SOBRE AS CONJECTURAS DE
BOVDI E ZASSENHAUS
EM ANÉIS DE GRUPO

ORLANDO STANLEY JURIAANS

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM
MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies**

São Paulo, Março de 1994.

SOBRE AS CONJECTURAS
DE
BOVDI E ZASSENHAUS
EM
ANÉIS DE GRUPO

Este exemplar corresponde à redação final da
tese de doutoramento devidamente corrigida e
defendida por Orlando Stanley Juriaans
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 22 de junho de 1994.

Banca examinadora:

- PROF. DR. FRANCISCO CÉSAR POLCINO MILIES (ORIENTADOR)-IME-USP
- PROF^a. DR^a. SÔNIA PITTA COELHO -IME-USP
- PROF. DR. NORAI ROMEU ROCCO -UnB
- PROF. DR. ADILSON GONÇALVES -UFRJ
- PROF. DR. MIGUEL ANGEL FERRERO -UFRGS

A

meus pais

e à minha querida esposa Alice.

” Canta, ó minha alma; canta ao Senhor! Rende a Ele sempre honra e louvor. Pois Ele é galardoador de todos aqueles que O buscam de verdade. Os que nEle confiam jamais serão envergonhados. Aleluia.”

AGRADECIMENTOS

Ninguém é uma ilha! Por isto tenho muitas pessoas a agradecer. Em primeiro lugar quero agradecer a **Deus** que me concedeu esta oportunidade, privilégio e alegria.

A Ele todo a honra e gloria.

Em segundo lugar quero agradecer a minha namorada e esposa Alice que me inspirou e encorajou.

Agradeço também aos Professores João Miranda de Montenegro e Luquesio Petrola de Melo Jorge por terem me ensinado os trilhos da matemática. Não posso esquecer os professores Maria Lucia S. Singer, Sônia P. Coelho, Maria Izabel Martins, Daciberg L. Gonçalves e, em especial, a Profesora Nair Fernandes com a qual tive conversas bastante proveitosas para a realização deste trabalho. Também não posso me esquecer dos amigos Marcelo Messias, João Agnaldo e o Prof. Plinio Simões pelo encorajamento.

Em especial quero agradecer ao meu orientador de tese Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies pelo seu encorajamento, paciência, correções e sobretudo a confiança mostrada em mim.

Por fim quero agradecer a todos deste departamento que colocaram a sua confiança em mim. Estou feliz que não os decepcionei.

Termino imitando o famoso JÚLIO CÉSAR: vini, vidi, VICI. GRAÇAS A DEUS E AOS AMIGOS!

RESUMO

Seja G um grupo e $\alpha = \sum \alpha(g)g$ uma unidade de torção de aumento 1 no anel de grupo $\mathbb{Z}G$. Define-se o k -traço generalizado de α por: $T^k(\alpha) = \sum_{o(g)=k} \alpha(g)$. Definem-se também os traços parciais por: $\tilde{\alpha}(g) = \sum_{h \sim g} \alpha(g)$

Em 1987 A. Bovdi [1] provou que, se p é um primo então

$T^{p^n}(\alpha) \equiv 1 \pmod{p}$ e $T^{p^i}(\alpha) \equiv 0 \pmod{p}$ se $i < n$ e conjecturou que, na verdade

$$T^{p^n}(\alpha) = 1 \quad \text{e} \quad T^{p^i}(\alpha) = 0 \quad \text{se} \quad i < n$$

O objetivo deste trabalho é provar a validade desta conjectura para algumas famílias de grupos; em particular a conjectura é provada para grupos supersolúveis e grupos de Frobenius finitos.

Existe uma outra conjectura referente a unidades de torção, também devida a A. Bovdi:

Suponha que G é um grupo tal que $n = \exp(\frac{G}{Z(G)})$ é finito, onde $Z(G)$ denota o centro de G . Se $\alpha \in \mathbb{Z}G$ é uma unidade de torção de aumento 1 e m é o menor inteiro positivo tal que $\alpha^m \in G$, então $m \mid n$.

Outro objetivo deste trabalho é provar a validade desta conjectura.

Finalmente, estudaremos a relação desta conjectura com uma famosa conjectura de H.J.Zassenhaus denotada por **ZC1** ([16]), para a qual existem já alguns resultados parciais. Em particular, provamos a conjectura **ZC1** para uma classe de grupos metabelianos.

Abstract

We study some conjectures in Integral Group Rings. In particular we prove that the conjecture of A. Bovdi [1] is true for supersolvable and finite Frobenius groups and any finite solvable group whose order is not divisible by the fourth-power of any prime.

We also investigate a special case of a conjecture of H. Zassenhaus, denoted by **ZC1** ([16]), which is proved to hold for groups of the form $G = \langle a \rangle \rtimes X$ where the order of a is a power of a prime p and X is an abelian group whose order is not divisible by p . Finally we confirm the following conjecture also due to A. Bovdi: Let α be a unit of finite order of augmentation one of the Integral Group Ring $\mathbb{Z}G$ and let m be the smallest positive integer such that $\alpha^m \in G$. Denote by $Z(G)$ the center of the group G . If the exponent of $\frac{G}{Z(G)}$ is finite then it is a multiple of m .

Conteúdo

I	INTRODUÇÃO	1
II	RESULTADOS PRELIMINARES	6
II.1	GRUPOS	7
II.2	ANÉIS DE GRUPOS	15
III	A CONJECTURA BC1	22
III.1	BC1 PARA GRUPOS SUPERSOLÚVEIS	23
III.2	BC1 PARA GRUPOS DE FROBENIUS	36
IV	AS OUTRAS CONJECTURAS	43
IV.1	A CONJECTURA BC4	43
IV.2	A CONJECTURA ZC1	45
IV.3	CONSIDERAÇÕES FINAIS	50

BIBLIOGRAFIA	55
------------------------	----

Capítulo I

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é resolver algumas conjecturas sobre unidades em Anéis de Grupo sobre os inteiros. Elas têm respostas positivas ao menos para diversas famílias de grupos. Uma das mais famosas é devida ao matemático H. J. Zassenhaus, feita no início da década de setenta e por muitos autores denominada de **ZC1**. Vamos citá-la a seguir.

ZC1: [16] *Sejam G um grupo finito e α uma unidade de torção do anel de grupo $\mathbb{Z}G$. Então α é racionalmente conjugada a um elemento de $\pm G$ i.e. existe uma unidade β do anel de grupo $\mathbb{Q}G$ tal que $\beta^{-1}\alpha\beta \in \pm G$.*

A conjectura acima contribuiu em muito para o desenvolvimento da Teoria de Anéis de Grupo, pois desde a sua formulação diversos pesquisadores empreenderam esforços no sentido de tentar encontrar uma resposta. Os primeiros resultados afirmativos e de relevância foram obtidos por C. Polcino, S. K. Sehgal, Z. Marciniak e J. Ritter (veja [10] e [12]) culminando com o trabalho de A. Weiss [18] que demonstrou uma versão

mais forte de ZC1 para grupos nilpotentes finitos:

Teorema I.0.1 *Seja G um grupo nilpotente finito; então todo subgrupo finito de $\mathbb{Z}G$, que admite um único homorfismo em $\mathbb{Z}$, é racionalmente conjugado a um subgrupo de G .*

A conjectura ZC1 para um grupo finito G qualquer ainda se encontra em aberto, constituindo, atualmente, um dos problemas mais difíceis dentro da teoria de Anéis de Grupo. Todas as outras conjecturas considerados neste trabalho são, no caso dos grupos finitos, consequência da conjectura ZC1. Isto ficará claro no próximo capítulo.

Outra conjectura examinada por nós é devida a A. Bovdi e data de 1987. Para citá-la precisamos primeiramente de uma definição.

Definição I.0.2 *Sejam G um grupo e α um elemento do anel de grupo $\mathbb{Z}G$. Se k é um inteiro positivo definimos o k -ésimo traço generalizado de α por:*

$$T^{(k)}(\alpha) = \sum_{o(g)=k} \alpha(g)$$

Podemos agora enunciar a conjectura mencionada acima, que denotaremos por BC1.

BC1: [1] *Seja G um grupo e α uma unidade de $\mathbb{Z}G$ cuja ordem é a potência de um primo, digamos $o(\alpha) = p^n$, e cuja soma dos coeficientes é 1. Seja $k \geq 0$ um número inteiro; então*

$$T^{(p^k)}(\alpha) = 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq k < n \quad \text{e} \quad T^{(p^n)}(\alpha) = 1.$$

O motivo que levou A. Bovdi a fazer esta conjectura foi o seguinte resultado que ele provou em [1]:

Lema I.0.3 *Sejam G um grupo e α uma unidade cuja ordem é a potência de um primo p , digamos $o(\alpha) = p^n$, e cuja soma dos coeficientes é 1. Então*

$$T^{(p^j)}(\alpha) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{para} \quad 0 \leq j < n \quad \text{e} \quad T^{(p^n)}(\alpha) \equiv 1 \pmod{p}.$$

È bom observar que no Lema anterior a restrição sobre j é desnecessária. A conjectura **BC1** foi confirmada, para grupos que são ao mesmo tempo nilpotentes e metabelianos, por M. Dokuchaev [4], em 1989. Depois surgiram mais dois trabalhos: o primeiro devido a M. Dokuchaev e S. K. Sehgal [5] e o segundo a A. Bovdi, S. K. Sehgal e J. Ritter [2], com os quais ficou demonstrado que a conjectura **BC1** é verdadeira para grupos nilpotentes e também para grupos metabelianos. Nestes trabalhos prova-se, na realidade, uma generalização de **BC1** que citamos abaixo:

BC2: *Sejam G um grupo, $\alpha \in \mathbb{Z}G$ uma unidade de torção cuja soma dos coeficientes é 1. Então existe um inteiro n tal que*

$$T^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{se} \quad k \neq n \quad \text{e} \quad T^{(n)}(\alpha) = 1.$$

A conjectura BC2 é portanto verdadeira para a mesma classe de grupos que BC1.

Sejam G um grupo finito e H um subgrupo finito do grupo de unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}G$. Então é possível mostrar que a ordem de H divide a ordem de G (veja [16]). Tendo este resultado em mente é natural fazer a seguinte conjectura:

BC3: *Sejam G um grupo e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de ordem finita. Então existe um elemento $g \in G$, tal que $o(\alpha) = o(g)$.*

Como dissemos no início, existem varias conjecturas na Teoria de Anéis de Grupo sobre os inteiros. Vamos citar mais uma delas que, até onde sabemos, apareceu pela primeira vez em [1].

BC4: *Sejam G um grupo, $Z(G)$ o centro de G e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de ordem finita. Suponha que o expoente de $\frac{G}{Z(G)}$, que denotaremos por $\exp(\frac{G}{Z(G)})$, seja finito. Seja $m > 0$ o menor inteiro tal que $\alpha^m \in G$; então, m divide $\exp(\frac{G}{Z(G)})$.*

Os principais resultados estabelecidos neste trabalho, com relação às conjecturas acima, são os seguintes:

1. BC1 vale para grupos supersolúveis e grupos de Frobenius.
2. BC1 é verdadeira para grupos solúveis cuja ordem não é divisível pela quarta

potência de nenhum número primo.

