathcal{U}) \leq \aleph_0).$$

Observamos que toda família finitamente-estrela é pontualmente-finita e que um recobrimento aberto finitamente-estrela de um espaço topológico é localmente finito.

Definição 3.2.2 Um subconjunto A de um espaço topológico X é *funcionalmente fechado* (*zero-set*) se

$$A = f^{-1}(0)$$

para alguma função contínua $f : X \longrightarrow [0, 1]$.

O complementar de um conjunto funcionalmente fechado é chamado **funcionalmente aberto** (*cozero-set*).

Lema 3.2.4 ([Engelking, 1989])

Todo recobrimento $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \omega\}$ de um espaço topológico X , onde cada U_i é funcionalmente aberto, admite um refinamento finitamente-estrela formado por conjuntos funcionalmente abertos.

O teorema a seguir, mostrará que a presença de compacidade local nos fatores, reduzirá o estudo da paracompacidade de produtos-box enumeráveis de espaços paracompactos ao caso no qual os fatores são compactos.

Notação : Dado $A \subseteq \prod_{n \in \omega} X_n$, $E(A)$ denotará a classe de equivalência dos pontos de A , i.e., $E(A) = \sigma^{-1}(\sigma(A))$.

Teorema 3.2.1 (Kunen, 1978)

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de espaços topológicos paracompactos.

Suponha que para todo $n \in \omega$, existe um recobrimento aberto $\mathcal{U}_n$ de X_n , satisfazendo a seguinte condição:

“Para toda sequência $\langle U_n : n \in \omega \rangle$, onde $(\forall n \in \omega)(U_n \in \mathcal{U}_n)$, temos que $\prod_{n \in \omega} \overline{U_n}$ é paracompacto.”

Então $\prod_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto.

Demonstração:

(1) Podemos supor que para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n$ é enumerável.

De fato, seja $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de recobrimentos satisfazendo as hipóteses do teorema.

Para cada $n \in \omega$, seja $\mathcal{V}_n = \bigcup_{k \in \omega} \mathcal{V}_n^k$, refinamento aberto σ -discreto de $\mathcal{U}_n$.

A seguir, façamos $\mathcal{U}'_n = \{\bigcup \mathcal{V}_n^k : k \in \omega\}$, onde $n \in \omega$.

Assim, se tomarmos para todo $n \in \omega$, $\bigcup \mathcal{V}_n^{k_n} \in \mathcal{U}'_n$, então

$$\prod_{n \in \omega} \overline{\bigcup \mathcal{V}_n^{k_n}} = \prod_{n \in \omega} (\bigcup \{\overline{V_n} : V_n \in \mathcal{V}_n^{k_n}\}) = \bigcup \left\{ \prod_{n \in \omega} \overline{V_n} : (\forall n \in \omega)(V_n \in \mathcal{V}_n^{k_n}) \right\}.$$

Como $\mathcal{H} = \{\prod_{n \in \omega} \overline{V_n} : (\forall n \in \omega)(V_n \in \mathcal{V}_n^{k_n})\}$ é discreto, e cada $\prod_{n \in \omega} \overline{V_n} \in \mathcal{H}$ é paracompacto, temos que $\prod_{n \in \omega} \overline{\bigcup \mathcal{V}_n^{k_n}}$ é soma topológica de subespaços paracompactos, logo é paracompacto.

Como cada fator X_n é completamente regular, podemos aplicar o lema(3.2.4) para obtermos um refinamento aberto enumerável, finitamente-estrela.

Assim, podemos assumir que cada recobrimento $\mathcal{U}_n$ é enumerável e localmente finito.

Retornando à demonstração do Teorema, façamos para todo $n \in \omega$,

$$\mathcal{U}'_n = \{U_n^k : k \in \omega\}.$$

Pela normalidade de X_n , para todo $n \in \omega$, existe $F_n^k \subseteq U_n^k$, onde F_n^k é fechado em X_n e $X_n = \bigcup_{k \in \omega} F_n^k$.

Além disso, existem abertos $V_n^{k,i}$, $i \in \omega$, satisfazendo

$$F_n^k \subseteq \dots \subseteq V_n^{k,i+1} \subseteq \overline{V_n^{k,i+1}} \subseteq V_n^{k,i} \subseteq \dots \subseteq \overline{V_n^{k,1}} \subseteq V_n^{k,0} \subseteq \overline{V_n^{k,0}} \subseteq U_n^k.$$

A seguir, dado $f \in {}^\omega\omega$, seja

$$A_f = \bigcap_{i \in \omega} E\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{f(n),i}\right) = \bigcap_{i \in \omega} E\left(\prod_{n \in \omega} \overline{V_n^{f(n),i}}\right).$$

Como para todo $i \in \omega$, $E\left(\prod_{n \in \omega} \overline{V_n^{f(n),i}}\right) = \sigma^{-1}(\sigma\left(\prod_{n \in \omega} \overline{V_n^{f(n),i}}\right))$, então A_f é fechado.

Por outro lado,

$$A_f = \bigcap_{i \in \omega} E\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{f(n),i}\right) = \bigcap_{i \in \omega} \sigma^{-1}(\sigma\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{f(n),i}\right)) = \sigma^{-1}\left(\bigcap_{i \in \omega} \sigma\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{f(n),i}\right)\right),$$

logo, A_f é um aberto.

Portanto, para todo $f \in {}^\omega\omega$, A_f é aberto-fechado em $\square_{n \in \omega} X_n$.

Continuando, como $\{F_n^k : k \in \omega\}$ é um recobrimento de X_n , para cada $n \in \omega$, e ainda temos que $F_n^{f(n)} \subseteq V_n^{f(n),i}$, para cada $i \in \omega$, então $\{A_f : f \in {}^\omega\omega\}$ é um recobrimento de $\square_{n \in \omega} X_n$.

Afirmção1 : Para todo $f \in {}^\omega\omega$, A_f é paracompacto.

Para demonstrar isto, fixemos $f \in {}^\omega\omega$ e tomemos o conjunto

$$G = \{g \in {}^\omega\omega : |\{n \in \omega : g(n) \neq f(n)\}| < \aleph_0\}.$$

Então $|G| = \aleph_0$.

Por hipótese, para cada $g \in G$, $\prod_{n \in \omega} \overline{U_n^{g(n)}}$ é paracompacto.

Além disso, $A_f = \bigcup \left\{ \overline{\prod_{n \in \omega} U_n^{g(n)}} : g \in G \right\}$. Portanto, aplicando o lema (3.2.3), temos que A_f é paracompacto.

Afirmção2 : $\mathcal{A} = \{A_f : f \in {}^\omega\omega\}$ é c-p.

Vamos mostrar que todo ponto $p \in \square_{n \in \omega} X_n$ possui uma vizinhança W que é disjunta de todos os A_f 's que não contém p .

Como

$$V_n^{k,0} \supseteq \overline{V_n^{k,1}} \supseteq \dots \supseteq V_n^{k,i} \supseteq \overline{V_n^{k,i+1}} \supseteq V_n^{k,i+1} \supseteq \dots,$$

temos que para cada $k \in \omega$, existe $i_k = \min\{i \in \omega : p(n) \notin \overline{V_n^{k,i}}\}$.

Façamos $K_n = \{\overline{V_n^{k,i_k}} : k \in \omega \wedge p(n) \notin \overline{V_n^{k,i_k}}\}$ e tomemos

$$W_n = X_n \setminus \bigcup K_n.$$

Observemos que K_n é localmente finito, pois para todo $k \in \omega$, $\overline{V_n^{k,i_k}} \subseteq U_n^k$ e $\mathcal{U}'_n = \{U_n^k : k \in \omega\}$ é localmente finito.

Logo, temos que

$$W_n = X_n \setminus \overline{\bigcup K_n},$$

e assim para todo $n \in \omega$, W_n é aberto e contém p .

Agora, suponhamos que $p \notin A_f$, para algum $f \in {}^\omega\omega$. Então existe $i \in \omega$ tal que $p \notin E(\prod_{n \in \omega} \overline{V_n^{f(n),i}})$ e isto ocorre se, e somente se, $|\{n \in \omega : W_n \cap \overline{V_n^{f(n),i}}\}| = \aleph_0$.

Logo, $|\{n \in \omega : W_n \cap \overline{V_n^{f(n),i}} = \phi\}| = \aleph_0$, e assim temos que

$$W \cap A_f = \phi.$$

A seguir, para finalizar a demonstração do teorema, se $\langle f_\alpha : \alpha \in c \rangle$ é uma enumeração de ${}^\omega\omega$, seja

$$B_\alpha = A_{f_\alpha} \setminus (\bigcup \{A_{f_\beta} : \beta \in \alpha\}),$$

para $\alpha \in c$.

Então

$$\square_{n \in \omega} X_n = \bigcup \{B_\alpha : \alpha \in c\},$$

e $\{B_\alpha : \alpha \in c\}$ é união disjunta de subespaços paracompactos abertos-fechados.

Portanto, $\square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto. ■

Agora, precisamos de um resultado sobre espaços localmente compactos:

Teorema 3.2.2 ([Engelking, 1989])

Um espaço paracompacto localmente compacto pode ser representado como soma topológica de subespaços σ -compactos.

Teorema 3.2.3 (*Lema Nabla*)

Suponha que para cada $n \in \omega$, X_n é paracompacto localmente compacto.
Então, são equivalentes:

- (i) O produto $\square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto;
- (ii) O quociente $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto;
- (iii) O quociente $\nabla_{n \in \omega} \overline{U_n}$ é paracompacto sempre que

$$(\forall n \in \omega)(U_n \text{ é um aberto de } X_n \text{ com } \overline{U_n} \text{ compacto});$$

- (iv) O produto $\square_{n \in \omega} \overline{U_n}$ é paracompacto sempre que

$$(\forall n \in \omega)(U_n \text{ é aberto de } X_n \text{ com } \overline{U_n} \text{ compacto}).$$

Demonstração:

$$(i) \Longleftrightarrow (ii)$$

Pelo Teorema (3.2.2), cada espaço X_n é soma topológica de subespaços σ -compactos, localmente compactos.

Aplicando o Teorema (3.2.1), basta verificar se para toda seqüência $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ satisfazendo

- (1) $U_n \overset{\text{ab.}}{\subseteq} X_n$;
- (2) $\overline{U_n}$ é compacto;

o produto $\square_{n \in \omega} \overline{U_n}$ é paracompacto.

Finalizamos, observando que neste caso, a projeção σ é fechada. Portanto, podemos usar o lema (3.2.1).

$$(ii) \implies (iii)$$

O subespaço $\nabla_{n \in \omega} \overline{U_n}$ é fechado em $\nabla_{n \in \omega} X_n$.

$$(iii) \Longleftrightarrow (iv)$$

Como $(\forall n \in \omega)(\overline{U_n} \text{ é compacto})$, então a projeção σ é fechada. Assim, basta usar o lema (3.2.1).

$$(iv) \implies (i)$$

É só aplicar o Teorema (3.2.1). ■

3.3 Resultados consistentes com ZFC

Nesta seção, estudaremos alguns teoremas consistentes com ZFC sobre a paracompacidade de produtos-box.

Assumindo CH, veremos que o produto-nabla é um P_c -espaço, e assim, quando os fatores são compactos, concluiremos que o produto-box é paracompacto.

Em seguida, quando temos fatores com caráter enumerável, ou fatores metrizáveis, veremos que algumas propriedades do produto-nabla estão intimamente relacionadas aos cardinais de alguns subconjuntos de ${}^{\omega}\omega$. Com isto, teremos a paracompacidade do produto-box de espaços compactos, assumindo condições mais fracas que CH.

3.3.1 Um pouco de Topologia

Definição 3.3.1 *Seja λ um cardinal infinito.*

Um espaço topológico X é denominado P_λ -espaço se

$$(\forall \mathcal{C} \in [\tau(X)]^{<\lambda})(\bigcap \mathcal{C} \in \tau(X)).$$

Assim, um espaço X é $P_{\lambda+}$ -espaço se todo G_λ é aberto.

Proposição 3.3.1 *Seja $\lambda > \aleph_0$, cardinal e X um espaço topológico regular.*

Se X é um P_λ -espaço, então existe uma base $\mathcal{B}$ satisfazendo:

$$(\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{<\lambda})[\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}]. \quad (\dagger)$$

Demonstração:

Como o espaço X é zero-dimensional, existe uma base de abertos- fechados. Tomemos $\mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{<\lambda}$. Podemos supor que $\mathcal{A} = \{U_\alpha : \alpha \in \nu\}$, onde $\nu < \lambda$.

Então

$$X \setminus (\bigcup \mathcal{A}) = \bigcap \{X \setminus U_\alpha : \alpha \in \nu\}.$$

Como $\nu < \lambda$ e X é um P_λ -espaço, temos que $X \setminus (\bigcup \mathcal{A})$ é aberto. ■

Proposição 3.3.2 *Tomemos um cardinal $\lambda > \aleph_0$ e um espaço regular X .*

Se existe uma base $\mathcal{B}$ satisfazendo a condição $(\dagger)$ e $L(X) = \lambda$, então X é ultraparacompacto.

Demonstração:

Dado um recobrimento aberto $\mathcal{U}$ do espaço X , existe um refinamento de $\mathcal{U}$ por conjuntos de $\mathcal{B}$, $\mathcal{U}' = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$, pois $L(X) = \lambda$.

Para todo $\beta \in \lambda$, tomemos

$$W_\beta = U_\beta \setminus \left(\bigcup \{U_\alpha : \alpha \in \beta\} \right).$$

Então $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in \lambda\}$ é um refinamento aberto disjunto de $\mathcal{U}$. ■

Observação: Pela notação da definição (3.3.1), um P -espaço é um P_{ω_1} -espaço.

3.3.2 Assumindo CH

Suponhamos que $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ é uma seqüência de **espaços topológicos regulares**. Devido ao corolário (3.1.1), sabemos que $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é um P_{ω_1} -espaço. Logo, existe uma base de $\nabla_{n \in \omega} X_n$ satisfazendo ($\dagger$) para $\lambda = \omega_1$.

Portanto, assumindo **CH**, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.3 (CH)

Se $L(\nabla_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$ então o quociente $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é ultraparacompacto.

Agora, suponhamos que temos uma seqüência de espaços compactos. Usando a proposição acima e o Lema Nabla, concluímos que:

Teorema 3.3.1 (Kunen, 1978)(CH)

O produto $\square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto $\iff L(\square_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$.

Assim, como consequência deste teorema, temos:

Teorema 3.3.2 (Kunen, 1978)(CH)

Se $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ é uma seqüência de espaços paracompactos localmente compactos e $(\forall n \in \omega)(w(X_n) \leq \mathfrak{c})$, então o produto $\square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto.

A condição $w(X_n) \leq \mathfrak{c}$, $n \in \omega$, foi usada acima para garantir que $L(\square_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$. Com o resultado abaixo, vemos que esta condição não é necessária.

Teorema 3.3.3 (CH)

Se $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ é uma seqüência de espaços paracompactos localmente compactos, $\mathfrak{c}$ -scattered, então o produto $\square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto.

Teorema 3.3.4 (*van Douwen, 1980*)

As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) (CH);
- (b) Se cada espaço topológico X_n , $n \in \omega$, é compacto com $w(X) \leq \mathfrak{c}$, então o produto $\prod_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto;
- (c) $\square^\omega(T^{\mathfrak{c}}2)$ é paracompacto;
- (d) $\square^\omega(T^{\mathfrak{c}}2)$ é normal;
- (e) $\square^\omega(T^{\mathfrak{c}}2)$ é paranormal.

Demonstração:

(a) $\implies$ (b) Veja Teorema(3.3.2).

(b) $\implies$ (c) Como $w(T^{\mathfrak{c}}2) = \mathfrak{c}$, temos (c).

(c) $\implies$ (d) óbvio.

(d) $\implies$ (e) óbvio.

(e) $\implies$ (a) Se $\mathfrak{c} \geq \omega_2$, então existe um subespaço fechado de $\square^\omega(T^{\mathfrak{c}}2)$ que é homeomorfo a $\square^\omega(T^{\omega_2}2)$.

Como $\square^\omega(T^{\mathfrak{c}}2)$ é paranormal, concluímos que $\mathfrak{c} < \omega_2$.

Portanto, $\mathfrak{c} = \omega_1$. ■

Como CH é independente de ZFC, o resultado acima mostra que a normalidade do produto-box de espaços compactos também independe de ZFC.

