OS ANÉIS MÍNIMOS EM $\mathbb{R}^3$

Aldemir José Silva Pinto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: Geometria

Orientador: Profa. Dra. Célia Contin Góes

– São Paulo, julho de 1993 –

O Exemplo de Riemann para um valor de λ .

RESUMO

Apresentaremos neste trabalho um estudo dos anéis mínimos, mergulhados no $\mathbb{R}^3$, limitados por um par de retas paralelas.

No primeiro capítulo relacionamos os conceitos básicos da teoria local das superfícies mínimas no $\mathbb{R}^3$, das funções elípticas, os princípios de reflexão de Schwarz, o teorema de estrutura devido a Callahan, Hoffman, W. Meeks; o teorema de Jorge-Meeks e o teorema de aplicação de Riemann.

No segundo capítulo estudamos as superfícies mínimas cíclicas, seguindo o moderno texto de J.C.C. Nitsche; o teorema de Shiffman que descreve a intersecção de uma superfície mínima S com os planos paralelos aos planos que contêm sua fronteira, que por hipótese são círculos contidos em planos paralelos e a família de superfícies mínimas denominadas “Exemplos de Riemann”.

No terceiro capítulo, mostramos que se A é um anel mínimo, mergulhado no $\mathbb{R}^3$, limitado por retas paralelas, então A se estende por reflexão de Schwarz a um Exemplo de Riemann. Tal resultado foi demonstrado recentemente pelos matemáticos D. Hoffman, H. Karcher e H. Rosenberg.

ABSTRACT

In this work we present a study of embedded minimal annuli in $\mathbb{R}^3$ that are bounded by a pair of straight lines.

In the first chapter we listed the basic concepts of the local theory of minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, elliptic functions, Schwarz reflection principle, the structure theorem of Callahan, Hoffman and W. Meeks, the Jorge-Meek's theorem and the Riemann mapping theorem.

In the second chapter we study cyclic minimal surfaces according to the J.C.C. Nitsche's approach, Shiffman's theorem and the family of minimal surfaces called "Riemann's Example".

In the third chapter we show that if A is an embedded minimal annulus in $\mathbb{R}^3$, bounded by two straight lines in parallel planes, then A extends by the Schwarz reflection to a Riemann Example R . This result has been shown recently by David Hoffman, Hermann Karcher and Harold Rosenberg.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 Definições e proposições básicas	3
1.1 A representação de Weierstrass	3
1.2 Comportamento de uma superfície nos fins	10
1.3 As simetrias de uma superfície mínima completa	15
1.4 As funções elípticas	21
CAPÍTULO 2 As superfícies mínimas cíclicas	38
2.1 As superfícies mínimas cíclicas	38
2.2 O Teorema de Shiffman	50
2.3 Os Exemplos de Riemann de superfícies cíclicas	58
CAPÍTULO 3 Um anel mínimo, mergulhado, limitado por um par de retas paralelas	78
3.1 O Teorema de Hoffman, Karcher e Rosenberg	78
BIBLIOGRAFIA	93

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar os anéis mínimos limitados por duas retas paralelas. Os únicos exemplos de tais superfícies são as denominadas “Exemplos de Riemann”, [20].

No primeiro capítulo, enunciamos os principais teoremas sobre teoria local das superfícies mínimas no $\mathbb{R}^3$, funções elípticas e os teoremas de reflexão de Schwarz, [6], [9], [13], [19].

No segundo capítulo, apresentamos as superfícies mínimas cíclicas, seguindo J.C.C. Nitsche, que inspirado nas idéias originais de Riemann e Enneper, caracterizou em [17], todas as superfícies mínimas geradas por uma família a um parâmetro de circunferências. O catenóide é um exemplo clássico de tais superfícies.

Observamos que, tomando um segmento finito da catenária e girando-o em torno de um dos eixos coordenados, obtemos um segmento do catenóide, que é limitado por dois círculos, situados em planos paralelos.

Isto sugere a questão: dada uma superfície mínima S , limitada por dois círculos contidos em planos paralelos, qual é o traço obtido em S , por um plano paralelo aos planos dos círculos fronteira?

Max Shiffman, em 1955, [22], mostrou que o traço em S é um círculo e, mais geralmente, se as curvas fronteiras são convexas, então o traço em S é uma curva convexa.

Os exemplos de Riemann apresentados em [10] são superfícies mínimas cíclicas cujas

propriedades descrevemos ainda no segundo capítulo.

Reciprocamente, mostramos pelo Teorema de Shiffman que um anel mínimo limitado por círculos em plano paralelos é um subconjunto de um Exemplo de Riemann.

No terceiro capítulo, mostramos que se A é um anel mínimo, mergulhado, cuja fronteira são duas retas paralelas, então A se estende por reflexão de Schwarz a um exemplo de Riemann $\mathcal{R}$. Tal resultado é devido a Hoffman, Rosenberg e Karcher, [10].

Assim, vemos que os exemplos de Riemann constituem todos os exemplos de superfícies mínimas cíclicas limitados por retas paralelas.

Gostaria de agradecer à Profa. Célia Contin Góes pela orientação e apoio desde o primeiro ano do mestrado, pelas lições de Matemática e vida, a Walter V. Fernandes, pela digitação, e aos amigos Júlio César, Armando, Renah, Iracema, Fumiê, Adriana, Magda, D. Carmen Silva Pinto e Naygra pela torcida e carinho.

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES E PROPOSIÇÕES BÁSICAS

1.1 A REPRESENTAÇÃO DE WEIERSTRASS

Apresentaremos neste parágrafo os conceitos de Superfície de Riemann Abstrata, imersão conforme e o par da representação de Weierstrass de uma superfície mínima S , com o objetivo de enunciar o importante Teorema de Huber-Ossermann, que caracteriza as imersões mínimas completas de curvatura total finita.

As demonstrações dos teoremas e as definições dadas podem ser encontradas em [1], [2], [4], [5], [6], [7], [9], [19].

Definição 1.1 Seja W uma variedade bidimensional com atlas $\mathcal{A}$ de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$. Uma função $X : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$ é uma imersão em $\mathbb{R}^3$ se para todo $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow W_\alpha$, $(\varphi_\alpha, U_\alpha, W_\alpha) \in \mathcal{A}$, temos $X_{u_1} \wedge X_{u_2} \neq 0$, onde $X_{u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j}(X \circ \varphi_\alpha^{-1})$, $j = 1, 2$, e $\varphi_\alpha(p) = z = u_1 + iu_2$.

Definição 1.2. Uma superfície de Riemann M é uma variedade bidimensional, conexa, de Hausdorff com atlas maximal $\mathcal{A}$, onde as mudanças de coordenadas são funções analíticas complexas.

Definição 1.3. Seja M uma superfície de Riemann. Uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é

isométrica conforme se

$$|X_{u_1}| = |X_{u_2}| = \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0 ,$$

onde $\langle ., . \rangle$ é o produto interno do $\mathbb{R}^3$.

Os parâmetros (u_1, u_2) são chamados parâmetros isotérmicos.

A métrica $\langle , \rangle$ induz uma métrica riemanniana sobre M , dada localmente por $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$, onde $z = u_1 + iu_2$.

Proposição 1.1. *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão conforme de uma superfície de Riemann M em $\mathbb{R}^3$. Então, $\Delta X = 2HN$, onde $\Delta = \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\Delta}$ é o operador de Laplace-Beltrami de M , $\tilde{\Delta}$ o Laplaciano em $\mathbb{R}^3$, H o vetor curvatura média da superfície $X(M)$ e N a aplicação normal de Gauss da imersão.*

Uma imersão (M, X) é mínima se e somente se $H = 0$ em todo ponto.

Como consequência da Proposição 1, temos que (M, X) é mínima se e somente se $\Delta X = 0$, isto é, as funções coordenadas são harmônicas. Portanto, M não pode ser compacta.

A Representação de Weierstrass desempenha um papel fundamental na construção de exemplos de superfícies mínimas, como veremos a seguir.

Observamos inicialmente que se D é um domínio em $\mathbb{C}$, $f(z)$ uma função analítica em D e $g(z)$ uma função meromorfa em D , tais que se $z_0 \in D$ é pólo de $g(z)$ de ordem m , então z_0 é zero de $f(z)$ de ordem igual a $2m$, então as funções definidas em D por

$$\phi_1(z) = f(1 - g^2)$$

$$\phi_2(z) = if(1 + g^2)$$

$$\phi_3(z) = 2fg$$

são analíticas em D e satisfazem $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$. Reciprocamente, dada uma tripla de funções analíticas em D , satisfazendo $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, temos $\phi_1 = i\phi_2$ e $\phi_3 = 0$ ou existe um par (f, g) de funções nas condições anteriores.

Proposição 1.2. *Seja M uma superfície de Riemann e seja S uma superfície mínima regular de classe C^2 , definida por uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então, S pode ser representada na forma*

$$x_k(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_k + c_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

onde c_k são constantes, $\psi_k(z)$ são formas diferenciais analíticas definidas por:

$$\psi_1 = (1 - g^2)\eta$$

$$\psi_2 = i(1 + g^2)\eta$$

$$\psi_3 = 2g\eta$$

sendo η uma forma diferencial analítica definida sobre M e g uma função meromorfa definida em M tais que, se $p_0 \in M$ é pólo de g de ordem m , então p_0 é zero de η de ordem igual a $2m$. A integral é calculada sobre um caminho arbitrário e ligando um ponto z_0 fixado ao ponto arbitrário $z \in M$.

Observar que η é dada localmente por $\eta = f(z)dz$, onde f é analítica e o par (f, g) está nas condições anteriores.

Definição 1.4. O par (g, η) é chamado Representação de Weierstrass para a superfície mínima S .

Proposição 1.3. *Dadas uma forma diferencial analítica η , definida sobre uma superfície de Riemann M , e uma função meromorfa g , definida sobre M , tais que se*

$p_0 \in M$ é pólo de g de ordem m , então p_0 é zero de η de ordem igual a $2m$; então as formas diferenciais definidas por

$$\psi_1 = (1 - g^2)\eta$$

$$\psi_2 = i(1 + g^2)\eta$$

$$\psi_3 = 2g\eta$$

são analíticas e, se as integrais

$$x_k = \operatorname{Re} \int_c \psi_k, \quad k = 1, 2, 3$$

são independentes do caminho que liga um ponto fixado z_0 ao ponto $z \in M$, então

$X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $X(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$, define uma superfície mínima.

Observação 1.1. Dizer que as integrais que definem x_k estão bem definidas, isto é, independem do caminho, é equivalente a dizer que:

$$\int_\ell g^2 \eta = \overline{\int_\ell \eta} \quad \text{e} \quad \operatorname{Re} \int_\ell g \eta = 0$$

para todo caminho fechado ℓ em M .

De fato, se X está bem definida, temos:

$$x_1 = \operatorname{Re} \int_\ell (1 - g^2)\eta = 0 \quad (I)$$

$$x_2 = \operatorname{Re} \int_\ell i(1 + g^2)\eta = 0 \quad (II)$$

$$x_3 = \operatorname{Re} \int_\ell 2g\eta = 0 \quad (III)$$

De (I) e (II),

$$\Rightarrow \int_\ell \operatorname{Re} \eta - i \operatorname{Im} \eta = \int_\ell g^2 \eta \Rightarrow \overline{\int_\ell \eta} = \int_\ell g^2 \eta.$$

Observação 1.2. Se $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ define uma superfície mínima, então em uma vizinhança de cada ponto as formas ψ_k são dadas por $\psi_k(z) = \phi_k(z) dz$, onde $\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$, $k = 1, 2, 3$.

Temos então:

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{\partial X}{\partial u_1} - i \frac{\partial X}{\partial u_2}.$$

Como (u_1, u_2) são parâmetros isotérmicos, temos $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$, onde $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle$.

$$\Rightarrow \lambda^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^3 |\phi_K|^2.$$

Então, a métrica $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ de X se escreve

$$ds^2 = |\eta|^2 (1 + |g|^2)^2.$$

Observação 1.3. Em uma vizinhança de cada ponto regular p de uma superfície mínima S , o vetor normal unitário de S em p , com a orientação induzida do $\mathbb{R}^3$ é dado por:

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \times \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \times \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|} = \frac{-\operatorname{Re} \phi \times \operatorname{Im} \phi}{|\operatorname{Re} \phi \times \operatorname{Im} \phi|} = \left(\frac{2\operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right).$$

Isto é, $g = \pi \circ N$ onde π é a projeção estereográfica de $S^2(1) \setminus \{(0, 0, 1)\}$ sobre o plano $z = 0$.

A aplicação

$$\begin{aligned} N : M &\longrightarrow S^2(1) \subset \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto N(p) \end{aligned}$$

é chamada aplicação Normal de Gauss da imersão X .

A expressão acima diz que g representa a aplicação Normal de Gauss.

Observação 1.4. Da *Observação 1.3*, temos que uma superfície mínima definida por um par (g, η) será regular se, e somente se, $\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 > 0$ em todo ponto. Se isto não ocorrer, temos que, embora o vetor N não esteja definido nos pontos não regulares, podemos estender a aplicação normal de Gauss para tais pontos, uma vez que g está bem definida em pontos não regulares.

Portanto, para superfícies mínimas definimos a aplicação Normal de Gauss por

$$N(z) = N \circ X \circ F\alpha$$

$$N(z) : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$N(z) = \begin{cases} \left(\frac{2\operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right) & \text{se } g(z) \neq \infty \\ (0, 0, 1) & \text{se } g(z) = \infty \end{cases}$$

A segunda forma fundamental em termos de (g, η) é dada por

$$\sum b_{ij} \frac{d\xi_i}{dt} \frac{d\xi_j}{dt} = \operatorname{Re} \left\{ -f g' \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 \right\} ; \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2 ;$$

onde $b_{ij} = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}, N \rangle$ e $\eta(z) = f(z) dz$.

Definição 1.5. A curvatura gaussiana K de uma superfície S é dada por

$$K = K_1 K_2 ,$$

onde K_1 e K_2 são os valores próprios da aplicação $dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$, sendo N a aplicação Normal de Gauss e X a aplicação que define S .

Se $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ é uma métrica riemanniana de uma superfície S , de classe $\mathcal{C}^2$, então

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} ;$$

onde Δ denota o operador laplaciano de $\mathbb{R}^3$.

Em particular, se S é mínima com o par de Weierstrass (g, η) , temos:

$$K = - \left[\frac{4|g'|}{|\eta|(1 + |g|^2)} \right]^2 .$$

Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície. A curvatura total de S é dada por

$$\iint_M K \, dA ,$$

onde dA é o elemento de área de M na métrica induzida.

Dadas duas superfícies de Riemann, M e $\widehat{M}$, dizemos que M e $\widehat{M}$ são conformemente equivalentes se existe um difeomorfismo analítico

$$h : M \longrightarrow \widehat{M} .$$

Escrevemos então, $M \cong \widehat{M}$.

Definição 1.6. Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima com par (g, η) . Dizemos que X é completa, se

$$\int_{\ell} (1 + |g|^2) |\eta| = +\infty ,$$

para todo caminho divergente ℓ em M .

Definição 1.7. Seja M uma superfície. Dizemos que M tem tipo topológico finito se M é conformemente equivalente a uma superfície compacta $\overline{M}_\gamma$, de gênero γ , menos um número finito de pontos.

Teorema 1.1. (Huber-Osserman) *Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima, completa, com curvatura total finita e (g, η) o par de Weierstrass de M . Então:*

- 1) *M é conformemente equivalente a $\overline{M}_\gamma - \{p_1, \dots, p_n\}$ onde $\overline{M}_\gamma$ é uma superfície de Riemann compacta de gênero γ e $n \geq 1$.*

2) X é própria (isto é, a imagem inversa de um compacto é compacta).

3) A aplicação de Gauss $g : M \rightarrow \mathbb{C}$, meromorfa em M se estende a uma função meromorfa em $\overline{M}_\gamma$, e a 1-forma holomorfa η se estende a uma 1-forma meromorfa em $\overline{M}_\gamma$.

4) A curvatura total de M é um múltiplo de 4π e satisfaz:

$$\int_M K dM = -4\pi \text{ grau } g \leq 2\pi(\chi(M) - n)$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M .

1.2 COMPORTAMENTO DE UMA SUPERFÍCIE NOS FINS

Neste parágrafo, apresentamos os principais resultados sobre o comportamento no infinito de imersões mínimas completas com curvatura total finita. Estes resultados são devidos a L.P. Jorge, W. Meeks, M. Callahan e D. Hoffman e podem ser encontrados em [3], [6], [7], [12].

Definição 2.1. Um fim de uma superfície $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma sub-superfície $E \subset M$, não compacta, com fronteira compacta.

Seja M superfície de Riemann de gênero γ e com n fins e $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa com curvatura total finita.

Pelo Teorema de Huber-Osserman, temos que:

$$M \cong \overline{M}_\gamma - \{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

Para cada ponto p_j , existe $D_j \subset \overline{M}_\gamma$, vizinhança aberta de p_j , tal que $p_i \notin D_j, \forall i \neq j$. Denotamos $F_j = X(\overline{D}_j \setminus \{p_j\})$.

Então, F_j é um fim de X .

Teorema 2.1. (Jorge-Meeks) *Seja $X : M = \overline{M}_\gamma - \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa, com curvatura total finita; onde $\overline{M}_\gamma$ é completa e orientável.*

Se $r > 0$, consideremos $Y_r = X(M) \cap S^2(r)$, onde $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera de centro na origem e raio r e $X_r = \frac{Y_r}{r} \subset S^2(1)$ a homotetia de razão $\frac{1}{r}$ sobre a esfera $S^2(1)$.

Suponha ainda que existem v_j em $S^2(1)$ tais que $\lim_{p \rightarrow p_j} N(p) = v_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ onde $N : M \rightarrow S^2(1)$ é a aplicação Normal de Gauss da imersão X . Então,

- a) X é imersão própria.*
- b) Se r é suficientemente grande, $X_r = \{\gamma_1^r, \dots, \gamma_n^r\}$ são n curvas fechadas e imersas em $S^2(1)$.*
- c) Quando $r \rightarrow \infty$, γ_j^r , $j = 1, 2, \dots, n$ converge C^∞ a uma geodésica com multiplicidade em $S^2(1)$.*

Teorema 2.2. *Seja $X : M = \overline{M}_\gamma - \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima e completa, de gênero γ , n fins e com curvatura total finita $C(M)$. Seja F_j os fins associados a q_j , $j = 1, 2, \dots, n$ e $\Gamma_r^j = \frac{1}{r}F_j \cap S^2(r)$ como no Teorema 2.1, convergindo C^∞ para a geodésica γ_j de $S^2(1)$, com multiplicidade I_j , quando $r \rightarrow \infty$. Então:*

- a) $C(M) = 2\pi \left(X(M) - \sum_{j=1}^n I_j \right)$.*
- b) F_j é mergulhado se e somente se $I_j = 1$; ou seja, $C(M) = -4\pi(\gamma + n - 1)$ se e somente se os fins da imersão são mergulhados.*
- c) Se X é um mergulho então os vetores normais nos fins de M são paralelos. Neste caso, após uma rotação de $X(M)$ no $\mathbb{R}^3$, a aplicação normal de Gauss $N : M \rightarrow S^2(1)$ é tal que $N(q_j) \in \{0, +\infty\}$, $j = 1, 2, \dots, n$.*

Figura 1.1

O índice I_j em relação ao par (g, η)

Seja $X : M \cong \overline{M}_\gamma - \{q_1, \dots, q_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima, regular, completa com curvatura total finita e (g, η) o par da representação de Weierstrass de X . Fixemos $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Seja $D_j \subset \overline{M}_\gamma$, vizinhança aberta de q_j e φ sistema de coordenadas locais em torno de q_j com a seguinte propriedade:

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(D_\epsilon(0)) = D_j \\ \varphi^{-1}(0) = q_j \end{cases}$$

Portanto, $\varphi(q_j) = 0$, ou, com abuso de notação, escrevemos $z(q_j) = 0$.