3. **BC1** é verdadeira para grupos solúveis finitos cujos subgrupos de Sylow são todos abelianos.

4. **ZC1** é verdadeira para grupos da forma $G = \langle a \rangle \rtimes X$ onde a é um p -elemento e X é um p' -grupo abeliano finito.

5. **BC4** é verdadeira .

É bom observar que **BC2** implica **BC3**. Logo, uma vez estabelecida **BC2**, **BC3** também estará provada. Além do capítulo I, o capítulo introdutório, o trabalho contém três capítulos. No capítulo II estabelecemos e recordamos alguns resultados básicos que serão usados neste trabalho. O capítulo III é dedicado à conjectura **BC1** enquanto o capítulo IV é dedicado às conjecturas **BC2** , **BC3** , **BC4** e **ZC1**. Finalizamos o trabalho comentando as reduções obtidas para **BC1**.

Capítulo II

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos os resultados básicos que serão utilizados durante este trabalho. Começaremos expondo a parte sobre grupos, recordando apenas o que for essencial para a compreensão do mesmo. Depois veremos a parte que trata de Anéis de Grupos em que recordaremos os principais resultados obtidos até agora, na tentativa de provar a conjectura **ZC1** e mostraremos que, no caso de grupos finitos, a conjectura **ZC1** implica as outras conjecturas. Também vamos deduzir alguns resultados que serão usados nos outros capítulos.

II.1 GRUPOS

Seja G um grupo. O *subgrupo de Frattini* de G é, por definição, a intersecção de todos os subgrupos maximais de G . Denotaremos este subgrupo por Φ . O *subgrupo de Fitting* de G é, por definição, o produto de todos os subgrupos normais e nilpotentes de G . Denotaremos este subgrupo por $\text{Fit}(G)$. A seguir citamos as propriedades básicas destes subgrupos. Estas propriedades podem ser encontradas em [13].

Lema II.1.1 *Seja G um grupo. Sejam Φ e $\text{Fit}(G)$ seus subgrupos de Frattini e Fitting respectivamente. Tem-se :*

1. Φ e $\text{Fit}(G)$ são subgrupos característicos de G .
2. Se Φ é finito então também é nilpotente.
3. Se G é finito, então tem-se que $\text{Fit}\left(\frac{G}{\Phi}\right) = \frac{\text{Fit}(G)}{\Phi}$.
4. Se G é finito e H é um subgrupo normal, abeliano, de G tal que $H \cap \Phi = \langle 1 \rangle$ então H tem um complemento em G .
5. Se G é solúvel não trivial então $\text{Fit}(G) \neq \langle 1 \rangle$ e $C_G(\text{Fit}(G)) \subseteq \text{Fit}(G)$.
6. Se G é solúvel e $H \triangleleft G$, então $H \cap \text{Fit}(G) \neq \langle 1 \rangle$.
7. Se $\Phi = \langle 1 \rangle$ e G é finito, então todos os subgrupos de Sylow de $\text{Fit}(G)$ são abelianos elementares.

Um grupo G é dito *policíclico* se possui uma série de subgrupos $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ tal que $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ é cíclico, $1 \leq i \leq n$. Se G possuir uma série normal, i.e. todos os G_i são normais em G , com fatores cíclicos, então G é dito *supersolúvel*. É claro que se G é supersolúvel então G também é policíclico. Estes grupos têm muitas propriedades interessantes; algumas delas são agrupadas no seguinte Lema (veja [13]).

Lema II.1.2

1. *Seja G um grupo policíclico. Então G é noetheriano e contém um subgrupo normal H que é livre de torção e de índice finito em G .*
2. *Se G é supersolúvel então G' é nilpotente.*
3. *Se G é nilpotente e finitamente gerado então G é supersolúvel.*

Definição II.1.3 *Sejam G um grupo finito e p um número primo. O subgrupo $O_p(G)$ é definido como sendo o maior p -subgrupo normal de G . Analogamente define-se $O_{p'}(G)$ como sendo o maior p' -subgrupo normal de G i.e., o maior subgrupo normal de G cuja ordem não é divisível por p .*

Pode-se provar que os subgrupos definidos acima são subgrupos característicos de G . Agora vamos provar um resultado que se mostrará bastante útil no próximo

capítulo. Ele aparece como sugestão de um exercício no livro *Characters of Finite Groups* de Martin I. ([9]).

Lema II.1.4 *Seja G um grupo solúvel finito e H um p -subgrupo de Sylow de G . Se $Fit(G)$ é um p -grupo então $O_{p'}(G) = 1$. Se H é abeliano então uma das seguintes situações ocorre:*

1. $H \triangleleft G$
2. $O_{p'}(G) \neq 1$

Demonstração: Note que o subgrupo de Fitting de $O_{p'}(G)$ está contido em $Fit(G)$. Logo, pela definição de $O_{p'}(G)$, segue-se a primeira parte.

Vamos provar a segunda parte. Seja $F = Fit(G)$. Então F é nilpotente. Suponha primeiro que F não é um p -grupo; então temos que $O_{p'}(F) \neq \langle 1 \rangle$. Sendo F característico em G , temos que $O_{p'}(F) \subseteq O_{p'}(G)$. Logo $O_{p'}(G) \neq 1$. Finalmente suponha que F é um p -grupo. Então F está contido num conjugado de H ; logo, pela sua normalidade e o fato de que os p -subgrupos de Sylow de G são conjugados, temos que $F \subseteq H$. Sendo H abeliano segue-se que $H \subseteq C_G(F)$. Logo, pelo Lema II.1.1, $H = F$. Assim $H \triangleleft G$. □

A seguir, vamos relembrar alguns resultados sobre grupos de Frobenius. Daremos agora a sua definição formal.

Definição II.1.5 Um grupo G é dito um grupo de Frobenius se G contém um subgrupo $H \neq \langle 1 \rangle$ que é disjunto de seus conjugados e que é seu próprio normalizador. O subgrupo H é chamado um complemento de Frobenius de G .

O próprio Frobenius mostrou que se G é um grupo de Frobenius finito então G contém um único subgrupo normal N , que não depende do complemento H , tal que $(|H|, |N|) = 1$ e $G = N \rtimes H$. Este subgrupo é chamado o *núcleo* de Frobenius de G . Ele também conjecturou que este núcleo era necessariamente nilpotente. Logo se provou que se o grupo G é solúvel então o núcleo é nilpotente mas o problema em geral continuou em aberto por mais de trinta anos. Finalmente J. Thompson na sua tese de doutoramento, pela qual mereceu a medalha Fields, provou que o núcleo sempre é nilpotente. Para terminar a classificação dos grupos de Frobenius faltou a classificação dos complementos de Frobenius. Isto foi feito por Burnside e Passman. Vamos utilizar esta classificação para resolver a conjectura BC1 para esta classe de grupos. As propriedades destes grupos, que vamos agora citar, podem ser encontradas em [7], [11] e [13]. Os nomes em parênteses indicam o autor ou os autores.

Teorema II.1.6 Sejam G um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo N . Então

1. (Thompson) N é nilpotente.
2. (Burnside) Os subgrupos de Sylow de H são cíclicos ou quatérnios generalizados.

3. (Passman) Se G não é solúvel então 2 divide a ordem de H e existe $M_0 \subset H$, da forma

$M_0 = SL(2, 5) \times M$, onde 2, 3 e 5 não dividem a ordem de M , tal que $H = M_0$ ou $[H : M_0] = 2$.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo finito de característica p . Sabemos que existe um número $n > 0$ tal que $\mathbb{K}$ tem $q = p^n$ elementos. O grupo $GL(2, q)$ é, por definição, o grupo de todas as matrizes dois por dois, inversíveis, com coeficientes em $\mathbb{K}$. O subgrupo de $GL(2, q)$ que consiste de todas as matrizes de determinante 1 é denotado por $SL(2, q)$. O centro de $GL(2, q)$ consiste das matrizes escalares e o grupo quociente que a ele corresponde é denotado por $PGL(2, q)$. A imagem $PSL(2, q)$ de $SL(2, q)$ em $PGL(2, q)$ é chamada o grupo linear projetivo especial. Finalmente o grupo de automorfismos deste último grupo, é denotado por $P\Gamma L(2, q)$. Estes grupos e os grupos cujo 2-subgrupos de Sylow são quatérnios generalizados apareceram de modo natural na tentativa de classificar os grupos simples finitos. Várias pessoas os estudaram mas mencionaremos apenas os que realmente se destacaram: M.Suzuki, W.Feit, M.Hall, J.Thompson e D. Gorenstein.

Precisaremos dos seguintes resultados relativos aos grupos acima. O primeiro pode ser encontrado em [9] e o segundo em [7].

Teorema II.1.7 (Brauer-Suzuki) *Seja G um grupo finito cujos 2-subgrupos de Sylow são quatérnios generalizados. Então existe $N \triangleleft G$, de ordem ímpar, tal que 2 divide a ordem de $Z(\frac{G}{N})$.*

Teorema II.1.8 (Gorenstein) *Seja G um grupo finito cujos 2-subgrupos de Sylow são dihedrais. Denote por $N = O_{2'}(G)$. Então uma das seguintes situações ocorre:*

1. $\frac{G}{N}$ é isomorfo a um subgrupo de $PGL(2, q)$ que contém $PSL(2, q)$ como subgrupo. Mais ainda, q é um número ímpar.
2. $\frac{G}{N} \cong A_7$.
3. $\frac{G}{N}$ é isomorfo a um 2-subgrupo de Sylow de G .

Precisaremos de alguma informação sobre o grupo $PGL(2, q)$. Uma boa referência para os resultados que citaremos a seguir é [7].

Lema II.1.9 *Seja $G = PGL(2, q)$, onde $q = p^n$ é a potência do primo p . Então $G = PGL(2, q) \rtimes C_n$, onde C_n é um grupo cíclico de ordem n . Também tem-se que a ordem de $PGL(2, q)$ é $(q^2 - 1)q$, que $PSL(2, q)$ é simples se $q > 3$ e os p -subgrupos de Sylow de $PSL(2, q)$ são abelianos elementares.*

Como corolário deste lema temos o:

Corolário II.1.10 *Seja G um grupo solúvel não nilpotente cujos 2-subgrupos de Sylow são grupos dihedrais. Supomos que $O_{2'}(G) = \langle 1 \rangle$. Então G é isomorfo a um subgrupo de S_4 .*

Demonstração: Pelo Teorema II.1.8 sabemos que existe um número ímpar, q , que é da forma $q = p^n$, com p um primo, tal que $PSL(2, q) \subseteq G \subseteq P\Gamma L(2, q)$. Como por hipótese G é solúvel temos, pelo Lema I.1.7, que $n = 1$ e $q = 3$. Agora S_4 tem ordem 24 e seus 2-subgrupos de Sylow são dihedrais; logo aplicando II.1.8 a S_4 temos que $P\Gamma L(2, 3) = S_4$, provando o resultado. $\square$

O corolário acima também pode ser encontrado no livro Group Theory de L. Scott ([14]).

