SUPERFÍCIES DE TIPO MÍNIMO EM S^3

Roseli Nozaki Grave de Andrade

TESE DEFENDIDA
NO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria**

Orientador: **Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito**

– São Paulo, julho de 1994 –

SUPERFÍCIES DE TIPO MÍNIMO EM S^3

Este exemplar corresponde à redação
da tese devidamente corrigida
e defendida por Roseli Nozaki Grave de Andrade
e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 09 de janeiro de 1995.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito (orientador)

Prof. Dr. Plínio Amarante Quirino Simões

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Prof. Dr. Ricardo Sá Earp

Prof. Dr. Francesco Mercuri

Resumo

Introduzimos a noção de superfície de Weingarten de tipo mínimo em S^3 . Aplicando algumas técnicas da Geometria Equivariante, construímos exemplos rotacionais desses objetos e estudamos o “problema do mergulho”

Abstract

We introduce the notion of minimal type Weingarten surface in S^3 . Applying some Equivariant Geometry techniques we construct rotational examples of those objects and we study the embeddness problem.

Aos meus queridos

Paulo, Luciana e Tatiana

Agradecimentos

Ao amigo e orientador Fabiano Brito, pela oportunidade, pelas diretrizes seguras, pelo permanente incentivo e pelas valiosas conversas matemáticas.

À minha mãe: uma fonte constante de amor, segurança, coragem e força.

Aos amigos, pelos momentos de alegre descontração e pelo auxílio e encorajamento nas horas de dificuldade.

Ao DMA-CCE-UEM, pela oportunidade e sem o apoio do qual este trabalho não se realizaria.

Aos colegas Luiz Henry e Edson por algumas estimativas numéricas.

Ao Walter, pelo excelente trabalho de edição.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram na execução deste trabalho.

Índice

Introdução	1
 Capítulo 1	
Preliminares	5
1.1 Classes de superfícies especiais invariantes pela aplicação de Gauss em S^3	5
1.2 Sobre a EDO que determina a curva geradora de uma superfície de Weingarten especial rotacional em S^3	17
 Capítulo 2	
Superfícies especiais de tipo mínimo em S^3	24
2.1 Conceituação	24
2.2 Demonstração do Teorema A	26
 Capítulo 3	
Sobre certas superfícies rotacionais especiais de tipo mínimo em S^3	37
3.1 Sobre a EDO satisfeita por uma curva geradora	37
3.2 Sobre o problema do mergulho	40
 Referências	49

Introdução

Existe algum toro mínimo mergulhado em S^3 além do toro de Clifford?

A resposta a esta pergunta é desconhecida. Mergulhos mínimos de superfícies compactas de maior gênero em S^3 foram introduzidos por B. Lawson [L]. Além disso, pelo teorema de Hopf [Ho], as esferas totalmente geodésicas são os únicos exemplos de imersões mínimas de superfícies de gênero 0 em S^3 .

As superfícies rotacionais são, num certo sentido, aquelas que representam a classe natural de exemplos de superfícies mínimas em S^3 , uma vez estudadas as homogêneas. A busca de um contra-exemplo para a pergunta inicial deveria pois começar pelas rotacionais. Isso foi feito em [O1], [HL], [M] e [R2]. Verificou-se que as únicas superfícies compactas mínimas rotacionais mergulhadas em S^3 são as 2-esferas totalmente geodésicas e o toro de Clifford. Mergulhos rotacionais de superfícies compactas de curvatura média constante H em S^3 podem ser vistos, por exemplo, em [R1], para todo valor positivo de $H \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Uma propriedade curiosa das superfícies mínimas em S^3 é a da invariância pela aplicação de Gauss. Precisamente, seja $M^2 \hookrightarrow S^3$ uma imersão mínima e $g : M^2 \rightarrow S^3$ a aplicação normal de Gauss que associa a cada ponto $p \in M^2$ o vetor normal unitário $\mathbf{n}(p)$, tangente a S^3 e normal a M^2 no ponto p . Se a segunda forma fundamental, $II(p)$, de M^2 em p é não degenerada, digamos, $\det(A_{\mathbf{n}}(p)) \neq 0$ ($A_{\mathbf{n}}(p)$ é a aplicação linear auto-adjunta associada a $II(p)$), então $g(M^2)$ é uma superfície regular de S^3 . Nessas condições, se M é mínima, então $g(M)$ também é mínima. Tal invariância não se dá, por exemplo, na classe das superfícies de curvatura média constante.

No primeiro capítulo deste trabalho introduzimos as classes de superfícies especiais de Weingarten que satisfazem essa invariância.

Chamamos **superfície especial de Weingarten** a uma superfície $M \hookrightarrow S^3$ cujas curvaturas, média e de Gauss-Kronecker, denotadas respectivamente por H e K_ϵ , satisfazem uma relação do tipo

$$H = f(H^2 - K_\epsilon) ,$$

onde $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[0, +\infty[$ e real analítica em $]0, +\infty[$.

Superfícies especiais de Weingarten foram estudadas por P.Hartman & A. Wintner ([HW]), S. S. Chern ([C]), H. Hopf ([Ho]) e R. Bryant ([B]). Recentemente, em [SaET1], R. Sá Earp e E. Toubiana introduziram a noção de superfície especial de Weingarten de tipo mínimo em $\mathbb{R}^3$. Basicamente, uma tal classe de superfícies satisfaz o Princípio do Máximo e contém os planos de $\mathbb{R}^3$. Tal conceito estende-se a $\mathbb{H}^3$ sem modificações básicas, porém, com resultados surpreendentes.

Introduzimos, no Capítulo 2, a noção de superfícies de tipo mínimo em S^3 .

As classes de superfícies de Weingarten especiais em S^3 invariantes pela aplicação de Gauss, que obtemos na Proposição 1.1.2 do Capítulo 1, serão denominadas **classes de superfícies de Weingarten de tipo mínimo**, tendo em vista as seguintes analogias com a classe das superfícies mínimas (além daquela dada por tal invariância):

1. $f(0) = 0$, ou seja, as 2-esferas totalmente geodésicas estão na classe.
2. Sobre cada superfície fechada M , em qualquer das classes obtidas, a curvatura K_ϵ de Gauss-Kronecker é negativa.
3. Em cada tal classe existe um único toro flat mergulhado em S^3 .

Utilizamos a técnica da Geometria Equivariante para estudar qualitativamente superfícies rotacionais especiais de tipo mínimo em S^3 , uma vez que estas são invariantes pela ação de um certo subgrupo G das isometrias de S^3 . Desta forma, o estudo de uma tal

superfície se reduz à análise de uma certa equação diferencial de segunda ordem satisfeita pela curva geradora de uma tal superfície, no espaço de órbitas, S^3/G , da ação de G sobre S^3 .

O principal resultado que obtemos no Capítulo 2 é o seguinte:

Teorema A *Em cada classe de superfícies especiais de tipo mínimo, existe uma quantidade infinita de superfícies compactas de gênero um, imersas em S^3 .*

O Capítulo 3 é reservado ao estudo das classes de superfícies especiais rotacionais dadas por funções f do tipo $f(x) = c\sqrt{x}$, onde c é uma constante real no intervalo $]0, 1[$. A importância do estudo particular de tais classes de superfícies é a obtenção do seguinte teorema:

Teorema B *Em cada classe de superfícies especiais de tipo mínimo, dada por uma função do tipo $f(x) = c\sqrt{x}$, $c \in]0, 1[$, a única superfície especial compacta de gênero um e mergulhada em S^3 é o toro flat*

$$S^1 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right) \times S^1 \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}} \right) ,$$

onde $\alpha = \frac{1+c}{1-c}$.

O ponto crucial da demonstração do teorema B é a apresentação de estimativas para os períodos de curvas geradoras de tais superfícies rotacionais de tipo mínimo em S^3 . Curiosamente as equações diferenciais de segunda ordem correspondentes às superfícies de tipo mínimo das classes $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$, são semelhantes às das hipersuperfícies mínimas de Otsuki em S^{n+1} (veja [O1]). Utilizamos a técnica desenvolvida por Otsuki e Furuya em [O1], [O2] e [F], para estimar os períodos das curvas geradoras das superfícies em questão.

Fixada uma classe de superfícies de tipo mínimo em S^3 , o problema da existência, ou

não, de exemplos rotacionais compactos mergulhados, além do único toro flat mergulhado em S^3 , permanece ainda sem resposta. O que apresentamos no Capítulo 3 é uma resposta de existência desses exemplos para classes particulares de superfícies de tipo mínimo. classes estas dadas por involuções cujos gráficos são certas hipérboles. Numa tal classe vale a condição de elipticidade para a equação diferencial parcial correspondente.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Classes de superfícies especiais invariantes pela aplicação de Gauss em S^3

Seja $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ a esfera euclideana unitária.

Seja $M^2 \hookrightarrow S^3$ uma superfície conexa, orientável, imersa em S^3 .

Para cada $p \in M$, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, em $T_p S^3$ o decompõe na soma direta $T_p S^3 = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$, onde $(T_p M)^\perp$ denota o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p S^3$. Segundo esta decomposição, se $v \in T_p S^3$, escrevemos $v = v^\top + v^\perp$, onde $v^\top$ e $v^\perp$ são vetores, respectivamente, em $T_p M$ e $(T_p M)^\perp$. Escolhamos $\mathbf{n}(p)$ em $(T_p M)^\perp$, $|\mathbf{n}(p)| = 1$, de modo que se $\{v_1, v_2\}$ é uma base na orientação de M então $\{v_1, v_2, \mathbf{n}\}$ é uma base na orientação de S^3 , esta última sendo dada pelo campo normal unitário $N(x) = -x$, ($x \in S^3$).

Definamos uma aplicação $g : M \rightarrow S^3$ como segue. O vetor unitário normal $\mathbf{n}(p)$, na origem de $\mathbb{R}^4$, determina um ponto, também denotado por $\mathbf{n}(p)$, em S^3 . Definimos a aplicação g por $g(p) = \mathbf{n}(p) \in S^3$. Geometricamente, $g(p)$ é o ponto sobre a geodésica

de S^3 passando por p e ortogonal a M , na direção de $\mathbf{n}(p)$, obtido a partir de p por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$.