3.3.3 Fatores com caráter enumerável

Alguns subconjuntos de $\langle {}^\omega\omega, \leq^* \rangle$

Definição 3.3.2 Dados $f, g \in {}^\omega\omega$, definimos

$$\begin{aligned} f \leq^* g & \text{ se } |\{n \in \omega : f(n) \not\leq g(n)\}| < \aleph_0; \\ f <^* g & \text{ se } f \leq^* g \text{ e } g \not\leq^* f. \end{aligned}$$

Com esta relação, $\langle {}^\omega\omega, \leq^* \rangle$ é uma ordem parcial.

Definição 3.3.3 Um conjunto $F \subseteq {}^\omega\omega$ é não limitado se

$$(\forall g \in {}^\omega\omega)(\exists f \in F)(f \not\leq^* g).$$

Definição 3.3.4 Seja $D \subseteq {}^\omega\omega$, não limitado.

Então D é dominante se

$$(\forall g \in {}^\omega\omega)(\exists f \in D)(g \leq^* f).$$

A seguir definiremos dois cardinais associados aos suconjuntos de ${}^\omega\omega$ definidos acima:

Definição 3.3.5

$$\mathfrak{b} = \min\{|F| : F \text{ é não limitado}\}$$

Definição 3.3.6

$$\mathfrak{d} = \min\{|D| : D \text{ é dominante}\}$$

Definição 3.3.7 Seja λ um cardinal infinito.

Uma λ -escala $S \subseteq {}^\omega\omega$ é uma família dominante, bem-ordenada por $\leq^*$ e com $\text{o.t.}(S) = \lambda$.

Em ZFC, temos o seguinte resultado (veja [van Douwen, 1984]):

Proposição 3.3.4 São verdadeiros:

- (1) $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$;
- (2) $\mathfrak{b}$ é cardinal regular;
- (3) $\mathfrak{b} \leq \text{cf}(\mathfrak{d})$;
- (4) $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} \iff$ existe uma escala S ;
- (5) $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c} \iff \mathfrak{c}$ é regular e existe uma $\mathfrak{c}$ -escala;
- (6) Não existem ω -escalas.

Por outro lado, é consistente com **ZFC** (veja [van Douwen, 1984] ou [Hechler, 1974a]) assumir que :

- (i) $\mathfrak{d} > \aleph_1 = cf(\mathfrak{d})$;
- (ii) $\mathfrak{d} < \mathfrak{c}$;
- (iii) $\mathfrak{b} < \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$;
- (iv) $\aleph_1 < \mathfrak{b} < \mathfrak{d} < \mathfrak{c}$.

Nos resultados que seguem, $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ será uma sequência de **espaços topológicos não discretos**, onde $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Dados um ponto $p \in \nabla_{n \in \omega} X_n$ e $x \in \sigma^{-1}(p)$, fixemos a sequência $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$, tal que para cada $n \in \omega$, $\mathcal{V}_n = \langle V_n^k : k \in \omega \rangle$ seja um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x , onde $V_n^{k+1} \subseteq V_n^k$.

Assim, dada $f \in {}^\omega \omega$, a $Im(f)$ determina uma vizinhança aberta (em $\nabla_{n \in \omega} X_n$) do ponto p : $\sigma(\prod_{n \in \omega} V_n^{f(n)})$.

Deste modo, poderemos usar a estrutura de $\langle {}^\omega \omega, \leq^* \rangle$ para estudar a topologia de $\nabla_{n \in \omega} X_n$.

Observamos que dados $f, g \in {}^\omega \omega$,

$$f \leq^* g \iff \sigma(\prod_{n \in \omega} V_n^{g(n)}) \subseteq \sigma(\prod_{n \in \omega} V_n^{f(n)}).$$

Proposição 3.3.5 ($\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$)

Seja S uma escala e $\lambda = \text{o.t.}(S)$. Então $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é um $P_{cf(\lambda)}$ -espaço.

Demonstração:

Fixemos um $p \in \nabla_{n \in \omega} X_n$ e tomemos $\langle U_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ uma família de vizinhanças abertas de p , onde $\nu < cf(\lambda)$.

Precisamos mostrar que $\bigcap \{U_\alpha : \alpha \in \nu\}$ é uma vizinhança do ponto p .

Para cada $\alpha \in \nu$, seja $g_\alpha \in {}^\omega \omega$ satisfazendo

$$\sigma(\prod_{n \in \omega} V_n^{g_\alpha(n)}) \subseteq U_\alpha.$$

Logo, como existe uma λ -escala S e $\nu < cf(\lambda)$, temos que existe $g \in S$ tal que

$$(\forall \alpha \in \nu)(g_\alpha \leq^* g)$$

Com isto, temos que

$$p \in \sigma(\prod_{n \in \omega} V_n^{g(n)}) \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in \nu\}.$$

E assim, concluímos esta demonstração. ■

Corolário 3.3.1 (*Kunen, 1978*)

$(\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}) \implies \nabla_{n \in \omega} X_n$ é um $P_{\mathfrak{c}}$ -espaço.

A primeira das equivalências entre uma propriedade topológica do produto-nabla e os cardinais $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ é dada pelo resultado abaixo:

Teorema 3.3.5 (*van Douwen, 1980*)

$\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \mathfrak{d} \iff \nabla_{n \in \omega} X_n$ é um $P_{\mathfrak{c}}$ -espaço.

Demonstração:

$(\implies)$ Ver corolário anterior.

$(\impliedby)$

Para todo $n \in \omega$, suponha que $x_n \in X_n$ não seja isolado e fixemos um sistema fundamental de vizinhanças abertas $\langle V_n^k : k \in \omega \rangle$, onde $V_n^{k+1} \subset V_n^k$ ($\subset$ denota a inclusão própria).

Então,

$$\sigma\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{g(n)}\right) \subset \sigma\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{f(n)}\right) \iff f <^* g.$$

Como $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é um $P_{\mathfrak{c}}$ -espaço, podemos construir por indução uma $\mathfrak{c}$ -escala, e além disso, como temos $|\omega| = \mathfrak{c}$, então $\mathfrak{c}$ é um cardinal regular. ■

Aplicando a Proposição (3.3.2) e o corolário (3.3.1), vemos que:

Teorema 3.3.6 (*Kunen, 1978*) $(\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c})$

Se $L(\nabla_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$, então o quociente $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é ultraparacompacto.

Quando temos fatores compactos, concluímos que:

Teorema 3.3.7 $(\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c})$

$\square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto $\iff L(\square_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$.

Prosseguindo, consideremos outro subconjunto de $\langle \omega_\omega, \leq^* \rangle$:

Definição 3.3.8 Sejam $F \subseteq {}^\omega\omega$ e $\mathfrak{A} \subseteq [\omega]^\omega$.

Dizemos que F é uma família cofinal sobre $\mathfrak{A}$ se

$$(\forall g \in {}^\omega\omega)(\exists A \in \mathfrak{A})(\exists f \in F)[|\{n \in A : f(n) \leq g(n)\}| < \aleph_0].$$

Proposição 3.3.6 (Lema de Dominação de Roitman)

$$\mathfrak{d} = \min\{|F| + |\mathfrak{A}| : F \subseteq {}^\omega\omega \text{ e } \mathfrak{A} \subseteq [\omega]^\omega \text{ e } F \text{ é cofinal sobre } \mathfrak{A}\}$$

Deste ponto em diante, além das hipóteses assumidas anteriormente, os fatores serão espaços regulares.

Lema 3.3.1 (Roitman, 1979)

O espaço $\nabla_{n \in \omega} X_n$ possui uma base $\mathcal{B}$ satisfazendo:

$$(\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{<\mathfrak{d}})[\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}]. (\dagger\dagger)$$

Demonstração:

Mostraremos que o conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{k \in \omega} \sigma\left(\prod_{n \in \omega} U_{n,k}\right) : (U_{n,k} \in \tau(X_n)) \text{ e } \overline{U_{n,k+1}} \subseteq U_{n,k} \right\}, \text{ satisfaz } (\dagger\dagger).$$

Tomemos $\lambda < \mathfrak{d}$. Precisamos mostrar que o conjunto

$$K = \bigcup_{\alpha < \lambda} \left[\bigcap_{k \in \omega} \left(\sigma\left(\prod_{n \in \omega} U_{n,k}^\alpha\right) \right) \right]$$

é fechado, onde $(\forall \alpha < \lambda)[\bigcap_{k \in \omega} \sigma(\prod_{n \in \omega} U_{n,k}^\alpha) \in \mathcal{B}]$.

Sejam $p \in (\nabla_{n \in \omega} X_n) \setminus K$ e $x \in \sigma^{-1}(p)$. Observamos que para cada $n \in \omega$, fixamos um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x_n , $\langle V_n^k : k \in \omega \rangle$, satisfazendo $V_n^{k+1} \subseteq V_n^k$.

Agora, $p \notin K$ implica que $(\forall \alpha \in \lambda)(p \notin \bigcap_{k \in \omega} \sigma(\prod_{n \in \omega} U_{n,k}^\alpha))$.

Portanto, $(\forall \alpha \in \lambda)(\exists k_\alpha \in \omega)[p \notin \sigma(\prod_{n \in \omega} \overline{U_{n,k_\alpha}^\alpha})]$.

Tomando $A_\alpha = \{n \in \omega : x_n \notin \overline{U_{n,k_\alpha}^\alpha}\}$, onde $\alpha < \lambda$, temos que $(\forall \alpha < \lambda)[|A_\alpha| = \aleph_0]$.

Agora, para cada $\alpha < \lambda$, existe $f_\alpha \in {}^\omega\omega$, tal que

$$n \in A_\alpha \implies V_n^{f_\alpha(n)} \cap U_n^{k_\alpha} = \emptyset.$$

Sejam $F = \{f_\alpha : \alpha < \lambda\}$ e $\mathfrak{A} = \{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Como $\lambda < \mathfrak{d}$, então F não é cofinal sobre $\mathfrak{A}$, i.e.,

$$(\exists g \in {}^\omega \omega)(\forall \alpha < \lambda)[|\{n \in A_\alpha : f_\alpha(n) \leq g(n)\}| = \aleph_0].$$

Logo, para cada $\alpha < \lambda$, a condição $V_n^{g(n)} \cap U_{n,k_\alpha}^\alpha = \emptyset$ ocorre para um número infinito de n 's.

Portanto, para todo $\alpha \in \lambda$, temos que

$$\sigma\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{g(n)}\right) \cap \left(\bigcap_{k \in \omega} \sigma\left(\prod_{n \in \omega} U_{n,k_\alpha}^\alpha\right)\right) = \emptyset.$$

Assim, $p \notin \overline{K}$. ■

Teorema 3.3.8 (*van Douwen, 1980*)

Seja $\lambda < \mathfrak{c}$, cardinal.

Então são equivalentes:

- (a) $\mathfrak{d} \geq \lambda$;
- (b) $\nabla_{n \in \omega} X_n$ possui uma base $\mathcal{B}$ satisfazendo $(\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{<\lambda})[\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}]$;
- (c) $(\forall \mathcal{A} \in [\nabla_{n \in \omega} X_n]^{<\lambda})(\mathcal{A} \text{ é fechado})$;
- (d) $\chi(\nabla_{n \in \omega} X_n) \geq \lambda$.

Demonstração:

(a) $\implies$ (b) Lema (3.3.1)

(b) $\implies$ (c)

Dados $\mathcal{A} \in [\nabla_{n \in \omega} X_n]^{<\lambda}$ e $p \in (\nabla_{n \in \omega} X_n) \setminus \mathcal{A}$, existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|;$$

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A} \subseteq (\nabla_{n \in \omega} X_n) \setminus \{p\}.$$

Fixemos $x \in \nabla_{n \in \omega} X_n$, onde x_n não é isolado, e $p = \sigma(x)$.

(c) $\implies$ (d)

Suponhamos que $\chi(\nabla_{n \in \omega} X_n) = \nu$.

Fixemos um sistema fundamental de vizinhanças abertas (em $\nabla_{n \in \omega} X_n$) do ponto p ,

$$\langle V_\alpha : \alpha \in \nu \rangle.$$

Tomemos uma seqüência $\mathcal{A} = \langle p_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$, onde $p_\alpha \in (V_\alpha) \setminus \{p\}$ e $\alpha \neq \beta \implies p_\alpha \neq p_\beta$.

Como $p \in \overline{A} \setminus A$ e por hipótese temos (c), então $|A| \geq \lambda$.

Portanto, temos que $\chi(\nabla_{n \in \omega} X_n) \geq \lambda$.

(d) $\implies$ (a)

Seja $D \subseteq {}^\omega \omega$ dominante.

Para todo $n \in \omega$, tomemos $\langle V_n^k : k \in \omega \rangle$, sistema fundamental de vizinhanças abertas de x_n em X_n .

Dado U aberto de $\nabla_{n \in \omega} X_n$ contendo p , existe uma seqüência $\langle k(n) : n \in \omega \rangle$ tal que

$$p \in \sigma\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{k(n)}\right) \subseteq U.$$

Como D é dominante, existe $f \in D$ tal que $k \leq^* f$.

Logo, $p \in \sigma\left(\prod_{n \in \omega} V_n^{f(n)}\right) \subseteq U$.

Portanto, $\chi(\nabla_{n \in \omega} X_n) \leq |D|$. ■

Como consequência do teorema acima, temos outra equivalência entre uma propriedade topológica do produto-nabla e os cardinais de $\langle {}^\omega \omega, \leq^* \rangle$:

Teorema 3.3.9 (*Roitman*)

$(\mathfrak{d} = \mathfrak{c}) \iff$ existe base $\mathcal{B}$ de $\nabla_{n \in \omega} X_n$ satisfazendo $(\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{<\mathfrak{c}} [\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}])$

Usando a proposição (3.3.2) e o Teorema anterior, obtemos:

Teorema 3.3.10 (*Roitman, 1979*) $(\mathfrak{d} = \mathfrak{c})$

Se $L(\nabla_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$, então o quociente $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é ultraparacompacto.

Quando os fatores são compactos, então

Teorema 3.3.11 $(\mathfrak{d} = \mathfrak{c})$

$\square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto $\iff L(\square_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$.

Finalizando, temos:

Teorema 3.3.12 (*Kunen, 1978*)(*Roitman, 1979*)

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços paracompactos, localmente compactos, onde $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Então

(a) $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c} \implies \square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto;

(b) $\mathfrak{d} = \mathfrak{c} \implies \square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto.

Demonstração:

Usando o Lema-Nabla, podemos assumir que os fatores são compactos.

Como $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$, pelo Teorema de Arkhangel'skii concluímos que $(\forall n \in \omega)(|X_n| = \aleph_0)$. Com isto, $L(\square_{n \in \omega} X_n) = \mathfrak{c}$. ■

3.3.4 Fatores metrizáveis

Notação: Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços metrizáveis.

Para cada $n \in \omega$, fixemos uma métrica ρ_n compatível com o espaço X_n .

Façamos $M = \bigoplus_{n \in \omega} X_n$.

Defina ρ da seguinte maneira:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_n(x, y) & x, y \in X_n \\ 1 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim, ρ é uma métrica compatível com M . Desta maneira, em lugar da seqüência $\langle X_n : n \in \omega \rangle$, com as métricas $\langle \rho_n : n \in \omega \rangle$, estudaremos o espaço (M, ρ) .

Definição 3.3.9 *Seja ν um cardinal infinito.*

Um espaço topológico X é ν -metrizável se existe uma seqüência $\langle \mathcal{U}_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ satisfazendo:

- (1) *Cada $\mathcal{U}_\alpha$ é um recobrimento aberto disjunto de X ;*
- (2) *$(\forall \alpha, \beta \in \nu)(\alpha < \beta \implies \mathcal{U}_\beta$ refina $\mathcal{U}_\alpha)$;*
- (3) *$\bigcup \{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in \nu\}$ é uma base de X .*

Para o que faremos a seguir, usaremos a seguinte caracterização de ν -metrizabilidade:

Definição 3.3.10 *Um espaço topológico X é ν -metrizável se existe uma função*

$U : X \times \nu \longrightarrow \tau(X)$ tal que

- (1') *$\{U(x, \alpha) : \alpha \in \nu\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x em X ;*
- (2') *Dados $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \nu$, se $\alpha \leq \beta$ então*
 - (a) *se $y \in U(x, \alpha)$ então $U(y, \beta) \subseteq U(x, \alpha)$;*
 - (b) *se $y \notin U(x, \alpha)$ então $U(y, \beta) \cap U(x, \alpha) = \emptyset$.*

Teorema 3.3.13 *Sejam ν um cardinal infinito e X um espaço regular. Se X é ν -metrizável, então X é ultraparacompacto.*

Demonstração:

Seja U uma testemunha (*witness*) da ν -metrizabilidade do espaço X .

Seja $\mathcal{C}$ um recobrimento aberto de X .