Finalizando esta secção, vamos enunciar alguns resultados na forma de um lema. O primeiro e o segundo são óbvios mas os outros, que não são tão óbvios, podem ser encontrados em [7] e [12]. Queremos ainda mencionar que o último item é um resultado clássico do matemático alemão Gaschütz.

Lema II.1.11

1. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . Denote por $N_G(H)$ e $C_G(H)$ o normalizador e centralizador de H em G , respectivamente. Então existe um monomorfismo de $\frac{N_G(H)}{C_G(H)}$ em $\text{Aut}(H)$, o grupo de automorfismos de H .*
2. *Sejam p um primo diferente de 2 e G um grupo não abeliano cuja ordem é p^3 . Então G contém um único subgrupo abeliano de ordem p^2 . Mais ainda, este subgrupo contém todos os elementos de ordem p .*

3. Seja $G = \langle a \rangle \rtimes X$ onde $a \in G$ e X é um subgrupo abeliano de G tal que $(o(a), |X|) = 1$. Se o elemento $g = a^j x \in G$ é tal que todo primo que divide $o(a)$ divide $o(g)$, então x é um elemento central.
4. Seja G um grupo de quatérnios generalizados; então o grupo de automorfismos de G é um 2-grupo exceto quando $G \cong K_8$, o grupo de quatérnios de ordem 8. Neste caso, o grupo de automorfismos de G é isomorfo a S_4 .
5. Seja G um grupo cíclico cuja ordem é a potência de um primo p ; então o grupo de automorfismos de G é um grupo cíclico se $p \geq 3$ e é um 2-grupo se $p = 2$.
6. Sejam p um primo e G um grupo cuja ordem é uma potência de p . Se G tiver um único subgrupo de ordem p então G é cíclico ou então $p = 2$ e G é um grupo de quatérnios generalizados.
7. Seja G um grupo nilpotente. Então os subgrupos maximais de G são normais e se $H \triangleleft G$ é um subgrupo normal minimal, então $H \subseteq Z(G)$.
8. (Gaschütz) Sejam G um grupo finito, P um p -subgrupo de Sylow de G e H um subgrupo abeliano de P . Se H tiver um complemento em G , então H também terá um complemento em P .

II.2 ANÉIS DE GRUPOS

Seja G um grupo qualquer. O anel de grupo sobre $\mathbb{Z}$ é definido como sendo o anel cujos elementos são as somas formais

$$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)g, \quad \alpha(g) \in \mathbb{Z}$$

tal que o conjunto

$$\{g : \alpha(g) \neq 0\}$$

é finito, com as seguintes operações

1. $\sum_{g \in G} \alpha(g)g = \sum_{g \in G} \beta(g)g$ se e só se $\alpha(g) = \beta(g)$ para todo $g \in G$,
2. $\sum_{g \in G} \alpha(g)g + \sum_{g \in G} \beta(g)g = \sum_{g \in G} (\alpha(g) + \beta(g))g$,
3. $(\sum_{g \in G} \alpha(g)g)(\sum_{g \in G} \beta(g)g) = \sum_{g \in G} \gamma(g)g$
onde $\gamma(g) = \sum_{h \in G} \alpha(h)\beta(h^{-1}g)$

Seja $\mathbb{Z}G$ o anel de grupo sobre $\mathbb{Z}$ e $\alpha = \sum \alpha(g)g$ um elemento de $\mathbb{Z}G$. O conjunto de elementos de G que têm coeficiente não nulo é chamado o suporte de α e é denotado por $\text{supp}(\alpha)$.

Seja $g \in G$ e denote por C_g a classe de conjugação de g em G . Definimos

$$\tilde{\alpha}(g) = \sum_{h \in C_g} \alpha(h)$$

Se $k \geq 0$ é um número inteiro, denotamos por $G(k) = \{g \in G : o(g) = k\}$ e definimos

$$T^{(k)}(\alpha) = \sum_{o(g)=k} \alpha(g)$$

Seja H um subgrupo normal de G . Definimos $\Delta(G, H)$ como sendo o ideal de $\mathbb{Z}G$ gerado pelo conjunto $\{h - 1 : h \in H\}$. Se $H = G$ então denota-se $\Delta(G, G)$ por $\Delta(G)$. Note que $\Delta(G)$ é o núcleo do homomorfismo $\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$ definido por $\varepsilon(\sum x(g)g) = \sum x(g)$. Este homomorfismo é chamado o *homomorfismo de aumento*. É claro que se $\alpha \in \mathbb{Z}G$ é uma unidade, então $\varepsilon(\alpha) = \pm 1$. Definimos $V\mathbb{Z}G$ como sendo o conjunto

$$\{\alpha \in \mathbb{Z}G : \alpha \text{ é uma unidade e } \varepsilon(\alpha) = 1\}$$

que, obviamente, é um subgrupo do grupo de unidades de $\mathbb{Z}G$. É em torno deste subgrupo que giram todas as importantes conjecturas na Teoria de Anéis de Grupo. Note que se H é um subgrupo de $\mathbb{Z}G$ que admite um único homomorfismo em $\mathbb{Z}$ então H está contido em $V\mathbb{Z}G$. Isto esclarece o enunciado do Teorema I.0.1.

Os próximos resultados, que podem ser encontrados em [10], servirão para mostrar que, no caso de grupos finitos, ZC1 implica as outras conjecturas mencionadas no capítulo I.

Lema II.2.1 *Sejam G um grupo finito e $\alpha \in V\mathbb{Z}G$ uma unidade de ordem finita. Seja p um número primo e g um elemento de G tais que p divide a ordem de g e p não divide a ordem de α ; então $\tilde{\alpha}(g) = 0$.*

Lema II.2.2 *Seja G um grupo finito. Então são equivalentes :*

1. **ZC1** vale para G .
2. Se $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ é uma unidade de torção, então para todo elemento $g \in G$ temos que $\hat{\alpha}(g) \in \{0, 1\}$.

Além disso, tem-se:

3. Se $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ é uma unidade de torção que é conjugada em $\mathbb{Q}G$ a um elemento de G , então para todo $g \in G$ temos que $\tilde{\alpha}(g) \in \{0, 1\}$.

O próximo resultado, devido a M. Dokuchaev, mostra que **BC2** implica **BC3** (veja [4]).

Lema II.2.3 *Seja G um grupo finito e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção tal que para algum inteiro positivo m , tem-se que:*

$$T^{(m)}(\alpha) \neq 0 \quad \text{e} \quad T^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{se} \quad k \neq m.$$

Então $m = o(\alpha)$.

Podemos agora provar que, para grupos finitos, a conjectura **ZC1** é a mais forte das conjecturas.

Lema II.2.4 *Sejam G um grupo finito e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção. Se α é conjugada em $\mathbb{Q}G$ a um elemento de G então existe um único inteiro n tal que $T^{(n)}(\alpha) \neq 0$. Além disso, tem-se que a conjectura **ZC1** implica as outras conjecturas.*

Demonstração: De fato, suponha que α é conjugada em $\mathbb{Q}G$ a um elemento de G .

Seja $k \geq 0$ um número inteiro; note que $G(k)$ é fechado sob conjugação, logo existem elementos $g_1, \dots, g_n \in G(k)$ tais que $G(k) = \bigcup_{1 \leq j \leq n} C_{g_j}$, sendo tal união disjunta.

Pela definição de $T^{(k)}(\alpha)$ e o Lema II.2.2, temos, portanto, que $T^{(k)}(\alpha) \geq 0$. Agora G é a união disjunta $G = \bigcup_{k \mid |G|} G(k)$; logo, como $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$, temos que

$$1 = \sum_{g \in G} \alpha(g) = \sum_{k \mid |G|} T^{(k)}(\alpha)$$

Segue-se portanto que existe um único k_0 tal que $T^{(k_0)}(\alpha) \neq 0$.

Para complementar a demonstração do Lema note que, pelo Lema II.2.3, tem-se que $k_0 = o(\alpha)$. Logo, pelo Lema II.2.2, **ZC1** implica **BC2**. Agora o Lema II.2.3 nos diz que **BC2** implica **BC1** e **BC3**. Logo o Lema está provado. $\square$

Um resultado muito importante na Teoria de Anéis de Grupo é devido a D. S. Berman. Ele provou que se G é um grupo finito e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ é uma unidade de torção tal que $\alpha(1) \neq 0$, então $\alpha = 1$. O resultado que vamos citar a seguir generaliza o Teorema de Berman e pode ser encontrado em [2].

Lema II.2.5 *Seja G um grupo qualquer e $\alpha \in \mathbf{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção. Se existir $g \in Z(G)$ tal que $\alpha(g) \neq 0$; então $\alpha \in G$.*

Uma outra questão importante é a seguinte: Sejam G um grupo e $\alpha \in \mathbf{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção. O que se pode dizer de $\tilde{\alpha}(g)$ quando $g \in G$ é um elemento de ordem infinita? Existem algumas respostas parciais a esta pergunta (veja [2]). Vamos citar apenas uma delas.

Lema II.2.6 *Seja G um grupo noetheriano e $\alpha \in \mathbf{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção. Seja $g \in G$ um elemento de ordem infinita; então $\tilde{\alpha}(g) = 0$.*

No capítulo introdutório mencionamos os autores que obtiveram os primeiros resultados positivos e de relevância em relação à **ZC1**. Vamos precisar do resultado deles (veja [12]), e de um outro que pode ser encontrado em [10].

Lema II.2.7 (*Polcino-Schgal*)

1. *Seja $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ onde a e b são elementos de G cujas ordens são primas entre si; então vale a conjectura **ZC1** para G .*
2. *Sejam $G = A \rtimes X$, onde A e X são grupos abelianos cujas ordens são primas entre si, e $\alpha \in \mathbf{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade cuja ordem é prima com a ordem de A . Então α é conjugado, em $\mathbb{Q}G$, a um elemento de G .*

Vamos agora relembrar um dos mais belos resultados provados até agora e uma de suas consequências obtidos na tentativa de resolver a conjectura **ZC1**. Ele é devido a A. Weiss.

Teorema II.2.8 (Weiss) *Seja G um grupo nilpotente finito. Então todo subgrupo finito H de VZG é racionalmente conjugado a um subgrupo de G i.e., existe uma unidade $\beta \in \mathbb{Q}G$ tal que $\beta H \beta^{-1}$ é um subgrupo de G . Em particular G satisfaz a conjectura **ZC1**.*

Como consequência não trivial deste resultado, temos o seguinte (veja [16]):

Lema II.2.9 *Sejam G um grupo finito e P um p -subgrupo de Sylow normal de G . Seja H um p -subgrupo finito de VZG ; então existe um elemento $\alpha \in \mathbb{Q}G$ tal que $\alpha^{-1}H\alpha \subseteq P$.*

O resultado anterior tem um papel fundamental no nosso método de demonstração.