A diferencial, dg_p , de g em p , pode ser vista como uma aplicação de $T_p M$ em $T_p M$. De fato, dg_p , geometricamente, transporta $T_p M$ ao longo de uma geodésica de S^3 , ortogonal a M , na direção de $\mathbf{n}(p)$, segundo um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, sobre um subespaço de $T_{g(p)} S^3$ paralelo a $T_p M$. E mais, se $\bar{\mathbf{n}}$ é uma extensão local de $\mathbf{n}$ a S^3 , unitária e normal a M , então

$$dg_p(v) = \frac{d}{dt}(g \circ c(t))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\bar{\mathbf{n}} \circ c(t))_{t=0} = \bar{\nabla}_v \bar{\mathbf{n}},$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de S^3 , $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva com $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. Usando que $\langle \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}} \rangle = 1$ temos que $\bar{\nabla}_v \bar{\mathbf{n}} = (\bar{\nabla}_v \bar{\mathbf{n}})^\top$, de modo que $dg_p(v) = (\bar{\nabla}_v \bar{\mathbf{n}})^\top = -A_{\mathbf{n}}(v)$, onde $A_{\mathbf{n}}$ é a aplicação linear auto-adjunta associada à segunda forma fundamental $II_{\mathbf{n}}$ de M . Portanto, para a aplicação g valem propriedades como as de uma aplicação normal de Gauss de uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Para cada $p \in M$, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p M$ de autovetores com autovalores λ_1, λ_2 de $A_{\mathbf{n}}$, em p , os quais são, respectivamente, as direções principais e as curvaturas principais de M em p . Temos então que $dg_p(e_i) = -\lambda_i e_i$, $i = 1, 2$. As funções simétricas $K_\epsilon(\lambda_1, \lambda_2)$ e $H(\lambda_1, \lambda_2)$, denominadas respectivamente **curvatura de Gauss-Kronecker** e **curvatura média** de M em p , são dadas por

$$K_\epsilon(p) = \det(dg_p) \quad \text{e} \quad H(p) = -\frac{1}{2} \text{traço}(dg_p).$$

Observemos que se $K_\epsilon(p) = \det(dg_p) \neq 0$, para todo p em M , então g é um difeomorfismo local e, portanto, a imagem M^* de M por g é uma superfície em S^3 . Orientamos M^* como segue. Se $p \in M \subset S^3$, definimos a aplicação g fazendo $g(p) = \mathbf{n}(p)$, onde $\mathbf{n}(p)$ significa aqui o vetor posição do ponto $g(p)$ em S^3 , ou seja, $\mathbf{n}(p)$ é normal a $T_{g(p)} S^3$. Por outro lado, $\mathbf{n}(p)$ é um vetor de $T_p S^3$ e assim, $\langle \mathbf{n}(p), p \rangle = 0$, onde p agora significa o vetor posição do ponto p em S^3 . Então, se $v \in T_p M$ temos que $\langle \bar{\nabla}_v \bar{\mathbf{n}}, p \rangle_{T_p S^3} = 0$ e, portanto, que $\langle dg_p(v), p \rangle_{T_{g(p)} S^3} = 0$. Desta forma, p (bem como $-p$) é normal a M^* em $g(p)$. Façamos a

escolha para o vetor normal a M^* em $g(p)$ pondo $\mathbf{n}^*(g(p)) = p$ ou $-p$, + ou - dependendo de ser o sinal de $\det(dg_p)$ respectivamente positivo ou negativo. Tal escolha é baseada no fato de que se $\{v_1, v_2\}$ é uma base na orientação de M , então $\{dg_p v_1, dg_p v_2, \mathbf{n}^*(g(p))\}$ deve ser uma base na orientação de S^3 em $g(p)$.

Sendo M conexa, o sinal de $K_\epsilon(p) = \det(dg_p)$ é sempre positivo ou sempre negativo, de modo que a aplicação de Gauss, $g^* : M^* \rightarrow S^3$, de M^* em S^3 , pode ser dada por

$$g^*(p^*) = \begin{cases} p & , \text{ para todo } p^* = g(p) \text{ em } M^* \text{ e } K_\epsilon(p) > 0 \\ -p & , \text{ para todo } p^* = g(p) \text{ em } M^* \text{ e } K_\epsilon(p) < 0. \end{cases}$$

A diferencial, $dg_{p^*}^*$, pode ser vista novamente como uma aplicação $T_{p^*}M^* \rightarrow T_{p^*}M^*$ que, pelo paralelismo de $T_{p^*}M^*$ e de T_pM , pode ser, por sua vez, vista como uma aplicação $T_pM \rightarrow T_pM$. Desta forma, temos que $dg_{p^*}^* = (dg_p)^{-1}$ ou $-(dg_p)^{-1}$, onde + ou - depende respectivamente de ser $K_\epsilon(p) > 0$ ou $K_\epsilon(p) < 0$.

Podemos resumir todas estas considerações na seguinte proposição.

Proposição 1.1.1 *Seja $M \hookrightarrow S^3$ uma superfície conexa orientável. Se a aplicação de Gauss g em S^3 é tal que $\det(dg_p) \neq 0$, para todo p em M , então $M^* = g(M)$ é uma superfície. E mais, se $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}^*$ indicam os respectivos vetores normais de M em p e de M^* em $p^* = g(p)$, então*

$$A_{\mathbf{n}^*}^* = A_{\mathbf{n}}^{-1} \quad \text{ou} \quad -A_{\mathbf{n}}^{-1}$$

(+ ou - dependendo de $\det(dg_p) > 0$ ou $\det(dg_p) < 0$), onde $A_{\mathbf{n}^*}^*$ e $A_{\mathbf{n}}$ são as aplicações lineares auto-adjuntas associadas, respectivamente, às segundas formas fundamentais $II_{\mathbf{n}^*}^*$ e $II_{\mathbf{n}}$. □

Corolário 1.1.1 *Nas hipóteses e com as notações da Proposição 1.1.1 temos que*

$$\lambda_i^* = \frac{1}{\lambda_i} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2,$$

onde $\lambda_i^* \in \lambda_i$ ($i = 1, 2$) são, respectivamente, as curvaturas principais de M^* e M e onde $+$ ou $-$ depende de $\det(dg_p) > 0$ ou $\det(dg_p) < 0$. $\square$

Definição 1.1.1 A superfície M^* da Proposição 1.1.1 é denominada imagem esférica da superfície M .

Antes de prosseguirmos, esclarecemos que no restante desta seção o super-escrito $*$ indicará elementos da geometria de M^* .

Um fato já conhecido, que decorre do Corolário 1.1.1 é que a classe das superfícies mínimas é invariante pela aplicação de Gauss em S^3 . Mais precisamente, nas condições da Proposição 1.1.1, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.1.2 Se M é uma superfície mínima em S^3 assim o é sua imagem esférica M^* .

Demonstração: $H^* = \frac{1}{2}(\lambda_1^* + \lambda_2^*) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) = -\frac{H}{K_\epsilon}$ de modo que, se $H = 0$ então $H^* = 0$. $\square$

Este resultado nos leva naturalmente à seguinte questão:

Além das superfícies mínimas, existe outra classe de superfícies de Weingarten especiais em S^3 que seja invariante pela aplicação de Gauss?

Esta pergunta precisa de uma melhor reformulação.

Seja M uma superfície fechada em S^3 , satisfazendo o seguinte: $H = f(H^2 - K_\epsilon)$, $H^2 - K_\epsilon > 0$ e $K_\epsilon(p) \neq 0$ para todo p em M . Podemos reformular a questão acima do seguinte modo:

Para que tipos de funções contínuas $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, reais analíticas em $]0, +\infty[$, com $f(0) = 0$, tem-se que a superfície M e sua imagem esférica M^ satisfazem, respectivamente, $H = f(H^2 - K_\epsilon)$ e $H^* = f(H^{*2} - K_\epsilon^*)$?*

Antes de respondê-la façamos uma observação.

Observação 1.1.1 Nas condições acima, temos sempre $K_\epsilon > 0$ ou sempre $K_\epsilon < 0$ sobre M . Se $K_\epsilon > 0$, então a curvatura de Gauss (intrínseca) de M , K_{int} , é positiva pois $K_{\text{int}} = 1 + K_\epsilon$. Portanto, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, M é homeomorfa à esfera. Nestas condições H. Hopf mostrou, em [Ho], que M é totalmente umbílica, e portanto M é uma esfera totalmente geodésica em S^3 . Assim, devemos ter $K_\epsilon < 0$ sobre M .

No que segue caracterizamos unicamente as classes das superfícies de Weingarten invariantes pela aplicação de Gauss no sentido da última questão apresentada. Para isto necessitamos do seguinte lema.

Lema 1.1.1 *Seja $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em seu domínio, real analítica em $]0, +\infty[$, com $f(0) = 0$, $f^2(x) < x$, $x \in]0, +\infty[$. Então, f é solução da equação funcional*

$$f\left(\frac{x}{(f^2(x) - x)^2}\right) = -\frac{f(x)}{f^2(x) - x}, \quad x \in]0, +\infty[, \quad (1.1)$$

se, e somente se, f é dada por

$$f^2(x) = x - \sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}, \quad (1.2)$$

onde $\iota :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, é uma função real analítica com as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \iota(x) \geq \frac{1}{x}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

$$(ii) \quad \iota \circ \iota = id_{]0, +\infty[}$$

é, além disso, $f(\iota(x))$ e $f(x)$ têm mesmo sinal para todo x em $]0, +\infty[$.

Demonstração: Suponhamos que f seja uma função definida por (1.2) e satisfazendo as condições (i) e (ii). Temos então, por um lado, que

$$\begin{aligned} f^2 \left(\frac{x}{(f^2(x) - x)^2} \right) &= f^2 \left(\frac{x}{\iota(x)} \right) \\ &= f^2(\iota(x)) \\ &= \iota(x) - \sqrt{\frac{\iota(x)}{\iota(\iota(x))}} \\ &= \iota(x) - \sqrt{\frac{\iota(x)}{x}} \end{aligned}$$

e, por outro, que

$$\begin{aligned} \frac{f^2(x)}{(f^2(x) - x)^2} &= \frac{f^2(x)}{\frac{x}{\iota(x)}} \\ &= \frac{x - \sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}}{\frac{x}{\iota(x)}} \\ &= \iota(x) - \sqrt{\frac{\iota(x)}{x}}, \end{aligned}$$

de onde vemos que

$$f^2 \left(\frac{x}{(f^2(x) - x)^2} \right) = \frac{f^2(x)}{(f^2(x) - x)^2}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Desde que $f(\iota(x))$ e $f(x)$ têm mesmo sinal, para todo x positivo, a igualdade dada em (1.1) se verifica.

