**IDENTIDADES POLINOMIAIS
PARA AS ÁLGEBRAS DE MATRIZES,
ÁLGEBRAS DE JORDAN DE GRAU 2
E ÁLGEBRAS DE CAYLEY-DICKSON**

Carlota Chiemi Kuramochi

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi**

*Durante a elaboração deste trabalho,
a autora recebeu apoio financeiro do CNPq*

-São Paulo, setembro de 1994-

Ao Manoel

Agradecimentos

- Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi, pela orientação, pela acolhida pronta e amiga e principalmente pela paciência com que me acompanhou durante a elaboração deste trabalho;
- Prof^a. Dr^a. Elza Furtado Gomide, pela orientação de programa e pelos valiosos esclarecimentos;
- Prof^a. Dr^a. Sílvia Dias Alcântara Machado, da PUC-SP, pelo incentivo;
- Manoel, pela compreensão e dedicação em todos os momentos;
- Léo e Gaspar, pelas dicas na digitação da tese
- e professores, colegas e funcionários do IME-USP.

Resumo

Este trabalho resultou do estudo dos artigos *Minimal identities for algebras* de A. S. Amitsur e J. Levitzki, *Minimal identities for Jordan algebras of degree 2* e *Minimal identities of octonion algebras* de M. L. Racine, que correspondem aos capítulos 2, 3 e 4, respectivamente. O resultado principal do segundo capítulo estabelece que as identidades minimais multilineares para a álgebra das matrizes quadradas são múltiplos escalares do polinômio standard. No terceiro capítulo, determina-se uma base para o espaço das identidades minimais multilineares (que são polinômios de Jordan) para as álgebras de Jordan de grau 2. Finalmente, no último capítulo, o resultado principal estabelece que as identidades minimais, que não são consequências das leis alternativas, para as álgebras de Cayley-Dickson são consequências dos polinômios κ e ζ .

Abstract

This work is based on the papers *Minimal identities for algebras* by A. S. Amitsur and J. Levitzki, *Minimal identities for Jordan algebras of degree 2* and *Minimal identities of octonion algebras* by M. L. Racine, which correspond to chapters 2, 3 and 4, respectively. The main result in the second chapter establishes that the minimal multilinear identities for the algebra of square matrices are scalar multiples of the standard polynomial. In the third chapter one obtains a basis for the minimal multilinear identities which are Jordan polynomials and hold for all Jordan algebras of degree 2. Finally, in the fourth chapter, the main result asserts that the minimal identities, which are not consequences of the alternative laws and hold for all Cayley-Dickson algebras, follow from the polynomials κ and ζ .

Prefácio

O objetivo deste trabalho é determinar as identidades minimais (isto é, de menor grau) para as álgebras de matrizes quadradas, álgebras de Jordan de grau 2 e álgebras de Cayley-Dickson.

O capítulo 1 contém os conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

No capítulo 2, mostramos que o grau das identidades minimais para as álgebras das matrizes quadradas de ordem n é $2n$, e determinamos as identidades minimais multilineares. E também, mostramos que se $n > 2$ ou $F \not\cong \mathbb{Z}_2$, todas as identidades minimais para esta álgebra são múltiplos escalares do polinômio standard definido por

$$s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in P_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)},$$

onde P_{2n} denota o grupo das permutações de $2n$ índices e $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação $\sigma \in P_{2n}$. Em seguida obtivemos as identidades minimais multilineares para qualquer álgebra associativa semi-simples de dimensão finita.

No capítulo 3, determinamos as identidades minimais multilineares (que são polinômios de Jordan) para as álgebras de Jordan de grau 2. Estas identidades têm grau 5. Mostramos que o polinômio de Jordan definido por

$$\kappa(x; x_1, x_2, x_3) = s_3(V_{x_1}, V_{x_2}, V_{x_3})(x^2) - V_x(s_3(V_{x_1}, V_{x_2}, V_{x_3})(x)),$$

onde V_x é o operador $V_x(y) = x \circ y = xy + yx$, é uma identidade minimal. Mostramos que se o corpo de base tem característica 0, os polinômios

$$\kappa_{ij} = \kappa(x_i, x_j; x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5) \quad (1 \leq i < j \leq 5),$$

obtidos pela linearização do polinômio κ , formam uma base para o espaço das identidades minimais multilineares para as álgebras de Jordan de grau 2. Consideramos o polinômio de Jordan

$$\lambda(x, y, z) = [[x, y]^2, [x, z]]$$

(onde $[x, y] = xy - yx$) que é uma identidade para as álgebras de Jordan de grau 2 e provamos que este polinômio não é consequência do polinômio κ quando a característica é igual a zero. Concluimos assim que as identidades de grau 6 para estas álgebras não podem ser obtidas a partir do polinômio κ .

No capítulo 4, estudamos as identidades que valem para as álgebras de Cayley-Dickson. Estas álgebras satisfazem as leis alternativas $x^2y - x(xy) = 0$ e $(xy)y - xy^2 = 0$, que são identidades de grau 3. Consideramos o problema de determinar as identidades minimais (que não são consequências das leis alternativas) para as álgebras de Cayley-Dickson. Mostramos que tais identidades têm grau 5 e são consequências dos polinômios κ e ζ , onde

$$\zeta(x_1, x_2, \dots, x_5) = [[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5].$$

Conteúdo

1	Preliminares	1
1.1	Identities polinomiais	1
1.2	Linearização de identidades	6
1.3	Álgebras de Jordan especiais	11
1.4	Álgebras quadráticas	13
1.5	Álgebras de Jordan de grau 2	18
1.6	Álgebras alternativas	19
1.7	Álgebras de Cayley-Dickson	24
2	O Teorema de Amitsur-Levitzki	30
2.1	Polinômio standard	30
2.2	O Teorema de Amitsur-Levitzki	33
2.3	Unicidade	38
2.4	Aplicações	50

2.5	Conjectura de Razmyslov	53
3	Identities minimais para as álgebras de Jordan de grau 2	55
3.1	O polinômio κ	55
3.2	Identities multilineares simétricas	58
3.3	Identities minimais	66
3.4	O polinômio λ	72
3.5	Identities para álgebras de grau 3	76
4	Identities minimais para as álgebras de Cayley-Dickson	82
4.1	Inexistência das identities de grau 4	84
4.2	O ideal associador dos tipos $[2,2,1]$ e $[2,1,1,1]$	88
4.3	As identities de grau 5	93

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Identidades polinomiais

Sejam F um corpo e $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis não-comutativas. Adicionemos a X mais dois símbolos, os parênteses à direita e à esquerda, para obtermos $\overline{X}$. Seja S o conjunto de todas as possíveis seqüências finitas de elementos de $\overline{X}$. Duas seqüências $a_1a_2\dots a_m$ e $b_1b_2\dots b_n$, onde $a_i, b_j \in \overline{X}$, são iguais se $m = n$ e $a_i = b_i$ para $i = 1, \dots, n$. Definimos indutivamente o subconjunto $V[X]$ de S como segue. Primeiro, todos os elementos de X pertencem a $V[X]$. Posteriormente, se $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V[X] \setminus X$, então as seqüências x_1x_2 , $x_1(u)$, $(v)x_2$ e $(u)(v)$ também pertencem a $V[X]$. Nenhum outro tipo de seqüência pertence a $V[X]$. As seqüências em $V[X]$ são denominadas palavras não-associativas. Por exemplo, a seqüência $(x_1(x_2x_3))x_4$ é uma palavra não-associativa, o que não ocorre com a seqüência $(x_1(x_2x_3)x_4)$. O número de elementos de X que aparecem em uma palavra v é chamado *comprimento da palavra não-associativa* v e é denotado por $d(v)$.

Proposição 1.1 ([14], pg. 02) *Seja v uma palavra não-associativa. Então*

- (i) *o número de parênteses à esquerda em v é igual ao número de parênteses à direita;*
- (ii) *Em qualquer subsequência inicial da palavra v , o número de parênteses à esquerda é*

maior ou igual ao número de parênteses à direita. $\square$

Definamos sobre $V[X]$ uma operação binária, denotada por $.$, de acordo com as seguintes regras. Sejam $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V[X] \setminus X$. Então

$$\begin{aligned} x_1.x_2 &= x_1x_2, & x_1.u &= x_1(u), \\ v.x_2 &= (v)x_2, & u.v &= (u)(v). \end{aligned}$$

Proposição 1.2 ([14], pg. 02) *Toda palavra não-associativa v tal que $d(v) \geq 2$ possui uma única representação em forma de um produto de duas palavras não-associativas de comprimento menor.* $\square$

Consideremos agora o F -módulo $F[X]$ com conjunto de geradores $V[X]$ e estendamos a operação de multiplicação definida sobre $V[X]$ a $F[X]$ pela regra

$$\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) \left(\sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (u_i.v_j),$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in F$ e $u_i, v_j \in V[X]$. Obtemos assim uma álgebra sobre F que denotamos por $F[X]$ e que chamamos *álgebra livre sobre F com conjunto de geradores X* . Os elementos da álgebra $F[X]$ são chamados *polinômios não-associativos*. Um polinômio não-associativo da forma αv , onde $\alpha \in F$ e $v \in V[X]$, é chamado *monômio não-associativo*. O comprimento da palavra v é chamado *grau do monômio*. O máximo dos graus dos monômios cuja soma forma o polinômio é chamado *grau do polinômio*. Dizemos que um monômio é do tipo $[k_1, \dots, k_m]$ se ele contém x_i exatamente k_i vezes e também $k_m \neq 0$ mas $k_j = 0$ para $j > m$. O número k_i é chamado *grau do monômio em x_i* . O grau de um polinômio não-associativo f em x_i é definido como o máximo grau em x_i dos seus monômios. Se todos os monômios do polinômio f têm o mesmo grau em x_i , então f é chamado *homogêneo na variável x_i* . Um polinômio é chamado *homogêneo* se ele é homogêneo em cada variável. Por exemplo, o polinômio

$$(x_1^2 x_2) x_4 + ((x_1 x_4) x_2) x_1$$

é homogêneo pois cada um dos seus monômios é do tipo $[2, 1, 0, 1]$. Um monômio do tipo $[k_1, \dots, k_m]$ onde $k_i \leq 1$, para todo $i = 1, \dots, m$ é chamado *multilinear*. Mais geralmente,

$f \in F[X]$ é *multilinear* se todo monômio na sua representação é multilinear e envolve precisamente as mesmas variáveis. Caso f não seja homogêneo, podemos agrupar os monômios do mesmo tipo de f . Então f é representado na forma de uma soma de polinômios homogêneos. Estes polinômios homogêneos são chamados de *componentes homogêneas* do polinômio f .

Seja A uma álgebra sobre F . Se $f(x_1, \dots, x_n) \in F[X]$ é um polinômio não identicamente nulo e se

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

para todo $a_1, \dots, a_n \in A$, dizemos que f é uma *identidade polinomial* para A , ou equivalentemente que A *satisfaz* f . Denotamos este fato por $f(A) = 0$ ou $f(A, \dots, A) = 0$. A identidade f é chamada *identidade minimal* se f é uma identidade polinomial de menor grau. Por exemplo, toda álgebra comutativa B satisfaz

$$g(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$$

e $g(x_1, x_2)$ é uma identidade minimal para B . A coleção de todas as identidades para uma dada álgebra A é um ideal da álgebra $F[X]$, que é chamado *ideal de identidades* (ou *T-ideal*) da álgebra A e é denotado por $I(A)$. A coleção de todas as identidades que são satisfeitas por cada álgebra de uma classe de álgebras M é também um ideal em $F[X]$. Ele é chamado *ideal de identidades* (*T-ideal*) da classe de álgebras M e é denotado por $I(M)$.

Seja $\mathfrak{S}$ um subconjunto de $F[X]$. A classe M de todas as F -álgebras satisfazendo cada identidade de $\mathfrak{S}$ é chamada *variedade de álgebras* definida pelo conjunto de identidades $\mathfrak{S}$. Por exemplo, todas as álgebras associativas formam a variedade definida pela identidade $f = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$. As identidades

$$f_1 = x_1^2x_2 - x_1(x_1x_2),$$

$$f_2 = x_1x_2^2 - (x_1x_2)x_2$$

definem a variedade de *álgebras alternativas*. A classe de todas as *álgebras de Lie* é a variedade definida por

$$f_1 = x_1^2,$$

$$f_2 = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2.$$

A variedade das *álgebras de Jordan* é definida pelas identidades

$$f_1 = x_1x_2 - x_2x_1,$$

$$f_2 = (x_1^2x_2)x_1 - x_1^2(x_2x_1).$$

A variedade que consiste apenas da álgebra zero é chamada trivial.

Sejam M uma variedade não trivial de F -álgebras e G uma álgebra de M com conjunto de geradores Y . A álgebra G é chamada *livre na variedade M* se toda função do conjunto Y numa álgebra arbitrária A de M pode ser estendida unicamente por um homomorfismo da álgebra G em A .

Seja $\mathfrak{S}$ algum conjunto de polinômios de $F[X]$. Denotamos por $\mathfrak{S}(A)$ o ideal da F -álgebra A gerado por todos os possíveis elementos da forma $f(a_1, \dots, a_n)$ onde $f \in \mathfrak{S}$ e $a_1, \dots, a_n \in A$.

Teorema 1.1 ([14], pg. 04) *Seja M uma variedade não trivial de F -álgebras definida por um conjunto de identidades $\mathfrak{S}$. Então, a restrição a X do homomorfismo canônico $\sigma : F[X] \longrightarrow F[X] / \mathfrak{S}(F[X])$ é injetiva e a álgebra $F[X] / \mathfrak{S}(F[X])$ é livre na variedade M com o conjunto de geradores livres $\sigma(X)$. Quaisquer duas álgebras livres em M com conjuntos equivalentes de geradores livres são isomorfas.*

□

As variedades de álgebras associativas, alternativas e de Jordan são não triviais. Portanto, elas possuem álgebras livres, que denotamos por $Ass[X]$, $Alt[X]$ e $J[X]$, respectivamente.

Teorema 1.2 *Seja $f \in F[X]$ uma identidade para uma F -álgebra A de grau k_i em x_i . Definamos $k = \max\{k_i\}$. Suponhamos que F seja um corpo contendo $k+1$ elementos distintos*

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ tais que para o determinante da matriz de Vandermonde $V = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1})$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^k \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{k+1} & \alpha_{k+1}^2 & \dots & \alpha_{k+1}^k \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (\alpha_j - \alpha_i),$$

a equação $d.a = 0$ implica $a = 0$ para todo $a \in A$. Então toda componente homogênea da identidade f é identidade para A .

Demonstração. Seja f_i ($i = 1, \dots, k_1$) a soma de todos os monômios de f que têm grau i em x_1 . Então podemos escrever o polinômio f na forma

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_{k_1}.$$

Sejam $f = f(x_1, \dots, x_n)$ e $a_1, \dots, a_n$ elementos arbitrários de A . Denotemos $f_i(a_1, \dots, a_n)$ por $f_i(a)$. Então para qualquer α_i ($i = 1, \dots, k+1$), temos

$$0 = f(\alpha_i a_1, a_2, \dots, a_n) = f_0(a) + \alpha_i f_1(a) + \alpha_i^2 f_2(a) + \dots + \alpha_i^{k_1} f_{k_1}(a).$$

Isto implica que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{k_1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{k_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{k+1} & \alpha_{k+1}^2 & \dots & \alpha_{k+1}^{k_1} \end{pmatrix}}_{V_1} \underbrace{\begin{pmatrix} f_0(a) \\ f_1(a) \\ \vdots \\ f_{k_1}(a) \end{pmatrix}}_{f(a)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se d_1 é o determinante de V_1 e se $Adj(V_1)$ denota a matriz adjunta de V_1 ,

$$d_1 I_{k+1} = Adj(V_1) V_1.$$

Logo,

$$d_1 f(a) = (Adj(V_1) V_1) f(a) = Adj(V_1) (V_1 f(a)) = 0.$$

Isto é $d_1 f_j(a) = 0$, para todo a . Mas como d_1 é divisor de d , $d = \beta d_1$, onde $\beta \in F$. Logo,

$$df_j(a) = \beta d_1.f_j(a) = 0.$$

Então, pela hipótese, temos $f_j(a) = 0$ ($\forall j = 0, \dots, k_1$). Isto implica que os f_j ($j = 0, 1, \dots, k_1$) são identidades para a álgebra A . Aplicando o mesmo processo para as variáveis $x_2, x_3, \dots, x_n$ e os polinômios f_j obtemos o resultado desejado. $\square$

A variedade M é chamada *homogênea* se para todo $f \in I(M)$, todas as componentes homogêneas de f também pertencem a $I(M)$.

Corolário 1.1 *Toda variedade de álgebras sobre um corpo infinito é homogênea.* $\square$

1.2 Linearização de identidades

Fixemos y , um elemento de $F[X]$. Definamos

$$\Delta(y) = \{\Delta_i^m(y) : i = 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots\}$$

uma família de operadores lineares de $F[X]$, considerando

- (1) $\Delta_i^0(y) = id$ - a função identidade,
- (2) $x_s \Delta_i^m(y) = 0$, se $m > 1$ ou $m = 1, i \neq s$,
- (3) $x_i \Delta_i^1(y) = y$,
- (4) $(u.v) \Delta_i^m(y) = \sum_{r+s=m} (u \Delta_i^r(y)).(v \Delta_i^s(y))$,

onde $x_j \in X$ e u, v são monômios arbitrários de $F[X]$.

Lema 1.1 ([14], pg. 09) *Seja $u = u(x_1, \dots, x_n)$ um monômio arbitrário de $F[X]$ de grau k_i em x_i . Então para $m \leq k_i$*

$$u \Delta_i^m(y) = u_1 + u_2 + \dots + u_{\binom{k_i}{m}}$$

onde $u_1, u_2, \dots, u_{\binom{k_i}{m}}$ são todos os monômios possíveis de se obter de u , substituindo-se y para m ocorrências de x_i , e para $m > k_i$, $u\Delta_i^m(y) = 0$. □

Listemos alguns exemplos:

$$[(x_1^2 x_2) x_1] \Delta_1^1(y) = (x_1^2 x_2) y + [(x_1 y) x_2] x_1 + [(y x_1) x_2] x_1,$$

$$[(x_1^2 x_2) x_1] \Delta_1^2(y) = [(x_1 y) x_2] y + [(y x_1) x_2] y + (y^2 x_2) x_1,$$

$$[(x_1^2 x_2) x_1] \Delta_1^3(y) = (y^2 x_2) y,$$

$$[(x_1^2 x_2) x_1] \Delta_1^4(y) = 0.$$

Se os elementos de X não estão indexados (por exemplo, $X = \{x, z, t, \dots\}$) escrevemos a própria variável no lugar de i . Por exemplo,

$$[(x^2 z) t] \Delta_z^1(y) = [(x^2 y) t].$$

Observemos que a ação do operador Δ_i^m é análoga a diferenciação parcial com respeito à variável x_i .

Lema 1.2 *Seja $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um polinômio de $F[X]$ de grau k_i em x_i . Então*

$$f(x_1, \dots, x_i + y, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{k_i} f \Delta_i^m(y).$$

Demonstração. É suficiente considerar o caso onde f é um monômio. Provaremos por indução sobre o grau de f em x_i . Se o grau de f em x_i é 1 é óbvio. Sejam $k_i > 1$ e $f = f_1 \cdot f_2$ tal que os graus de f_1 e f_2 em x_i são, respectivamente, k' e k'' . É claro que $k', k'' < k_i$. Pela hipótese de indução e pela definição do operador $\Delta_i^m(y)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i + y, \dots, x_n) &= f_1(x_1, \dots, x_i + y, \dots, x_n) f_2(x_1, \dots, x_i + y, \dots, x_n) \\ &= \left[\sum_{r=0}^{k'} f_1 \Delta_i^r(y) \right] \left[\sum_{s=0}^{k''} f_2 \Delta_i^s(y) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{k_i} \left[\sum_{r+s=m} (f_1 \Delta_i^r(y)) (f_2 \Delta_i^s(y)) \right] = \sum_{m=0}^{k_i} f \Delta_i^m(y). \end{aligned} \quad \square$$

Consideremos um polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F[X]$ e seja $x_j \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

Chamamos os polinômios

$$f_i^{(m)}(x_1, \dots, x_n; x_j) = f \Delta_i^m(x_j)$$

de *linearizações parciais* do polinômio f em x_i de grau m . Seja f um polinômio de grau k_i em x_i . Em vista do Lema 1.1, o polinômio $f_i^{(m)}(x_1, \dots, x_n; x_j)$ é homogêneo em x_j de grau m para $m \leq k_i$ e é igual a zero para $m > k_i$. Se f é um polinômio homogêneo do tipo $[k_1, \dots, k_i, \dots, k_n]$ então o polinômio $f_i^{(m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1})$ é também homogêneo do tipo $[k_1, \dots, k_i - m, \dots, k_n, m]$ (para $m \leq k_i$).

Teorema 1.3 *Seja $f \in F[X]$ uma identidade de uma F -álgebra A , que é homogênea em x_i de grau k . Suponhamos que existam $k - 1$ elementos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ em F tal que para o determinante*

$$d = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{k-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{k-1} & \alpha_{k-1}^2 & \dots & \alpha_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{s=1}^{k-1} \alpha_s \right) \left(\prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i) \right)$$

a equação $d \cdot a = 0$ implica $a = 0$ para qualquer $a \in A$. Então todas as linearizações parciais em x_i do polinômio f são identidades da álgebra A .

Demonstração. Sejam $f = f(x_1, \dots, x_n)$ e $a_1, a_2, \dots, a_n, a_j$ elementos arbitrários de A . Denotemos os elementos $f_i^{(m)}(a_1, \dots, a_n; a_j)$ por $f_i^{(m)}(a)$. Pelo Lema 1.2 temos

$$0 = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = \sum_{s=0}^k f_i^{(s)}(a) = \sum_{s=1}^{k-1} f_i^{(s)}(a),$$

pois

$$f_i^{(0)}(a) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0,$$

$$f_i^{(k)}(a) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0.$$

Substituindo sucessivamente na equação obtida os elementos $\alpha_1 a_j, \alpha_2 a_j, \dots, \alpha_{k-1} a_j$ no lugar de a_j , obtemos

$$\alpha_1 f_i^{(1)}(a) + \alpha_1^2 f_i^{(2)}(a) + \dots + \alpha_1^{(k-1)} f_i^{(k-1)}(a) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 f_i^{(1)}(a) + \alpha_2^2 f_i^{(2)}(a) + \dots + \alpha_2^{(k-1)} f_i^{(k-1)}(a) &= 0, \\
&\vdots \\
\alpha_{k-1} f_i^{(1)}(a) + \alpha_{k-1}^2 f_i^{(2)}(a) + \dots + \alpha_{k-1}^{(k-1)} f_i^{(k-1)}(a) &= 0.
\end{aligned}$$

Usando um argumento análogo ao que usamos na demonstração do Teorema 1.2, temos que $d.f_i^{(s)}(a) = 0$ e portanto $f_i^{(s)}(a) = 0$, o que mostra que $f_i^{(s)}(x_1, \dots, x_n; x_j)$ é uma identidade para A . $\square$

Sejam $f = f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio em $F[X]$ e $y_1, \dots, y_k \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Para cada $i = 1, \dots, n$ definamos um polinômio fL_i^k pela fórmula

$$\begin{aligned}
fL_i^k(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, y_2, \dots, y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) &= \\
f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1 + y_2 + \dots + y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) & \\
- \sum_{q=1}^k f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1 + \dots + \widehat{y_q} + \dots + y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) & \\
+ \sum_{1 \leq q_1 < q_2 \leq k} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1 + \dots + \widehat{y_{q_1}} + \dots + \widehat{y_{q_2}} + \dots + y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) & \\
- \dots + (-1)^{k-1} \sum_{q=1}^k f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_q, x_{i+1}, \dots, x_n), &
\end{aligned}$$

onde $\widehat{y_i}$ indica que a variável y_i não aparece.

Pela definição, concluímos que se A é uma F -álgebra e se f é uma identidade para A então fL_i^k ainda é uma identidade para A , denominada uma *linearização de f* .

Proposição 1.3 ([14], pg. 15) *Sejam $f, f' \in F[X]$ para os quais o operador L_i^k está definido. Então $(f + f')L_i^k = fL_i^k + f'L_i^k$. E ainda, se $f = f(x_1, \dots, x_m)$ é um monômio de grau n em x_i e se $g = g(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, y_2, \dots, y_n, x_{i+1}, \dots, x_m)$ é um monômio linear em $y_1, y_2, \dots, y_n \in X \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ tal que $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$, então*

$$fL_i^k(x_1, \dots, x_{i-1}, z_1, \dots, z_k, x_{i+1}, \dots, x_m) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in P_n} g(x_1, \dots, x_{i-1}, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}, x_{i+1}, \dots, x_m), & \text{se } k = n, \\ 0, & \text{se } k > n, \end{cases}$$

onde P_n denota o grupo das permutações de n índices. $\square$

Como exemplo, vamos determinar $[x_1^2(x_2x_1)]L_1^3$ aplicando a proposição anterior. Temos:

$$i = 1, k = 3;$$

$$f = f(x_1, x_2) = x_1^2(x_2x_1), n = 3, m = 2;$$

$$g = g(y_1, y_2, y_3, x_2) = (y_1y_2)(x_2y_3);$$

$$g(x_1, x_1, x_1, x_2) = x_1^2(x_2x_1) = f(x_1, x_2).$$

Então

$$\begin{aligned} fL_1^3(z_1, z_2, z_3, x_2) &= \sum_{\sigma \in P_3} g(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, x_2) = \\ &g(z_1, z_2, z_3, x_2) + g(z_1, z_3, z_2, x_2) + g(z_2, z_1, z_3, x_2) + \\ &g(z_2, z_3, z_1, x_2) + g(z_3, z_1, z_2, x_2) + g(z_3, z_2, z_1, x_2) \\ &= (z_1z_2)(x_2z_3) + (z_1z_3)(x_2z_2) + (z_2z_1)(x_2z_3) + \\ &(z_2z_3)(x_2z_1) + (z_3z_1)(x_2z_2) + (z_3z_2)(x_2z_1). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$(x_1^2x_2^2)L_1^2L_2^2 = (y_1y_2)(z_1z_2) + (y_2y_1)(z_1z_2) + (y_1y_2)(z_2z_1) + (y_2y_1)(z_2z_1).$$

E ainda, usando a proposição, temos $[(x_1^2x_2)x_1^2]L_1^5 = 0$.

Seja $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um polinômio homogêneo do tipo $[k_1, k_2, \dots, k_n]$. Então o polinômio multilinear $fL_1^{k_1}L_2^{k_2}\dots L_n^{k_n}$ é denominado *linearização completa do polinômio f* .

Teorema 1.4 *Sejam $f = f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio não-associativo e A uma F -álgebra. Suponhamos que f seja uma identidade para uma subálgebra B da álgebra A . Então a linearização completa de qualquer componente homogênea de f com grau maximal também é uma identidade para B .*

Demonstração. Seja $f = f_1 + f_2 + \dots + f_s$ uma decomposição do polinômio f em soma de componentes homogêneas. Suponhamos que o grau de f_1 seja o maximal e que a variável x_j não ocorre em f_1 mas ocorre nas demais. Então o polinômio

$$f'(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

é ainda uma identidade para B e tem f_1 como uma componente homogênea de grau maximal, mas f' não contém x_j .

Agora, se x_i ocorre em f_1 mas não ocorre em alguma outra componente homogênea do polinômio f' então podemos considerar o novo polinômio

$$f''(x_1, x_2, \dots, x_n) = f'(x_1, \dots, x_n) - f'(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Este polinômio é também uma identidade para B , mas x_i agora aparece em todas as componentes homogêneas do polinômio f'' e, como antes, f_1 é uma componente homogênea de grau maximal em f'' .

Portanto, renumerando as variáveis se necessário, podemos assumir no início que a componente homogênea f_1 do polinômio f é do tipo $[k_1, k_2, \dots, k_n]$, onde $k_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. As componentes homogêneas f_r restantes são do tipo $[m_1^{(r)}, \dots, m_n^{(r)}]$, onde $m_i^{(r)} \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, e onde a desigualdade estrita $m_j^{(r)} < k_j$ ocorre para algum j .

Como $m_j^{(r)} < k_j$, então $f_r L_1^{k_1} L_2^{k_2} \dots L_n^{k_n} = 0$ pela Proposição 1.3. Consequentemente,

$$f_1 L_1^{k_1} L_2^{k_2} \dots L_n^{k_n} = f L_1^{k_1} L_2^{k_2} \dots L_n^{k_n},$$

o que mostra que a linearização completa $f_1 L_1^{k_1} L_2^{k_2} \dots L_n^{k_n}$ da componente f_1 é uma identidade para a subálgebra B . □

Corolário 1.2 *Se uma álgebra satisfaz alguma identidade de grau n então satisfaz também alguma identidade multilinear de grau n .* □

1.3 Álgebras de Jordan especiais

Seja F um corpo de característica diferente de 2. Já vimos que uma álgebra é de Jordan se satisfaz $xy = yx$ e $(x^2y)x = x^2(yx)$.

Seja A uma álgebra associativa. Substituindo o produto ab por $a \circ b = ab + ba$ obtemos uma álgebra de Jordan que denotamos por A^+ . Seja J uma álgebra de Jordan. Dizemos que

J é uma *álgebra de Jordan especial* se J é isomorfo a uma subálgebra de A^+ , para alguma álgebra associativa A .

A subálgebra gerada por X da álgebra $\text{Ass}[X]^+$ é uma álgebra de Jordan especial denominada *álgebra de Jordan livre especial*, que denotamos por $FSJ[X]$.

Um elemento de $\text{Ass}[X]$ é chamado *polinômio de Jordan* se ele pertence a $FSJ[X]$, isto é, pode ser expresso pelos elementos de X por meio de operações $+$ e $\circ$. Por exemplo, o polinômio $x_1x_2x_1$ é de Jordan pois $x_1x_2x_1 = \frac{1}{2}(x_1 \circ x_2) \circ x_1 - \frac{1}{4}(x_1 \circ x_1) \circ x_2$.

Um endomorfismo ρ em uma álgebra é denominado *involução* se satisfaz:

- (i) $\rho(\rho(a)) = a$,
- (ii) $\rho(ab) = \rho(b)\rho(a)$.