Como X é regular, para cada $x \in X(M)$, existe $N_x(\varphi(u, v))$, vetor normal à superfície no ponto x . Portanto, existe $\vec{\omega}$ tal que $\lim_{(u, v) \rightarrow 0} N(\varphi(u, v)) = \vec{\omega}$.

Após uma rotação de $X(M)$ no $\mathbb{R}^3$, podemos supor que $\vec{\omega}$ é o pólo sul; $\vec{\omega} = (0, 0, -1)$.

Assim, fixado $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos:

$$g(q_j) = g(\varphi^{-1}(0)) = g(z(q_j)) = 0 ,$$

isto é, g tem zero de ordem $k \geq 1$ em q_j . Então, localmente,

$$g(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots \quad , \quad a_k \neq 0 \quad , \quad k \geq 1 .$$

Como a imersão é completa, temos que η possui um pólo em q_j de ordem $m \geq 1$, e para uma curva de Jordan que contém q_j no seu interior, devemos ter

$$\int_{\ell} g^2 \eta = \overline{\int_{\ell} \eta}$$

e isto implica que $m \geq 2$. Isto é, localmente:

$$\eta(z) = \left(\frac{b_m}{z^m} + \frac{b_{m-1}}{z^{m-1}} + \dots + b_0 + b_1 z + \dots \right) dz ,$$

com $m \geq 2$ e $b_m \neq 0$.

Seja $\beta_{\epsilon}(t) = \epsilon e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e ϵ convergindo para zero.

Consideremos a curva plana

$$\ell(t) = (X_1 + iX_2)(\beta_{\epsilon}(t)) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Vamos calcular o índice de rotação desta curva em relação ao ponto $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Usando a representação de Weierstrass para X , temos:

$$\begin{aligned} X_1 + iX_2 &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \eta(1 - g^2) + i \operatorname{Re} \int_{z_0}^z i\eta(1 + g^2) \\ &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \eta + \operatorname{Re} \int_{z_0}^z -\eta g^2 - i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \eta - i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \eta g^2 \\ &= - \int_{z_0}^z \eta g^2 + \overline{\int_{z_0}^z \eta} \end{aligned}$$

Temos:

$$(X_1 + iX_2)(q) = - \int_{q_0}^q g^2 \eta + \overline{\int_{q_0}^q \eta}$$

onde q_0 é um ponto fixado e q é um ponto qualquer de D_j .

Observamos que, no cálculo da integral de linha $-\int_{q_0}^q g^2 \eta$, só aparecem termos do tipo $\frac{c_{2k+s}}{z^{m-(2k+s)}}$, onde $2k+s \geq 3$ e $c_{2k+s} \in \mathbb{C}$ e a integral

$$\int_{q_0}^q \eta = -\frac{1}{(m-1)} \frac{b_m}{z^{m-1}} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{d_j}{z^{m-j}}$$

com $j \geq 2$ e $d_j \in \mathbb{C}$.

Portanto,

$$(X_1 + iX_2)(q) = -\frac{1}{(m-1)} \left(\frac{b_m}{z^{m-1}} \right) + o(z^{m-2}),$$

onde $o(z^{m-2})$ significa soma dos termos do tipo $\frac{c_{2k+s}}{z^{m-(2k+s)}}$ e $\frac{d_j}{z^{m-j}}$.

Portanto,

$$\ell(t) = (X_1 + iX_2)(\beta_\epsilon(t)) = -\frac{1}{(m-1)} \frac{b_m}{(\epsilon e^{-it})^{m-1}} + \text{termos que tendem para zero.}$$

Calculemos o índice da curva $\ell(t)$:

Por definição (veja [2], p. 115), temos:

$$\begin{aligned} n(l, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{dz}{z} \\ \Rightarrow n(\ell, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{K e^{it(m-1)}(i)(m-1) dt}{K e^{it(m-1)}} = m-1 \end{aligned}$$

onde $K = -\frac{b_m}{(m-1)\epsilon^{m-1}}$.

Portanto, a curva plana $\ell(t)$ dá $(m-1)$ voltas em torno da origem do $\mathbb{R}^3$, isto é:

$$I_j = m-1.$$

Em particular, F_j é mergulhado se e somente se $m=2$.

Suponhamos então F_j mergulhado e consideremos a terceira coordenada da imersão X ,

$$x_3 = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 \quad \text{onde} \quad \psi_3 = 2g\eta.$$

Temos:

$$\begin{aligned}\psi_3 &= (a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots) \left(\frac{b_2}{z^2} + \frac{b_1}{z} + b_0 + \tilde{b}_1 z + \dots \right) dz \\ \Rightarrow \psi_3 &= (a_k b_2 z^{k-2} + o(z^{k-1})) dz, \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

Temos dois casos a considerar:

1º) Se $k > 1$, então ψ_3 é uma diferencial holomorfa em uma vizinhança de $q_j \in \overline{M}_j$.

Portanto, existe $\lim_{q \rightarrow q_j} x_3(q) = L$.

Neste caso, dizemos que F_j é *um fim do tipo planar*, pois se aproxima assintoticamente do plano $x_3 = L$.

2º) Se $k = 1$, então $x_3(z) = \alpha \log |z| + R(z)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $R(z)$ uma função harmônica.

Então, F_j é dito *um fim do tipo catenóide*, pois F_j se aproxima assintoticamente de um catenóide em $\mathbb{R}^3$.

1.3 AS SIMETRIAS DE UMA SUPERFÍCIE MÍNIMA COMPLETA

O estudo das simetrias em superfícies nos permitem descrevê-las geometricamente. O Princípio de Reflexão de Schwarz e a Teoria das Superfícies Mínimas nos revelam fatos importantes sobre as congruências de uma superfície mínima e completa, como veremos a seguir.

As demonstrações dos teoremas expostos neste parágrafo encontram-se em [1], [2], [13].

Princípio de Reflexão de Schwarz

Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f analítica em D ; se f transforma um segmento de reta (ou segmento circular) em um segmento de reta (ou um segmento circular, respectivamente), então f transforma pontos simétricos em relação à reta do segmento (respectivamente, pontos simétricos em relação ao círculo), em pontos simétricos em relação ao conjunto imagem (da reta ou do círculo).

Lema 3.1. *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima e $z = u + iv$ parâmetros isotérmicos no disco $D \in \mathbb{C}$. Suponhamos que $\{X(u, 0) \mid (u, 0) \in D\}$ está contido no eixo x_2 . Então, se $\alpha(z) = \bar{z}$, temos:*

$$X \circ \alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X .$$

Demonstração: Localmente, temos:

$$X(u, v) = \int_{(u_0, 0)}^{(u_1, v)} \psi , \quad \text{onde } \psi = (\phi_1(\xi), \phi_2(\xi), \phi_3(\xi)) d\xi$$

e

$$\phi_k(z) = 2 \frac{\partial x_k}{\partial z} = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} , \quad k = 1, 2, 3 .$$

Por hipótese, $x_1(u, 0) = 0, \forall u, x_3(u, 0) = 0, \forall u$ e, portanto, $\frac{\partial x_1}{\partial u}(u, 0) = 0$ e $\frac{\partial x_3}{\partial u}(u, 0) = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi_1(u, 0) &= -i \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, 0) \\ \text{e } \phi_3(u, 0) &= -i \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, 0) . \end{aligned}$$

Portanto, $\phi_1, \phi_3 : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são funções analíticas que transformam um segmento do eixo real num segmento do eixo imaginário. Então, pelo Princípio de Reflexão de

Schwarz, temos:

$$\begin{aligned}\phi_1(u, -v) &= -\overline{\phi_1(u, v)} \\ \text{e } \phi_3(u, -v) &= -\overline{\phi_3(u, v)} .\end{aligned}$$

Por outro lado, como (u, v) são parâmetros isotérmicos, temos:

$$\begin{aligned}\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= 0 \\ \Rightarrow \phi_2^2 &= -(\phi_1^2 + \phi_3^2) \\ \Rightarrow \phi_2^2(u, 0) &\text{ é real e } \phi_2^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \phi_2(u, 0) &\text{ é real}\end{aligned}$$

e então, $\phi_2 : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica que transforma o eixo real no eixo real e, pelo Princípio de Reflexão de Schwarz, temos que:

$$\phi_2(u, -v) = \overline{\phi_2(u, v)} .$$

Seja $\phi_1 = U_1 + iV_1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_1(u, -v) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_1 dz = \int_{(u_0, 0)}^{(u, -v)} U_1(u, v) du - V_1(u, v) dv \\ &= \int_{(u_0, 0)}^{(u, v)} U_1(u, -v) du + V_1(u, -v) dv .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\phi_1(u, -v) &= -\overline{\phi_1(u, v)} \Rightarrow U_1(u, -v) = -U_1(u, v) \\ \text{e } V_1(u, -v) &= V_1(u, v) \\ \Rightarrow x_1(u, -v) &= \int_{(u_0, 0)}^{(u, v)} -U_1(u, v) du + V_1(u, v) dv = -x_1(u, v) .\end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned}x_3(u, -v) &= -x_3(u, v) \\ \text{e } x_2(u, -v) &= x_2(u, v) .\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \circ \alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X . \quad \square$$

Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa e orientável. Temos:

$$X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \phi dz = \int_{p_0}^p U du - V dv$$

onde $\phi = U + iV$ e $\phi_k = u_k + iv_k$, $k = 1, 2, 3$ e $p_0, p \in D \subset \mathbb{C}$, D domínio simplesmente conexo.

Definição 3.1. A superfície conjugada de X é a superfície $\widetilde{X}$ definida por:

$$\widetilde{X}(p) = \operatorname{Im} \int_{p_0}^p \phi dz = \int_{p_0}^p V du + U dv .$$

Observemos que:

1ª) X e $\widetilde{X}$ têm a mesma normal em cada ponto $X(p)$ e $\widetilde{X}(p)$, pois:

$$\begin{aligned} T_p X &= [U, -V] ; \quad T_p \widetilde{X} = [V, U] \\ \Rightarrow T_p X &\parallel T_p \widetilde{X} \Rightarrow N(p) = \widetilde{N}(p) . \end{aligned}$$

2ª) Se α é uma curva diferenciável em D , então as curvas $\gamma = X \circ \alpha$ e $\tilde{\gamma} = \widetilde{X} \circ \alpha$ são tais que: $\|\gamma'\|^2 = \|\tilde{\gamma}'\|^2$ e $\langle \gamma', \tilde{\gamma}' \rangle = 0$.

Portanto, X e $\widetilde{X}$ são superfícies mínimas isométricas.

Lema 3.2. a) Se α é uma curva em D tal que $\gamma = X \circ \alpha$ é uma reta, então $\tilde{\gamma} = \widetilde{X} \circ \alpha$ é uma geodésica plana.

b) Se α é uma curva em D tal que $\gamma = X \circ \alpha$ é uma geodésica plana, então $\tilde{\gamma} = \widetilde{X} \circ \alpha$ é uma reta.

Demonstração: Segue do fato de $\langle \tilde{\gamma}', \gamma' \rangle = 0$ em todo ponto e do fato de γ ser geodésica se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ é geodésica.

Teorema de Reflexão

- a) *Se uma superfície mínima completa contém uma reta, então a rotação de 180° (no $\mathbb{R}^3$) em relação a essa reta é uma congruência da superfície.*
- b) *Se uma superfície mínima completa contém uma geodésica plana, então a reflexão no $\mathbb{R}^3$ em relação ao plano da geodésica é uma congruência da superfície.*

Demonstração: a) Seja $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa e $\tilde{X} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ a sua conjugada. Podemos supor que a reta seja o eixo x_3 ; isto é, existe α , curva diferenciável em D tal que $X \circ \alpha$ está contida no eixo x_3 .

Sabemos que $X + i\tilde{X}$ é uma função analítica e, portanto, $x_3 + i\tilde{x}_3$ é analítica.

Pelo Lema 3.2, $\tilde{X} \circ \alpha$ é uma geodésica plana com vetor velocidade ortogonal ao eixo x_3 e, portanto, contida em um plano que podemos supor ser o plano (x_1, x_2) .

Assim, $\tilde{x}_3 \circ \alpha \equiv 0$ e portanto $x_3 + i\tilde{x}_3$ leva a curva α sobre o eixo x_3 .

Observamos que $\frac{\partial}{\partial z}(x_3 + i\tilde{x}_3) \neq 0$; caso contrário $\phi_3(\alpha(s)) = 0$ e então $x_3(s)$ seria constante, contra a hipótese.

Seja s , tal que $\frac{\partial}{\partial z}(x_3 + i\tilde{x}_3)(\alpha(s)) \neq 0$. Então, existe $\mathcal{V}$, vizinhança de $\alpha(s)$ e $\mathcal{U}$, vizinhança de $x_3(s) + i\tilde{x}_3(s)$; e $h = (x_3 + i\tilde{x}_3)^{-1}$, $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$; analítica em $\mathcal{U}$.

Portanto, podemos considerar h como mudança de parâmetros isotérmicos.

Seja $Y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\mathcal{U}$ é simétrico em relação ao eixo real e $Y = X \circ h$. Então, $Y(u, 0) \in \tilde{D}$ está contido no eixo x_3 e, pelo Lema 3.1, existe β , tal que:

$$Y \circ \beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y \quad \text{onde } \beta(z) = \bar{z},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} X \circ h(\beta(z)) &= R_\pi X \circ h(z) \\ X(h(\bar{z})) &= R_\pi X(h(z)) \\ \Rightarrow Y(\bar{z}) &= R_\pi Y(z) \end{aligned}$$

onde R_π é a rotação de 180° em torno do eixo x_3 . □

Para demonstrar a parte b) do Teorema de Reflexão, passa-se para a conjugada $\widetilde{X}$ e temos uma reta. Repetimos o raciocínio anterior, observando que:

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}(z) &= e^{i\frac{\pi}{2}} \phi(z) \\ \Rightarrow \phi(z) &= -i\widetilde{\phi}(z) . \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_j(u, -v) &= -\overline{\widetilde{\phi}_j(u, v)} , \quad j = 1, 2 . \\ \widetilde{\phi}_3(u, -v) &= \overline{\widetilde{\phi}_3(u, v)} \\ \text{e} \quad \phi_j(u, -v) &= \overline{\phi_j(u, v)} , \quad j = 1, 2 \\ \phi_3(u, -v) &= -\overline{\phi_3(u, v)} . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x_j(u, -v) &= x_j(u, v) , \quad j = 1, 2 . \\ x_3(u, -v) &= -x_3(u, v) . \end{aligned}$$

portanto, existe simetria em relação ao plano da geodésica. □

Finalizando o parágrafo, consideremos o teorema de estrutura, devido a Michael Callahan, David Hoffman e William H. Meeks III, cuja demonstração está em [3].

Teorema 3.2. *Seja M uma superfície mínima propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$, com um grupo de simetria infinito e mais que um fim topológico. Então, M é o catenóide, ou:*

- a) M é invariante sob um movimento rígido do $\mathbb{R}^3$, composto com uma homotetia, que denotamos por T .*
- b) $\frac{M}{T}$ tem topologia finita se e somente se a curvatura total de $\frac{M}{T}$ é $2\pi \left(\chi \left(\frac{M}{T} \right) - r \right)$, onde r é o número de fins de $\frac{M}{T}$.*
- c) Todos os fins anulares de M (isto é, homeomorfos a um disco fechado menos um ponto) são planares.*
- d) Se $\frac{M}{T}$ tem topologia finita, então todos os seus fins são planares.*

1.4 AS FUNÇÕES ELÍPTICAS

Destacam-se dentre as funções meromorfas com boas propriedades geométricas, as funções elípticas.

Vamos defini-las e enunciar algumas de suas propriedades, baseadas na clássica $\mathcal{P}$ -função de Weierstrass e suas derivadas, usadas na construção de superfícies mínimas.

Maiores detalhes sobre os elementos desse parágrafo podem ser encontrados em [1], [6], [7], [14], [16], [21].

Sejam λ_1 e λ_3 números complexos não-nulos tais que $\text{Im} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \neq 0$; ou seja, tomamos $\{\lambda_1, \lambda_3\}$ como base de $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $L = L(\lambda_1, \lambda_3) = \{m\lambda_1 + n\lambda_3; m, n \in \mathbb{Z}\}$ é chamado um reticulado em $\mathbb{C}$, gerado por λ_1 e λ_3 .

Dados dois números complexos z_1, z_2 , dizemos que são congruentes em L se $z_1 - z_2 \in L$ e escrevemos $z_1 \equiv z_2 \pmod{L}$.

Um domínio fundamental para L , baseado em z_0 é o conjunto

$$D(z_0) = \{z_0 + \mu\lambda_1 + \delta\lambda_3 ; 0 \leq \mu, \delta < 1\}.$$

Definição 4.1. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ uma função meromorfa. A função f é chamada elíptica de L se e somente se

$$f(z + \Omega) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall \Omega = a\lambda_1 + b\lambda_3 \in L.$$

Observamos que o conjunto das funções elípticas de um reticulado L forma um corpo.

Teorema 4.1. *Uma função elíptica $f(z)$, não constante, não pode ser inteira.*

Demonstração: Suponhamos que $f(z)$ é uma função inteira, elíptica, definida num domínio fundamental $D(z_0)$.

Temos que f restrita a $\overline{D(z_0)}$ é contínua e, portanto, limitada. Isto é, existe $c > 0$ tal que

$$|f(z)| < c, \quad \forall z \in \overline{D(z_0)}.$$

Sendo f elíptica, temos que $|f(z)| < c, \forall z \in \mathbb{C}$ e, pelo Teorema de Liouville, f é constante, contra a hipótese. $\square$

Observamos então que uma função elíptica não-constante tem pelo menos um pólo em $D(z_0)$. A quantidade total de pólos em $D(z_0)$ deve ser finito, caso contrário o conjunto infinito $\{p_i\}, i = 1, 2, \dots$ de pólos teria um ponto de acumulação.