Reciprocamente, suponhamos que f seja uma função nas condições dadas e que seja solução da equação 1.1. Definamos uma função $\iota :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ por

$$\iota(x) = \frac{x}{(f^2(x) - x)^2}. \quad (1.3)$$

Vejamos que a função ι satisfaz as condições que desejamos. Desde que

$$f^2(x) - x < 0,$$

e portanto,

$$f^2(x) - 2x < 0,$$

temos que

$$f^4(x) - 2xf^2(x) \leq 0.$$

Assim,

$$(f^2(x) - x)^2 - x^2 \leq 0,$$

de modo que obtemos

$$\iota(x) = \frac{x}{(f^2(x) - x)^2} \geq \frac{1}{x}$$

e isto demonstra que a função ι satisfaz (i). Agora, utilizando a definição de ι e o fato de f ser solução da equação 1.1, obtemos a seguinte seqüência de igualdades:

$$\begin{aligned} (\iota \circ \iota)(x) = \iota(\iota(x)) &= \frac{\iota(x)}{(f^2(\iota(x)) - \iota(x))^2} \\ &= \frac{\frac{x}{(f^2(x) - x)^2}}{\left(\frac{f^2(x)}{(f^2(x) - x)^2} - \frac{x}{(f^2(x) - x)^2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{x}{(f^2(x) - x)^2}}{\left(\frac{f^2(x) - x}{(f^2(x) - x)^2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{x}{(f^2(x) - x)^2}}{\frac{1}{(f^2(x) - x)^2}} \\ &= x. \end{aligned}$$

Tendo definido ι satisfazendo (i) e (ii), obtemos a expressão para f dada na equação 1.2. De fato,

$$\iota(x) = \frac{x}{(f^2(x) - x)^2}$$

nos dá que

$$(f^2(x) - x)^2 = \frac{x}{\iota(x)}$$

e, desde que $f^2(x) < x$, obtemos

$$x - f^2(x) = \sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}.$$

Assim, acabamos de demonstrar o lema. □

Observação 1.1.2 (a) O Lema 1.1.1 coloca o conjunto das soluções da equação 1.1 em correspondência bijetiva com o conjunto das involuções $\iota :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ tais que $\iota(x) \geq \frac{1}{x}$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Observemos ainda que tais involuções satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \iota(x) = +\infty,$

(ii) ι é monótona estritamente decrescente.

De fato, a propriedade dada em (i) decorre imediatamente da condição $\iota(x) \geq \frac{1}{x}$. Por sua vez, a propriedade (ii) decorre de ι ser uma involução e do item (i). Verificamos isto facilmente: derivando $(\iota \circ \iota)(x) = x$ obtemos que $\iota'(x)$ nunca se anula e o item (i) nos faz concluir que $\iota'(x) < 0$ sempre.

(b) É importante lembrarmos que as hipérboles $\iota(x) = \frac{k}{x}$, $k \geq 1$, são exemplos naturais e simples de tais involuções.

A figura que segue ilustra uma dessas hipérboles.

Figura 1

Proposição 1.1.2 *Seja M uma superfície de Weingarten especial, fechada, orientável, conexa em S^3 e com imagem esférica M^* . M e M^* pertencem a uma mesma classe de superfícies de Weingarten especiais se a função f que determina tal classe for uma das do tipo (1.2) do Lema 1.1.1.*

Demonstração: Desde que $K_\epsilon(p) = \det(dg_p) < 0$ (1.1.1), pelo Corolário 1.1.1 temos que $\lambda_i^* = -\frac{1}{\lambda_i}$, $i = 1, 2$. Utilizando que

$$H^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = -\frac{H}{K_\epsilon}$$

e que

$$H^{*2} - K_\epsilon^* = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 \lambda_2)^2} = \frac{H^2 - K_\epsilon}{K_\epsilon^2},$$

obtemos que

$$H^* = f(H^2 - K_\epsilon)$$

equivale a

$$-\frac{H}{K_\epsilon} = f\left(\frac{H^2 - K_\epsilon}{K_\epsilon^2}\right).$$

Desde que $H = f(H^2 - K_\epsilon)$, obtemos da última igualdade que

$$f\left(\frac{H^2 - K_\epsilon}{K_\epsilon^2}\right) = -\frac{f(H^2 - K_\epsilon)}{K_\epsilon}. \quad (1.4)$$

A equação funcional 1.1 do Lema 1.1.1 é então obtida fazendo $x = H^2 - K_\epsilon$ e usando que $K_\epsilon = f^2(H^2 - K_\epsilon) - (H^2 - K_\epsilon)$. O resultado agora segue imediatamente do Lema 1.1.1.

□

Observação 1.1.3 (a) As classes das superfícies especiais obtidas na Proposição 1.1.2 incluem a das superfícies mínimas ($f \equiv 0$ equivale à classe das f obtidas com $\iota(x) = \frac{1}{x}$).

(b) Dentre as classes de superfícies obtidas destacamos aquelas definidas por $f(x) = \pm c\sqrt{x}$, com c constante, $0 < c < 1$. Para cada c , uma tal classe é obtida tomando a involução $\iota(x) = \frac{k}{x}$, onde $k = \frac{1}{(1-c^2)^2}$ e podem ser caracterizadas como aquelas em que as superfícies M e M^* satisfazem a uma equação do tipo

$$m\lambda_1 + n\lambda_2 = 0, \quad m + n = 2, \quad (1.5)$$

também satisfeita pelas superfícies mínimas ($m = n = 1$). A saber, M e M^* satisfazem (1.5) com $m = 1 - c$, $n = 1 + c$, no caso em que f é positiva, e, $m = 1 + c$, $n = 1 - c$, no caso em que f é negativa. Além disso, cada tal f satisfaz a condição de elipticidade (veja [SaET1]):

$$4x(f'(x))^2 < 1, \quad \text{para todo } x \text{ em }]0, +\infty[$$

(c) Cada uma das classes de superfícies especiais obtidas na Proposição 1.1.2 incluem um único toro flat. Vejamos isto. Fixemos inicialmente uma daquelas classes da Proposição 1.1.2, isto é, uma daquelas f definidas por (1.2). Olhando para a definição de f , podemos escrever

$$K_\epsilon = -\sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}.$$

Como $K_\epsilon = \lambda_1 \lambda_2 \equiv -1$ ao longo de cada toro flat temos que $-1 = -\sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}$ de modo que $\iota(x) = x$.

Figura 2

Assim, o único toro flat em cada tal classe corresponde ao único ponto $x \in]0, +\infty[$ tal que $\iota(x) = x$ (lembramos que essa involução em $]0, +\infty[$ intercepta a bissetriz do primeiro quadrante uma única vez, como ilustra a Figura 2).

Uma outra maneira de vermos isto é observando que os gráficos das funções f e g , onde f dá a fixada classe e g é a função que dá a classe das superfícies especiais de Weingarten uma única vez.

A Figura 3, abaixo, ilustra esta situação no caso em que $f(x) = c\sqrt{x}$ para alguns $0 < c < 1$.

Figura 3

Apenas para enriquecermos um pouco mais esta discussão, observemos que no caso $f \equiv 0$ (superfícies mínimas) o toro flat que está na classe é o toro de Clifford. Façamos uma análise geométrica sobre esta observação, para o caso das classes das $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$ (o caso $-1 < c < 0$ pode ser tratado analogamente). Estamos supondo que $\lambda_1 > \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$ sobre M . Desta forma, a equação 1.5 se reescreve como

$$\epsilon_c \lambda_1 + (2 - \epsilon_c) \lambda_2 = 0, \quad (1.6)$$

onde $\epsilon_c > 0$ é tal que $0 < c = f(1) = 1 - \epsilon_c$. Então, $\lambda_2 = -\frac{\epsilon_c}{2 - \epsilon_c} \lambda_1$ e para cada ϵ_c temos que $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ equivale à solução única de (1.6): $\lambda_1 \equiv \sqrt{\frac{2 - \epsilon_c}{\epsilon_c}}$ e $\lambda_2 \equiv -\sqrt{\frac{\epsilon_c}{2 - \epsilon_c}}$. Isto confirma a existência de um único toro flat em cada uma destas classes.

1.2 Sobre a EDO que determina a curva geradora de uma superfície de Weingarten especial rotacional em S^3

O objetivo principal desta seção é a apresentação da EDO reduzida que rege a curva geradora de uma superfície de Weingarten especial rotacional em S^3 . Conceituamos uma superfície rotacional pela propriedade de invariância por uma ação de um certo subgrupo G do grupo das isometrias de S^3 . Nada mais natural do que começarmos apresentando uma descrição da geometria orbital de uma tal G -ação.

Lembremos que estamos considerando S^3 como sendo a seguinte hipersuperfície de $\mathbb{R}^4$:

$$S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; \sum_i x_i^2 = 1 \right\} .$$

No que segue, denotamos por $S^2(c)$ a 2-esfera euclideana de curvatura Gaussiana c , ou seja, a 2-esfera em $\mathbb{R}^3$ de raio $1/\sqrt{c}$, e por $S^1(r)$ o círculo em $\mathbb{R}^2$ de raio r . Escrevemos simplesmente $S^1 = S^1(1)$ e $S^2 = S^2(1)$.

Seja G o subgrupo das transformações isométricas de S^3 que deixam fixada, ponto a ponto, a geodésica dada por $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Em relação à base canônica $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, cada matriz de um elemento $\sigma \in G$ pode ser escrita como

$$\sigma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma} \end{pmatrix} ,$$

onde I é a 2×2 -matriz identidade e $\tilde{\sigma}$ é uma 2×2 -matriz no grupo ortogonal $O(2)$. Desta forma, podemos pensar na G -ação sobre S^3 como numa $O(2)$ -ação sobre S^3 nas duas últimas coordenadas. As órbitas desta ação são de dois tipos: pontos fixos (órbitas de pontos do grande círculo fixado) e órbitas homeomorfas a S^1 . Cada uma das do segundo tipo pode ser escrita como segue. Se a órbita passa por $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$

com $x_1^2 + x_2^2 < 1$, então ela é a intersecção de S^3 com o plano afim em $\mathbb{R}^4$ passando por $(x_1, x_2, 0, 0)$ e paralelo a $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2$, sendo, portanto, do tipo $S^1(r)$ com $r = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$. Por outro lado, consideremos o hemisfério fechado totalmente geodésico: $S_+^2 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \in S^3; x_3 \geq 0\}$. Toda órbita desta G -ação intercepta S_+^2 e, reciprocamente, cada ponto de S_+^2 está numa única órbita. Assim, identificamos S_+^2 com o espaço de órbitas S^3/G , desta G -ação, e definimos a projeção canônica $\pi : S^3 \rightarrow S_+^2$ por

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, 0) .$$

Uma parametrização de S_+^2 é dada a seguir. Denotemos por $o = (0, 0, 1, 0)$ o centro de S_+^2 . Para cada $p \in S_+^2$, seja $\rho(p) = d(p, o)$, onde d é a distância riemanniana de S^3 e, se p não é o centro o , seja $\theta(p)$ o ângulo entre o segmento geodésico $\overline{op}$ em S_+^2 ligando o a p e uma pré-fixada geodésica η em S_+^2 passando por o (veja Figura 4). Assim, associamos a cada $p \in S_+^2$ as coordenadas $(\theta(p), z(p))$, onde $z(p) = \cos \rho(p)$. Desta forma, se $p = (x_1, x_2, x_3, 0) \in S_+^2$, então

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{1 - z^2} \cos \theta \\ x_2 = \sqrt{1 - z^2} \sin \theta \\ x_3 = z \end{cases} , \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 < z < 1 . \end{matrix}$$

Figura 4

Observação 1.2.1 A G -órbita passando por um ponto $p(z, \theta)$ dado por

$$p(z, \theta) = (\sqrt{1 - z^2} \cos \theta, \sqrt{1 - z^2} \sin \theta, z, 0)$$

pode ser escrita, por exemplo, por

$$\{(\sqrt{1 - z^2} \cos \theta, \sqrt{1 - z^2} \sin \theta, z \cos \varphi, -z \sin \varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\} \cong S^1(z) .$$

Desde que S_+^2 é totalmente geodésica e perpendicular a todas as G -órbitas, equipamos S^3/G com a métrica da “distância orbital”¹ como sendo a métrica da curvatura constante sobre S_+^2 . Portanto, segundo o sistema de coordenadas acima definido, escrevemos

$$ds^2 = \frac{dz^2}{1 - z^2} + (1 - z^2) d\theta^2$$

A seguir, passamos ao estudo das superfícies G -invariantes em S^3 .