Existem alguns resultados, aparentemente isolados, de outros autores, que se mostraram essencial para o desenvolvimento deste trabalho. O nosso último lema reúne estes resultados e alguns outros, que também serão usados no próximo capítulo. O primeiro e o segundo itens se encontram em [6] e [8], o penúltimo item é conhecido como o Argumento de Whitcomb ([16]) e o último item é um resultado não trivial devido J. Ritter, S. K. Sehgal e A. Weiss (veja [16]).

Lema II.2.10

1. O grupo S_4 satisfaz ZC1.
2. O grupo S_5 satisfaz ZC1.
3. Sejam G um grupo finito e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ um elemento cujo ordem é a potência de um primo, digamos $o(\alpha) = p^n$. Suponha que os p -subgrupos de Sylow de G são abelianos elementares; então $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$ para $0 \leq j \leq n$.
4. Seja G um grupo metabeliano e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de ordem finita. Então existe um único elemento $g \in G$ tal que $\alpha - g \in \Delta(G) \Delta(G')$.
5. Sejam G , α e g como no item anterior. Então $o(\alpha) = o(g)$.

Demonstração: Temos que provar somente o item 3. Se um p -subgrupo de Sylow de G é abeliano elementar, segue-se que os p -elementos de G são todos de ordem p . Se $g \in G$ não tiver ordem p então, pelo Lema II.2.1, $\tilde{\alpha}(g) = 0$. Sendo α de aumento 1, segue-se que $T^p(\alpha) + \alpha(1) = 1$. Pelo Teorema de Berman, temos que $\alpha(1) \in \{0, 1\}$. Portanto temos o resultado. $\square$

Capítulo III

A CONJECTURA BC1

O principal objetivo deste capítulo é estabelecer a conjectura **BC1** nos casos mencionados no capítulo I. Ele tem duas secções. Na primeira, estabelecemos alguns resultados técnicos e provamos, como resultado principal, que **BC1** é verdadeira para grupos supersolúveis. Na segunda secção provamos que **BC1** também é verdadeira para grupos de Frobenius. Muitos outros resultados parciais são deduzidos que não mencionaremos agora mas aparecerão como Lemas, Corolários, Proposições ou Teoremas.

III.1 BC1 PARA GRUPOS SUPERSOLÚVEIS

Começaremos esta secção com alguns resultados que formam a base do nosso método de demonstração.

Lema III.1.1 *Sejam G um grupo finito e H um subgrupo normal de G . Sejam $\Psi: \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}(\frac{G}{H})$ a projecção natural e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de ordem finita tal que $(o(\alpha), |H|) = 1$. Se $\beta = \Psi(\alpha)$ então temos :*

1. $T^{(k)}(\alpha) = T^{(k)}(\beta)$, se $(k, |H|) = 1$
2. $T^{(k)}(\alpha) = 0$, se $(k, |H|) \neq 1$.

Demonstração: Seja g um elemento de G . Denotamos $\bar{g} = \Psi(g)$.

Supomos inicialmente que $(k, |H|) = 1$. Definimos os conjuntos

$$S = \{g \in G : o(g) = km, (m, k) = 1 \text{ e } g^k \in H\} \quad \text{e}$$

$$S_1 = \{g \in S : m \neq 1\}.$$

Se $o(\bar{g}) = k$ então $g \in S$. Claramente se $g \in S$ então $o(\bar{g}) = k$. Note que $S = G(k) \cup S_1$, sendo tal união disjunta, e que S_1 é um subconjunto normal de G . Logo, podemos escolher elementos $g_1, \dots, g_n$ de S_1 tais que S_1 é a união disjunta dos C_{g_i} , $1 \leq i \leq n$. Usando estes fatos temos que

$$T^{(k)}(\beta) = \sum_{o(g)=k} \alpha(g) = \sum_{g \in S} \alpha(g) = \sum_{g \in G(k)} \alpha(g) + \sum_{g \in S_1} \alpha(g) = T^{(k)}(\alpha) + \sum_{0 \leq j \leq n} \tilde{\alpha}(g_j).$$

Para provar o que queremos, basta mostrar que $\tilde{\alpha}(g_j) = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$. De fato, pela definição de S_1 temos que para cada elemento g_j existe um primo p_j tal que p_j divide $o(g_j)$ e p_j não divide $o(\alpha)$. Isto porque $(o(g_j), |H|) \neq 1$ e $(o(\alpha), |H|) = 1$. Logo, pelo Lema II.2.1, temos que $\tilde{\alpha}(g_j) = 0$. Assim $T^{(k)}(\alpha) = T^{(k)}(\beta)$.

Provaremos agora a segunda afirmação. Seja $o(g) = k$. Pela hipótese sobre k temos que existe um primo p , tal que p divide $o(g)$ e p não divide $o(\alpha)$. Logo, ainda pelo mesmo Lema, temos que $\tilde{\alpha}(g) = 0$. Note que $G(k)$ é fechado sob conjugação; logo existem $g_1, \dots, g_n$, elementos de $G(k)$, tal que $G(k)$ é a união disjunta, $G(k) = C_{g_1} \cup \dots \cup C_{g_n}$. Assim $T^{(k)}(\alpha) = \sum_{1 \leq j \leq n} \tilde{\alpha}(g_j) = 0$. $\square$

Seja $\alpha \in \mathbf{VZZ}G'$ uma unidade tal que $(o(\alpha), |G'|) = 1$. Se aplicamos o Lema anterior para α e G' obtemos, pelo Teorema de Berman e o Lema II.2.3, que $T^{(k)}(\alpha) = \delta_{nk}$, onde $n = o(\alpha)$.

Também se G é o produto direto de dois grupos que satisfazem **BC1** e cujas ordens são primas entre si, então o lema anterior nos diz que G também satisfaz a **BC1**. Para ver isto basta usar o Lema anterior para o grupo e cada fator separadamente. Daqui segue, indutivamente, que **BC1** continua válida para um produto direto de um número finito de grupos que satisfazem **BC1** e cujas ordens são primas entre si. Temos, portanto, o seguinte corolário.

Corolário III.1.2

1. Sejam G um grupo finito, $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção e $n = o(\alpha)$. Se $(o(\alpha), |G'|) = 1$, então $T^{(k)}(\alpha) = \delta_{nk}$.
2. Seja $G = A \times B$, onde A e B satisfazem a BC1 e $(|A|, |B|) = 1$. Então G satisfaz BC1.

Lema III.1.3 Sejam G um grupo finito e p um número primo. Suponha que G tenha um único subgrupo H de ordem p . Seja $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ um elemento cuja ordem é a potência de p , digamos $o(\alpha) = p^n$. Denote por $\Psi : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}(\frac{G}{H})$ a projeção natural e seja $\beta = \Psi(\alpha)$. Então $T^{(p^j)}(\beta) = T^{(p^{j+1})}(\alpha)$, para $j \geq 1$, e $T^{(p)}(\alpha) = 0$ ou 1 .

Demonstração: Vamos denotar $\bar{g} = \Psi(g)$. Se $o(\bar{g}) = p^j$ então $g^{p^j} \in H$. Afirmamos que $g^{p^j} \neq 1$. De fato, se isto fosse falso então, sendo H o único subgrupo de ordem p , teríamos que $g^{p^{j-1}} \in H$ e portanto $o(\bar{g}) < p^j$, o que é uma contradição. Assim $g^{p^j} \neq 1$ e está em H ; logo $o(g) = p^{j+1}$. Por outro lado se $o(g) = p^{j+1}$ então $g^{p^j} \in H$ pois sua ordem é p . Portanto $o(\bar{g}) = p^j$. Assim se $j \geq 1$ temos que

$$T^{(p^j)}(\beta) = \sum_{o(\bar{g})=p^j} \alpha(g) = \sum_{o(g)=p^{j+1}} \alpha(g) = T^{(p^{j+1})}(\alpha).$$

Note que, pelo Teorema de Berman, temos que $\alpha(1)$ é 0 ou 1. Por outro lado, pelo mesmo Teorema, temos que $\beta(1)$ é 0 ou 1. Note agora que $\beta(1) = \alpha(1) + T^{(p)}(\alpha)$. Logo segue-se o resultado. $\square$

O próximo resultado mostrará que a demonstração de **BC1** para grupos policíclicos se reduz a demonstrá-la para grupos finitos.

Lema III.1.4 *Seja G um grupo noetheriano que contém um subgrupo normal H livre de torção. Sejam $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ um elemento de ordem finita, $\Psi : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}(\frac{G}{H})$ a projeção natural e seja $\beta = \Psi(\alpha)$. Então $T^{(k)}(\alpha) = T^{(k)}(\beta)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, se $\frac{G}{H}$ satisfaz **BC1** então G satisfaz **BC1**.*

Demonstração: Denotamos por $\bar{g} = \Psi(g)$. Se $g \in G$ é um elemento de ordem finita então, como H é livre de torção, temos que $o(\bar{g}) = o(g)$. Portanto, se denotamos por

$$S = \{g \in G : o(\bar{g}) = k\}$$

então S se escreve como uma união disjunta: $S = G(k) \cup S_1$, onde

$$S_1 = \{g \in G : o(g) = \infty, o(\bar{g}) = k\}.$$

Observe que S_1 é um subconjunto normal de G , pois $H \triangleleft G$. Logo podemos escolher elementos $g_1, \dots, g_n$ de S_1 tais que $S_1 = C_{g_1} \cup \dots \cup C_{g_n}$. Assim temos que

$$T^{(k)}(\beta) = \sum_{g \in S} \alpha(g) = \sum_{g \in G(k)} \alpha(g) + \sum_{1 \leq j \leq n} \hat{\alpha}(g_j) = T^{(k)}(\alpha) + \sum_{1 \leq j \leq n} \hat{\alpha}(g_j).$$

Agora $o(g_j) = \infty$ para todo j . Logo, pelo Lema II.2.6, temos que $\hat{\alpha}(g_j) = 0$ para todo j . Assim obtemos o resultado desejado. $\square$

Como consequência temos que **BC1** vale para grupos nilpotentes. Este resultado também foi provado por A. Bovdi, Z. Marcianik e S. K. Seghal [2].

Teorema III.1.5 *Seja G um grupo nilpotente; então vale BC2 para G . Em particular vale BC1.*

Demonstração: Seja $\alpha \in VZG$ uma unidade de torção. Podemos substituir G pelo subgrupo gerado pelo suporte de α e, portanto, podemos supor que G é finitamente gerado. O lema II.1.2 nos diz então que G é um grupo policíclico e, conseqüentemente, contém um subgrupo normal H de índice finito que é livre de torção. Com a notação do Lema anterior, temos que $T^{(k)}(\alpha) = T^{(k)}(\beta)$. Agora, o resultado de A. Weiss e os Lemas II.2.3 e II.2.4 nos dizem que BC2 vale para o grupo quociente $\frac{G}{H}$. O resultado segue do Lema anterior. $\square$

Daremos agora uma definição para simplificar alguns argumentos que usaremos nas demonstrações.