Definimos $\mu : X \rightarrow \nu$ como

$$\mu(x) = \min\{\alpha \in \nu : (\exists V \in \mathcal{C})(U(x, \alpha) \subseteq V)\}.$$

Assim, teremos que

(i) $\mathcal{U} = \{U(x, \mu(x)) : x \in X\}$ é um refinamento aberto de $\mathcal{C}$;

(ii) $\mathcal{U}$ é disjunto:

De fato, sejam $x, y \in X$ com $\mu(x) \leq \mu(y)$.

Então, se $y \notin U(x, \mu(x))$, ocorre que

$$U(y, \mu(y)) \cap U(x, \mu(x)) = \emptyset,$$

devido à condição (2'b).

Assim, suponhamos que $y \in U(x, \mu(x))$.

Portanto, por (2'a),

$$U(y, \mu(y)) \subseteq U(x, \mu(x)).$$

Mas isto implica que $\mu(y) \leq \mu(x)$, por causa da minimalidade de $\mu(y)$.

Logo, $U(x, \mu(x)) = U(y, \mu(y))$. ■

Generalizando a técnica utilizada por Williams em [Williams, 1976], van Douwen obteve a seguinte caracterização de $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$:

Teorema 3.3.14 (*van Douwen, 1980*)

Seja M um espaço metrizável, não discreto.

Então $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} \iff \nabla^\omega M$ é $\mathfrak{d}$ -metrizável.

Demonstração:

($\Leftarrow$)

Seja $f \in {}^\omega \omega$ constante com $Im(f) = x$, onde x não é isolado em M .

Fixemos para todo $n \in \omega$, um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x em M ,

$\langle R_n : n \in \omega \rangle$ de x em M , satisfazendo $(\forall n \in \omega)(R_{n+1} \subset R_n)$ ($\subset$ denota a inclusão própria).

Dado $g \in {}^\omega\omega$, seja $V(g) = \prod_{n \in \omega} R_{g(n)}$.

Como ${}^\omega\omega$ é dominante, temos que

$\{\sigma(V(g)) : g \in {}^\omega\omega\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de $\sigma(f)$.

Seja $\lambda : cf(\mathfrak{d}) \longrightarrow \mathfrak{d}$, estritamente crescente com $Im(\lambda)$ cofinal em $\mathfrak{d}$.

Usando $\{U(\sigma(f), \alpha) : \alpha \in \mathfrak{d}\}$, construiremos recursivamente uma função

$$S : cf(\mathfrak{d}) \longrightarrow {}^\omega\omega,$$

satisfazendo

(i) $\langle \sigma(V(S_\alpha)) : \alpha \in cf(\mathfrak{d}) \rangle$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de $\sigma(f)$;

(ii) $\alpha < \beta < cf(\mathfrak{d}) \implies \sigma(V(S_\beta)) \subset \sigma(V(S_\alpha))$.

Seja $\beta < cf(\mathfrak{d})$.

Suponhamos que $\forall \alpha < \beta$, já definimos S_α e

$$\gamma < \alpha < \beta \implies V(S_\alpha) \subset V(S_\gamma).$$

Como $\{U(\sigma(f), \alpha) : \alpha \in \mathfrak{d}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de $\sigma(f)$ e $\beta < cf(\mathfrak{d})$, então existe $\xi \geq \lambda_\beta$ tal que

$$(\forall \alpha < \beta)[U(\sigma(f), \xi) \subseteq \sigma(V(S_\beta))].$$

Seja $S_\beta : \omega \longrightarrow \omega$ tal que

$$\sigma\left(\prod_{n \in \omega} R_{S_\beta(n)}\right) \subset U(\sigma(f), \xi),$$

e tomemos $V(S_\beta) = \prod_{n \in \omega} R_{S_\beta(n)}$.

Assim, $Im(S)$ é uma escala, e portanto temos $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$.

($\implies$)

Dados $k \in \omega$ e $x \in M$, seja $B_k(x)$ a bola aberta de raio 2^{-k} em torno de x , com relação à métrica ρ .

Observamos que:

(i) $\langle B_k(x) : k \in \omega \rangle$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de $x \in M$;

(ii) Dados $x, y \in M$ e $k, l \in \omega$, se $k < l$ então

$$(a) y \in B_{k+1}(x) \implies B_{l+1}(y) \subseteq B_k(x);$$

$$(b) y \notin B_k(x) \implies B_{l+1}(y) \cap B_{k+1}(x) = \emptyset.$$

Denotaremos os elementos de $\square^\omega M$ como funções de ${}^\omega M$.

A seguir, para todo $p \in \nabla^\omega M$ e para todo $f \in {}^\omega \omega$, definimos

$$V(p, f) = \bigcap_{k \in \omega} \sigma \left(\prod_{n \in \omega} B_{f(n)+k}(h(n)) \right),$$

onde $h \in \sigma^{-1}(p)$.

Como $\nabla^\omega M$ é um P -espaço (e pela definição de $V(p, f)$), temos que $\{V(p, f) : f \in {}^\omega \omega\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de p em $\nabla^\omega M$.

Afirmção: Para quaisquer $p, p' \in \nabla^\omega M$ e $f, g \in {}^\omega \omega$ onde $f \leq^* g$, temos:

$$(1) p' \in V(p, f) \implies V(p', g) \subseteq V(p, f);$$

$$(2) p' \notin V(p, f) \implies V(p', g) \cap V(p, f) = \emptyset.$$

De fato, sejam p, p' e f, g como nas hipóteses acima.

Caso(a): Suponha que $p' \in V(p, f)$.

Precisamos mostrar que para todo $k \in \omega$, temos:

$$(3) \sigma \left(\prod_{n \in \omega} B_{g(n)+k+1}(p') \right) \subseteq \sigma \left(\prod_{n \in \omega} B_{f(n)+k}(p) \right).$$

Fixemos $k \in \omega$. Existe $m' \geq m$ tal que $\forall n \geq m'$,

$$p' \in B_{f(n)+k+1}(p).$$

Assim, de (ii) segue que $\forall n \geq m'$,

$$B_{g(n)+k+1}(p') \subseteq B_{f(n)+k}(p),$$

e esta inclusão implica (3).

Caso(b): Suponha que $p' \notin V(p, f)$.

Neste caso, temos que $(\exists k \in \omega)(\exists N \in [\omega]^\omega)$ tal que

$$(\forall n \in N)(h'(n) \notin B_{f(n)+k}(h(n))),$$

onde $h \in \sigma^{-1}(p)$ e $h' \in \sigma^{-1}(p')$.

Então, por (ii), concluímos que para todo $n \in \omega$ com $n \geq m$, temos

$$B_{g(n)+k+1}(h'(n)) \cap B_{f(n)+k+1}(h(n)) = \emptyset.$$

Logo, $V(p', g) \cap V(p, f) = \emptyset$.

Para terminar esta demonstração, seja $\langle f_\alpha : \alpha \in \mathfrak{d} \rangle$ uma $\mathfrak{d}$ -escala.

Definindo $U : (\nabla^\omega M) \times \mathfrak{d} \longrightarrow \tau(\nabla^\omega M)$ como

$$U(p, \alpha) = V(p, f_\alpha),$$

temos que U é testemunha da $\mathfrak{d}$ -metrizabilidade de $\nabla^\omega M$. ■

Corolário 3.3.2 ($\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$)

Se M é um espaço metrizável, então $\nabla^\omega M$ é ultraparacompacto.

Assim, usando o Lema-Nabla, temos:

Teorema 3.3.15 (van Douwen, 1980)

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ é uma seqüência de espaços metrizáveis, localmente compactos. Então $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} \implies \square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto.

Como corolário dos resultados de Roitman e van Douwen, temos:

Teorema 3.3.16 (Roitman, 1979)

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços metrizáveis, localmente compactos. Então $\mathfrak{c} \leq \aleph_2 \implies \square_{n \in \omega} X_n$ é paracompacto.

Demonstração:

Basta considerar o caso $\mathfrak{c} = \aleph_2$.

Se $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ não ocorre, então existe uma família dominante de cardinalidade $\aleph_1$. Assim, por [Hechler, 1974], existe uma ω_1 -escala. Com isto temos $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. ■

Observação: A ordem parcial $\langle {}^\omega \omega, \leq^* \rangle$ e os cardinais associados a alguns de seus subconjuntos são muito importantes em **Set-Theoretic Topology**.

Stevó Todorcevic, em seu livro “Partition Problems in Topology, Contemporary Mathematics, vol.84, Amer.Math.Soc., 1989”, utiliza $\langle {}^\omega \omega, \leq^* \rangle$ para estudar diversos problemas, em especial o Problema dos espaços S e L.

Capítulo 4

Produtos-Box de espaços σ -compactos

Como vimos no capítulo anterior, a compacidade local dos fatores é essencial para a projeção σ ser fechada, e assim podermos utilizar o lema de preservação de paracompacidade. Portanto, como $\mathbb{Q}$ não é localmente compacto, a técnica de **Rudin-Kunen** não pode ser usada neste caso.

L.B. Lawrence (1989) demonstrou que a paracompacidade de $\square^\omega \mathbb{Q}$, logo de espaços metrizáveis enumeráveis, é consistente com **ZFC**. Ele desenvolveu uma técnica na qual se trabalha dentro de $\square^\omega \mathbb{Q}$, com isto, não é necessário usar o espaço-quociente $\nabla^\omega \mathbb{Q}$.

L. Wingers demonstrou que é consistente com **ZFC** que o produto enumerável de espaços σ -compactos, zero-dimensionais seja paracompacto, generalizando parcialmente, os resultados de Lawrence.

4.1 Dissecando o produto-box

Os produtos-nabla são espaços com uma estrutura topológica peculiar, como pode ser visto pelas seguintes propriedades:

Produtos-nabla enumeráveis com fatores regulares são P-espaços e também são zero-dimensionais. Assim, ∇ é ω_1 -CWH.

Quando temos fatores regulares com carácter enumerável, existe uma base $\mathcal{B}$ de abertos-fechados satisfazendo a condição abaixo,

$$(\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{<\omega})(\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}).$$

Logo, ∇ é $\mathfrak{d}$ -CWH.

Contudo, se a projeção não for fechada, não há como concluir se estas mesmas propriedades são verdadeiras para os produtos-box.

Nesta seção, os fatores X_n em consideração, serão sempre **espaços topológicos regulares, não discretos**.

Obteremos alguns resultados sobre produtos-box enumeráveis, cujas demonstrações não necessitam do produto-nabla e nem das técnicas desenvolvidas no capítulo 3.

Em parte, os resultados obtidos aqui, são “versões” de resultados anteriores, mas como não temos mais fatores localmente compactos, e assim a projeção σ não é fechada, estes resultados são mais gerais.

Notação : Seja $\mathcal{C} = \{V_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ uma coleção de retângulos em um produto $\prod_{n \in \omega} X_n$. Dado $\alpha \in \Gamma$, denotaremos os fatores de V_α por V_n^α , para $n \in \omega$. Assim, $V_\alpha = \prod_{n \in \omega} V_n^\alpha$.

Lema 4.1.1 *Fixemos $k \in \omega$.*

Tomemos para cada n , $0 \leq n \leq k-1$, um conjunto compacto $C_n \subseteq X_n$ e para cada $n \geq k$, um ponto $x_n \in X_n$.

$$\text{Seja } A = C_0 \times \cdots \times C_{k-1} \times \prod_{n \geq k} \{x_n\}.$$

Se existe um aberto O contendo o conjunto A , então existe um retângulo aberto $U = \prod_{n \in \omega} U_n$ tal que $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O$.

Demonstração:

Demonstraremos a afirmação por indução sobre k .

Quando $k = 0$, o resultado decorre da regularidade do espaço $\prod_{n \in \omega} X_n$.

Agora, suponha que a afirmação seja verdadeira para $n < k$.

Seja $O \in \tau(\prod_{n \in \omega} X_n)$ tal que $A \subseteq O$.

Dado $y \in C_{k-1}$, ocorre que

$$C_0 \times \cdots \times C_{k-2} \times \{y\} \times \prod_{n \geq k} \{x_n\} \subseteq O,$$

logo, pela hipótese de indução para $k-1$, existe um retângulo aberto

$$U_y = \prod_{n \in \omega} U_n^y,$$

satisfazendo

$$C_0 \times \cdots \times C_{k-2} \times \{y\} \times \prod_{n \geq k} \{x_n\} \subseteq U_y \subseteq \overline{U_y} \subseteq O.$$

O conjunto $\mathcal{U} = \{U_y : y \in C_{k-1}\}$ é um recobrimento aberto do compacto A . Logo, existe um subrecobrimento $\{U_{y_0}, U_{y_1}, \dots, U_{y_m}\}$ de $\mathcal{U}$, cobrindo A .

Tomemos

$$U_n = \begin{cases} \bigcup_{j=0}^m U_{k-1}^{y_j} & n = k-1 \\ \bigcap_{j=0}^m U_n^{y_j} & n \neq k-1 \end{cases}$$

Portanto, $U = \prod_{n \in \omega} U_n$ é um aberto com $A \subseteq U$.

Como $U \subseteq \bigcup_{j=0}^m U_{y_j}$, então

$$\overline{U} \subseteq \overline{\bigcup_{j=0}^m U_{y_j}} = \bigcup_{j=0}^m \overline{U_{y_j}} \subseteq O,$$

o que encerra esta demonstração. ■

Definição 4.1.1 *Sejam A um retângulo em $\square_{n \in \omega} X_n$ e $k \in \omega$.*

Definimos

$$E(A, k) = \{y \in \square_{n \in \omega} X_n : (\forall n \geq k)(y_n \in A_n)\};$$

$$E(A) = \bigcup_{k \in \omega} E(A, k).$$

Quando $A = \{x\}$, onde $x \in \square_{n \in \omega} X_n$, denotaremos $E(A, k)$ por $E(x, k)$ e $E(A)$ por $E(x)$.

Observação: Lembremos que $E(A) = \sigma^{-1}(\sigma(A))$.

Com os conjuntos definidos acima, obtemos a seguinte versão do lema de Roitman:

Proposição 4.1.1 *Seja $\mathcal{F} \in [P(\square_{n \in \omega} X_n)]^\beta$ uma coleção de retângulos fechados.*

Suponha que

$$(1) \beta < \omega_1, \text{ ou}$$

$$(2) \beta < \mathfrak{d} \text{ e } (\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0).$$

Então $\bigcup\{E(F) : F \in \mathcal{F}\}$ é fechada.

Demonstração:

Fixemos $x \notin \bigcup\{E(F) : F \in \mathcal{F}\}$.

(a) Suponha que $\beta < \omega_1$, e assim, neste caso, temos $\mathcal{F} = \{F^j : j \in \omega\}$.

Como $(\forall j \in \omega)(x \notin E(F^j))$, ocorre que o seguinte conjunto

$$S_j = \{n \in \omega : x_n \notin F_n^j\}$$

é infinito. (Lembremos que $\sigma(x) \notin \sigma(F) \iff |\{n \in \omega : x_n \notin F_n\}| = \aleph_0$)

Tomemos $V^j = \prod_{n \in \omega} V_n^j$, onde

$$V_n^j = \begin{cases} X_n \setminus F_n^j & n \in S_j \\ X_n & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então $x \in V^j \stackrel{\text{ab.}}{\subseteq} \square_{n \in \omega} X_n$, $j \in \omega$.

Se $V = \prod_{n \in \omega} (\bigcap_{j \leq n} V_n^j)$, então

$$\begin{aligned} x \in V &\stackrel{\text{ab.}}{\subseteq} \square_{n \in \omega} X_n; \\ (\forall n \in S_j)(n \geq j \implies V_n \cap F_n^j &= \phi). \end{aligned}$$

Portanto, $|\{n \in \omega : V_n \cap F_n^j = \phi\}| = \aleph_0$, e assim $V \cap E(F^j) = \phi$.

Com isto, demonstramos este caso.

(b) Suponha que $\beta < \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Analogamente ao caso anterior, tomemos $\mathcal{F} = \{F^\xi : \xi < \beta\}$ e novamente, para cada $\xi < \beta$, como $x \notin E(F^\xi)$, então

$$S_\xi = \{n \in \omega : x_n \notin F_n^\xi\}, \xi < \beta,$$

é infinito, usando o mesmo argumento.

Seja $V_\xi = \prod_{n \in \omega} V_n^\xi$, onde

$$V_n^\xi = \begin{cases} X_n \setminus F_n^\xi & n \in S_\xi \\ X_n & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então $x \in V_\xi \stackrel{\text{ab.}}{\subseteq} \square_{n \in \omega} X_n$.