Definição 1.2.1 Dizemos que uma superfície $M^2 \hookrightarrow S^3$ é **rotacional** se M^2 é G -invariante, isto é, $\sigma_p \in M$ para todo $p \in M$ e todo $\sigma \in G$.

O estudo das superfícies rotacionais em S^3 pode ser reduzido ao estudo do comportamento de suas “curvas geradoras”.

Definição 1.2.2 Seja M uma superfície rotacional em S^3 , isto é, uma superfície G -invariante. A curva $\gamma = M/G \subset S_+^2$ é denominada **curva geradora** de M .

Antes de prosseguirmos, observemos que a pré-imagem, $\pi^{-1}(\gamma)$, em S^3 , de uma curva γ é topologicamente um toro $S^1 \times S^1$ imerso se γ é uma curva fechada com auto-intersecções. Se γ é fechada e simples, então $\pi^{-1}(\gamma)$ é topologicamente um mergulho do toro $S^1 \times S^1$.

¹Um tratamento geral sobre a estrutura métrica de um espaço de órbitas se encontra em [BdCH] e [HL].

e no caso em que γ é uma curva simples com pontos inicial e final no bordo de S^2_+ , então $\pi^{-1}(\gamma)$ é topologicamente um mergulho de S^2 (Figura 5).

Figura 5

Seja $\gamma(s) = (\theta(s), z(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, $\frac{d\gamma}{ds} = (\dot{\theta}, \dot{z})$ é tal que

$$\frac{\dot{z}^2}{1-z^2} + \dot{\theta}^2(1-z^2) = 1.$$

Sejam $\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\mathbf{e}_z = -\sqrt{1-z^2} \frac{\partial}{\partial z}$, e seja α o ângulo entre $\frac{d\gamma}{ds}$ e $\mathbf{e}_z$, como ilustra a Figura 6 abaixo. Então

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-z^2}}, \\ \sin \alpha &= \dot{\theta} \sqrt{1-z^2} \text{ e} \\ \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\ddot{z}}{\theta(1-z^2)} + \frac{z\dot{z}^2}{\theta(1-z^2)^2}. \end{aligned}$$

Figura 6

Ainda, seja $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_\theta - \sin \alpha \mathbf{e}_z$, isto é,

$$\mathbf{n} = -\frac{\dot{z}}{1-z^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\theta}(1-z^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

O vetor $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal a γ em $\gamma(s)$.

A fórmula de Liouville para curvatura geodésica, $k_g(s)$, de $\gamma(s)$, é a seguinte:

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + k_{g_1} \cos \alpha + k_{g_2} \sin \alpha$$

onde k_{g_1} e k_{g_2} são, respectivamente, as curvaturas geodésicas do meridiano $\theta = \text{constante}$ e do paralelo $z = \text{constante}$. Assim, como $k_{g_1} \equiv 0$ e $k_{g_2} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, obtemos

$$k_g(s) = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin \alpha, \quad (1.7)$$

ou seja,

$$k_g = \frac{\ddot{z}(1-z^2) + z\dot{z}^2}{\dot{\theta}(1-z^2)^2} + z\dot{\theta} \quad (1.8)$$

Agora, se M é uma superfície rotacional de S^3 gerada por $\gamma(s) = (\theta(s), z(s))$, não é difícil vermos que a aplicação linear auto-adjunta $A_{\mathbf{n}}$ associada à segunda forma fundamental, $II_{\mathbf{n}}$, de M em $\gamma(s)$, tem somente dois autovalores distintos correspondentes a dois subespaços invariantes irreduzíveis do espaço tangente $T_{\gamma(s)}M$. Um dos subespaços é tangente à curva γ em $\gamma(s)$ e o outro é tangente à órbita $G(\gamma(s)) \cong S^1$. Portanto, uma das curvaturas principais de M em $\gamma(s)$, digamos λ_1 , é a curvatura geodésica k_g dada em (1.8). Para obtermos o valor da outra curvatura principal, λ_2 , de M em $\gamma(s)$, inicialmente consideremos o volume funcional, $v(s)$, da G -órbita no ponto $\gamma(s)$. Este é dado por $v(s) = 2\pi z(s)$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\ln v) &= \langle \text{grad}(\ln z), \mathbf{n} \rangle \\ &= \left\langle 0 \mathbf{e}_\theta - \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \mathbf{e}_z, \cos \alpha \mathbf{e}_\theta - \sin \alpha \mathbf{e}_z \right\rangle \\ &= \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Além disso, utilizemos a seguinte fórmula para a curvatura média, $H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$, de M em $\gamma(s)$ (veja [BdCH])

$$H = \frac{1}{2} \left(kg - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \ln v \right) , \quad (1.9)$$

onde v é o volume funcional da G -órbita no ponto $\gamma(s)$.

Estabelecemos tais considerações na seguinte

Proposição 1.2.1 *As curvaturas principais de uma superfície rotacional $M \hookrightarrow S^3$, tendo $\gamma(s) = (\theta(s), z(s))$ como curva geradora, são dadas por*

$$\begin{cases} \lambda_1 = kg = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin \alpha , \\ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \sin \alpha , \end{cases} \quad (1.10)$$

onde α é o ângulo entre $\frac{d\gamma}{ds} \in \mathbf{e}_z$.

□

Podemos reescrever (1.10) por:

$$\begin{cases} \lambda_1 = kg = \frac{\ddot{z}(1-z^2) + z\dot{z}^2}{\dot{\theta}(1-z^2)^2} + z\dot{\theta} , \\ \lambda_2 = -\frac{(1-z^2)\dot{\theta}}{z} . \end{cases} \quad (1.11)$$

Finalmente, podemos apresentar a equação diferencial ordinária de segunda ordem, que só depende da coordenada z , e que é satisfeita pela curva geradora de uma superfície de Weingarten especial rotacional em S^3 .

Proposição 1.2.2 *Seja M uma superfície especial de Weingarten rotacional da classe de uma função contínua $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, com $f(0) = 0$ e real analítica em $]0, +\infty[$. Então*

a curva $\gamma = M/G$ em S_+^2 , parametrizada pelo comprimento de arco, satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária

$$z\ddot{z} + z^2 - (1 - z^2 - \dot{z}^2) = \pm 2z\sqrt{1 - z^2 - \dot{z}^2} f\left(\frac{(z\ddot{z} + z^2 + (1 - z^2 - \dot{z}^2))^2}{4z^2(1 - z^2 - \dot{z}^2)}\right), \quad (1.12)$$

onde $+$ ou $-$ depende, respectivamente, de $\dot{\theta} > 0$ ou $\dot{\theta} < 0$, $\epsilon \dot{\theta} = \pm \frac{\sqrt{1 - z^2 - \dot{z}^2}}{1 - z^2}$, $0 < z < 1$.

Demonstração: Sendo M uma superfície de Weingarten especial, então M satisfaz a equação

$$H = f(H^2 - K_\epsilon), \quad (1.13)$$

onde H e K_ϵ são as funções simétricas das curvaturas principais, λ_1, λ_2 , dadas por

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{e} \quad K_\epsilon = \lambda_1 \lambda_2. \quad (1.14)$$

Portanto, podemos reescrever (1.13), em termos de λ_1 e λ_2 , por

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = f\left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4}\right).$$

Substituindo, diretamente na última equação as expressões de λ_1 e λ_2 dadas em (1.11) e utilizando a expressão de $\dot{\theta}$ dada por $\dot{\theta} = \pm \frac{\sqrt{1 - z^2 - \dot{z}^2}}{1 - z^2}$, obtida da condição de $\gamma(s)$ ser parametrizada pelo comprimento de arco, obtemos a equação diferencial (1.12). $\square$

Capítulo 2

Superfícies especiais de tipo mínimo em S^3

Nosso objetivo principal neste capítulo é conceituar “classes de superfícies de tipo mínimo em S^3 ” e mostrar que existem exemplos, imersos em S^3 , de superfícies “tóricas” homeomorfas a $S^1 \times S^1$.

2.1 Conceituação

Na Seção 1.1 do Capítulo 1 introduzimos as classes de superfícies de Weingarten especiais que são invariantes pela aplicação de Gauss em S^3 . Tais classes invariantes são, a saber, aquelas dadas por funções $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $f^2(x) = x - \sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}$, onde as funções $\iota :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ são involuções tais que $\iota(x) \geq \frac{1}{x}$, $x \in]0, +\infty[$. Chamamos atenção novamente para o fato de que se $\iota(x) = \frac{1}{x}$ para todo x em $]0, +\infty[$, então $f \equiv 0$, ou seja, a classe das superfícies mínimas é uma que satisfaz tal invariância.

A seguir, enumeramos mais alguns fatos que mostram certas analogias entre cada uma dessas classes de superfícies especiais obtidas e a classe das superfícies mínimas.

1. $f(0) = 0$, ou seja, as 2-esferas totalmente geodésicas são superfícies especiais em cada uma dessas tais classes.
2. Sobre cada superfície M , numa dessas classes, a curvatura de Gauss-Kronecker, K_ϵ , é negativa. De fato:

$$\begin{aligned}
K_\epsilon &= H^2 - (H^2 - K_\epsilon) \\
&= \left(f(H^2 - K_\epsilon)\right)^2 - (H^2 - K_\epsilon) \\
&= H^2 - K_\epsilon - \frac{\sqrt{H^2 - K_\epsilon}}{\iota(H^2 - K_\epsilon)} - (H^2 - K_\epsilon) \\
&= -\sqrt{\frac{H^2 - K_\epsilon}{\iota(H^2 - K_\epsilon)}} < 0.
\end{aligned}$$

3. Em cada uma dessas classes existe um único toro flat mergulhado em S^3 .

Levando em conta os fatos acima relacionados, damos a seguinte definição.

Definição 2.1.1 *Denominamos as classes de superfícies especiais em S^3 dadas pelas funções f obtidas no Lema 1.1.1 do Capítulo 1, de classes de superfícies especiais de tipo mínimo em S^3 .*

O objetivo principal deste capítulo é garantir a existência de superfícies compactas, homeomorfas a $S^1 \times S^1$, em cada uma das classes das superfícies de tipo mínimo. Podemos formalizar isto no seguinte resultado, o qual já foi enunciado na introdução deste trabalho.