Definição III.1.6 *Seja G um grupo e sejam m e n dois inteiros positivos. Diremos que G é (m,n) -absorvente se o subgrupo $\langle g \in G : o(g) \mid m^n \rangle$ tem expoente menor ou igual a m^n . Se G for (m,n) -absorvente para todo par (m,n) de inteiros positivos, então diremos que G é absorvente.*

Alguns exemplos de grupos absorventes são os grupos abelianos, os p -grupos regulares e K_8 , o grupo dos quatérnios de ordem 8. O fato que grupos abelianos e também K_8 são absorventes, é trivial. Para ver isto para p -grupos regulares basta usar o Teorema IV.3.14 de [15] que diz que se G é um p -grupo regular e g e h são elementos de G cujas ordens dividem p^n , então a ordem do elemento gh também divide p^n .

Também se $H \subseteq G$ é um subgrupo central de índice finito, digamos $[G : H] = n$, então a aplicação $g \mapsto g^n$ é um homomorfismo de G e portanto G é $(n, 1)$ -absorvente. Esta última afirmação segue do Teorema X.1.3 de [13].

Lema III.1.7 *Seja G um grupo (m, n) -absorvente. Sejam $k = m^n$ e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de ordem k ; então $\sum_{d|k} T^{(d)}(\alpha) \in \{0, 1\}$.*

Demonstração: Seja $H = \langle g \in G : g^k = 1 \rangle$. Então $H = \{g \in G : g^k = 1\}$ pois G é $(k, 1)$ -absorvente. Segue-se portanto que $H = \bigcup_{d|k} G(d)$ e é normal em G .

Assim temos que

$\sum_{g \in H} \alpha(g) = \sum_{d|k} T^{(d)}(\alpha)$. Considere a projeção $\Psi : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}(\frac{G}{H})$ e seja $\beta = \Psi(\alpha)$. Sendo α um elemento de torção segue-se que β é um elemento de torção e portanto, pelo Lema II.2.5, temos que $\beta(\bar{1}) \in \{0, 1\}$. Como $\beta(\bar{1}) = \sum_{g \in H} \alpha(g)$, obtém-se o resultado. $\square$

Corolário III.1.8 *Sejam G um grupo e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ um elemento cujo ordem é a potência de um primo p , digamos $o(\alpha) = p^n$. Suponha que G é (p, j) -absorvente para todo $0 \leq j \leq n$. Então $T^{(p^j)}(\alpha) = 0$, se $0 \leq j < n$ e $T^{(p^n)}(\alpha) = 1$.*

Em particular, BC1 é verdadeira para grupos absorventes.

Demonstração: Repetindo a mesma demonstração do Lema anterior para o par (p, l) , temos que $\sum_{0 \leq j \leq l} T^{(p^j)}(\alpha) \in \{0, 1\}$ para todo $0 \leq l \leq n$. Como, pelo Lema II.2.5, $\alpha(1) \in \{0, 1\}$ segue-se, indutivamente, que existe um único índice $0 \leq k_0 \leq n$ tal que $T^{(p^{k_0})}(\alpha) \neq 0$. Pelo Lema I.0.3 tem-se que $k_0 = n$. $\square$

O corolário anterior mostra que BC1 é verdadeira também para grupos absorventes. A Proposição III.1.9 e o Teorema III.1.10 mostrarão que BC1 é também verdadeira para outra classe de grupos e para certos grupos finitos.

Antes de continuar queremos mencionar que utilizaremos a expressão '*Seja G um contra-exemplo minimal*' para significar que o grupo G é um contra-exemplo de ordem mínima.

Proposição III.1.9 *Sejam G um grupo solúvel finito e $\alpha \in \mathbf{VZ}G$ um elemento cuja ordem é a potência de um primo p , digamos $o(\alpha) = p^n$. Suponha que os p -subgrupos de Sylow de G que são abelianos; então $T^{(n)}(\alpha) = \delta_{nj}$, para todo j .*

Demonstração: Daremos uma demonstração por contradição. Para isto, seja G um contra-exemplo minimal e $\alpha \in \mathbf{VZ}G$ um elemento de ordem $o(\alpha) = p^n$ que não satisfaz a nossa tese. Seja $H < G$ um p -subgrupo de Sylow de G então, pelo Lema II.1.4, temos que $H \triangleleft G$ ou $O_{p'}(G) \neq 1$. Estudamos os dois casos separadamente.

Caso 1 : $H \triangleleft G$.

Neste caso, G é (p, j) -absorvente para todo $j \geq 0$. Logo podemos aplicar o corolário anterior para obter uma contradição.

Caso 2: $O_{p'}(G) \neq 1$

Neste caso aplicamos o Lema III.1.1 com $H = O_{p'}(G)$. Sendo G um contra-exemplo minimal temos que $\frac{G}{H}$ satisfaz a nossa tese e, pelo mesmo Lema, obtemos novamente uma contradição. Portanto, o resultado está provado. $\square$

Seja G um grupo finito. A *série central descendente* de G é por definição a série definida indutivamente por $\gamma_0 = G$ e $\gamma_{k+1} = [G, \gamma_k]$. No que se segue denotaremos por $\gamma_m(G)$ o menor termo não trivial da série central descendente de G . Lembramos que o grupo quociente associado a este subgrupo é um grupo nilpotente. Estamos agora em condições de obter outros resultados significativos em relação à conjectura BC1.

Teorema III.1.10 *Seja G um grupo solúvel finito tal que, para todo primo q que divide a ordem de $\gamma_m(G)$ os q -subgrupos de Sylow de G são abelianos. Então G satisfaz BC1.*

Demonstração: Seja $\alpha \in V\mathbb{Z}G$ uma unidade cuja ordem é a potência de um primo p , digamos $o(\alpha) = p^n$. Analisaremos dois casos distintos.

Caso 1 : p não divide a ordem de $\gamma_m(G)$.

Considere a projeção $\Psi : \mathbb{Z}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}(\frac{G}{\gamma_m(G)})$ e seja $\beta = \Psi(\alpha)$. Sendo $\frac{G}{\gamma_m(G)}$ nilpotente segue-se, pelo Teorema II.2.8 e o Lema II.2.4, que existe um único inteiro k , com $0 \leq k \leq n$, tal que $T^{(p^j)}(\beta) = \delta_{kj}$ para $0 \leq j \leq k$. Por outro lado temos, pelo Lema III.1.1, que $T^{(p^j)}(\beta) = T^{(p^j)}(\alpha)$. Logo, pelo lema I.0.3, temos que $k = n$ e o resultado está provado neste caso.

Caso 2 : p divide a ordem de $\gamma_m(G)$.

Neste caso, pela nossa hipótese, tem-se que os p -subgrupos de Sylow de G são abelianos e, portanto, podemos aplicar a Proposição anterior. $\square$

Queremos destacar o seguinte corolário que aparece como um dos resultados principais mencionados no capítulo I.

Corolário III.1.11 *Seja G um grupo solúvel finito cujos subgrupos de Sylow são todos abelianos. Então G satisfaz BC1.*

Note que se G é um grupo solúvel finito e p é um número primo que não divide a ordem de G' , então os p -subgrupo de Sylow de G são abelianos; portanto, pelo Lema anterior, toda unidade normalizada α de $\mathbb{Z}G$ de ordem potência de p , digamos p^n , satisfaz $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$, $0 \leq j \leq n$. Isto significa que para unidades cuja ordem é uma potência de um primo que não divide $|G'|$, a Teorema III.1.10 é mais geral do que o Corolário III.1.2.

O próximo resultado mostra que BC1 é verdadeira para grupos solúveis finitos cuja ordem não é divisível pela quarta potência de nenhum número primo. Este resultado apareceu na tentativa de enfraquecer as hipóteses do Teorema anterior. Denotaremos por L o subgrupo $\gamma_m(G)$. Na realidade temos um resultado um pouco mais geral.

Teorema III.1.12 *Sejam G um grupo solúvel finito tal que se um primo q divide a ordem de L então q^4 não divide a ordem de G . Então G satisfaz à conjectura BC1.*

Demonstração: Faremos uma prova por contradição.

Seja G um contra-exemplo minimal e seja $\alpha \in V\mathbb{Z}G$ um elemento cuja ordem

é a potência de um primo, digamos $o(\alpha) = p^n$ que não satisfaz a BC1. Como na demonstração do caso 1 do Teorema III.1.10 concluímos que podemos supor que o primo p divide a ordem L . Logo, pela nossa hipótese, p^4 não divide a ordem de G . Seja $F = \text{Fit}(G)$ o subgrupo de Fitting de G . Vamos estudar dois casos separadamente.

Caso 1: F não é um p-grupo.

Neste caso existe um primo $q \neq p$ que divide a ordem de F . Seja $H \subseteq F$ um q -subgrupo de Sylow de F ; então, pelo Lema II.1.1, temos que $H \triangleleft G$. Note que o grupo quociente $\frac{G}{H}$ satisfaz as hipóteses do Teorema. Com a notação do Lema III.1.1, temos que $T^{(p')}(\alpha) = T^{(p')}(\beta)$. Por outro lado, pela minimalidade de G como contra-exemplo, temos que $\frac{G}{H}$ satisfaz à BC1. Mas temos que $T^{(p')}(\alpha) = T^{(p')}(\beta)$. Logo, pelo Lema I.0.3, G satisfaz BC1.

Caso 2: F é um p-grupo.

Sendo G solúvel temos que F não é trivial. Seja P um p-subgrupo de Sylow de G . Pela Proposição III.1.9 temos que P não é abeliano; logo temos que $|P| = p^3$ pois os grupos de ordem p^2 e p são abelianos. Afirmamos que P não é normal em G pois, caso contrário, pelo Lema II.2.9, existe um elemento $\beta \in \mathbb{Q}G$ tal que $\beta^{-1}\alpha\beta \in G$ e o Lema II.2.4 nos diz então que $T^{(p')}(\alpha) = \delta_{nj}$, uma contradição. Assim P não é normal em G e, portanto, $F \neq P$. Logo temos que $|F|$ é p ou p^2 . Note que, pela normalidade de F , temos que $F \subseteq P$. Se $|F| = p$ temos, pelo Lema II.1.11, que $F \subseteq \mathcal{Z}(P)$ e, conseqüentemente, pelo Lema II.1.1, temos que $F = P$, uma contradição. Portanto $|F| = p^2$.

Nosso objetivo agora é mostrar que F é um grupo abeliano elementar. Pelo Lema II.1.1 basta provar que Φ , o subgrupo de Frattini de G , é $\langle 1 \rangle$. De fato, suponha que $\Phi \neq \langle 1 \rangle$. Então, pelo Lema II.1.1, temos que $1 \neq \text{Fit}(\frac{G}{\Phi}) = \frac{F}{\Phi}$; em particular $\frac{G}{\Phi} \neq 1$. Por outro lado $\frac{\text{Fit}(G)}{\Phi} \neq \langle 1 \rangle$, pois G é solúvel (veja Lema II.1.1). Note que um p-subgrupo de Sylow de $\frac{G}{\Phi}$ é abeliano; portanto, pelo mesmo Lema, temos que $\text{Fit}(\frac{G}{\Phi})$ é um p-subgrupo de Sylow de $\frac{G}{\Phi}$. Logo F é um p-subgrupo de Sylow de G , o que é uma contradição.