Teorema 4.2. *Sejam f uma função elíptica num reticulado L e $D(z_0)$ um domínio fundamental para L . Então, a soma dos resíduos de todos os pólos situados em $D(z_0)$ é nula.*

Demonstração: Basta mostrar que a integral de $f(z)$ ao longo da fronteira de um domínio fundamental que possua todos os pólos de $f(z)$ no seu interior é igual a zero. Isto é, escolhemos $\tilde{z}_0$ próximo de z_0 (caso haja pólo na fronteira de $D(z_0)$, de modo que o conjunto $\{p_i\}$ finito, de pólos de f , esteja no interior de $D(\tilde{z}_0)$).

Seja $\partial D(\tilde{z}_0) = \bigcup_{j=1}^4 \gamma_j$, onde $\gamma_j(t)$, $0 \leq t \leq 1$ são definidas por: $\gamma_1(t) = \tilde{z}_0 + t\lambda_1 = \gamma_3(1-t) - \lambda_3$ e $\gamma_2(t) = \tilde{z}_0 + \lambda_1 + t\lambda_3 = \gamma_4(1-t) + \lambda_1$.

Então, pelo Teorema de Cauchy, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(\tilde{z}_0)} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z \in D(\tilde{z}_0)} \text{Res } f = 2\pi i \sum_{z \in D(z_0)} \text{Res } f \\ \Rightarrow \sum_{z \in D(z_0)} \text{Res } f &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\tilde{z}_0}^{\tilde{z}_0 + \lambda_1} f(z) dz + \int_{\tilde{z}_0 + \lambda_1}^{\tilde{z}_0 + \lambda_1 + \lambda_3} f(z) dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tilde{z}_0 + \lambda_1 + \lambda_3}^{\tilde{z}_0 + \lambda_3} f(z) dz + \int_{\tilde{z}_0 + \lambda_3}^{\tilde{z}_0} f(z) dz \right\}. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\tilde{z}_0}^{\tilde{z}_0 + \lambda_1} f(z) dz = \int_{\tilde{z}_0 + \lambda_1 + \lambda_3}^{\tilde{z}_0 + \lambda_3} f(z) dz \quad \text{e} \quad \int_{\tilde{z}_0 + \lambda_1}^{\tilde{z}_0 + \lambda_1 + \lambda_3} f(z) dz = - \int_{\tilde{z}_0 + \lambda_3}^{\tilde{z}_0} f(z) dz ,$$

temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(\tilde{z}_0)} f(z) dz = 0 = \sum_{z \in D(z_0)} \text{Res } f . \quad \square$$

Corolário 4.1. *a) O número de pólos de $f(z)$ e o número de zeros de $f(z)$ em $D(z_0)$ contados com as suas multiplicidades são iguais.*

b) Seja $a \in \mathbb{C}$. Então, a equação $f(z) = a$, $z \in D(z_0)$ possui o mesmo número de soluções, contadas com suas multiplicidades.

Definição 4.2. Se f é uma função elíptica de um reticulado L , o número de soluções da equação $f(z) = a$, contados com suas multiplicidades, denomina-se a *ordem de f* .

Isto implica que o número de pólos de f , contados com suas multiplicidades, situados num domínio fundamental $D(z_0)$ de L , é a ordem da função elíptica $f(z)$.

Temos então o

Corolário 4.2. *A ordem de uma função elíptica $f(z)$ não constante não é menor do que dois.*

Demonstração: Seja $D(z_0)$ um domínio fundamental para $f(z)$, elíptica de um reticulado L . Suponhamos que $f(z)$ possua somente um pólo simples p_i em $D(z_0)$. Então, a parte principal do desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ em torno de p_i tem a forma

$$\frac{R}{z - p_i},$$

onde R é o resíduo de $f(z)$ em p_i .

Pelo Teorema 4.2, R é igual a zero e, pelo Teorema 4.1, $f(z)$ é constante, contrariando a hipótese. □

Teorema 4.3. (Abel) *Sejam $f(z)$ uma função elíptica de um reticulado L e $D(z_0)$ um domínio fundamental, $z_1, z_2, \dots, z_k$ todos os zeros de $f(z)$ e $p_1, p_2, \dots, p_s$ todos os pólos de $f(z)$, em $D(z_0)$, tais que $z_i \neq z_j$ se $i \neq j$ e $p_l \neq p_t$, $l \neq t$. Então:*

$$\sum_{i=1}^k n_i z_i - \sum_{j=1}^s m_j p_j \in L ;$$

onde n_i é a ordem de multiplicidade do zero z_i e m_j a ordem de multiplicidade do pólo p_j .

Demonstração: Basta aplicar o Teorema 4.2 à função $G(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)}$. □

A função $\mathcal{P}$ de Weierstrass

Definição 4.3. Seja L um reticulado de $\mathbb{C}$, $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$.

A função $\mathcal{P}$ de Weierstrass de L é a função

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right).$$

Mostremos inicialmente que $\mathcal{P}$ é uma função meromorfa.

Observemos a série

$$\sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right).$$

Vamos mostrar que a série acima é absolutamente convergente sobre os conjuntos compactos de L e então, pelo Teorema de Convergência de Weierstrass, $\mathcal{P}(z)$ é uma função meromorfa.

Seja $R > 0$.

Então, se $|\Omega| \leq 2R$, a soma

$$\sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right) < \infty,$$

pois existe um número finito de Ω , tais que $|\Omega| \leq 2R$.

Portanto, basta analisar o que ocorre em $|\Omega| > 2R$. Temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right| &= \left| \frac{(2\Omega - z)z}{\Omega^2(z - \Omega)^2} \right| \\ &= \left| \frac{\left(2 - \frac{z}{\Omega}\right)z}{\Omega^3\left(\frac{z}{\Omega} - 1\right)^2} \right| \leq \frac{10R}{|\Omega|^3}. \end{aligned}$$

A série $\sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{|\Omega|^3}$ converge, pois como $\{\lambda_1, \lambda_3\}$ é base do $\mathbb{R}^2$, então, $\forall v \in \mathbb{R}^2$,

$$v = a\lambda_1 + b\lambda_3$$

e tomando $\|v\| = |a| + |b|$ implica que existe $\beta > 0$ tal que $|v| \geq \beta\|v\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma-euclidiana.

Como $\Omega = a\lambda_1 + b\lambda_3$, temos:

$$|\Omega| \geq \beta(|a| + |b|) \Rightarrow \frac{1}{\beta(|a| + |b|)} \geq \frac{1}{|\Omega|} .$$

Existem $4K$ pares (a, b) com $|a| + |b| = K$; $\forall K > 0$; $K \in \mathbb{Z}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{|\Omega|^3} &\leq \sum_{a, b \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta^3(|a| + |b|)^3} \\ &= \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4K\beta^{-3}}{K^3} = 4\beta^{-3} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} < \infty . \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(z)$ converge uniformemente sobre os compactos de L e, portanto, define uma função meromorfa.

Resta mostrar que $\mathcal{P}(z)$ é uma função duplamente periódica e, portanto, elíptica.

De fato, observamos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(-z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(-z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right) = \mathcal{P}(z) . \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{P}$ é uma função par e, portanto,

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \frac{2}{(z - \Omega)^3}$$

é uma função ímpar.

Verifica-se imediatamente que $\mathcal{P}'(z)$ é uma função elíptica:

$$\mathcal{P}'(z + \lambda_j) - \mathcal{P}'(z) = 0 , \quad j = 1, 3 , \quad \forall z \in \mathbb{C} .$$

Integrando a igualdade acima, temos:

$$\mathcal{P}(z + \lambda_j) - \mathcal{P}(z) = c_j , \quad j = 1, 3 , \quad \forall z \in \mathbb{C} .$$

Seja $z = -\frac{\lambda_1}{2}$.

$$\Rightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) - \mathcal{P}\left(-\frac{\lambda_j}{2}\right) = c_j, \quad j = 1, 3$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) = c_j$$

$$\Rightarrow c_j = 0, \quad j = 1, 3.$$

Assim,

$$\mathcal{P}(z + \lambda_j) - \mathcal{P}(z) = 0, \quad j = 1, 3, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

ou seja, $\mathcal{P}(z)$ é uma função meromorfa e duplamente periódica, portanto elíptica do reticulado $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$, com pólo duplo no zero e em todos os pontos $\Omega \in L \setminus \{0\}$.

As funções $\mathcal{P}(z)$ e $\mathcal{P}'(z)$ são fundamentais na teoria das funções elípticas. São denominadas funções elípticas de Weierstrass e pode-se provar que qualquer função elíptica é uma função racional de $\mathcal{P}(z)$ e $\mathcal{P}'(z)$.

Consideremos os pontos médios do reticulado $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$, denotados por $\omega_1 = \frac{\lambda_1}{2}$, $\omega_2 = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)$, $\omega_3 = \frac{\lambda_3}{2}$.

A ordem da função elíptica $\mathcal{P}'(z)$ é três e seus pólos têm ordem três e são os pontos de $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$. Portanto, $\mathcal{P}'(z)$ possui três zeros no domínio fundamental.

De $\mathcal{P}'(-z) = -\mathcal{P}'(z)$ e $\omega_j \equiv -\omega_j \pmod{L}$, $j = 1, 2, 3$, temos:

$$\mathcal{P}'(\omega_j) = -\mathcal{P}'(\omega_j)$$

e como $\mathcal{P}'(\omega_j) \neq \infty$, segue que $\mathcal{P}'(\omega_j) = 0$, $j = 1, 2, 3$.

Isto é, os zeros de $\mathcal{P}'$ são os pontos médios do reticulado $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$.

Em particular, a função $\mathcal{P}(z)$ relativa a um reticulado $L = L(\alpha, \beta i)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem algumas propriedades imediatas.

Através da expressão analítica de $\mathcal{P}(z)$, vemos que:

Figura 1.2. Localização dos zeros e pólos de $\mathcal{P}'(z)$.

1º) $\mathcal{P}(x + iy)$ e $\mathcal{P}(x - iy)$ são números complexos conjugados, isto é, $\overline{\mathcal{P}(x + iy)} = \mathcal{P}(x - iy)$.

Em particular, se $y = 0$, temos $\overline{\mathcal{P}(x)} = \mathcal{P}(x)$.

2º) Seja $z = \frac{\alpha}{2} + iy$, $y \in \mathbb{R}$. Então:

$$\overline{\mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{2} + iy\right)} = \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{2} - iy\right).$$

Por outro lado, $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{2} + iy\right) = \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{2} - iy\right)$, pois

$$\left(\frac{\alpha}{2} + iy\right) \equiv \left(\frac{\alpha}{2} - iy\right) \pmod{L}.$$

Portanto, $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{2} + iy\right)$ é real, para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

3º) Analogamente,

$$\overline{\mathcal{P}\left(x + i\frac{\beta}{2}\right)} = \mathcal{P}\left(x - i\frac{\beta}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

pois $\left(x + i\frac{\beta}{2}\right) \equiv \left(x - i\frac{\beta}{2}\right) \pmod{L}$.

Portanto, $\mathcal{P}\left(x + i\frac{\beta}{2}\right)$ é real, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

4º) $\overline{\mathcal{P}(iy)} = \mathcal{P}(-iy)$, pois $\mathcal{P}$ é uma função par e, portanto, $\mathcal{P}(iy)$ é real, para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

Resumindo, $\mathcal{P}(z)$ é real em todos os lados do retângulo fundamental e em suas linhas médias.

A equação diferencial para $\mathcal{P}(z)$

Consideremos a função

$$\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}, \quad \Omega \neq 0, \quad \Omega \in L = L(\lambda_1, \lambda_3).$$

Seu desenvolvimento em série de potências de z em uma vizinhança da origem é:

$$\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\Omega^{n+2}} z^n,$$

que é convergente no círculo $|z| < \Omega$.

Portanto, temos o seguinte desenvolvimento em série de potências de z para a função $\mathcal{P}(z)$ de Weierstrass:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \left[\frac{2z}{\Omega^3} + \frac{3z^2}{\Omega^4} + \cdots + \frac{(n+1)z^n}{\Omega^{n+2}} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \frac{z}{\Omega^3} + 3 \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \frac{z^2}{\Omega^4} + \cdots + (n+1) \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \frac{z^n}{\Omega^{n+2}} + \cdots \end{aligned}$$

Seja $\delta = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_3|\}$.

Temos que $\mathcal{P}(z)$ é convergente em $0 < |z| < \delta$. Como $\mathcal{P}(z)$ é par, a expressão acima reduz-se a

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \cdots + c_{2m} z^{2m} + \cdots,$$

onde $c_{2m} = (2m+1) \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\Omega^{2m+2}}$, que é a expressão de $\mathcal{P}(z)$ em série de Laurent em torno da origem.

Como $\mathcal{P}(z)$ define uma função meromorfa, podemos derivá-la termo a termo e assim obtemos:

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2c_2z + 4c_4z^3 + \cdots + 2_m c_{2m}z^{2m-1} + \cdots ,$$

que é o desenvolvimento de $\mathcal{P}'(z)$ em série de Laurent em torno da origem.

Nosso objetivo é obter uma relação algébrica entre $\mathcal{P}(z)$ e $\mathcal{P}'(z)$ e, começamos observando que a parte principal de $\mathcal{P}'(z)$ em torno da origem é $-\frac{2}{z^3}$ e a parte principal de $\mathcal{P}(z)$ é $\frac{1}{z^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}'(z))^2 - 4(\mathcal{P}(z))^3 &= \left(\frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_4 + \cdots \right) \\ -4 \left(\frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_4 + \cdots \right) &= -\frac{20c_2}{z^2} - 28c_4 \end{aligned}$$

+ termos que contêm potências não negativas de z .

Somando a ambos os membros $20c_2\mathcal{P}(z)$, temos:

$$(\mathcal{P}'(z))^2 - 4(\mathcal{P}(z))^3 + 20c_2\mathcal{P}(z) = -28c_4$$

+ termos que contêm potências não negativas de z .

Como $(\mathcal{P}'(z))^2 - 4(\mathcal{P}(z))^3 + 20c_2\mathcal{P}(z)$ é uma função elíptica que não possui pólos no domínio fundamental, ela é constante.

Em particular, para $z = 0$, o valor de $(\mathcal{P}'(z))^2 - 4(\mathcal{P}(z))^3 + 20c_2\mathcal{P}(z)$ é $-28c_4$, isto é:

$$(\mathcal{P}'(z))^2 - 4(\mathcal{P}(z))^3 + 20c_2\mathcal{P}(z) = -28c_4, \forall z ,$$

ou seja,

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4(\mathcal{P}(z))^3 - 20c_2\mathcal{P}(z) - 28c_4 ,$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem; relacionando as funções de Weierstrass $\mathcal{P}(z)$ e $\mathcal{P}'(z)$.

Os coeficientes $g_2 = 20c_2$ e $g_3 = 28c_4$ são chamados de invariantes da função $\mathcal{P}(z)$.

Com esta notação, temos:

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4(\mathcal{P}(z))^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3 .$$

Fazendo $\mathcal{P}(z) = \omega$, temos:

$$\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 = 4\omega^3 - g_2\omega - g_3 .$$

Como $\mathcal{P}'(z)$ tem zeros em ω_1, ω_2 e ω_3 , o polinômio $4\omega^3 - g_2\omega - g_3$ deve anular-se para $e_j = \mathcal{P}(\omega_j)$, $j = 1, 2, 3$. Portanto,

$$4\omega^3 - g_2\omega - g_3 = 4(\mathcal{P}(z) - e_1)(\mathcal{P}(z) - e_2)(\mathcal{P}(z) - e_3)$$

ou seja:

$$[\mathcal{P}'(z)]^2 = 4(\mathcal{P}(z) - e_1)(\mathcal{P}(z) - e_2)(\mathcal{P}(z) - e_3) .$$

As seguintes fórmulas decorrem imediatamente das relações anteriores:

$$1^\circ) e_1 + e_2 + e_3 = 0 ;$$

$$2^\circ) e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4} ;$$

$$3^\circ) e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4} ;$$

$$4^\circ) \mathcal{P}''(z) = 6\mathcal{P}(z)^2 - \frac{g_2}{2} .$$

A função ζ de Weierstrass

A função ζ de Weierstrass é definida pelas seguintes relações:

$$[\zeta(z)]' = -\mathcal{P}(z) \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) = 0$$

e, portanto, podemos escrevê-la na forma:

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = - \int_0^z \left(\mathcal{P}(z) - \frac{1}{z^2} \right) dz ,$$

onde a integração é feita ao longo de qualquer curva retificável contida em $\mathbb{C} \setminus L$, ligando 0 a z .

Sendo $\mathcal{P}(z)$ absolutamente convergente sobre os compactos de L , podemos integrar a expressão acima termo a termo e obtemos então a seguinte expressão para $\zeta(z)$:

$$\begin{aligned}\zeta(z) - \frac{1}{z} &= - \int_0^z \left(\sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right) dz \\ \Rightarrow \zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\Omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \Omega)} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2} \right)\end{aligned}$$

A função $\zeta(z)$ é meromorfa e tem pólos simples em todos os pontos do reticulado.

Observemos que $\zeta(z)$ é uma função ímpar. De fato,

$$[\zeta(z) + \zeta(-z)]' = \zeta'(z) - \zeta'(-z) = -\mathcal{P}(z) + \mathcal{P}(-z) \equiv 0$$

e, portanto,

$$\zeta(z) + \zeta(-z) \equiv c ,$$

ou seja,

$$\left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) + \left(\zeta(-z) + \frac{1}{z} \right) \equiv c .$$

Quando $z \rightarrow 0$, o primeiro membro tende a zero e, assim, $c \equiv 0$. Portanto,

$$\zeta(-z) = -\zeta(z) .$$

Seja $\mathcal{P}(z)$ a função de Weierstrass de um reticulado $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$ e $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$; $j = 1, 3$ caminhos diferenciáveis tais que $\gamma_j(t) \cap L = \emptyset$, $\gamma_j(0) = z_0$, $j = 1, 3$, $\gamma_1(1) = z_0 + \lambda_1$ e $\gamma_3(1) = z_0 + \lambda_3$.

Observamos que os números complexos

$$2\eta_j = - \int_{\gamma_j} \mathcal{P}(z) dz , \quad j = 1, 3$$

não dependem do ponto inicial z_0 nem dos caminhos γ_j que ligam z_0 a $z_0 + \lambda_j$. Isto é, os números $2\eta_1$ e $2\eta_3$ são invariantes do reticulado L . Temos:

$$2\eta_j = - \int_{\gamma_j} \mathcal{P}(z) dz = \zeta(z_0 + \lambda_j) - \zeta(z_0) , \quad j = 1, 2 ,$$

isto é,

$$\zeta(z + \lambda_j) = \zeta(z) + 2\eta_j , \quad j = 1, 3 , \quad \forall z \in \mathbb{C} .$$

Desse modo, ζ é uma função meromorfa “quase elíptica”.