Teorema A *Em cada classe de superfícies especiais de tipo mínimo, existe uma quantidade infinita de superfícies compactas de gênero um, imersas em S^3 .*

2.2 Demonstração do Teorema A

A procura de exemplos mergulhados de superfícies compactas de gênero um em S^3 nos leva, naturalmente, ao estudo das superfícies rotacionais de tipo mínimo em S^3 . A existência, ou não, de outros exemplos mergulhados de superfícies compactas homeomorfas ao toro $S^1 \times S^1$, além do único toro flat na classe (veja (1.1.3(c))), é uma questão ainda sem resposta.

Superfícies de Weingarten especiais rotacionais, em S^3 , foram introduzidas de maneira geral na Seção 1.2 do Capítulo 1. Obtivemos, lá, a equação diferencial satisfeita por uma curva geradora de uma tal superfície, segundo a parametrização do espaço de órbitas, S_+^2 , dada por

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{1-z^2} \cos \theta \\ x_2 = \sqrt{1-z^2} \sin \theta \\ x_3 = z \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 < z < 1 \end{matrix}.$$

Ressaltamos que a equação diferencial (1.12) na Proposição 1.2.2, foi obtida segundo a parametrização acima, a partir da equação

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = f\left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4}\right), \quad (2.1)$$

onde, λ_1 e λ_2 são as curvaturas principais da superfície M que satisfaz a mesma e tal que $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $f(0) = 0$ e real analítica em $]0, +\infty[$. Lembramos que no caso particular das superfícies de tipo mínimo, cada f satisfaz $f^2(x) = x - \sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}$, sendo que a involução ι é tal que $\iota(x) \geq \frac{1}{x}$ e com $f(\iota(x))f(x) \geq 0$.

Fazendo f , na equação 2.1, como uma das dos tipos acima consideradas, obtemos após alguns cálculos diretos, a seguinte equação:

$$\iota\left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4}\right) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4\lambda_1^2\lambda_2^2}. \quad (2.2)$$

Utilizando esta última equação do mesmo modo como fizemos na demonstração da Proposição 1.2.2, obtemos uma equação diferencial satisfeita pela curva geradora, γ , de uma superfície em questão.

Proposição 2.2.1 *Seja M uma superfície especial rotacional, completa, de tipo mínimo em S^3 , na classe de uma função f como no Lema 1.1.1 do Capítulo 1. Então a curva $\gamma = M/G$ em $S_+^2 = S^3/G$, parametrizada pelo comprimento de arco, satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:*

$$\iota \left(\frac{(z\ddot{z} + z^2 + (1 - z^2 - \dot{z}^2))^2}{4z^2(1 - z^2 - \dot{z}^2)} \right) = \frac{(z\ddot{z} + z^2 + (1 - z^2 - \dot{z}^2))^2}{4(\ddot{z} + z)(1 - z^2 - \dot{z}^2)}. \quad (2.3)$$

Demonstração: Basta substituímos as expressões de λ_1 e λ_2 dadas na equação 1.11 do Capítulo 1 na equação 2.2 e utilizarmos a condição de γ ser parametrizada pelo comprimento de arco. $\square$

Observação 2.2.1 (a) Outra maneira de obtermos a equação 2.3 é substituímos a expressão que define a função f na equação diferencial 1.12 do Capítulo 1.

(b) As únicas soluções passando pelo centro $o = (0, 0, 1, 0)$ de S_+^2 são do tipo $\theta = \text{constante}$, ou seja, são os semi-círculos totalmente geodésicos ortogonais ao bordo de S_+^2 (veja Figura 7b). As superfícies correspondentes a esses grandes círculos ortogonais ao bordo são as 2-esferas totalmente geodésicas de S^3 . Elas são isoparamétricas com $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0$ e, portanto, satisfazem a equação 2.1: $f(0) = 0$.

(c) De acordo com a Observação 1.1.3 do Capítulo 1, sabemos que existe uma única solução do tipo $z = \text{constante}$, correspondente ao único toro flat na fixada classe (veja

Figura 7a). como já sabemos, o único toro flat corresponde ao único $\bar{x} \in]0, +\infty[$, tal que $\iota(\bar{x}) = \bar{x}$. Assim, para simplificar notação, denotemos $\frac{1}{\bar{x}}$ por a . Assim obtemos um único z_a , $0 < z_a < 1$, tal que $z_a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-a}}$. Isto não é difícil de ser visto, desde que se $z \equiv \text{constante}$, então $\dot{z} \equiv 0$ e $\ddot{z} \equiv 0$, de modo que, pela equação 2.3, obtemos $a = 4z^2(1 - z^2)$.

Figura 7a

Figura 7b

No que segue, considere fixada uma classe de superfícies de tipo mínimo, ou seja, uma das f do Lema 1.1.1 está fixada.

Com o propósito de evitarmos cansativas repetições, referir-nos-emos a uma solução da equação diferencial em questão simplesmente por “curva solução”.

Primeiramente, a equação 2.3 pode ser reescrita por

$$G(x) = \iota(x) - \frac{x}{f^2(x) - x} = 0, \quad (2.4)$$

onde $x(s, z, \dot{z}, \ddot{z}) = \frac{(z\ddot{z} + z^2 + (1 - z^2 - \dot{z}^2))^2}{4z^2(1 - z^2 - \dot{z}^2)}$. Assim a equação 2.3 se escreve implicitamente por

$$F(s, z, \dot{z}, \ddot{z}) = G(x(s, z, \dot{z}, \ddot{z})) = 0. \quad (2.5)$$

Seja $R = \{(s, z, u, v) \in \mathbb{R}^4; \ s \in \mathbb{R}, \ 0 < z < 1 \ , \ |u| \leq \sqrt{1-z^2} \ , \ v \neq -z\} \subset \mathbb{R}^4$.

As funções F , $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$ e $\frac{\partial F}{\partial v}$ são contínuas em R .

De fato, $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = G'(x) \frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial u} = G'(x) \frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v} = G'(x) \frac{\partial x}{\partial v}$.

onde

$$G'(x) = \iota'(x) \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\iota(x)}{x}} ,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{(zv+1-u^2)(z^3v-1+2z^2+u^2(1-2z^2-u^2))}{2z^3(1-z^2-u^2)^2} ,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{-u(zv+1-u^2)(1-u^2-2z^2-zv)}{2z^2(1-z^2-u^2)^2} ,$$

onde as funções acima estão todas calculadas numa vizinhança de um ponto

$P_0 = (s_0, z_0, u_0, v_0) \in R$. Além disso, $G'(x) \neq 0$, pois caso contrário teríamos que

$$\iota'(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\iota(x)}{x}} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}\right)^{-1}$$

de onde obteríamos que

$$\iota'(\iota(x))\iota'(x) = \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\iota(x)}{x}}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\iota(x)}}\right)} \neq 1 ,$$

o que contradiria o fato de $\iota(\iota(x)) = x$. Esta última condição mais a de que $\frac{\partial x}{\partial v} \neq 0$ (pois $x \neq 0$), nos dá que $\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$. Pela teoria das funções implícitas, isto é suficiente para garantirmos que, numa vizinhança próxima de $(s_0, z_0, \dot{z}_0, \ddot{z}_0) \in R$, onde $z_0 = z(s_0)$, $\dot{z}_0 = \dot{z}(s_0)$ e $\ddot{z}_0 = \ddot{z}(s_0)$, podemos explicitar localmente $\ddot{z}$ como uma função contínua de s , z e $\dot{z}$.

Assim, pelo Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias

de segunda ordem, dado $P_0 = (s_0, z_0, \dot{z}_0, \ddot{z}_0) \in R$, existe uma única solução local $\tilde{z}(s)$ da equação 2.3 satisfazendo, $\tilde{z}(s_0) = z_0$ e $\dot{\tilde{z}}(s_0) = \dot{z}_0$. Seja $z(s)$ a continuação analítica de $\tilde{z}(s)$ e seja $\gamma(s) = (\theta(s), z(s))$, $s \in \mathbb{R}$ a curva solução, parametrizada pelo comprimento de arco, passando por (θ_0, z_0) , com $\theta_0 = \theta(s_0)$ e tal que $\dot{z}(s_0) = \dot{z}_0$.

Observemos que a curva solução não pode permanecer constante em qualquer subintervalo de $\mathbb{R}$, pois se isto ocorresse teríamos $\dot{\theta} \equiv 0$ e $\dot{z} \equiv 0$, simultaneamente nesse subintervalo, o que seria uma contradição com o fato da curva ser parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso, pelo Teorema de unicidade de soluções, nenhuma outra curva solução pode tangenciar qualquer solução do tipo $\theta \equiv \text{constante}$. Devemos observar ainda que nenhuma curva solução toca o bordo, exceto ortogonalmente, como o fazem todos os “grandes semi-círculos” ortogonais ao bordo. A técnica utilizada para demonstrar tais fatos é semelhante à utilizada por W. Y. Hsiang e B. L. Lawson em [HL] no estudo de hipersuperfícies fechadas mínimas de S^n . Técnica semelhante, porém em situações diferentes das nossas, que podem servir como referência são encontradas no trabalho de B. Charlet, em [Ch].

Tendo em vista os fatos acima, se a curva solução, $\gamma = (\theta, z)$ não é um grande círculo, temos que $\dot{\theta} > 0$ sempre, ou $\dot{\theta} < 0$ sempre. Assim todas as curvas soluções podem ser expressas como $\gamma(\theta) = (\theta, z(\theta))$, onde θ percorre todos os números reais.

Para demonstrarmos o principal resultado deste capítulo (Teorema A) devemos ainda estabelecer mais alguns resultados.

Definição 2.2.1 Dizemos que $\theta_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto crítico de uma curva $\gamma(\theta) = (\theta, z(\theta))$ em S_+^2 se $\dot{z}(\theta) = 0$.

Lema 2.2.1 *Seja $\gamma(\theta) = (\theta, z(\theta))$ uma curva solução de (2.3) e suponhamos que θ_0 seja um ponto crítico de γ . Seja γ_0 a geodésica em S_+^2 , ortogonal a γ em $\gamma(\theta_0)$. Então γ é invariante pela reflexão em S_+^2 com relação a γ_0 .*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor $\theta_0 = 0$. Seja τ a reflexão em torno de γ_0 . Sejam $\tilde{\gamma}(\theta) = \tau(\gamma(\theta)) = (-\theta, z)$ e $\bar{\gamma}(\theta) = \gamma(-\theta)$. Obviamente, $\tilde{\gamma}$ e $\bar{\gamma}$ são curvas soluções e $\tilde{\gamma}(0) = \bar{\gamma}(0)$ e $\dot{\tilde{\gamma}}_0 = \dot{\bar{\gamma}}_0$. Assim, pelo Teorema de unicidade para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, temos que $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma}$. $\square$

A Figura 8 ilustra a reflexão de uma curva γ com relação a γ_0 .