Nesta altura é bom que separemos a prova em dois subcasos.

Caso i: p diferente de 2.

Sendo Φ trivial e F um subgrupo abeliano de G temos, pelos Lemas II.1.1 e II.1.11, que existe um subgrupo X de P tal que $P = F \rtimes X$. Por outro lado devemos ter que $|X| = p$; logo, pelo Lema II.1.11, temos que $X \subset F$, uma contradição.

Caso ii: $p = 2$.

Já sabemos que um 2-subgrupo de Sylow de G não é abeliano e, portanto, é isomorfo ao grupo D_4 , o grupo diedral de ordem 8, ou a K_8 , o grupo quatérnio de ordem 8. Mas $\text{Fit}(G)$ é abeliano elementar de ordem 4; logo um 2-subgrupo de Sylow de G deve ser isomorfo a D_4 . Agora como $\text{Fit}(G)$ é um 2-grupo temos, pelo Lema II.1.4, que $O_{2'}(G) = 1$; logo, pelo Corolário II.1.10, temos que G é isomorfo a um subgrupo de S_4 . Os Lemas II.2.10 e II.2.4, nos dão a contradição final. $\square$

Combinando os Teoremas III.1.10 e III.1.12 temos o seguinte resultado.

Teorema III.1.13 *Seja G um grupo finito e solúvel tal que se um primo q divide a ordem de $\gamma_m(G)$ então ou os q -subgrupos de Sylow de G são abelianos ou então p^4 não divide a ordem de G . Então G satisfaz BC1.*

O próximo resultado é o precursor de um dos nossos principais resultados.

Proposição III.1.14 *Sejam G um grupo finito tal que G' é nilpotente. Então G satisfaz BC1.*

Demonstração: Faremos uma prova por contradição.

Seja G um contra-exemplo minimal e seja $\alpha \in \text{VZ}G$ uma unidade cuja ordem é potência de um primo p , digamos $o(\alpha) = p^n$. Consideraremos dois casos distintos.

Caso 1: G' não é um p -grupo.

Neste caso existe um primo $q \neq p$ que divide a ordem de G' . Seja H um q -subgrupo de Sylow de G' ; então $H \triangleleft G$. Com a notação do Lema III.1.1, temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = T^{(p^j)}(\beta)$ para todo $j \geq 0$. Por outro lado, sendo G é um contra-exemplo minimal, temos que $\frac{G}{H}$ satisfaz BC1. Logo, pelo Lema I.0.3, temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$, $1 \leq j \leq n$.

Caso 2: G' é um p -grupo.

Neste caso temos que um p -subgrupo de Sylow de G é normal. Logo, pelo Teorema II.2.9 e o Lema II.2.2, temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$.

Assim temos que G satisfaz BC1, uma contradição. □

Note que se G é um grupo metabeliano finito, então G' é nilpotente e, portanto, G satisfaz BC1. Isto é um caso particular do resultado de [5] já mencionado no capítulo I. Estamos agora em condições para provar o resultado principal desta secção.

Teorema III.1.15 *Sejam G um grupo policíclico tal que G' é nilpotente. Então G satisfaz BC1.*

Demonstração: Sendo G um grupo policíclico temos, pelo lema II.1.2, que G é noetheriano e, portanto, contém um subgrupo normal H , que é de índice finito e livre de torção. Seja $\overline{G} = \frac{G}{H}$; então, pela nossa hipótese e a Proposição anterior, temos que $\overline{G}$ satisfaz a BC1. Logo, pelo Lema III.1.4, temos que G também satisfaz BC1. $\square$

Como consequência temos um dos resultados mencionados no capítulo I.

Teorema III.1.16 *Seja G um grupo supersolúvel. Então G satisfaz BC1.*

Demonstração: Sendo G um grupo supersolúvel temos que G é policíclico e, pelo Lema II.1.2, G' é nilpotente. O resultado segue agora pelo Teorema anterior. $\square$

Se G é um grupo nilpotente finitamente gerado então, pelo Lema II.1.2, G também é supersolúvel. Logo BC1 vale para grupos nilpotentes. Isto é um caso particular do Teorema III.1.5.

III.2 BC1 PARA GRUPOS DE FROBENIUS

Nesta secção provaremos que a conjectura **BC1** é verdadeira para grupos de Frobenius. Começaremos com alguns lemas preparatórios.

Lema III.2.1 *Seja G um grupo solúvel finito, cujos subgrupos de Sylow são abelianos ou quaterniões generalizados. Então **BC1** vale para G .*

Demonstração: Usaremos indução sobre $|G|$. Podemos supor que $|G| > 1$. Seja $\alpha \in \text{VZ}G$ uma unidade de ordem finita cuja ordem é a potência de um primo, digamos $o(\alpha) = p^n$. Se $p \neq 2$ então, pela nossa hipótese, os p -subgrupos de Sylow de G são abelianos; logo, pela Proposição III.1.9, temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$ para todo j . Portanto podemos supor que $p = 2$. Para maior clareza, vamos agora dividir a demonstração em dois casos.

Caso 1: $\text{Fit}(G)$ não é um 2-grupo.

Neste caso existe um primo $q \neq 2$ que divide a ordem de $\text{Fit}(G)$. Seja H um q -subgrupo de Sylow de $\text{Fit}(G)$. Então, pelo Lema II.1.1, H é normal em G . Com a notação do Lema III.1.1 temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = T^{(p^j)}(\beta)$. Por outro lado, o grupo quociente $\frac{G}{H}$ verifica as hipóteses do Lema e, portanto, satisfaz **BC1**. Logo, pelo Lema I.0.3, temos que

$$T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Caso 2: $\text{Fit}(G)$ é um 2-grupo.

Note que, pela Proposição III.1.9, podemos supor que os 2-subgrupos de Sylow de G

são quatérnios generalizados. Logo, pelo Lema II.1.11, temos que $\text{Fit}(G)$ é um grupo cíclico ou quatérnio generalizado. Assim, pelo mesmo Lema, temos que $\text{Aut}(\text{Fit}(G))$ é um 2-grupo ou é isomorfo a S_4 , o grupo simétrico de ordem 24, e este caso só acontece só se $\text{Fit}(G)$ for isomorfo a K_8 , o grupo quatérnio de ordem 8. Ainda pelo mesmo Lema, segue-se que G é um 2-grupo, e portanto é nilpotente, ou $|G|$ divide 48 e, neste caso, $\text{Fit}(G) \cong K_8$. Se G é nilpotente podemos aplicar o Teorema II.2.8 e o Lema II.2.4. Por outro lado se $|G| \leq 24$ temos, pelo Teorema III.1.12, que G satisfaz **BC1**. Logo podemos supor que $|G|$ é 48. Neste caso, sendo os 2-subgrupos de Sylow de G quatérnios generalizados e F um 2-grupo, temos que G possui um único subgrupo H de ordem 2 (veja o Teorema II.1.7).

Considere o grupo quociente $\overline{G} = \frac{G}{H}$. Então temos que $|\overline{G}|$ é 24; logo, pelo Teorema III.1.2, $\overline{G}$ satisfaz **BC1**. Pelo Lema III.1.3 segue-se que G também satisfaz **BC1**.

Logo o resultado está provado. $\square$

Proposição III.2.2 *Seja $G = A \rtimes X$, onde A é nilpotente, $(|A|, |X|) = 1$ e X satisfaz **BC1**. Então G satisfaz **BC1**.*

Demonstração: Faremos uma demonstração por contradição.

Seja G um contra-exemplo minimal e $\alpha \in \text{VZ}(G)$ uma unidade cuja ordem é potência de um primo, digamos $o(\alpha) = p^n$, que contradiz a **BC1**.

Se p não divide $|A|$, aplicamos o Lema III.1.1 com $H = A$. Como, por hipótese, X satisfaz **BC1** segue-se que $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$.

Supomos, portanto que, p divide $|A|$. Provaremos inicialmente que A é um p -grupo. De fato, se isto não é verdade, então existe um primo $q \neq p$ que divide $|A|$. Seja H um q -subgrupo de Sylow de A ; então $H \triangleleft G$, pois A é normal e nilpotente. O grupo quociente $\frac{G}{H}$ satisfaz as condições do enunciado logo, pela minimalidade de G como contra-exemplo, satisfaz **BC1**. Aplicando o Lema III.1.1, para $G \in H$, temos que $T^{(\nu^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$, uma contradição.

Logo A é um p -grupo; portanto, pela nossa hipótese, temos que A é um p -subgrupo de Sylow de G e é normal. Neste caso o Teorema II.2.8 e o Lema II.2.4 nos dão uma contradição. $\square$

Estamos em condições para provar **BC1** para grupos de Frobenius solúveis.

Teorema III.2.3 *Seja G um grupo de Frobenius solúvel. Então G satisfaz **BC1**.*

Demonstração: Sendo G um grupo de Frobenius segue-se, pelo Teorema II.1.6, que existem subgrupos A e X de G , com A normal e nilpotente e $(|A|, |X|) = 1$, tais que $G = A \rtimes X$. Ainda, pelo mesmo Lema, tem-se que X satisfaz as hipóteses do Lema III.2.1 e, portanto, satisfaz **BC1**. O resultado segue agora da Proposição anterior. $\square$

Ficou claro que para provar o caso em que G é um grupo de Frobenius não solúvel, basta provar que um complemento de Frobenius não solúvel satisfaz **BC1**. Para provar este fato, necessitamos do seguinte lema.

Lema III.2.4 *O grupo $G = SL(2, 5)$ satisfaz BC1.*

Demonstração: Pelo Teorema II.1.6, tem-se que G é um complemento de Frobenius. Logo, pelo mesmo Lema, um 2-subgrupo de Sylow de G é isomorfo a K_8 . Assim, pelo Lema II.1.9, temos que G tem um único subgrupo H de ordem dois que, portanto, é central. Pelo Lema II.2.10, o grupo quociente satisfaz BC1, pois seus subgrupos de Sylow são todos abelianos elementares. Logo, pelo Lema III.1.3, G satisfaz BC1. $\square$

Corolário III.2.5 *Seja G um grupo não solúvel de ordem 120; então G satisfaz BC1.*

Demonstração: Sendo G um grupo de ordem 120 e não solúvel temos que G é isomorfo a um dos seguintes grupos: S_5 , $SL(2, 5)$, $C_2 \times A_5$. O caso em que G é isomorfo a $SL(2, 5)$ é coberto pelo Lema anterior enquanto o caso em que G é isomorfo a S_5 é coberto pelo Lema II.2.10. Finalmente se G é isomorfo a $C_2 \times A_5$ temos que os subgrupos de Sylow de G são todos abelianos elementares; logo o Lema II.2.10 nos dá a conclusão final. $\square$

Vamos agora provar que um complemento de Frobenius, que não é solúvel, satisfaz BC1. É aqui que vamos ver a importância da classificação destes complementos.