Entre os invariantes $2\eta_j$, $j = 1, 3$ e os números λ_j , existe uma relação algébrica, denominada Relação de Legendre. Para encontrá-la, basta integrar a função $\zeta(z)$ ao longo da curva contorno do domínio fundamental $D(z_0)$, com vértices nos pontos z_0 , $z_0 + \lambda_1$, $z_0 + \lambda_1 + \lambda_3$, $z_0 + \lambda_3$ no sentido anti-horário.

Como $\zeta(z)$ tem um único pólo $z = 0$ no interior do domínio fundamental, com resíduo igual a 1, temos:

$$\int_{\gamma=\partial D(z_0)} \zeta(z) dz = 2\pi i .$$

Observando que

$$\int_{\gamma_3} \zeta(z) dz = - \int_{\gamma_1} \zeta(z + \lambda_3) dz = - \int_{\gamma_1} (\zeta(z) + 2\eta_3) dz = - \int_{\gamma_1} \zeta(z) dz - 2\eta_3 \lambda_1$$

e

$$\int_{\gamma_4} \zeta(z) dz = - \int_{\gamma_2} \zeta(z) dz + 2\eta_1 \lambda_3$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D(z_0)} \zeta(z) dz = -2\eta_3 \lambda_1 + 2\eta_1 \lambda_3 = 2\pi i \Rightarrow 2\eta_3 = 2\eta_1 \tau - \frac{2\pi i}{\lambda_1}$$

$$\Rightarrow \eta_3 = \eta_1 \tau - \frac{\pi}{\lambda_1} i ,$$

onde $\tau = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$, que é a relação de Legendre.

Observemos ainda que, para $j = 1, 3$, temos:

$$\zeta(\omega_j) = -\zeta(-\omega_j) = -\zeta(\omega_j + \lambda_j) = \zeta(-\omega_j) + 2\eta_j$$

e, portanto, $\zeta(\omega_j) = \eta_j$, $j = 1, 3$.

Se definirmos $\eta_2 = \zeta(\omega_2)$, temos:

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \zeta(\omega_2) = -\zeta(-\omega_2) = -\zeta(\omega_2 + \lambda_1 + \lambda_3) \\ &= -((\zeta(\omega_2 + \lambda_1) + 2\eta_3) = -\zeta(\omega_2) - 2\eta_1 - 2\eta_3 \\ &= -\eta_2 - 2\eta_1 - 2\eta_3 .\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^3 \eta_i = 0$.

Definição 4.4. Dois reticulados L e $\hat{L}$ são equivalentes, e escrevemos $L \cong \hat{L}$ se e somente se $\frac{\mathbb{C}}{L}$ é conformemente equivalente a $\frac{\mathbb{C}}{\hat{L}}$, isto é, existe um difeomorfismo analítico,

$$h : \frac{\mathbb{C}}{L} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}}{\hat{L}} .$$

Seja $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$ e consideremos

$$H = \{g_{m,n}(z) = z + m\lambda_1 + n\lambda_3, \quad m, n \in \mathbb{Z}\} .$$

Então, $\frac{\mathbb{C}}{H}$ é uma superfície de Riemann compacta de gênero um.

A aplicação $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow S^1 \times S^1$ definida por $\varphi(\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_3) = (e^{2\pi i\alpha}, e^{2\pi i\beta})$, onde α, β são reais, é um homomorfismo de grupos que tem o reticulado $L(\lambda_1, \lambda_3)$ como núcleo, isto é:

$$\text{Ker } \varphi = L(\lambda_1, \lambda_3) .$$

Como $L(\lambda_1, \lambda_3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, temos:

$$\frac{\mathbb{C}}{H} \cong \frac{\mathbb{C}}{L(\lambda_1, \lambda_3)} \cong S^1 \times S^1$$

e, portanto, $\frac{\mathbb{C}}{L(\lambda_1, \lambda_3)}$ é uma superfície de Riemann compacta de gênero um.

Figura 1.3. Figura modular

Definição 4.5. O conjunto

$$FM = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, \quad |\operatorname{Im} z| > 0, \quad -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} \right\}$$

é chamado de Figura modular.

Teorema 4.4. *Seja M uma superfície de Riemann compacta de gênero um. Então:*

a) *Existe $z \in FM$ tal que*

$$M \cong \frac{\mathbb{C}}{L(1, z)},$$

onde $L(1, z) = \{m + nz, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$.

b) *Se $z, z' \in FM$ são tais que*

$$\frac{\mathbb{C}}{L(1, z)} \cong \frac{\mathbb{C}}{L(1, z')},$$

então $z = z'$ ou $z, z' \in \partial FM$ e $iz = \overline{iz'}$.

Teorema da Aplicação de Riemann

O próximo teorema, devido a Riemann, é útil na construção de funções elípticas.

Uma demonstração, baseada nos conceitos de Famílias Normais, foi feita por Fejér e Riesz e encontra-se em [21].

Teorema 4.5. *Qualquer região R do plano, simplesmente conexa, cuja fronteira é uma curva de Jordan, pode ser levada por uma aplicação holomorfa injetora G , sobre a bola aberta $B = B(0, 1)$.*

A função G , do Teorema da Aplicação de Riemann, se estende continuamente à fronteira de R , pelo Teorema de Osgood-Carathéodory.

Teorema 4.6. (Osgood-Carathéodory) *Se R é uma região simplesmente conexa do plano, cuja fronteira é uma curva de Jordan, então, a função G do Teorema da Aplicação de Riemann, se estende continuamente à fronteira de R .*

Observemos, para uso posterior, que dadas duas regiões R_1 e R_2 , simplesmente conexas do plano e sejam G_1 e G_2 as aplicações holomorfas dadas pelo Teorema da Aplicação de Riemann.

Fixemos três pontos, $p_1, p_2, p_3 \in \partial R_1$, e outros três pontos, $q_1, q_2, q_3 \in \partial R_2$. Temos então seis pontos tais que:

$$G_1(p_1), G_1(p_2), G_1(p_3) \in \partial B \quad \text{e} \quad G_2(q_1), G_2(q_2), G_2(q_3) \in \partial B .$$

Existe uma transformação de Möebius T , eventualmente composta com uma inversão em relação a ∂B que leva B em B e leva os pontos $G_1(p_j)$, $j = 1, 2, 3$ em $G_2(q_j)$, $j = 1, 2, 3$, nessa ordem.

Observamos então que $G = G_2^{-1} \circ T \circ G_1$ é uma aplicação holomorfa de R_1 sobre R_2 , injetora tal que

$$G(p_i) = q_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 .$$

Figura 1.4

CAPÍTULO 2

AS SUPERFÍCIES MÍNIMAS CÍCLICAS

As superfícies mínimas cíclicas são o objeto de estudo deste capítulo. Iniciamos com o estudo das propriedades gerais dessas superfícies e os resultados apresentados encontram-se em [17].

A seguir demonstramos o Teorema de Shiffman que pode ser encontrado em [22] (e textos complementares [8], [11], [15]) e a família de exemplos de Riemann, com bibliografia básica [10].

2.1 AS SUPERFÍCIES MÍNIMAS CÍCLICAS

Definição: Uma superfície mínima é cíclica se e somente se ela é gerada por uma família a 1-parâmetro de circunferências.

Dados os centros $z(u)$, os raios $R(u) > 0$ e os campos $y_1(u)$ e $y_2(u)$ tais que $\{y_1(u), y_2(u)\}$ é uma base do plano da circunferência, para todo u , a superfície pode ser parametrizada na forma:

$$X(u, v) = z(u) + R(u) \cos v y_1(u) + R(u) \sin v y_2(u) ,$$

$$u \in I \subset \mathbb{R}$$

$$0 \leq v \leq 2\pi$$

onde admitiremos que $z(u)$, $R(u)$, $y_1(u)$, $y_2(u)$ são funções de classe C^2 em um intervalo I .

As seguintes proposições caracterizam as superfícies mínimas cíclicas.

Proposição 2.1. *Se X é uma superfície mínima cíclica, então os planos das circunferências são paralelos, isto é, $N(u)$ é constante, onde N é vetor normal unitário ao plano da circunferência, para cada $u \in I$.*

Prova: Suponhamos que exista u_0 , tal que $N'(u_0) \neq 0$. Então, existe uma vizinhança $I_0 \subset I$ de u_0 , tal que $N(u) \neq 0$, $\forall u \in I_0$.

Consideremos uma curva $\alpha : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\alpha'(u) = N(u)$. Observamos que α está parametrizada pelo comprimento de arco e que $\alpha''(u) = N'(u) \neq 0$; isto é, a curvatura $k(u) = \|\alpha''(u)\|$ não se anula em I_0 .

Escolhemos $\{y_1(u), y_2(u)\} = \{n(u), b(u)\}$ onde $\{t(u) = N(u), n(u), b(u)\}$ é o triedro de Frenet da curva α . Então, a superfície será parametrizada por

$$X(u, v) = z(u) + R(u) \cos v n(u) + R(u) \sin v b(u)$$

$$u \in I_0, \quad 0 < v < 2\pi .$$

Denotemos $z'(u) = \alpha t + \beta n + \gamma b$; onde α, β, γ são funções de classe C^1 . A curvatura média de X é dada por:

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2W^2} ,$$

onde $W = \left| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right|$, E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental e e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental.

Ou seja,

$$2W^3H = E\langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle - 2F\langle X_{uv}, X_u \times X_v \rangle + G\langle X_{vv}, X_u \times X_v \rangle .$$

Efetutando os cálculos indicados, obtemos:

$$0 = 2W^3H = \tilde{a} \cos 3v + \tilde{b} \sin 3v + \tilde{c} \cos 2v + \tilde{d} \sin 2v + \tilde{e} \cos v + \tilde{f} \sin v + \tilde{g}; \quad \forall v$$

onde os coeficientes são funções de u e v ,

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= -\frac{1}{2}kR^3(k^2R^2 + \beta^2 - \gamma^2) \\ \tilde{b} &= -\beta\gamma kR^3 \\ \tilde{c} &= \frac{1}{2}R^3(5\alpha k^2R + \beta'kR - \beta k'R - 6\beta kR') \\ \tilde{d} &= \frac{1}{2}R^3(\gamma'kR - \gamma k'R - 6\gamma kR') \\ \tilde{e} &= -3k^3R^5 + \text{termos em } \alpha, \beta \text{ e } R' .\end{aligned}$$

Como devemos ter todos os coeficientes nulos, temos

$$\tilde{b} = 0 \Rightarrow -\beta\gamma kR^3 = 0 \Rightarrow \beta\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma = 0 .$$

Por outro lado,

$$\tilde{a} = 0 \Rightarrow k^2R^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0 \Rightarrow \gamma \neq 0 .$$

Então, $\beta = 0$ e $k^2R^2 = \gamma^2$, e como $\tilde{c} = 0$, $\alpha = 0$.

Temos ainda:

$$\tilde{d} = 0 \Rightarrow \gamma'kR - \gamma k'R - 6\gamma kR' = 0 ,$$

com $\gamma = \pm kR$. Então,

$$\begin{aligned}\pm(k'R + kR')kR \mp (kR^2k') \mp (6k^2RR') &= 0 \\ \Rightarrow \pm(k'R + kR') \mp Rk' \mp 6kR' &= 0 \\ \Rightarrow 5kR' = 0 \Rightarrow R' = 0 .\end{aligned}$$

Com os resultados $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = k^2R^2$, temos $\tilde{e} = -3k^3R^5 = 0$.

Portanto, $k = 0$, contra a hipótese.

Logo, N é constante, isto é, as circunferências estão em planos paralelos. $\square$

Escolhemos coordenadas em $\mathbb{R}^3$ de modo que os círculos $u = \text{constante}$ sejam paralelos ao plano (x, y) . Então, o centro de cada círculo é um ponto $(\alpha(z), \beta(z), z)$ e os pontos (x, y, z) da superfície satisfazem

$$(x - \alpha(z))^2 + (y - \beta(z))^2 - R^2(z) = 0 ,$$

ou seja, podemos parametrizá-la por:

$$X(z, v) = (x(z, v), y(z, v), z(z, v)) ,$$

onde:

$$\begin{cases} x(z, v) = \alpha(z) + R(z) \cos v \\ y(z, v) = \beta(z) + R(z) \sin v \\ z(z, v) = z(u) \end{cases} , \begin{matrix} z \in I \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix}$$

Figura 2.1

Observamos que se a função $R(z)$ admitisse um ponto de máximo em I , existiria um ponto elíptico na superfície X , o que não é possível, pois a superfície é mínima. Assim, a função $R(z)$ pode ter, no máximo, um único ponto de mínimo em I .

Lema 2.1. *Numa vizinhança em que $R'(z) \neq 0$, a superfície mínima cíclica X pode ser parametrizada por*

$$\begin{cases} x(u, v) = \alpha_0 + am(u) + u \cos v \\ y(u, v) = \beta_0 + bm(u) + u \sin v \\ z(u, v) = \gamma_0 + n(u) \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} m(u) &= \int_{u_0}^u \frac{t^2}{\Delta(t)} dt, \\ n(u) &= \int_{u_0}^u \frac{dt}{\Delta(t)}, \end{aligned}$$

$\Delta(t) = \sqrt{(a^2 + b^2)t^4 + 2ct^2 - 1}$ e $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ é o centro da circunferência quando $u = u_0$.

Demonstração: Fazendo a mudança de variável $R(z) = u$, temos:

$$R'(z) = \frac{du}{dz} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{du} = \frac{1}{R'(z(u))}$$

em cada intervalo onde $R'(z) \neq 0$. Temos então:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \alpha(z(u)) + u \cos v \\ y(u, v) &= \beta(z(u)) + u \sin v \\ z(u, v) &= z(u). \end{aligned}$$

Assim, pondo $Y(u, v) = X(z(u), v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, temos:

$$\begin{aligned} Y_u &= \frac{1}{R'(z(u))}(\alpha', \beta', 1) + (\cos v, \sin v, 0) \\ Y_v &= u(-\sin v, \cos v, 0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E &= \langle Y_u, Y_u \rangle = \left(\frac{\alpha'}{R'} + \cos v \right)^2 + \left(\frac{\beta'}{R'} + \sin v \right)^2 + \left(\frac{1}{R'} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{R'} \right)^2 (\alpha'^2 + \beta'^2 + 1) + \frac{2\alpha'}{R'} \cos v + \frac{2\beta'}{R'} \sin v + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle Y_u, Y_v \rangle = \left(\frac{\alpha'}{R'} + \cos v \right) (-u \sin v) + \left(\frac{\beta'}{R'} + \sin v \right) (u \cos v) \\ &= \frac{u}{R'} (-\alpha' \sin v + \beta' \cos v) \end{aligned}$$

$$G = \langle Y_v, Y_v \rangle = u^2$$

$$W^2 = EG - F^2 = \|Y_u \times Y_v\| ,$$

onde

$$\begin{aligned} Y_u \times Y_v &= \frac{u}{R'} (\cos v, -\sin v, \alpha' \cos v + \beta' \sin v + R') \\ Y_{uu} &= -\frac{R''}{(R')^3} (\alpha', \beta', 1) + \frac{1}{(R')^2} (\alpha'', \beta'', 0) \\ Y_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ Y_{vv} &= -u (\sin v, \cos v, 0) \end{aligned}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} We &= \langle Y_{uu}, Y_u \times Y_v \rangle = -\frac{u}{(R')^3} (\alpha'' \cos v + \beta'' \sin v + R'') \\ Wf &= \langle Y_{uv}, Y_u \times Y_v \rangle = 0 \\ Wg &= \langle Y_{vv}, Y_u \times Y_v \rangle = \frac{u^2}{R'} \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = 2W^3H = WeG - 2WfF + WgE$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\frac{u^3}{(R')^3}(\alpha'' \cos v + \beta'' \sin v + R'') + \frac{u^2}{(R')^2}(\alpha'^2 + \beta'^2 + 1) \\
&\quad + \frac{2u^2}{(R')^2}(\alpha' \cos v + \beta' \sin v) + \frac{u^2}{R'} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{u^2}{(R')^3}((\alpha'^2 + \beta'^2 + 1 + (R')^2 - uR'') + (2R'\alpha' - u\alpha'') \cos v \\
&\quad + (2R'\beta' - u\beta'') \sin v) = 0 \quad \forall (u, v) . \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha'^2 + \beta'^2 + 1 = R''u - (R')^2 \\ 2R'\alpha' - u\alpha'' = 0 \\ 2R'\beta' - u\beta'' = 0 \end{cases} \quad (*)
\end{aligned}$$

Considerando a segunda equação de (*), temos:

$$\Rightarrow \alpha(z) = \text{constante}$$

ou

$$2R'\alpha' = u\alpha''$$

$$\Rightarrow u\alpha'' = 2R'\alpha'$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha''}{\alpha'} = \frac{2R'}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha''}{\alpha'} = \frac{2R'}{R}$$

Então,

$$\alpha(z) = \text{constante}$$

ou

$$\ln |\alpha'(z)| = 2 \ln R(z) + \ln a$$

$$\Rightarrow \alpha'(z) = a \cdot R^2(z) ; \quad a \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$\alpha(z) = a \int_{z_0}^z R^2(z) dz + \alpha_0$$

onde $\alpha_0 = \alpha(z_0)$.

$$\Rightarrow \alpha(z) = am(z) + \alpha_0 ; \quad \text{onde } m(z) = \int_{z_0}^z R^2(z) dz .$$

Analogamente,

$$\beta(z) = b.m(z) + \beta_0 ; \quad \text{onde } \beta_0 = \beta(z_0) .$$

Voltando à nossa parametrização original, temos:

$$\begin{cases} x(u, v) = \alpha_0 + a.m(z(u)) + u.\cos v \\ y(u, v) = \beta_0 + b.m(z(u)) + u.\sen v \\ z(u, v) = z(u) . \end{cases}$$

Considerando a primeira equação de (*) e as expressões de α e β encontradas, temos:

$$\begin{aligned} \alpha'^2 + \beta'^2 + 1 &= R''u - (R')^2 = R''R - (R')^2 \\ \Rightarrow (aR^2)^2 + (bR^2)^2 + 1 &= \frac{R^3}{2R'} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \\ \Rightarrow (a^2 + b^2)R^4 + 1 &= \frac{R^3}{2R'} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \\ \Rightarrow ((a^2 + b^2)R^4 + 1) \frac{2R'}{R^3} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \\ \Rightarrow 2RR'(a^2 + b^2) + \frac{2R'}{R^3} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 &= 2RR'(a^2 + b^2) + \frac{2R'}{R^3} \end{aligned}$$

Integrando, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 &= (a^2 + b^2)R^2 - \frac{1}{R^2} + 2c , \quad \text{onde } c = \text{constante} \\ \Rightarrow (R')^2 &= (a^2 + b^2)R^4 - 1 + 2cR^2 \\ \Rightarrow R' &= \sqrt{(a^2 + b^2)R^4 + 2cR^2 - 1} \end{aligned}$$

Denotando $R' = \Delta = \sqrt{(a^2 + b^2)R^4 + 2cR^2 - 1}$, temos

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow z(u) = \int_{u_0}^u \frac{dt}{\Delta(t)} + \gamma_0$$

ou seja:

$$z(u) = \int_{u_0}^u \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + b^2)t^4 + 2ct^2 - 1}} + \gamma_0$$

onde $z(u_0) = \gamma_0$ e

$$\begin{aligned} n(u) &= n(z(u)) = \int_{u_0}^u R^2(z(u)) \frac{dz}{du} du, \quad \frac{dz}{du} = \frac{1}{\Delta} \\ m(u) &= m(z(u)) = \int_{u_0}^u \frac{t^2}{\Delta(t)} dt. \end{aligned}$$

Portanto, X pode ser parametrizada por

$$\begin{cases} x(u, v) = \alpha_0 + am(u) + u \cos v \\ y(u, v) = \beta_0 + bm(u) + u \sin v \\ z(u, v) = \gamma_0 + n(u) \end{cases}$$

onde $m(u) = \int_{u_0}^u \frac{t^2}{\Delta(t)} dt$, $n(u) = \int_{u_0}^u \frac{dt}{\Delta(t)}$, $\Delta(t) = \sqrt{(a^2 + b^2)t^4 + 2ct^2 - 1}$ e $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ é o centro do círculo quando $u = u_0$. $\square$

Observações:

(1) Observamos que no caso em que $a = b = 0$, devemos ter $c > 0$ e então:

$$n(u) = \int_{u_0}^u \frac{dt}{\sqrt{2ct^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2c}} \cosh^{-1}(\sqrt{2c}u) + \text{constante},$$

isto é, a superfície X é o catenóide, parametrizado por

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \alpha_0 + u \cos v \\ y(u, v) &= \beta_0 + u \sin v \\ z(u, v) &= \gamma_0 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \cosh^{-1}(\sqrt{2c}u) \end{aligned}$$

(2) No caso geral, $m(u)$ e $n(u)$ são integrais elípticas.