Figura 8

Definição 2.2.2 *Dizemos que uma curva solução $\gamma(\theta) = (\theta, z(\theta))$ é periódica se existe um número $p > 0$, tal que $z(\theta + p) = z(\theta)$, para todo θ em $\mathbb{R}$.*

Corolário 2.2.1 *Uma curva solução com pelo menos dois pontos críticos é periódica.*

Demonstração: É uma consequência imediata do Lema 2.2.1. $\square$

Lema 2.2.2 *Seja $\gamma(\theta) = (\theta, z(\theta))$ uma solução da equação 2.3 que intercepta o paralelo correspondente ao toro flat na classe. Então γ é uma curva periódica em S_+^2 .*

Demonstração: Vimos anteriormente que o único paralelo que é uma curva solução é dado por $z \equiv z_a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-a}}$, onde $a = \frac{1}{\bar{x}}$ e $\bar{x}$ é tal que $\iota(\bar{x}) = \bar{x}$. Seja $\gamma(\theta) = (\theta, z(\theta))$ uma curva que intercepta $z \equiv z_a$. Se demonstrarmos que γ atinge um máximo e um mínimo, podemos estabelecer a propriedade por reflexões em relação aos meridianos $\theta \equiv$ constante, conforme nos garante o Lema 2.2.1 (veja Figura 9). $\square$

Figura 9

Seja θ_0 tal que $z(\theta_0) = z_a$. Se $z = z(\theta)$ não possui máximo então, sem perda de generalidade, podemos supor que z é monótona crescente a partir de θ_0 . Então, ou a curva γ espirala em torno do paralelo $z \equiv z_1$, para algum z_1 constante, $z_a < z_1 < 1$ (veja Figura 10a), ou, γ espirala em torno do “centro” o de S_+^2 .

Se ocorresse o primeiro caso, por dependência contínua das soluções com relação às condições iniciais, o paralelo em questão seria uma curva solução, o que seria uma contradição, pois teríamos um outro toro flat na classe! Se ocorresse o segundo caso e tomássemos uma curva solução $\bar{\gamma}$, muito próxima de algum meridiano que tangenciasse a curva γ num ponto muito próximo do “centro” o (veja Figura 10b), então, por

unicidade. $\bar{\gamma}$ e γ deveriam coincidir. Contradição! Assim, z atinge máximo.

Figura 10a

Figura 10b

Por reflexão segundo um conveniente meridiano, ortogonal ao bordo, a curva γ intercepta novamente o paralelo $z \equiv z_a$, digamos num θ_1 . Suponhamos ainda que z seja monótona decrescente para $\theta > \theta_1$. Então, ou a curva γ espirala em torno de um paralelo $z \equiv z_2$, $0 < z_2 < z_a$ (veja Figura 11a) ou, espirala em torno do bordo de S_+^2 (veja Figura 11b).

Figura 11a

Figura 11b

Se ocorresse a primeira situação teríamos uma contradição (análogo ao caso da Figura

10a). Se ocorresse o segundo caso, existiria um ponto $(\bar{\theta}, \bar{z})$ na curva onde $\lambda_1 = kg \approx 0$ e $\dot{z}(\bar{\theta}) \approx 0$. Agora, nesse ponto, teríamos $\dot{\theta} \approx 1$ e $\bar{z} \approx 0$. Vejamos que em valor absoluto λ_2 é muito grande. Para isto, consideremos o volume v da órbita passando por esse ponto. Então

$$\begin{aligned} |\lambda_2| &= \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln v) \right| \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(2\pi \bar{z})) \right| \\ &= \left| \left\langle 0 \mathbf{e}_\theta - \frac{\sqrt{1-\bar{z}^2}}{\bar{z}} \mathbf{e}_{\bar{z}}, \frac{\dot{\bar{z}}}{\sqrt{1-\bar{z}^2}} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta} \sqrt{1-\bar{z}^2} \mathbf{e}_{\bar{z}} \right\rangle \right| \\ &= \frac{\dot{\theta} \sqrt{1-\bar{z}^2}}{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Olhando para o último quociente temos que $|\lambda_2|$ é um número grande. Vejamos que isto nos leva a uma contradição. Lembremos da equação 2.2 que

$$\iota \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} \right) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2}.$$

Assim, por um lado

$$\iota \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} \right) \approx \frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2} = \frac{1}{4\lambda_1^2}$$

que, portanto é muito grande. Por outro lado,

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} \approx \frac{\lambda_2^2}{4}$$

que também é muito grande. Mas $\iota(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$! Logo chegamos numa contradição. Desta forma $z = z(\theta)$ possui um mínimo, como queríamos demonstrar.

□

Finalmente, façamos um estudo sobre os períodos das curvas soluções que interceptam o paralelo $z \equiv z_a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-a}}$, onde $a = \frac{1}{\bar{x}}$ com $\bar{x}$ tal que $\iota(\bar{x}) = \bar{x}$.

Já vimos que qualquer dessas tais curvas soluções são periódicas. Se γ é uma dessas soluções, e γ atinge dois pontos críticos consecutivos em $z_1 = z(\theta_1)$ e $z_2 = z(\theta_2)$, o seu período, Θ , em relação a θ , é dado por $2|\theta_1 - \theta_2|$.

Estamos interessados na existência de curvas soluções que são fechadas.

Lema 2.2.3 *Sejam $\theta_1 \in \theta_2$ dois pontos críticos consecutivos de $z = z(\theta)$. Se $\theta_1 - \theta_2 = \pm r\pi$, r um número racional não negativo, então a curva solução $\gamma = (\theta, z)$ é fechada com período $2r\pi$, em relação a θ . Em particular, se $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ então γ é uma curva fechada simples com período $\frac{2\pi}{n}$.*

Demonstração: Se θ_1 é um ponto crítico de $z = z(\theta)$. O Lema 2.2.1 nos diz que γ é invariante pela reflexão em relação ao meridiano $\theta = \theta_1$. O mesmo ocorrendo para θ_2 . Pelo Lema 2.2.2, γ é periódica e o período é $= 2\pi r$, r um número racional positivo. Desde que os máximos e mínimos ocorrem sempre em z_1 e z_2 (ou vice-versa), a curva fecha. No caso particular em que $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, então a curva fecha na primeira volta, ou seja, é fechada simples. $\square$

Agora, por dependência contínua das curvas soluções de uma EDO de segunda ordem com relação às condições iniciais, se fixarmos θ_0 e $z(\theta_0) = z_a$, então soluções cujas condições iniciais $\dot{z}(\theta_0)$ “próximas” serão “próximas”, de modo que seus períodos serão “próximos” também. Desta forma vemos que os períodos das soluções que cortam o paralelo $z = z_a$ em (θ_0, z_a) dependem continuamente da variação de $\dot{z}(\theta_0) = \dot{z}_0$. Como temos os meridianos como soluções, por dependência contínua existem soluções “muito próximas” destes e, portanto, com períodos “muito próximos” de π . Devemos nos lembrar que tais curvas “acompanham” os correspondentes meridianos arbitrariamente “próximas” destes, e portanto, para cada uma delas, seus pontos de mínimos ocorrerão

muito “próximos” dos pontos de intersecção de um meridiano com o bordo de S_+^2 . Portanto existe uma seqüência infinita de números racionais r_i , arbitrariamente próximos de π , tais que cada $r_i\pi$ é período de uma curva solução. Isto acaba de estabelecer o Teorema A. □

Capítulo 3

Sobre certas superfícies rotacionais especiais de tipo mínimo em S^3

Dedicaremos este capítulo ao estudo das superfícies rotacionais especiais de tipo mínimo em S^3 do tipo $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$.

3.1 Sobre a EDO satisfeita por uma curva geradora

Começamos apresentando a EDO que deve ser satisfeita pela curva geradora de uma tal superfície.

Proposição 3.1.1 *Seja $\gamma = (\theta, z)$ uma curva C^∞ em S_+^2 , parametrizada pelo comprimento de arco s . Então a correspondente superfície $M = \pi^{-1}(\gamma) \subset S^3$ é uma superfície especial rotacional de tipo mínimo se, e somente se, uma das seguintes equações diferenciais é satisfeita:*

$$z\ddot{z} + \dot{z}^2 = \left(\frac{1+c}{1-c}\right)(1 - z^2 - \dot{z}^2) \quad \text{se } \dot{\theta} \geq 0 \quad (3.1a)$$

$$z\ddot{z} + z^2 = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)(1 - z^2 - \dot{z}^2) \quad \text{se } \dot{\theta} \leq 0. \quad (3.1b)$$

onde c é dada por $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$.

Demonstração: Seja f dada por $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$. Assim, a equação dada em 1.12) da Proposição 1.2.2 é equivalente à seguinte equação:

$$z\ddot{z} + z^2 - (1 - z^2 - \dot{z}^2) = \pm 2cz\sqrt{1 - z^2 - \dot{z}^2} \sqrt{\frac{(z\ddot{z} + z^2 + (1 - z^2 - \dot{z}^2))^2}{4z^2(1 - z^2 - \dot{z}^2)}}, \quad (3.2)$$

onde $+$ ou $-$ depende do mesmo sinal de $\dot{\theta}$. Agora, desde que $K = \lambda_1 \lambda_2 < 0$, as expressões de λ_1 e λ_2 em 1.11 do Capítulo 1 nos dão que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ se $\dot{\theta} > 0$, de modo que $0 < \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\ddot{z}z + z^2 + (1 - z^2 - \dot{z}^2)}{z\sqrt{1 - z^2 - \dot{z}^2}}$. Analogamente, se $\dot{\theta} < 0$, então $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ e, conseqüentemente, $0 < \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\ddot{z}z + z^2 + (1 - z^2 - \dot{z}^2)}{z\sqrt{1 - z^2 - \dot{z}^2}}$. Assim, a equação dada em (3.2), acima, nos leva às equações 3.1a e 3.1b desejadas. $\square$

Cada uma das equações da Proposição 3.1.1 podem ser reduzidas a uma equação de primeira ordem. Estabelecemos este resultado no seguinte lema que será útil na análise do comportamento das curvas geradoras das superfícies especiais de tipo mínimo em questão.

Lema 3.1.1 *As equações 3.1a e 3.1b na Proposição 3.1.1 podem ser reduzidas à equação diferencial de primeira ordem*

$$\dot{z}^2 = 1 - z^2 - \frac{a}{z^{2\alpha}}, \quad (3.3)$$

$$\text{onde } a \text{ é uma constante positiva e } \alpha = \begin{cases} \frac{1+c}{1-c} & \text{no caso } \dot{\theta} \geq 0 \\ \frac{1-c}{1+c} & \text{no caso } \dot{\theta} \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração: Multiplicando a equação 3.1a por $\frac{\dot{z}}{z}$ obtemos:

$$\frac{(\ddot{z} + z)\dot{z}}{1 - z^2 - \dot{z}^2} = \alpha \frac{\dot{z}}{z}.$$

Integrando esta, temos que

$$1 - z^2 - \dot{z}^2 = az^{-2\alpha} \quad , \quad a = \text{constante}, a > 0,$$

de onde segue o resultado para o caso $\dot{\theta} \geq 0$. A demonstração do caso $\dot{\theta} \leq 0$ é completamente análoga. $\square$

Observação 3.1.1 (a) As únicas soluções de (3.1a) passando por $o = (0, 0, 1, 0) \in S_+^2$ são do tipo $\theta = \text{constante}$, ou seja, são os círculos geodésicos ortogonais ao bordo de S_+^2 (Figura 12b). As superfícies rotacionais correspondentes são as 2-esferas totalmente geodésicas de S^3 .