Definamos uma involução $*$ sobre os monômios em $\text{Ass}[X]$ pela regra:

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k})^* = x_{i_k}\dots x_{i_2}x_{i_1}.$$

É claro que esta definição pode ser estendida para os polinômios de $\text{Ass}[X]$ por linearidade. Isto é, se $f = \sum \alpha_s u_s$ onde $\alpha_s \in F$ e u_s são monômios, então $f^* = \sum \alpha_s u_s^*$. Denotemos por $H(\text{Ass}[X], *)$ a álgebra de Jordan formada pelos elementos de $\text{Ass}[X]$ que são simétricos com respeito a $*$.

Teorema 1.5 (*Teorema de Cohn*) ([14], pg. 59) *A inclusão $FSJ[X] \subseteq H(\text{Ass}[X], *)$ é válida para qualquer conjunto X . Além disso, se $\text{card}(X) \leq 3$,*

$$FSJ[X] = H(\text{Ass}[X], *).$$

□

Teorema 1.6 (*Teorema de Shirshov*) ([14], pg. 71) *Toda álgebra de Jordan gerada por dois elementos é uma álgebra de Jordan especial.*

□

1.4 Álgebras quadráticas

Nesta seção apresentaremos o conceito de formas (bilineares e quadráticas) e definiremos as álgebras quadráticas.

Sejam F um corpo arbitrário e V um espaço vetorial de dimensão não nula sobre F . Uma função $b : V \times V \longrightarrow F$ é denominada *forma bilinear* se para todo $x, x', y, y' \in V$ e $\alpha \in F$, satisfaz

$$(1) \quad b(x + x', y) = b(x, y) + b(x', y),$$

$$(2) \quad b(x, y + y') = b(x, y) + b(x, y'),$$

$$(3) \quad b(\alpha x, y) = b(x, \alpha y) = \alpha b(x, y).$$

A forma bilinear b é chamada *simétrica* se $b(x, y) = b(y, x)$ ($\forall x, y \in V$). Uma função $n : V \longrightarrow F$ é chamada uma *forma quadrática* se para todo $x, y \in V$ e para todo $\alpha \in F$, temos

$$(1) \quad n(\alpha x) = \alpha^2 n(x),$$

$$(2) \quad \text{a função } q(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y) \text{ é uma forma bilinear.}$$

Seja A uma álgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2. Suponhamos que A contenha um elemento identidade 1. Dizemos que A é uma *álgebra quadrática* (ou *de grau 2*) se o conjunto $\{1, a, a^2\}$ é linearmente dependente para qualquer a de A . Isto é, a satisfaz a equação

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma \cdot 1 = 0, \quad (1.1)$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in F$ não todos nulos. Os escalares α, β e γ dependem de a . Vamos mostrar que esta condição é equivalente a dizer que a satisfaz

$$a^2 - t(a)a + n(a) \cdot 1 = 0, \quad (1.2)$$

onde t e n são funções de A em F .

Inicialmente, notemos que $\alpha \neq 0$ pois, caso contrário, a expressão (1.1) implica $\beta a + \gamma \cdot 1 = 0$ e se 1 e a forem linearmente independentes todos os coeficientes seriam nulos. Tomemos então $\alpha = 1$. Isto é,

$$a^2 + \beta a + \gamma \cdot 1 = 0. \quad (1.3)$$

Vamos mostrar que β e γ estão bem definidos. Suponhamos que existam β' e $\gamma' \in F$ tais que

$$a^2 + \beta'a + \gamma'.1 = 0. \quad (1.4)$$

Subtraindo termo a termo as equações (1.3) e (1.4) temos

$$(\beta - \beta')a + (\gamma - \gamma').1 = 0.$$

Portanto, se a e 1 são linearmente independentes, temos $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$. Logo t e n estão bem definidos e a relação (1.2) fica bem determinada. Suponhamos $\{1, a\}$ linearmente dependente, isto é, $a = \delta.1$, com $\delta \in F$. Neste caso, obtemos a equação $\delta^2.1 - t(\delta)\delta + n(\delta).1 = 0$ definindo $t(\delta) = 2\delta$ e $n(\delta) = \delta^2$, para todo $\delta \in F$. Chamamos os escalares $t(a)$ e $n(a)$ de traço e norma, respectivamente, do elemento a .

Teorema 1.7 *A função traço $t : A \longrightarrow F$ é um funcional linear e a norma $n : A \longrightarrow F$ é uma forma quadrática.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in F$ com $\alpha \neq \beta$, $\alpha\beta \neq 0$. De (1.2) temos que para quaisquer $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha a + \beta b)^2 - t(\alpha a + \beta b)(\alpha a + \beta b) + n(\alpha a + \beta b).1 \\ &\quad - \alpha\beta[(a + b)^2 - t(a + b)(a + b) + n(a + b).1] \\ &= \alpha^2 a^2 + \alpha\beta ab + \alpha\beta ba + \beta^2 b^2 - \alpha t(\alpha a + \beta b)a - \beta t(\alpha a + \beta b)b + n(\alpha a + \beta b).1 \\ &\quad - \alpha\beta a^2 - \alpha\beta ab - \alpha\beta ba - \alpha\beta b^2 + \alpha\beta t(a + b)a + \alpha\beta t(a + b)b - \alpha\beta n(a + b).1. \end{aligned}$$

Como $a^2 = t(a)a - n(a).1$ e $b^2 = t(b)b - n(b).1$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 t(a)a - \alpha^2 n(a).1 + \beta^2 t(b)b - \beta^2 n(b).1 \\ &\quad - \alpha t(\alpha a + \beta b)a - \beta t(\alpha a + \beta b)b + n(\alpha a + \beta b).1 \\ &\quad - \alpha\beta t(a)a + \alpha\beta n(a).1 - \alpha\beta t(b)b + \alpha\beta n(b).1 \\ &\quad + \alpha\beta t(a + b)a + \alpha\beta t(a + b)b - \alpha\beta n(a + b).1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha[\alpha t(a) - t(\alpha a + \beta b) - \beta t(a) + \beta t(a + b)]a \\ &\quad + \beta[\beta t(b) - t(\alpha a + \beta b) - \alpha t(b) + \alpha t(a + b)]b \\ &\quad + [-\alpha^2 n(a) - \beta^2 n(b) + n(\alpha a + \beta b) + \alpha\beta n(a) + \alpha\beta n(b) - \alpha\beta n(a + b)].1. \end{aligned}$$

Se $1, a$ e b são linearmente independentes sobre F , os coeficientes de $1, a$ e b são todos nulos.

Logo,

$$\alpha t(a) - t(\alpha a + \beta b) - \beta t(a) + \beta t(a + b) = 0.$$

$$\beta t(b) - t(\alpha a + \beta b) - \alpha t(b) + \alpha t(a + b) = 0$$

e então

$$(\alpha - \beta)(t(a) + t(b) - t(a + b)) = 0.$$

Como $\alpha \neq \beta$, concluímos que

$$t(a + b) = t(a) + t(b). \quad (1.5)$$

Agora, se $1, a$ e b são elementos linearmente dependentes sobre F , digamos $b = \alpha a + \beta$, usando a equação (1.2) temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha a + \beta)^2 - t(b)(\alpha a + \beta) + n(b).1 \\ &= \alpha^2 a^2 + 2\alpha\beta a + \beta^2 - \alpha t(b)a - \beta t(b) + n(b).1 \\ &= \alpha[\alpha t(a)a - n(a).1 + 2\beta a - t(b)a] + [\beta^2 - \beta t(b) + n(b)].1 \\ &= \alpha[\alpha t(a) + 2\beta - t(b)]a + [\beta^2 - \beta t(b) + n(b) - \alpha n(a)].1. \end{aligned}$$

Logo, $t(b) = \alpha t(a) + 2\beta$. Usando este fato, temos que

$$t(a + b) = t(a + \alpha a + \beta) = t((1 + \alpha)a + \beta) = (1 + \alpha)t(a) + 2\beta.$$

Portanto, $t(a + b) = t(a) + t(b)$, e a equação (1.5) está verificada para quaisquer $a, b \in A$.

Para qualquer $\lambda \in F$, multiplicando por λ^2 a equação (1.2) obtemos

$$\lambda^2 a^2 - \lambda^2 t(a)a + \lambda^2 n(a).1 = 0.$$

Ainda pela equação (1.2),

$$(\lambda a)^2 - t(\lambda a)\lambda a + n(\lambda a).1 = 0.$$

Subtraindo estas duas equações membro a membro temos

$$\lambda(\lambda t(a) - t(\lambda a))a + (\lambda^2 n(a) - n(\lambda a)).1 = 0.$$

Isto é, $t(\lambda a) = \lambda t(a)$ e $n(\lambda a) = \lambda^2 n(a)$.

Mostramos assim que a função traço é linear. Para provar que a norma é uma forma quadrática, resta provar que a função

$$q(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$$

é uma forma bilinear sobre A . Novamente da equação (1.2) e também de (1.5), temos

$$\begin{aligned} n(x + y).1 &= t(x + y)(x + y) - (x + y)^2 \\ &= t(x)x + t(x)y + t(y)x + t(y)y - x^2 - xy - yx - y^2 \\ &= n(x) + n(y) + t(x)y + t(y)x - xy - yx. \end{aligned}$$

Logo,

$$q(x, y).1 = t(x)y + t(y)x - xy - yx.$$

Como a função traço é linear, temos que $q(x, y)$ é uma forma bilinear. $\square$

Sejam A uma álgebra quadrática e $V = \{a \in A \mid t(a) = 0\}$. Observemos que V coincide com o conjunto $\{a \in A \mid a \notin F, a^2 \in F\} \cup \{0\}$. Como t é linear, V é um subespaço. Vamos mostrar que $A = F.1 \oplus V$. De fato, para qualquer $a \in A$,

$$a = \frac{1}{2}t(a).1 + a - \frac{1}{2}t(a).1$$

e também

$$t(a - \frac{1}{2}t(a).1) = t(a).1 - \frac{1}{2}t(t(a).1) = t(a).1 - \frac{1}{2}2t(a).1 = 0.$$

Logo, $a - \frac{1}{2}t(a).1 \in V$ e, naturalmente, $\frac{1}{2}t(a) \in F$. Seja $b \in F \cap V$. Então $t(b) = 0$. Mas $t(b) = 2b$. Logo, $b = 0$. Portanto $F \cap V = \{0\}$.

Sejam $a = \alpha.1 + x$, $b = \beta.1 + y$ ($\alpha, \beta \in F$, $x, y \in V$) elementos quaisquer de A . Se

$$xy = -f(x, y).1 + x.y$$

onde $f : V \times V \longrightarrow F$ é uma forma bilinear e $x.y \in V$ então o produto ab é dado por

$$ab = (\alpha\beta - f(x, y)).1 + (\beta x + \alpha y + x.y).$$

Em particular, como $x^2 \in F.1$ temos $x.x = 0$ e logo

$$a^2 - 2\alpha a + (f(x, x) + \alpha^2).1 = 0.$$

Portanto, comparando esta equação com (1.2) obtemos $t(a) = 2\alpha$, $n(a) = f(x, x) + \alpha^2$.

Em geral, a forma bilinear $f(x, y)$ não é simétrica. Quando $f(x, y)$ é simétrica dizemos que A é uma *álgebra quadrática simétrica*. Observemos que isto ocorre se e somente se

$$t(ab) = t(ba) \quad (\forall a, b \in A).$$

Denotemos por

$$[x, y] = xy - yx$$

o comutador dos elementos x, y e por

$$x \circ y = xy + yx$$

o produto de Jordan dos elementos x, y .

Proposição 1.4 *O polinômio $\zeta(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5]$ é uma identidade para as álgebras quadráticas simétricas.*

Demonstração. Linearizando a equação (1.2), temos

$$a \circ b - t(a)b - t(b)a + q(a, b).1 = 0.$$

Então

$$[a, b] \circ [c, d] - t([a, b])[c, d] - t([c, d])[a, b] + q([a, b], [c, d]).1 = 0.$$

Como $t([a, b]) = t([c, d]) = 0$, segue que

$$\zeta(a, b, c, d, e) = [q([a, b], [c, d]).1, e] = 0.$$

□

A álgebra das matrizes quadradas de ordem 2, que denotamos por F_2 , é uma álgebra quadrática simétrica. De fato, sabemos pelo Teorema de Hamilton-Cayley que toda matriz $a \in F_2$ satisfaz o seu polinômio característico, isto é,

$$a^2 - \text{tr}(a)a + \det(a) = 0,$$

onde $\text{tr}(a)$ e $\det(a)$ indicam, respectivamente, o traço e o determinante da matriz $a \in F_2$.

Observamos que podemos generalizar o conceito de álgebra de grau 2. Dizemos que uma álgebra A é de grau n se o conjunto $\{1, a, a^2, \dots, a^n\}$ é linearmente dependente para todo $a \in A$.

1.5 Álgebras de Jordan de grau 2

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F de característica diferente de 2 e $Q : V \times V \rightarrow F$ uma forma bilinear simétrica. Consideremos a álgebra $J(Q, 1) = F.1 \oplus V$ com a multiplicação

$$(\alpha.1 + x)(\beta.1 + y) = (\alpha\beta + Q(x, y)).1 + \beta x + \alpha y.$$

A álgebra assim construída é uma álgebra de Jordan (isto é, satisfaz $ab = ba$ e $a^2b.a = a^2.ba$, $\forall a, b \in J(Q, 1)$), chamada *álgebra de Jordan de grau 2*. Notemos que com esta multiplicação, para $a = \alpha.1 + x$ temos

$$a^2 = (\alpha^2 + Q(x, x)).1 + 2\alpha x.$$

Definamos

$$\begin{aligned} t : J(Q, 1) &\longrightarrow F & n : J(Q, 1) &\longrightarrow F \\ \alpha.1 + x &\longmapsto 2\alpha, & \alpha.1 + x &\longmapsto \alpha^2 - Q(x, x). \end{aligned}$$

A função t assim definida é um funcional linear e, como Q é bilinear, a função n é uma forma quadrática. E ainda,

$$a^2 - t(a)a + n(a).1 = (\alpha^2 + Q(x, x)).1 + 2\alpha x - 2\alpha a + (\alpha^2 - Q(x, x)).1 = 0.$$

Isto é, toda álgebra de Jordan de grau 2 é uma álgebra quadrática. É claro que é uma álgebra quadrática simétrica, pois $f(x, y) = -Q(x, y)$ é simétrica.

Toda álgebra quadrática comutativa é uma álgebra de Jordan de grau 2. De fato, seja $A = F.1 \oplus V$ uma álgebra quadrática comutativa. Se $a = \alpha.1 + x$ e $b = \beta.1 + y$ ($\alpha, \beta \in F, x, y \in V$) então

$$ab = (\alpha\beta - f(x, y)).1 + (\beta x + \alpha y + x.y),$$

$$ba = (\beta\alpha - f(y, x)).1 + (\alpha y + \beta x + y.x).$$

Como $ab = ba$ temos $f(x, y) = f(y, x)$, isto é, f é simétrica. Usando a forma linearizada da equação (1.2) obtemos

$$xy + yx - t(x)y - t(y)x + q(x, y).1 = 0.$$

Como $xy = yx$, $t(x) = 0$ e $t(y) = 0$ obtemos $xy \in F.1$. Mas $xy = -f(x, y).1 + x.y$. Logo, $x.y = 0$. Portanto, a multiplicação de A é dada por

$$ab = (\alpha\beta - f(x, y)).1 + (\beta x + \alpha y)$$

e coincide com a multiplicação da álgebra de Jordan de grau 2 $J(-f, 1)$. Assim, $A = J(-f, 1)$.

Concluimos assim que a classe das álgebras de Jordan de grau 2 é a intersecção da variedade das álgebras comutativas com a classe das álgebras quadráticas.

Em particular, a álgebra F_2^+ é uma álgebra de Jordan de grau 2.

1.6 Álgebras alternativas

Sejam A uma álgebra sobre um corpo F e $x, y, z \in A$. Denotemos por

$$(x, y, z) = xy.z - x.yz$$

o associador dos elementos x, y, z .

Como já vimos, A é uma álgebra alternativa se A satisfaz a lei alternativa à esquerda $(x, x, y) = 0$ e a lei alternativa à direita $(x, y, y) = 0$. Linearizando as leis alternativas obtemos

$$(x, z, y) + (z, x, y) = 0,$$

$$(x, y, z) + (x, z, y) = 0,$$

e portanto $(x, y, x) = -(x, x, y) = -(y, x, x) = 0$. As álgebras que satisfazem a identidade $(x, y, x) = 0$ são chamadas *flexíveis*. Assim, as álgebras alternativas são flexíveis. E, em vista da flexibilidade, podemos escrever o produto xyx sem indicar um arranjo de parênteses.

Lema 1.3 *Em toda álgebra alternativa A as seguintes identidades são válidas:*

$$(x^2, y, x) = 0, \tag{1.6}$$

$$x.yzy = (xy.z)y, \quad (\text{identidade de Moufang à direita}) \tag{1.7}$$

$$yzy.x = y(z.yx), \quad (\text{identidade de Moufang à esquerda}) \tag{1.8}$$

$$xy.zx = x(yz)x, \quad (\text{identidade de Moufang do meio}) \tag{1.9}$$

$$(x, xy, z) = (x, y, z)x, \tag{1.10}$$

$$(x, yx, z) = x(x, y, z), \tag{1.11}$$

$$(x^2, y, z) = (x, x \circ y, z), \tag{1.12}$$

$$(x^2, y, z) = x \circ (x, y, z), \tag{1.13}$$

$$(xy)(x, y, z) = y.x(x, y, z), \tag{1.14}$$

$$(x, y, (x, y, z)) = [x, y](x, y, z), \tag{1.15}$$

$$((x, y, z), x, y) = -(x, y, z)[x, y], \tag{1.16}$$

$$[x, y] \circ (x, y, z) = 0. \tag{1.17}$$

Demonstração. Mostraremos inicialmente que para todo $x, y \in A$,

$$(x^2, y, x) = 0.$$

Usando a flexibilidade de A e a lei alternativa à esquerda temos

$$(x^2y)x = (x.xy)x = x(xy.x) = x(x.yx) = x^2.yx,$$

o que prova (1.6).

Usando $0 = (x, y, y^2) = xy.y^2 - xy^3$ e a lei alternativa à direita obtemos

$$0 = -(xy, y, y) = -(xy.y)y + xy.y^2 = -(xy.y)y + x.yy^2.$$

Linearizando esta expressão, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= x(yzy) + x(y^2 \circ z) - (xy.z)y - (xy^2)z - xz.y^2 \\ &= x(yzy) - (xy.z)y - (x, y^2, z) - (x, z, y^2) \\ &= x(yzy) - (xy.z)y + (x, z, y^2) - (x, z, y^2) \\ &= x(yzy) - (xy.z)y, \end{aligned}$$

o que prova (1.7). A expressão (1.8) é provada de maneira análoga.

Usando (1.7), provamos a equação (1.9). De fato,

$$\begin{aligned} xy.zx - x(yz)x &= -(xy, z, x) + (x, y, z)x \\ &= (z, xy, x) + (z, x, y)x \\ &= (z.xy)x - z(xy)x + (zx.y)x - (z.xy)x \\ &= -z(xy)x + (zx.y)x = 0. \end{aligned}$$

As identidades (1.10) e (1.11) são equivalentes às identidades de Moufang à direita e à esquerda, respectivamente. De fato,

$$-(x, xy, z) + (x, y, z)x = (z, xy, x) + (z, x, y)x = -z(xy)x + (zx.y)x,$$

$$(x, yx, z) - x(x, y, z) = (x, yx, z) + x(y, x, z) = (xyx)z - x(y.xz).$$

Linearizando (1.6) obtemos

$$0 = (x \circ z, y, x) + (x^2, y, z),$$

ou equivalentemente, trocando y por z ,

$$0 = (x \circ y, z, x) + (x^2, z, y) = (x, x \circ y, z) - (x^2, y, z).$$

E assim provamos (1.12).

Obtemos (1.13), somando as igualdades (1.10) e (1.11) e comparando com (1.12).

Vamos mostrar agora a igualdade (1.14). Pela lei alternativa à esquerda,

$$\begin{aligned} (xy)(x, y, z) - y.x(x, y, z) &= (xy)(xy.z) - (xy)(x.yz) - y[x(xy.z)] + y[x(x.yz)] \\ &= (xy)^2z - (xy)(x.yz) - y[x(xy.z)] + y(x^2.yz). \end{aligned}$$

Linearizando (1.8) temos que

$$(w.xy)z + (y.xw)z = w(x.yz) + y(x.wz).$$

Fazendo $w = xy$ na expressão acima, obtemos

$$(xy)^2z + [y(x.xy)]z = xy.(x.yz) + y[x(xy.z)].$$

E ainda, usando a expressão $y(x.yz) = yxy.z$ obtida através de (1.8) e trocando x por x^2 , temos $y(x^2.yz) = yx^2y.z$. Logo,

$$xy.(x, y, z) - y.x(x, y, z) = [-yx^2y + yx^2y]z = 0,$$

o que prova (1.14).

Agora, usando (1.14) temos

$$\begin{aligned} (y, x, (x, y, z)) &= yx.(x, y, z) - y[x(x, y, z)] \\ &= yx.(x, y, z) - xy.(x, y, z) \\ &= [y, x](x, y, z), \end{aligned}$$

o que prova (1.15). Analogamente provamos (1.16). Agora, subtraindo (1.16) de (1.15) concluímos que

$$(x, y, z) \circ [x, y] = (x, y, (x, y, z)) - ((x, y, z), x, y) = 0.$$

o que prova o lema. $\square$

Lema 1.4 *Em qualquer álgebra alternativa vale a seguinte identidade*

$$[(x, y, z), w] = (xy, z, w) + (yz, x, w) + (zx, y, w). \quad (1.18)$$

Demonstração. Tomemos a equação (1.9): $zx.yz = z(xy).z$. Linearizando, obtemos

$$zx.yw + wx.yz = (z.xy)w + (w.xy)z. \quad (1.19)$$

Agora,

$$\begin{aligned} w(x, y, z) &= w(xy.z) - w(x.yz) \\ &= -(w, xy, z) + (w.xy)z + (w, x, yz) - wx.yz. \end{aligned}$$

Logo, usando a equação (1.19) obtemos

$$\begin{aligned} w(x, y, z) &= -(xy, z, w) - (yz, x, w) - (z.xy)w + zx.yw \\ &= -(xy, z, w) - (yz, x, w) + (z, x, y)w - (zx.y)w + zx.yw \\ &= -(xy, z, w) - (yz, x, w) + (x, y, z)w - (zx, y, w). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.8 (Teorema de Artin) ([14], pg. 36) *Qualquer subálgebra gerada por dois elementos de uma álgebra alternativa é associativa.*

$\square$

1.7 Álgebras de Cayley-Dickson

Seja A uma álgebra sobre um corpo F com elemento identidade 1. Suponhamos que em A esteja definida uma involução $a \mapsto \bar{a}$ tal que $a + \bar{a}, a\bar{a} \in F, \forall a \in A$. Pelo *processo de Cayley-Dickson*, construiremos uma nova álgebra com involução que contém A como uma subálgebra e tal que a dimensão desta nova álgebra é o dobro da dimensão de A .

Seja $\alpha \in F, \alpha \neq 0$. Definamos a álgebra

$$(A, \alpha) = \{(a_1, a_2) : a_i \in A\},$$

com a multiplicação

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2, \bar{a}_1a_4 + a_3a_2).$$

O elemento $(1, 0)$ é o elemento identidade de (A, α) . Sejam $A' = \{(a, 0) : a \in A\}$ e $v = (0, 1)$. Então $v^2 = \alpha(1, 0)$ e (A, α) é a soma direta de espaços vetoriais

$$(A, \alpha) = A' \oplus vA'.$$

Se identificamos A' com A , um elemento x de (A, α) pode ser representado por $x = a_1 + va_2$ ($a_i \in A$) e a multiplicação é dada por:

$$(a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) + v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2). \quad (1.20)$$

Lema 1.5 *A função*

$$\begin{aligned} \phi : (A, \alpha) &\longrightarrow (A, \alpha) \\ x = a_1 + va_2 &\longmapsto \bar{x} = \bar{a}_1 - va_2 \end{aligned}$$

é uma involução da álgebra (A, α) . Além disso, $x + \bar{x}, x\bar{x} \in F, \forall x \in (A, \alpha)$.

Demonstração. Notemos inicialmente que, como $a \mapsto \bar{a}$ é uma involução em A , $\bar{\bar{a}} = a$ e $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ ($\forall a, b \in A$). Então

$$\phi(\phi(a_1 + va_2)) = \phi(\bar{a}_1 - va_2) = \overline{\bar{a}_1} - (-va_2) = a_1 + va_2,$$

$$\begin{aligned}
\phi((a_1 + va_2)(a_3 + va_4)) &= \phi((a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_2}) + v(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2)) \\
&= (\overline{a_1}a_3 + \alpha \overline{a_2} \overline{a_4}) - v(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2) \\
&= (\overline{a_3} \overline{a_1} + \alpha a_2\overline{a_4}) - v(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2).
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação (1.20), temos

$$\begin{aligned}
\phi(a_3 + va_4)\phi(a_1 + va_2) &= (\overline{a_3} - va_4)(\overline{a_1} - va_2) \\
&= (\overline{a_3} \overline{a_1} + \alpha a_2\overline{a_4}) + v(a_3(-a_2) + \overline{a_1}(-a_4)) \\
&= (\overline{a_3} \overline{a_1} + \alpha a_2\overline{a_4}) - v(a_3a_2 + \overline{a_1}a_4).
\end{aligned}$$

Provamos assim que ϕ é uma involução em (A, α) . Agora, seja $x = a_1 + va_2$. Então

$$x + \overline{x} = (a_1 + va_2) + (\overline{a_1} - va_2) \in F,$$

$$x\overline{x} = (a_1 + va_2)(\overline{a_1} - va_2) = (a_1\overline{a_1} - \alpha a_2\overline{a_2}) \in F. \quad \square$$

Proposição 1.5 *Seja A uma álgebra sobre F com elemento identidade 1 e com involução $a \mapsto \overline{a}$ tal que $a + \overline{a}, a\overline{a} \in F$ ($\forall a \in A$). Consideremos a álgebra (A, α) obtida de A pelo processo de Cayley-Dickson. Temos:*

- (a) *se A é associativa e comutativa então (A, α) é associativa;*
- (b) *se A é associativa então (A, α) é alternativa.*

Demonstração. Sejam $x = a_1 + va_2, y = a_3 + va_4, z = a_5 + va_6$, elementos arbitrários de (A, α) , onde $a_i \in A$. Então

$$\begin{aligned}
xy.z &= [(a_1 + va_2)(a_3 + va_4)](a_5 + va_6) \\
&= [a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_2} + v(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2)](a_5 + va_6) \\
&= (a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_2})a_5 + \alpha a_6(\overline{a_4}a_1 + \overline{a_2} \overline{a_3}) \\
&\quad + v[(\overline{a_3} \overline{a_1} + \alpha a_2\overline{a_4})a_6 + a_5(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2)].
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
x.yz &= (a_1 + va_2)[(a_3 + va_4)(a_5 + va_6)] \\
&= (a_1 + va_2)[(a_3a_5 + \alpha a_6\overline{a_4}) + v(\overline{a_3}a_6 + a_5a_4)] \\
&= a_1(a_3a_5 + \alpha a_6\overline{a_4}) + \alpha(\overline{a_3}a_6 + a_5a_4)\overline{a_2} \\
&\quad + v[\overline{a_1}(\overline{a_3}a_6 + a_5a_4) + (a_3a_5 + \alpha a_6\overline{a_4})a_2].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(x, y, z) = & (a_1, a_3, a_5) + \alpha[a_4\overline{a_2}.a_5 + a_6.\overline{a_4}a_1 + a_6.\overline{a_2} \overline{a_3} - a_1.a_6\overline{a_4} - \overline{a_3}a_6.\overline{a_2} - a_5a_4.\overline{a_2}] \\
& + v[\overline{a_3} \overline{a_1}.a_6 + a_5.\overline{a_1}a_4 + a_5.a_3a_2 - \overline{a_1}.\overline{a_3}a_6 - \overline{a_1}.a_5a_4 - a_3a_5.a_2 + \\
& \alpha(a_2\overline{a_4}.a_6 - a_6\overline{a_4}.a_2)]
\end{aligned} \tag{1.21}$$

É claro que se A é associativa e comutativa, pela equação (1.21), concluímos que o associador (x, y, z) é igual a zero, o que prova (a).

Agora, fazendo $x = y$ na equação (1.21) (isto é, $a_1 = a_3$ e $a_2 = a_4$) temos

$$\begin{aligned}
(x, x, z) = & (a_1, a_1, a_5) + \alpha[a_2\overline{a_2}.a_5 + a_6.\overline{a_2}a_1 + a_6.\overline{a_2} \overline{a_1} - a_1.a_6\overline{a_2} - \overline{a_1}a_6.\overline{a_2} - a_5a_2.\overline{a_2}] \\
& + v[\overline{a_1}^2a_6 + a_5.\overline{a_1}a_2 + a_5.a_1a_2 - \overline{a_1}.\overline{a_1}a_6 - \overline{a_1}.a_5a_2 - a_1a_5.a_2 + \\
& \alpha(a_2\overline{a_2}.a_6 - a_6\overline{a_2}.a_2)].
\end{aligned}$$

Se A é associativa,

$$\begin{aligned}
(x, x, z) = & \alpha[a_2\overline{a_2}.a_5 - a_5.a_2\overline{a_2} + a_6\overline{a_2}(a_1 + \overline{a_1}) - (a_1 + \overline{a_1})a_6\overline{a_2}] \\
& + v[a_5(\overline{a_1} + a_1)a_2 - (\overline{a_1} + a_1)a_5a_2 + \alpha(a_2\overline{a_2}.a_6 - a_6.\overline{a_2}a_2)].
\end{aligned}$$

Como $a_1 + \overline{a_1}, a_2\overline{a_2} \in F$, temos que $(x, x, z) = 0$. Analogamente $(x, z, z) = 0$, o que prova (b). $\square$

Exemplos de álgebras obtidas pelo processo de Cayley-Dickson

Exemplo 1 Sejam F um corpo qualquer e $\mu \in F$ tal que $4\mu + 1 \neq 0$. Definamos a álgebra $K(\mu) = F \oplus Fv_1$, onde $v_1^2 = v_1 + \mu$. Agora, suponhamos que $\text{car } F \neq 2$. Sejam $\alpha = \frac{1}{4}(4\mu + 1)$ e $v = v_1 - \frac{1}{2}$. Temos que $v^2 = \alpha \neq 0$. Tomemos $a = \alpha_1 + \alpha_2v$ e $b = \alpha_3 + \alpha_4v$, com $\alpha_i \in F$, dois elementos típicos de $K(\mu)$. Então

$$\begin{aligned}
ab = & (\alpha_1 + \alpha_2v)(\alpha_3 + \alpha_4v) \\
= & \alpha_1\alpha_3 + (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)v + \alpha_2\alpha_4v^2 \\
= & \alpha_1\alpha_3 + \alpha\alpha_4\overline{\alpha_2} + v(\overline{\alpha_1}\alpha_4 + \alpha_3\alpha_2).
\end{aligned}$$

Isto é, a multiplicação em $K(\mu)$ é a mesma que definimos em (1.20). Logo, $K(\mu)$ é uma álgebra obtida pelo processo de Cayley-Dickson aplicado ao corpo F , isto é, $K(\mu) = (F, \alpha)$. É fácil ver que $K(\mu)$ é uma álgebra associativa e comutativa.