Agora, como os fatores têm caráter enumerável, fixemos para todo $n \in \omega$, uma base $\{B_n^j : j \in \omega\}$ para x_n , cujos elementos satisfazem

$$B_n^0 \supseteq B_n^1 \supseteq \dots$$

Prosseguindo, para todo $\xi < \beta$, seja $f_\xi \in {}^\omega \omega$ dado por

$$f_\xi(n) = \min\{j \in \omega : B_n^j \subseteq V_n^\xi\}.$$

Tomando $\mathcal{F} = \{f_\xi : \xi < \beta\}$ e $\mathfrak{A} = \{S_\xi : \xi < \beta\}$, observemos que $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega \omega$, $\mathfrak{A} \subseteq [\omega]^\omega$ e $|\mathcal{F}| + |\mathfrak{A}| < \mathfrak{d}$. Portanto, usando o lema de dominação de Roitman, existe $g \in {}^\omega \omega$ tal que

$$(\forall \xi \in \beta)(|\{n \in S_\xi : f_\xi(n) \leq g(n)\}| = \aleph_0).$$

Se $V = \prod_{n \in \omega} B_n^{g(n)}$, então $x \in V \stackrel{\text{ab.}}{\subseteq} \square_{n \in \omega} X_n$, e

$$(\forall \xi < \beta)(|\{n \in \omega : V_n \subseteq V_n^\xi\}| = \aleph_0).$$

Com isto, temos que

$$(\forall \xi < \beta)(|\{n \in \omega : V_n \cap F_n^\xi = \emptyset\}| = \aleph_0).$$

Portanto, $V \cap E(F^\xi) = \emptyset$, $\xi < \beta$. ■

Definição 4.1.2 *Sejam U e V , retângulos em $\square_{n \in \omega} X_n$.*

Então U e V são fortemente disjuntos se $|\{n \in \omega : U_n \cap V_n = \emptyset\}| = \aleph_0$.

Definição 4.1.3 *Sejam $x \in \square_{n \in \omega} X_n$ e $k \in \omega$.*

Se $\mathcal{U}$ é uma coleção de retângulos em $\square_{n \in \omega} X_n$ então definimos

$$\mathcal{U}(x, k) = \{U \in \mathcal{U} : (\forall n \geq k)(x_n \in U_n)\},$$

$$\mathcal{U}(x) = \bigcup_{k \in \omega} \mathcal{U}(x, k).$$

Definição 4.1.4 *Seja $\mathcal{U}$ uma coleção de retângulos em $\square_{n \in \omega} X_n$.*

Então $\mathcal{U}$ é simples se

$$(\forall x \in \square_{n \in \omega} X_n)(\forall k \in \omega)[|\mathcal{U}(x, k)| \geq \aleph_0 \implies (E(x, k) \subseteq \bigcup \mathcal{U})].$$

Observação: (1) Se $\mathcal{U}$ é simples, então

$$(\forall x \in \square_{n \in \omega} X_n)(\forall k \in \omega)[x \notin \bigcup \mathcal{U} \implies |\mathcal{U}(x, k)| < \aleph_0].$$

(2) Se para todo $\xi < \beta$ temos que A_ξ é um retângulo, então

$$\{E(A_\xi) : \xi < \beta\}$$

é trivialmente simples.

Lema 4.1.2 *Sejam $\mathcal{F} \in [P(\square_{n \in \omega} X_n)]^\beta$ uma coleção simples de retângulos fechados e um ponto $x \notin \bigcup \mathcal{F}$.*

Se temos

(1) $\beta < \omega_1$, ou

(2) $\beta < \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$,

então existe um retângulo aberto V tal que $x \in V$ e

- (i) $(\forall k \in \omega)(\forall F \in \mathcal{F}(x, k+1) \setminus \mathcal{F}(x, k))[\overline{V_k} \cap F_k = \emptyset]$;
- (ii) $\overline{V}$ é fortemente disjunto de todo elemento de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(x)$.

Demonstração:

Pela observação (1), como $x \notin \bigcup \mathcal{F}$, então para todo $k \in \omega$, $|\mathcal{F}(x, k)| < \aleph_0$.

Assim, para todo $k \in \omega$, $|\mathcal{F}(x, k+1) \setminus \mathcal{F}(x, k)| < \aleph_0$ e para todo elemento de $\mathcal{F}(x, k+1) \setminus \mathcal{F}(x, k)$ temos que $x_k \notin F_k$.

Seja $V_1 = \prod_{n \in \omega} V_n^1$, onde $V_n^1 \stackrel{\text{ab.}}{\subseteq} X_n$ tal que

$$x_n \in V_n^1, \text{ e}$$

$$(\forall F \in \mathcal{F}(x, k+1) \setminus \mathcal{F}(x, k))[\overline{V_n^1} \cap F_n = \emptyset].$$

Com isto, vemos que V_1 satisfaz (i).

Por outro lado, $x \notin \bigcup \{E(F) : F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(x)\}$ e esta união é fechada pela Proposição (4.1.1). Logo, pela regularidade de $\square_{n \in \omega} X_n$, existe um retângulo aberto V_2 tal que

$$x \in V_2, \text{ e}$$

$$\overline{V_2} \cap \bigcup \{E(F) : F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(x)\} = \emptyset.$$

Agora, como V_2 é um retângulo e $\overline{V_2} \cap E(F) = \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(x)$, então

$$(\forall F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(x))(E(\overline{V_2}) \cap E(F) = \emptyset).$$

Com isto, temos que $\overline{V_2}$ é fortemente disjunto de todo $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(x)$, satisfazendo (ii).

Tomemos $V = V_1 \cap V_2$.

Assim, $x \in V$ e V é um retângulo aberto, satisfazendo as condições (i) e (ii). ■

Proposição 4.1.2 *Seja $\mathcal{F} \in [P(\square_{n \in \omega} X_n)]^\beta$ uma coleção simples de retângulos fechados. Suponha que*

- (1) $\beta < \omega_1$, ou
- (2) $\beta < \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Então $\bigcup \mathcal{F}$ é fechada.

Demonstração:

Fixado $x \notin \bigcup \mathcal{F}$, então $\mathcal{F}(x, 0) = \phi$ e assim

$$\mathcal{F}(x) = \bigcup_{k \in \omega} \mathcal{F}(x, k+1) \setminus \mathcal{F}(x, k).$$

Pelo lema anterior, existe um retângulo aberto V tal que

- (i) $x \in V$;
- (ii) $(\forall F \in \mathcal{F}(x))(\overline{V} \cap F = \phi)$;
- (iii) $\overline{V}$ é fortemente disjunto de todo elemento de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(x)$.

Portanto, $x \in V$ e $V \cap \bigcup \mathcal{F} = \phi$. ■

Teorema 4.1.1 ([Engelking, 1989])

Todo espaço Lindelöf e regular é normal.

Lema 4.1.3 *Sejam X um espaço topológico regular, E um subconjunto Lindelöf de X satisfazendo a condição*

$$(\forall O \in \tau(X))[(E \subseteq O) \implies (\exists W \in \tau(X))(E \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq O)],$$

e $H, K \subseteq X$, fechados disjuntos, onde $H \cap E \neq \phi$.

Então existe um aberto N tal que

$$H \cap E \subseteq N;$$

$$\overline{N} \cap K = \phi.$$

Demonstração:

Pelo Teorema (4.1.1), existem abertos disjuntos U, V tais que

$$H \cap E \subseteq U;$$

$$K \cap E \subseteq V.$$

Tomemos $O = (X \setminus K) \cup V$.

Então O é um aberto contendo E , assim, usando a hipótese, existe um aberto W tal que $E \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq O$.

Portanto, $\overline{W} \cap (K \setminus V) = \phi$.

Tomemos $N = W \cap U$.

Como $N \subseteq W$, então $\overline{N} \cap (K \setminus V) = \phi$. Por outro lado, $N \subseteq U$ implica que $\overline{N} \cap V = \phi$.

Assim, $\overline{N} \cap K = \phi$. ■

A proposição seguinte, mostra que o produto-box enumerável de espaços regulares é ω_1 -CWN com respeito a uma família $\mathcal{F}$ de fechados onde cada elemento de $\mathcal{F}$ está contido em $E(x)$, para algum ponto x de $\square_{n \in \omega} X_n$; e quando os fatores são regulares e têm caráter enumerável, que o produto-box é $\mathfrak{d}$ -CWN com respeito a este tipo de família.

Teorema 4.1.2 *Seja $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \beta\}$ uma família discreta de fechados de $\square_{n \in \omega} X_n$ tal que:*

- (i) $(\forall \alpha < \beta)(\exists x_\alpha \in \square_{n \in \omega} X_n)[F_\alpha \subseteq E(x_\alpha)]$;
- (ii) $\eta \neq \alpha \implies E(x_\eta) \cap E(x_\alpha) = \phi$.

Suponha ainda que

- (1) $\beta \leq \omega_1$, ou
- (2) $\beta \leq \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Então $\mathcal{F}$ é separada.

Demonstração:

Como $F_\alpha \subseteq E(x_\alpha)$, podemos supor que $x_\alpha \in F_\alpha$.

Por indução sobre α , definiremos uma coleção $\{U_\alpha : \alpha \in \beta\}$ de retângulos abertos tal que

- (i) $(\forall \alpha \in \beta)(x_\alpha \in U_\alpha)$;
- (ii) $(\forall \eta > \alpha)(\overline{U_\alpha} \cap F_\eta = \phi)$;
- (iii) $(\forall \eta < \alpha)(\overline{U_\alpha} \cap E(\overline{U_\eta}) = \phi)$.

Quando $\alpha = 0$, como $\mathcal{F}$ é discreto, existe um retângulo aberto U_0 tal que

- $x_0 \in U_0$;
- $(\forall \eta > 0)(\overline{U_0} \cap F_\eta = \phi)$.

Assim, as condições (i), (ii), (iii), estão satisfeitas neste caso.

A seguir, suponhamos que para todo $\eta < \alpha$, já definimos U_η satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) acima.

Novamente, como $\mathcal{F}$ é discreto, existe um retângulo aberto V_α tal que

- $x_\alpha \in V_\alpha$;
- $(\forall \eta > \alpha)(\overline{V_\alpha} \cap F_\eta = \phi)$.

Por (ii), temos que para todo $\eta < \alpha$, $x_\alpha \notin E(\overline{U_\eta})$, logo o ponto x_α não pertence ao conjunto $\bigcup\{E(\overline{U_\eta}) : \eta < \alpha\}$. Por outro lado, esta união é fechada pela proposição (4.1.1).

Portanto, pela regularidade de $\square_{n \in \omega} X_n$, existe um retângulo aberto W_α tal que

$$\begin{aligned} x_\alpha &\in W_\alpha; \\ (\forall \eta < \alpha) (\overline{W_\alpha} \cap E(\overline{U_\eta}) &= \emptyset). \end{aligned}$$

Tomando $U_\alpha = V_\alpha \cap W_\alpha$, então U_α é um retângulo aberto satisfazendo (i), (ii) e (iii).

Deste modo, obtemos uma coleção de abertos, $\{U_\alpha : \alpha < \beta\}$, que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii).

Seja $O_\alpha = E(U_\alpha)$, para $\alpha < \beta$. Com isto, $\mathcal{O} = \{O_\alpha : \alpha < \beta\}$ é uma coleção de abertos tal que

$$(\forall \alpha < \beta) (F_\alpha \subseteq E(x_\alpha) \subseteq O_\alpha).$$

Afirmção : $\mathcal{O}$ é disjunto.

Sejam $\eta, \alpha < \beta$, e suponhamos que $\eta < \alpha$.

Pela condição (iii), temos $\overline{U_\alpha} \cap E(\overline{U_\eta}) = \emptyset$, e isto implica que $E(\overline{U_\alpha}) \cap E(\overline{U_\eta}) = \emptyset$. Assim, mostramos que $O_\alpha \cap O_\eta = \emptyset$.

Portanto, $\mathcal{O}$ separa $\mathcal{F}$. ■

Corolário 4.1.1 *Seja $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \beta\}$ uma família discreta satisfazendo as hipóteses da proposição anterior e suponha que*

- (1) $\beta < \omega_1$, ou
- (2) $\beta < \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega) (\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Então $\mathcal{F}$ pode ser separada por uma coleção discreta de abertos.

Demonstração:

Pelo Teorema anterior, temos que $\mathcal{O} = \{O_\alpha : \alpha < \beta\}$, onde para todo $\alpha < \beta$, $O_\alpha = E(U_\alpha)$, separa $\mathcal{F}$.

Portanto, precisamos mostrar que $\mathcal{O}$ é discreta.

Assim, seja $x \in X$. Como, $\mathcal{E} = \{E(\overline{U_\alpha}) : \alpha < \beta\}$ é disjunta, então $\text{ord}(x, \mathcal{E}) \leq 1$.

Pela demonstração da proposição (4.1.1), existe um retângulo aberto U tal que

$$\begin{aligned} x &\in U; \\ \text{ord}(U, \mathcal{E}) &\leq 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\{O_\alpha : \alpha < \beta\}$ é discreta. ■

Corolário 4.1.2 (*Wingers, 1994*)

Seja $\{E(x_\xi) : \xi \in \beta\}$ um subconjunto discreto de $\square_{n \in \omega} X_n$.

Suponha que

(1) $\beta < \omega_1$, ($\beta \leq \omega_1$), ou

(2) $\beta < \omega_1$ ($\beta \leq \mathfrak{d}$) e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Então existe uma coleção $\{O_\xi : \xi \in \beta\}$ discreta (2 a 2 disjunta) de abertos tal que $(\forall \xi < \beta)(E(x_\xi) \subseteq O_\xi)$.

Usando a mesma demonstração do corolário (4.1.1), temos

Corolário 4.1.3 *Seja $\{E(x_\xi) : \xi < \beta\}$ um subconjunto de $\square_{n \in \omega} X_n$, disjunto 2 a 2.*

Se temos

(1) $\beta < \omega_1$, ou

(2) $\beta < \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$,

então o conjunto $\{E(x_\xi) : \xi < \beta\}$ é discreto.

Definição 4.1.5 *Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços topológicos.*

Dizemos que o espaço $\square_{n \in \omega} X_n$ tem a propriedade $(\dagger)$ se $(\forall x \in \square_{n \in \omega} X_n)$ e $(\forall O \in \tau(\square_{n \in \omega} X_n))$, temos

$$[E(x) \subseteq O \implies (\exists U \in \tau(\square_{n \in \omega} X_n))(E(x) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O)].$$

Teorema 4.1.3 *Suponha que $(\forall x \in \square_{n \in \omega} X_n)(L(E(x)) = \aleph_0)$.*

Sejam H e K subconjuntos fechados e disjuntos de $\square_{n \in \omega} X_n$, onde

$$H \subseteq \bigcup \{E(x_\xi) : \xi < \beta\}.$$

Suponha que temos

(1) $\beta < \omega_1$, ou

(2) $\beta < \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Então

$$(\dagger) \iff \text{existem abertos } V, W \subseteq \square_{n \in \omega} X_n \text{ separando } H \text{ e } K.$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) Óbvio.

($\Rightarrow$)

Podemos supor que $\eta \neq \xi \implies E(x_\eta) \cap E(x_\xi) = \emptyset$.

Como H, K são fechados disjuntos, então para todo $\xi < \beta$, $H \cap E(x_\xi)$ e K também são fechados disjuntos.

Pelo lema (4.1.3), para todo $\xi < \beta$, existe um aberto N_ξ contendo $H \cap E(x_\xi)$ tal que

$$\overline{N_\xi} \cap K = \emptyset.$$

Pelo corolário (4.1.3), $\{E(x_\xi) : \xi < \beta\}$ é discreto em $\square_{n \in \omega} X_n$. Portanto, pelo corolário (4.1.2), existe uma coleção discreta $\{O_\xi : \xi < \beta\}$ de abertos tal que

$$(\forall \xi < \beta)(E(x_\xi) \subseteq O_\xi).$$

Tomemos $U_\xi = N_\xi \cap O_\xi$, para todo $\xi < \beta$.

Então

U_ξ é aberto;

$H \cap E(x_\xi) \subseteq U_\xi$;

$\overline{U_\xi} \cap K = \emptyset$.

Se $U = \bigcup_{\xi < \beta} U_\xi$, então $H \subseteq U$. Além disso, como $\{O_\xi : \xi < \beta\}$ é discreta e $U_\xi \subseteq O_\xi$, concluímos que $\{U_\xi : \xi < \beta\}$ também é discreta.

Segue que $\{\overline{U_\xi} : \xi < \beta\}$ é discreta e assim, $\bigcup_{\xi < \beta} \overline{U_\xi}$ é fechada.