Consideremos os casos em que $a^2 + b^2 > 0$. Com as hipóteses anteriores, mostraremos que a superfície mínima cíclica X está contida entre dois planos paralelos e possui duas retas como fronteira.

De fato, por uma translação, podemos fazer $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$. Observamos então que a curva dos centros $\alpha(u) = (am(u), bm(u), n(u))$ está no plano $bx = ay$. Fazendo uma rotação em torno do eixo dos z , de modo a colocá-la no plano $y = 0$, teremos $\alpha(u) = (am(u), 0, n(u))$, isto é, $b = 0$. Temos então:

$$\Delta = \sqrt{a^2 R^4 + 2cR^2 - 1} = a \sqrt{R^4 + \frac{2c}{a^2} R^2 - \frac{1}{a^2}},$$

com $a > 0$ e, fazendo

$$R^4 + \frac{2c}{a^2} R^2 - \frac{1}{a^2} = (R^2 + A^2)(R^2 - B^2),$$

onde $R^2 \geq B^2$ e $A \geq 0, B \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} R^4 + \frac{2c}{a^2} R^2 - \frac{1}{a^2} &= R^4 - R^2 B^2 + A^2 R^2 - A^2 B^2 \\ R^4 + \frac{2c}{a^2} R^2 - \frac{1}{a^2} &= R^4 + (A^2 - B^2) R^2 - A^2 B^2 \\ \Leftrightarrow A^2 - B^2 &= \frac{2c}{a^2} \quad \text{e} \quad A^2 B^2 = \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

temos: $A^2 = \frac{2c}{a^2} + B^2$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2c}{a^2} + B^2 \right) B^2 &= \frac{1}{a^2} \\ B^4 + \frac{2c}{a^2} B^2 - \frac{1}{a^2} &= 0 \\ \Rightarrow B^2 &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + a^2}}{a^2} \end{aligned}$$

Considerando $B \geq 0$, isto é, o menor valor do raio, que não pode ser nulo, devido à regularidade da superfície.

Assim, devemos ter:

$$B^2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + a^2}}{a^2} \quad \text{e} \quad A^2 = \frac{c + \sqrt{a^2 + c^2}}{a^2},$$

portanto, $B^2 - A^2 = \frac{2(-c)}{a^2}$ e $A^2 B^2 = \frac{1}{a^2}$.

Temos então:

1º) Se $c \geq 0 \Rightarrow A \geq B > 0$.

2º) Se $c < 0 \Rightarrow B \geq A > 0$.

A equação da superfície é dada então por:

$$\begin{cases} x(u, v) = \int_{u_0}^u \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2 + A^2)(t^2 - B^2)}} + u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \\ z(u, v) = AB \int_{u_0}^u \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + A^2)(t^2 - B^2)}} \end{cases}$$

e a curva dos centros é dada por:

$$c(u) = \left(\int_{u_0}^u \frac{t^2 dt}{\Delta(t)}, 0, AB \int_{u_0}^u \frac{dt}{\Delta(t)} \right).$$

Observamos que as integrais

$$m(u) = \int_{u_0}^u \frac{t^2}{\Delta(t)} dt \quad \text{e} \quad n(u) = \int_{u_0}^u \frac{dt}{\Delta(t)}$$

são tais que $u_0 \geq B$ ou $u_0 \leq -B$, uma vez que $\Delta(t)$ exige a condição $t^2 \geq B^2$.

Na verdade, podemos escolher $|u_0| = B$, pois para cada $u \geq B$ fixado, as integrais impróprias no extremo inferior

$$\int_B^u \frac{t^2}{\Delta(t)} dt \quad \text{e} \quad \int_B^u \frac{dt}{\Delta(t)},$$

convergem.

Temos então:

$$\begin{cases} x(u, v) = \int_B^u \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2 + A^2)(t^2 - B^2)}} + u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \\ z(u, v) = AB \int_B^u \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + A^2)(t^2 - B^2)}} \end{cases}$$

Se $u_0 = B$, fazemos a mudança de variável de t por $-t$ e obtemos as mesmas fórmulas.

Observamos, finalmente, que $A^2 \geq B^2 > 0$

$$\Rightarrow \int_B^u \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2 + A^2)(t^2 - B^2)}} \leq \int_B^u \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + B^2)(t^2 - B^2)}} ; \quad u > B .$$

Fazendo $t^2 - B^2 = T^2$, temos:

$$t^2 + B^2 = T^2 + 2B^2 \Rightarrow dt = \frac{T}{t} dT = \frac{T dT}{\sqrt{T^2 + B^2}}$$

e, então,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - B^2} \sqrt{t^2 + B^2}} = \int \frac{dT}{\sqrt{T^2 + B^2} \sqrt{T^2 + 2B^2}} \\ &= \frac{1}{B} \int \frac{dT}{\sqrt{\left(\frac{T}{B}\right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{T}{B}\right)^2 + 2}} < \frac{1}{B} \int \frac{dT}{\sqrt{\left(\frac{T}{B}\right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{T}{B}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{B} \int \frac{dT}{\left(\frac{T}{B}\right)^2 + 1} = \arctg\left(\frac{T}{B}\right) + \text{constante.} \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\int_B^u \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - A^2)(t^2 + B^2)}} < \arctg\left(\frac{\sqrt{t^2 - B^2}}{B}\right) \Big|_B^u = \arctg\left(\frac{\sqrt{u^2 - B^2}}{B}\right)$$

que converge para $\frac{\pi}{2}$ quando $u \rightarrow \infty$. Portanto,

$$z(u, v) \leq AB \frac{\pi}{2} , \quad \forall (u, v) \quad \text{com } u \geq B .$$

Analogamente, considerando $u \leq -B$ e trocando t por $-t$, temos:

$$z(u, v) \geq -\frac{AB\pi}{2} , \quad \forall (u, v) \quad \text{com } u \leq -B .$$

Isto é, a superfície se encontra em uma fatia do $\mathbb{R}^3$, entre os planos $z = -\alpha$ e $z = \alpha$, onde

$$\alpha = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_B^u \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + A^2)(t^2 - B^2)}}$$

e, à medida que a superfície se aproxima desses planos, o raio da circunferência tende para infinito.

Observamos que existe um caminho $v = \pi - \frac{k}{u}$, tal que x e y não tendem a ∞ quando $u \rightarrow \infty$. Isto pode ser visto fazendo u tender a ∞ com $v = \pi - \frac{k}{u}$, onde k é uma constante escolhida arbitrariamente.

Calculando os limites temos:

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} x(u, v) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left\{ \int_B^u \frac{t^2 dt}{\Delta(t)} + u \cos v \right\} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left\{ \int_B^u \frac{t^2 dt}{\Delta(t)} - u \right\} = -B - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_B^u \left(1 - \frac{t^2}{\Delta(t)} \right) dt \\ &= -B - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_B^u \frac{(\Delta(t)^2 - t^4)}{\Delta(t)(\Delta(t) + t^2)} dt = -B - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_B^u \frac{(A^2 - B^2)t^2 - A^2 B^2}{\Delta(t)(t^2 + \Delta(t))} dt\end{aligned}$$

onde $\Delta(t) = \sqrt{(t^2 + A^2)(t^2 - B^2)}$.

A integral $\int_B^u \frac{(A^2 - B^2)t^2 - A^2 B^2}{\Delta(t)(t^2 + \Delta(t))} dt$ converge para um valor $x_0 \in \mathbb{R}$ e, portanto,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} x(u, v) = -B - x_0 \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} y(u, v) = k.$$

Assim, a superfície está contida entre os planos $z = -\alpha$ e $z = \alpha$ e possui as retas $x = \pm(B + x_0)$, $z = \pm\alpha$ como fronteira, já que os centros das circunferências estão em um plano perpendicular ao eixo dos x ; plano $y = 0$.

2.2 O TEOREMA DE SHIFFMAN

Teorema 2.1. *Seja S uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, duplamente conexa (isto é, um anel mínimo), cuja fronteira são duas curvas planas, Γ_1 e Γ_2 , contidas em planos paralelos.*

Se Γ_1 e Γ_2 são círculos, então a intersecção de S com um plano paralelo aos planos das curvas fronteira é ainda um círculo (isto é, S é cíclica).

Demonstração: Seja S uma superfície duplamente conexa cujas curvas de fronteira Γ_1 e Γ_2 estão em planos paralelos.

Escolhemos um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ de modo que os planos paralelos sejam $z = c_1$ e $z = c_2$, respectivamente, $c_1 \neq c_2$.

Considerando-se parâmetros isotérmicos $(\tilde{u}, \tilde{v})$ que variam em um anel com coordenadas polares (r, θ) , $\rho \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, temos:

$$x(r, \theta) = x(\tilde{u}(r, \theta), \tilde{v}(r, \theta))$$

$$y(r, \theta) = y(\tilde{u}(r, \theta), \tilde{v}(r, \theta))$$

$$z(r, \theta) = z(\tilde{u}(r, \theta), \tilde{v}(r, \theta))$$

onde

$$\tilde{u} = r \cos \theta \quad \text{e} \quad \tilde{v} = r \sin \theta .$$

O Laplaciano de z , em coordenadas polares, é

$$\Delta z = z_{\tilde{u}\tilde{u}} + z_{\tilde{v}\tilde{v}} = z_{rr} + \frac{z_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{z_r}{r} .$$

Como a superfície S é mínima, temos $\Delta z = 0$.

Consideremos a equação diferencial $z_{rr} + \frac{z_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{z_r}{r} = 0$ com a condição de contorno

$$z(\rho, \theta) = c_1 \quad \text{e} \quad z(1, \theta) = c_2 , \quad \forall \theta .$$

Procurando soluções da forma $z(r, \theta) = f(r)g(\theta)$,

$$\frac{r^2}{f(r)} \left(f''(r) + \frac{f'(r)}{r} \right) = c \tag{I}$$

e

$$-\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = c , \tag{II}$$

onde c é constante.

De (II), temos:

$$g''(\theta) + cg(\theta) = 0, \quad \forall \theta.$$

Temos três casos a considerar:

1º) Se $c = 0$, $g(\theta) = a\theta + b$.

2º) Se $c > 0$, $g(\theta) = a \cos(\sqrt{c}\theta) + b \sin(\sqrt{c}\theta)$.

3º) Se $c < 0$, $g(\theta) = a \cosh(\sqrt{-c}\theta) + b \sinh(\sqrt{-c}\theta)$.

Por outro lado, usando as condições de contorno, temos:

$$c_1 = f(\rho)g(\theta) \quad \text{e} \quad c_2 = f(1)g(\theta), \quad \forall \theta,$$

o que implica que $g'(\theta) = 0, \forall \theta$.

Para o 2º e 3º caso, $g'(\theta) = 0$ implica $g(\theta) = 0, \forall \theta$ (isto é, $a = b = 0$). Mas, como $z(r, \theta)$ não é idênticamente nula, segue que vale apenas o 1º caso, isto é, $c = 0$ e $g(\theta) = b, \forall \theta$.

De (I), temos

$$\frac{r^2}{f(r)} \left(f''(r) + \frac{f'(r)}{r} \right) = 0 \Rightarrow rf''(r) + f'(r) = 0$$

cujas solução geral é

$$f(r) = A + B \log \frac{1}{r}, \quad A, B \text{ constantes reais.}$$

$$\Rightarrow z(r, \theta) = A + B \log \frac{1}{r}.$$

Assim, a imagem em S dos círculos r constante, correspondem às intersecções de S com os planos

$$z = A + B \log \frac{1}{r} = \text{constante.}$$

Podemos remover A por uma translação em $\mathbb{R}^3$ e remover B por uma homotetia.

Assim, podemos supor $z(r, \theta) = \log \frac{1}{r}$.

Observamos que as funções $x(\tilde{u}, \tilde{v})$, $y(\tilde{u}, \tilde{v})$, $z(\tilde{u}, \tilde{v})$, que definem S , têm derivadas de primeiras ordens contínuas no anel fechado $\rho \leq r \leq 1$.

Figura 2.2

Podemos reparametrizá-la em parâmetros isotérmicos (u, v) , tomando $\theta = u$ e $\log \frac{1}{r} = v$, já que a função mudança de parâmetros é a função analítica e^{iz} .

Temos:

$$Y(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = v \end{cases}$$

Seja T o vetor tangente à curva C_v , onde C_v é a intersecção da superfície S , com o plano $z = v$, no ponto $P = (x(u, v), y(u, v), v)$ e v o ângulo entre esse vetor e o eixo

dos x . Vamos mostrar que ψ é uma função harmônica sobre a superfície.

Observamos que o ângulo ψ é uma função de u e v , variando ponto a ponto na curva intersecção $\mathcal{C}_v$.

Nos pontos de $\mathcal{C}_v$, a equação da superfície S é dada por:

$$Y(u, v) = (x(u, v), y(u, v), v) .$$

Como $x(u, v)$ e $y(u, v)$ são funções harmônicas, existem funções analíticas $\alpha(u, v)$ e $\beta(u, v)$ que possuem $x(u, v)$ e $y(u, v)$ como partes reais, isto é:

$$\alpha(u, v) = x(u, v) + i\tilde{x}(u, v)$$

$$\beta(u, v) = y(u, v) + i\tilde{y}(u, v)$$

onde $\tilde{x}(u, v)$ e $\tilde{y}(u, v)$ são as respectivas conjugadas harmônicas de $x(u, v)$ e $y(u, v)$.

Sendo α e β funções analíticas de (u, v) , temos:

$$\alpha'(u, v) = x_u(u, v) + i\tilde{x}_u(u, v) = x_u - ix_v$$

e

$$\beta'(u, v) = y_u(u, v) + i\tilde{y}_u(u, v) = y_u - iy_v$$

O fato de (u, v) serem parâmetros isotérmicos nos leva a:

$$x_u^2 + y_u^2 = y_v^2 + x_v^2 + 1$$

$$x_u x_v + y_u y_v = 0$$

e, portanto,

$$(\alpha'(u, v))^2 + (\beta'(u, v))^2 = 1 .$$

Então, existe $\theta(u, v)$, função analítica tal que

$$\alpha'(u, v) = \cos \theta(u, v) \quad \text{e} \quad \beta'(u, v) = \sin \theta(u, v) .$$

Denotando $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, temos:

$$x_u + i\tilde{x}_u = \cos(\theta_1 + i\theta_2) = \cos \theta_1 \cosh \theta_2 - i \sin \theta_1 \sinh \theta_2$$

e

$$y_u + i\tilde{y}_u = \sin(\theta_1 + i\theta_2) = \sin \theta_1 \cosh \theta_2 + i \cos \theta_1 \sinh \theta_2$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \cosh \theta_2 &= \sqrt{x_u^2 + y_u^2} \\ \cos \theta_1 &= \frac{x_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} \\ \sin \theta_1 &= \frac{y_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} . \end{aligned}$$

Portanto, $\theta_1 = \psi$ e θ_2 é a conjugada harmônica de ψ , que denotaremos H .

Denotando por s o comprimento de arco da curva $C_v(u)$, imagem na superfície S da reta v constante, temos:

$$\begin{aligned} s(u) &= \int_{u_0}^u |C'_v(t)| dt = \int_{u_0}^u \sqrt{x_u^2 + y_u^2} dt \\ \Rightarrow \frac{ds}{du} &= (x_u^2 + y_u^2)^{1/2} = \cosh \theta_2 \\ \Rightarrow H &= \operatorname{arcosh} \frac{ds}{du} . \end{aligned}$$

Mostremos que, se k é a curvatura de $C_v(u)$, então:

$$k_u = \frac{H_{uv}}{\cosh H} - \frac{\sinh H}{\cosh^2 H} H_u H_v .$$

De fato, para cada v fixado, a curva $C_v(u) = (x(u, v), y(u, v), v)$ tem curvatura

$$k(u) = \frac{|C'_v(u) \times C''_v(u)|}{|C'_v(u)|^3}$$

ou seja:

$$k(u) = \frac{|y_{uu}x_u - x_{uu}y_u|}{(x_u^2 + y_u^2)^{3/2}} .$$

Observamos que:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{y_{uu}x_u - x_{uu}y_u}{x_u^2} \right| = |\sec^2 \psi \psi_u| \\
\Leftrightarrow & \left| \frac{y_{uu}x_u - x_{uu}y_u}{x_u^2} \right| = \left| \frac{(x_u^2 + y_u^2)\psi_u}{x_u^2} \right| \\
\Leftrightarrow & \left| \frac{y_{uu}x_u - x_{uu}y_u}{x_u^2 + y_u^2} \right| = |\psi_u| \\
\Leftrightarrow & \frac{|y_{uu}x_u - x_{uu}y_u|}{(x_u^2 + y_u^2)\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} = \frac{|\psi_u|}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} \\
\Leftrightarrow & \frac{|y_{uu}x_u - x_{uu}y_u|}{(x_u^2 + y_u^2)^{3/2}} = \frac{|\psi_u|}{\cosh H} \\
\Leftrightarrow & k(u) = \frac{|\psi_u|}{\cosh H} .
\end{aligned}$$

Como ψ e H são conjugadas harmônicas, então

$$k(u) = \frac{H_v}{\cosh H} .$$

Derivando em relação a u , temos:

$$k_u(u) = \frac{H_{vu}}{\cosh H} - \frac{\sinh H H_u H_v}{(\cosh H)^2} .$$

Considerando a função

$$\mathcal{L}(u, v) = \cosh H k_u(u) ,$$

isto é:

$$\mathcal{L}(u, v) = H_{vu} - \tanh H H_u H_v$$

e observando que as funções H , H_{uv} e $H_u H_v$ são funções harmônicas, temos que $\mathcal{L}$ satisfaz à equação diferencial

$$\mathcal{L}_{uu}(u, v) + \mathcal{L}_{vv}(u, v) + \frac{2}{\cosh^2 H} (H_u^2 + H_v^2) \mathcal{L}(u, v) = 0 .$$

Consideremos a mudança de parâmetros

$$\xi(u, v) = \psi(u, v) + iH(u, v) .$$

Como $\psi + iH$ é uma função analítica de (u, v) , os novos parâmetros (ψ, H) são isotérmicos. Portanto, o plano (u, v) é transformado conformemente no plano (ψ, H) .