(b) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, a única solução tal que $\dot{z} \equiv 0$ é dada por $z \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ (Figura 12a). De fato, $\ddot{z} \equiv 0$ e (3.1a) se resolve para z nos dando o resultado acima. A superfície rotacional correspondente em cada classe de superfícies especiais de tipo mínimo, dada por α nas condições acima, é o toro flat

$$S^1 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right) \times S^1 \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}} \right) \quad .$$

Figura 12a

Figura 12b

(c) Do mesmo modo como vimos anteriormente, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de uma EDO de segunda ordem, existem soluções locais da equação 3.1a.

uma para cada constante positiva a dada por (3.3) do Lema 3.1.1, ou seja, uma para cada $a = z_0^{2\alpha}(1 - z_0^2 - \dot{z}_0^2)$, onde $z_0 = z(s_0)$ e $\dot{z}(s_0) = \dot{z}_0$. Por continuação analítica estas soluções podem ser estendidas para todos os valores de $s \in \mathbb{R}$. Por ser parametrizada pelo comprimento de arco, cada curva solução não pode permanecer constante em qualquer subintervalo de $\mathbb{R}$. Além disso, por unicidade, nenhuma outra curva-solução é tangente a qualquer “meridiano” ortogonal ao bordo de S_+^2 e nenhuma tal curva toca o bordo, a não ser ortogonalmente.

(d) Podemos supor daqui por diante que se a curva solução de (3.1a) (respectivamente (3.1b)) não é um grande círculo, então $\dot{\theta} > 0$ (respectivamente, $\dot{\theta} < 0$) sempre. Escolhere-mos uma orientação de γ de modo a sempre trabalharmos com o caso $\dot{\theta} > 0$. Assim todas as curvas soluções podem ser expressas como $z = z(\theta)$ onde θ percorre todos os números reais.

3.2 Sobre o problema do mergulho

Após demonstrarmos que a curva geradora de uma superfície de tipo mínimo, em qualquer das classes em questão, é periódica faremos uma estimativa de um tal período. e isto nos permitirá demonstrar o seguinte resultado:

Teorema B

Em cada classe de superfícies especiais de tipo mínimo determinada por f do tipo $f(x) = c\sqrt{x}$, $c \in \mathbb{R}$, $c < 0 < 1$, a única superfície especial compacta, homeomorfa a $S^1 \times S^1$ e mergulhada em S^3 é o toro flat $S^1\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right) \times S^1\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}}\right)$, onde $\alpha = \frac{1+c}{1-c}$.

Começamos estudando a periodicidade da curva geradora de uma superfície especial rotacional de tipo mínimo nas classes particulares em questão. No que segue, M não será uma 2-esfera totalmente geodésica.

Daqui por diante, α denotará o número real $\frac{1+c}{1-c}$, $0 < c < 1$ (veja enunciado do Teorema B).

Proposição 3.2.1 *Seja $M \hookrightarrow S^3$ uma superfície especial completa rotacional de tipo mínimo na classe de uma função f do tipo $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$. Então a curva geradora, $\gamma = \pi(M)$, de M é uma curva periódica em S_+^2 .*

Demonstração: Fixemos uma das tais classes de superfícies de tipo mínimo, ou seja, fixemos α , $\alpha > 1$. A curva $\gamma = (\theta(s), z(s))$, parametrizada pelo comprimento de arco, é uma curva solução da equação diferencial ordinária (3.1a). Suponhamos, sem perda de generalidade, que γ é uma curva tal que $\dot{\theta}(s) > 0$ sempre. Se γ é a curva solução correspondente a um toro flat (veja Observação 3.1.1b) o resultado é obviamente verdadeiro. Suponhamos então que $\dot{z}$ não seja identicamente nulo. Afirmamos que z atinge mínimo e máximo. Consideremos os três casos abaixo:

- a) $z(s_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$,
- b) $z(s_0) > \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$,
- c) $z(s_0) < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$.

Caso a) Este caso decorre imediatamente do Lema 2.2.2 do Capítulo 2, pois aquele resultado foi obtido para qualquer classe de superfícies de tipo mínimo.

Caso b) Se $z(s_0) > \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$, suponhamos novamente que z não atinge um mínimo. Assim, suponhamos que $\dot{z}(s) < 0$ se $s > s_0$. Teríamos então que $\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = 0$ ou $\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = z_0$, onde $0 < z_0 < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ ou $\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} < z_0 < z(s_0)$. No primeiro caso a curva estaria espiralando

em torno do bordo de S_+^2 e, no segundo, a curva estaria espiralando em torno do paralelo $z \equiv z_0$ (veja Figura 13a). Novamente, por argumentações utilizadas no Lema 2.2.2, seríamos levados a conclusões contraditórias. Restaria então a possibilidade de γ espiralar em torno da curva solução $z \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ (veja Figura 13b). Assim, pelo caso a), existiria uma curva solução $\bar{\gamma} = (\bar{\theta}, \bar{z})$, cortando o paralelo acima com $\bar{\gamma}(s_1) = \gamma(s_1)$ e $\dot{\bar{z}}(s_1) = \dot{z}(s_1)$, para algum $s_1 > s_0$. De fato, por dependência contínua das soluções de uma EDO de segunda ordem, com relação às condições iniciais, existiria uma curva solução $\bar{\gamma}$, interceptando o paralelo $z \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ e “muito próxima” do mesmo. Concluiríamos, pelo teorema de existência e unicidade para uma EDO de segunda ordem, que $\bar{\gamma} \equiv \gamma$ (contradição!). Assim, z atinge um mínimo. Para mostrarmos, neste caso, que z atinge um máximo, os argumentos são os mesmos que os já utilizados no Lema 2.2.2.

Caso c) Seja $z(s_0) < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$. Afirmamos que z atinge mínimo (a demonstração é a mesma que para a situação correspondente do caso a)). Também, temos que z atinge um máximo. A demonstração usa argumentações semelhantes às já utilizadas em situações correspondentes dos casos a) e b).

Figura 13a

Figura 13b

Logo, nos três casos considerados, γ possui, pelo menos, dois pontos críticos e, pelo Corolário 2.2.1, temos que a curva γ é periódica. $\square$

É importante que observemos ainda alguns fatos sobre cada curva solução γ .

Observação 3.2.1 (a) Fixemos uma classe de superfícies especiais de tipo mínimo em questão, digamos uma classe dada por $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$. Seja $\alpha = \frac{1+c}{1-c}$. Vimos na Observação 3.1.1b que o toro flat $S^1\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right) \times S^1\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}}\right)$ é uma superfície nesta classe e corresponde ao paralelo dado por $z \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ em S^2_+ . Uma observação que fazemos agora é a de que cada curva geradora γ de uma superfície rotacional nesta classe “corta” a curva $z \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ do toro flat. Em outras palavras, se γ atinge um mínimo num ponto $s_1 \in \mathbb{R}$ então $z(s_1) < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ e se $\gamma(s_2)$ é um máximo então $z(s_2) > \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$. De fato, se s_1 é um ponto de mínimo, então $\ddot{z}(s_1) > 0$ e $\dot{z}(s_1) = 0$. Assim, utilizando a equação 3.1a temos que

$$\alpha = \frac{z(s_1)\ddot{z}(s_1) + z^2(s_1)}{1 - z^2(s_1)} > \frac{z^2(s_1)}{1 - z^2(s_1)} ,$$

de onde $z(s_1) < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$. Analogamente, para o máximo.

(b) Em decorrência da observação a) acima, cada solução de (3.1a) passa por $z(0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ (lembremos que a classe das superfícies especiais está fixada e que por simplificação tomamos $s_0 = 0$). Assim, cada solução com $\dot{z}(0)$ tal que $z^2(0) + \dot{z}^2(0) \leq 1$, ou $0 \leq \dot{z}^2(0) \leq \frac{1}{\alpha+1}$, corresponde uma solução de 3.2 com $0 < a \leq (\frac{\alpha}{\alpha+1})^\alpha (\frac{1}{\alpha+1})$ e vice-versa.

(c) Continuando com α fixo, não é difícil ver que, impondo $\dot{z} = 0$, a equação

$$z^{2\alpha}(1 - z^2) = a , \tag{3.4}$$

onde $0 < a < (\frac{\alpha}{\alpha+1})^\alpha (\frac{1}{\alpha+1})$, possui exatamente duas raízes reais z_1 e z_2 com

$$0 < z_1 < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} < z_2 < 1 .$$

Assim, o mínimo e o máximo de z devem ser, respectivamente, z_1 e z_2 , de modo que $z_1 < z(s) < z_2$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Como $\dot{\theta} > 0$ sempre, cada curva solução γ pode ser dada na forma $z = z(\theta)$. E mais, segundo o Lema 2.2.1, a curva γ é simétrica em relação a $\theta = \theta_1$ (respectivamente θ_2), onde $z_1 = z(\theta_1)$ (respectivamente $z_2 = z(\theta_2)$) é o mínimo de z (respectivamente, o máximo de z).

A Proposição 3.2.1 nos diz que a curva solução, γ , passando por $z(0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ (α fixo), correspondente a um valor de a , $0 < a \leq (\frac{\alpha}{\alpha+1})^\alpha (\frac{1}{\alpha+1})$, é periódica. O seu período, $\Theta(a)$, em relação a θ , é dado por $2|\theta_1 - \theta_2|$.

Para estudarmos o problema do mergulho de superfícies “tóricas”, de gênero um, em S^3 , devemos analisar se a curva solução fecha, ou não, na primeira volta.

Lembremos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, a classe de superfícies especiais de tipo mínimo correspondente possui um único toro flat, a saber, $S^1(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}) \times S^1(\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}})$ mergulhado em S^3 (veja Observação 3.1.1b).

Resta-nos então apresentar estimativas dos períodos das curvas geradoras das superfícies em questão, que nos levem às conclusões desejadas.

Com este propósito, observemos que uma superfície rotacional M , imersa em S^3 , em questão, pode ser vista como o lugar de se mover círculos em subespaços afins paralelos a $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2$, ao longo de uma curva plana, em $\mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\}$, descrita pelos seus centros. De fato, pela descrição da geometria orbital da ação de G sobre S^3 , apresentada na Seção 1.2 do Capítulo 1, cada tal círculo é uma G -órbita de um ponto $\gamma(s) \in S_+^2 \subset S^3$, onde $\gamma = M/G$. Assim, a curva plana, $\beta(s)$, ao longo da qual movemos os círculos, é obtida projetando-se ortogonalmente a curva γ em S_+^2 sobre o disco unitário cujo bordo coincide com ∂S_+^2 .