Logo, $\overline{U} = \bigcup_{\xi < \beta} \overline{U_\xi}$ e $\overline{U} \cap K = \emptyset$.

Tomemos $V = U$ e $W = (\square_{n \in \omega} X_n) \setminus \overline{U}$. ■

Definição 4.1.6 *Seja ν um cardinal, onde $\nu > \aleph_0$.*

Um espaço topológico X é ν -pseudonormal, se quaisquer dois subconjuntos fechados de X , um dos quais com cardinalidade $\leq \nu$, podem ser separados.

Observação: Um espaço $\aleph_1$ -pseudonormal será denominado pseudonormal.

Corolário 4.1.4 *Seja $\square_{n \in \omega} X_n$ um espaço-produto tal que*

(a) $(\forall x \in \square_{n \in \omega} X_n)(L(E(x)) = \aleph_0)$,

(b) vale a propriedade $(\dagger)$.

Então

(i) $\square_{n \in \omega} X_n$ é pseudonormal;

(ii) Se $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$, então $\square_{n \in \omega} X_n$ é $\mathfrak{d}$ -pseudonormal.

4.2 Propriedades de separação em produtos-box

Utilizando alguns dos resultados obtidos na seção anterior, veremos que os produtos-box enumeráveis, de certos espaços topológicos, satisfazem duas propriedades de separação:

- (1) Pseudonormalidade, e
- (2) ν -CWH (para algum cardinal ν).

Começaremos estudando o caso em que a projeção σ é fechada. Assim, os fatores serão necessariamente, localmente compactos.

Nesta situação, quando estamos lidando com o produto-nabla enumerável de espaços regulares, a propriedade $(\dagger)$ da seção anterior é consequência da regularidade do produto-nabla. Mais precisamente, temos:

Lema 4.2.1 *Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços paracompactos, localmente compactos.*

Então o espaço $\square_{n \in \omega} X_n$ satisfaz a propriedade $(\dagger)$.

Demonstração:

Como a projeção σ é fechada, se $E(x) \subseteq O \subseteq \overset{\text{ab.}}{\subseteq} \square_{n \in \omega} X_n$, então pelo lema (3.1.1), existe $V \in \tau(\nabla_{n \in \omega} X_n)$ tal que

- (i) $\sigma(x) \in V$;
- (ii) $\sigma^{-1}(V) \subseteq \cdot$.

Como $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é regular, então existe $W \in \tau(\nabla_{n \in \omega} X_n)$ satisfazendo

$$\sigma(x) \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V.$$

Portanto, temos que

$$E(x) \subseteq \sigma^{-1}(W) \subseteq \overline{\sigma^{-1}(W)} = \sigma^{-1}(\overline{W}) \subseteq \sigma^{-1}(V).$$

Assim, tomando $U = \sigma^{-1}(W)$, concluímos que

$$E(x) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O.$$

E com isto terminamos a demonstração. ■

Como consequência do lema acima, do corolário (4.1.4) e do Teorema (3.2.1), obtemos

Proposição 4.2.1 *Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços paracompactos, localmente compactos.*

Então

- (i) $\square_{n \in \omega} X_n$ é pseudonormal;
- (ii) Se $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$, então $\square_{n \in \omega} X_n$ é $\mathfrak{d}$ -pseudonormal.

Corolário 4.2.1 *(van Douwen, 1980)*

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços compactos.

Então $\square_{n \in \omega} X_n$ é pseudonormal.

Agora, veremos quais condições sobre os fatores, são necessárias para que o produto-box satisfaça a propriedade ($\dagger$), quando a projeção σ não for fechada.

Daqui em diante, para os resultados que necessitem de σ -compacidade nos fatores, fixaremos para todo $n \in \omega$, uma seqüência de compactos $\{C_n^k : k \in \omega\}$ tal que

- (1) $C_n^0 \subseteq C_n^1 \subseteq \dots$,
- (2) $X_n = \bigcup_{k \in \omega} C_n^k$.

Definição 4.2.1 *Seja $k \in \omega$.*

Definimos $\mu_k : \square_{n \in \omega} X_n \longrightarrow \omega$ como

$$\mu_k(x) = \min\{j \in \omega : x_k \in C_k^j\}.$$

Definimos $\mu : (\square_{n \in \omega} X_n) \times \omega \longrightarrow \omega$ através de

$$\mu(x, m) = \max\{\mu_k(x) : k \leq m\}.$$

Lema 4.2.2 *Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços topológicos σ -compactos, regulares.*

Então o espaço $\square_{n \in \omega} X_n$ satisfaz a propriedade ($\dagger$).

Demonstração:

Para todo $j \in \omega$, tomemos $k_j = \mu(x, j) + j$ e seja

$$A_j = C_0^{k_j} \times \cdots \times C_{j-1}^{k_j} \times \{x_j\} \times \cdots.$$

Da definição de $\mu(x, j)$ segue que

$$E(x) = \bigcup_{j \in \omega} A_j.$$

Como $E(x) \subseteq O$, usando o lema (4.1.1), existe uma coleção $\{U_j : j \in \omega\}$ de retângulos abertos tais que para todo $j \in \omega$,

$$A_j \subseteq U_j \subseteq \overline{U_j} \subseteq O.$$

Façamos $\mathcal{U} = \{\overline{U_j} : j \in \omega\}$. Então $\mathcal{U}$ é uma coleção de retângulos fechados, onde $|\mathcal{U}| = \aleph_0$.

Afirmção : $\mathcal{U}$ é simples.

De fato, fixemos um ponto $y \in \square_{n \in \omega} X_n$, e $i \in \omega$. Suponhamos que $|\mathcal{U}(y, i)| = \aleph_0$. Portanto, existe uma seqüência $\{U_{j_m} : m \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}(y, i)$ satisfazendo a condição

$$i \leq j_0 \leq j_1 \leq \cdots.$$

Como $(\forall n \geq i)(y_n \in \overline{U_{j_m}^{j_m}})$ e $j_m \geq i$, então

$$\overline{U_{j_m}} \supseteq C_0^{k_{j_m}} \times \cdots \times C_{i-1}^{k_{j_m}} \times \{y_i\} \times \cdots,$$

e assim, temos que

$$\bigcup_{m \in \omega} \overline{U_{j_m}} \supseteq \bigcup_{m \in \omega} (C_0^{k_{j_m}} \times \cdots \times C_{i-1}^{k_{j_m}} \times \{y_i\} \times \cdots) = E(y, i).$$

Portanto, $E(y, i) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, i.e., $\mathcal{U}$ é simples.

Com isto, temos que $\mathcal{U}$ é uma coleção simples de retângulos fechados, onde $|\mathcal{U}| < \omega_1$. Assim, aplicando a proposição (4.1.2), $\bigcup_{j \in \omega} \overline{U_j}$ é fechada.

Fazendo $U = \bigcup_{j \in \omega} U_j$, temos que $E(x) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O$. ■

Como consequência do lema (4.2.2) e do corolário (4.1.4), temos

Teorema 4.2.1 (*Wingers, 1994*)

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços topológicos σ -compactos, regulares.
Então

- (1) $\square_{n \in \omega} X_n$ é pseudonormal;
- (2) Se $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$, então $\square_{n \in \omega} X_n$ é $\mathfrak{d}$ -pseudonormal.

Corolário 4.2.2 (*Miller, 1982*)

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços topológicos normais e enumeráveis.
Então $\square_{n \in \omega} X_n$ é pseudonormal.

Pelo Teorema (3.2.2), um espaço paracompacto, localmente compacto pode ser representado como soma topológica de subespaços σ -compactos. Assim, utilizando este fato e o Teorema (4.2.1), obtemos outra demonstração da proposição (4.2.1).

Agora, veremos que os produtos-box enumeráveis, satisfazem outra propriedade de separação. Quando a projeção σ é fechada, temos que a demonstração é bem simples.

Teorema 4.2.2 (*van Douwen, 1980*)

Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços paracompactos, localmente compactos.
Então

- (i) $\square_{n \in \omega} X_n$ é ω_1 -CWH;
- (ii) Se $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$, então $\square_{n \in \omega} X_n$ é $\mathfrak{d}$ -CWH.

Demonstração:

Podemos supor que $\forall n \in \omega$, X_n é σ -compacto, localmente compacto.

No caso (i), $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é ω_1 -CWH, e no caso (ii), $\nabla_{n \in \omega} X_n$ é $\mathfrak{d}$ -CWH. Portanto, basta mostrar como transferir esta propriedade do produto-nabla para o produto-box.

Seja $F \in [\square_{n \in \omega} X_n]^\beta$, fechado discreto, onde $\beta \leq \omega_1$ (ou $\beta \leq \mathfrak{d}$, e temos a condição $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$).

Existe uma seqüência $\{x_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq F$ tal que

- (i) $\alpha < \beta$;
- (ii) $\eta \neq \xi \implies \sigma(x_\eta) \neq \sigma(x_\xi)$ (e assim, $E(x_\eta) \cap E(x_\xi) = \emptyset$);
- (iii) $F' = \{\sigma(x_\xi) : \xi < \alpha\}$ é fechado e discreto em $\nabla_{n \in \omega} X_n$.

Por (iii), então existe uma sequência $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi < \alpha\}$ de abertos em $\prod_{n \in \omega} X_n$ tal que

- (1) $\sigma(x_\xi) \in U_\xi$;
- (2) $\eta \neq \xi \implies U_\eta \cap U_\xi = \emptyset$.

Assim, $\mathcal{U}$ separa F' .

Portanto, temos que

- (1') $E(x_\xi) \subseteq \sigma^{-1}(U_\xi)$;
- (2') $\eta \neq \xi \implies \sigma^{-1}(U_\eta) \cap \sigma^{-1}(U_\xi) = \emptyset$.

Agora, tomemos para cada $\xi < \alpha$, $F_\xi = F \cap E(x_\xi)$.

Afirmção : Cada F_ξ é separada:

Para todo $\xi < \alpha$, $L(E(x_\xi)) = \aleph_0$ e assim, temos que $|F_\xi| \leq \aleph_0$, pois F_ξ é discreto.

Por outro lado, $\prod_{n \in \omega} X_n$ é regular, então $\prod_{n \in \omega} X_n$ é $\aleph_0$ -CWH. Logo, para todo $\xi < \alpha$, existe $\mathcal{V}_\xi = \{V_{\xi,j} : j \in \omega\}$ que separa F_ξ .

Tomemos para todo $\xi < \alpha, j \in \omega$,

$$W_{\xi,j} = \sigma^{-1}(U_\xi) \cap V_{\xi,j}.$$

Então $\{W_{\xi,j} : \xi < \alpha, j \in \omega\}$ separa F . ■

Agora, veremos o que conseguimos obter, quando a projeção σ não é fechada.

Teorema 4.2.3 *Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de espaços σ -compactos, regulares. Então*

- (1) $\prod_{n \in \omega} X_n$ é ω_1 -CWH;
- (2) Se $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$, então $\prod_{n \in \omega} X_n$ é $\mathfrak{d}$ -CWH.

Demonstração:

Seja $H \in [\prod_{n \in \omega} X_n]^\beta$, fechado e discreto, onde $\beta \leq \omega_1$ (ou $\beta \leq \mathfrak{d}$, e temos a condição $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$).

Existe uma sequência $\{x_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq H$ tal que

- (a) $\alpha < \beta$;
- (b) $H \subseteq \bigcup_{\xi < \alpha} E(x_\xi)$.
- (c) $\eta \neq \xi \implies E(x_\eta) \cap E(x_\xi) = \emptyset$.

Se tomarmos $F_\xi = H \cap E(x_\xi)$, então $H = \bigcup_{\xi < \alpha} F_\xi$ e $\mathcal{F} = \{F_\xi : \xi < \alpha\}$ é uma família dicreta de fechados em $\square_{n \in \omega} X_n$ tal que

$$(\forall \xi < \alpha)(F_\xi \subseteq E(x_\xi)).$$

Assim, podemos aplicar o Teorema (4.1.2), e obter uma família $\{U_\xi : \xi < \alpha\}$ de abertos satisfazendo

$$(i) \ F_\xi \subseteq U_\xi;$$

$$(ii) \ \eta \neq \xi \implies U_\eta \cap U_\xi = \emptyset.$$

Agora, resta mostrar que para todo $\xi < \alpha$, os pontos de F_ξ podem ser separados. Para isto, é só repetir o argumento utilizado na Afirmação que está na demonstração do Teorema anterior. ■

EXEMPLO : O produto $\mathbb{P} \times \square^\omega(\omega + 1)$ não é pseudonormal. Assim, a hipótese de σ -compacidade dos fatores é essencial no Teorema (4.2.1).

Definição 4.2.2 *Sejam $D \in P({}^\omega\omega)$ e $B \in P(\omega)$.*

A família D é denominada estritamente dominante (s.d.) sobre B , se

$$(\forall g \in {}^\omega\omega)(\exists f \in D)[(\forall n \in B)(g(n) < f(n))].$$

Lema 4.2.3 (*Kunen, 1973*)

Se $D \in P({}^\omega\omega)$ é uma família dominante, então existe $n \in \omega$, tal que D é s.d. sobre $\omega \setminus n$.

Demonstração:

Suponha que o lema não é verdadeiro.

Então $(\forall n \in \omega)(\exists g_n \in {}^\omega\omega)$ tal que

$$(\forall f \in D)(\exists m \geq n)(f(m) \leq g_n(m)).(*)$$

Seja $h \in {}^\omega\omega$ definido por

$$h(n) = \max\{g_0(n), \dots, g_n(n)\}.$$

Como D é uma família dominante, existe $f \in D$ e $n \in \omega$ tal que

$$(\forall m \geq n)(f(m) > h(m)).$$

Mas para $m \geq n$, $h(m) \geq g_n(m)$, logo

$$(\forall m \geq n)[f(m) > g_n(m)],$$

o que contradiz (*). ■

Lema 4.2.4 (*Kunen, 1973*)

Sejam $D \in P({}^\omega\omega)$ e $B \in [\omega]^{<\omega}$.

Se D é s.d. sobre B , e $i \notin B$, então

- (a) D é s.d. sobre $B \cup \{i\}$, ou
- (b) $\exists k \in \omega$ tal que $\{f \in D : f(i) = k\}$ é s.d. sobre B .

Demonstração:

Suponha que (a) não seja verdadeiro.

Seja $g \in {}^\omega\omega$ satisfazendo

$$(\forall f \in D)(\exists n \in B \cup \{i\})[f(n) \leq g(n)].$$

Como D é s.d. sobre B , então

$$(\forall h \in {}^\omega\omega)(\exists f \in D)(\forall n \in B)[f(n) > \max\{g(n), h(n)\}].$$

Assim,

$$(\forall h \in {}^\omega\omega)(\exists f \in D)[(\forall n \in B)(f(n) > h(n)) \text{ e } (f(i) \leq g(i))].$$

Logo, tomando $r = g(i)$ e $D^* = \{f \in D : f(i) \leq r\}$, concluímos que D^* é s.d. sobre B .

Seja $D_k = \{f \in D : f(i) = k\}$. Então $D^* = \bigcup\{D_k : k \leq r\}$, e como esta união é finita, algum D_k é s.d. sobre B . ■

Teorema 4.2.4 (*Lema de dominação de Kunen*)

Se $D \in P({}^\omega\omega)$ é uma família dominante, então existe $A \in [\omega]^{<\omega}$ e existe $p \in {}^A\omega$ de tal maneira que o conjunto

$$\{f \in D : f|_A = p\}$$

é uma família s.d. sobre $\omega \setminus A$.

Demonstração:

Primeiro, usamos o lema (4.2.3). Assim, existe $n \in \omega$ tal que D é s.d. sobre $\omega \setminus n$.

A seguir, aplicamos o lema (4.2.4) para $i \in \{0, \dots, n_1\} = n$.

Com isto, obteremos o conjunto A e a função p procurados. ■

Exemplo : (Kunen, 1973)

O conjunto $A \in [\omega]^{<\omega}$, do Teorema (4.2.4), não é necessariamente um segmento inicial como no lema (4.2.3).

Seja $D = \{f \in {}^\omega\omega : f(1) = 0 \text{ e } (\forall n \in \omega)(f(2n) = f(2n + 3))\}$.

Dada $g \in {}^\omega\omega$, tomemos $h \in {}^\omega\omega$ definida da seguinte maneira:

$$h(n) > \max\{g(2n), g(2n + 3)\}.$$

A seguir, façamos

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n = 1 \\ h(n) & , c.c. \end{cases}$$

Deste modo, temos que $(\forall n \in \omega \setminus \{1\})(g(n) < f(n))$. Portanto, neste caso, $A = \{1\}$.