Temos então:

$$\mathcal{L}_{uu} + \mathcal{L}_{vv} = (\mathcal{L}_{\psi\psi} + \mathcal{L}_{HH})(H_u^2 + H_v^2) .$$

Então, a equação diferencial

$$\mathcal{L}_{uu} + \mathcal{L}_{vv} + \frac{2}{\cosh^2 H}(H_u^2 + H_v^2)\mathcal{L} = 0$$

pode ser escrita em termos dos novos parâmetros ψ e H :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_{\psi\psi} + \mathcal{L}_{HH})(H_u^2 + H_v^2) + \frac{2}{\cosh^2 H}(H_u^2 + H_v^2)\mathcal{L}(u, v) = 0 \\ \Leftrightarrow & (H_u^2 + H_v^2) \left(\mathcal{L}_{\psi\psi} + \mathcal{L}_{HH} + \frac{2}{\cosh^2 H}\mathcal{L}(u, v) \right) = 0 . \end{aligned}$$

Como $H_u^2 + H_v^2 \neq 0$, temos:

$$\mathcal{L}_{\psi\psi} + \mathcal{L}_{HH} + \frac{2}{\cosh^2 H}\mathcal{L} = 0 ,$$

isto é, a função $\mathcal{L}(u(\psi, H), v(\psi, H))$ é uma auto-função do operador linear

$$T(\Omega) = \Omega_{\psi\psi} + \Omega_{HH} + \frac{2}{\cosh^2 H}\Omega ,$$

relativa ao autovalor $\lambda = 0$.

Consideremos as funções $k(u) = \frac{H_v}{\cosh H}$ e $\mathcal{L}(u, v)$.

Como a imagem da fronteira do anel são círculos, temos que k é constante sobre cada fronteira e portanto $k_u(u) = 0$. Portanto, $\mathcal{L} = 0$ sobre a fronteira.

Provaremos que $\mathcal{L} \equiv 0$, isto é, $k_u \equiv 0$ e, portanto, v constante, o que prova o teorema.

Suponhamos que $\mathcal{L} \not\equiv 0$. Temos:

$$0 = \int_0^{2\pi} k_u(u, v) du = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cosh H(u, v)} \mathcal{L}(u, v) du$$

sobre qualquer curva v constante. Isto implica que $\mathcal{L}$ assume valores positivos e negativos, isto é, existem u_1, u_2 , $0 \leq u_1, u_2 < 2\pi$ tais que

$$\mathcal{L}(u_1, v) > 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(u_2, v) < 0 .$$

Como $\mathcal{L}$ é auto-função do operador T , correspondente ao autovalor $\lambda = 0$, concluímos que $\lambda = 0$ não é o primeiro autovalor da seqüência infinita de autovalores de T , pois, nesse caso, a função $\mathcal{L}(u, v)$ não mudaria de sinal.

Então, denotando os autovalores do operador T por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, onde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, a afirmação acima significa que $\lambda_2 \leq 0$.

Por manipulação do operador T , usando a teoria de Stürm-Liouville, provamos que $\lambda_2 > 0$, contradizendo a afirmação anterior.

Portanto, $\mathcal{L}(u, v) = 0, \forall u, v$.

$$\Rightarrow \cosh H k_u = 0, \quad \forall u, v$$

$$\Rightarrow k_u = 0, \quad \forall u .$$

Portanto, a intersecção de S por um plano paralelo aos planos de Γ_1 e Γ_2 também é um círculo. □

2.3 OS EXEMPLOS DE RIEMANN DE SUPERFÍCIES CÍCLICAS

Os exemplos de Riemann podem ser descritos por suas representações de Weierstrass. Para cada $\lambda \geq 1$, consideremos um tóro retangular $T_\lambda = \frac{\mathbb{C}}{L}$, onde L é o reticulado gerado por $\{\lambda, i\}$ e consideremos uma função elíptica P , com um pólo duplo em $z = 0$, um zero duplo em $w_2 = \frac{\lambda+i}{2}$ e sem outros zeros e pólos.

A função $\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(w_2)$, onde $\mathcal{P}$ é a função de Weierstrass, tem exatamente os

mesmos pólos e zeros que P e então, pelo Teorema de Liouville,

$$P(z) = c(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(w_2)) ,$$

onde c é uma constante complexa (a determinar).

Sejam $g = P$ e $\eta = \frac{idz}{P}$.

Os exemplos de Riemann são as superfícies mínimas definidas pela imersão:

$$\begin{aligned} X : T_\lambda &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ z &\longmapsto X(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} x_1(z) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z i(P^{-1} - P) dz \\ x_2(z) &= -\operatorname{Re} \int_{z_0}^z (P + P^{-1}) dz \\ x_3(z) &= -2\operatorname{Im} z . \end{aligned}$$

Vamos mostrar que as integrais que definem $x_1(z)$ e $x_2(z)$ da imersão X estão bem definidas. ou seja, para toda curva fechada l em T_λ , tem-se:

$$\int_l g^2 \eta = \overline{\int_l \eta} \quad (I)$$

De fato, sendo $g = P$ e $\eta = \frac{idz}{P}$, temos $g^2 \eta = iP dz$ e, portanto, (I) se escreve:

$$\int_l iP dz = \overline{\int_l \frac{idz}{P}} \Rightarrow i \int_l P dz = -i \int_l \frac{dz}{P} \Rightarrow \int_l P dz = -\overline{\int_l \frac{dz}{P}} .$$

Consideremos inicialmente as curvas fechadas l em torno dos pontos $z = 0$ e $z = \frac{\lambda+i}{2}$.

Sendo $P(z) = c(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(\frac{\lambda+i}{2}))$, temos:

$$P(z) = c\mathcal{P}(z) - k ,$$

Figura 2.3

onde $k = c\mathcal{P}\left(\frac{\lambda+i}{2}\right)$.

Numa vizinhança do zero, o desenvolvimento de $\mathcal{P}(z)$ é:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2n} z^{2n} + \cdots, \quad a_{2n} \in \mathbb{C}.$$

Então, nessa vizinhança, $P(z)$ tem a forma:

$$P(z) = \frac{c}{z^2} - k + ca_2 z^2 + ca_4 z^4 + \cdots$$

Seja $l(t) = \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, temos:

$$\int_l P(z) dz = 2\pi i \text{Res}(P, 0) = 0.$$

Por outro lado, a função $\frac{1}{P(z)}$ é holomorfa em $z = 0$.

Portanto, $\int_l \frac{1}{P} dz = 0 \Rightarrow \overline{\int_l \frac{1}{P} dz} = 0$. Temos então

$$-\overline{\int_l \frac{1}{P} dz} = \int_l P dz;$$

para $l(t) = \varepsilon e^{it}$.

Por outro lado, em torno de $w_2 = \frac{\lambda+i}{2}$, a função elíptica $P(z)$ tem a forma:

$$P(z) = P(w_2) + P'(w_2)(z - w_2) + \frac{P''(w_2)(z - w_2)^2}{2!} + \frac{P'''(w_2)(z - w_2)^3}{3!} + \cdots$$

Como $P(w_2) = 0$ e $P'(w_2) = 0$, temos:

$$P(z) = \frac{P''(w_2)(z - w_2)^2}{2!} + \frac{P'''(w_2)(z - w_2)^3}{3!} + \dots \Rightarrow \int_l P dz = 0 .$$

Observamos então que $z = w_2$ é pólo de ordem dois da função $\frac{1}{P(z)}$ e, portanto, numa vizinhança de $z = w_2$, $\frac{1}{P(z)}$ tem a forma:

$$\frac{1}{P(z)} = a_{-2}(z - w_2)^{-2} + \frac{a_{-1}}{(z - w_2)} + a_0 + a_1(z - w_2) + a_2(z - w_2)^2 + \dots$$

com $a_{-2} \neq 0$.

Como $P(z)\frac{1}{P(z)} = 1$, temos:

$$\frac{a_{-2}P''(w_2)}{2} = 1 \Rightarrow P''(w_2) \neq 0 \Rightarrow a_{-2} = \frac{2}{P''(w_2)} .$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} \frac{P'''(w_2)a_{-2}}{3!} + \frac{a_{-1}P''(w_2)}{2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{P'''(w_2)}{3P''(w_2)} + \frac{a_{-1}P''(w_2)}{2} &= 0 \\ \Rightarrow a_{-1} &= -\frac{2}{3} \frac{P'''(w_2)}{(P''(w_2))^2} . \end{aligned}$$

Mostremos que $P'''(w_2) = 0$.

De fato, sendo P par $\Rightarrow P'$ é ímpar $\Rightarrow P''$ é par $\Rightarrow P'''$ é ímpar.

Portanto, $P'''(w_2) = -P'''(-w_2)$. (I)

Como P''' é também elíptica, temos:

$$P'''(w_2) = P'''(w_2 - 2w_2) \Rightarrow P'''(w_2) = P'''(-w_2) . \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), temos $P'''(w_2) = 0$. Segue que $a_{-1} = 0$ e $\text{Res}\left(\frac{1}{P}, w_2\right) = 0$.

Portanto, $-\int_l \frac{1}{P} dz = \int_l P dz$, para l , curva fechada em torno de $w_2 = \frac{\lambda+i}{2}$.

Observamos também que a componente x_3 está bem definida em uma vizinhança dos pontos $z = 0$ e $z = \frac{\lambda+i}{2}$, já que $\operatorname{Re} \int_l g\eta = 0$ para toda curva fechada l envolvendo esses pontos.

Porém, evidentemente, a integral que define x_3 tem período e, portanto, a superfície X será periódica. Se as integrais que definem X estiverem bem definidas, isto é, se as condições

$$\int_l g^2\eta = \overline{\int_l \eta} \quad \text{e} \quad \operatorname{Re} \int_l g\eta = 0$$

estiverem satisfeitas para as curvas l de uma classe de homotopia de T_λ , resultará uma superfície simplesmente periódica.

Isto será conseguido com uma escolha conveniente da constante c .

A superfície $\mathcal{R}$, determinada pelo par de Weierstrass (g, η) tem as seguintes propriedades (com uma escolha adequada da constante c):

Propriedade 2.1. $\mathcal{R}$ é completa e simplesmente periódica, invariante sob uma translação T .

Demonstração: Observamos que uma curva $\gamma : [t_0, \infty) \rightarrow T_\lambda$ é divergente se

$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \frac{\lambda+i}{2}$. A métrica conforme sobre T_λ , induzida pela imersão X é dada por:

$$ds = |\eta|(1 + |g|^2) = (|P| + |P|^{-1})|dz| ,$$

e a função $|P| + |P|^{-1}$ tem pólo duplo em $z = 0$ e em $z = \frac{\lambda+i}{2}$.

Então, o comprimento da curva é infinito e a superfície é completa.

As integrais que definem X têm período correspondente às curvas fechadas da classe de homotopia da curva $\alpha(t) = \frac{\lambda}{4} + ti$, $0 \leq t \leq 1$.

A componente x_3 é congruente a -2 , módulo 1. Então, se X não tiver período

correspondente à classe de homotopia da curva $\beta(t) = \frac{i}{4} + t\lambda$, $0 \leq t \leq 1$, a superfície X será invariante sob a translação dada pelo vetor $T = (\alpha, \beta, -2)$.

Para não existir período na classe de $\beta(t) = \frac{i}{4} + t\lambda$, devemos ter:

$$\int_{\beta} g^2 \eta = \overline{\int_{\beta} \eta} ,$$

ou seja. $\int_{\beta} P dz = -\overline{\int_{\beta} \frac{dz}{P}}$. Como

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \mathcal{P}(z) dz &= \int_{\beta} -\zeta'(z) dz = \int_0^1 -\zeta(\beta(t)) \beta'(t) dt \\ &= -\zeta(\beta(1)) + \zeta(\beta(0)) = -\zeta\left(\frac{i}{4} + \lambda\right) + \zeta\left(\frac{i}{4}\right) = -2\eta_1 , \end{aligned}$$

temos:

$$\int_{\beta} P(z) dz = \int_{\beta} c(\mathcal{P}(z) - e_2) dz = c(-2\eta_1 - e_2\lambda) .$$

Por outro lado, observamos que $\frac{1}{\mathcal{P}(z) - e_2}$ e $\mathcal{P}(z - w_2) - e_2$ têm os mesmos pólos e zeros e, portanto,

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{cL_2}(\mathcal{P}(z - w_2) - e_2)$$

onde $L_2 = (e_1 - e_2)(e_3 - e_2)$.

Portanto,

$$\int_{\beta} \frac{dz}{P(z)} = \frac{1}{cL_2} \int_{\beta} (\mathcal{P}(z - w_2) - e_2) dz .$$

Fazendo a mudança de variável $z - w_2 = \omega(t)$, temos $dz = d\omega$ e $l(t) = \frac{i}{4} + \lambda t - \left(\frac{\lambda+i}{2}\right) = -\frac{i}{4} + \frac{\lambda}{2} + \lambda t$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\beta} \frac{dz}{P(z)} &= \frac{1}{cL_2} \int_l (\mathcal{P}(\omega) - e_2) d\omega \\ &= \frac{1}{cL_2} \left(-\zeta\left(-\frac{i}{4} + \frac{\lambda}{2} + \lambda\right) + \zeta\left(-\frac{i}{4} + \frac{\lambda}{2}\right) - e_2\lambda \right) \\ &= \frac{1}{cL_2} (-2\eta_1 - e_2\lambda) . \end{aligned}$$

Portanto,

$$-\overline{\int_{\beta} \frac{dz}{P(z)}} = -\frac{1}{\bar{c}L_2} \overline{(-2\eta_1 - e_2\lambda)} .$$

Como η_1 , e_2 e λ são reais, temos:

$$-\overline{\int_{\beta} \frac{dz}{P(z)}} = -\frac{1}{\bar{c}L_2} (-2\eta_1 - e_2\lambda) .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\beta} P dz &= \overline{\int_{\beta} \frac{dz}{P}} \\ \Leftrightarrow c(-2\eta_1 - e_2\lambda) &= -\frac{1}{\bar{c}L_2} (-2\eta_1 - e_2\lambda) \\ \Leftrightarrow |c|^2 &= -\frac{1}{L_2} . \end{aligned}$$

Observamos que

$$\mathcal{P}(z) - e_2 = \frac{L_2}{\mathcal{P}(z - w_2) - e_2}$$

e, fazendo $z = \frac{\lambda+i}{4}$, temos

$$|c|^2 = \frac{-1}{\left(\mathcal{P}\left(\frac{\lambda+i}{4}\right) - e_2\right)^2} .$$

Consideraremos, então

$$P(z) = c \left(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}\left(\frac{\lambda+i}{4}\right) \right)$$

com $c \in \mathbb{C}$, tal que $|c|^2 = \frac{-1}{L_2}$.

Propriedade 2. A intersecção da superfície $\mathcal{R}$ com os planos $x_3 = a \neq m$, $m \in \mathbb{Z}$, são círculos.

Demonstração: Como $x_3 = -2\text{Im } z$, as curvas $\text{Im } z = v$ são levadas em planos horizontais, $x_3 = -2v$.

Figura 2.4

Fixando $v = v_0$, temos a curva de nível $x_3 = -2v_0$, parametrizada pelo comprimento de arco, da forma

$$\alpha(s) = X(u(s) + iv_0)$$

Observamos que a projeção do vetor

$$N(s) = \left(\frac{2\text{Re}g}{|g|^2 + 1}, \frac{2\text{Im}g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right),$$

normal à superfície $\mathcal{R}$, ao longo de $\alpha(s)$, sobre o plano $x_3 = -2v_0$ é um múltiplo do vetor $w = (\text{Re}g, \text{Im}g)$ e, a tangente à curva $\alpha(s)$, é um vetor normal a $n(s)$ e a $(0, 0, 1)$.

Então, a projeção ortogonal de $n(s)$ sobre o plano $x_3 = -2v_0$ é normal à curva $\alpha(s)$.

Se $v_0 \notin \mathbb{Z}$, então, $\text{Im}z \notin \mathbb{Z}$ e $g = P \neq 0$.

Logo, $N(s) = \frac{1}{|g|}(\text{Re}g, \text{Im}g, 0)$, onde $g(g(z)) = g(u(s) + iv_0)$ e $N(s)$ é a normal de Frenet de α .

A curvatura k , da curva de nível $\alpha(s)$ é dada por $k(s) = \langle \alpha''(s), N(s) \rangle$.

Temos,

$$T(s) = \alpha'(s) = \pm \frac{1}{|g|} (-\operatorname{Im} g, \operatorname{Re} g, 0)$$

$$\Rightarrow \pm \alpha''(s) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{|g|} \right) (-\operatorname{Im} g, \operatorname{Re} g, 0) + \frac{1}{|g|} \left(-\frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial u}, \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial u}, 0 \right) \frac{du}{ds}.$$

Portanto,

$$k = \langle \alpha''(s), N(s) \rangle = \pm \frac{1}{|g|^2} \left(-\operatorname{Re} g \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial u} + \operatorname{Im} g \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial u} \right) \frac{du}{ds}.$$

Observemos que $g' = \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial u} + i \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial u}$

$$\Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{g' \bar{g}}{|g|^2} = \frac{\left(\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial u} \operatorname{Re} g + \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial u} \operatorname{Im} g \right) + i \left(\operatorname{Re} g \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial u} - \operatorname{Im} g \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial u} \right)}{|g|^2}.$$

Portanto,

$$k = \left| \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right) \frac{du}{ds} \right|.$$

Como $\alpha'(s) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{ds}$, temos $1 = \lambda \left| \frac{du}{ds} \right|$. Assim,

$$k = \left| \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right) \right| \frac{1}{\lambda},$$

onde $\lambda = |g| + |g|^{-1}$.

Vamos mostrar que k é constante ao longo de α .