Se $q \in \mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\}$ é um ponto genérico da curva β , podemos defini-lo a partir da função suporte $h(\phi)$ de β (veja Figura 14) por

$$q(\phi) = e^{i(\phi - \pi/2)}(h(\phi) + i\dot{h}(\phi)) . \quad (3.5)$$

identificando $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo.

Figura 14

Em [O1, pp. 158 e 159], T. Otsuki obteve as seguintes expressões para as curvaturas principais de uma tal superfície $M \hookrightarrow S^3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = kg = -\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} + \frac{1-h^2-\dot{h}^2}{(h+\ddot{h})\sqrt{(1-h^2)^3}} \\ \lambda_2 = -\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} . \end{cases} \quad (3.6)$$

Escolhemos a orientação de γ tal que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. Aqui $\dot{h} = \frac{dh}{d\phi}$ e $\ddot{h} = \frac{d^2h}{d\phi^2}$ e lembremos que a condição de M ser uma superfície especial de tipo mínimo na classe de uma fixada f dada por $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$ é a seguinte (veja Observação 1.1.3b):

$$(1-c)\lambda_1 + (1+c)\lambda_2 = 0 . \quad (3.7)$$

Substituindo as expressões de λ_1 e λ_2 , dadas acima obtemos:

$$(1-c) \left(-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} + \frac{1-h^2-\dot{h}^2}{(h+\ddot{h})\sqrt{(1-h^2)^3}} \right) - (1+c) \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = 0 \quad (3.8)$$

que, por sua vez, equivale a

$$\frac{2}{1-c} [h(h+\ddot{h})(1-h^2)] - (1-h^2-\dot{h}^2) = 0 .$$

a qual se reescreve como

$$(\alpha + 1)h(1 - h^2)\ddot{h} + \dot{h}^2 + (1 - h^2)((\alpha + 1)h^2 - 1) = 0 . \quad (3.9)$$

Vemos assim que qualquer curva solução da equação 3.1a se projeta sobre uma curva solução da equação 3.9.

Fazendo $u = h^2 - \dot{h}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{du}{d\phi} &= h\dot{h} + \dot{h}\ddot{h} \\ &= h\dot{h} - \frac{\dot{h}^3}{(\alpha + 1)h(1 - h^2)} - \frac{((\alpha + 1)h^2 - 1)\dot{h}}{(\alpha + 1)h} , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{du}{d\phi} = \frac{\dot{h}(1 - h^2 - \dot{h}^2)}{(\alpha + 1)h(1 - h^2)} = \frac{\dot{h}(1 - u)}{(\alpha + 1)h(1 - h^2)} , \quad (3.10)$$

de modo que

$$\frac{du}{1 - u} = \frac{2}{\alpha + 1} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2(1 - h)} - \frac{1}{2(1 + h)} \right) dh .$$

Integrando esta equação, obtemos

$$1 - u = C \left(\frac{h^2}{1 - h^2} \right)^{-\frac{1}{\alpha+1}} , \quad C = \text{constante},$$

da qual obtemos

$$\left(\frac{dh}{d\phi} \right)^2 = 1 - h^2 - C \left(\frac{1}{h^2} - 1 \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} . \quad (3.11)$$

Observação 3.2.2 (a) Fixado $\alpha = \frac{1+c}{1-c}$, ($\alpha > 1$), a única solução constante da equação 3.9, dada por $h(\phi) = \sqrt{\frac{1}{\alpha+1}}$ corresponde ao toro flat $S^1(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}) \times S^1(\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}})$.

(b) Impondo que $\dot{h} = 0$ na equação 3.11 obtemos a seguinte equação

$$1 - h^2 - C \left(\frac{1}{h^2} - 1 \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = 0 , \quad (3.12)$$

onde, fazendo $h^2 = x$, obtemos

$$1 - x - C \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = 0 .$$

As raízes da equação acima são obtidas pelas possíveis intersecções das curvas $y = (\frac{1}{x} - 1)^{\frac{1}{\alpha+1}}$ ($0 < x < 1$) e da reta $y = \frac{1}{C}(1 - x)$. Não é difícil ver que a curva e a reta, dadas acima, se interceptam em exatamente dois pontos, quando

$$0 < C < \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

e se tangenciam no ponto $(\frac{1}{\alpha+1}, \alpha^{\frac{1}{\alpha+1}})$ quando $C = (\frac{\alpha}{\alpha+1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (\frac{1}{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Desta forma, a equação 3.12 possui exatamente duas raízes, digamos h_1 e h_2 com

$$0 < h_1 < \sqrt{\frac{1}{\alpha+1}} < h_2 < 1 .$$

Os valores h_1 e h_2 são, respectivamente, o mínimo e o máximo de $h(\phi)$.

(c) A solução $\phi \equiv \text{constante}$ da equação 3.9 corresponde à solução $\theta \equiv \text{constante}$ da equação 3.1a, a qual é a curva geradora de uma 2-esfera totalmente geodésica em S^3 .

(d) Se ϕ não é constante, então a solução h da equação 3.9 é dada por $h = h(\phi)$. E mais, $h = h(\phi)$ é simétrica em relação a $\phi = \phi_1$ ou $\phi = \phi_2$, onde $h_1 = h(\phi_1)$ e $h_2 = h(\phi_2)$. Logo, da equação 3.11, temos que $h(\phi)$ é periódica e seu período, $\Theta(C)$, é dado por

$$\Theta(C) = 2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{1 - h^2 - C(\frac{1}{h^2} - 1)^{\frac{1}{\alpha+1}}}} , \quad 0 < C < \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} . \quad (3.13)$$

É importante observarmos que as soluções $h(\phi)$ da equação 3.9 e $z(\theta)$ da equação 3.1a são as mesmas. Portanto, estimaremos o período $\Theta(C)$.

Lema 3.2.1 (Otsuki [O1]) *Para cada $\alpha > 1$, o período $\Theta(C)$ acima definido tem as seguintes propriedades:*

(i) é diferenciável sobre $0 < C < (\frac{\alpha}{\alpha+1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (\frac{1}{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}}$;

(ii) $\Theta(C) > \pi$;

(iii) $\lim_{C \rightarrow 0^+} \Theta(C) = \pi$;

(iv) $\lim_{C \rightarrow b} \Theta(C) = \sqrt{2}\pi$, onde $b = (\frac{\alpha}{\alpha+1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (\frac{1}{1+\alpha})^{\frac{1}{1+\alpha}}$.

Demonstração: As demonstrações de (i) – (iv) seguem as demonstrações dos Lemas 1, 2, 3 e 5 em [O1]. Observemos que nos lemas citados temos “ n ” inteiro positivo no lugar de “ $\alpha + 1$ ”, mas suas demonstrações permanecem válidas quando colocamos “ $\alpha + 1$ ” no lugar de “ n ”. $\square$

Lema 3.2.2 (Otsuki, [O2]) *Para cada $\alpha > 1$, $\Theta(C)$ satisfaz*

$$\Theta(C) < \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right) \pi < \sqrt{2}\pi .$$

Demonstração: Também segue a risca a demonstração do teorema obtido em [O2], por Otsuki. $\square$

Demonstração do Teorema B

Para cada $\alpha > 1$ e para cada C , $0 < C < (\frac{\alpha}{\alpha+1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (\frac{1}{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}}$; $\Theta(C) = \frac{2\pi}{n}$, ($n \in \mathbb{N}$), não ocorre entre π e $\sqrt{2}\pi$. Portanto, a correspondente superfície compacta, homeomorfa a $S^1 \times S^1$, possui auto-intersecções, não sendo mergulhada. Concluimos então que a única superfície de tipo mínimo, compacta de gênero um e mergulhada em S^3 , na classe de uma f do tipo $f(x) = c\sqrt{x}$, $0 < c < 1$, é o toro flat $S^1(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}) \times S^1(\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}})$ na classe. $\square$

Referências

- [BdCH] Back, A.; do Carmo, M.P. & Hsiang, W.Y. *On some fundamental equations of equivariant Riemannian geometry*. Preprint.
- [BN] Brauer, F. & Nohel, J.A. *Qualitative theory of ordinary differential equations*. W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [BL] Brito, F.G.B. & Leite, M.L. A remark on rotational hypersurfaces of S^n . *Bull. Soc. Math. Belg., Ser. B*, **42** (1990), 303–318.
- [dC] do Carmo, M.P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, 1979.
- [dCD] do Carmo, M.P. & Djacer, M. Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Transactions of the A.M.S.*, **277** (1983), 685–709.
- [Ch] Charlet, B. Le problème de Bernstein sphérique. *Sem. Palaiseau, Asterisque, Exposé XI* (1987), 221–243.
- [C] Chern, S.S. On special W -surfaces. *Proc. A.M.S.*, (1955), 783–786.
- [CL] Coddington, E.A. & Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [F] Furuya, S. On periods of periodic solutions of a certain non-linear differential equation. *Japan - U.S. Seminar on Ord. Diff. and Functional Eq.*, Springer-Verlag, Berlin and New York (1971), 320–323.
- [HW] Hartman, P. & Wintner, A. Umbilical points and W -surfaces. *Amer. J. of Math.*, **76** (1954), 502–508.

- [Ho] Hopf, H. Differential geometry in the large. *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, **1000**, 1983.
- [H] Hsiang, W.Y. On rotational W -hypersurfaces in spaces of constant curvature and generalized laws of sine and cosine. *Bull. Inst. Acad. Sinica*, **11** (1983), 349–373.
- [HL] Hsiang, W.Y. & Lawson Jr., B.L. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. *J. Diff. Geom.*, **5** (1971), 1–38.
- [L] Lawson, B. Complete minimal surfaces in S^3 . *Ann. of Math.*, **90** (1970), 335–374.
- [M] Mori, H. The first eigenvalue of Laplacians on minimal surfaces in S^3 . *J. Math. Soc. Japan*, **37** (1985), 79–86.
- [O1] Otsuki, T. Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature. *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 145–173.
- [O2] Otsuki, T. On integral inequalities related with a certain non-linear differential equation. *Proc. Japan Acad.*, **48** (1972), 9–12.
- [R1] Ripoll, J. *Superfícies invariantes de curvatura média constante*. Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.
- [R2] Ripoll, J. Uniqueness of minimal rotational surfaces in S^3 . *Amer. J. of Math.*, **111** (1989), 537–547.
- [SaET1] Sa Earp, R. & Toubiana, E. A note on special surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Matemática Contemporânea*, **4** (1993), 109–118.
- [SaET2] Sa Earp, R. & Toubiana, E. *Sur les surfaces spéciales de type minimal*. Preprint.