Proposição III.2.6 *Seja G um complemento de Frobenius que não é solúvel. Então G satisfaz BC1.*

Demonstração: Sendo G um complemento de Frobenius que não é solúvel segue-se, pelo Teorema II.1.6, que G possui um subgrupo normal H da forma $H = SL(2, 5) \times H_0$ tal que $[G : H] = 1$ ou 2 e $2, 3$ e 5 não dividem $|H_0|$. Decorre, do mesmo Lema, que os subgrupo de Sylow de H_0 são cíclicos portanto H_0 é solúvel e, pela Proposição III.2.1, satisfaz **BC1**. Também temos, pelo mesmo Lema, que um 2-subgrupo de Sylow de G é um grupo quatérnio generalizado. Para maior clareza vamos dividir o resto da demonstração em dois casos.

Caso 1: $G = H$.

Este é o caso mais fácil. O Lema III.2.4 nos diz que $SL(2, 5)$ satisfaz **BC1** enquanto que o Lema III.2.1 nos diz que H_0 satisfaz **BC1**. Aplicamos o Corolário III.1.2 para obter o resultado.

Caso 2: $[G : H] = 2$.

Seja $\alpha \in V\mathbb{Z}G$ uma unidade cuja ordem é a potência de um primo p , digamos $o(\alpha) = p^n$. Vamos considerar três subcasos.

Caso i: p é diferente de $2, 3$ e 5 .

Neste caso aplicamos o Lema III.1.1 para G e o subgrupo normal $SL(2, 5)$. Note que o grupo quociente $\overline{G}$ tem todos os seus subgrupos de Sylow cíclicos logo, pelo Lema III.2.1, satisfaz **BC1**. Pelo Lema III.1.1 temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$.

Caso ii: $p = 3$ ou 5 .

Neste caso temos que um p -subgrupo de Sylow de G é abeliano elementar logo, pelo Lema II.1.10, temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$.

Caso iii: $p = 2$.

Seja $\overline{G} = \frac{G}{H_0}$. Então, como G não é solúvel e H_0 é solúvel, temos que $\overline{G}$ não é solúvel. Também, como $[G : H] = 2$, tem-se que $|\overline{G}| = 240$. Pelo Teorema II.1.6, temos que um 2-subgrupo de Sylow de $\overline{G}$ é um grupo de quatérnio generalizado. Logo, pelo Teorema II.1.7, tem-se que $\overline{G}$ tem um único subgrupo, H_1 , de ordem dois. Seja G_1 o grupo quociente $\frac{\overline{G}}{H_1}$. Então G_1 não é solúvel e tem ordem 125. Logo, pelo Corolário III.2.5, satisfaz BC1. O Lema III.1.3 nos diz então que $\overline{G}$ satisfaz BC1. Mas então, pelo Lema III.1.1, temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$. Temos assim o resultado desejado. $\square$

Teorema III.2.7 *Seja G um grupo de Frobenius. Então G satisfaz BC1.*

Demonstração: Em virtude do Teorema III.2.3 basta provarmos o caso em que G não é solúvel mas este caso segue das Proposições III.2.2 e III.2.6. $\square$

Vamos finalizar este capítulo com um resultado que pode ser deduzido dos fatos já obtidos.

Teorema III.2.8 *Seja G um grupo solúvel finito, tal que se um primo p divide a ordem de $\gamma_m(G)$ então os p -subgrupos de Sylow de G são abelianos, diedrais ou quatérnios generalizados. Então G satisfaz BC1.*

Demonstração: Por indução podemos supor que $|G| > 1$.

Seja $\alpha \in \text{VZG}$ uma unidade cuja ordem é a potência de um primo p , digamos

$o(\alpha) = p^n$. Se G é um grupo nilpotente aplicamos o resultado de A. Weiss. Se p não divide $|\gamma_m(G)|$ então, pelo Lema III.1.1 e o Teorema III.1.5, temos que $T^{(p^j)}(\alpha) = \delta_{nj}$. Se p divide $|\gamma_m(G)|$ então, pela nossa hipótese e a Proposição III.2.1, temos que $p = 2$ e um 2-subgrupo de Sylow de G é um grupo diedral.

Segue-se, pelo Corolário II.1.10, que $|G|$ divide $2 \cdot 4$ ou então $O_{2'}(G) \neq 1$. Se $|G| = 24$ aplicamos o Teorema III.1.12. Finalmente se $O_{2'}(G) \neq 1$ então aplicamos a hipótese de indução e o Lema III.1.1 com $H = O_{2'}(G)$. Logo temos o resultado. $\square$

Capítulo IV

AS OUTRAS CONJECTURAS

Neste capítulo vamos considerar as conjecturas **BC2**, **BC3**, **BC4** e **ZC1**. A conjectura **ZC1** é bem conhecida enquanto não sabemos por quanto tempo a conjectura **BC3** já existe. Até onde sabemos a conjectura **BC4** aparece pela primeira vez em [1]. Na primeira secção vamos provar que a conjectura **BC4** é verdadeira enquanto a secção 2 será usada para provar alguns casos particulares da conjectura **ZC1**. Finalizamos este capítulo analisando as conjecturas **BC2** e **BC3**.

IV.1 A CONJECTURA BC4

Lema IV.1.1 *Seja G um grupo tal que $\exp(\frac{G}{Z(G)})$ é finito. Sejam $\alpha \in V\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção e $\Psi : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}(\frac{G}{Z(G)})$ a projeção natural. Sejam $\beta = \Psi(\alpha)$ e $m \geq 0$ o menor inteiro tal que $\alpha^m \in G$. Se existe $g \in G$ tal que $o(\beta) = o(\bar{g})$ então m divide $\exp(\frac{G}{Z(G)})$.*

Demonstração: Seja $k = o(\beta)$. Então, por hipótese, k divide $\exp(\frac{G}{Z(G)})$. Também temos que $\alpha^k - 1 \in \Delta(G, Z(G))$. Logo, pelo Lema II.2.5, $\alpha^k \in G$. Pela minimalidade de m segue-se que $m \mid k$ e, portanto m divide $\exp(\frac{G}{Z(G)})$. $\square$

Lema IV.1.2 *Sejam α e β unidades de torção do anel de grupo $V\mathbb{Z}G$ cujas ordens são primas entre si. Sejam $n, m \geq 0$ os menores inteiros tais que α^n e β^m pertencem a G . Então, n e m são primos entre si.*

Demonstração: A demonstração é óbvia já que n é um divisor de $o(\alpha)$ e m é um divisor de $o(\beta)$. $\square$

Agora podemos provar o resultado principal desta secção.

Teorema IV.1.3 *Sejam G um grupo, $Z(G)$ o centro de G e $\alpha \in V\mathbb{Z}G$ uma unidade de ordem finita. Suponha que $\exp(\frac{G}{Z(G)})$ é finito e seja $m \geq 0$ o menor inteiro tal que $\alpha^m \in G$. Então m divide $\exp(\frac{G}{Z(G)})$ i.e. a conjectura BC4 é verdadeira.*

Demonstração: Seja $\alpha \in V\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção e $o(\alpha) = \prod_{1 \leq i \leq n} p_i^{r_i}$ a decomposição em fatores primos de $o(\alpha)$. Denotando $m_i = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}$ e $\alpha_i = \alpha^{m_i}$ temos que $o(\alpha_i) = p_i^{r_i}$. Seja $k_i \geq 0$ o menor inteiro tal que $\alpha_i^{k_i} \in G$, $1 \leq i \leq n$. Então temos, pelos Lemas I.0.3 e IV.1.1, que k_i divide $\exp(\frac{G}{Z(G)})$. Logo, pelo Lema anterior, temos que $k = \prod k_i$ divide $\exp(\frac{G}{Z(G)})$. Note que o mmc dos $m_1, \dots, m_n$ é 1,

logo existem números $c_1, \dots, c_n$ tal que $\sum_{1 \leq i \leq n} c_i m_i = 1$. Portanto $\alpha = \prod (\alpha_i)^{c_i}$ e consequentemente $\alpha^k \in G$. Segue-se pela minimalidade de m que $m \mid k$ e portanto divide $\exp(\frac{G}{Z(G)})$. $\square$

A demonstração de BC4 mostra que podemos enunciar um resultado bem mais geral.

Teorema IV.1.4 *Sejam G um grupo, $\alpha \in VZG$ uma unidade de torção e $m \geq 0$ o menor inteiro tal que $\alpha^m \in G$; então existem elementos $g_1, \dots, g_n$ em $\frac{G}{Z(G)}$ tal que m divide $\text{mmc}(o(g_1), \dots, o(g_n))$*

IV.2 A CONJECTURA ZC1

Começaremos esta secção com um Lema.

Lema IV.2.1 *Sejam G um grupo finito, $H \subseteq G$ um subgrupo central de G e $\alpha \in VZG$ uma unidade de torção tal que $o(\alpha)$ e $|H|$ sejam primas entre si. Denote por $\Psi : ZG \rightarrow Z(\frac{G}{H})$ a projeção canônica e por β a projeção de α . Então α é conjugado, em $\mathbb{Q}G$, a um elemento g_0 de G se e somente se β é conjugado, em $\mathbb{Q}(\frac{G}{H})$, ao elemento $\overline{g_0}$ de $\frac{G}{H}$.*

Demonstração: Basta provar a recíproca. Vamos denotar por

$$S_g = \{t^{-1}gt\theta : \theta \in H, t \in G\}$$

e

$$S'_g = \{t^{-1}gt\theta : \theta \in H, \theta \neq 1, t \in G\}$$

Pelo Lema II.2.2 basta mostramos que $\tilde{\alpha}(g) \in \{0, 1\}$. Para maior clareza vamos dividir o resto da prova em dois casos.

Caso 1: $\text{mdc}(o(g), |H|) \neq 1$.

Neste caso existe um primo p que divide a ordem de g mas não divide a ordem de α . Logo o Lema II.2.1 se aplica.

Caso 2: $\text{mdc}(o(g), |H|) = 1$.