Temos,

$$\frac{\partial \lambda^{-1}}{\partial u} = -\lambda^{-2} \left(\frac{\operatorname{Re}(g' \bar{g})}{|g|} - \frac{\operatorname{Re}(g' \bar{g})}{|g|^3} \right) = -\lambda^{-2} \operatorname{Re} \left(\frac{g'}{g} \right) \left(|g| - \frac{1}{|g|} \right)$$

e

$$k = \left| \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right) \right| \lambda^{-1}$$

$$\Rightarrow \pm \frac{dk}{du} = \lambda^{-1} \left[\operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right)' - \lambda^{-1} (|g| - |g|^{-1}) \operatorname{Re} \left(\frac{g'}{g} \right) \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right) \right],$$

isto é,

$$\pm \frac{dk}{du} = \lambda^{-1} \left[\operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right)' - \frac{(|g| - |g|^{-1})}{(|g| + |g|^{-1})} \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right)^2 \right].$$

Devemos, pois, calcular $\operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right)'$ e $\operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right)^2$; onde $g = P = c(\mathcal{P} - e_2)$.

Como $(\mathcal{P}'(z))^2 = 4(\mathcal{P}(z) - e_1)(\mathcal{P}(z) - e_2)(\mathcal{P}(z) - e_3)$, temos:

$$\begin{aligned} (P'(z))^2 &= 4c(\mathcal{P}(z) - e_1)(\mathcal{P}(z) - e_3)P \\ \Rightarrow (P'(z))^2 &= 4c \left(\frac{P}{c} + e_2 - e_1 \right) \left(\frac{P}{c} + e_2 - e_3 \right) P. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = (e_1 - e_2)$, $\beta = e_2 - e_3$, $\alpha\beta = -L_2$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow (P'(z))^2 &= 4cP \left(\frac{P}{c} - \alpha \right) \left(\frac{P}{c} + \beta \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right)^2 &= \frac{4c}{P} \left(\frac{P}{c} - \alpha \right) \left(\frac{P}{c} + \beta \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right)^2 &= \frac{4c}{P} \left(\frac{P^2}{c^2} + (\beta - \alpha) \frac{P}{c} - \alpha\beta \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right)^2 &= 4 \left(\frac{P}{c} + (\beta - \alpha) - \frac{c}{P} \alpha\beta \right). \end{aligned}$$

Derivando, temos:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right) \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right)' &= 4 \left(\frac{P'}{c} + \alpha\beta c \frac{P'}{P^2} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right)' &= 2 \left(\frac{P'}{c} + \alpha\beta c \frac{P'}{P^2} \right) \frac{P}{P'} \\ \Rightarrow \left(\frac{P'}{P} \right)' &= 2 \left(\frac{P}{c} + \frac{c}{P} \alpha\beta \right). \end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{Im} \left(\frac{P'}{P} \right)' = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{P}{c} + \alpha\beta \frac{c}{P} \right)$.

Então,

$$\frac{dk}{du} = (|P| + |P|^{-1})^{-1} \left[2 \operatorname{Im} \left(\frac{P}{c} + \alpha\beta \frac{c}{P} \right) - 2 \frac{(|P|^2 - 1)}{(|P|^2 + 1)} \operatorname{Im} \left(\frac{P}{c} - \alpha\beta \frac{c}{P} \right) \right].$$

Observando ainda que $\alpha\beta|c|^2 = 1$, tem-se que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{P}{c} + \alpha\beta \frac{c}{P} \right) = \left(\frac{(|P|^2 - 1)}{(|P|^2 + 1)} \right) \operatorname{Im} \left(\frac{P}{c} - \alpha\beta \frac{c}{P} \right),$$

então $\frac{dk}{du} = 0$, ou seja, $\alpha(s)$ está contida numa circunferência. $\square$

Propriedade 2.3. “A intersecção da superfície $\mathcal{R}$ com os planos $x_3 = m$; $m \in \mathbb{Z}$; são retas paralelas ao eixo x_2 . Estas retas correspondem às retas em T_λ , dadas por $\operatorname{Im} z \equiv 0, \frac{1}{2}(\bmod 1)$ ”.

Demonstração: Mostremos inicialmente, que as retas $\operatorname{Im} z = 0, \frac{1}{2}$ são fixadas em T_λ por isometrias em relação à métrica induzida pela imersão X .

A métrica conforme em $\mathbb{C}$, induzida pela imersão X que define $\mathcal{R}$, é dada por

$$ds^2 = \frac{1}{4}(|P|^{-1} + |P|)^2 |dz|^2 = \lambda^2 |dz|^2$$

e, portanto, o produto interno na métrica induzida é

$$\langle v, w \rangle = \lambda^2 \operatorname{Re}(v\bar{w}).$$

Consideremos a reflexão em torno da reta $\operatorname{Im}(z) = 0$, isto é, $\varphi_1(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Calculemos $\langle d\varphi_1(v), d\varphi_2(w) \rangle_{\varphi_1(z)=\bar{z}}$. Observando que $d\varphi_1 = d\bar{z}$, temos:

$$\langle d\varphi_1(z)v, d\varphi_2(z)w \rangle_{\varphi_1(z)=\bar{z}} = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle_{\varphi_1(z)=\bar{z}} = \lambda^2(\bar{z}) \operatorname{Re}(\bar{v}\bar{w}).$$

Por outro lado, $\langle v, w \rangle = \lambda^2(z) \operatorname{Re}(v\bar{w})$. Logo, basta mostrar que $\lambda^2(\bar{z}) = \lambda^2(z)$, para que φ_1 seja uma isometria com a métrica de T_λ .

De fato, temos $\lambda^2 = \frac{1}{4}(|P| + |P|^{-1})^2$, onde $P(z) = c(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(w_2))$, $w_2 = \frac{\lambda+i}{2}$, $|c|^2 = -1/L_2$.

Calculando $|P(z)|^2$, temos:

$$\begin{aligned}
|P(z)|^2 &= P(z)\overline{P(z)} = c(\mathcal{P}(z) - e_2)\overline{(\mathcal{P}(z) - e_2)}\bar{c} \\
\Rightarrow |P(z)|^2 &= |c|^2(\mathcal{P}(z) - e_2)(\overline{\mathcal{P}(z) - e_2}) \text{ , pois } e_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \overline{\mathcal{P}(z)} = \mathcal{P}(\bar{z}) \text{ .} \\
\Rightarrow |P(z)|^2 &= |c|^2(\overline{\mathcal{P}(\bar{z})} - e_2)(\mathcal{P}(\bar{z}) - e_2) \\
\Rightarrow |P(z)|^2 &= |c|^2\overline{(\mathcal{P}(\bar{z}) - e_2)}(\mathcal{P}(\bar{z}) - e_2) = |P(\bar{z})|^2 \\
\Rightarrow \lambda^2(\bar{z}) &= \lambda^2(z)
\end{aligned}$$

portanto, φ_1 é uma isometria com a métrica induzida de T_λ .

A reflexão em torno da reta $\text{Im } z = \frac{1}{2}$ é dada por $\varphi_2(z) = \bar{z} + i$.

Mostremos que $\langle d\varphi_2(z)v, d\varphi_2(z)w \rangle_{\varphi_2(z)=\bar{z}+i} = \langle v, w \rangle_z$.

De fato, $\langle d\varphi_2(z)v, d\varphi_2(z)w \rangle_{\varphi_2(z)=\bar{z}+i} = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \lambda^2(\bar{z} + i)\text{Re}(\bar{v}w)$. Como $\langle v, w \rangle = \lambda^2(z)\text{Re}(v\bar{w})$ e $\lambda^2(z) = \lambda^2(\bar{z}) = \lambda^2(\bar{z} + i)$, então φ_2 é uma isometria.

Ou seja, as retas $\text{Im } z = 0, \frac{1}{2}$ são fixadas em T_λ pelas reflexões φ_j , $j = 1, 2$.

Mostremos agora que as retas $\text{Im } z = 0, \frac{1}{2}$, parametrizadas pelo comprimento de arco, são geodésicas.

Chamemos tais retas de α_j , $j = 1, 2$ e sejam $p = \alpha_j(t_0)$, $t_0 \in [0, 1]$, $\alpha'_j(t_0) = v_j$ e γ_j geodésica de (T_λ, ds^2) tal que $\gamma_j(0) = p$ e $\gamma'_j(0) = v_j$ ($|v_j| = 1$).

Temos:

$$\varphi_j \circ \gamma_j(0) = \varphi_j(\gamma_j(0)) = \varphi_j(p) = p \text{ , } j = 1, 2$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi_j \circ \gamma_j(t)) &= d\varphi_j \circ \gamma'_j(t)|_{t=0} = (d\varphi_j)_p(v_j) \\
&= \frac{d}{dt}\varphi_j \circ \alpha_j(t + t_0)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\alpha_j(t + t_0)|_{t=0} = \alpha'_j(t_0) = v_j \text{ .}
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi_j \circ \gamma_j = \gamma_j$, já que $\varphi_j \circ \gamma_j$ e γ_j são geodésicas com as mesmas condições

iniciais, p e v_j . Isto é, a imagem de γ_j está contida no conjunto

$$\{p | \varphi_j(p) = p\} ,$$

portanto, $\gamma_j \equiv \alpha_j$, $j = 1, 2$, ou seja, as retas $\text{Im } z = 0$, $\frac{1}{2}$ são geodésicas de T_λ .

Assim, $X \circ \varphi_j$ são isometrias de $\mathcal{R}$ e as curvas $\beta = X \circ \alpha_j$ são geodésicas de $\mathcal{R}$.

A curvatura normal na direção de um vetor unitário w é dada pela razão entre a segunda e a primeira formas fundamentais da imersão X , isto é,

$$K_n(w) = \frac{\text{Re} \left(i \left(\frac{P'}{P} \right) dz^2(w) \right)}{(|P|^{-1} + |P|)^2 |dz(w)|^2} .$$

Denotemos $w = w(\beta) = \cos \beta + i \sin \beta$; onde β é o ângulo de w com $\alpha'_j(s)$, $j = 1, 2$.

Vamos procurar os valores de β para os quais $K_n(w) = 0$, nos pontos das curvas $\alpha_j(s)$, $j = 1, 2$. Temos: $\frac{iP'}{P}(\alpha_j(s)) \in \mathbb{R}$, portanto

$$\begin{aligned} K_n(w) = K_n(\beta) &= \frac{i \left(\frac{P'}{P} \right) \text{Re } dz^2(\cos \beta + i \sin \beta)}{(|P| + |P|^{-1})^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{i \left(\frac{P'}{P} \right)}{(|P| + |P|^{-1})^2} \text{Re } dz^2(\cos \beta + i \sin \beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{Re } dz^2(\cos \beta + i \sin \beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

Então, α_1 e α_2 são curvas assintóticas. Assim, as curvas $X(\alpha_1)$ e $X(\alpha_2)$ são geodésicas de $\mathcal{R}$ e são curvas assintóticas, portanto, são retas.

Como $x_3(z) = -2\text{Im } z$ e $\gamma_j(t) = p + tv_j$, $j = 1, 2$, $\gamma_j(t) = X(\alpha_j(t))$ definida em $[0, 1]$, onde $\alpha_1(t) = t$ e $\alpha_2(t) = \frac{i}{2} + t$, temos,

$$x_3(\alpha_1(t)) \equiv 0(\text{mod } 1) , \quad x_3(\alpha_2(t)) \equiv -1(\text{mod } 1) ,$$

e as retas estão nos planos $x_3 \equiv 0(\text{mod } 1)$ e $x_3 \equiv -1(\text{mod } 1)$.

As retas $X(\alpha_j(t))$, $j = 1, 2$, são paralelas, pois são imagens, por uma aplicação conforme X , de retas paralelas em $\mathbb{C}$.

Como $x_1(\alpha_1(t)) = \operatorname{Re} \int_0^t i(P^{-1} - P)(t) dt = 0$; pois $(P^{-1} + P)(t) \in \mathbb{R}$ ao longo de $\alpha_1(t) = t$; estas retas são paralelas ao eixo x_2 .

Propriedade 2.4. “ $\mathcal{R}$ é invariante por reflexão em relação ao plano (x_1, x_3) e a intersecção de $\mathcal{R}$ com o plano (x_1, x_3) são geodésicas planas que correspondem às retas $\operatorname{Re} z = 0, \frac{\lambda}{2}$ em T_λ .”

Demonstração: Mostremos inicialmente que as retas $\operatorname{Re} z = 0, \frac{\lambda}{2}$ são fixadas em T_λ por isometrias.

A reflexão em torno da reta $\operatorname{Re} z = 0$ é dada por $\varphi_1(z) = -\bar{z}$, portanto,

$$\langle d\varphi_1(v), d\varphi_1(w) \rangle_{\varphi_1(z)=-\bar{z}} = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle_{\varphi_1(z)=-\bar{z}} = \lambda^2(\bar{z}) \operatorname{Re}(\bar{v}w) .$$

Como $\langle v, w \rangle = \lambda^2(z) \operatorname{Re}(v, \bar{w})$ e $\lambda^2(z) = \lambda^2(\bar{z})$ então φ_1 é uma isometria com a métrica induzida de T_λ .

A reflexão em torno da reta $\operatorname{Re} z = \frac{\lambda}{2}$ é dada por $\varphi_2(z) = \lambda - \bar{z}$. Com os mesmos argumentos anteriores, concluimos que φ_2 é uma isometria.

Na métrica $X^*(ds^2)$ em T_λ , as retas $\operatorname{Re} z = 0, \frac{\lambda}{2}$ são geodésicas, pelo mesmo raciocínio feito na Propriedade 2.3.

Seja $w = w(\beta) = \cos \beta + i \sin \beta$. Vamos procurar os valores de β para os quais $w(\beta)$ é direção principal, nos pontos das curvas $\operatorname{Re} z = 0, \frac{\lambda}{2}$. Temos $P'(iy) \in i\mathbb{R}$ e $P'(\frac{\lambda}{2} + iy) \in i\mathbb{R}$ se escolhermos $c \in \mathbb{R}$ e $|P(z)| \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow K_n(\beta) = B(\operatorname{Re} dz^2(w(\beta))) , \quad \text{onde } B \in \mathbb{R} .$$

$$\Rightarrow K_n(\beta) = B \cos 2\beta .$$

Portanto, $K'_n(\beta) = -2B \sin 2\beta = 0$

$$\Leftrightarrow \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Assim, w é direção principal se, e somente se, $\beta = 0$ ou $\beta = \frac{\pi}{2}$. Em particular, $w = i$ é vetor principal.

Então, as curvas $X(\tilde{\mu}(t))$ e $X(\hat{\mu}(t))$, onde $\tilde{\mu}(t) = \frac{\lambda}{2} + ti$ e $\hat{\mu}(t) = ti$ são linhas de curvatura.

Como $X(\tilde{\mu}(t))$ e $X(\hat{\mu}(t))$ são também geodésicas, concluímos que elas são geodésicas planas.

Pelo Teorema de Reflexão, as transformações $R_{\tilde{\mu}}$ e $R_{\hat{\mu}}$ definidas por:

$$R_{\tilde{\mu}} \circ X = X \circ \varphi_2 \quad \text{e} \quad R_{\hat{\mu}} \circ X = X \circ \varphi_1$$

são reflexões em relação aos planos das geodésicas. Observamos que cada círculo C_l , imagem por X da reta $li + t\lambda$, $l \notin \mathbb{Z}$, é invariante por $R_{\hat{\mu}}$ e $R_{\tilde{\mu}}$. Isto é, a imagem de cada círculo por estas transformações está contida no círculo e, portanto, os planos de simetria são perpendiculares ao plano $(x_1 x_2)$ e passam pelo centro desses círculos.

Como $\mathcal{R} \cap \{x_3 = m ; m \in \mathbb{Z}\}$ são retas paralelas ao eixo x_2 , temos que os planos de simetria são perpendiculares ao eixo x_2 .

Isso mostra que os planos de simetria coincidem em ambos os casos. Mais ainda, o plano vertical de simetria é exatamente o plano $x_2 = 0$, porque

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\mu}} \circ X(\tilde{\mu}(0)) &= R_{\tilde{\mu}}(0, 0, 0) \\ \text{e} \quad (X \circ \varphi_2)(\tilde{\mu}(0)) &= X\left(\frac{\lambda}{2}\right) = X(w_1) = (0, 0, 0) \\ \Rightarrow R_{\tilde{\mu}}(0, 0, 0) &= (0, 0, 0) \\ \Rightarrow (0, 0, 0) &\in \text{plano de simetria.} \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{R}$ é invariante por reflexão em relação ao plano (x_1, x_3) . $\square$

Propriedade 2.5. “ $\mathcal{R}$ é invariante sob rotações em torno das retas horizontais, que são paralelas às retas $\mathcal{R} \cap \{x_3 = m; m \in \mathbb{Z}\}$, situadas à altura $x_3 = m + \frac{1}{2}$ e encontram a superfície ortogonalmente.”

Demonstração: Consideremos a função

$$Q(z) = P(I(z)) ,$$

onde I é a inversão em relação ao ponto $p = \frac{1}{4}(\lambda + i)$, isto é,

$$\frac{I(z) + z}{2} = \frac{1}{4}(\lambda + i) \Rightarrow I(z) = \frac{(\lambda + i)}{2} - z , \quad \forall z \in T_\lambda .$$

Q é uma função elíptica, pois

$$Q(z + m\lambda + ni) = P\left(\frac{(\lambda + i)}{2} - z - m\lambda - ni\right) = P\left(\frac{(\lambda + i)}{2} - z\right) = P(I(z)) = Q(z) .$$

Além disso, Q e $-\frac{1}{P}$ têm os mesmos zeros e pólos em T_λ .

De fato,

$$\begin{aligned} Q(z) = 0 &\Leftrightarrow P(I(z)) = 0 \Leftrightarrow I(z) \equiv \frac{\lambda + i}{2} \pmod{L} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda + i}{2} - z \equiv \frac{\lambda + i}{2} \pmod{L} \Leftrightarrow z \equiv 0 \pmod{L} . \end{aligned}$$

Ou seja, z é zero de Q se, e somente se, z é zero de $-\frac{1}{P}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Q(z) = \infty &\Leftrightarrow P(I(z)) = \infty \Leftrightarrow I(z) \equiv 0 \pmod{L} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda + i}{2} - z \equiv 0 \pmod{L} \Leftrightarrow z \equiv \frac{(\lambda + i)}{2} \pmod{L} . \end{aligned}$$

Ou seja, z é pólo de Q se, e somente se, z é pólo de $-\frac{1}{P}$.