Definição 4.2.3 *Um espaço topológico X é discretamente pseudonormal se quaisquer dois conjuntos fechados e discretos, um dos quais é enumerável, podem ser separados.*

Teorema 4.2.5 (van Douwen, 1980)

$\square^\omega(\omega + 1)$ possui um subespaço que não é discretamente pseudonormal.

Demonstração:

Construiremos $F, G \subseteq (\omega + 1) \times \square^\omega(\omega + 1)$ tal que o subespaço

$$Z = F \cup G \cup (\omega \times {}^\omega\omega)$$

não admite uma separação para estes conjuntos.

Enumere $P = \bigcup \{A^\omega : A \in [\omega]^{<\omega}\}$ como $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ de tal maneira que cada elemento de P apareça ω vezes.

Para $n \in \omega$, defina $f_n \in \square^\omega(\omega + 1)$ por

$$f_n = p_n \cup (\omega \setminus \text{dom}(p_n)) \times \{\omega\},$$

e tomemos

$$F = \{\langle n, f_n \rangle : n \in \omega\}.$$

Continuando, façamos

$$G = \{\omega\} \times {}^\omega\omega.$$

Observemos que $\{[n, \omega] \times \{g\} : n \in \omega\}$ é uma base para $\langle n, g \rangle$ em Z , onde $g \in {}^\omega\omega$.

Afirmção : $F \cup G$ é fechado e discreto em Z .

De fato, como $Z \setminus (F \cup G) = \omega \times {}^\omega\omega$, e este conjunto é formado por pontos isolados, o conjunto $F \cup G$ é fechado.

Agora, para todo $n \in \omega$,

$$(F \cup G) \cap (\{n\} \times \square^\omega(\omega + 1)) = \{\langle n, f_n \rangle\}.$$

Por outro lado, para todo $g \in {}^\omega\omega$,

$$(F \cup G) \cap ((\omega + 1) \times \{g\}) = \{\langle \omega, g \rangle\}.$$

E assim, $F \cup G$ é discreto em Z .

Agora, veremos que F e G não podem ser separados.

Suponha que U e V são abertos disjuntos de Z , contendo F e G , respectivamente. Para todo $m \in \omega$, tomemos

$$D_m = \{g \in {}^\omega\omega : [m, \omega] \times \{g\} \subseteq V\}.$$

Então, $\bigcup_{m \in \omega} D_m = {}^\omega\omega$.

Como ${}^\omega\omega$ é uma família dominante, e a união enumerável de conjuntos não dominantes também não é dominante, existe um D_m que é dominante. Logo pelo Teorema (4.2.5), existem $A \in [\omega]^{<\omega}$ e $p \in {}^A\omega$, satisfazendo

$$\{g \in D_m : g|_A = p\} \text{ é s.d. sobre } \omega \setminus A. (*)$$

Pelo modo como construímos P , existe $n \in \omega$ tal que $p_n = p$ e $n \geq m$.

Como U é uma vizinhança de $\langle n, f_n \rangle$, e $f_n(k) = \omega$ se $k \notin \text{dom}(p_n)$, então existe $h \in {}^\omega\omega$, onde

$$W = \{\langle n, g \rangle : (g \in {}^\omega\omega)(p_n \subseteq g) \text{ e } (\forall k \notin \text{dom}(p_n))(g(k) > h(k))\},$$

é uma vizinhança aberta de $\langle n, f_n \rangle$, contida em U .

Por (*), existe $g \in D$ satisfazendo

- (1) $p_n \subseteq g$, e
- (2) $(\forall k \notin \text{dom}(p_n))(g(k) > h(k))$.

Desta maneira, temos

$$\langle n, g \rangle \in W \cap (\omega \setminus m) \times \{g\} \subseteq U \cap V.$$

Logo, F e G não podem ser separados. ■

Com uma demonstração análoga à do Teorema (2.1.3), temos

Teorema 4.2.6 (*van Douwen, 1980*)

O espaço $\mathbb{P} \times \square^\omega(\omega + 1)$ não é pseudonormal.

Nesta parte final, veremos um resultado envolvendo produtos-box não enumeráveis. Mas, antes disso, precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Lema 4.2.5 *Sejam X um espaço topológico completamente regular e $K \in [X]^{\aleph_0}$. Então para todo ponto $p \in K$, para todo $V \in \tau(X)$, existe $U \in \tau(X)$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} p \in U \subseteq V; \\ Fr(U) \cap K = \emptyset. \end{aligned}$$

Demonstração:

Sejam $x \in K$ e $V \in \tau(X)$, com $x \in V$.

Tomemos $V' = V \cap K$.

Como X é completamente regular, existe $f_x : K \rightarrow I$, onde f_x é contínua e $I = [0, 1]$, satisfazendo

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f_x(x) = 0; \\ \text{(ii)} \quad f_x(K \setminus V') = \{1\}. \end{aligned}$$

Como $|K| = \aleph_0$ e $|I| = \mathfrak{c}$, então existe $r \in]0, 1[$ tal que

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad r \notin Im(f_x|_{V'}) \\ \text{(iv)} \quad f_x^{-1}([0, r[) \subseteq V'. \end{aligned}$$

Assim, $O = f_x^{-1}([0, r[) = f_x^{-1}([0, r])$, i.e., O é aberto-fechado em K .

Por outro lado, existe $W \in \tau(X)$ tal que $W \cap K = O$.

Seja $U = W \cap V$. Então $U \subseteq V$ e ainda temos que $Fr(U) \cap K = \emptyset$. ■

Lema 4.2.6 *Seja X um espaço topológico completamente regular e $K \in [X]^{\aleph_0}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Para todo aberto $V \supseteq K$, existe um aberto U tal que*

$$K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V;$$

(b) *Todo recobrimento aberto(em X) de K admite um refinamento aberto(em X) e discreto(em X), que ainda cobre K ;*

(c) *Todo recobrimento aberto(em X) de K admite um refinamento aberto(em X) e localmente finito(em X), que ainda cobre K .*

Demonstração:

(a) $\implies$ (b)

Seja $\mathcal{U}$ um recobrimento aberto(em X) de K .

Usando o lema (4.2.5) e como $|K| = \aleph_0$, existe um refinamento aberto(em X) e disjunto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, cobrindo K .

Tomemos $W \in \tau(X)$ tal que

$$K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \bigcup \mathcal{V}.$$

Assim, a família $\mathcal{C} = \{V \cap W : V \in \mathcal{V}\}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$, aberto(em X) e discreto(em X), cobrindo K .

(b) $\implies$ (c) óbvio

(c) $\implies$ (a) óbvio ■

Lema 4.2.7 *Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma família de espaços topológicos regulares.*

Se $K \in [\nabla_{n \in \omega} X_n]^{\aleph_0}$, então

(a) K é fechado e discreto;

(b) existe uma família discreta de abertos-fechados separando os pontos de K .

Demonstração:

Seja $X = \nabla_{n \in \omega} X_n$.

(a) K é fechado: Seja $y \notin K$.

Como X é T_2 , para todo $x \in K$, existe aberto V_x tal que

$$\begin{aligned} y &\in V_x; \\ x &\notin \overline{V_x}. \end{aligned}$$

Agora, X é um P-espaço e $|K| = \aleph_0$, logo $V = \bigcap_{x \in K} V_x$ é aberto, $y \in V$ e $V \cap K = \emptyset$.

(b) K é discreto: análogo ao caso acima.

(c) Como X é um P-espaço regular, então X é zero-dimensional. Enumeremos o conjunto K como $\{x_n : n \in \omega\}$.

Para todo $n \in \omega$ tomemos $V_n \in \tau(\nabla_{n \in \omega} X_n)$ tal que

$$\begin{aligned} x_n &\in V_n; \\ V_n &\text{ é aberto-fechado;} \\ V_n \cap K &= \{x_n\}. \end{aligned}$$

A seguir, façamos para todo $n \in \omega$,

$$U_n = V_n \setminus \bigcup_{m < n} V_m.$$

Então $\{U_n : n \in \omega\}$ é uma família discreta de abertos-fechados separando K . ■

Teorema 4.2.7 (*van Douwen, 1980*)

Seja $\langle X_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ uma família de espaços topológicos completamente regulares.

O espaço produto $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ é pseudonormal se, e somente se, todo sub-box-produto enumerável é pseudonormal.

Demonstração:

($\Rightarrow$) óbvio.

($\Leftarrow$)

Seja $K \in [\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha]^{\aleph_0}$, fechado.

(1) Dados $x, y \in K$, definimos

$$l(x, y) = \{\alpha \in \nu : x_\alpha \neq y_\alpha\}.$$

Como $|K| = \aleph_0$, existe $N \in [\nu]^{\aleph_0}$ tal que

$$(1) (\forall x, y \in K)[|l(x, y)| < \aleph_0 \Rightarrow l(x, y) \subseteq N];$$

$$(2) (\forall x, y \in K)[|l(x, y)| \geq \aleph_0 \Rightarrow |N \cap l(x, y)| \geq \aleph_0].$$

A seguir, identificamos o produto $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$, com

$$(\square_{\alpha \in N} X_\alpha) \times (\square_{\alpha \in \nu \setminus N} X_\alpha).$$

Além disso, sejam $p_0 : \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha \rightarrow \square_{\alpha \in N} X_\alpha$, e $p_1 : \square_{\alpha \in \nu} X_\alpha \rightarrow \square_{\alpha \in \nu \setminus N} X_\alpha$, as projeções entre estes produtos e $\sigma_N : \square_{\alpha \in N} X_\alpha \rightarrow \nabla_{\alpha \in N} X_\alpha$ a projeção canônica.

Como para todo $x, y \in K$, temos que

$$[\sigma_N(p_0(x)) = \sigma_N(p_0(y))] \Rightarrow |N \cap l(x, y)| < \aleph_0,$$

então $l(x, y) \subseteq N$, por (1) e (2) e assim, $p_1(x) = p_1(y)$.

Logo, se tomarmos

$$S = \sigma_N(p_0(K))$$

e $K_s = p_0(K) \cap \sigma_N^{-1}(s)$, onde $s \in S$, então $(\forall s \in S)(\exists y_s \in \square_{\alpha \in \nu \setminus N} X_\alpha)$, tal que

$$K = \left(\bigcup_{s \in S} (K_s \times \{y_s\}) \right).$$

Como K é enumerável, podemos aplicar o lema (4.2.7). Assim, pela continuidade de σ existe uma família discreta $\langle D_s : s \in S \rangle$ de abertos-fechados em $\square_{\alpha \in N} X_\alpha$ satisfazendo

$$(\forall s \in S)(K_s \subseteq D_s);$$

$$(\forall s, t \in S)(s \neq t \implies D_s \cap D_t = \emptyset).$$

(2) Seja $\mathcal{U}$ um recobrimento aberto(em $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$) de K .

Para cada $s \in S$ e para todo $U \in \mathcal{U}$, tomemos

$$U^s = \{x \in \square_{\alpha \in N} X_\alpha : (x, y_s) \in U\},$$

e assim, para cada $s \in S$, a família $\mathcal{U}_s = \{U^s : U \in \mathcal{U}\}$ será um recobrimento aberto(em $\square_{\alpha \in N} X_\alpha$) de K_s .

Como $K_s \times \{y_s\} = K \cap (\square_{\alpha \in N} X_\alpha \times \{y_s\})$, então cada K_s é fechado em $\square_{\alpha \in N} X_\alpha$.

Pelo lema (4.2.6) e pela hipótese que $\square_{\alpha \in N} X_\alpha$ é pseudonormal, existe uma família $\mathcal{V}_s$, discreta(em $\square_{\alpha \in N} X_\alpha$) e aberta(em $\square_{\alpha \in N} X_\alpha$) que cobre K_s e refina $\mathcal{U}_s$.

Seja $c_s : \mathcal{V}_s \longrightarrow \mathcal{U}_s$, tal que para todo $V \in \mathcal{V}_s$, temos $V \subseteq (c_s(V))^s$.

Então

$$\bigcup_{s \in S} \{p_0^{-1}(V) \cap c_s(V) \cap D_s \times \{y_s\} : V \in \mathcal{V}_s\}$$

é um refinamento discreto(em $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$), aberto(em $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$) que ainda cobre K .

Pelo lema (4.2.6), isto demonstra que $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ é pseudonormal. ■

Corolário 4.2.3 *Se $\langle X_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ é uma família de espaços σ -compactos regulares, então o produto $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ é pseudonormal.*

Corolário 4.2.4 *(Miller, 1982)*

Se $\langle X_\alpha : \alpha \in \nu \rangle$ é uma família de espaços normais e enumeráveis, então o produto $\square_{\alpha \in \nu} X_\alpha$ é pseudonormal.

4.3 Mais resultados consistentes com ZFC

Nesta seção, veremos mais alguns resultados consistentes utilizando CH e o princípio combinatório $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

Definição 4.3.1 *Seja $\mathcal{U}$ uma coleção simples de retângulos em $\square_{n \in \omega} X_n$ e*

$$\mu_u : \mathcal{U} \longrightarrow \omega,$$

uma função qualquer.

Definimos $\bar{\mu}_u : (\square_{n \in \omega} X_n \setminus \bigcup \mathcal{U}) \times \omega \longrightarrow \omega$ através de

$$\bar{\mu}_u(x, n) = \max(\{\mu_u(U) : U \in \mathcal{U}(x, n)\} \cup \{\mu(x, n)\}) + n.$$

Observação (1) : $(\forall x \notin \bigcup \mathcal{U})(\forall n \in \omega)(\bar{\mu}_u(x, n) \geq n)$.

Observação (2) : $(\forall x \notin \bigcup \mathcal{U})(\forall n \in \omega)(\bar{\mu}_u(x, n) < \bar{\mu}_u(x, n+1))$.

Demonstraremos a observação (2). Como

$$(i) \mu(x, n) \leq \mu(x, n+1), \text{ e}$$

(ii) $\max(\{\mu_u(U) : u \in \mathcal{U}(x, n)\}) \leq \max(\{\mu_u(U) : U \in \mathcal{U}(x, n+1)\})$, então temos a desigualdade da observação.

Notação 1: Seja $\mathcal{U} \in P(P(X))$. Então $\bar{\mathcal{U}}$ denotará o seguinte conjunto:

$$\{\bar{U} : U \in \mathcal{U}\}.$$

Notação 2: Para a definição abaixo e o próximo teorema, dado um retângulo arbitrário $U = \prod_{j \in \omega} U_j$, o n -ésimo fator de U será denotado por $U(n)$.

Definição 4.3.2 *Seja $\mathcal{U} = \{U_j : j \in \omega\}$ uma coleção de retângulos em $\square_{n \in \omega} X_n$.*

Dizemos que $\mathcal{U}$ é tapered se

$$(\forall j \in \omega)(\forall i > j)[U_{j+1}(i) = U_j(i)].$$

Teorema 4.3.1 *Seja $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência de espaços topológicos σ -compactos, regulares.*

Sejam $\{x_\xi : \xi \in \beta\} \subseteq \square_{n \in \omega} X_n$ e $\{O_\xi : \xi \in \beta\} \subseteq \tau(\square_{n \in \omega} X_n)$, satisfazendo

$$(\forall \xi < \beta)(E(x_\xi \subseteq O_\xi).$$

Suponha que

- (1) $\beta \leq \omega_1$, ou
- (2) $\beta \leq \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Então existe uma coleção de abertos $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi < \beta\}$, satisfazendo as condições abaixo, para todo $\xi < \beta$:

- (i) $\overline{U}_\xi \subseteq O_\xi$;
- (ii) $E(x_\xi) \subseteq \bigcup_{\eta \leq \xi} \overline{U}_\eta$;
- (iii) se $U_\xi \neq \emptyset$, então $E(x_\xi) \subseteq U_\xi$;
- (iv) $\bigcup_{\eta < \xi} \overline{U}_\eta$ é fechada.