Exemplo 2 Sejam F um corpo qualquer e β um elemento não nulo de F . A álgebra $Q(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta)$, obtida pelo processo de Cayley-Dickson a partir da álgebra $K(\mu)$, é denominada *álgebra dos quatérnios generalizados*. Um elemento de $Q(\mu, \beta)$ é expresso na forma

$$(\alpha_1 + \alpha_2 v_1) + v_2(\alpha_3 + \alpha_4 v_1),$$

com $v_2^2 = \beta.1$. Logo, $\{1, v_1, v_2, v_2 v_1\}$ é uma base de $Q(\mu, \beta)$. Como $K(\mu)$ é associativa e comutativa temos pela Proposição 1.5 que $Q(\mu, \beta)$ é associativa. Mas esta álgebra não é comutativa. Basta ver que $v_1 v_2 = v_2 \bar{v}_1 = -v_2 v_1$.

Proposição 1.6 A álgebra $Q(0, 1)$ é isomorfa à álgebra F_2 das matrizes de ordem 2.

Demonstração. Já vimos que um elemento de $Q(0, 1)$ pode ser escrito na forma $a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_{12} v_1 v_2$, com $a_0, a_1, a_2, a_{12} \in F$. Consideremos a correspondência:

$$\begin{aligned} Q(0, 1) &\longrightarrow F_2 \\ a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_{12} v_1 v_2 &\longmapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 + a_{12} \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta correspondência é um isomorfismo. $\square$

Exemplo 3 Seja $\gamma \in F, \gamma \neq 0$. Consideremos a álgebra $C(\mu, \beta, \gamma)$ obtida pelo processo de Cayley-Dickson a partir da álgebra $Q(\mu, \beta)$. Um elemento desta álgebra é expresso na forma $x = a + v_3 b$, onde $a, b \in Q(\mu, \beta)$ e $v_3^2 = \gamma$. Portanto

$$\{1, v_1, v_2, v_3, v_2 v_1, v_3 v_1, v_3 v_2, v_3 v_2 v_1\}$$

é uma base de $C(\mu, \beta, \gamma)$. A álgebra $C(\mu, \beta, \gamma)$ é chamada *álgebra de Cayley-Dickson*. Pela Proposição 1.5 temos que $C(\mu, \beta, \gamma)$ é alternativa.

Proposição 1.7 *Toda identidade que vale para as álgebras de Cayley-Dickson é uma identidade para F_2 .*

Demonstração. Usando a Proposição 1.6, basta observar que $F_2 \cong Q(0, 1) \subset C(0, 1, \gamma)$. $\square$

Proposição 1.8 *Seja A uma álgebra sobre F com elemento identidade 1 e com involução $a \longrightarrow \bar{a}$ tal que $a + \bar{a}, a\bar{a} \in F$. Consideremos a álgebra (A, α) obtida de A pelo processo de Cayley-Dickson. Então, para todo $a, b \in A$, valem as seguintes igualdades:*

(i) $av = v\bar{a}$;	(ii) $a(vb) = v(\bar{a}b)$;
(iii) $(vb)a = v(ab)$;	(iv) $(va)(vb) = \alpha b\bar{a}$.

Demonstração. Todas as identidades podem ser verificadas usando a equação (1.20). $\square$

Dos itens (i) e (ii) da proposição anterior, temos que

$$v_3(v_2v_1) = v_3(v_1\bar{v}_2) = -v_3(v_1v_2) = v_3(\bar{v}_1v_2) = v_1(v_3v_2) = -v_1(v_2v_3).$$

Isto implica que a base citada anteriormente é equivalente à base

$$\Gamma = \{1, v_1, v_2, v_3, v_1v_2, v_2v_3, v_1v_2v_3, v_1v_3\}.$$

Denotemos por C_R a álgebra de Cayley-Dickson $C(-\frac{5}{4}, -1, -1)$ sobre os reais. Note que $K(-\frac{5}{4}) = (\mathbb{R}, -1)$. A álgebra C_R é denominada *álgebra dos números de Cayley* (ou octônios). Denotemos os elementos da base Γ por $1, e_1, \dots, e_7$, respectivamente. Usando a Proposição 1.8 concluímos que a multiplicação em C_R é dada por:

$$\begin{aligned} 1e_i &= e_i = e_i1, & e_i^2 &= -1, \\ e_ie_{i+1} &= e_{i+3} = -e_{i+1}e_i, \\ e_{i+1}e_{i+3} &= e_i = -e_{i+3}e_{i+1}, \\ e_{i+3}e_i &= e_{i+1} = -e_ie_{i+3}, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i \leq 7$ e os índices são interpretados módulo 7. A tabela de multiplicação de C_R é:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Proposição 1.9 *Seja A uma álgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2, com elemento identidade e com involução $a \mapsto \bar{a}$ tal que $a + \bar{a}, a\bar{a} \in F$. Então a álgebra (A, α) construída pelo processo de Cayley-Dickson a partir de A é uma álgebra quadrática simétrica.*

Demonstração. Basta tomar $t(x) = x + \bar{x}$ e $n(x) = x\bar{x}$, onde $x \in (A, \alpha)$. Pelo Lema 1.5 $t(x), n(x) \in F$ e a álgebra (A, α) satisfaz

$$x^2 - t(x)x + n(x).1 = 0.$$

Observemos que $[\bar{x}, y] = [t(x) - x, y] = -[x, y]$. Então

$$\overline{[x, y]} = \overline{xy - yx} = \bar{y} \bar{x} - \bar{x} \bar{y} = -[\bar{x}, \bar{y}] = [x, \bar{y}] = -[\bar{y}, x] = [y, x].$$

Portanto,

$$t([x, y]) = [x, y] + \overline{[x, y]} = [x, y] + [y, x] = [x, y] - [x, y] = 0,$$

o que prova que (A, α) é uma álgebra quadrática simétrica. $\square$

Capítulo 2

O Teorema de Amitsur-Levitzki

Iniciaremos este capítulo com a definição e algumas propriedades do polinômio standard. Na Seção 2.2 demonstraremos o Teorema de Amitsur-Levitzki. Este teorema afirma que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade para a álgebra F_n das matrizes quadradas de ordem n . Na Seção 2.3 mostraremos que se $n > 2$ ou se F não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ então todas as identidades multilineares de grau $2n$ são, a menos de uma constante, o polinômio standard de grau $2n$ ou “combinações lineares” deste polinômio. Na Seção 2.4 vamos apresentar algumas aplicações dos teoremas demonstrados nas seções anteriores.

Como F_n é uma álgebra associativa, trabalharemos apenas com as identidades em $Ass[X]$.

2.1 Polinômio standard

O polinômio standard de grau m é definido por

$$s_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\sigma \in P_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)},$$

onde P_m é o grupo de permutações de m índices e $(-1)^\sigma$ o sinal da permutação σ . É fácil ver que s_m é um polinômio multilinear homogêneo de grau m . Por exemplo, para $m = 1, 2, 3$ temos

$$s_1(x_1) = x_1,$$

$$s_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1,$$

$$s_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2 - x_2x_1x_3 - x_3x_2x_1 - x_1x_3x_2.$$

Lema 2.1 *O polinômio standard $s_m(x_1, \dots, x_m)$ possui as seguintes propriedades:*

$$(i) \ s_m(\dots, x_i, x_j, \dots) = -s_m(\dots, x_j, x_i, \dots);$$

$$(ii) \ s_m(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) = 0;$$

$$(iii) \ s_{2m}(1, x_2, \dots, x_{2m}) = 0;$$

$$(iv) \ s_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1}) = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} x_k s_m(x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_{m+1}),$$

onde $\widehat{x_k}$ indica que a variável x_k não ocorre como variável naquele polinômio;

$$(v) \ s_m(a_1, \dots, a_m) = 0, \text{ se } a_1, \dots, a_m \text{ são elementos linearmente dependentes de uma álgebra qualquer.}$$

Observações:

(1) O item (i) implica que a menos de um sinal, todas as ordenações de variáveis são equivalentes.

(2) O item (iv) implica que se uma álgebra satisfaz s_m então esta álgebra satisfaz também s_{m+1} .

Demonstração. (i) Seja τ a transposição $(i \ j)$. Então

$$\begin{aligned} s_m(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) &= \sum_{\sigma \in P_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(j)} \dots x_{\sigma(i)} \dots x_{\sigma(m)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_m} (-1)^{\sigma\tau} x_{\sigma\tau(1)} \dots x_{\sigma\tau(j)} \dots x_{\sigma\tau(i)} \dots x_{\sigma\tau(m)} \\ &= - \sum_{\sigma \in P_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i)} \dots x_{\sigma(j)} \dots x_{\sigma(m)} \\ &= -s_m(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots), \end{aligned}$$

pois o sinal de uma transposição é negativo.

(ii) Basta observar que cada monômio em $s_m(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots)$ ocorre duas vezes. Uma vez com sinal positivo e outra com sinal negativo.

(iii) Para cada maneira de ordenar as variáveis $x_2, \dots, x_{2m}$, o elemento 1 pode ser colocado em precisamente $2m$ posições. Metade destes termos tem sinal positivo e a outra metade, negativo. Por exemplo, para a ordem $x_2, x_3, \dots, x_{2m}$, temos

$$\begin{aligned} & 1x_2 \dots x_{2m} - x_2 1x_3 \dots x_{2m} + x_2 x_3 1x_4 \dots x_{2m} - x_2 x_3 x_4 1x_5 \dots x_{2m} + \dots + \\ & \dots + x_2 \dots x_{i-1} 1x_i \dots x_{2m} - x_2 \dots x_i 1x_{i+1} \dots x_{2m} + \dots + \\ & \dots + x_2 \dots x_{2m-1} 1x_{2m} - x_2 \dots x_{2m} 1, \end{aligned}$$

cujos termos correspondem às permutações $(1), (1\ 2), (1\ 2\ 3), \dots, (1\ 2\ 3 \dots 2m)$.

(iv) Temos:

$$\begin{aligned} s_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1}) &= \sum_{\sigma \in P_{m+1}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} x_k \sum_{\lambda \in P_m} (-1)^\lambda x_{\lambda(1)} \dots \widehat{x_{\lambda(k)}} \dots x_{\lambda(m+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} x_k s_m(x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_{m+1}). \end{aligned}$$

(v) Suponhamos $a_k = \sum_{i=1, i \neq k}^m \alpha_i a_i$ ($\alpha_i \in F$). Então

$$s_m(a_1, \dots, a_k, \dots, a_m) = s_m(a_1, \dots, \sum_{i=1, i \neq k}^m \alpha_i a_i, \dots, a_m) = \sum_{i=1, i \neq k}^m \alpha_i s_m(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_m) = 0$$

por (ii). □

2.2 O Teorema de Amitsur-Levitzki

Teorema 2.1 *A álgebra F_n das matrizes $n \times n$ sobre um corpo F não satisfaz nenhuma identidade multilinear de grau menor que $2n$.*

Demonstração. Seja f uma identidade multilinear nas variáveis $x_1, \dots, x_m$. Suponhamos que $m < 2n$ e que F_n satisfaça f . Sem perda de generalidade podemos supor que

$$f(x_1, \dots, x_m) = x_1 \dots x_m + \sum_{\sigma} a_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)},$$

com $\sigma \in P_m$, $\sigma \neq (1)$ e $a_{\sigma} \in F$. Denotemos por $\{e_{ij}\}$ o conjunto das matrizes elementares de F_n . Apliquemos as substituições

$$x_1 = e_{11}$$

$$x_2 = e_{12}$$

$$x_3 = e_{22}$$

$$x_4 = e_{23}$$

$$\vdots$$

$$x_{2k-1} = e_{kk}$$

$$x_{2k} = e_{k \ k+1}$$

$$\vdots$$

com $k = 1, 2, \dots$. Se m é par, $m = 2k$, então

$$x_1 \dots x_m = e_{11} \dots e_{k \ k+1} = e_{1 \ k+1}.$$

Se m é ímpar, $m = 2k - 1$, então

$$x_1 \dots x_m = e_{11} \dots e_{kk} = e_{1k}.$$

Lembrando que

$$\left[\frac{t}{2}\right] = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{se } t \text{ par} \\ \frac{t-1}{2} & \text{se } t \text{ ímpar} \end{cases},$$

temos que se $m = 2k$ então $1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = k + 1$, e se $m = 2k - 1$ então $1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = 1 + k - 1 = k$. Portanto $x_1 \dots x_m = e_{1s}$, onde $s = 1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, não é zero, mas para todo $\sigma \neq (1)$, $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} = 0$ pois $e_{ij}e_{rs} = 0$ se $j \neq r$. Logo f não é uma identidade para F_n (contradição). $\square$

Corolário 2.1 *A álgebra de matrizes F_n não satisfaz nenhuma identidade de grau menor que $2n$.*

Demonstração. Suponhamos que F_n satisfaça uma identidade de grau menor que $2n$. Então, pelo Corolário 1.2, F_n satisfaz uma identidade multilinear de grau menor que $2n$, o que é um absurdo pelo Teorema 2.1. $\square$

Lema 2.2 *Sejam $n > 1$, $E = \{e_{i_k j_k}\}$ um conjunto de $2n$ matrizes elementares de F_n e $n(u)$ o número de vezes que $u = 1, 2, \dots, n$ ocorre como índice dos elementos de E . Assumamos que F_{n-1} satisfaça s_{2n-2} . Se $s_{2n}(E, E, \dots, E) \neq 0$ então as possíveis configurações para os valores de $n(u)$ (em alguma ordem) são:*

$$3, 5, 4, 4, 4, \dots$$

$$3, 3, 6, 4, 4, \dots$$

$$4, 4, 4, 4, 4, \dots$$

Demonstração. Mostraremos inicialmente que $n(u) \geq 3$. Suponhamos que para algum u , $n(u) = 0$. Então $E \subset F_n^{(u)}$, onde $F_n^{(u)}$ denota o conjunto das matrizes que têm as u -ésimas linha e coluna nulas. Como $F_n^{(u)}$ é isomorfa a F_{n-1} e F_{n-1} satisfaz s_{2n-2} por hipótese, temos que $F_n^{(u)}$ satisfaz s_{2n-2} . Logo $F_n^{(u)}$ satisfaz s_{2n} pelo Lema 2.1 (iv). Como $E \subset F_n^{(u)}$,

$$s_{2n}(E, \dots, E) = 0$$

o que é uma contradição. Suponhamos agora que $n(u) = 1$ para algum u . Então $e_{iu} \in E$ ou $e_{uj} \in E$. Se $e_{iu} \in E$ então $s_{2n}(e_{i_1 j_1}, \dots, e_{iu}, \dots, e_{i_{2n} j_{2n}}) = s_{2n-1}(e_{i_1 j_1}, \dots, \widehat{e_{iu}}, \dots, e_{i_{2n} j_{2n}})e_{iu} = 0$,

pois $e_{i_1j_1}, \dots, \widehat{e_{iu}}, \dots, e_{i_{2n}j_{2n}}$ pertencem a $F_n^{(u)}$ (contradição). Obtemos uma contradição análoga se $e_{ui} \in E$. Finalmente, suponhamos que $n(u) = 2$. Então

$$\begin{aligned} & - e_{uu} \in E, \\ & - e_{ju}, e_{iu} \in E, \\ & - e_{ui}, e_{uj} \in E \quad \text{ou} \\ & - e_{iu}, e_{uj} \in E. \end{aligned}$$

Nos três primeiros casos $s_{2n}(E, \dots, E) = 0$, pois as matrizes elementares seguem a regra $e_{ij}e_{rs} = 0$ se $j \neq r$. Analisemos o último caso. Escrevamos s_{2n} como soma dos únicos monômios que não se anulam.

$$\begin{aligned} s_{2n}(E, \dots, E) = & \pm e_{uj}s_{2n-2}(e_{i_1j_1}, \dots, \widehat{e_{uj}}, \dots, \widehat{e_{iu}}, \dots, e_{i_{2n}j_{2n}})e_{iu} \\ & \pm s_{2n-2}(e_{i_1j_1}, \dots, \widehat{e_{uj}}, \dots, \widehat{e_{iu}}, \dots, e_{i_{2n}j_{2n}})e_{iu}e_{uj} \\ & \pm \sum_{k=3}^{2n} s_{2n-2}(e_{iu}e_{uj}e_{i_kj_k}, e_{i_{3j_3}}, \dots, \widehat{e_{uj}}, \dots, \widehat{e_{iu}}, \dots, e_{i_{kj_k}}, \dots, e_{i_{2n}j_{2n}}). \end{aligned}$$

Observando que $e_{iu}e_{uj} = e_{ij} \in F_n^{(u)}$, temos que todas as variáveis de s_{2n-2} pertencem a $F_n^{(u)}$. Logo, pelo que dissemos acima, $s_{2n}(E, E, \dots) = 0$ (contradição). Portanto $n(u) \geq 3$, para todo u .

Como $s_{2n}(E, E, \dots, E) \neq 0$, existe algum produto que não se anula. Suponhamos que seja

$$e_{i_1j_1} \dots e_{i_kj_k} e_{i_{k+1}j_{k+1}} \dots e_{i_{2n}j_{2n}}$$

este produto. Para que o produto não se anule é necessário que, para cada $k = 1, \dots, 2n-1$, tenhamos $j_k = i_{k+1}$. Isto implica que todos os índices ocorrem aos pares ou todos menos dois (i_1 e j_{2n} são arbitrários). Logo $n(u) = 2\lambda$ para todo u , ou existem dois índices, digamos u_1 e u_2 , tais que $n(u_1) = 2\lambda_1 + 1$ e $n(u_2) = 2\lambda_2 + 1$. Como $n(u) \geq 3$, então $\lambda \geq 2$ e $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$. Notemos que

$$\sum_{u=1}^n n(u) = 4n,$$

pois, E contém $2n$ elementos com 2 índices cada. Se $n(u) = 2\lambda$ para todo u então

$$4n = \sum_{u=1}^n n(u) = \sum_{u=1}^n 2\lambda = 2n\lambda.$$

Portanto, $\lambda = 2$ e a correspondente configuração é 4, 4, 4.... Agora, se $\lambda_1 = 1$ então $\lambda_2 = 1, 2$. De fato, suponhamos $\lambda_2 > 3$. Então $4n = \sum_{u=1}^n n(u) > 3 + 7 + (2n - 2)2 = 6 + 4n$. Absurdo. Temos assim as configurações:

$$3, 3, \text{par}, \text{par}, \dots$$

$$3, 5, \text{par}, \text{par}, \dots$$

Vamos agora determinar os $n - 2$ números pares que aparecem na configuração

$$3, 5, \text{par}, \text{par}, \dots$$

Como $n(u) \geq 3$ ($\forall u$), devemos necessariamente ter $n(u_j) \geq 4$ ($\forall j = 3, 4, \dots, n$). Suponhamos que para algum índice, digamos u_3 ,

$$n(u_3) > 4$$

e que $n(u_j) = 4$ ($\forall j = 4, \dots, n$). Então

$$4n > 3 + 5 + 4 + (n - 3)4 = 4n,$$

o que é um absurdo. Logo esta configuração é 3, 5, 4, 4, ...

Vamos fazer o mesmo para a configuração

$$3, 3, \text{par}, \text{par}, \dots$$

Nesta configuração $n(u_3) = 6$ se $n(u_j) = 4$ ($\forall j = 4, \dots, n$). De fato,

$$4n = 3 + 3 + 6 + (n - 3)4 = 4n.$$

Notemos que a igualdade acima é verdadeira apenas para estes valores, ou seja, a única configuração para este caso é

$$3, 3, 6, 4, 4, \dots$$

e o lema está demonstrado. □

Teorema 2.2 (Amitsur-Levitzki) *A álgebra das matrizes F_n satisfaz a identidade polinomial standard s_{2n} .*

Demonstração. Provemos por indução sobre n . Para $n = 1$ é claro, pois $F_1 \cong F$ é comutativo e $s_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$. Suponhamos que F_{n-1} satisfaça s_{2n-2} para todo $n > 1$. Mostraremos primeiro que

$$s_{2n}(e, f, F_n, F_n, \dots, F_n) = 0$$

para quaisquer e e f dois idempotentes primitivos ortogonais de F_n . Sem perda de generalidade, podemos tomar $e = e_{11}$ e $f = e_{22}$. Se $s_{2n}(e, f, F_n, F_n, \dots) \neq 0$ então existe um conjunto de $2n$ matrizes elementares $E = \{e_{i_k j_k}\}$ com $e, f \in E$ tal que

$$s_{2n}(E, E, \dots, E) \neq 0.$$

Pelas configurações obtidas no lema anterior, temos que existe no máximo um u tal que $n(u) > 4$. Portanto $n(1) \leq 4$ ou $n(2) \leq 4$. Suponhamos que $n(1) \leq 4$. Trocando e_{11} por $1 - \sum_{i=2}^n e_{ii}$ e usando a linearidade de s_{2n} , podemos escrever

$$s_{2n}(E, \dots, e_{11}, \dots, E) = s_{2n}(E, \dots, 1, \dots, E) - \sum_{i=2}^n s_{2n}(E, \dots, e_{ii}, \dots, E).$$

O primeiro termo à direita da expressão se anula pelo Lema 2.1 (iii) e (i). Nos outros termos, $n(1) \leq 4 - 2 = 2$. Portanto $s_{2n}(E, \dots, E) = 0$ pelo Lema 2.2 e temos uma contradição.

Mostraremos agora que $s_{2n}(e, F_n, \dots, F_n) = 0$ para qualquer idempotente primitivo e . Sem perda de generalidade, tomemos $e = e_{11}$. Se $s_{2n}(e, F_n, \dots, F_n) \neq 0$ então existe um conjunto E de $2n$ matrizes elementares de F_n , com $e \in E$ e tal que $s_{2n}(e, E, E, \dots) \neq 0$. Temos três casos a considerar:

caso 1: Todos os elementos de E têm um índice 1. Observando que existem no máximo $2n - 1$ matrizes com esta propriedade, temos que duas entradas em $s_{2n}(e, E, \dots, E)$ são iguais. Pelo Lema 2.1(ii), este se anula. Contradição.

caso 2: Existe pelo menos um elemento $f = e_{ii}$ em E tal que $i \neq 1$. Neste caso, e e f são dois idempotentes ortogonais. Logo $s_{2n}(e, f, E, \dots, E) = 0$ pelo primeiro parágrafo.

caso 3: Existe um elemento $e_{ij} \in E$ tal que $i, j \neq 1$ e $i \neq j$. Escrevamos $e_{ij} = (e_{ii} + e_{jj}) - e_{ii}$. Como $i, j \neq 1$, e_{ij} é uma diferença de dois idempotentes ortogonais a e_{11} . Então, usando a linearidade e o resultado obtido no parágrafo anterior temos $s_{2n}(e, E, \dots, E) = 0$.

Finalmente mostraremos que $s_{2n}(F_n, \dots, F_n) = 0$. É suficiente provar que $s_{2n}(E, \dots, E) = 0$ para o conjunto $E = \{e_{ij}\}$, constituído pelos elementos arbitrários da base canônica de F_n . Seja $e_{ij} \in E$. Se $i = j$ então e_{ij} é um idempotente primitivo e o resultado segue do segundo parágrafo. Se $i \neq j$ podemos escrever e_{ij} como uma diferença de dois idempotentes ortogonais primitivos: $e_{ij} = (e_{ii} + e_{jj}) - e_{ii}$. Usando a linearidade e o resultado obtido no parágrafo anterior temos $s_{2n}(E, E, \dots, E) = 0$. E o teorema está provado. $\square$

Concluimos neste momento que o grau de uma identidade minimal para F_n é exatamente $2n$.

2.3 Unicidade

Teorema 2.3 *Se F_n satisfaz uma identidade multilinear f de grau $2n$ então $f = \lambda s_{2n}$, com $\lambda \in F$.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \dots, x_{2n})$ uma identidade multilinear de grau $2n$. Então temos

$$f = \sum_{\sigma \in P_{2n}} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)} \quad (\alpha_{\sigma} \in F), \quad (2.1)$$

com os α_{σ} não todos nulos. Observemos que todos os termos do segundo membro de (2.1), sem os coeficientes, podem ser transformados um no outro transpondo um par de fatores adjacentes. Vamos então comparar dois termos que, sem perda de generalidade, podemos supor que sejam da forma

$$\begin{aligned} & \alpha x_1 \dots x_{s-1} x_s x_{s+1} \dots x_{2n} \\ & \beta x_1 \dots x_{s-1} x_{s+1} x_s \dots x_{2n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se s é ímpar, isto é, se $s = 2i - 1$, apliquemos as substituições:

$$\begin{aligned} x_{2j-1} &= e_{jj}, & x_{2j} &= e_{j \ j+1} & (\text{para } j < i), \\ x_{2j-1} &= e_{jj}, & x_{2j} &= e_{jj} & (\text{para } j = i), \\ x_{2j-1} &= e_{j-1 \ j}, & x_{2j} &= e_{jj} & (\text{para } j > i), \end{aligned}$$

onde e_{ij} são matrizes elementares de F_n . Como $x_s = x_{s+1}$, os dois termos de (2.2), a menos de uma constante, são iguais. Para $j = 1$ temos $x_1 = e_{11}$, e para $j = n$, temos $x_{2n} = e_{nn}$. Então

$$x_1 \dots x_{s-1} x_s x_{s+1} \dots x_{2n} = x_1 \dots x_{s-1} x_{s+1} x_s \dots x_{2n} = e_{1n}.$$

Como ilustração tomemos $n = 3$ e $s = 3$ (e portanto $i = 2$). Então

$$\begin{aligned} x_1 &= e_{11}, & x_2 &= e_{12} & (\text{para } j = 1 < i), \\ x_3 &= e_{22}, & x_4 &= e_{22} & (\text{para } j = 2 = i), \\ x_5 &= e_{23}, & x_6 &= e_{33} & (\text{para } j = 3 > i), \end{aligned}$$

Portanto $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = x_1 x_2 x_4 x_3 x_5 x_6 = e_{11} e_{12} e_{22} e_{23} e_{33} = e_{13}$. Concluimos assim que a soma dos dois termos em (2.2) é $(\alpha + \beta) e_{1n}$ enquanto todos os outros termos em (2.1) se anulam. Como f é uma identidade polinomial por hipótese, temos $\alpha + \beta = 0$.

Se s é par, isto é, se $s = 2i$, apliquemos as substituições:

$$\begin{aligned} x_{2j-1} &= e_{j \ j+1}, & x_{2j} &= e_{j+1 \ j+1} & (\text{para } j \leq i), \\ x_{2j-1} &= e_{jj}, & x_{2j} &= e_{j \ j+1} & (\text{para } i < j \leq (n-1)), \\ x_{2n-1} &= e_{nn}, & x_{2n} &= e_{n1}. \end{aligned}$$

Para $j = i + 1 > i$, $x_{s+1} = x_{2i+1} = x_{2j-1} = e_{i+1 \ i+1} = x_s$. Se $j = 1$, $x_1 = e_{12}$. E ainda, $x_{2n} = e_{n1}$. Portanto,

$$x_1 \dots x_{s-1} x_s x_{s+1} \dots x_{2n} = x_1 \dots x_{s-1} x_{s+1} x_s \dots x_{2n} = e_{11}.$$

Como ilustração tomemos $n = 3$ e $s = 2$ (e portanto $i = 1$). Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= e_{12}, & x_2 &= e_{22} & (\text{para } j = 1 = i), \\ x_3 &= e_{22}, & x_4 &= e_{23} & (\text{para } i < j = 2 = n-1), \\ x_5 &= e_{33}, & x_6 &= e_{31}, \end{aligned}$$

e $x_1x_2x_3\dots x_6 = x_1x_3x_2\dots x_6 = e_{12}e_{22}e_{22}e_{23}e_{33}e_{31} = e_{11}$. Portanto sob esta substituição a soma dos termos em (2.2) é $(\alpha + \beta)e_{11}$, enquanto que os outros somandos de (2.1) que não se anulam correspondem à permutação cíclica de

$$e_{12}e_{22}\dots e_{nn}e_{n1}.$$

Logo a expressão (2.1) após estas substituições possui a forma

$$(\alpha + \beta)e_{11} + \sum_{i=2}^n \alpha_i e_{ii}.$$

Como f é uma identidade temos novamente $\alpha + \beta = 0$.

Isto implica que ao executarmos uma transposição de variáveis na expressão do produto que corresponde à permutação idêntica, teremos o mesmo coeficiente, porém com o sinal trocado. Isto equivale a dizer que todos os monômios em (2.1) têm o mesmo coeficiente, a menos de um sinal da permutação correspondente. Portanto,

$$f = \sum_{\sigma \in P_n} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)} = \alpha_{s_{2n}}(x_1, \dots, x_{2n}). \quad \square$$

Lema 2.3 *Suponhamos $f = f_1 + f_2$, onde cada monômio de f_1 é de grau ≥ 1 em x_1 e f_2 independe de x_1 . Se uma álgebra A satisfaz f então A satisfaz também f_1 e f_2 .*

Demonstração. A satisfaz f_2 pois

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = f_2(x_2, \dots, x_n).$$

Como $f_1 = f - f_2$, f_1 também é uma identidade para A . $\square$

Teorema 2.4 *Seja $f(x_1, \dots, x_k)$ uma identidade de grau $2n$ para F_n , com $k \leq 2n$. Se $n > 2$ ou se F não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, então $k = 2n$ e $f = \lambda s_{2n}$.*

Demonstração. Se f é multilinear temos o resultado desejado pelo Teorema 2.3. Vamos mostrar agora que f é necessariamente multilinear. Suponhamos, por absurdo, que f não

seja multilinear. Aplicando o processo de linearização a f um número finito de vezes obtemos uma identidade g para F_n que possui a forma

$$g(y_1, \dots, y_m) = g_0 + g_1 + \dots + g_m$$

onde os g_i satisfazem:

- a) grau $y_i \leq 1$ ($\forall i$) em g_0 ;
- b) grau $y_i = 2$ e grau $y_k \leq 1$ ($\forall k \neq i$) em cada g_i ou $g_i = 0$ ($\forall i, i > 0$);
- c) $g_i \neq 0$ para algum $i > 0$.