Denote $\bar{g} = \Psi(g)$ e seja C_g a classe de conjugação de g . Seja ainda h um elemento de G . Então vemos que $\bar{h} \in C_g$ se e somente se $h \in S_g$. Como H é um subgrupo central temos que $\text{mdc}(o(h), |H|) = 1$ se e somente se $h \in C_g$. Agora note que S_g é a união disjunta de C_g e S'_g e que S'_g é um subconjunto normal de G . Portanto, escrevendo S'_g como união disjunta de classes de conjugação concluimos, pelo Caso 1, que $\sum_{h \in S'_g} \alpha(h) = 0$ e que

$$\tilde{\beta}(\bar{g}) = \sum_{h \in S_g} \alpha(h) = \tilde{\alpha}(g) + \sum_{h \in S'_g} \alpha(h) = \tilde{\alpha}(g).$$

O Lema II.2.2 nos dá a conclusão final. □

O mesmo argumento nos dá o seguinte resultado:

Lema IV.2.2 *Sejam G um grupo noetheriano e H um subgrupo livre de torção que centraliza os elementos de torção. Se $\alpha \in \text{VZG}$ é uma unidade de torção então, com a mesma notação do Lema anterior, temos que $\tilde{\alpha}(g) = \tilde{\beta}(\bar{g})$ para todo elemento de torção $g \in G$.*

Demonstração: Usaremos a notação da demonstração do Lema anterior. Pelo fato de H ser livre de torção e centralizar os elementos de torção, temos que $h \in C_g$ se e somente se h é de ordem finita. Também neste caso temos que S'_g é um subconjunto normal de G . Note agora que os elementos de S'_g têm ordem infinita, portanto, escrevendo S'_g como união disjunta de classes de conjugação, temos, pelo Lema II.2.6, que $\sum_{h \in S'_g} \alpha(h) = 0$. O resto da demonstração é idêntico. $\square$

Podemos agora provar um dos resultados principais desta secção.

Teorema IV.2.3 *Seja $G = \langle a \rangle \rtimes X$, onde $o(a) = p^n$, p um primo, e X é um grupo abeliano tal que p não divide a ordem de X . Então ZC1 vale para G .*

Demonstração: Seja G um contra-exemplo minimal e $\alpha \in \text{VZG}$ uma unidade de torção que não é conjugada, em $\mathbb{Q}(G)$, a nenhum elemento de G . Note que se p não dividisse a ordem de α teríamos, pelo Lema II.2.7, que α seria conjugada a um elemento de G , uma contradição. Como G é um grupo metabeliano temos, pelo Argumento de Whitcomb, o Lema II.2.10, que existe um único par de elementos $g \in \langle a \rangle$ e $x \in X$, tal que $\alpha - gx \in \Delta(G) \Delta(G')$. Pelo mesmo Lema temos que $x \in \mathcal{Z}(G)$.

Pondo $\beta = \alpha x^{-1}$ temos, ainda pelo Lema, que $o(\beta) = o(g) = p^m$. Nesta altura é bom que dividimos a prova em dois casos.

Caso 1: $X \cap Z(G) \neq 1$.

Seja H um subgrupo não trivial contido em $X \cap Z(G)$. Aplicando o Lema IV.2.1 para β e H obtemos, pela minimalidade de G , que β , e portanto α , é conjugado, em $\mathbb{Q}G$, a um elemento de G , uma contradição.

Caso 2: $X \cap Z(G) = 1$.

Neste caso temos que X é isomorfo a um subgrupo do grupo de automorfismos de $\langle a \rangle$ e portanto, pelo Lema II.1.11, é um grupo cíclico ou é um 2-grupo. Se X é um 2-grupo então G também o é e, portanto, é nilpotente. Logo podemos aplicar o resultado de A. Weiss. Por outro lado se X é um grupo cíclico então, pelo Lema II.2.7, G satisfaz ZC1, uma contradição final. $\square$

Teorema IV.2.4 *Seja G um grupo tal que, para todo elemento não central $g \in G$, tem-se que a classe lateral gG' é a classe de conjugação de g . Se $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ é uma unidade de torção então existe, a menos de conjugação, um único elemento $g_0 \in G$ tal que $\tilde{\alpha}(h) = 0$ se $h \notin C_{g_0}$ e $\tilde{\alpha}(g_0) \neq 0$. Em particular se G é finito então vale ZC1.*

Demonstração: Seja $\alpha = \sum \alpha(g)g$ e sejam $g_1, \dots, g_n$ elementos do suporte de α tais que, se $i \neq j$, $g_i^{-1}g_j$ não pertence a G' e $\text{supp}(\alpha) \subseteq \cup g_i G'$. Usando esta união disjunta escrevemos α como

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{t \in g_i G'} \alpha(t)t.$$

Sendo $\frac{G}{G'}$ abeliano segue-se, pelo Lema II.2.5, que a projeção de α em $\mathbb{Z}(\frac{G}{G'})$ é trivial.

Logo, existe um único índice i_0 tal que

$$\sum_{t \in g_{i_0} G'} \alpha(t) \neq 0.$$

Sendo $g_{i_0} G' = C_{g_{i_0}}$ segue-se que i_0 é o único índice tal que $\tilde{\alpha}(g_{i_0}) \neq 0$.

No caso particular em que G é finito podemos aplicar a equivalência do Lema II.2.2 para obter ZC1. $\square$

Definição IV.2.5 *Diz-se que um grupo G tem a propriedade do traço único, ou abreviado a propriedade TU, se as unidades de torção satisfazem a condição do Teorema anterior.*

Esta nomenclatura é de [2] onde é provado que grupos nilpotentes têm a propriedade-TU. Para grupos finitos, ter esta propriedade é equivalente a satisfazer ZC1. A mesma demonstração do Lema II.2.4 ainda serve para mostrar que esta propriedade implica BC2 e, portanto, BC1 e BC3. Note que no caso em que G é um grupo nilpotente finito, este é consequência do famoso trabalho de A. Weiss (veja Teorema II.2.8). Para finalizar esta secção vamos dar uma demonstração curta deste fato.

Teorema IV.2.6 *Seja G um grupo nilpotente; então G tem a propriedade-TU.*

Demonstração: Seja α uma unidade de torção de aumento 1. Podemos substituir G pelo subgrupo gerado pelo suporte de α e portanto supor que G é finitamente gerado. Segue-se, pelo Lema II.1.2, que G é um grupo policíclico e portanto noetheriano. Assim temos, pelo mesmo Lema, que G contém um subgrupo normal H que é livre de torção e de índice finito. Agora como G é nilpotente tem-se que os elementos de torção formam um subgrupo normal que denotaremos por $T(G)$. Como H é normal e livre de torção temos que H centraliza $T(G)$. Logo, com a notação do Lema IV.2.2, temos que $\tilde{\alpha}(g) = \tilde{\beta}(g)$ para todo elemento $g \in T(G)$. Sendo H de índice finito em G temos, pelo Teorema II.2.8 e o Lema II.2.2, que $\frac{G}{H}$ tem a propriedade-TU. Logo $\tilde{\alpha}(g) \in \{0, 1\}$ para todo $g \in T(G)$. Se g tem ordem infinito então, pelo Lema II.2.6, temos que $\tilde{\alpha}(g) = 0$. Temos assim que G tem a propriedade-TU. $\square$

IV.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta secção vamos comentar as conjecturas **BC2**, **BC3** e as reduções obtidas para que **BC1** seja resolvido para grupos policíclicos. No capítulo III ficou claro que vale o seguinte resultado:

Lema IV.3.1 *Seja G um grupo noetheriano. Suponha que G contém um subgrupo normal H que também é livre de torção. Se $\frac{G}{H}$ satisfaz **BC2** então G satisfaz **BC2**.*

Logo para provar **BC1** para grupos policíclicos basta prová-la para grupos solúveis finitos. Para resolver **BC1** para grupos solúveis finitos podemos usar a seguinte equivalência dado pelo próximo Lema.

Lema IV.3.2 *A conjectura **BC1** vale para grupos finitos que são solúveis se e somente se **BC1** vale para grupos finitos que são solúveis e cujo subgrupo de Fitting é um p -grupo.*

Demonstração: Basta provar a recíproca. De fato, por indução e o Lema III.1.1 podemos supor que $\text{Fit}(G)$ é um p -grupo. Logo, segue-se o resultado. $\square$

Como corolário temos o seguinte:

Corolário IV.3.3 ***BC1** vale para grupos policíclicos, se e somente se, vale para grupos finitos, solúveis, cujo subgrupo de Fitting é um p -grupo.*

Demonstração: Isto segue pelo Lema anterior e a observação que o precede. $\square$

Como temos visto no Lema II.2.4 a conjectura **BC2** implica a conjectura **BC3**. O resultado que segue já apareceu nas provas do capítulo III mas agora vamos enunciá-lo explicitamente. Lembre que L denota o menor termo não trivial da série central descendente de G .

Teorema IV.3.4 *Sejam G um grupo finito e $\alpha \in \mathbb{V}\mathbb{Z}G$ uma unidade de torção tal que $(o(\alpha), |L|) = 1$. Então temos que $T^{(k)}(\alpha) = \delta_{nk}$, onde $n = o(\alpha)$. Em particular existe um elemento $g \in G$ tal que $o(g) = o(\alpha)$.*

Por fim queremos observar que os grupos que aparecem no Lema IV.3.2, também aparecem em um trabalho de K. Roggenkamp e L. Scott. Neste trabalho, que não contém provas detalhadas, eles provam uma outra conjectura, também devido a H. J. Zassenhaus, para tais grupos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Artamonov V. A., Bovdi A., *Integral Group Rings: Groups of Units and Classical K-Theory*, Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Algebra, Topologiya, Geometriya, Vol.27 (1989), 3-43.
- [2] Bovdi A., Marciniak Z., Sehgal S. K., Torsion Units in Infinite Group Rings *J. Number Theory*, to appear.
- [3] Burnside W., *Theory of group of finite order*. Dover Publication, Inc. 2.ed 1911.
- [4] Dokuchaev M. A., Torsion units in integral group ring of nilpotent metabelian groups. *Comm. in Alg.* 20(2) (1992), 423-435.
- [5] Dokuchaev M. A., Sehgal S. K., Torsion units in integral group ring of solvable groups. (Preprint)
- [6] Fernandes, N. A., Torsion Units in the Integral Group Ring of S_4 . *Bolctim da Soc. Bras. de Mat.* Vol.18(1) (1987), 1-10.
- [7] Gorenstein D., *Finite groups*. Harper & Row Publisher, New York, 1968.
- [8] Luthar I. S., Poonam Trama Zassenhaus' Conjecture for S_5 (Preprint).
- [9] Martin I., *Character theory of finite groups*. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1976.
- [10] Marciniak Z., Ritter J., Sehgal S. K., Weiss A., Torsion units in integral group rings of some metabelian groups, II. *Journal of Number Theory* 25 (1987), 340-352.
- [11] Passman, D. S., *Permutation groups*. W.A. Benjamin, Inc. N.Y., 1968.
- [12] Polcino Milies C., Ritter J. and Sehgal S. K., On a conjecture of Zassenhaus on torsion units in integral group rings - II. *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 97, Number 2 (1986), 201-206.
- [13] Robinson D. J. S., *A course in the theory of groups*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.
- [14] Scott W. R., *Group theory*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

- [15] Suzuki M., *Group theory* II. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokio 1985.
- [16] Sehgal, S. K., *Units of Integral Group Rings*, Longman's, Essex, 1993.
- [17] Sehgal S. K., *Topics in group rings*. Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1978.
- [18] Weiss A., Torsion units in integral group rings. *J. Reine Angew. Math.* 415 (1991), 175-187.

”Até aqui nos ajudou o Senhor.....”