Demonstração:

Definiremos por indução sobre $\xi < \beta$:

- (a) uma seqüência $\{y_\xi : \xi < \beta\} \subseteq \square_{n \in \omega} X_n$;
- (b) uma família $\{\mathcal{U}_\xi : \xi < \beta\}$ de coleções de retângulos abertos;
- (c) uma seqüência $\{\mu_{\overline{U}_\xi} \in \overline{U}_\xi \omega : \xi < \beta\}$;

satisfazendo, para todo $\xi < \beta$, as condições abaixo:

- (1) $\bigcup \overline{\mathcal{U}}_\xi \subseteq O_\xi$;
- (2) $E(x_\xi) \subseteq \bigcup_{\eta \leq \xi} (\bigcup \overline{\mathcal{U}}_\eta)$;
- (3) se $\mathcal{U}_\xi \neq \emptyset$, então $E(x_\xi) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\xi$;
- (4) $\mathcal{V}_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} \overline{\mathcal{U}}_\eta$ é simples;
- (5) se $\mathcal{U}_\xi \neq \emptyset$, então $\mathcal{U}_\xi = \{U_{\xi,j} : j \in \omega\}$ e $\overline{\mathcal{U}}_\xi$ é simples e tapered;
- (6) se $\mathcal{U}_\xi \neq \emptyset$, então $y_\xi \notin \bigcup \mathcal{V}_\xi$;
- (7)(a) $\mu_{\mathcal{V}_\xi} = \bigcup_{\eta < \xi} \mu_{\overline{\mathcal{U}}_\eta}$ é uma função, e
 (b) $(\forall \overline{U}_{\xi,j} \in \overline{\mathcal{U}}_\xi)(\mu_{\overline{\mathcal{U}}_\xi}(\overline{U}_{\xi,j}) = \overline{\mu}_{\mathcal{V}_\xi}(y_\xi, j))$;
- (8) Para todo $U_{\xi,j} \in \mathcal{U}_\xi$,

$$U_{\xi,j} \supseteq C_{k_{\xi,j}}(0) \times \cdots \times C_{k_{\xi,j}}(j-1) \times \{y_\xi(j)\} \times \cdots,$$

onde $k_{\xi,j} = \overline{\mu}_{\mathcal{V}_\xi}(y_\xi, j)$;

(9) se $\mathcal{U}_\xi \neq \phi$, então para todo $i \in \omega$ e para todo $V \in \mathcal{V}_\xi(y_\xi, i+1) \setminus \mathcal{V}_\xi(y_\xi, i)$,

$$\overline{U}_{\xi,0}(i) \cap V(i) = \phi;$$

(10) se $\mathcal{U}_\xi \neq \phi$, então $\overline{U}_{\xi,0}$ é fortemente disjunto de todos os elementos de $\mathcal{V}_\xi \setminus \mathcal{V}_\xi(y_\xi)$.

Deste modo, fazendo $U_\xi = \bigcup \mathcal{U}_\xi$, para todo $\xi < \beta$, temos a seqüência de abertos satisfazendo (i), (ii), (iii) e (iv).

(A) Quando $\xi = 0$, façamos $\mathcal{V}_0 = \phi$ e $\mu_{\nu_0} = \phi$.

Portanto, as condições (4), (6), (9), (10) e (7.a) são trivialmente satisfeitas.

Agora, tomemos $y_0 = x_0$ e para todo $j \in \omega$, seja

$$A_{0,j} = C_{k_0,j}(0) \times \cdots \times C_{k_0,j}(j-1) \times \{y_0(j)\} \times \cdots,$$

onde $k_0, j = \overline{\mu}_{\nu_0}(y_0, j) \stackrel{(*)}{=} \mu(y_0, j) + j$.

A igualdade (*) acima, é verdadeira porque $\mu_{\nu_0} = \phi$.

Continuando, pelo lema (4.1.1), existe uma coleção $\{V_{0,j} : j \in \omega\}$ de retângulos abertos tal que para todo $j \in \omega$,

$$A_{0,j} \subseteq V_{0,j} \subseteq \overline{V}_{0,j} \subseteq O_0.$$

Seja $\mathcal{U}_0 = \{U_{0,j} : j \in \omega\}$, onde para todo $j \in \omega$:

$$U_{0,j} = \left(\prod_{i < j} V_{0,j}(i) \right) \times \left[\prod_{i \geq j} \left(\bigcap_{m \leq i} V_{0,m}(i) \right) \right].$$

Portanto, temos que $(\forall j \in \omega)(A_{0,j} \subseteq U_{0,j} \subseteq \overline{U}_{0,j} \subseteq O_0)$, logo (1) é satisfeita. Além disso, $\mathcal{U}_0$ é uma coleção **tapered** de retângulos abertos. Com isto, $\overline{\mathcal{U}}_0$ também é **tapered**.

Para ver que $\overline{\mathcal{U}}_0$ é simples, basta repetir o argumento usado na afirmação que está contido na demonstração do lema (4.2.2).

Assim, temos que $\overline{\mathcal{U}}_0$ é simples e **tapered**. Logo a condição (5) é satisfeita.

Prosseguindo, temos

$$E(x_0) = E(y_0) = \bigcup_{j \in \omega} A_{0,j} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0,$$

assim, (2) e (3) são satisfeitas.

Para concluir este caso, seja $\mu_{\overline{\mathcal{U}}_0} : \overline{\mathcal{U}}_0 \rightarrow \omega$ definida por

$$\mu_{\overline{\mathcal{U}}_0}(\overline{U}_{0,j}) = \overline{\mu}_{\nu_0}(y_0, j) = \mu(y_0, j) + j (= k_0, j).$$

Portanto, (7.b) e (8) são satisfeitas.

(B) Suponha que para todo $\eta < \xi$, já definimos $y_\eta, \mathcal{U}_\eta$ e $\mu_{\bar{\mathcal{U}}_\eta}$, satisfazendo as condições (1) a (10).

Agora, precisamos definir $y_\xi, \mathcal{U}_\xi$ e $\mu_{\bar{\mathcal{U}}_\xi}$ satisfazendo estas mesmas condições.

(B1) Primeiro, veremos que (4) é verdadeira, i.e., $\mathcal{V}_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} \bar{\mathcal{U}}_\eta$ é simples.

Para isto, precisaremos da seguinte:

Afirmção : Sejam $\eta_1 < \eta_2 < \xi$. Então

$$(\forall j \in \omega)[\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j} \cap \bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, j} \neq \emptyset \implies \mu_{\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1}}(\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j}) < \mu_{\bar{\mathcal{U}}_{\eta_2}}(\bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, j})].$$

De fato, fixemos $j \in \omega$ e suponhamos que $\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j} \cap \bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, j} \neq \emptyset$. Logo, $\mathcal{U}_{\eta_2} \neq \emptyset$ (b1).

Como $\bar{\mathcal{U}}_{\eta_2}$ é tapered, existe $N \in \omega$ tal que

$$(\forall k \geq N)[\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j}(k) \cap \bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, 0}(k) \neq \emptyset].$$

Por (10) e (b1), $\bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, 0}$ é fortemente disjunto de todos os elementos de $\mathcal{V}_{\eta_2} \setminus \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2})$.

Pela definição de $\mathcal{V}_{\eta_2}$, ocorre que $\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j} \in \mathcal{V}_{\eta_2}$. Portanto,

$$\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j} \in \mathcal{V}_{\eta_2} = (\mathcal{V}_{\eta_2} \setminus \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2})) \cup (\mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2})),$$

e como $\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j}$ não é fortemente disjunto de $\bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, 0}$, então

$$\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j} \in \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}). (b2)$$

Agora, (6) e (b1) implicam que $y_{\eta_2} \notin \bigcup \mathcal{V}_{\eta_2}$. Mas $\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j} \in \mathcal{V}_{\eta_2}$, logo, $y_{\eta_2} \notin \bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j}$, e assim

$$\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j} \notin \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}, 0).$$

Com isto, ocorre que para algum $i \in \omega$,

$$\bar{\mathcal{U}}_{\eta_1, j} \in \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}, i+1) \setminus \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}, i). (b3)$$

Como temos (b1), então por (9), para todo $k \in \omega$ e $V \in \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}, k+1) \setminus \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}, k)$, temos

$$\bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, 0}(k) \cap V(k) = \emptyset. (b4)$$

Como $\bar{\mathcal{U}}_{\eta_2}$ é tapered, para todo $k \geq j$,

$$\bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, j}(k) = \bar{\mathcal{U}}_{\eta_2, 0}(k).$$

Logo, por (b4), para todo $k \geq j$ e para todo $V \in \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}, k+1) \setminus \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}, k)$, temos

$$\overline{U}_{\eta_2,j}(k) \cap V(k) = \emptyset. (b5)$$

Suponhamos que $i \geq j$, então (b3) e (b5) implicam que

$$\overline{U}_{\eta_2,j}(i) \cap \overline{U}_{\eta_1,j}(i) = \emptyset,$$

e assim $\overline{U}_{\eta_2,j} \cap \overline{U}_{\eta_1,j} = \emptyset$, contradição.

Portanto, temos $i < j$.

Por (7.a), $\mu_{\mathcal{V}_{\eta_2}}(\overline{U}_{\eta_1,j}) = \mu_{\overline{U}_{\eta_1}}(\overline{U}_{\eta_1,j})$. Mas pela definição de $\overline{\mu}_{\mathcal{V}_{\eta_2}}$ e

- (i) $y_{\eta_2} \notin \bigcup \mathcal{V}_{\eta_2}$,
- (ii) $\mathcal{V}_{\eta_2}$ é simples,
- (iii) $\overline{U}_{\eta_1,j} \in \mathcal{V}_{\eta_2}(y_{\eta_2}, i+1)$, onde $i < j$ (veja (b3)).
- (iv) $i+1 > 0$,

segue que

$$\overline{\mu}_{\mathcal{V}_{\eta_2}}(y_{\eta_2}, i+1) > \mu_{\overline{\mathcal{V}_{\eta_2}}}(\overline{U}_{\eta_1,j}) = \mu_{\overline{U}_{\eta_1}}(\overline{U}_{\eta_1,j}). (b6)$$

Agora, como $i < j$, então $j \geq i+1$. Então pela obs.2, temos

$$\overline{\mu}_{\mathcal{V}_{\eta_2}}(y_{\eta_2}, j) \geq \overline{\mu}_{\mathcal{V}_{\eta_2}}(y_{\eta_2}, i+1).$$

Entretanto, por (7.a),

$$\mu_{\overline{U}_{\eta_2}}(\overline{U}_{\eta_2,j}) = \overline{\mu}_{\mathcal{V}_{\eta_2}}(y_{\eta_2}, j).$$

Portanto,

$$\mu_{\overline{U}_{\eta_2}}(\overline{U}_{\eta_2,j}) = \overline{\mu}_{\mathcal{V}_{\eta_2}}(y_{\eta_2}, j) \geq \overline{\mu}_{\mathcal{V}_{\eta_2}}(y_{\eta_2}, i+1) > \mu_{\overline{U}_{\eta_1}}(\overline{U}_{\eta_1,j}),$$

i.e., $\mu_{\overline{U}_{\eta_1}}(\overline{U}_{\eta_1,j}) < \mu_{\overline{U}_{\eta_2}}(\overline{U}_{\eta_2,j})$.

E assim, terminamos de demonstrar a afirmação.

Agora veremos que $\mathcal{V}_{\xi}$ é simples.

Sejam $x \in \square_{n \in \omega} X_n$ e $n \in \omega$ e suponha que $|\mathcal{V}_{\xi}(x, n)| \geq \aleph_0$.

Defina para todo $\eta < \xi$,

$$T_{\eta} = \{j \in \omega : \overline{U}_{\eta,j} \in \mathcal{U}_{\eta}(x, n)\},$$

e façamos $T = \bigcup_{\eta < \xi} T_{\eta}$.

Caso1 : Suponha que T não seja limitado em ω .

Pela hipótese assumida acima, existe uma seqüência

$$\{\overline{U}_{\eta_m, j_m} \in \mathcal{V}_\xi : m \in \omega\}$$

satisfazendo as seguintes condições

- (1) $n \leq j_0 < j_1 < \dots$,
- (2) $\overline{U}_{\eta_m, j_m} \in \overline{\mathcal{U}}_{\eta_m}(x, n)$.

Como, para todo $i \geq n$, $x_i \in \overline{U}_{\eta_m, j_m}(i)$, e $j_m \geq n$, segue que

$$\overline{U}_{\eta_m, j_m} \supseteq C_{k_{\eta_m, j_m}}(0) \times \dots \times C_{k_{\eta_m, j_m}}(n-1) \times \{x_n\} \times \dots$$

onde por (8), $k_{\eta_m, j_m} = \overline{\mu}_{\nu_{\eta_m}}(y_{\eta_m}, j_m) \geq j_m$.

Por outro lado, como $j_0 < j_1 < \dots$,

$$\bigcup_{m \in \omega} \overline{U}_{\eta_m, j_m} \supseteq \bigcup_{m \in \omega} (C_{k_{\eta_m, j_m}}(0) \times \dots \times C_{k_{\eta_m, j_m}}(n-1) \times \{x_n\} \times \dots) = E(x, n).$$

Portanto, $E(x, n) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_\xi$.

Caso2 : Suponha que T seja limitado em ω .

Então para algum $j \in \omega$, existe uma seqüência

$$\{\overline{U}_{\eta_m, j} \in \mathcal{V}_\xi : m \in \omega\}$$

satisfazendo

- (1) $\eta_0 < \eta_1 < \dots$,
- (2) $\overline{U}_{\eta_m, j} \in \overline{\mathcal{U}}_{\eta_m}(x, n)$.

Assim, teremos dois casos.

Caso2a : Suponha que $j \geq n$.

Como para todo $n \in \omega$, $\overline{U}_{\eta_m, j} \in \overline{\mathcal{U}}_{\eta_m}(x, n)$, então

$$C_{k_{\eta_m, j}}(0) \times \dots \times C_{k_{\eta_m, j}}(n-1) \times \{x_n\} \times \dots \subseteq \overline{U}_{\eta_m, j},$$

onde $k_{\eta_m, j} = \overline{\mu}_{\nu_{\eta_m}}(y_{\eta_m}, j) = \mu_{\overline{\mathcal{U}}_{\eta_m}}(\overline{U}_{\eta_m, j})$.⁶

Por outro lado, para todo $m \in \omega$,

$$C_0(0) \times \dots \times C_0(n-1) \times \{x_n\} \times \dots \subseteq \overline{U}_{\eta_m, j},$$

logo, temos que $\bigcap_{m \in \omega} \overline{U}_{\eta_m, j} \neq \phi$.

⁶Isto é consequência da condição (8) e da hipótese $j \geq n$

Assim, segue da afirmação que

$$\mu_{\bar{U}_{\eta_0}}(\bar{U}_{\eta_0,j}) < \mu_{\bar{U}_{\eta_1}}(\bar{U}_{\eta_1,j}) < \dots.$$

i.e., $k_{\eta_0,j} < k_{\eta_1,j} < \dots$, portanto

$$\bigcup_{m \in \omega} \bar{U}_{\eta_m,j} \supseteq \bigcup_{m \in \omega} (C_{k_{\eta_m,j}}(0) \times \dots \times C_{k_{\eta_m,j}}(n-1) \times \{x_n\} \times \dots) = E(x, n).$$

Então, $E(x, n) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_\xi$.

Caso2b : Suponha que $j < n$.

Então

$$(C_{k_{\eta_m,j}}(0) \times \dots \times C_{k_{\eta_m,j}}(j-1)) \times (\bar{U}_{\eta_m,j}(j) \times \dots \times \bar{U}_{\eta_m,j}(n-1)) \times \{x_n\} \times \dots \subseteq \bar{U}_{\eta_m,j}.$$

Como $\bar{U}_{\eta_m}$ é tapered, então para todo $i \geq n$ temos que $\bar{U}_{\eta_m,n}(i) = \bar{U}_{\eta_m,j}(i)$, e assim

$$(\forall i \geq n)(x_i \in \bar{U}_{\eta_m,n}(i)).$$

Logo, para todo $m \in \omega$,

$$C_{k_{\eta_m,n}}(0) \times \dots \times C_{k_{\eta_m,n}}(n-1) \times \{x_n\} \times \dots \subseteq \bar{U}_{\eta_m,n}$$

onde $k_{\eta_m,n} = \mu_{\bar{U}_{\eta_m,n}}(\bar{U}_{\eta_m,n})$.

Então $\bigcap_{m \in \omega} \bar{U}_{\eta_m,n} \neq \emptyset$ e assim, pela afirmação

$$\mu_{\bar{U}_{\eta_0}}(\bar{U}_{\eta_0,n}) < \mu_{\bar{U}_{\eta_1}}(\bar{U}_{\eta_1,n}) < \dots,$$

i.e., $k_{\eta_0,n} < k_{\eta_1,n} < \dots$, e portanto,

$$E(x, n) = \bigcup_{m \in \omega} (C_{k_{\eta_m,n}}(0) \times \dots \times C_{k_{\eta_m,n}}(n-1) \times \{x_n\} \times \dots) \subseteq \bigcup_{m \in \omega} \bar{U}_{\eta_m,n}.$$

Com isto, temos que $E(x, n) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_\xi$.

Logo, $\mathcal{V}_\xi$ é simples e a condição (4) está satisfeita.