Mas também podemos escrever

$$g(y_1, \dots, y_m) = h_1^{(1)}(y_1, \dots, y_m) + h_2^{(1)}(y_1, \dots, y_m)$$

com $h_1^{(1)}$ e $h_2^{(1)}$ satisfazendo:

- a) grau $y_1 \geq 1$ em cada monômio de $h_1^{(1)}$ e
- b) grau $y_1 = 0$ em cada monômio de $h_2^{(1)}$.

Pelo Lema 2.3, $h_1^{(1)}$ e $h_2^{(1)}$ são identidades para F_n . Consideremos $g^{(1)} = g - h_2^{(1)}$ que é ainda uma identidade de grau $2n$. Todos os monômios deste polinômio dependem de y_1 .

Observemos aqui que o Lema 2.3 pode ser aplicado trocando y_1 por qualquer outra variável.

Então podemos escrever $g^{(1)} = h_1^{(2)} + h_2^{(2)}$ tal que

- a) grau de $y_2 \geq 1$ em todos os monômios de $h_1^{(2)}$ e
- b) grau de $y_2 = 0$ em todos os monômios de $h_2^{(2)}$

Considerando-se o polinômio $g^{(2)} = g^{(1)} - h_2^{(2)}$ temos os resultados análogos obtidos em $g^{(2)}$, isto é, todos os monômios deste polinômio tem grau no mínimo 1 em y_2 . Após sucessivos passos deste tipo, obteremos um polinômio $g^{(m)}$ cujos monômios dependem de todas as variáveis, isto é, grau $y_i \geq 1$ ($\forall i = 1, \dots, m$). E mais, $g^{(m)}$ é identidade para F_n de grau $2n$. Por conveniência, indicaremos o polinômio $g^{(m)}$ simplesmente por g . Então este novo g pode ser escrito na forma

$$g(y_1, \dots, y_m) = g_0 + g_1 + \dots + g_m$$

com os g_i satisfazendo:

- a) grau $y_i = 1, \forall i = 1, \dots, m$, em cada monômio de g_0 ;
- b) grau $y_i = 2$ e grau $y_k = 1, \forall k \neq i$, em cada monômio de g_i ou $g_i = 0$ ($i > 0$);

c) $g_i \neq 0$ para algum $i > 0$.

Notemos agora que cada g_i tornou-se homogênea. E mais, grau $g_0 = m$ e, para cada $i > 0$, grau $g_i = m + 1$ se $g_i \neq 0$. Como grau $g = 2n$ temos que grau $g_i = 2n$ se $g_i \neq 0$ ($\forall i > 0$). Logo $m = 2n - 1$. Assumamos sem perda de generalidade que g_1 seja não nulo. Então o polinômio g_1 linearizado na variável y_1 é da forma

$$h(y, z, y_2, \dots, y_{2n-1}) = g_1(y + z, y_2, \dots, y_{2n-1}) - g_1(y, y_2, \dots, y_{2n-1}) - g_1(z, y_2, \dots, y_{2n-1}).$$

Lembrando que g_1 é homogêneo, linear nas variáveis distintas de y_1 e de grau $2n$, temos que o polinômio h obtido é uma identidade multilinear de grau $2n$, pelo Teorema 1.4. Portanto, pelo Teorema 2.3, temos

$$h(y, z, y_2, \dots, y_{2n-1}) = \alpha_1 s_{2n}(y, z, y_2, \dots, y_{2n-1}) \quad (2.3)$$

onde $\alpha_1 \in F$ e $\alpha_1 \neq 0$ pois $g_1 \neq 0$. Se chegarmos à conclusão de que $\alpha_1 = 0$, obteremos uma contradição.

Vamos mostrar que $\alpha_1 = 0$. Temos que considerar os seguintes casos:

- I. $\text{car } F \neq 2$ e $n \geq 1$;
- II. $\text{car } F = 2$ e $n > 2$;
- III. $\text{car } F = 2, n \leq 2$ e F não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

Para isto, tomemos um monômio não nulo qualquer de g_1 . Como g_1 é de grau 2 na variável y_1 e é homogêneo, podemos escrever este monômio na forma

$$\gamma a y_1 b y_1 c$$

onde $\gamma \in F$ e a, b, c são produtos que envolvem as variáveis y_i distintas de y_1 . Linearizando este monômio em y_1 temos

$$\gamma a(y + z)b(y + z)c - \gamma a y b y c - \gamma a z b z c = \gamma a y b z c + \gamma a z b y c.$$

É claro que os monômios $\gamma a y b z c$ e $\gamma a z b y c$ são monômios do polinômio h . Porém, ao olharmos para a expressão (2.3), notamos que devemos considerar a ordem das variáveis visto que no polinômio s_{2n} , os monômios assumem o sinal positivo ou negativo conforme o sinal da

permutação. Estudemos então os sinais de $aybzc$ e $azbyc$. Seja $d(b)$ o comprimento de b . Então o número de transposições necessárias para que $azbyc$ se transforme em $aybzc$ é $2d(b) + 1$ que é um número ímpar. De fato, olhando para o diagrama abaixo, notamos que nos primeiro e terceiro passos são necessários $d(b)$ transposições e que no segundo passo necessitamos apenas de uma transposição.

Assim, estes dois monômios possuem o mesmo coeficiente α_1 porém com sinais opostos. Portanto,

$$\gamma = \alpha_1 \quad \text{e} \quad \gamma = -\alpha_1. \quad (2.4)$$

I. $\text{car } F \neq 2$ e $n \geq 1$. É imediato pois se a característica de F é diferente de 2, (2.4) implica que $2\alpha_1 = 0$ e portanto $\alpha_1 = 0$.

II. $\text{car } F = 2$ e $n > 2$. Se $\text{car } F = 2$, $\alpha_1 = -\alpha_1$ e podemos concluir que todos os monômios de g_1 têm coeficientes iguais a α_1 . É claro que o processo aplicado ao polinômio g_1 pode também ser aplicado a qualquer g_i ($i \geq 1$), desde que este polinômio não seja nulo. Concluimos assim que se $\text{car } F = 2$ todos os monômios de g_i têm coeficientes iguais a α_i . É claro que se $g_k = 0$ (para algum $k = 1, \dots, m$) temos $\alpha_k = 0$. Podemos portanto reescrever g na forma

$$g = g_0 + \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i p_i, \quad (2.5)$$

onde p_i denota a soma de todos os $\frac{(2n)!}{2}$ monômios que têm grau 2 em y_i e grau 1 em y_k para $k \neq i$. Apliquemos a seguinte substituição:

$$\begin{aligned} y_{2i-1} &= e_{ii} \quad (i = 1, \dots, n), \\ y_{2i} &= e_{i \ i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Sob esta substituição, $(y_{2i})^2 = 0$ e $(y_{2i-1})^2 = e_{ii}, \forall i = 1, \dots, n$, e o único monômio multilinear de grau $2n-1$ que não se anula é $y_1 \dots y_{2n-1}$ que resulta em e_{1n} . Por exemplo, para $n = 3$ temos

$$\begin{aligned} y_1 &= e_{11}, \quad y_3 = e_{22}, \quad y_5 = e_{33}, \\ y_2 &= e_{12}, \quad y_4 = e_{23}, \end{aligned}$$

logo $y_1 \dots y_5 = e_{13}$.

Isto implica que em cada p_{2i-1} , existe apenas um monômio que não se anula sob esta substituição que é $y_1 \dots (y_{2i-1})^2 \dots y_{2n-1}$. Este monômio resulta em e_{1n} . Todos os monômios de p_{2i} resultam em matrizes nulas. Supondo que

$$g_0 = \beta y_1 \dots y_{2n-1} + \sum_{\sigma \neq (1)} \beta_{\sigma} y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(2n-1)}, \quad (2.6)$$

com $\beta, \beta_{\sigma} \in F$, temos $g_0(e_{11}, e_{12}, \dots) = \beta e_{1n}$. Portanto por (2.5) temos

$$\begin{aligned} 0 = g(e_{11}, e_{12}, \dots) &= g_0(e_{11}, e_{12}, \dots) + \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i p_i(e_{11}, e_{12}, \dots) \\ &= \beta e_{1n} + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i-1} p_{2i-1}(e_{11}, e_{12}, \dots) \\ &= \beta e_{1n} + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i-1} e_{1n} \\ &= (\beta + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i-1}) e_{1n} \end{aligned}$$

o que implica que $\beta + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i-1} = 0$. Como a característica de F é 2, isto equivale a

$$\beta = \sum_{i=1}^n \alpha_{2i-1}. \quad (2.7)$$

Apliquemos agora uma nova substituição:

$$\begin{aligned} y_{2i-1} &= e_{i \ i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ y_{2i} &= e_{i+1 \ i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ y_{2n-1} &= e_{n1}. \end{aligned}$$

Sob esta substituição, os únicos monômios multilineares de grau $2n - 1$ que não se anulam correspondem à permutação cíclica de $y_1 \dots y_{2n-1}$ e resultam em matrizes da forma e_{ii} . O único monômio multilinear que resulta em e_{11} é novamente $x_1 \dots x_{2n-1}$. Por exemplo, para $n = 3$

$$y_1 = e_{12}, \quad y_3 = e_{23},$$

$$y_2 = e_{22}, \quad y_4 = e_{33},$$

$$y_5 = e_{31}.$$

Então $y_1 \dots y_5 = e_{12} \dots e_{31} = e_{11}$, $y_2 \dots y_5 y_1 = e_{22} \dots e_{12} = e_{22}$, etc. Da expressão (2.6) temos que $g_0(e_{12}, e_{22}, \dots) = \beta e_{11} + \dots$. Como $(y_{2i-1})^2 = 0$ e $(y_{2i})^2 = e_{i+1 \ i+1}$ (para todo i) segue que $e_{11} p_{2i}(e_{12}, e_{22}, \dots) e_{11} = e_{11}$ enquanto $e_{11} p_{2i-1}(e_{12}, e_{22}, \dots) e_{11} = 0$. Da expressão (2.5), temos

$$\begin{aligned} 0 &= e_{11} g_0(e_{12}, e_{22}, \dots) e_{11} + e_{11} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i p_i(e_{12}, e_{22}, \dots) \right] e_{11} \\ &= \beta e_{11} + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{2i} \right] e_{11} = \left[\beta + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{2i} \right] e_{11}. \end{aligned}$$

Como $\text{car } F = 2$, temos que

$$\beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{2i}. \quad (2.8)$$

Finalmente, aplicando a substituição

$$y_i = e_{i \ i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

$$y_n = e_{nn},$$

$$y_i = e_{2n-i+1 \ 2n-i} \quad (i = n+1, \dots, 2n-1),$$

temos que os únicos monômios de grau $2n - 1$ que não se anulam correspondem às permutações cíclicas do monômio $y_1 \dots y_{2n-1}$ e resultam em matrizes da forma e_{ii} ($i = 1, \dots, n$). O único monômio deste tipo que resulta em e_{11} corresponde à permutação identidade daquele monômio. Logo por (2.6) temos $g_0(e_{12}, e_{23}, \dots) = \beta e_{11} + \dots$. Por exemplo, para $n = 3$

$$y_1 = e_{11}, \quad y_2 = e_{23}, \quad y_3 = e_{33}, \quad y_4 = e_{32}, \quad y_5 = e_{21}$$

e portanto, $x_1 \dots x_5 = e_{11}$, $x_2 \dots x_5 x_1 = e_{22}$ etc. Os monômios não nulos de grau $2n$ correspondem às permutações cíclicas de $y_1 \dots y_n y_n \dots y_{2n-1}$ que são monômios de p_n . O único que resulta em e_{11} corresponde à permutação idêntica deste monômio. No nosso exemplo, $y_1 y_2 (y_3)^2 y_4 y_5 = y_1 y_2 \dots y_5 = e_{11}$; se tomarmos $y_2 (y_3)^2 y_4 y_5 y_1$ teremos e_{22} . Logo o coeficiente de e_{11} na matriz $f(e_{12}, e_{23}, \dots)$ é igual a $\beta + \alpha_n$, isto é

$$\beta = \alpha_n. \quad (2.9)$$

Se n é ímpar tomemos $P_n(1, 3, 5, \dots, 2n-1)$ o grupo das permutações dos números ímpares de 1 a $2n-1$. De (2.5), (2.7) e (2.9) temos que

$$g(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{2n-1}) = g_0(y_1, \dots, y_{2n-1}) + \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i p_i(y_1, \dots, y_{2n-1})$$

então $\beta = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1}$ e $\beta = \alpha_n$. Da mesma forma, tomando-se $\sigma \in P_n(1, 3, \dots, 2n-1)$ temos que se

$$\begin{aligned} g(y_{\sigma(1)}, y_2, y_{\sigma(3)}, \dots, y_{\sigma(2n-1)}) &= g_0(y_{\sigma(1)}, y_2, y_{\sigma(3)}, \dots, y_{\sigma(2n-1)}) \\ &+ \sum_{i=1}^n \alpha_{2i-1} p_{2i-1}(x_{\sigma(1)}, x_2, x_{\sigma(3)}, \dots, x_{\sigma(2n-1)}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{2i} p_{2i}(x_{\sigma(1)}, x_2, x_{\sigma(3)}, \dots, x_{\sigma(2n-1)}), \end{aligned}$$

então $\beta_1 = \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(2n-1)}$ e $\beta_1 = \alpha_{\sigma(n)}$. Observemos que $\beta = \beta_1$ pois os somandos de β_1 são exatamente os mesmos de β ; aparecem somente rearranjados. Portanto $\alpha_{\sigma(n)} = \beta_1 = \beta = \alpha_n$. Sabemos que n (e portanto α_n) é fixo. Porém $\sigma(n)$ pode assumir quaisquer valores ímpares de 1 a $2n-1$. Portanto

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = \dots = \alpha_{2n-1}. \quad (2.10)$$

Se n é par, usando (2.5), (2.8), (2.9) e um argumento análogo, temos que

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = \dots = \alpha_{2n-2}. \quad (2.11)$$

Se $n = 1$ então $n-1 = 0$ e a equação (2.8) não faz sentido. Se $n = 2$ a equação (2.11) perde o sentido. Portanto, precisamos usar a hipótese $n > 2$.

Suponhamos n ímpar e seja $\sigma \in P_{2n-1}(1, 2, 3, \dots, 2n-1)$. Seja

$$g = g(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)}, \dots, y_{\sigma(2n-1)}).$$

Então de (2.10) temos $\alpha_{\sigma(1)} = \alpha_{\sigma(3)} = \dots = \alpha_{\sigma(n)} = \dots = \alpha_{\sigma(2n-1)}$. Se $\sigma = (1\ 2)$ então

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = \dots = \alpha_{2n-1}.$$

Se $\sigma = (1\ 2\ 3)$ então

$$\alpha_2 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \dots = \alpha_{2n-1}.$$

Se $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ então

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = \dots = \alpha_{2n-1}.$$

Das três equações acima temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = \dots = \alpha_{2n-1}$. Por um número finito de passos deste tipo, teremos que todos os α_i são iguais. Teremos a mesma conclusão para n par, usando a equação (2.11). Somando as equações (2.7) e (2.8) temos

$$0 = 2\beta = \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i = (2n-1)\alpha_1 = \alpha_1.$$

III. $\text{car } F = 2$, $n \leq 2$ e F não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Como F não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, F contém um elemento δ tal que $\delta \neq 0$ e $\delta \neq 1$. É claro que se q é um polinômio linear em y_1 então

$$q(\delta y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}) - \delta q(y_1, \dots, y_{2n-1}) = 0.$$

Portanto os polinômios g_0 e p_i ($\forall i > 1$) que compõem o polinômio g têm esta propriedade. E ainda,

$$p_1(\delta y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}) = (\delta)^2 p_1(y_1, \dots, y_{2n-1}).$$

Portanto,

$$g(\delta y_1, \dots, y_{2n-1}) - \delta g(y_1, \dots, y_{2n-1}) = \alpha_1 \delta (\delta - 1) p_1(y_1, \dots, y_{2n-1}).$$

Como g é uma identidade para F_n e $\delta(\delta - 1) \neq 0$, temos que $\alpha_1 p_1(y_1, \dots, y_{2n-1})$ é uma identidade para F_n . Para $n = 2$, apliquemos as substituições $y_1 = e_{11}$, $y_2 = e_{12}$, $y_3 = e_{22}$.

Então

$$0 = \alpha_1 p_1(e_{11}, e_{12}, e_{22}) = \alpha_1 (e_{11})^2 e_{12} e_{22} = \alpha_1 e_{12}.$$

Para $n = 1$, tomemos $y_1 = 1$. Como, neste caso, $p_1(y_1) = (y_1)^2$ temos

$$0 = \alpha_1 p_1(1) = \alpha_1.$$

Logo, em ambos os casos, temos $\alpha_1 = 0$. □

Teorema 2.5 *Seja $f(x_1, \dots, x_k)$ uma identidade de grau $2n$ para F_n . Se $n > 2$ ou se F não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, então $k \geq 2n$ e*

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{(i)} \alpha_{(i)} s_{2n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{2n}})$$

onde a soma percorre todas as $C_{k,2n}$ combinações (i) de k elementos tomados $2n$ a $2n$ e $\alpha_{(i)} \in F$.

Demonstração. Se $k \leq 2n$, pelo Teorema 2.4, temos $k = 2n$ e

$$f(x_1, \dots, x_k) = \alpha s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}).$$

Suponhamos então $k > 2n$. Tomemos um monômio arbitrário de f . Este monômio pode ser escrito na forma $\alpha_i x_{i_1} \dots x_{i_r}$, onde $\alpha_i \in F$, $x_{i_j} \in \{x_1, \dots, x_k\}$ ($j = 1, \dots, r$) e $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ não são necessariamente distintas. Sejam $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ as variáveis distintas que ocorrem naquele monômio. Então podemos decompor f na forma $f = f_1 + f_2$ onde em f_1 ocorrem todos os monômios que dependem somente destas s variáveis e em f_2 todos os outros. Por uma generalização do Lema 2.3, f_1 e f_2 são ambas identidades para F_n . Como grau de $f = 2n$, temos que $s \leq r \leq 2n$. Isto é, f_1 é uma identidade de $s \leq 2n$ variáveis. Pelo Teorema 2.4, temos que $s = 2n$ e $f_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = \alpha_1 s_{2n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$. Podemos repetir o mesmo argumento trocando f por f_2 . Após aplicarmos este processo um número finito de vezes, teremos a identidade f com a representação desejada. □

Observemos que os $C_{k,2n}$ conjuntos $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{2n}}\}$ definidos no teorema anterior são distintos dois a dois. Isto implica que os $C_{k,2n}$ polinômios standard definidos acima são linearmente independentes. E ainda, cada combinação linear destes polinômios resulta em uma identidade de grau $2n$ para F_n (ou no polinômio nulo). Portanto, estes polinômios formam uma base para o espaço das identidades minimais de F_n e este espaço tem dimensão $C_{k,2n}$.

Concluimos neste momento que se $n > 2$ ou se F não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ então todas as identidades de grau $2n$ para F_n têm a forma do polinômio standard, isto é, são lineares em cada variável. Mostraremos a seguir que essas condições são essenciais, isto é,

Teorema 2.6 *Se $n = 1, 2$ e se F é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ então existem identidades de grau $2n$ para F_n que não são lineares em todas as variáveis.*

Demonstração. Podemos assumir que $F = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Para maior simplicidade, denotaremos $\bar{0}$ por 0 e $\bar{1}$ por 1.

Para $n = 1$, $g(x) = x^2 + x$ é uma identidade polinomial minimal para F_1 pois $g(0) = 0$ e $g(1) = 1 + 1 = 0$.

Sejam $n = 2$ e e a matriz identidade de F_2 . Temos abaixo as 16 possibilidades para os elementos de F_2 .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As seis primeiras matrizes satisfazem $y^2 = y$; as quatro matrizes listadas na segunda (respectivamente terceira) linha satisfazem $y^2 = e$ (respectivamente $y^2 = 0$) e as duas últimas, $y^2 = y + e$. Sejam b um elemento de F_2 e

$$f(x, y) = xy^3 + yxy^2 + y^2xy + y^3x + xy^2 + y^2x.$$

Consideremos todas as possibilidades:

1. Se $b^2 = 0$, é óbvio que $f(a, b) = 0, \forall a \in F_2$.

2. Se $b^2 = e$ então $b^3 = b$. Logo, $f(a, b) = ab + ba + ab + ba + a + a = 2(ab + ba + a) = 0, \forall a \in F_2$.
3. Se $b^2 = b$ então $b^3 = b$ e assim recaímos no caso anterior.
4. Se $b^2 = b + e$ então $b^3 = e$. Logo

$$\begin{aligned}
 f(a, b) &= a + ba(b + e) + (b + e)ab + a + a(b + e) + (b + e)a \\
 &= a + bab + ba + bab + ab + a + ab + a + ba + a \\
 &= 2(2a + ab + ba + bab) = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto f é uma identidade minimal para F_2 . □

2.4 Aplicações

Enumeremos aqui alguns resultados sobre álgebras de dimensão finita que usaremos para demonstrar os próximos teoremas; os números entre colchetes se referem ao número do lema (ou teorema) e a página em Felzenszwalb [12].

- (a) Seja F um corpo algebricamente fechado. Se D é uma álgebra com divisão sobre F , então $D = F$. [9.1 - 25]
- (b) Seja $K \supseteq F$ uma extensão de corpos, não necessariamente finita. Se A é uma álgebra simples central sobre F , então $A \otimes_F K$ é uma álgebra simples central sobre K . [29.1 - 78]
- (c) Se A é uma álgebra simples central sobre F , então $\dim_F A = n^2$. E neste caso, n é o grau de A . [29.2 - 78]
- (d) Seja $K \supseteq F$ uma extensão de corpos. Então $K_n \cong F_n \otimes_F K$. [26.1 - 71]
- (e) (Teorema de Wedderburn) Se A é uma álgebra simples central sobre F então $A \cong D_n$ onde D é uma álgebra com divisão sobre F . [24.1 - 65]
- (f) Se $N(A)$ é o radical de uma álgebra A , então $N(A/N(A)) = 0$, logo, $A/N(A)$ é semi-simples. [16.3 - 50]
- (g) Toda álgebra semi-simples é soma direta de álgebras simples. [21.4 - 62]
- (h) Se A é uma álgebra sobre F e $\bar{A} = A \otimes_F K$ onde K é um corpo contendo F , então cada identidade que vale em $\bar{A}$ vale em A . Basta ver que $A \hookrightarrow \bar{A}$.

(i) Por outro lado, se A satisfaz uma identidade linear em cada variável então $\overline{A}$ também satisfaz esta identidade. Veja Kaplansky [1].

Teorema 2.7 *Se A é uma álgebra simples central de grau n sobre F , então o grau de uma identidade minimal satisfeita por A é exatamente $2n$. Uma identidade multilinear de grau $2n$ é unicamente determinada, a menos de um fator numérico, pelo polinômio standard s_{2n} .*

Demonstração. Seja $\overline{F}$ o fecho algébrico de F . Por (b) temos que $\overline{A} = A \otimes_F \overline{F}$ é uma álgebra simples central sobre $\overline{F}$ e portanto, por (e), $\overline{A}$ é isomorfa à álgebra D_m onde D é uma álgebra com divisão sobre $\overline{F}$. Como $\overline{F}$ é um corpo algébricamente fechado, temos por (a) que $D = \overline{F}$. Logo $\overline{A} \cong \overline{F}_m$. Mas

$$m^2 = \dim_{\overline{F}} \overline{A} = \dim_F A = n^2;$$

então $m = n$ e $\overline{A} \cong \overline{F}_n$. Mas

$$I(A) = I(\overline{A}) \cap F[X] = I(\overline{F}_n) \cap F[X] = I(F_n \otimes_F \overline{F}) \cap F[X] = I(F_n).$$

Isto significa que f é uma identidade de A se, e somente se, f é uma identidade para F_n . Temos assim os resultados desejados pelos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3. $\square$

Teorema 2.8 *Sejam A uma álgebra semi-simples e $A', A'', \dots, A^{(k)}$ suas componentes simples. Denotemos por n_j o grau de $A^{(j)}$ sobre o seu centro. Se $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, então o grau de uma identidade minimal satisfeita por A é exatamente $2n$. Uma identidade multilinear de grau $2n$ é, a menos de um fator numérico, o polinômio standard s_{2n} .*

Demonstração. Escrevamos

$$A = A' \oplus A'' \oplus \dots \oplus A^{(k)}.$$

Mostraremos inicialmente que se f é uma identidade para A então $\text{grau } f \geq 2n$. Podemos supor sem perda de generalidade que $n_1 = n$. Suponhamos, por absurdo, que f tenha grau

$< 2n$. Como A' é uma álgebra simples central sobre o seu centro e A' satisfaz f , temos que A' satisfaz uma identidade de grau $< 2n$. Mas isto é uma contradição pelo Teorema 2.7.

Vamos mostrar agora que se f é uma identidade multilinear que vale para todas as suas componentes $A^{(i)}$ então f é uma identidade para A . De fato, sejam $e', e'', \dots, e^{(k)}$ os idempotentes primitivos ortogonais tais que $A' = e'A$, $A'' = e''A, \dots, A^{(k)} = e^{(k)}A$. Consideremos $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ elementos da álgebra A . Então, usando a linearidade de f , o fato de que $e = e' + e'' + \dots + e^{(k)}$ é o elemento identidade de A e o fato de que $(e^{(i)}A)(e^{(j)}A) = 0$ para $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_{2n}) &= f(ea_1, \dots, ea_{2n}) \\ &= f((e' + e'' + \dots)a_1, \dots, (e' + e'' + \dots)a_{2n}) \\ &= f(e'a_1, \dots, e'a_{2n}) + f(e''a_1, \dots, e''a_{2n}) + \dots \end{aligned}$$

Como f é uma identidade para todo $A^{(i)}$ e como $e^{(i)}a_j \in A^{(i)}$ para todo $j = 1, 2, \dots, 2n$, segue que $f(a_1, a_2, \dots, a_{2n}) = 0$.

Pelo Teorema 2.7 temos que $A^{(i)}$ satisfaz o polinômio standard s_{2n} . Pelo Lema 2.1 (iv), $A^{(i)}$ satisfaz s_{2n} . Logo usando o resultado do parágrafo anterior, podemos concluir que A satisfaz s_{2n} .

Portanto, o grau de uma identidade multilinear minimal para A é $2n$. Finalmente, se f é uma identidade multilinear de grau $2n$ para A então f é uma identidade para A' . Logo, pelo Teorema 2.7, f é um múltiplo escalar de s_{2n} . $\square$

Para uma álgebra A de dimensão finita temos o seguinte teorema:

Teorema 2.9 *Seja r o índice de nilpotência do radical N de uma álgebra A . Consideremos $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ onde n_i são os graus das componentes simples da álgebra quociente A/N . Então A satisfaz a seguinte identidade de grau $2nr$*

$$[s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})]^r.$$

Demonstração. Seja

$$A/N = A' \oplus \dots \oplus A^{(k)}$$

onde $A', \dots, A^{(k)}$ são as componentes simples de A/N com os graus definidos no enunciado do teorema. Pelo Teorema 2.7 cada $A^{(i)}$ satisfaz s_{2n_i} . Logo pelo Lema 2.1 (iv) cada $A^{(i)}$ satisfaz s_{2n} onde $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Portanto A/N satisfaz s_{2n} . Sejam $a_1, \dots, a_{2n}$ elementos de A . Então $a_i N \in A/N$, para todo $i = 1, \dots, 2n$. Logo

$$0 = s_{2n}(a_1 N, \dots, a_{2n} N) = s_{2n}(a_1, \dots, a_{2n})N.$$

Isto é, $s_{2n}(a_1, \dots, a_{2n}) \in N$. Como r é o índice de nilpotência de N , temos que

$$[s_{2n}(a_1, \dots, a_{2n})]^r = 0.$$

□

2.5 Conjectura de Razmyslov

No artigo [7], Leron continuou o trabalho de Amitsur e Levitzki determinando as identidades multilineares de grau $2n + 1$ para a álgebra de matrizes F_n . Mais precisamente, Leron provou os seguintes resultados:

Teorema 2.10 ([7], pg. 197) *Se F é um corpo de característica 0 e se $n > 2$ toda identidade multilinear de grau $2n + 1$ para F_n é consequência de s_{2n} .*

□

Teorema 2.11 ([7], pg. 199) *Se F é um corpo de característica 0 e se $n > 2$ os polinômios*

$$\phi_i = x_i s_4(x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_{2n+1}) \quad (1 \leq i \leq 2n + 1),$$

$$\chi_{ij} = s_4(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \widehat{x_j}, x_{j+1}, \dots, x_{2n+1})$$

$$(1 \leq i, j \leq 2n + 1, i \neq j, (i, j) \neq (1, 2)),$$

formam uma base para o espaço das identidades multilineares de grau $2n + 1$ para F_n . □

Corolário 2.2 ([7], pg. 200) *Se F é um corpo de característica 0 e se $n > 2$ o espaço das identidades multilineares de grau $2n + 1$ para F_n tem dimensão $4n(n + 1)$.*

□

No caso $n = 2$, Leron observou que o espaço das identidades multilineares de grau 5 para F_2 tem dimensão 29 e são consequências das identidades $s_4(x, y, z, w)$ e $\zeta(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5]$.

No artigo [6], Razmyslov formulou a seguinte

Conjectura *Seja F um corpo de característica 0. Então o ideal de identidades de F_n é gerado (como ideal) pelos polinômios*

$$s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}),$$

$$s_n([x_1^n, x_2], [x_1^{n-1}, x_2], \dots, [x_1, x_2]).$$

No artigo [13] Drenski provou a validade desta conjectura para $n = 2$. Mais precisamente, temos

Teorema 2.12 ([13], pg. 188) *Se F é um corpo de característica 0 então o ideal de identidades de F_2 é gerado (como ideal) pelos polinômios*

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$s_2([x^2, y], [x, y]) = -[[x, y]^2, x].$$

□

pg. 17

Como F_2 é uma álgebra quadrática simétrica, segue da Proposição 1.4 que F_2 satisfaz a identidade $\zeta(x_1, x_2, \dots, x_5) = 0$. Portanto, pelo teorema anterior, ζ é uma consequência de $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $[[x, y]^2, x]$.

Capítulo 3

Identidades minimais para as álgebras de Jordan de grau 2

O objetivo deste capítulo é determinar uma base para o espaço dos polinômios multilineares de Jordan de grau 5 que são identidades minimais de todas as álgebras de Jordan de grau 2, isto é, para todas as álgebras $J(Q, 1)$. Mostraremos que estas identidades básicas são todas consequências da linearização de uma identidade $\kappa(x; x_1, x_2, x_3)$. Na última seção, determinaremos uma identidade para todas as álgebras de Jordan de grau $n = 0, 3 \pmod{4}$.

3.1 O polinômio κ

Definiremos nesta seção o polinômio κ e mostraremos que κ é uma identidade para qualquer álgebra quadrática e, em particular, para qualquer álgebra $J(Q, 1)$. Para simplificar, denotaremos o operador $s_m(V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_m})$ de $\text{Ass}[X]$ por S_m . Aqui, s_m é o polinômio standard de grau m e, dado x , $V_x(y) = x \circ y$ é o produto de Jordan $x \circ y = xy + yx$.

Consideremos o polinômio de Jordan

$$\kappa(x; x_1, x_2, x_3) = S_3(x^2) - S_3(x) \circ x \quad (3.1)$$

e a sua forma linearizada

$$\kappa(x, y; x_1, x_2, x_3) = S_3(x \circ y) - S_3(x) \circ y - S_3(y) \circ x. \quad (3.2)$$

Observemos de (3.2) que se κ é uma identidade para uma álgebra A então

$$S_3(a \circ b) = S_3(a) \circ b + S_3(b) \circ a \quad (\forall a, b \in A).$$

isto é, S_3 é uma derivação para esta álgebra.

Teorema 3.1 *O polinômio κ é uma identidade (portanto S_3 é uma derivação) para toda álgebra quadrática.*

Demonstração. Lembremos que toda álgebra quadrática satisfaz as identidades

$$x^2 = t(x)x - n(x).1, \quad (3.3)$$

$$x \circ y = t(x)y + t(y)x - q(x, y).1, \quad (3.4)$$

onde $q(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$ e $t(x) = q(x, 1)$. Usando o fato de que $t(x)$ e $n(x)$ são elementos do corpo para todo x , o polinômio κ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \kappa(x; x_1, x_2, x_3) &= S_3(x^2) - S_3(x) \circ x \\ &= S_3(t(x)x - n(x).1) - t(S_3(x))x - t(x)S_3(x) + q(S_3(x), x).1 \\ &= t(x)S_3(x) - n(x)S_3(1) - t(S_3(x))x - t(x)S_3(x) + q(S_3(x), x).1. \end{aligned}$$

Logo, se provarmos as três afirmações abaixo

- (i) $S_3(1) = 0$,
- (ii) $q(x, S_3(x)) = 0$,
- (iii) $t(S_3(x)) = 0$,

o nosso teorema estará demonstrado.

Vamos inicialmente mostrar, usando a equação (3.4), que

$$S_3(x) = -2 \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(3)}) q(x, x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(1)}.$$

Temos

$$\begin{aligned} S_3(x) &= \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma \left[V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} V_{x_{\sigma(3)}} \right] (x) \\ &= \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma \left[V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} \right] (x \circ x_{\sigma(3)}) \\ &= \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma \left[V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} \right] (t(x) x_{\sigma(3)} + t(x_{\sigma(3)}) x - q(x, x_{\sigma(3)}) \cdot 1) \\ &= \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} (t(x) x_{\sigma(3)} \circ x_{\sigma(2)} + t(x_{\sigma(3)}) x \circ x_{\sigma(2)} - q(x, x_{\sigma(3)}) (1 \circ x_{\sigma(2)})) \\ &= t(x) \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} \underbrace{(x_{\sigma(3)} \circ x_{\sigma(2)})}_{\Delta} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(3)}) V_{x_{\sigma(1)}} (t(x) x_{\sigma(2)} + t(x_{\sigma(2)}) x - q(x, x_{\sigma(2)}) \cdot 1) \\ &\quad - 2 \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma q(x, x_{\sigma(3)}) V_{x_{\sigma(1)}} (x_{\sigma(2)}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_3(x) &= \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(3)}) t(x) \underbrace{(x_{\sigma(2)} \circ x_{\sigma(1)})}_{\Delta'} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma \underbrace{t(x_{\sigma(3)}) t(x_{\sigma(2)})}_{\Delta} (x \circ x_{\sigma(1)}) \\ &\quad - \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(3)}) q(x, x_{\sigma(2)}) (1 \circ x_{\sigma(1)}) \\ &\quad - 2 \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma q(x, x_{\sigma(3)}) \underbrace{(x_{\sigma(2)} \circ x_{\sigma(1)})}_{\Delta'} \\ &= -2 \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(3)}) q(x, x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(1)}. \end{aligned}$$

Nos produtos indicados por Δ (respectivamente Δ') as variáveis $x_{\sigma(2)}$ e $x_{\sigma(3)}$ (respectivamente $x_{\sigma(1)}$ e $x_{\sigma(2)}$) são simétricas e portanto as somas percorrendo $\sigma \in P_3$ se anulam.

Voltemos agora à demonstração do teorema.

$$(i) S_3(1) = -2 \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(3)}) q(1, x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(1)} = -2 \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma \underbrace{t(x_{\sigma(3)}) t(x_{\sigma(2)})}_{\Delta} x_{\sigma(1)} = 0.$$

$$\begin{aligned} (ii) q(x, S_3(x)) &= q(x, -2 \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(3)}) q(x, x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(1)}) \\ &= -2 \sum_{\sigma \in P_3} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(3)}) \underbrace{q(x, x_{\sigma(2)}) q(x, x_{\sigma(1)})}_{\Delta'} = 0. \end{aligned}$$

(iii) Linearizando (ii) e usando (i), temos

$$0 = q(x, S_3(1)) + q(1, S_3(x)) = t(S_3(x)).$$

□

3.2 Identidades multilineares simétricas

Seja V_5 o espaço dos polinômios (associativos) multilineares de grau 5 nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_5$. Consideremos $JV_5 = V_5 \cap FSJ[X]$ e $I(F_2)$ o T-ideal das identidades de F_2 . Suponhamos que $\text{car}(F) = 0$. Leron [7] introduziu os polinômios

$$\phi_i = x_i s_4(x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_5) \quad (1 \leq i \leq 5), \quad (3.5)$$

$$\chi_{ij} = s_4(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \widehat{x_j}, x_{j+1}, \dots, x_5) \quad (1 \leq i \neq j \leq 5),$$

e estabeleceu a seguinte relação de dependência entre os χ_{ij} :

$$\sum_{j=1}^5 (-1)^j \sum_{i=1, i \neq j}^5 \chi_{ij} = 0. \quad (3.6)$$

Como vimos na Seção 2.5, $I(F_2)$ é gerado como um T -ideal por $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e por $[[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5]$. Pode-se mostrar que uma base para $V_5 \cap I(F_2)$ é formada pelos 29 elementos ϕ_i ($1 \leq i \leq 5$), χ_{ij} ($1 \leq i \neq j \leq 5, (i, j) \neq (1, 2)$), e

$$\eta_\sigma = \left[[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \circ [x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}], x_{\sigma(5)} \right],$$

para as cinco permutações $\sigma \in P_5$, que permutam os índices ciclicamente.

A partir destes resultados, construiremos uma base para $H(V_5, *) \cap I(F_2)$. Sejam

$$\psi_i = s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_5)x_i \quad (1 \leq i \leq 5), \quad (3.7)$$

$$\rho_{ij} = (-1)^i \chi_{ij} - (-1)^j \chi_{ji} \quad (1 \leq i < j \leq 5).$$

Como $s_4(y_1, \dots, y_4)^* = s_4(y_1^*, \dots, y_4^*)$ para todas as palavras y_i , temos que $\phi_i^* = \psi_i$ e $\chi_{ij}^* = (-1)^{j-i+1} \chi_{ji}$. Logo, $\phi_i + \psi_i$ e ρ_{ij} são elementos $*$ -simétricos. Observemos que $\eta_\sigma^* = -\eta_\sigma$ para todo σ , i.e., os η_σ são anti-simétricos.

Lema 3.1 *Os polinômios $\phi_i + \psi_i$ ($i = 1, \dots, 5$) e ρ_{ij} ($1 \leq i < j \leq 5$) formam uma base para $H(V_5, *) \cap I(F_2)$, se F é um corpo de característica 0.*

Demonstração. Vamos mostrar que estes elementos geram $H(V_5, *) \cap I(F_2)$. Seja $f \in H(V_5, *) \cap I(F_2)$. Como $H(V_5, *) \cap I(F_2) \subset V_5 \cap I(F_2)$, podemos escrever

$$f = \sum_{k=1}^5 \alpha_k \phi_k + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} \chi_{ij} + \sum_{\sigma} \gamma_{\sigma} \eta_{\sigma}.$$

Aplicando a involução $*$ na expressão acima, temos

$$f^* = \sum_{k=1}^5 \alpha_k \psi_k + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} (-1)^{j-i+1} \chi_{ji} - \sum_{\sigma} \gamma_{\sigma} \eta_{\sigma}.$$

Como $f = f^*$, temos

$$2f = \sum_{k=1}^5 \alpha_k (\phi_k + \psi_k) + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 (-1)^i \beta_{ij} \rho_{ij}.$$

Só resta provar que os quinze elementos $\phi_i + \psi_i$ ($1 \leq i \leq 5$), ρ_{ij} ($1 \leq i < j \leq 5$) são linearmente independentes. Suponhamos que

$$\sum_{k=1}^5 \alpha_k (\phi_k + \psi_k) + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} \rho_{ij} = 0. \quad (3.8)$$

Isolando χ_{12} na equação (3.6) e substituindo em (3.8), obtemos

$$0 = \sum_{k=1}^5 \alpha_k(\phi_k + \psi_k) + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} \rho_{ij} =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^5 \alpha_k(\phi_k + \psi_k) - 2\beta_{12}\chi_{21} - (\beta_{12} + \beta_{13})\chi_{13} - (\beta_{12} - \beta_{13})\chi_{31} \\ & + (\beta_{12} - \beta_{14})\chi_{14} - (\beta_{12} + \beta_{14})\chi_{41} - (\beta_{12} + \beta_{15})\chi_{15} - (\beta_{12} - \beta_{15})\chi_{51} \\ & - (\beta_{12} - \beta_{23})\chi_{23} + (\beta_{12} + \beta_{23})\chi_{32} + (\beta_{12} + \beta_{24})\chi_{24} + (\beta_{12} - \beta_{24})\chi_{42} \\ & - (\beta_{12} - \beta_{25})\chi_{25} + (\beta_{12} + \beta_{25})\chi_{52} + (\beta_{12} - \beta_{34})\chi_{34} - (\beta_{12} + \beta_{34})\chi_{43} \\ & - (\beta_{12} + \beta_{35})\chi_{35} - (\beta_{12} - \beta_{35})\chi_{53} - (\beta_{12} - \beta_{45})\chi_{45} + (\beta_{12} + \beta_{45})\chi_{54}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1 temos que se $x_i = x_j$ para algum $i, j = 1, \dots, 5$, $i \neq j$, então $\chi_{rs} = 0$ ($\forall r, s \neq i, j$) e $\phi_k + \psi_k = 0$ ($\forall k \neq i, j$), e que se $x_k = 1$ para algum $k = 1, \dots, 5$ então $\chi_{rs} = 0$ ($\forall r, s \neq k$). Fazendo $x_1 = x_2$ na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_1 + \alpha_2)x_1 \circ s_4(x_1, x_3, x_4, x_5) - 2\beta_{12}\chi_{21} - (\beta_{12} + \beta_{13})\chi_{13} - (\beta_{12} - \beta_{13})\chi_{31} \\ &+ (\beta_{12} - \beta_{14})\chi_{14} - (\beta_{12} + \beta_{14})\chi_{41} - (\beta_{12} + \beta_{15})\chi_{15} - (\beta_{12} - \beta_{15})\chi_{51} \\ &- (\beta_{12} - \beta_{23})\chi_{23} + (\beta_{12} + \beta_{23})\chi_{32} + (\beta_{12} + \beta_{24})\chi_{24} + (\beta_{12} - \beta_{24})\chi_{42} \\ &- (\beta_{12} - \beta_{25})\chi_{25} + (\beta_{12} + \beta_{25})\chi_{52}. \end{aligned}$$

Substituindo x_3 por 1, temos

$$0 = -(\beta_{12} + \beta_{13})\chi_{13} - (\beta_{12} - \beta_{13})\chi_{31} - (\beta_{12} - \beta_{23})\chi_{23} + (\beta_{12} + \beta_{23})\chi_{32}.$$

Como $\chi_{13}, \chi_{31}, \chi_{23}$ e χ_{32} são linearmente independentes,

$$\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0.$$

Para $x_4 = 1$, temos

$$0 = -\beta_{14}\chi_{14} - \beta_{14}\chi_{41} + \beta_{24}\chi_{24} - \beta_{24}\chi_{42}.$$

Como $\chi_{14}, \chi_{41}, \chi_{24}$ e χ_{42} são linearmente independentes,

$$\beta_{14} = \beta_{24} = 0.$$

Finalmente, para $x_5 = 1$, temos

$$0 = -\beta_{15}\chi_{15} + \beta_{15}\chi_{51} + \beta_{25}\chi_{25} + \beta_{25}\chi_{52}$$

Novamente, como $\chi_{15}, \chi_{51}, \chi_{25}$ e χ_{52} são linearmente independentes, temos

$$\beta_{15} = \beta_{25} = 0.$$

Assim, a expressão (3.8) fica reduzida a

$$0 = \sum_{i=1}^5 \alpha_k(\phi_k + \psi_k) - \beta_{34}\chi_{34} - \beta_{34}\chi_{43} - \beta_{35}\chi_{35} + \beta_{35}\chi_{53} + \beta_{45}\chi_{45} + \beta_{45}\chi_{54}. \quad (3.9)$$

Fazendo $x_3 = x_4$ na expressão acima temos

$$0 = (\alpha_3 + \alpha_4)x_3 \circ s_4(x_1, x_2, x_3, x_5) - \beta_{34}\chi_{34} - \beta_{34}\chi_{43} - \beta_{35}\chi_{35} + \beta_{35}\chi_{53} + \beta_{45}\chi_{45} + \beta_{45}\chi_{54}.$$

Substituindo x_5 por 1, temos

$$0 = \beta_{35}\chi_{35} + \beta_{35}\chi_{53} + \beta_{45}\chi_{45} + \beta_{45}\chi_{54}$$

e portanto

$$\beta_{35} = \beta_{45} = 0.$$

Logo a expressão (3.9) fica reduzida a

$$0 = \sum_{i=1}^5 \alpha_k(\phi_k + \psi_k) - \beta_{34}\chi_{34} - \beta_{34}\chi_{43}.$$

Fazendo $x_1 = x_3$,

$$0 = (-\alpha_1 + \alpha_3)x_1 \circ s_4(x_1, x_2, x_4, x_5) - \beta_{34}\chi_{34} - \beta_{34}\chi_{43}.$$

Substituindo x_4 por 1, temos

$$-\beta_{34}\chi_{34} - \beta_{34}\chi_{43} = 0$$

e portanto $\beta_{34} = 0$. Então a expressão (3.8) se reduz a

$$0 = \sum_{k=1}^5 \alpha_k(\phi_k + \psi_k).$$

Substituindo x_1 por 1, temos $\alpha_1(\phi_1 + \psi_1) = 0$ ou, equivalentemente, $2\alpha_1 s_4(x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$.

Portanto $\alpha_1 = 0$. Fazendo o mesmo para todos os x_k ($k = 1, \dots, 5$) temos que todos os α_k

são nulos e o lema está provado. $\square$

Seja $g \in \text{Ass}[X]$. Como $\text{Ass}[X]$ é uma álgebra associativa, o operador

$$\begin{aligned} \text{ad}_g : \text{Ass}[X] &\longrightarrow \text{Ass}[X] \\ f &\longmapsto [f, g] \end{aligned}$$

é uma derivação. Vamos denotar por D_{x_1, x_2, x_3} o operador de $\text{Ass}[X]$ definido por

$$D_{x_1, x_2, x_3}(f) = S_3(f) + s_4(x_1, x_2, x_3, f).$$

Lema 3.2 *O operador D_{x_1, x_2, x_3} é uma derivação.*

Demonstração. Provaremos o lema, mostrando que

$$D_{x_1, x_2, x_3} = -2 \text{ad}_{s_3(x_1, x_2, x_3)}.$$

Denotemos por σ as permutações de P_3 , que permutam os índices ciclicamente. Usando a definição de S_3 , temos que para cada $f \in \text{Ass}[X]$

$$\begin{aligned} S_3(f) &= s_3(V_{x_1}, V_{x_2}, V_{x_3})(f) \\ &= [V_{x_1}, V_{x_2}]V_{x_3}(f) + [V_{x_2}, V_{x_3}]V_{x_1}(f) + [V_{x_3}, V_{x_1}]V_{x_2}(f) \\ &= \sum_{\sigma} [V_{x_{\sigma(1)}}, V_{x_{\sigma(2)}}]V_{x_{\sigma(3)}}(f). \end{aligned}$$

Agora, fixados i, j, k ,

$$\begin{aligned} [V_{x_i}, V_{x_j}]V_{x_k}(f) &= [V_{x_i}, V_{x_j}](f \circ x_k) \\ &= ((f \circ x_k) \circ x_j) \circ x_i - ((f \circ x_k) \circ x_i) \circ x_j \\ &= (f \circ x_k)x_jx_i + x_j(f \circ x_k)x_i + x_i(f \circ x_k)x_j + x_ix_j(f \circ x_k) \\ &\quad - (f \circ x_k)x_ix_j - x_i(f \circ x_k)x_j - x_j(f \circ x_k)x_i - x_jx_i(f \circ x_k) \\ &= (f \circ x_k)x_jx_i + x_ix_j(f \circ x_k) - (f \circ x_k)x_ix_j - x_jx_i(f \circ x_k) \\ &= (f \circ x_k)[x_j, x_i] - [x_j, x_i](f \circ x_k) \\ &= -fx_k[x_i, x_j] + [x_i, x_j]fx_k - x_kf[x_i, x_j] + [x_i, x_j]x_kf. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
S_3(f) &= \sum_{\sigma} \{-f x_{\sigma(3)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] + [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] f x_{\sigma(3)} \\
&\quad - x_{\sigma(3)} f[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] + [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] x_{\sigma(3)} f\} \\
&= -f(\sum_{\sigma} x_{\sigma(3)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]) + \sum_{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] f x_{\sigma(3)} \\
&\quad - \sum_{\sigma} x_{\sigma(3)} f[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] + (\sum_{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] x_{\sigma(3)}) f \\
&= -f s_3(x_1, x_2, x_3) + \sum_{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] f x_{\sigma(3)} \\
&\quad - \sum_{\sigma} x_{\sigma(3)} f[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] + s_3(x_1, x_2, x_3) f \\
&= [s_3(x_1, x_2, x_3), f] + \sum_{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] f x_{\sigma(3)} - \sum_{\sigma} x_{\sigma(3)} f[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}].
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
s_4(x_1, x_2, x_3, f) &= x_1 x_2 x_3 f - x_2 x_1 x_3 f + x_3 x_1 x_2 f - x_1 x_3 x_2 f + x_2 x_3 x_1 f - x_3 x_2 x_1 f \\
&\quad - f x_1 x_2 x_3 + f x_2 x_1 x_3 - f x_3 x_1 x_2 + f x_1 x_3 x_2 - f x_2 x_3 x_1 + f x_3 x_2 x_1 \\
&\quad - x_1 x_2 f x_3 + x_2 x_1 f x_3 - x_3 x_1 f x_2 + x_1 x_3 f x_2 - x_2 x_3 f x_1 + x_3 x_2 f x_1 \\
&\quad + x_1 f x_2 x_3 - x_2 f x_1 x_3 + x_3 f x_1 x_2 - x_1 f x_3 x_2 + x_2 f x_3 x_1 - x_3 f x_2 x_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
s_4(x_1, x_2, x_3, f) &= s_3(x_1, x_2, x_3) f - f s_3(x_1, x_2, x_3) - [x_1, x_2] f x_3 - [x_2, x_3] f x_1 \\
&\quad - [x_3, x_1] f x_2 + x_1 f[x_2, x_3] + x_2 f[x_3, x_1] + x_3 f[x_1, x_2] \\
&= [s_3(x_1, x_2, x_3), f] - \sum_{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] f x_{\sigma(3)} + \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} f[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}].
\end{aligned}$$

Mas $\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} f[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] = \sum_{\sigma} x_{\sigma(3)} f[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]$. Então

$$s_4(x_1, x_2, x_3, f) = [s_3(x_1, x_2, x_3), f] - \sum_{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] f x_{\sigma(3)} + \sum_{\sigma} x_{\sigma(3)} f[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
D_{x_1, x_2, x_3}(f) &= S_3(f) + s_4(x_1, x_2, x_3, f) \\
&= [s_3(x_1, x_2, x_3), f] + \sum_{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] f x_{\sigma(3)} - \sum_{\sigma} x_{\sigma(3)} f[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \\
&\quad + [s_3(x_1, x_2, x_3), f] - \sum_{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] f x_{\sigma(3)} + \sum_{\sigma} x_{\sigma(3)} f[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \\
&= 2[s_3(x_1, x_2, x_3), f] = -2ad_{s_3(x_1, x_2, x_3)}(f).
\end{aligned}$$

□

Denotemos por κ_{ij} os polinômios de Jordan definidos por

$$\kappa_{ij} = \kappa(x_i, x_j; x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5).$$

Estes polinômios provêm da equação (3.2).

Teorema 3.2 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

$$(i) \quad \kappa(x; x_1, x_2, x_3) = -s_4(x_1, x_2, x_3, x^2) + x \circ s_4(x_1, x_2, x_3, x);$$

$$(ii) \quad \kappa_{ij} = -\rho_{ij} - (-1)^j(\phi_i + \psi_i) + (-1)^i(\phi_j + \psi_j).$$

Além disso, se F é um corpo de característica 0 então $\phi_i + \psi_i$ ($1 \leq i \leq 5$) e κ_{ij} ($1 \leq i < j \leq 5$) formam uma base para $H(V_5, *) \cap I(F_2)$.

Demonstração. Pelo lema anterior, $D_{x_1, x_2, x_3} : \text{Ass}[X] \longrightarrow \text{Ass}[X]$ é uma derivação. Logo o operador $D_{x_1, x_2, x_3} : \text{Ass}[X]^+ \longrightarrow \text{Ass}[X]^+$ também é uma derivação e, portanto,

$$D_{x_1, x_2, x_3}(x \circ y) = D_{x_1, x_2, x_3}(x) \circ y + x \circ D_{x_1, x_2, x_3}(y)$$

ou, equivalentemente,

$$S_3(x \circ y) + s_4(x_1, x_2, x_3, x \circ y) = S_3(x) \circ y + s_4(x_1, x_2, x_3, x) \circ y + x \circ S_3(y) + x \circ s_4(x_1, x_2, x_3, y).$$

Fazendo $x = y$ na expressão acima, temos

$$S_3(x^2) + s_4(x_1, x_2, x_3, x^2) = S_3(x) \circ x + s_4(x_1, x_2, x_3, x) \circ x.$$

Portanto,

$$\kappa(x; x_1, x_2, x_3) = S_3(x^2) - S_3(x) \circ x = -s_4(x_1, x_2, x_3, x^2) + s_4(x_1, x_2, x_3, x) \circ x$$

e a primeira afirmação está demonstrada.

Para a demonstração da segunda afirmação, precisamos das seguintes propriedades do polinômio standard s_4 (veja Lema 2.1):

$$s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_j) = (-1)^{5-j} s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_j, \dots, x_5);$$

$$s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_i) = (-1)^{5-i-1} s_4(x_1, \dots, x_i, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5).$$

Linearizando (i) obtemos

$$\begin{aligned}\kappa_{ij} &= \kappa(x_i, x_j; x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5) \\ &= -s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_i \circ x_j) \\ &\quad + x_i \circ s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_j) \\ &\quad + x_j \circ s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_i).\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\kappa_{ij} &= -s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_i x_j) - s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_j x_i) \\ &\quad + x_i \circ s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_j) + x_j \circ s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5, x_i).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\kappa_{ij} &= -(-1)^{5-i-1} s_4(x_1, \dots, x_i x_j, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5) - (-1)^{5-j} s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_j x_i, \dots, x_5) \\ &\quad + x_i \circ (-1)^{5-j} s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_5) + x_j \circ (-1)^{5-i-1} s_4(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5) \\ &= -(-1)^i \chi_{ij} + (-1)^j \chi_{ji} + \\ &\quad -(-1)^j \underbrace{x_i \circ s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_5)}_{\phi_i + \psi_i} + (-1)^i \underbrace{x_j \circ s_4(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_5)}_{\phi_j + \psi_j}.\end{aligned}$$

Como $\rho_{ij} = (-1)^i \chi_{ij} - (-1)^j \chi_{ji}$, temos

$$\kappa_{ij} = -\rho_{ij} - (-1)^j(\phi_i + \psi_i) + (-1)^i(\phi_j + \psi_j).$$

Portanto,

$$\rho_{ij} = -\kappa_{ij} + (-1)^i(\phi_j + \psi_j) - (-1)^j(\phi_i + \psi_i).$$

Isto implica que ρ_{ij} é uma combinação linear de $\phi_i + \psi_i$, $\phi_j + \psi_j$ e κ_{ij} . Já sabíamos (pelo Lema 3.1) que $H(V_5, *) \cap I(F_2)$ é gerado pelos $\phi_i + \psi_i$ e ρ_{ij} . Com este resultado, temos que este espaço é gerado pelos $\phi_i + \psi_i$ e κ_{ij} . Vamos mostrar que estes elementos são linearmente independentes. Seja

$$\sum_{k=1}^5 \alpha_k(\phi_k + \psi_k) + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} \kappa_{ij} = 0.$$

Pela expressão (ii) temos

$$\sum_{k=1}^5 \alpha_k(\phi_k + \psi_k) - \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} \rho_{ij} - \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 [(-1)^j \beta_{ij}(\phi_i + \psi_i) - (-1)^i \beta_{ij}(\phi_j + \psi_j)] = 0.$$

Pelo Lema 3.1, $\{\phi_k + \psi_k, \rho_{ij} : 1 \leq k \leq 5, 1 \leq i < j \leq 5\}$ é um conjunto linearmente independente. Então $\beta_{ij} = 0$ ($1 \leq i < j \leq 5$) e $\alpha_k = 0$ ($1 \leq k \leq 5$). $\square$

3.3 Identidades minimais

Nesta seção vamos mostrar que o grau das identidades multilineares minimais de Jordan para as álgebras de Jordan de grau 2 é 5. Determinaremos também uma base para o espaço destas identidades.

Proposição 3.1 *Toda álgebra quadrática satisfaz $S_4(y) = 0$.*

Demonstração. Usando a equação (3.4) temos:

$$\begin{aligned} S_4(y) &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} V_{x_{\sigma(3)}} V_{x_{\sigma(4)}}(y) \\ &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} V_{x_{\sigma(3)}} \{t(x_{\sigma(4)})y + t(y)x_{\sigma(4)} - q(x_{\sigma(4)}, y) \cdot 1\} \\ &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} \{t(x_{\sigma(4)})y \circ x_{\sigma(3)} + t(y)x_{\sigma(4)} \circ x_{\sigma(3)} - 2q(x_{\sigma(4)}, y)x_{\sigma(3)}\}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} x_{\sigma(4)} \circ x_{\sigma(3)} = 0$,

$$\begin{aligned} S_4(y) &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} \{(t(x_{\sigma(4)})t(y) - 2q(x_{\sigma(4)}, y))x_{\sigma(3)} \\ &\quad + t(x_{\sigma(4)})\{t(x_{\sigma(3)})y - q(x_{\sigma(3)}, y) \cdot 1\}\}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} (t(x_{\sigma(4)})t(x_{\sigma(3)})y) = 0$,

$$\begin{aligned} S_4(y) &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} V_{x_{\sigma(2)}} \{(t(x_{\sigma(4)})t(y) - 2q(x_{\sigma(4)}, y))x_{\sigma(3)} \\ &\quad - t(x_{\sigma(4)})q(x_{\sigma(3)}, y) \cdot 1\} \\ &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} \{(t(x_{\sigma(4)})t(y) - 2q(x_{\sigma(4)}, y))x_{\sigma(3)} \circ x_{\sigma(2)} \\ &\quad - 2t(x_{\sigma(4)})q(x_{\sigma(3)}, y)x_{\sigma(2)}\}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma V_{x_{\sigma(1)}} (t(x_{\sigma(4)})t(y) - 2q(x_{\sigma(4)}, y))x_{\sigma(3)} \circ x_{\sigma(2)} = 0$,

$$S_4(y) = -2 \sum_{\sigma} (-1)^\sigma t(x_{\sigma(4)})q(x_{\sigma(3)}, y) x_{\sigma(1)} \circ x_{\sigma(2)} = 0. \quad \square$$

Lema 3.3 *Se o polinômio*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in P_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \quad (a_\sigma \in F, n \geq 2) \quad (3.10)$$

é um polinômio de Jordan então $\sum_{\sigma \in P_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma = 0$.