(B2) Vamos verificar que as outras condições também são verdadeiras.

Caso a : Se $E(x_\xi) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_\xi$, então façamos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\xi &= \emptyset, \\ y_\xi &= x_\xi, \\ \mu_{\bar{U}_\xi} &= \emptyset. \end{aligned}$$

As condições (1), (3), (5), (6), (8), (10), são trivialmente satisfeitas, pois $\mathcal{U}_\xi = \emptyset$.

Por (2), temos

$$E(x_\xi) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} (\bigcup \overline{U}_\eta).$$

Por (7.a), como $\mu_{\overline{U}_\eta}$ é uma função para $\eta < \xi$, basta mostrar que $\overline{U}_{\eta_1, j_1} \neq \overline{U}_{\eta_2, j_2}$, sempre que $\overline{U}_{\eta_1, j_1} \in \overline{U}_{\eta_1}$, $\overline{U}_{\eta_2, j_2} \in \overline{U}_{\eta_2}$ e $\eta_1 \neq \eta_2$.

Podemos assumir que $\eta_1 < \eta_2 < \xi$.

De (8), temos que $y_{\eta_2} \in \overline{U}_{\eta_2, j_2}$, e de (6) segue que $y_{\eta_2} \notin \overline{U}_{\eta_1, j_1}$.

Logo, $\overline{U}_{\eta_1, j_1} \neq \overline{U}_{\eta_2, j_2}$.

A condição (7.b) é satisfeita porque $\overline{U}_\xi = \phi$.

Caso b : $E(x_\xi) \not\subseteq \bigcup \mathcal{V}_\xi$.

Seja $y_\xi \in E(x_\xi) \setminus (\bigcup \mathcal{V}_\xi)$.

Através da mesma demonstração do Caso a, temos que (7.a) é verdadeira. Assim, $\overline{\mu}_{\mathcal{V}_\xi}$ está bem definida.

Para todo $j \in \omega$, seja

$$A_{\xi, j} = C_{k_{\xi, j}}(0) \times \cdots \times C_{k_{\xi, j}}(j-1) \times \{y_\xi(j)\} \times \cdots,$$

onde $k_{\xi, j} = \overline{\mu}_{\mathcal{V}_\xi}(y_\xi, j)$.

Pelo lema (4.1.2), existe um retângulo aberto $V_{\xi, 0}$ tal que $y_\xi \in V_{\xi, 0}$ e as condições (i) e (ii) do lema são satisfeitas, tomando $\mathcal{U} = \mathcal{V}_\xi$.

Além disso, podemos tomar tal retângulo aberto satisfazendo

$$\overline{V}_{\xi, 0} \subseteq O_\xi.$$

Pelo lema (4.1.1), existe uma coleção $\{V_{\xi, j} : j > 0\}$ tal que

$$(\forall j > 0)(A_{\xi, j} \subseteq V_{\xi, j} \subseteq \overline{V}_{\xi, j} \subseteq O_\xi).$$

Seja $\mathcal{U}_\xi = \{U_{\xi, j} : j \in \omega\}$, onde para todo $j \in \omega$,

$$U_{\xi, j} = \left(\prod_{i < j} V_{\xi, j}(i) \right) \times \left[\prod_{i \geq j} \left(\bigcap_{m \leq i} V_{\xi, m}(i) \right) \right],$$

Então, para todo $j \in \omega$,

$$A_{\xi, j} \subseteq U_{\xi, j} \subseteq \overline{U}_{\xi, j} \subseteq O_\xi,$$

e $\overline{U}_\xi$ é tapered.

Portanto, segue que

$$E(x_\xi) = E(y_\xi) = \bigcup_{j \in \omega} A_{\xi,j} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\xi \subseteq \bigcup \overline{\mathcal{U}}_\xi \subseteq O_\xi.$$

Pelo mesmo argumento usado para provar a afirmação da demonstração do lema (4.2.2), temos que $\overline{\mathcal{U}}_\xi$ é simples.

Assim, (1), (2), (3), (5), (6), (8), (9), (10) são satisfeitas.

Por (7.b), seja $\mu_{\overline{\mathcal{U}}_\xi} : \overline{\mathcal{U}}_\xi \rightarrow \omega$ definida através de

$$\mu_{\overline{\mathcal{U}}_\xi}(\overline{U}_{\xi,j}) = \overline{\mu}_{V_\xi}(y_\xi, j),$$

onde $\mu_{V_\xi} = \bigcup_{\eta < \xi} \mu_{\overline{\mathcal{U}}_\eta}$. ■

Deste ponto em diante, fixaremos uma seqüência $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ de espaços topológicos σ -compactos, zero-dimensionais e regulares.

Proposição 4.3.1 *Seja $\{x_\xi : \xi < \beta\} \subseteq \square_{n \in \omega} X_n$ e tomemos $A = \bigcup_{\xi < \beta} E(x_\xi)$.*

Suponha que

$$(1) \beta \leq \omega_1, \text{ ou}$$

$$(2) \beta \leq \mathfrak{d} \text{ e } (\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0).$$

Então A é ultraparacompacto.

Demonstração:

Seja $\mathcal{O}$ um recobrimento de A , onde cada elemento de $\mathcal{O}$ é um aberto de A .

Podemos supor que $\mathcal{O}$ é um recobrimento aberto-fechado de A , pois $\square_{n \in \omega} X_n$ é zero-dimensional.

Como para todo $\xi < \beta$, $L(E(x_\xi)) = \aleph_0$, então $\mathcal{O}$ admite um subrecobrimento enumerável $\mathcal{O}_\xi = \{O_{\xi,j} : j \in \omega\}$, cobrindo $E(x_\xi)$.

Tomemos $O_\xi = \bigcup \mathcal{O}_\xi$. Então $E(x_\xi) \subseteq O_\xi$ e este conjunto O_ξ é aberto em A , logo, existe um aberto W_ξ em $\square_{n \in \omega} X_n$ tal que

$$W_\xi \cap A = O_\xi.$$

Deste modo, para todo $\xi < \beta$, existe $W_\xi \in \tau(\square_{n \in \omega} X_n)$ satisfazendo $E(x_\xi) \subseteq W_\xi$.

Agora, pelo Teorema (4.3.1), existe uma coleção $\{U_\xi : \xi < \beta\}$ de abertos-fechados em $\square_{n \in \omega} X_n$, tal que para todo $\xi < \beta$:

- (i) $U_\xi \subseteq W_\xi$;
- (ii) $E(x_\xi) \subseteq \bigcup_{\eta \leq \xi} U_\eta$;
- (iii) $\bigcup_{\eta < \xi} U_\eta$ é fechada.

Assim, se tomarmos $V_\xi = U_\xi \setminus (\bigcup_{\eta < \xi} U_\eta)$, para todo $\xi < \beta$, então

$$\{V_\xi : \xi < \beta\},$$

é uma família disjunta de abertos-fechados em $\square_{n \in \omega} X_n$, cobrindo A .

A seguir, para cada $\xi < \beta$ e $j \in \omega$, seja

$$W_{\xi,j} = O_{\xi,j} \setminus (\bigcup_{i < j} O_{\xi,i}).$$

Então, para todo $\xi < \beta$, $\{W_{\xi,j} : j \in \omega\}$ é um recobrimento disjunto de $E(x_\xi)$.

Para terminar, tomemos para todo $\xi < \beta$ e $j \in \omega$,

$$V_{\xi,j} = V_\xi \cap W_{\xi,j},$$

e seja $\mathcal{V} = \{V_{\xi,j} : \xi < \beta, j \in \omega\}$. Então, $\mathcal{V}$ é um refinamento disjunto de $\mathcal{O}$ que cobre A . ■

Como consequência da proposição anterior, temos que os subespaços fechados “pequenos” de $\square_{n \in \omega} X_n$ são ultraparacompactos. Mais precisamente,

Teorema 4.3.2 *Sejam $F \stackrel{\text{fech.}}{\subseteq} \square_{n \in \omega} X_n$ e $\{x_\xi : \xi < \beta\} \subseteq \square_{n \in \omega} X_n$ tais que*

$$F \subseteq \bigcup_{\xi < \beta} E(x_\xi).$$

Suponha que

- (i) $\beta \leq \omega_1$, ou
- (ii) $\beta \leq \mathfrak{d}$ e $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$.

Então F é ultraparacompacto.

Continuando, temos os seguintes resultados consistentes com ZFC:

Teorema 4.3.3 (CH)

Se $|\square_{n \in \omega} X_n| = \mathfrak{c}$, então $\square_{n \in \omega} X_n$ é ultraparacompacto.

Teorema 4.3.4 ($\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$)

Se $(\forall n \in \omega)(\chi(X_n) = \aleph_0)$, então $\prod_{n \in \omega} X_n$ é ultraparacompacto.

Corolário 4.3.1 (Lawrence, 1989)

Se $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, então $\prod^\omega \mathbb{Q}$ é ultraparacompacto.

Lista de Símbolos

$P(X)$	(iii)
$\mathfrak{c}$	(iii)
$[A]^\mu, [A]^{<\mu}, [A]^{\leq\mu}$	(iii)
$\tau(X)$	(iii)
$\overline{A}, \overline{A}^X$	(iii)
$\text{Fr}(A)$	(iii)
$\bigoplus_{\alpha \in \nu} X_\alpha$	(iv)
$A \stackrel{\text{fech.}}{\subseteq} X$	(iv)
$A \stackrel{\text{ab.}}{\subseteq} X$	(iv)
$\text{o.t.}(X)$	(iv)
CH	(iv)
$cf(\beta)$	(iv)
ZFC	(iv)
$\text{ord}(B, \mathcal{A})$	2
c-p	3
$X^{(\alpha)}$	6
$r(x)$	6
ind	13
$\lambda\text{-CWH}$	16
$\lambda\text{-CWN}$	16
CWH	17
CWN	17
$r(X)$	18
$\chi(X)$	26
G_λ, G_δ	27
$G_\lambda(X)$	27
$d(X)$	29

$D(X)$	31
$h(T)$	36
$L(X)$	37
$\langle {}^\omega\omega, \leq^* \rangle$	59
$\mathfrak{b}$	59
$\mathfrak{d}$	59
$E(A, k), E(A)$	72
$\mathcal{U}(x, k), \mathcal{U}(x)$	74
μ_k, μ	82
$\mu_{\mathcal{U}}$	94
$\overline{\mu}_{\mathcal{U}}$	94

Índice alfabético

altura	36
árvore	36
base exterior	7
cadeia	36
caminho	37
caráter, $\chi(X)$	26
coletivamente Hausdorff(CWH)	17
coletivamente normal(CWN)	17
completamente metrizável	29
decomposição de Cantor-Bendixson	6
densidade, $d(X)$	29
discreta	2
discretamente pseudonormal	86
dominante	59
enumerávelmente-estrela	51
estritamente dominante	86
família cofinal	62
finitamente estrela	51
fortemente disjuntos	74
fracamente submetacompacto	5
função parcial	32
funcionalmente fechado	51
funcionalmente aberto	52
Grau de Lindelöf, $L(X)$	37
κ -scattered	6
Lindelöf	4
λ -escala	59

metacompacto	5
ν -pseudonormal	80
ν -metrizável	65
não-limitado	59
nível	36
normalizada	16
paracompacto	4
para-Lindelöf	17
paranormal	27
perfeito	26
P-espaco	12
P_λ -espaco	56
pontualmente finito(enumerável)	3
posto do ponto x , $r(x)$	6
posto, $r(X)$	18
preserva fecho	3
produto-nabla	44
produto Tychonoff	25
produto box parcial(total)	25
recobrimento	2
recobrimento θ -fraco	5
refinamento	2
screenable	17
separada	16
simples	74
σ -localmente finito	4
σ -discreto	4
submetacompacto	5

tapered	94
totalmente paracompacto(c-p)	7
totalmente paracompacto(c-p) c/respeito a	7
topologia Tychonoff	24
topologia box parcial(total)	24
θ -refinável	5
θ -seqüência de recobrimentos	5
ultraparacompacto	4
zero-dimensional	4

Bibliografia

Borges, C.J.

- [1969] On a counterexample of A.H.Stone,
Quart.J.Math.Oxford, (2)20, 91-95

Burke, D.K.

- [1984] Covering properties,
in *Handbook of Set-Theoretic Topology*,
ed. K.Kunen and J.Vaughn,
North-Holland, Amsterdam, 347-422

van Douwen, E.K.

- [1975] The box product of countably many metrizable spaces
need not be normal,
Fund.Math., 88, 127-132
- [1977] Another nonnormal box product.
Gen.Topology Appl., 7, 71-76
- [1980] Covering and Separation properties of box products.
in *Surveys in General Topology*, ed. G.M.Reed,
Academic Press, 55-129
- [1984] The integers and topology,
in *Handbook of Set-Theoretic Topology*,
ed. K.Kunen and J.Vaughn,
North-Holland, Amsterdam, 111-167

Engelking, R.

- [1989] *General Topology*,
Sigma Series in Pure Mathematics, vol.6,
Heldermann Verlag, Berlin

Hdeib, H.Z. and Pareek, C.M.

- [1989] A generalization of scattered spaces,
Topology Proc., 14, 59-74

Hechler, S.H.

- [1974a] On the existence of certain cofinal subsets of ${}^{\omega}\omega$,
Proc.Symp.Pure Math., 13(part II).
Amer.Math.Soc., Providence, 155-173
- [1974b] A dozen small uncountable cardinals.
TOPO72- Gen.Topology Appl.
Springer Lecture Notes in Mathematics 378, 207-218

Hodel, R.

- [1984] Cardinal Functions I,
in *Handbook of Set-Theoretic Topology*,
ed. K.Kunen and J.Vaughn,
North-Holland, Amsterdam, 1-61

Jech, T.

- [1978] *Set Theory*,
Pure and Applied Mathematics,
Academic Press

Junnla, H.J.K.

- [1992] Covering properties,
in *Recent Progress in General Topology*,
ed. N.Hušek and J.van Mill,
North-Holland, Amsterdam, 445-452

Kunen, K.

- [1973] Some comments on box products,
Coll.Math.Soc.János Bolyai, 10,
1011-1016
- [1978] Paracompactness of box products of compact spaces,
Trans.Amer.Math.Soc., 240, 307-316
- [1980] *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*,
Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102,
North-Holland, Amsterdam

Lawrence, L.B.

- [1988] The box product of countably many copies of the rationals is
consistently paracompact,
Trans.Amer.Math.Soc., (309)2, 787-796
- [19...] Failure of normality in the box product of uncountably many
real lines, preprint
- [19...] Toward a theory of normality and paracompactness in box
products, preprint

Miller, A.W.

- [1982] On box products,
Topology Appl., 14, 313-317

Pol, R.

- [1974] Short proofs of two theorems on cardinality of topological spaces,
Bull.Acad.Polon.Sci., (22)12, 1245-1249

Roitman, J.

- [1979] Paracompact box products in forcing extensions,
Fund.Math., 102, 219-228
- [1979] More paracompact box products,
Proc.Amer.Math.Soc., (74)1, 171-176

Rudin, M.E.

- [1972] The box product of countably many compact metric spaces,
Gen.Topology Appl., 2, 293-298
- [1974] Countable box products of ordinals,
Trans.Amer.Math.Soc., 192, 121-128
- [1975] *Lectures on Set Theoretic Topology*,
Regional Conf.Series in Math., 23,
Amer.Math.Soc., Providence
- [1988] A few topological problems,
Comm.Math.Univ.Carolinae, (29)4, 743-746

Steen, L.A. and Seebach, J.A.

- [1986] *Counterexamples in Topology*,
Springer-Verlag

Stone, A.H.

- [1948] Paracompactness and product spaces,
Bull.Amer.Math.Soc., 54, 977-982

Tall, F.D.

- [1984] Normality versus Collectionwise Normality,
in *Handbook of Set-Theoretic topology*,
ed. K.Kunen and J.Vaughn,
North-Holland, Amsterdam, 685-732
- [19...] Topological Problems for Set-theorists,
preprint

Telgárski, R.

- [1968] Total paracompactness and paracompact dispersed spaces,
Bull.Acad.Polon.Sci., (16)7, 567-572

Watson, S.

- [1988] Number versus Size,
Proc.Amer.Math.Soc., (102)3, 761-764

Williams, S.W.

- [1976] Is $\square^\omega(\omega + 1)$ paracompact?,
Topology Proc., 1, 141-146
- [1984] Box Products,
in *Handbook of Set-Theoretic Topology*,
ed. K.Kunen and J.Vaughn,
North-Holland, Amsterdam, 170-200

Wingers, L.

- [1994] Box Products of σ -compact spaces,
Topology Appl, 56, 185-197