Demonstração. Seja $M_J[X]$ a álgebra (associativa) gerada pelos operadores lineares $V_g : F SJ[X] \longrightarrow F SJ[X]$, $g \in F SJ[X]$. McCrimmon [5] mostrou que $M_J[X]$ é gerado pelos operadores V_{x_i} , U_{x_i} , U_{x_i, x_j} , onde $x_i, x_j \in X$, $x_i \neq x_j$,

$$\begin{array}{ll} U_{x_i, x_j} : F SJ[X] \longrightarrow F SJ[X] & U_{x_i} : F SJ[X] \longrightarrow F SJ[X] \\ g \longmapsto x_i g x_j + x_j g x_i, & g \longmapsto x_i g x_i. \end{array}$$

Como f é um polinômio de Jordan multilinear temos $f = \sum_{k=1}^t g_k \circ h_k = \sum_{k=1}^t V_{g_k}(h_k)$ onde os g_k e h_k são polinômios de Jordan. O operador V_{g_k} é gerado pelos operadores V_{x_i} e U_{x_i, x_j} (os U_{x_i} não aparecem pois f é multilinear). Logo, V_{g_k} é uma combinação linear de operadores da forma $M_1 M_2 \dots M_s$ onde cada M_j é um V_{x_i} ou U_{x_i, x_j} . Portanto, como $M_1 M_2 \dots M_s(h_k) = M_1(h'_k)$, é suficiente provar o lema para os polinômios da forma:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= V_{x_p}[h(x_1, \dots, \widehat{x_p}, \dots, x_n)], \\ f(x_1, \dots, x_n) &= U_{x_q, x_p}[h'(x_1, \dots, \widehat{x_q}, \dots, \widehat{x_p}, \dots, x_n)], \end{aligned} \quad (*)$$

onde $h, h' \in F SJ[X]$. É claro que podemos supor

$$\begin{aligned} (I) \quad f(x_1, \dots, x_n) &= V_{x_n}[h(x_1, \dots, x_{n-1})], \\ (II) \quad f(x_1, \dots, x_n) &= U_{x_{n-1}, x_n}[h'(x_1, \dots, x_{n-2})], \end{aligned} \quad (**)$$

pois, a menos de uma reordenação dos índices, os polinômios em (*) e (**) são iguais.

Vamos provar por indução sobre n . Suponhamos que para cada $k < n$ a afirmação do lema seja verdadeira.

caso (I): Seja

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{\tau \in P_{n-1}} \beta_\tau x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n-1)}.$$

Comparando os coeficientes da equação

$$f(x_1, \dots, x_n) = V_{x_n}[h(x_1, \dots, x_{n-1})] = \sum_{\tau \in P_{n-1}} \beta_\tau x_n x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n-1)} + \beta_\tau x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n-1)} x_n$$

com os coeficientes da equação (3.10) temos que ou todos os coeficientes α_σ são nulos (e consequentemente $\sum_{\sigma \in P_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma = 0$) ou os únicos coeficientes não nulos são aqueles que correspondem às permutações σ tais que $\sigma(1) = n$ e $\sigma(n) = n$. Para $\sigma(1) = n$, existe um $\tau \in P_{n-1}$ tal que

$$x_n x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} = x_n x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n-1)}$$

e portanto $(-1)^\sigma = (-1)^{n-1}(-1)^\tau$. Para $\sigma(n) = n$, existe um $\tau \in P_{n-1}$ tal que

$$x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n-1)} x_n = x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n-1)} x_n.$$

Logo $(-1)^\sigma = (-1)^\tau$. Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma &= \sum_{\tau \in P_{n-1}} (-1)^\tau \beta_\tau + (-1)^{n-1} (-1)^\tau \beta_\tau = \sum_{\tau \in P_{n-1}} (-1)^\tau (\beta_\tau + (-1)^{n-1} \beta_\tau) \\ &= (1 + (-1)^{n-1}) \sum_{\tau \in P_{n-1}} (-1)^\tau \beta_\tau = 0 \end{aligned}$$

visto que, pela hipótese de indução, temos $\sum_{\tau \in P_{n-1}} (-1)^\tau \beta_\tau = 0$.

caso II: Seja

$$h'(x_1, \dots, x_{n-2}) = \sum_{\pi \in P_{n-2}} \beta_\pi x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n-2)}.$$

Pela hipótese de indução, $\sum_{\pi \in P_{n-2}} (-1)^\pi \beta_\pi = 0$. Novamente, comparando os coeficientes da equação

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= U_{x_{n-1}, x_n}[h'(x_1, \dots, x_{n-2})] \\ &= \sum_{\pi \in P_{n-2}} \beta_\pi x_{n-1} x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n-2)} x_n + \beta_\pi x_n x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n-2)} x_{n-1} \end{aligned}$$

com os coeficientes da equação (3.10) temos que ou todos os α_σ são nulos ou os únicos coeficientes não nulos correspondem às permutações σ tais que $\sigma(1) = n-1$, $\sigma(n) = n$ e $\sigma(1) = n$, $\sigma(n) = n-1$. Para a primeira permutação, temos

$$x_{n-1} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n-1)} x_n = x_{n-1} x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n-2)} x_n,$$

para algum $\pi \in P_{n-2}$, e portanto $(-1)^\sigma = (-1)^{n-2}(-1)^\pi$. Para a outra permutação,

$$x_n x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n-1)} x_{n-1} = x_n x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n-2)} x_{n-1}.$$

para algum $\pi \in P_{n-2}$, e portanto $(-1)^\sigma = (-1)^{n-1}(-1)^\pi$. Logo

$$\sum_{\sigma \in P_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma = \sum_{\pi \in P'_{n-2}} ((-1)^{n-2} + (-1)^{n-1})(-1)^\pi \beta_\pi = 0. \quad \square$$

Corolário 3.1 Se $\sum_{\sigma} (-1)^\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$ é um polinômio de Jordan então $\sum_{\sigma} \alpha_\sigma = 0$. $\square$

Corolário 3.2 O polinômio standard s_n não é um polinômio de Jordan se $n! \neq 0$ em F . $\square$

Teorema 3.3 Seja F um corpo de característica 0. Então uma base para o espaço $JV_5 \cap I(F_2)$ (das identidades multilineares de Jordan de grau 5 da álgebra de matrizes F_2) é formada pelos polinômios κ_{ij} onde $1 \leq i < j \leq 5$.

Demonstração. Seja $f \in I(F_2) \cap JV_5$. Lembrando que $I(F_2) \cap JV_5 \subset I(F_2) \cap H(V_5, *)$ (Teorema 1.5) e usando o Teorema 3.2 podemos escrever

$$f = \sum_{k=1}^5 \alpha_k (\phi_k + \psi_k) + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} \kappa_{ij}.$$

Consideremos $g = f - \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} \kappa_{ij}$. Então

$$g = \sum_{k=1}^5 \alpha_k (\phi_k + \psi_k).$$

Suponhamos $\alpha_i \neq 0$ para algum i . Como os κ_{ij} e f são polinômios de Jordan, g também é um polinômio de Jordan. Lembrando que $\phi_i + \psi_i = x_i$ o $s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_5)$, temos que

$$g(x_1, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, x_5) = 2\alpha_i s_4(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_5)$$

é um polinômio de Jordan, o que contradiz o Corolário 3.2. Logo $\alpha_k = 0$ para todo k e

$$f = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1, i < j}^5 \beta_{ij} \kappa_{ij}.$$

Portanto $JV_5 \cap I(F_2)$ é gerado pelos polinômios κ_{ij} . Visto que os κ_{ij} são linearmente independentes, temos o resultado desejado. $\square$

Seja f uma identidade multilinear de Jordan de F_2^+ . Então f é identidade multilinear de F_2 . Portanto, pelos Teoremas 2.1 e 2.2, o grau de f é no mínimo 4. Se grau de f é 4, pelo Teorema 2.3, f é um múltiplo escalar de s_4 . Mas isto contradiz o Corolário 3.2, pois f é de Jordan. Como F_2 é uma álgebra quadrática (seção 1.4) temos que F_2^+ também é uma álgebra quadrática. Então pela Proposição 3.1 temos que F_2^+ satisfaz o polinômio $S_4(x_5)$, de grau 5. Concluimos assim que o grau de uma identidade multilinear de Jordan minimal para F_2^+ é 5.

Consideremos agora um polinômio g que é identidade multilinear de Jordan para todas as álgebras de Jordan de grau 2. Então g é uma identidade para F_2^+ pois F_2^+ é uma álgebra de Jordan de grau 2 (seção 1.5). Pelos comentários anteriores, o grau de g é ≥ 5 . Por outro lado, como toda álgebra de Jordan de grau 2 é uma álgebra quadrática, segue do Teorema 3.1 que κ é uma identidade de grau 5 para todas as álgebras de Jordan de grau 2. Portanto, o grau das identidades minimais para estas álgebras é 5.

Denotemos por I o espaço dos polinômios multilineares de Jordan de grau 5 que são identidades para as álgebras de Jordan de grau 2.

Corolário 3.3 *Se F é um corpo de característica 0 então uma base para I é formada pelos polinômios κ_{ij} , onde $1 \leq i < j \leq 5$.*

Demonstração. Como os κ_{ij} são linearizações do polinômio κ segue que os κ_{ij} são elementos de I . Seja $f \in I$. Então f é uma identidade multilinear de Jordan de grau 5 para F_2^+ , logo $f \in I(F_2) \cap JV_5$. Pelo Teorema 3.3, f é combinação linear dos κ_{ij} . Logo I é ge-

rado por $\{\kappa_{ij}\}$. Como $\{\kappa_{ij}\}$ é linearmente independente, temos que $\{\kappa_{ij}\}$ é uma base de I . $\square$

Proposição 3.2 *Se $\text{car}(F) \neq 2$ então o polinômio standard de Smith $S_4(x_5)$ é dado por*

$$S_4(x_5) = -\frac{1}{2}(\kappa_{15} - \kappa_{25} + \kappa_{35} - \kappa_{45}).$$

Demonstração. Por um argumento análogo ao da prova do Lema 2.1 (iv) temos

$$s_4(x_1, \dots, x_4) = \sum_{k=1}^4 (-1)^k s_3(x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_4) x_k.$$

Esta propriedade também é válida para o operador S_4 , trocando-se x_i por V_{x_i} . Para simplificar, denotemos por V_i o operador V_{x_i} . Então

$$\begin{aligned} S_4(x_5) &= s_4(V_1, V_2, V_3, V_4)(x_5) \\ &= \sum_{k=1}^4 (-1)^k s_3(V_1, \dots, \widehat{V_k}, \dots, V_4) V_k(x_5) \\ &= -s_3(V_2, V_3, V_4)(x_1 \circ x_5) + s_3(V_1, V_3, V_4)(x_2 \circ x_5) \\ &\quad - s_3(V_1, V_2, V_4)(x_3 \circ x_5) + s_3(V_1, V_2, V_3)(x_4 \circ x_5). \end{aligned}$$

Agora, pela equação (3.2),

$$\kappa_{ij} = S_3(x_i \circ x_j) - S_3(x_i) \circ x_j - S_3(x_j) \circ x_i.$$

Então

$$-\kappa_{15} + \kappa_{25} - \kappa_{35} + \kappa_{45} =$$

$$\begin{aligned} &-s_3(V_2, V_3, V_4)(x_1 \circ x_5) + s_3(V_2, V_3, V_4)(x_1) \circ x_5 + s_3(V_2, V_3, V_4)(x_5) \circ x_1 \\ &+ s_3(V_1, V_3, V_4)(x_2 \circ x_5) - s_3(V_1, V_3, V_4)(x_2) \circ x_5 - s_3(V_1, V_3, V_4)(x_5) \circ x_2 \\ &- s_3(V_1, V_2, V_4)(x_3 \circ x_5) + s_3(V_1, V_2, V_4)(x_3) \circ x_5 + s_3(V_1, V_2, V_4)(x_5) \circ x_3 \\ &+ s_3(V_1, V_2, V_3)(x_4 \circ x_5) - s_3(V_1, V_2, V_3)(x_4) \circ x_5 - s_3(V_1, V_2, V_3)(x_5) \circ x_4. \end{aligned}$$

Notemos que a soma dos elementos da primeira coluna do segundo termo na expressão acima é $S_4(V_1, V_2, V_3, V_4)(x_5)$. Logo,

$$\begin{aligned} -\kappa_{15} + \kappa_{25} - \kappa_{35} + \kappa_{45} = & S_4(V_1, V_2, V_3, V_4)(x_5) \\ & + s_3(V_2, V_3, V_4)(x_1) \circ x_5 - s_3(V_1, V_3, V_4)(x_2) \circ x_5 \\ & + s_3(V_1, V_2, V_4)(x_3) \circ x_5 - s_3(V_1, V_2, V_3)(x_4) \circ x_5 \\ & + V_1 s_3(V_2, V_3, V_4)(x_5) - V_2 s_3(V_1, V_3, V_4)(x_5) \\ & + V_3 s_3(V_1, V_2, V_4)(x_5) - V_4 s_3(V_1, V_2, V_3)(x_5). \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 2.1 (iv),

$$s_4(V_1, V_2, V_3, V_4) = V_1 s_3(V_2, V_3, V_4) - V_2 s_3(V_1, V_3, V_4) + V_3 s_3(V_1, V_2, V_4) - V_4 s_3(V_1, V_2, V_3).$$

Então

$$\begin{aligned} -\kappa_{15} + \kappa_{25} - \kappa_{35} + \kappa_{45} = & 2 S_4(V_1, V_2, V_3, V_4)(x_5) \\ & + s_3(V_2, V_3, V_4)(x_1) \circ x_5 - s_3(V_3, V_4, V_1)(x_2) \circ x_5 \\ & + s_3(V_4, V_1, V_2)(x_3) \circ x_5 - s_3(V_1, V_2, V_3)(x_4) \circ x_5. \end{aligned}$$

Usando o fato de que $V_i(x_j) = V_j(x_i)$, temos que

$$s_3(V_2, V_3, V_4)(x_1) - s_3(V_3, V_4, V_1)(x_2) + s_3(V_4, V_1, V_2)(x_3) - s_3(V_1, V_2, V_3)(x_4) = 0.$$

Logo, $-\kappa_{15} + \kappa_{25} - \kappa_{35} + \kappa_{45} = 2s_4(V_1, V_2, V_3, V_4)(x_5)$. E a proposição fica demonstrada. $\square$

3.4 O polinômio λ

Mostraremos nesta seção que os κ_{ij} geram apenas as identidades de grau 5 para as álgebras de Jordan de grau 2. Mais precisamente, vamos mostrar que existe uma identidade de grau 6 que não é consequência de κ .

Seja Ω o espaço dos elementos de grau 3 em x , 2 em y e 1 em z de $FSJ[X]$ formado por todas as identidades de grau 6 que são consequências de $\kappa(x; x_1, x_2, x_3)$. Então

Lema 3.4 *O espaço Ω é gerado (como espaço vetorial) por*

$$\begin{aligned}\mu_1 &= x \circ s_4(x, y, z, x \circ y), & \mu_2 &= y \circ s_4(x, y, z, x^2), & \mu_3 &= s_4(x, y, z, x^2 \circ y), \\ \mu_4 &= s_4(x^2, y, z, x \circ y), & \mu_5 &= s_4(x, y, x \circ y, x \circ z), & \mu_6 &= s_4(x, x^2, y, y \circ z), \\ \mu_7 &= s_4(x, x^2, y^2, z), & \mu_8 &= s_4(x, y, z, xyx).\end{aligned}$$

Demonstração. Linearizando a expressão (i) do Teorema 3.2. temos que

$$\kappa(x, y; x_1, x_2, x_3) = -s_4(x_1, x_2, x_3, x \circ y) + x \circ s_4(x_1, x_2, x_3, y) + y \circ s_4(x_1, x_2, x_3, x)$$

é simétrica em x, y e alternada em x_1, x_2, x_3 . Logo Ω é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos:

$$\begin{aligned}\kappa(x, y; x, y, z) \circ x, & \quad \kappa(x; x, y, z) \circ y, & \quad \kappa(x, x \circ y; x, y, z), \\ \kappa(x, y; x^2, y, z), & \quad \kappa(x, y; x, x \circ y, z), & \quad \kappa(x, y; x, y, x \circ z), \\ \kappa(x, z; x, y, x \circ y), & \quad \kappa(y, z; x, x^2, y), & \quad \kappa(x; x \circ y, y, z), \\ \kappa(x; x, y^2, z), & \quad \kappa(x; x, y, y \circ z), & \quad \kappa(y; x, x^2, z), \\ & \quad \kappa(x^2, y; x, y, z).\end{aligned}$$

Mas s_4 é alternada. Então

$$\begin{aligned}\kappa(x, y; x, y, z) \circ x &= -s_4(x, y, z, x \circ y) \circ x + (x \circ s_4(x, y, z, y)) \circ x + (y \circ s_4(x, y, z, x)) \circ x \\ &= -s_4(x, y, z, x \circ y) \circ x = -\mu_1.\end{aligned}$$

Pela mesma razão,

$$\begin{aligned}
\kappa(x; x, y, z) \circ y &= -y \circ s_4(x, y, z, x^2) = -\mu_2, \\
\kappa(x^2, y; x, y, z) &= -s_4(x, y, z, x^2 \circ y) + y \circ s_4(x, y, z, x^2) = -\mu_3 + \mu_2, \\
\kappa(x, y; x^2, y, z) &= -s_4(x^2, y, z, x \circ y) + y \circ s_4(x^2, y, z, x) = -\mu_4 - \mu_2, \\
\kappa(x, y; x, x \circ y, z) &= x \circ s_4(x, x \circ y, z, y) = -\mu_1, \\
\kappa(x, y; x, y, x \circ z) &= -s_4(x, y, x \circ z, x \circ y) = \mu_5, \\
\kappa(x, z; x, y, x \circ y) &= -s_4(x, y, x \circ y, x \circ z) + x \circ s_4(x, y, x \circ y, z) = -\mu_5 - \mu_1, \\
\kappa(y, z; x, x^2, y) &= -s_4(x, x^2, y, y \circ z) + y \circ s_4(x, x^2, y, z) = -\mu_6 + \mu_2, \\
\kappa(x; x \circ y, y, z) &= -s_4(x \circ y, y, z, x^2) + x \circ s_4(x \circ y, y, z, x) = \mu_4 - \mu_1, \\
\kappa(x; x, y^2, z) &= -s_4(x, y^2, z, x^2) = -\mu_7, \\
\kappa(x; x, y, y \circ z) &= -s_4(x, y, y \circ z, x^2) = -\mu_6, \\
\kappa(y; x, x^2, z) &= -s_4(x, x^2, z, y^2) + y \circ s_4(x, x^2, z, y) = \mu_7 - \mu_2, \\
\kappa(x, x \circ y; x, y, z) &= -s_4(x, y, z, x \circ (x \circ y)) + x \circ s_4(x, y, z, x \circ y).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\frac{1}{2}(x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y) = xyx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\kappa(x, x \circ y; x, y, z) &= -2s_4(x, y, z, xyx) - s_4(x, y, z, x^2 \circ y) + x \circ s_4(x, y, z, x \circ y) \\
&= -2\mu_8 - \mu_3 + \mu_1. \quad \square
\end{aligned}$$

Consideremos o polinômio

$$\lambda(x, y, z) = [[x, y]^2, [x, z]]. \quad (3.11)$$

Teorema 3.4 *Sejam A uma álgebra quadrática simétrica sobre F . Então*

- (i) *O polinômio $\lambda(x, y, z)$ é de Jordan.*
- (ii) *λ é uma identidade para A .*
- (iii) *$\lambda(x, y, z)$ não é consequência de $\kappa(x; x_1, x_2, x_3)$.*

Demonstração. Seja $P(x, y) = [x, y]^2$. Como A é quadrática simétrica $l([a, b]) = 0$ e então $P(a, b) = [a, b]^2 \in F$, para todo $a, b \in A$. Portanto, para quaisquer elementos $a, b, c \in A$

$$\lambda(a, b, c) = [P(a, b), [a, c]] = 0,$$

o que prova que $\lambda(x, y, z)$ é uma identidade. Desenvolvendo $P(x, y)$, temos

$$P(x, y) = yxyx + xyxy - yx^2y - xy^2x.$$

Isto é, $P(x, y)$ é simétrico. Pelo Teorema de Cohn (Teorema 1.5), $P(x, y) \in FSJ[X]$. Como

$$\begin{aligned} [P(x, y), [x, z]] &= P(x, y)xz + zxP(x, y) - P(x, y)zx - xzP(x, y) \\ &= (P(x, y) \circ x) \circ z - (P(x, y) \circ z) \circ x, \end{aligned}$$

temos que $\lambda(x, y, z) \in FSJ[X]$.

Suponhamos, por absurdo, que λ seja um elemento de Ω . Então pelo Lema 3.4,

$$\lambda(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 \alpha_i \mu_i \quad (\alpha_i \in F). \quad (3.12)$$

Comparando os coeficientes dos monômios x^2y^2xz , xy^2x^2z , x^3y^2z e y^2x^3z das equações (3.11) e (3.12), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_7 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_7 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0. \end{cases}$$

Mas este sistema é equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_7 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_4 - \alpha_7 = 0 \\ 0 = -1. \end{cases}$$

que é um sistema impossível. Logo $\lambda(x, y, z)$ não é um elemento de Ω . □

Como toda álgebra de Jordan de grau 2 é uma álgebra quadrática simétrica temos

Corolário 3.4 *O polinômio $\lambda(x, y, z)$ é um polinômio de Jordan que é uma identidade para todas as álgebras de Jordan de grau 2.* □

3.5 Identidades para álgebras de grau 3

Nesta seção, mostraremos que o grau das álgebras não determina as identidades minimais. Mais precisamente, mostraremos que existe um polinômio que é uma identidade para $H(F_3)$ (respectivamente, $H(F_2)$), o espaço das matrizes simétricas de F_3 (resp. F_2), mas não para F_3^+ (respectivamente, F_2^+). Determinaremos também uma identidade de grau 9 para todas as álgebras de Jordan de grau 3.

Teorema 3.5 *Se F é um corpo de característica $\neq 2$ então $I(H(F_2)) \neq I(F_2^+) \cap JV_5$.*

Demonstração. Seja

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in P_3} \sum_{\tau \in P_2} (-1)^{\sigma+\tau} \{ (((x_{\sigma(1)} \circ x_{\tau(1)}) \circ x_{\tau(2)}) \circ x_{\sigma(2)}) \circ x_{\sigma(3)} \\ - (((x_{\sigma(1)} \circ x_{\tau(1)}) \circ x_{\tau(2)}) \circ x_{\sigma(3)}) \circ x_{\sigma(2)} \}.$$

Isto é,

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2\{ (((x_1 \circ x_2) \circ x_1) \circ x_3) \circ x_2 - (((x_1 \circ x_2) \circ x_1) \circ x_2) \circ x_3 \\ - (((x_1 \circ x_1) \circ x_2) \circ x_3) \circ x_2 + (((x_1 \circ x_1) \circ x_2) \circ x_2) \circ x_3 \\ - (((x_2 \circ x_2) \circ x_1) \circ x_3) \circ x_1 + (((x_2 \circ x_2) \circ x_1) \circ x_1) \circ x_3 \\ + (((x_2 \circ x_1) \circ x_2) \circ x_3) \circ x_1 - (((x_2 \circ x_1) \circ x_2) \circ x_1) \circ x_3 \\ + (((x_3 \circ x_2) \circ x_1) \circ x_2) \circ x_1 - (((x_3 \circ x_2) \circ x_1) \circ x_1) \circ x_2 \\ - (((x_3 \circ x_1) \circ x_2) \circ x_2) \circ x_1 + (((x_3 \circ x_1) \circ x_2) \circ x_1) \circ x_2 \}.$$

Tomemos as bases $\{e = e_{11} + e_{22}; a = -e_{11} + e_{22}; b = e_{12} + e_{21}\}$ de $H(F_2)$ e $\{e; a; b; c = -e_{12} + e_{21}\}$ de F_2^+ . Então

$$e \circ e = a \circ a = b \circ b = -c \circ c = 2e;$$

$$a \circ b = b \circ c = a \circ c = 0.$$

Assim, $g(a, b, c)$ fica reduzido a

$$2\{ (((a \circ a) \circ b) \circ b) \circ c + (((b \circ b) \circ a) \circ a) \circ c \} = 2\{ 2((e \circ b) \circ b) \circ c + 2((e \circ a) \circ a) \circ c \} =$$

$$2\{4(b \circ b) \circ c + 4(a \circ a) \circ c\} = 2\{8e \circ c + 8e \circ c\} = 32e \circ c = 64c \neq 0.$$

Logo, $g(x_1, x_2, x_3)$ não é identidade para F_2^+ .

É fácil ver que o polinômio $g(x_1, x_2, x_3)$ se anula quando substituímos as três variáveis por um mesmo elemento. O mesmo ocorre quando substituímos um elemento em duas das variáveis. E ainda, $g(x_1, x_2, x_3)$ é simétrico em x_1 e x_2 . Logo, para concluir que g é uma identidade para $H(F_2)$ é suficiente observar que

$$g(e, a, b) = g(e, b, a) = g(b, a, e) = 0.$$

□

Consideremos a função

$$P(n+1, k) = P(n, k-1) + (-1)^n P(n, k) \quad (\forall n > 0),$$

satisfazendo $P(0, 0) = 1$; $P(0, k) = 0$ ($\forall k \neq 0$) e $P(n, k) = 0$ ($\forall k < 0$). Smith [9] definiu os polinômios

$$S_{n,k}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)} x_{n+1} x_{\sigma(k+1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

e mostrou que

$$S_n(x_{n+1}) = \sum_{k=0}^n P(n, k) S_{n,k}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}).$$

Em particular, para $n = 6$ temos

$$S_6(x_7) = -S_{6,0}(x_1, \dots, x_6; x_7) + 3S_{6,2}(x_1, \dots, x_6; x_7) - 3S_{6,4}(x_1, \dots, x_6; x_7) + S_{6,6}(x_1, \dots, x_6; x_7). \quad (3.13)$$

Como

$$S_{6,0}(x_1, \dots, x_6; x_7) = \sum_{\sigma \in P_6} (-1)^\sigma x_7 x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(6)} = x_7 s_6(x_1, \dots, x_6),$$

$$S_{6,6}(x_1, \dots, x_6; x_7) = \sum_{\sigma \in P_6} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(6)} x_7 = s_6(x_1, \dots, x_6) x_7,$$

segue do Teorema de Amitsur-Levitzki (Teorema 2.2) que $S_{6,0}$ e $S_{6,6}$ são identidades para F_3 .

Enunciaremos, sem demonstrar, um resultado de Leron ([7], Teorema 26).

Teorema 3.6 O polinômio $\sum_{k=0}^n S_{2n,2k}$ é uma identidade para F_n .

□

Em particular para $n = 3$, temos que

$$S_{6,0} + S_{6,2} + S_{6,4} + S_{6,6}$$

é uma identidade para F_3 . Logo, $S_{6,2} + S_{6,4}$ é uma identidade para F_3 . E ainda, pela equação (3.13),

$$S_6(x_7) = -S_{6,0} - 3(S_{6,2} + S_{6,4}) + 6S_{6,2} + S_{6,6}.$$

Logo, se $\text{car } F \neq 2, 3$, $S_6(x_7)$ é uma identidade para F_3 (respectivamente $H(F_3)$) se e somente se $S_{6,2}$ é identidade para F_3 (respectivamente $H(F_3)$).

Teorema 3.7 Se F é um corpo de característica $\neq 2, 3$, $I(F_3^+) \cap JV_7 \neq I(H(F_3))$.

Demonstração. Mostraremos primeiro que $S_6(x_7)$ é uma identidade para $H(F_3)$. Pelas considerações acima, basta mostrar que $S_{6,2}(x_1, \dots, x_6; x_7)$ é uma identidade para $H(F_3)$. Consideremos as substituições

$$\begin{aligned} x_1 &= e_{11}, \\ x_2 &= e_{12} + e_{21}, \\ x_3 &= e_{22}, \\ x_4 &= e_{23} + e_{32}, \\ x_5 &= e_{33}, \\ x_6 &= e_{13} + e_{31}. \end{aligned}$$

x_7	monômios	resultados
e_{11}	$x_5x_6x_7x_1x_2x_3x_4$	e_{33}
	$-x_6x_1x_7x_2x_3x_4x_5$	$-e_{33}$
	$-x_2x_1x_7x_6x_5x_4x_3$	$-e_{22}$
	$x_3x_2x_7x_1x_6x_5x_4$	e_{22}
$e_{12} + e_{21}$	$x_1x_2x_7x_6x_5x_4x_3$	e_{12}
	$-x_2x_3x_7x_1x_6x_5x_4$	$-e_{12}$
	$x_3x_2x_7x_4x_5x_6x_1$	e_{21}
	$-x_2x_1x_7x_3x_4x_5x_6$	$-e_{21}$
e_{22}	$x_1x_2x_7x_3x_4x_5x_6$	e_{11}
	$-x_2x_3x_7x_4x_5x_6x_1$	$-e_{11}$
	$x_5x_4x_7x_3x_2x_1x_6$	e_{33}
	$-x_4x_3x_7x_2x_1x_6x_5$	$-e_{33}$
$e_{23} + e_{32}$	$x_3x_4x_7x_2x_1x_6x_5$	e_{23}
	$-x_4x_5x_7x_3x_2x_1x_6$	$-e_{23}$
	$x_5x_4x_7x_6x_1x_2x_3$	e_{32}
	$-x_4x_3x_7x_5x_6x_1x_2$	$-e_{32}$
e_{33}	$x_3x_4x_7x_5x_6x_1x_2$	e_{22}
	$-x_4x_5x_7x_6x_1x_2x_3$	$-e_{22}$
	$x_1x_6x_7x_5x_4x_3x_2$	e_{11}
	$-x_6x_5x_7x_4x_3x_2x_1$	$-e_{11}$
$e_{13} + e_{31}$	$x_5x_6x_7x_4x_3x_2x_1$	e_{31}
	$-x_6x_1x_7x_5x_4x_3x_2$	$-e_{31}$
	$x_1x_6x_7x_2x_3x_4x_5$	e_{13}
	$-x_6x_5x_7x_1x_2x_3x_4$	$-e_{13}$

Temos acima uma tabela que ilustra o que ocorre com estas substituições. A primeira coluna refere-se ao valor da substituição para x_7 ; a segunda coluna fornece os únicos monômios de $S_{6,2}(x_1, \dots, x_6; x_7)$ que não se anulam sob esta substituição e na terceira coluna estão listados os respectivos resultados destes monômios. Observemos que para cada substituição

o polinômio $S_{6,2}(x_1, \dots, x_6; x_7)$ se anula e que os elementos substituídos formam uma base de $H(F_3)$. Como $S_{6,2}$ é alternada e multilinear em $x_1, \dots, x_6$, bastam estas substituições para concluirmos que este polinômio (e portanto $S_6(x_7)$) é uma identidade para $H(F_3)$.

Consideremos agora $S_{6,2}(e_{11}, e_{12}, e_{23}, e_{33}, e_{32}, e_{21}; e_{22})$. Os únicos monômios que não se anulam sob esta substituição são $x_1x_2x_7x_3x_4x_5x_6$ e $x_4x_5x_7x_6x_1x_2x_3$ que resultam em, respectivamente, e_{11} e e_{33} . Então

$$S_{6,2}(e_{11}, e_{12}, e_{23}, e_{33}, e_{32}, e_{21}; e_{22}) = e_{11} + e_{33} \neq 0.$$

Logo $S_{6,2}$ e, portanto, $S_6(x_7)$ não é uma identidade para F_3 . Portanto, $S_6(x_7)$ não é uma identidade para F_3^+ . $\square$

Consideremos

$$f_n(x, y) = s_n([x, y], [x^2, y], \dots, [x^n, y]). \quad (3.14)$$

Como

$$s_n(y_1, \dots, y_n)^* = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_n(y_1^*, \dots, y_n^*)$$

para quaisquer palavras y_i e $[x^i, y]^* = -[x^i, y]$ para todo $i = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} f_n(x, y)^* &= s_n([x, y], \dots, [x^n, y])^* = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_n([x, y]^*, \dots, [x^n, y]^*) \\ &= (-1)^{n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_n([x, y], \dots, [x^n, y]) = (-1)^{n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} f_n(x, y). \end{aligned}$$

Se $n = 0 \pmod{4}$ ou $n = 3 \pmod{4}$ então $(-1)^{n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 1$ e, neste caso, $f_n(x, y)$ é simétrico. Isto é, $f_n(x, y) \in H(\text{Ass}[x, y], *)$. Mas, pelo Teorema de Cohn (Teorema 1.5), $H(\text{Ass}[x, y], *) = FSJ[x, y]$. Então se $n = 0, 3 \pmod{4}$, $f_n(x, y)$ é um polinômio de Jordan.

Seja J uma álgebra de Jordan de grau $n = 0, 3 \pmod{4}$. Vamos mostrar que $f_n(x, y)$ é uma identidade para J , isto é, vamos mostrar que $f_n(a, b) = 0$ para todo $a, b \in J$. Para isto, basta provar que $f_n(x, y)$ é uma identidade para a subálgebra de J gerada por $a, b \in J$. Como a álgebra de Jordan $J[x, y]$ gerada por dois elementos é especial (Teorema 1.6), $J[x, y] \cong FSJ[x, y]$. Portanto, basta provar que $f_n(x, y)$ é uma identidade para $FSJ[x, y]$.

Como

$$f^i = [x^i, y] = x^i \circ y - y \circ x^i = 0 \quad (\forall i),$$

f^i é uma identidade em $FSJ[x, y]$. Logo, $f_n = s_n(f^1, \dots, f^n)$ é uma identidade para $FSJ[x, y]$. Portanto, f_n é uma identidade para J .

Em particular, $f_3(x, y)$ é uma identidade de grau 9 para todas as álgebras de Jordan de grau 3.

Capítulo 4

Identidades minimais para as álgebras de Cayley-Dickson

Neste capítulo, mostraremos que o menor grau das identidades para as álgebras de Cayley-Dickson sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 ou 5 que não sejam consequência das leis alternativas é 5. Mostraremos que tais identidades são todas consequências dos polinômios $\kappa(x; x_1, x_2, x_3)$ e $\zeta(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Uma álgebra de Cayley-Dickson C sobre um corpo F de característica diferente de 2 é uma álgebra quadrática simétrica, conforme Proposição 1.9. Portanto, satisfaz

$$\zeta(x_1, x_2, \dots, x_5) = [[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5]$$

e

$$\kappa(x; x_1, x_2, x_3) = S_3(x^2) - S_3(x) \circ x$$

pela Proposição 1.4 e pelo Teorema 3.1.

Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ uma identidade para uma F -álgebra A de grau k_i em x_i . Seja k o grau de f . Temos que $k_i \leq k$. Suponhamos que F possua mais do que $k+1$ elementos. Tomemos os elementos $\alpha_{2j} = -j$, $\alpha_{2j+1} = j+1$ ($j = 0, \dots, [\frac{k}{2}]$). Isto é, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$,

$\alpha_3 = 2, \alpha_4 = -2, \dots$. Seja d o determinante da matriz de Vandermonde $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1})$. Para estes valores de α_i , $d = \prod_{i=1}^k i! = 1! 2! \dots k!$. Por exemplo, para $k = 4$, $d = 2^5 3^2$ e para $k = 5$ temos $d = 2^8 3^3 5$. Nestes casos, se $\text{car } F \neq 2, 3, 5$, $d \cdot a = 0$ implica $a = 0$ ($\forall a \in A$) e pelo Teorema 1.2 todas as componentes homogêneas de f são identidades. Como vamos tratar apenas de identidade de graus 4 e 5, excluindo os corpos de características 2, 3 e 5, podemos nos restringir aos polinômios homogêneos.

Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio homogêneo. Reordenando as variáveis se necessário, dizemos que f é do tipo $[k_1, \dots, k_n]$ com $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ se o grau de x_i é k_i em todos os monômios de f . Chamaremos de partição $[k_1, \dots, k_n]$ o conjunto de todos os polinômios daquele tipo. Sejam $f(x_1, \dots, x_n)$ e $g(x_1, \dots, x_m)$ dois polinômios do tipo $[k_1, \dots, k_n]$ e $[k'_1, \dots, k'_m]$, respectivamente, onde $k_1 + \dots + k_n = r$ e $k'_1 + \dots + k'_m = s$. Dizemos que f é de classificação mais baixa que g ou que $[k_1, \dots, k_n] < [k'_1, \dots, k'_m]$ se

$$(i) \ r < s \text{ ou}$$

$$(ii) \ r = s \text{ e } k_j > k'_j \text{ para o primeiro } j \text{ tal que } k_j \neq k'_j.$$

Por exemplo, $[3] < [4] < [3, 1] < [2, 2] < [2, 1, 1]$.

Seja $f(\dots, y, z, \dots)$ uma identidade homogênea do tipo $[k_1, \dots, k_n]$ não alternada nas variáveis lineares y e z , isto é, tal que

$$f(\dots, y, z, \dots) + f(\dots, z, y, \dots) \neq 0.$$

Fazendo $y = z$ na expressão acima, temos que $2f(\dots, y, y, \dots)$ é uma identidade não identicamente nula com uma variável a menos. Suponhamos que já são conhecidos os resultados sobre identidades de classificação mais baixa e sobre identidades do tipo $[k_1, \dots, k_n]$ alternadas nas variáveis lineares. Linearizando $f(\dots, y, y, \dots)$ obtemos

$$f(\dots, y, z, \dots) + f(\dots, z, y, \dots).$$

Por outro lado,

$$f(\dots, y, z, \dots) - f(\dots, z, y, \dots)$$

é identidade do tipo $[k_1, \dots, k_n]$ alternada nas variáveis y e z . Somando estas duas identidades obtemos a identidade

$$2f(\dots, y, z, \dots).$$

Portanto, é suficiente provar o que queremos para as identidades alternadas nas variáveis lineares.

4.1 Inexistência das identidades de grau 4

Denotemos por

$$\langle (x, y, z) \rangle$$

o ideal $\mathfrak{I}(F[X])$, onde $\mathfrak{I} = \{(x, y, z)\}$, e por

$$\langle (x, x, y), (x, y, y) \rangle$$

o ideal $\mathfrak{I}(F[X])$, onde $\mathfrak{I} = \{(x, x, y), (x, y, y)\}$. Então $Ass[X] = F[X] / \langle (x, y, z) \rangle$ e $Alt[X] = F[X] / \langle (x, x, y), (x, y, y) \rangle$ (veja o Teorema 1.1).

Denotemos por ν a função natural de $F[X]$ para $Alt[X]$ e por ϕ a função de $F[X]$ e $Alt[X]$ para $Ass[X]$ obtidas esquecendo-se os parênteses.

Como C é uma álgebra alternativa, C satisfaz as leis alternativas

$$(x, x, y) = x^2y - x.xy,$$

$$(y, x, x) = yx.x - y.x^2,$$

(que são polinômios de grau 3) e todos os elementos do ideal gerado por estas duas leis. As identidades de nosso interesse são aquelas que não são consequências destas leis.

Proposição 4.1 *As álgebras de Cayley-Dickson C não satisfazem nenhuma identidade de grau menor que 5, que não seja consequência das leis alternativas.*

Demonstração. É suficiente mostrar que não existem identidades de grau 4. Vamos lembrar que trataremos apenas de identidades homogêneas e que estas identidades pertencem a uma das 5 partições seguintes: $[4]$, $[3,1]$, $[2,2]$, $[2,1,1]$, $[1,1,1,1]$. Os polinômios que

pertencem às três primeiras partições não possuem mais que duas variáveis. Logo, pelo Teorema de Artin (Teorema 1.8) podemos considerá-los como elementos de $Ass[X]$. Então estes polinômios são identidades de grau 4 para F_2 (Proposição 1.7). Mas, pelo Teorema 2.3, todas as identidades de grau 4 para F_2 são multilineares. Logo, estas três partições podem ser eliminadas. Observemos que as identidades pertencentes às duas últimas partições são lineares em duas variáveis. Então, por uma observação anterior, elas podem ser consideradas alternadas nestas duas variáveis.

I. Tipo [2,1,1]

Consideremos inicialmente uma identidade $f(x, y, z)$ da partição [2,1,1], alternada em y e z . Lembremos que $\phi(f) \in Ass[X]$ é uma identidade para F_2 , e de grau 4. Então, pelo Teorema 2.3, $\phi(f) = \alpha s_4$, onde $\alpha \in F$. Como αs_4 é multilinear, temos que $\phi(f) = 0$. Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 F[X] & \xrightarrow{\nu} & Alt[X] = F[X] / \langle (x, x, y), (x, y, y) \rangle \\
 f & \mapsto & \nu(f) \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\
 Ass[X] = F[X] / \langle (x, y, z) \rangle & & Alt[X] / \langle (x, y, z) \rangle \\
 \phi(f) = 0 & & \phi(\nu(f)).
 \end{array}$$

Agora, $\nu(f) = \{f + g, g \in \langle (x, x, y), (x, y, y) \rangle\}$. Mas para cada $g \in \langle (x, x, y), (x, y, y) \rangle$, $\phi(g) = 0$ pois $\phi((x, x, y)) = \phi((x, y, y)) = 0$. Logo, como $\phi(f) = 0$, $\phi(f + g) = 0$. Segue que $\phi(\nu(f)) = 0$ em $Alt[X] / \langle (x, y, z) \rangle$. E, portanto, $\nu(f(x, y, z))$ pertence ao ideal associador em $Alt[X]$. Mas pelas equações (1.10), (1.11) e (1.12),

$$(x^2, y, z) = (x, x \circ y, z) = (x, xy, z) + (x, yx, z) = (x, y, z)x + x(x, y, z).$$

Então o ideal associador em $Alt[X]$ do tipo [2,2,1] é gerado por $x(x, y, z)$ e $(x, y, z)x$, isto é

$$\nu(f(x, y, z)) = \alpha x(x, y, z) + \beta (x, y, z)x. \quad (4.1)$$

Mas $\nu(f(a, b, c)) = 0$ para todo $a, b, c \in C$. Apliquemos as substituições por elementos da base de C_R (veja seção 1.7): $x = 1 + e_1$, $y = e_2$ e $z = e_3$. Com esta substituição, o associador (x, y, z) resulta em

$$(1 + e_1, e_2, e_3) = (1, e_2, e_3) + (e_1, e_2, e_3) = -2e_6.$$

Logo, da equação (4.1) obtemos

$$0 = \nu(f(1 + e_1, e_2, e_3)) = \alpha(1 + e_1)(-2e_6) + \beta(-2e_6)(1 + e_1) = -2[(\alpha + \beta)e_6 + (-\alpha + \beta)e_5].$$

Como e_5 e e_6 são linearmente independentes e $\text{car } F \neq 2$, $\alpha = \beta = 0$ e portanto $\nu(f) = 0$ em $\text{Alt}[X]$. Isto significa que f é consequência das leis (x, x, y) e (x, y, y) e, portanto, não é do nosso interesse.

II. Tipo [1,1,1,1]

Vamos agora estudar as identidades de grau 4 do tipo [1,1,1,1], ou seja, identidades alternadas multilineares. Denotemos por s_4^i , $1 \leq i \leq 5$, os polinômios alternados obtidos pelas 5 maneiras possíveis de colocar os parênteses no polinômio standard s_4 . Temos:

$$\begin{aligned} s_4^1 &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}) (x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}), \\ s_4^2 &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)}) x_{\sigma(4)}, \\ s_4^3 &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} (x_{\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}), \\ s_4^4 &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} (x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \cdot x_{\sigma(4)}), \\ s_4^5 &= \sum_{\sigma \in P_4} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} \cdot x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}) x_{\sigma(4)}. \end{aligned}$$

Se f é uma identidade alternada do tipo [1,1,1,1], como $\phi(f) = \alpha s_4$, temos

$$f = \sum_{i=1}^5 \alpha_i s_4^i. \quad (4.2)$$

Tomemos dois monômios de s_4^1 : $x_1 x_2 \cdot x_3 x_4$ e $-x_2 x_1 \cdot x_3 x_4$. Notemos que ao substituirmos diferentes e_j da base de C_R , o resultado destes dois monômios são iguais, pois $e_i e_j = -e_j e_i$. E

isto ocorre com todos os monômios de s_4^i . Logo, ao substituírmos diferentes e_j nos polinômios s_4^i , é suficiente computar o valor do primeiro monômio e o resultado final do polinômio s_4^i é $4!$ vezes o resultado do primeiro monômio.

Fazendo a substituição $x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3$ e $x_4 = e_4$ obtemos

$$s_4^1(e_1, e_2, e_3, e_4) = s_4^2(e_1, \dots, e_4) = -s_4^3(e_1, \dots, e_4) = s_4^4(e_1, \dots, e_4) = -s_4^5(e_1, \dots, e_4) = 4!e_3.$$

Então, pela equação (4.2), temos

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_4) = 4!(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5)e_3.$$

Da mesma forma, ao aplicarmos as substituições

$$x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3, x_4 = e_5,$$

$$x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3, x_4 = e_6,$$

$$x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3, x_4 = e_7,$$

$$x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_4, x_4 = e_5,$$

temos, respectivamente,

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_5) = 4!(-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5)e_1,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_6) = 4!(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5).1,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_7) = 4!(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5)e_2,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_4, e_5) = 4!(-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5)e_5.$$

Estas relações resultam num sistema de cinco equações a cinco incógnitas (que são os coeficientes α_i), cuja representação matricial é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mas esta matriz é equivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Concluimos assim que $\alpha_i = 0$ ($\forall i$) e portanto $f = 0$ pela equação (4.2). E a proposição está provada. $\square$

4.2 O ideal associador dos tipos $[2,2,1]$ e $[2,1,1,1]$

Vamos provar nesta seção dois lemas que usaremos para provar o teorema principal.

O ideal associador de $Alt[X]$ é o ideal de $Alt[X]$ gerado pelo conjunto

$$\{(f, g, h) \mid f, g, h \in Alt[X]\}.$$

Lema 4.1 *Se F é um corpo de característica diferente de 3, o ideal associador de $Alt[X]$ é gerado pelos associadores de grau 3.*

Demonstração. Provaremos o lema mostrando que

$$3(x, y, zw) = [x, (y, z, w)] - [y, (x, z, w)] + z \circ (x, y, w) + w \circ (x, y, z) + w(x, y, z) + (w, x, y)z.$$

Temos da equação (1.10) que $(x, y, xw) = (x, y, w)x$. Linearizando esta expressão temos

$$(x, y, zw) + (z, y, xw) = (x, y, w)z + (z, y, w)x.$$

Então

$$(x, y, zw) = -(z, y, xw) + (x, y, w)z - (y, z, w)x. \quad (4.3)$$

Da equação (1.11) obtemos $(w, y, zw) = w(w, y, z)$. Linearizando temos

$$(x, y, zw) + (w, y, zx) = w(x, y, z) + x(w, y, z).$$

Logo,

$$(x, y, zw) = (y, w, zx) + w(x, y, z) + x(y, z, w). \quad (4.4)$$

Vamos agora linearizar a equação (1.13): $(x, y, z^2) = z \circ (x, y, z)$. Temos

$$(x, y, zw) + (x, y, wz) = z \circ (x, y, w) + w \circ (x, y, z),$$

isto é,

$$(x, y, zw) = -(x, y, wz) + z \circ (x, y, w) + w \circ (x, y, z). \quad (4.5)$$

Somando as igualdades (4.3), (4.4) e (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} 3(x, y, zw) &= [x, (y, z, w)] + z \circ (x, y, w) + w \circ (x, y, z) \\ &\quad + w(x, y, z) + (w, x, y)z \\ &\quad + (z, xw, y) + (y, w, zx) - (x, y, wz). \end{aligned}$$

Tomemos agora a lei flexível $(x, z, x) = 0$. Linearizando temos $(x, z, w) + (w, z, x) = 0$.

Então

$$\begin{aligned} -y(x, z, w) &= y(w, z, x) = -y(w.zx) + y(wz.x) \\ &= (y, w, zx) - yw.zx - (y, wz, x) + (y.wz)x. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela lei alternativa à direita, temos

$$\begin{aligned} (x, z, w)y &= -(x, w, z)y = (x.wz)y - (xw.z)y \\ &= (x.wz)y - (xw, z, y) - xw.zy. \end{aligned}$$

Então

$$-[y, (x, z, w)] = (y, w, zx) - (y, wz, x) - (xw, z, y) - yw.zx + (y.wz)x + (x.wz)y - xw.zy.$$

Linearizando a equação (1.9) temos

$$xw.zy + yw.zx = (x.wz)y + (y.wz)x.$$

Portanto $-[y, (x, z, w)] = (y, w, zx) - (y, wz, x) - (xw, z, y)$ e o lema está provado. $\square$

Lema 4.2 *Os elementos do tipo $[2,2,1]$ do ideal associador de $\text{Alt}[X]$ são gerados (como elementos de um espaço vetorial) por $xy.a, yx.a, xa.y, ya.x, ax.y$ e $ay.x$, onde $a = (x, y, z)$.*

Demonstração. Lembremos que em uma álgebra alternativa valem (equações (1.15) e (1.17) da Seção 1.6):

$$(x, y, a) = [x, y]a, \quad (4.6)$$

$$[x, y] \circ a = 0. \quad (4.7)$$

Vamos mostrar que não precisamos das palavras agrupadas por parênteses à esquerda. Por (4.6) temos $xy.a - x.ya = xy.a - yx.a$. Portanto

$$x.ya = yx.a$$

e trocando x por y nesta expressão temos

$$y.xa = xy.a.$$

Novamente por (4.6), $(x, a, y) = -(x, y, a) = -[x, y]a$ e então $xa.y - x.ay = -xy.a + yx.a$. Portanto

$$x.ay = xa.y + xy.a - yx.a,$$

$$y.ax = ya.x + yx.a - xy.a.$$

E ainda, $(a, x, y) = (x, y, a) = [x, y]a$. Logo, $ax.y - a.xy = xy.a - yx.a$. Portanto

$$a.xy = ax.y - xy.a + yx.a,$$

$$a.yx = ay.x - yx.a + xy.a. \quad \square$$

Lema 4.3 *Sejam $a = (x, z, w)$, $b = (x, w, y)$, $c = (x, y, z)$, $d = (y, z, w)$. Então os elementos do ideal associador de $\text{Alt}[X]$ do tipo $[2,1,1,1]$, nas variáveis x, y, z e w e alternados nas três últimas variáveis, são gerados (como elementos de um espaço vetorial) por*

$$xy.a + xz.b + xw.c, \quad (4.8)$$

$$yx.a + zx.b + wx.c, \quad (4.9)$$

$$xa.y + xb.z + xc.w, \quad (4.10)$$

$$ya.x + zb.x + wc.x, \quad (4.11)$$

$$ax.y + bx.z + cx.w, \quad (4.12)$$

$$ay.x + bz.x + cw.x, \quad (4.13)$$

$$x.ya + x.zb + x.wc, \quad (4.14)$$

$$x^2d, \quad (4.15)$$

$$xdx, \quad (4.16)$$

$$dx^2. \quad (4.17)$$

Demonstração. Listamos abaixo os elementos que não aparecem na relação do enunciado.

$$y.xa + z.xb + w.xc, \quad (4.18)$$

$$a.xy + b.xz + c.xw, \quad (4.19)$$

$$a.yx + b.zx + c.wx, \quad (4.20)$$

$$x.ay + x.bz + x.cw, \quad (4.21)$$

$$y.ax + z.bx + w.cx. \quad (4.22)$$

Vamos esclarecer porquê eles podem ser desprezados. Linearizando a identidade $(x, x, t) = 0$ temos $(x, y, t) + (y, x, t) = 0$, isto é, $xy.t - x.yt + yx.t - y.xt = 0$. Portanto

$$y.xa = xy.a - x.ya + yx.a,$$

$$z.xb = xz.b - x.zb + zx.b,$$

$$w.xc = xw.c - x.wc + wx.c.$$

Somando estas três identidades, membro a membro, temos:

$$\begin{aligned} (4.18) = y.xa + z.xb + w.xc &= (xy.a + xz.b + xw.c) \\ &\quad - (x.ya + x.zb + x.wc) \\ &\quad + (yx.a + zx.b + wx.c) \\ &= (4.8) - (4.14) + (4.9). \end{aligned}$$

É por esta razão que (4.18) não aparece listado no enunciado.

Linearizando a identidade $(t, x, t) = 0$, temos $(q, x, t) + (t, x, q) = 0$. Logo,

$$(a, x, y) = -(y, x, a),$$

$$(b, x, z) = -(z, x, b),$$

$$(c, x, w) = -(w, x, c).$$

Isto é,

$$ax.y - a.xy = -yx.a + y.xa,$$

$$bx.z - b.xz = -zx.b + z.xb,$$

$$cx.w - c.xw = -wx.c + w.xc.$$

Portanto,

$$(4.19) = (4.9) + (4.12) - (4.18).$$

Analogamente, linearizando a mesma identidade, temos

$$(4.20) = -(4.8) + (4.13) - (4.14).$$

Vamos agora usar a identidade (4.6), isto é, $(x, (x, y, z), y) = [y, x](x, y, z)$. Linearizando em y temos $(x, (x, y, z), w) + (x, (x, w, z), y) = [w, x](x, y, z) + [y, x](x, w, z)$. Isto é, $(x, c, w) - (x, a, y) = [w, x]c - [y, x]a$. Portanto

$$-x.cw = -xc.w + x.ya + wx.c - xw.c - yx.a. \quad (4.23)$$

Trocando z por w na equação obtida de (4.6) temos $(x, (x, y, w), y) = [y, x](x, y, w)$. Linearizando em y temos $(x, (x, z, w), y) + (x, (x, y, w), z) = [z, x](x, y, w) + [y, x](x, z, w)$. Logo, $(x, a, y) + (x, -b, z) = [z, x](-b) + [y, x]a$. Portanto

$$-x.ay = -xa.y + x.zb - zx.b + yx.a - xy.a. \quad (4.24)$$

Analogamente, trocando y por z temos $(x, (x, z, y), z) = [z, x](x, z, y)$. Linearizando em z , temos $(x, (x, w, y), z) + (x, (x, z, y), w) = [w, x](x, z, y) + [z, x](x, w, y)$. Ou $(x, b, z) + (x, -c, w) = [w, x](-c) + [z, x]b$. Portanto

$$-x.bz = -xb.z + x.wc - wx.c + zx.b - xz.b. \quad (4.25)$$

Somando membro a membro as equações (4.23), (4.24) e (4.25), temos

$$\begin{aligned}
-(4.21) &= -(x.ay + x.bz + x.cw) = -(xa.y + xb.z + xc.w) \\
&\quad + (x.ya + x.zb + x.wc) \\
&\quad - (xy.a + xz.b + xw.c) \\
&\quad - zx.b + yx.a - wx.c \\
&\quad + zx.b + wx.c - yx.a \\
&= -(4.10) + (4.14) - (4.8).
\end{aligned}$$

Linearizando a identidade $(x, t, x) = 0$ temos $(x, t, y) + (y, t, x) = 0$. Logo,

$$y.ax = xa.y - x.ay + ya.x,$$

$$z.bx = xb.z - x.bz + zb.x,$$

$$w.cx = xc.w - x.cw + wc.x.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(4.22) = y.ax + z.bx + w.cx &= (xa.y + xb.z + xc.w) \\
&\quad - (x.ay + x.bz + x.cw) \\
&\quad + (ya.x + zb.x + wc.x) \\
&= (4.10) - (4.21) + (4.11).
\end{aligned}$$

□

4.3 As identidades de grau 5

O objetivo desta seção é provar que o polinômio obtido subtraindo-se de uma identidade as consequências de κ e ζ é um polinômio nulo em $Alt[X]$.

Consideremos o T-ideal de identidades para F_2 , $I(F_2)$. Se a característica de F é diferente de dois, existem 4 tipos diferentes de elementos de $I(F_2)$ de grau 5:

$$-s_4(-, -, -, -), s_4(-, -, -, -), s_4(-, -, -, -), [-, [-, -] \circ [-, -]]. \quad (4.26)$$

Teorema 4.1 *Todas as identidades de grau 5, que não são consequências das leis alternativas, para as álgebras de Cayley-Dickson sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 ou 5 são consequências de $\zeta(x_1, \dots, x_5)$ e $\kappa(x; y, z, w)$.*

Demonstração. Uma identidade homogênea de grau 5 pertence a uma das cinco partições: $[5]$, $[4,1]$, $[3,2]$, $[3,1,1]$, $[2,2,1]$, $[2,1,1,1]$ e $[1,1,1,1,1]$. As identidades que pertencem as três primeiras partições são polinômios que envolvem no máximo duas variáveis. Portanto, pelo Teorema de Artin (Teorema 1.8) estes polinômios são associativos. Mas F_2 não possui identidades dos dois primeiros tipos. Então estes dois casos podem ser eliminados. Qualquer identidade do terceiro tipo deve ser um múltiplo escalar de $\zeta(x_1, \dots, x_5)$ por (4.26). Estudaremos os quatro últimos casos assumindo que as identidades são alternadas nas variáveis lineares.

I. Tipo $[3,1,1]$

Tomemos inicialmente uma identidade f de grau $[3,1,1]$, alternada em y e z . Então $\phi(f) \in I(F_2)$. Lembrando que s_4 é alternada, dos quatro tipos de identidade de grau 5 citadas em (4.26), $s_4(x, y, z, x^2)$ é, a menos de um sinal, o único polinômio não nulo possível de se obter de s_4 . Para o último tipo, temos $[x, [x, y] \circ [x, z]]$; porém, não é alternada nas variáveis y e z . Logo, $\phi(f)$ é um múltiplo de $s_4(x, y, z, x^2)$, digamos $\alpha s_4(x, y, z, x^2)$. Mas pelo Teorema 3.2, $\kappa(x; x, y, z) = -s_4(x, y, z, x^2) + s_4(x, y, z, x) \circ x$ em $\text{Ass}[X]$. Isto é,

$$\kappa(x; x, y, z) = -s_4(x, y, z, x^2).$$

Definamos $g = f + \alpha \kappa(x; x, y, z)$. Então $\phi(g) = 0$ em $\text{Ass}[X]$, isto é, g pertence ao ideal associador. Como $x^2(x, y, z)$, $x(x, y, z)x$ e $(x, y, z)x^2$ são os únicos elementos não nulos do tipo $[3,1,1]$ do ideal associador, podemos escrever

$$g(x, y, z) = ax^2(x, y, z) + bx(x, y, z)x + c(x, y, z)x^2, \quad (4.27)$$

com $a, b, c \in F$. Aplicando as substituições $x = 1 + e_1$, $y = e_2$ e $z = e_3$ na equação (4.27), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = g(1 + e_1, e_2, e_3) &= a(1 + e_1)^2(-2e_6) + b(1 + e_1)(-2e_6)(1 + e_1) + c(-2e_6)(1 + e_1)^2 \\ &= 4(a - c)e_5 - 4be_6. \end{aligned}$$

Logo $a = c$ e $b = 0$ e a equação (4.27) fica reduzida a

$$g(x, y, z) = a(x^2(x, y, z) + (x, y, z)x^2).$$

Aplicando a substituição $x = e_1$, $y = e_2$ e $z = e_3$ na equação acima obtemos

$$0 = g(e_1, e_2, e_3) = a(2e_6 + 2e_6) = 4ae_6.$$

Portanto, temos que $a = b = c = 0$. Ou seja, $f(x, y, z) = -\alpha\kappa(x; x, y, z)$.

II. Tipo [2,2,1]

No caso [2,2,1] não podemos assumir que a identidade é alternada. Tomemos $p(x, y, z)$ uma identidade arbitrária do tipo [2,2,1]. Definamos

$$f_1(x, y, z) = p(x, y, z) + p(y, x, z),$$

$$f_2(x, y, z) = p(x, y, z) - p(y, x, z).$$

As identidades assim definidas são simétricas e alternadas em x e y , respectivamente. Portanto, é suficiente mostrar que f_1 e f_2 são consequências de κ e ζ .

Vamos estudar os elementos de $I(F_2)$ do tipo [2,2,1] simétricos em x e y . Como s_4 é alternado, temos de (4.26) que as únicas consequências de s_4 não nulas são

$$s_4(x, y, z, xy), \quad s_4(x, y, z, yx).$$

Por outro lado,

$$[z, [x, y]^2], \quad [x, [x, y] \circ [y, z]], \quad [y, [x, y] \circ [x, z]]$$

são os únicos polinômios não nulos do último tipo descrito em (4.26). O polinômio $[z, [x, y]^2]$ é simétrico em x e y . Os outros não são nem alternados nem simétricos. Mas é fácil ver que a diferença entre os dois primeiros e a diferença entre os dois últimos são simétricos em x e y . Portanto, o subespaço dos elementos simétricos do tipo [2,2,1] de $I(F_2)$ é gerado por $s_4(x, y, z, [x, y])$, $[z, [x, y]^2]$ e $[x, [x, y] \circ [y, z]] - [y, [x, y] \circ [x, z]]$. Vamos mostrar que $s_4(x, y, z, [x, y])$ é combinação linear dos demais. Como

$$s_4(x, y, z, w) = [x, y] \circ [z, w] + [x, z] \circ [w, y] + [x, w] \circ [y, z],$$

temos

$$s_4(x, y, z, [x, y]) = [x, y] \circ [z, [x, y]] + [x, z] \circ [[x, y], y] + [x, [x, y]] \circ [y, z].$$

Mas nas álgebras associativas vale

$$x \circ [y, z] = [x \circ y, z] + y \circ [z, x]. \quad (4.28)$$

De fato, $x \circ [y, z] = xyz - xzy + yzx - zyx$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} [x \circ y, z] + y \circ [z, x] &= xyz + yxz - zxy - zyx \\ &\quad yzx - yxz + zxy - xzy. \end{aligned}$$

Então

$$[x, y] \circ [z, [x, y]] = -[x, y] \circ [[x, y], z] = -2[[x, y]^2, z] - [x, y] \circ [z, [x, y]].$$

Logo, $[x, y] \circ [z, [x, y]] = [z, [x, y]^2]$. E ainda,

$$[x, z] \circ [[x, y], y] = [[x, z] \circ [x, y], y] + [x, y] \circ [y, [x, z]] = -[y, [x, z] \circ [x, y]] + [x, y] \circ [y, [x, z]].$$

Temos também

$$-[y, z] \circ [[x, y], x] = -[[y, z] \circ [x, y], x] - [x, y] \circ [x, [y, z]] = [x, [x, y] \circ [y, z]] - [x, y] \circ [x, [y, z]].$$

Portanto

$$\begin{aligned} s_4(x, y, z, [x, y]) &= [z, [x, y]^2] - [y, [x, z] \circ [x, y]] + [x, y] \circ [y, [x, z]] \\ &\quad + [x, [x, y] \circ [y, z]] - [x, y] \circ [x, [y, z]]. \end{aligned}$$

Agora, se A é uma álgebra associativa, a álgebra A^- com o produto $[x, y] = xy - yx$ é uma álgebra de Lie, isto é, A^- satisfaz a identidade de Jacobi

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0. \quad (4.29)$$

Logo

$$[x, y] \circ [y, [x, z]] - [x, y] \circ [x, [y, z]] = [x, y] \circ ([z, x], y) + [[y, z], x] = -[x, y] \circ [[x, y], z].$$

Por outro lado, como mencionado acima,

$$-[x, y] \circ [[x, y], z] = -[[x, y]^2, z].$$

Portanto,

$$[x, y] \circ [y, [x, z]] - [x, y] \circ [x, [y, z]] = -[[x, y]^2, z] = [z, [x, y]^2].$$

Concluimos assim que

$$s_4(x, y, z, [x, y]) = 2[z, [x, y]^2] + [x, [x, y] \circ [y, z]] - [y, [x, z] \circ [x, y]].$$

Logo, o subespaço dos elementos simétricos do tipo $[2, 2, 1]$ de $I(F_2)$ é gerado por $[z, [x, y]^2]$ e $[x, [x, y] \circ [y, z]] - [y, [x, y] \circ [x, z]]$.

Portanto,

$$\phi(f_1) = \alpha[z, [x, y]^2] + \beta([x, [x, y] \circ [y, z]] - [y, [x, y] \circ [x, z]]).$$

Tomando-se

$$g = f_1 - \alpha[z, [x, y]^2] - \beta([x, [x, y] \circ [y, z]] - [y, [x, y] \circ [x, z]]),$$

temos que g pertence ao ideal associador.

Analogamente, o subespaço das identidades alternadas em x e y do tipo $[2, 2, 1]$ de $I(F_2)$ é gerado por $s_4(x, y, z, x \circ y)$ e $[x, [x, y] \circ [y, z]] + [y, [x, y] \circ [x, z]]$. O segundo gerador é claramente uma consequência de ζ . Vamos mostrar que $s_4(x, y, z, x \circ y)$ é consequência de κ . Novamente, pelo Teorema 3.2, temos

$$\kappa(x, y; x, y, z) = -s_4(x, y, z, x \circ y) + s_4(x, y, z, x) \circ y + s_4(x, y, z, y) \circ x.$$

Como s_4 é alternada, $\kappa(x, y; x, y, z) = -s_4(x, y, z, x \circ y)$. Então se

$$g = f_2 + a\kappa(x, y; x, y, z) - b([x, [x, y] \circ [y, z]] + [y, [x, y] \circ [x, z]]),$$

temos $\phi(g) = 0$, isto é, g pertence ao ideal associador.

Usando o Lema 4.2, temos que para identidades de ambos os casos, simétrica e alternada, do tipo $[2,2,1]$, g tem a forma

$$g = \beta_1 xy.a + \beta_2 yx.a + \beta_3 xa.y + \beta_4 ya.x + \beta_5 ax.y + \beta_6 ay.x. \quad (4.30)$$

Aplicando a substituição $x = 1 + e_1$, $y = 1 + e_2$ e $z = e_3$ e, posteriormente, uma outra substituição $x = e_1$, $y = e_1 + e_2$ e $z = e_3$, obtemos um sistema de cinco equações a seis incógnitas cuja representação matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Temos então que $\beta_1 = \beta_6 = -\beta_2 = -\beta_5$ e $\beta_3 = \beta_4 = 0$. Logo, da equação (4.30), temos que g deve ser um múltiplo escalar de

$$xy.a - yx.a - ax.y + ay.x = [x, y]a - (a, x, y) - a.xy + (a, y, x) + a.yx = [x, y]a - a[x, y] - 2(x, y, a).$$

Mas pela equação (4.7) temos $[x, y] \circ a = 0$. Portanto $-a[x, y] = [x, y]a$. Logo g é um múltiplo escalar de $2[x, y]a - 2(x, y, a)$ que é zero pela equação (4.6). Concluimos assim que as identidades para C do tipo $[2,2,1]$ são consequências de κ e ζ .

III. Tipo $[2,1,1,1]$

Consideremos agora f uma identidade do tipo $[2,1,1,1]$ para C alternada nas últimas três variáveis. Novamente, $\phi(f)$ pertence a $I(F_2)$. Observando (4.26) concluimos que o subespaço de polinômios de $I(F_2)$ do tipo $[2,1,1,1]$ em x, y, z, w e alternada em y, z, w é gerado por

$$q_1 = x \circ s_4(x, y, z, w),$$

$$\zeta_1 = [x, s_4(x, y, z, w)],$$

$$q_2 = s_4(x^2, y, z, w)$$

e os polinômios

$$\begin{aligned} q_3 &= \sum_{(y,z,w)} s_4(x, x \circ y, z, w), \\ \zeta_2 &= \sum_{(y,z,w)} s_4(x, [x, y], z, w), \\ \zeta_3 &= \sum_{(y,z,w)} [x, [x, y] \circ [z, w]], \\ \zeta_4 &= \sum_{(y,z,w)} [y, [x, z] \circ [x, w]], \end{aligned}$$

onde $\sum_{(y,z,w)}$ indica a soma que percorre todas as permutações que permutam y, z e w ciclicamente. Portanto, podemos escrever

$$\phi(f) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i q_i + \sum_{j=1}^4 \beta_j \zeta_j, \quad (4.31)$$

com $\alpha_i, \beta_j \in F$.

É claro que ζ_3 e ζ_4 são consequências de ζ . Usando a expressão

$$s_4(x, y, z, w) = [x, y] \circ [z, w] + [x, z] \circ [w, y] + [x, w] \circ [y, z],$$

temos que $\zeta_1 = \zeta_3$ também é consequência de ζ . E ainda, usando a mesma expressão,

$$\begin{aligned} s_4(x, [x, y], z, w) &= [x, [x, y]] \circ [z, w] + [x, z] \circ [w, [x, y]] + [x, w] \circ [[x, y], z] \\ &= -[z, w] \circ [[x, y], x] - [x, z] \circ [[x, y], w] + [x, w] \circ [[x, y], z]. \end{aligned}$$

Mas pela equação (4.28),

$$-[z, w] \circ [[x, y], x] = -[[z, w] \circ [x, y], x] - [x, y] \circ [x, [z, w]] = [x, [x, y] \circ [z, w]] - [x, y] \circ [x, [z, w]],$$

$$-[x, z] \circ [[x, y], w] = -[[x, z] \circ [x, y], w] - [x, y] \circ [w, [x, z]] = [w, [x, z] \circ [x, y]] - [x, y] \circ [w, [x, z]],$$

$$[x, w] \circ [[x, y], z] = [[x, w] \circ [x, y], z] + [x, y] \circ [z, [x, w]] = -[z, [x, w] \circ [x, y]] + [x, y] \circ [z, [x, w]].$$

Logo,

$$\begin{aligned} s_4(x, [x, y], z, w) &= [x, [x, y] \circ [z, w]] + [w, [x, y] \circ [x, z]] - [z, [x, w] \circ [x, y]] \\ &\quad + [x, y] \circ (-[x, [z, w]] - [w, [x, z]] + [z, [x, w]]). \end{aligned}$$

Mas pela relação de Jacobi (4.29),

$$-[x, [z, w]] - [w, [x, z]] + [z, [x, w]] = 0.$$

Então

$$s_4(x, [x, y], z, w) = [x, [x, y] \circ [z, w]] + [w, [x, y] \circ [x, z]] - [z, [x, w] \circ [x, y]].$$

Logo, ζ_2 é uma consequência do polinômio ζ .

Consideremos novamente a expressão do Teorema 3.2:

$$\kappa(x; y, z, w) = -s_4(y, z, w, x^2) + s_4(y, z, w, x) \circ x.$$

Então $q_1 = -\kappa(x; y, z, w) + s_4(x^2, y, z, w)$. E também

$$\kappa(x; x, z, w) = -s_4(x, z, w, x^2) + s_4(x, z, w, x) \circ x = -s_4(x, z, w, x^2).$$

Linearizando temos que

$$\tilde{\kappa}(x; y, z, w) = \kappa(x; x, z, w) \Delta_x^1(y) = s_4(x^2, y, z, w) - s_4(x, x \circ y, z, w).$$

Logo, $s_4(x, x \circ y, z, w) = s_4(x^2, y, z, w) - \tilde{\kappa}(x; y, z, w)$ e portanto,

$$q_3 = 3s_4(x^2, y, z, w) - \tilde{\kappa}(x; y, z, w),$$

onde $\tilde{\kappa}(x; y, z, w) = \sum_{(y, z, w)} \tilde{\kappa}(x; y, z, w)$.

Substituindo na equação (4.31), temos que

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \alpha_1 s_4(x^2, y, z, w) - \alpha_1 \kappa(x; y, z, w) + \alpha_2 s_4(x^2, y, z, w) \\ &\quad + 3\alpha_3 s_4(x^2, y, z, w) - \alpha_3 \tilde{\kappa}(x; y, z, w) + \sum_{j=1}^4 \beta_j \zeta_j \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) s_4(x^2, y, z, w) - \alpha_3 \tilde{\kappa}(x; y, z, w) + \sum_{j=1}^4 \beta_j \zeta_j - \alpha_1 \kappa(x; y, z, w). \end{aligned}$$

Seja

$$g = f + \alpha_3 \tilde{\kappa}(x; y, z, w) - \sum_{j=1}^4 \beta_j \zeta_j + \alpha_1 \kappa(x; y, z, w).$$

Então $\phi(g) = \lambda s_4(x^2, y, z, w)$. Portanto g é uma combinação linear de $s_4^i(x^2, y, z, w)$ ($i = 1, \dots, 5$) e elementos do ideal associador do tipo $[2,1,1,1]$ em x, y, z e w e alternados nas três últimas variáveis. O nosso objetivo agora é mostrar que g é um polinômio identicamente nulo.

Pelo Lema 4.3

$$\begin{aligned}
g(x, y, z, w) = & a_1[xy.(x, z, w) + xz.(x, w, y) + xw.(x, y, z)] + \\
& a_2[yx.(x, z, w) + zx.(x, w, y) + wx.(x, y, z)] + \\
& a_3[x(x, z, w).y + x(x, w, y).z + x(x, y, z).w] + \\
& a_4[y(x, z, w).x + z(x, w, y).x + w(x, y, z).x] + \\
& a_5[(x, z, w)x.y + (x, w, y)x.z + (x, y, z)x.w] + \\
& a_6[(x, z, w)y.x + (x, w, y)z.x + (x, y, z)w.x] + \\
& a_7[x.y(x, z, w) + x.z(x, w, y) + x.w(x, y, z)] + \\
& a_8x^2(y, z, w) + a_9x(y, z, w)x + a_{10}(y, z, w)x^2 + \\
& \sum_{i=1}^5 b_i s_4^i(x^2, y, z, w).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Aplicando a substituição $x = z = 1 + e_1$, $y = e_2$ e $w = e_4$ na equação (4.32) obtemos $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 0$. Por outro lado, aplicando ϕ a esta equação temos

$$\phi(g) = (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)s_4(x^2, y, z, w) = 0.$$

Logo, a equação (4.32) fica reduzida a

$$\begin{aligned}
g(x, y, z, w) = & a_1[xy.(x, z, w) + xz.(x, w, y) + xw.(x, y, z)] + \\
& a_2[yx.(x, z, w) + zx.(x, w, y) + wx.(x, y, z)] + \\
& a_3[x(x, z, w).y + x(x, w, y).z + x(x, y, z).w] + \\
& a_4[y(x, z, w).x + z(x, w, y).x + w(x, y, z).x] + \\
& a_5[(x, z, w)x.y + (x, w, y)x.z + (x, y, z)x.w] + \\
& a_6[(x, z, w)y.x + (x, w, y)z.x + (x, y, z)w.x] + \\
& a_7[x.y(x, z, w) + x.z(x, w, y) + x.w(x, y, z)] + \\
& a_8x^2(y, z, w) + a_9x(y, z, w)x + a_{10}(y, z, w)x^2.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Aplicando as substituições: $x = 1 + e_1$, $y = 1 + e_2$, $z = e_3$ e $w = e_4$ na equação (4.33),

obtemos

$$\begin{aligned}
 0 = & -2(a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_{10}) e_3 \\
 & + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) e_5 \\
 & + 2(a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 - a_9) e_7 \\
 & + (a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 + a_7) e_6.
 \end{aligned}$$

Aplicando uma outra substituição: $x = 1 + e_1$, $y = e_2$, $z = e_3$ e $w = e_5$ na equação (4.33), obtemos

$$\begin{aligned}
 0 = & 3(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 - a_7).1 \\
 & + 3(a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7) e_1.
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 0 = -\frac{1}{2}g(1 + e_1, e_2, e_3, e_6) = & -3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7).1 + 2(a_8 + a_9 + a_{10}).1 \\
 & + 3(-a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_7) e_1, \\
 0 = -\frac{1}{2}g(e_1, e_2, e_3, e_4) = & \{2[(a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7)] + (a_8 - a_9 + a_{10})\} e_7, \\
 0 = g(e_1, e_1, e_2, e_3) = & 2(a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + a_{10}) e_6,
 \end{aligned}$$

Isto nos dá um sistema de 10 equações a 10 incógnitas cuja representação matricial é:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & 2 & 2 & 2 \\
 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\
 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1
 \end{bmatrix}.$$

A forma escalonada desta matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então g é um múltiplo do polinômio

$$\begin{aligned} p(x, y, z, w) = & -2\{xy.(x, z, w) + xz.(x, w, y) + xw.(x, y, z)\} \\ & + \{x(x, z, w).y + x(x, w, y).z + x(x, y, z).w\} \\ & + \{y(x, z, w).x + z(x, w, y).x + w(x, y, z).x\} \\ & - \{(x, z, w)y.x + (x, w, y)z.x + (x, y, z)w.x\} \\ & + \{x.y(x, z, w) + x.z(x, w, y) + x.w(x, y, z)\} \\ & + x^2(y, z, w) - 2x(y, z, w)x + (y, z, w)x^2. \end{aligned}$$

Seja A uma álgebra alternativa. Denotemos por $\{xyz\}^+$ o polinômio em A^+ definido por

$$\{xyz\}^+ = \frac{1}{2}[(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x - (z \circ x) \circ y].$$

Usando as leis alternativas temos que

$$\{xyz\}^+ = xy.z + zy.x. \quad (4.34)$$

Portanto

$$\{xyz\}^+ - (x, y, z) = zy.x + x.yz. \quad (4.35)$$

Em A vale também $(x, y, z^2) = z \circ (x, y, z)$ (equação (1.13)). Linearizando temos

$$(x, y, z \circ w) = (x, y, z) \circ w + z \circ (x, y, w).$$

Isto implica que o operador linear

$$\begin{aligned} D_{x,y} = (x, y, _) : A^+ &\longrightarrow A^+ \\ z &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

é uma derivação. Denotemos por $\sum_{y,z,w}$ a soma sobre todas as permutações que permutam ciclicamente y, z e w . Usando a equação (4.34) temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sum_{y,z,w} \{x(x, z, w)y\}^+ &= \{x(x, z, w)y\}^+ + \{x(x, y, z)w\}^+ + \{x(x, w, y)z\}^+ \\ &= x(x, z, w).y + y(x, z, w).x + \\ &\quad x(x, y, z).w + w(x, y, z).x + \\ &\quad x(x, w, y).z + z(x, w, y).x; \\ - \sum_{y,z,w} \{x y(x, z, w)\}^+ &= -\{x y(x, z, w)\}^+ - \{x z(x, w, y)\}^+ - \{x w(x, y, z)\}^+ \\ &= -xy.(x, z, w) - (x, z, w)y.x \\ &\quad -xz.(x, w, y) - (x, w, y)z.x \\ &\quad -xw.(x, y, z) - (x, y, z)w.x; \\ - \sum_{y,z,w} (x, y, (x, z, w)) &= -(x, y, (x, z, w)) - (x, z, (x, w, y)) - (x, w, (x, y, z)) \\ &= -xy.(x, z, w) + x.y(x, z, w) \\ &\quad -xz.(x, w, y) + x.z(x, w, y) \\ &\quad -xw.(x, y, z) + x.w(x, y, z). \end{aligned}$$

E ainda,

$$[x, [x, (y, z, w)]] = x^2(y, z, w) - 2x(y, z, w)x + (y, z, w)x^2.$$

Então o polinômio p pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} p(x, y, z, w) &= [x, [x, (y, z, w)]] + \sum_{y,z,w} \{x(x, z, w)y\}^+ - \{xy(x, z, w)\}^+ - (x, y, (x, z, w)) \\ &= [x, [x, (y, z, w)]] \\ &\quad + \{x(x, z, w)y\}^+ + \{xw(x, z, y)\}^+ \\ &\quad + \{x(x, w, y)z\}^+ + \{xy(x, w, z)\}^+ \\ &\quad + \{x(x, y, z)w\}^+ + \{xz(x, y, w)\}^+ \\ &\quad - (x, y, (x, z, w)) - (x, z, (x, w, y)) - (x, w, (x, y, z)). \end{aligned}$$

Usando o fato de que $D_{x,z}$ é uma derivação e $D_{x,z}(x) = D_{x,z}(z) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
2(x, z, \{xwy\}^+) &= D_{x,z}((x \circ w) \circ y) + D_{x,z}((w \circ y) \circ x) - D_{x,z}(x, z, (y \circ x) \circ w) \\
&= D_{x,z}(x \circ w) \circ y + (x \circ w) \circ D_{x,z}(y) + D_{x,z}(w \circ y) \circ x \\
&\quad - D_{x,z}(y \circ x) \circ w - (y \circ x) \circ D_{x,z}(w) \\
&= (x \circ D_{x,z}(w)) \circ y + (x \circ w) \circ D_{x,z}(y) \\
&\quad + (D_{x,z}(w) \circ y + w \circ D_{x,z}(y)) \circ x \\
&\quad - (D_{x,z}(y) \circ x) \circ w - (y \circ x) \circ D_{x,z}(w) \\
&= (x \circ (x, z, w)) \circ y + ((x, z, w) \circ y) \circ x - (y \circ x) \circ (x, z, w) \\
&\quad + (x \circ w) \circ (x, z, y) + (w \circ (x, z, y)) \circ x - ((x, z, y) \circ x) \circ w \\
&= 2\{x (x, z, w) y\}^+ + 2\{x w (x, z, y)\}^+.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
(x, w, \{xyz\}^+) &= \{x (x, w, y) z\}^+ + \{x y (x, w, z)\}^+; \\
(x, y, \{xzw\}^+) &= \{x (x, y, z) w\}^+ + \{x z (x, y, w)\}^+.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
p(x, y, z, w) &= [x, [x, (y, z, w)]] + (x, z, \{xwy\}^+) + (x, w, \{xyz\}^+) \\
&\quad + (x, y, \{xzw\}^+) - (x, z, (x, w, y)) - (x, w, (x, y, z)) - (x, y, (x, z, w)).
\end{aligned}$$

Agora, pela equação (4.35), temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
(x, z, \{xwy\}^+) - (x, z, (x, w, y)) &= (x, z, \{xwy\}^+ - (x, w, y)) = (x, z, yw.x + x.wy), \\
(x, w, \{xyz\}^+) - (x, w, (x, y, z)) &= (x, w, \{xyz\}^+ - (x, y, z)) = (x, w, zy.x + x.yz), \\
(x, y, \{xzw\}^+) - (x, y, (x, z, w)) &= (x, y, \{xzw\}^+ - (x, z, w)) = (x, y, wz.x + x.zw).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
p(x, y, z, w) &= [x, [x, (y, z, w)]] + (x, z, yw.x + x.wy) \\
&\quad + (x, w, zy.x + x.yz) + (x, y, wz.x + x.zw).
\end{aligned}$$

Também temos (equações (1.11), (1.12) e (1.18) que

$$(x, xy, z) = (x, y, z)x; \quad (x, z, yx) = x(x, z, y)$$

$$[x, (y, z, w)] = (x, y, zw) + (x, z, wy) + (x, w, yz).$$

Por estas três equações, temos

$$\begin{aligned} p(x, y, z, w) &= [x, [x, (y, z, w)]] + x((x, z, yw) + (x, w, zy) + (x, y, wz)) \\ &\quad + ((x, z, wy) + (x, w, yz) + (x, y, zw))x \\ &= [x, [x, (y, z, w)]] + x[x, (y, z, w)] + [x, (y, z, w)]x \\ &= [x, [x, (y, z, w)]] - [x, [x, (y, z, w)]]. \end{aligned}$$

Portanto, $p(x, y, z, w) = 0$ em $Alt[X]$.

IV. Tipo [1,1,1,1,1]

Trataremos finalmente das identidades de grau 5 alternadas e multilineares. Chamaremos de s_5^i os polinômios obtidos considerando-se as 14 maneiras diferentes de associar os monômios do polinômio standard s_5 . Temos:

$$\begin{aligned} s_5^1 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} [x_{\sigma(2)} (x_{\sigma(3)} \cdot x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)})], \\ s_5^2 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} [x_{\sigma(2)} (x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} \cdot x_{\sigma(5)})], \\ s_5^3 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} [x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \cdot x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)}], \\ s_5^4 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} [(x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \cdot x_{\sigma(4)}) x_{\sigma(5)}], \\ s_5^5 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} [(x_{\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}) x_{\sigma(5)}], \\ s_5^6 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma [(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)}) x_{\sigma(4)}] x_{\sigma(5)}, \\ s_5^7 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma [(x_{\sigma(1)} \cdot x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}) x_{\sigma(4)}] x_{\sigma(5)}, \\ s_5^8 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}] x_{\sigma(5)}, \\ s_5^9 &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)} (x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \cdot x_{\sigma(4)})] x_{\sigma(5)}, \\ s_5^{10} &= \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)} (x_{\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)})] x_{\sigma(5)}, \end{aligned}$$

$$s_5^{11} = \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}) (x_{\sigma(3)} \cdot x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)}),$$

$$s_5^{12} = \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}) (x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} \cdot x_{\sigma(5)}),$$

$$s_5^{13} = \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} \cdot x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}) (x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)}),$$

$$s_5^{14} = \sum_{\sigma \in P_5} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)}) (x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)}).$$

Uma identidade f para C , multilinear e alternada, é combinação linear destes polinômios. Isto é, f pode ser escrita na forma:

$$f(x, y, z, v, w) = \sum_{i=1}^{14} a_i s_5^i(x, y, z, v, w). \quad (4.36)$$

Fazendo $z = 1$ na equação (4.36) temos

$$\begin{aligned} f(x, y, 1, v, w) = & (a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}) s_4^1(x, y, v, w) + (a_6 + a_7 + a_8) s_4^2(x, y, v, w) \\ & + (a_1 + a_2 + a_3) s_4^3(x, y, v, w) + (a_4 + a_5) s_4^4(x, y, v, w) \\ & + (a_9 + a_{10}) s_4^5(x, y, v, w). \end{aligned}$$

Mas, $f(x, y, 1, v, w)$ ainda é uma identidade para C , e de grau 4. Logo, pela Proposição 4.1, f é um polinômio identicamente nulo. Como os monômios de s_4^i têm maneiras diferentes de associação para cada i , todos os coeficientes de s_4^i devem ser zero.

Aplicando as substituições

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_4, \quad e_5,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_4, \quad e_6,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_4, \quad e_7,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_5, \quad e_6,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_5, \quad e_7,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_6, \quad e_7,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_4, \quad e_5, \quad e_6,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_4, \quad e_5, \quad e_7,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_4, \quad e_6, \quad e_7,$$

$$e_1, \quad e_2, \quad e_5, \quad e_6, \quad e_7,$$

na equação (4.36), obtemos:

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = 5!(a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6 - a_7 + a_8 + a_9 - a_{10} + a_{11} - a_{12} + a_{13} - a_{14}) e_2,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_4, e_6) = 5!(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 - a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11} - a_{12} + a_{13} - a_{14}) e_4,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_4, e_7) = 5!(a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 + a_9 - a_{10} + a_{11} - a_{12} + a_{13} - a_{14}) e_1,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_5, e_6) = 5!(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} - a_{12} + a_{13} - a_{14}) e_5,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_5, e_7) = 5!(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} - a_{12} - a_{13} + a_{14}) e_3,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_3, e_6, e_7) = 5!(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11} + a_{12} - a_{13} + a_{14}) e_7,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_4, e_5, e_6) = 5!(-a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_7 - a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11} + a_{12} - a_{13} - a_{14}) e_1,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_4, e_5, e_7) = 5!(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11} - a_{12} - a_{13} - a_{14}) e_4,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_4, e_6, e_7) = 5!(-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11} + a_{12} - a_{13} - a_{14}) e_2,$$

$$0 = f(e_1, e_2, e_5, e_6, e_7) = 5!(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_6 - a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} - a_{11} + a_{12} - a_{13} + a_{14}) e_6.$$

Temos assim um sistema de 15 equações a 14 incógnitas cuja representação matricial é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A forma escalonada desta matriz é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Isto implica que a equação (4.36) se reduz a

$$f = a_{14}[-s_5^1 + s_5^2 + s_5^6 - s_5^7 - s_5^{11} - s_5^{12} + s_5^{13} + s_5^{14}],$$

isto é, qualquer identidade alternada multilinear é um múltiplo escalar da soma sobre todas as permutações de x, y, z, v e w (considerando-se o sinal da permutação) de

$$\begin{aligned} & -x(y(z.vw)) + x(y(zv.w)) + ((xy.z)v)w - ((x.yz)v)w \\ & - (xy)(z.vw) - (xy)(zv.w) + (x.yz)(vw) + (xy.z)(vw). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} & ((xy.z)v)w - ((x.yz)v)w = ((x, y, z)v)w, \\ & x(y(zv.w)) - x(y(z.vw)) = x(y(z, v, w)), \\ & (xy.z)(vw) - (xy)(z.vw) = (xy, z, vw), \\ & (x.yz)(vw) = -(x, y, z)(vw) + (xy.z)(vw), \\ & -(xy)(zv.w) = -(xy)(z, v, w) - (xy)(z.vw). \end{aligned}$$

Logo, f é um múltiplo da soma alternada sobre todas as permutações de

$$\begin{aligned}
 & ((x, y, z)v)w - (x, y, z).(vw) + x(y(z, v, w)) - (xy).(z, v, w) \\
 & + (xy.z)(vw) - (xy)(z.vw) + (xy, z, vw) \\
 & = ((x, y, z), v, w) - (x, y, (z, v, w)) + 2(xy, z, vw) \\
 & = ((x, y, z), v, w) - ((z, v, w), x, y) + (xy, z, vw) - (vw, z, xy).
 \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos diferem por uma permutação par. O mesmo ocorre com os dois últimos. Então a soma alternada sobre todas as permutações é zero. Logo, f é um polinômio identicamente nulo, o que prova que C não possui identidade alternada multilinear de grau 5. □

Bibliografia

- [1] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*.
Bull. Am. Math. Soc. 54 (1948), 575-580.
- [2] A. S. Amitsur e J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*.
Proc. Amer. Math. Soc. I (1950), 449-463.
- [3] R. H. Bruck e E. Kleinfeld, *The structure of alternative division rings*.
Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 878-890.
- [4] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*.
Academic Press, New York (1966).
- [5] K. McCrimmon, *Representations of quadratic Jordan algebras*.
Trans. A.M.S. 153 (1971), 279-305.
- [6] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*.
Algebra and Logic 12, No. 1 (1973), 47-63.
- [7] U. Leron, *Multilinear identities of the matrix ring*.
Trans. A.M.S. 183 (1973), 157-202.
- [8] M. L. Racine, *Central polynomials for Jordan algebras I*.
J. Algebra 41 (1976), 224-237.

- [9] B. D. Smith, *A standard Jordan polynomial*.
Comm. Alg. 5(2) (1977), 207-218.
- [10] D. S. Passman, *The algebraic structure of groups rings*.
John Wiley, New York (1977).
- [11] K. McCrimmon, *A basic associativity theorem for alternative algebras*.
Port. Math. 38 (3-4) (1979), 47-53.
- [12] B. Felzenszwalb, *Álgebras de dimensão finita*.
IMPA, Rio de Janeiro (1979).
- [13] V. S. Drenski, *A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*.
Algebra and Logic 20 (1981), 188-194.
- [14] K. A. Zhevlakov et al, *Rings that are nearly associative*.
New York, Academic Press (1982).
- [15] K. McCrimmon, *Zelmanov's prime theorem for quadratic Jordan algebra*.
J. Algebra 76 (1982), 297-326.
- [16] V. S. Drenski, *Polynomial identities in simple Jordan algebras*.
C. R. Acad. Bulgare Sci. 35 (1982), 1327-1330.
- [17] M. L. Racine, *Minimal identities for Jordan algebras of degree 2*.
Comm. Alg. 13(12) (1985), 2493-2506.
- [18] M. L. Racine, *Minimal identities of octonion algebras*.
J. Algebra 115 (1988), 251-260.