Observamos também que tais zeros e pólos têm a mesma multiplicidade. De fato:

$$Q(z) = P(I(z)) \Rightarrow Q'(z) = -P'(I(z)) .$$

Então, $Q'(z) = 0 \Leftrightarrow P'(I(z)) = 0 \Leftrightarrow I(z) = w_1$ ou $I(z) = w_2$ ou $I(z) = w_3$.

$$\Leftrightarrow z = w_2 - w_1 = \frac{i}{2} \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = w_2 - w_3 = \frac{\lambda}{2} .$$

Mas, $Q''(0) = 2(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) \neq 0$; o que mostra que $z = 0$ é zero duplo de Q . Então, Q é uma função elíptica que só tem um zero de ordem dois no domínio fundamental e só tem um pólo neste domínio. Portanto, este pólo tem ordem dois.

Portanto, pelo Teorema de Liouville, existe $k \in \mathbb{C}$, tal que

$$Q(z) = k \left(-\frac{1}{P(z)} \right) , \quad \forall z \in L(\lambda, i) ,$$

ou seja,

$$-k = Q(z)P(z) , \quad \forall z \in L(\lambda, i) .$$

Em particular, para $z = \frac{i}{2}$, temos:

$$\begin{aligned} -k &= Q\left(\frac{i}{2}\right) P\left(\frac{i}{2}\right) \\ -k &= (e_1 - e_2)(e_3 - e_2)c^2 = c^2 L_2 \\ \Rightarrow k &= 1 . \end{aligned}$$

Portanto, $Q(z) = -\frac{1}{P(z)}$.

Observamos também que I é uma isometria na métrica induzida do $\mathbb{R}^3$ em T_λ , pois

$$\begin{aligned} ds^2 &= (|P| + |P|^{-1})^2 |dz|^2 \\ \Rightarrow I^* ds^2 &= (|P| \circ I + |P|^{-1} \circ I)^2 |I^* dz|^2 \\ \Rightarrow I^* ds^2 &= (|P(I(z))| + |P(I(z))|^{-1})^2 |I^* dz|^2 \\ \Rightarrow I^* ds^2 &= (|Q(z)| + |Q(z)|^{-1})^2 |I^* dz|^2 . \end{aligned}$$

Mas, $|Q(z)| = |P(z)|^{-1}$ e $(I^*dz)v = dz(dI(v)) = dz(-v) = (-dz)(v)$. Portanto,

$$|I^*dz| = |-dz| = |dz| \quad \text{e} \quad I^*ds^2 = (|P| + |P|^{-1})^2 |dz|^2 = ds^2.$$

O fato de que $I^*dz = -dz$ e $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(P - P^{-1})dz \\ -(P + P^{-1})dz \\ 2iz \end{pmatrix}$ nos leva a

$$I^*\psi_1(z) = -i(P - P^{-1})(I(z))I^*(dz)$$

$$\Rightarrow I^*\psi_1(z) = -i(P(I(z)) - P^{-1}(I(z)))(dz) = i(Q(z) - Q^{-1}(z))dz$$

$$\Rightarrow I^*\psi_1(z) = i(-P^{-1}(z) + P(z))(dz) = -\psi_1(z)$$

$$I^*\psi_2(z) = -(P + P^{-1})(I(z))I^*(dz)$$

$$\Rightarrow I^*\psi_2(z) = (P(I(z)) + P^{-1}(I(z)))(dz)$$

$$\Rightarrow I^*\psi_2(z) = -(P^{-1}(z) + P(z))(dz) = \psi_2(z)$$

$$I^*\psi_3(z) = 2iI^*dz = -2i dz = -\psi_3(z).$$

Isto é:

$$I^*\psi = \begin{pmatrix} -\psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}.$$

Vemos, pela expressão de $I^*\psi$ que I^* age sobre ψ , o integrando de X , por uma rotação em torno do eixo x_2 . Assim, a transformação que leva $X(z)$ em $X(I(z))$ é uma rotação de π radianos em torno de uma reta paralela ao eixo x_2 .

Como $z = \frac{\lambda+i}{4}$ é ponto fixo de $I(z)$ e $x_3\left(\frac{\lambda+i}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, concluímos que o eixo de rotação, paralelo ao eixo x_2 está no plano $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Como a rotação de um ângulo de π radianos em torno de uma reta paralela ao eixo x_2 , no plano $x_3 = -\frac{1}{2}$ deixa este plano invariante e $\mathcal{R} \cap \{x_3 = -\frac{1}{2}\}$ é uma circunferência,

segue que o eixo de rotação passa pelo centro da circunferência e é ortogonal à superfície $\mathcal{R}$. Pela periodicidade de $\mathcal{R}$, concluímos que toda reta paralela ao eixo x_2 , passando pelo centro da circunferência no plano $x_3 = m + \frac{1}{2}$, tem a mesma propriedade.

Propriedade 2.6. “ $\mathcal{R}$ tem um número infinito de fins planares, mergulhados, que são assintóticos aos planos $x_3 = m$, $m \in \mathbb{Z}$.”

Demonstração: Com as notações usadas no Capítulo 1, temos que:

$$\mathcal{R} \cong T_\lambda - \{p_1, p_2\} ,$$

onde $p_1 = 0$ e $p_2 = \frac{\lambda+i}{2}$.

Existe $D_j \subset \overline{T}_\lambda$, vizinhança aberta de p_j , $j = 1, 2$, tal que $p_i \notin D_j$, $\forall i \neq j$.

Então, $F_j = X(\overline{D}_j \setminus \{p_j\})$ é um fim de X .

Pelo Teorema 4, Cap. 1, temos que F_j é mergulhado se, e somente se, $I_j = 1$, onde I_j é o número de vezes que a curva plana $\beta(t) = (x_1 + ix_2)(\gamma_z(t))$ gira em torno da origem do $\mathbb{R}^3$ e, como X é uma imersão mínima, regular, completa com curvatura total finita, $I_j = n - 1$, onde n é a ordem do pólo $z = p_2$ de $\eta = \frac{idz}{P}$, onde (g, η) é o par de Weierstrass da imersão X .

No nosso caso, $n = 2$ e portanto $I_j = 1$. Segue que, F_j , $j = 1, 2$, são fins mergulhados. Temos também que se $\mathcal{V}_0$ é vizinhança de $z = 0$ em T_λ ,

$$\lim_{z \rightarrow 0} x_3(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (-2\text{Im } z) = 0 .$$

Portanto, $F_1 = X(\mathcal{V}_0)$ é fim planar e $x_3 = 0$ é o plano assintótico.

Do mesmo modo, se $\mathcal{V}_{w_2}$ é vizinhança de $w_2 = \frac{\lambda+i}{2}$ em $L(\lambda, i)$,

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\lambda+i}{2}} x_3(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{\lambda+i}{2}} (-2\text{Im } z) = -1 .$$

Portanto, $F_2 = X(\mathcal{V}_{w_2})$ é fim planar e $x_3 = -1$ é o plano assíptótico.

Como $\mathcal{R}$ é invariante por uma translação por um vetor $T = (\alpha, 0, 2)$, concluímos que $T_0^m X(\mathcal{V}_0)$ e $T_0^m X(\mathcal{V}_{w_2})$ também são fins planares, $\forall m \in \mathbb{Z}$ com planos assíptóticos $x_3 = m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Propriedade 2.7. “ $\mathcal{R}$ é mergulhada.”

Demonstração: Observando que $\mathcal{R} \cap \{x_3 = r, r \in \mathbb{R}\}$ é sempre uma curva mergulhada, concluímos que $\mathcal{R}$ é mergulhada.

Proposição 2.3.1

- a) *Qualquer superfície mínima fibrada por arcos de circunferências é um subconjunto de um catenóide ou de algum exemplo de Riemann $\mathcal{R}$.*
- b) *Qualquer anel mínimo limitado por círculos em planos paralelos é um subconjunto de um catenóide ou algum exemplo de Riemann $\mathcal{R}$.*

Demonstração: a) Seja S superfície mínima qualquer, fibrada por arcos de circunferência. Então, S está contida em uma superfície mínima cíclica.

Pela Proposição 2.1, os arcos de circunferência estão contidos em planos paralelos e então, S é o catenóide ou algum exemplo de Riemann $\mathcal{R}$.

b) Seja A anel mínimo limitado por círculos em planos paralelos. Pelo Teorema de Shiffman, A é fibrado por arcos de circunferência e por 2.3.1a, A é o catenóide ou algum exemplo de Riemann $\mathcal{R}$.

CAPÍTULO 3

UM ANEL MÍNIMO, MERGULHADO LIMITADO POR DUAS RETAS PARALELAS

Dado um anel mínimo, mergulhado e limitado por duas retas paralelas em $\mathbb{R}^3$, veremos a seguir como estendê-lo a um Exemplo de Riemann $\mathcal{R}$, através da reflexão de Schwarz. A bibliografia básica é [10].

3.1 O TEOREMA DE HOFFMAN, KARCHER E ROSENBERG

Lema 3.1. *Seja A uma superfície mínima mergulhada em $\mathbb{R}^3$ cujo bordo é um par de retas, $L = L_0 \cup L_1$, contida entre dois planos paralelos, $P = P_0 \cup P_1$, $L_i \subset P_i$, $i = 0, 1$.*

Então

- a) A se estende por Reflexão de Schwarz a uma superfície mínima, mergulhada e simplesmente periódica S , invariante sob um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$, T , onde $T = R_1 \circ R_0$, com R_i , $i = 0, 1$, uma rotação de π radianos em torno de L_i , $i = 0, 1$.*
- b) Se A tem gênero k , então $\frac{S}{T}$ tem gênero $2k + 1$, dois fins planares e curvatura total $-4\pi(2k + 2)$.*

c) T é translação pura se, e somente se, L_0 é paralela a L_1 e, neste caso, T está no plano que contém $L = L_0 \cup L_1$, e é ortogonal a estas retas.

d) Se T é uma translação, a aplicação normal de Gauss de S induz uma função meromorfa bem definida em $\frac{\bar{S}}{T}$.

Demonstração

a) Como $L_i \subset A$, $i = 0, 1$, pelo Princípio de Reflexão de Schwarz (Capítulo 1), temos que:

$$A \cup R_i(A)$$

também é uma superfície mínima e mergulhada, onde $R_i(A)$ é a rotação de π radianos em torno da reta L_i , $i = 0, 1$.

Consideremos então S , obtida de A através de sucessivas rotações de π radianos em torno de L_0 e de L_1 .

Temos que S é mínima, mergulhada, completa e periódica, pois $T(S) = S$; onde $T = R_1 \circ R_0$.

b) A hipótese de que A tem gênero k e a fronteira são duas retas, significa topologicamente que A é uma superfície compacta $\bar{A}$ de gênero k menos duas regiões abertas e conexas, cujas fronteiras são curvas simples, disjuntas, menos um ponto em cada fronteira.

A superfície $\frac{S}{T}$ é constituída de duas cópias de A com uma reta comum e as outras duas retas identificadas através da transformação T .

Logo, $\frac{S}{T}$ é uma superfície compacta $\frac{\bar{S}}{T}$ menos dois pontos, sendo $\frac{\bar{S}}{T}$ obtida pela colagem de $\bar{A}$ em A através de duas faces removidas.

Figura 3.1

Figura 3.2

Assim, $\frac{S}{T}$ é $\frac{\bar{S}}{T}$ menos dois pontos (que foram removidos das fronteiras das duas faces de A).

Portanto, se $\bar{A}$ é triangularizada por a arestas, v vértices e f faces, então $\frac{\bar{S}}{T}$ será triangularizada por $a' = 2a - 2x$ arestas; $v' = 2v - 2x$ vértices, onde x são as arestas e vértices das faces que serão removidas, e $f' = 2f - 4$ faces.

Temos então:

$$\chi\left(\frac{\bar{S}}{T}\right) = v' - a' + f' = 2(v - a + f) - 4 = 2\chi(\bar{A}) - 4 .$$

$$\Rightarrow 2 - 2\tilde{k} = 2(2 - 2k) - 4$$

$$\Rightarrow 2\tilde{k} = 4k + 2$$

$$\Rightarrow \tilde{k} = 2k + 1 ,$$

onde $\tilde{k}$ é o gênero de $\frac{\bar{S}}{T}$.

Temos ainda:

$$\chi\left(\frac{S}{T}\right) = \chi\left(\frac{\bar{S}}{T}\right) - 2 = -4k - 2$$

e a curvatura total é

$$C\left(\frac{S}{T}\right) = 2\pi \left(\chi\left(\frac{S}{T}\right) - 2 \right) = -4\pi(2k + 2) ,$$

pelo Teorema de Huber-Ossermann.

Os dois fins da superfície $\frac{S}{T}$ são planares pelo Teorema 3.2, Capítulo 1.

c) Basta observar que $T = R_1 \circ R_0$ é uma translação se, e somente se, R_i , $i = 0, 1$, são rotações em torno de retas paralelas.

Neste caso, T é translação de um vetor v , paralelo ao plano das retas paralelas L_0 e L_1 e é ortogonal a elas.

d) Seja $g : S \rightarrow S^2(1)$ a aplicação normal de Gauss da superfície S .

Consideremos a projeção canônica

$$\pi : S \longrightarrow \frac{S}{T}$$

onde $\pi(q) = p \Leftrightarrow q = T^n(p)$, $n \in \mathbb{Z}$, e a aplicação

$$\tilde{g} : \frac{S}{T} \longrightarrow S^2(1) ,$$

definida por $\tilde{g} = g \circ \pi^{-1}$.

Temos que $\tilde{g}$ é uma função meromorfa e bem definida.

Teorema 3.1. *Sejam $L = L_0 \cup L_1$, um par de retas paralelas e A um anel mergulhado e mínimo. cuja fronteira é L , contido na região entre dois planos paralelos P_i , $i = 0, 1$ tais que $L_i \subset P_i$.*

Então. A se estende, por Reflexão de Schwarz, a um exemplo de Riemann $\mathcal{R}$.

Demonstração

a) Pelo lema anterior, o anel A se estende, por Reflexão de Schwarz, a uma superfície mínima simplesmente periódica S , invariante sob uma translação T e o toro $\frac{S}{T}$ possui dois fins planares e curvatura total -8π (pois o gênero de $\overline{A}$ é $k = 0$), e a aplicação de Gauss de S está bem definida em $\frac{S}{T}$ e se estende a $\frac{\overline{S}}{T}$.

Pelo Teorema 1.1 (Huber-Ossermann), temos:

$$-8\pi = \int_{\frac{\overline{S}}{T}} K d\left(\frac{\overline{S}}{T}\right) = -4\pi (\text{ordem de } g)$$

onde g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauss de S .

Portanto, a ordem de g sobre $\frac{\overline{S}}{T}$ é dois. Sendo g uma função meromorfa na superfície mínima periódica, S , temos que g também é periódica e, portanto, é uma função elíptica sobre o toro $\frac{\overline{S}}{T}$ e $\frac{S}{T} = \frac{\overline{S}}{T} - \{p_0, p_1\}$.

Figura 3.3

Como a imersão é um mergulho, os vetores normais nos fins são paralelos. Então, podemos escolher coordenadas em $\mathbb{R}^3$ de modo que esses vetores sejam verticais, isto é, $g = \pi \circ N$ onde N é a aplicação de Gauss e π é a projeção estereográfica, é tal que

$$g(p_0) = \infty \quad \text{e} \quad g(p_1) = 0$$

onde

$$p_1 \in L_1 \quad \text{e} \quad p_0 \in L_0.$$

Por outro lado, o fato de os fins serem mergulhados implica que a forma $\eta = \frac{dx_3}{2g}$ tem polo duplo no fim p_1 (onde $g(p_1) = 0$). Pelo mesmo motivo, $g^2\eta$ tem polo duplo no fim p_0 , já que a imersão $\widetilde{X} = A \circ X$ onde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tem representação de Weierstrass $(\tilde{g}, \tilde{\eta})$ onde $\tilde{g} = -\frac{1}{g}$ e $\tilde{\eta} = g^2\eta$, se X tem representação (g, η) .

Então, como $\eta = \frac{dx_3}{2g}$ tem pólo duplo em p_1 segue que g tem zero duplo em p_1 . Do mesmo modo, $g^2\eta = \frac{g dx_3}{2}$ tem pólo duplo em p_0 e, portanto, g tem pólo duplo em p_0 .

Como g tem ordem dois, g não possui outros zeros ou pólos.

Observamos que as retas $L = L_0 \cup L_1$ são horizontais e, após uma rotação em $\mathbb{R}^3$, podemos fazer com que elas fiquem paralelas ao eixo x_1 . Isto força g a ser real sobre L , já que as normais ao longo de L são perpendiculares ao eixo x_1 .

b) A próxima etapa da demonstração é determinar a estrutura conforme de $\frac{\bar{S}}{T}$.

As retas $L = L_0 \cup L_1$ correspondem a curvas fechadas e disjuntas no tóro passando por p_0 e p_1 e estão na mesma classe de homotopia. A rotação em torno de uma das retas L_i , $i = 0, 1$, é uma reflexão, cujo conjunto de pontos fixos é L .

Nos tóros retangulares existem duas curvas disjuntas homotópicas de pontos fixos de uma reflexão.

Figura 3.4

Já nos losangos as curvas invariantes por reflexões são as diagonais, que têm dois pontos comuns (e estão na mesma classe de homotopia).

Como, somente tóros rômnicos e retangulares possuem reflexões que fixam curvas homotópicas, $\frac{\bar{S}}{T}$ é um tóro retangular, pois se fosse rômnico teria duas curvas homotópicas e fixadas por reflexões, com dois pontos em comum. Mas isso não é possível, pois $L_0 // L_1$.

Portanto, $\frac{\bar{S}}{T}$ é um tóro $T_\lambda = \frac{\mathbb{C}}{L(\lambda, i)} - \{p_0, p_1\}$ onde $L(\lambda, i)$ é um reticulado retangular com $\lambda \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou equivalentemente $L(1, \lambda i)$).

Como $L = L_0 \cup L_1$ são retas paralelas ao eixo x_1 e a reflexão que fixa essas retas é

$$z \longrightarrow R_\pi z$$

onde R_π é a rotação de π radianos em torno de uma das retas L_i , $i = 0, 1$, podemos admitir que, em $L(\lambda, i)$ a reta $\text{Im } z = 0$ corresponde a L_0 e $\text{Im } z = \frac{1}{2}$ corresponde a L_1 .

Resta-nos determinar o par (g, η) que define S .

Seja $z = (u, v)$ parâmetros isotérmicos em $\mathbb{C}$. A terceira coordenada da imersão, $x_3(z)$, é uma função harmônica de (u, v) e é tal que restrita a L_i é constante, para

$i = 0, 1$.

Temos, portanto, o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2} = 0 \\ x_3(u, 0) = a \quad (I) \\ x_3(u, \frac{1}{2}) = b \quad (II) \end{cases}$$

Fixadas as condições de contorno (I) e (II), o sistema admite solução

$$x_3(u, v) = K_1 v + K_2$$

onde as constantes K_i , $i = 1, 2$, são determinadas pelas condições de contorno:

$$\begin{aligned} x_3(u, 0) = a = 0 + K_2 &\Rightarrow K_2 = a \\ x_3(u, \frac{1}{2}) = b = \frac{K_1}{2} + a &\Rightarrow K_1 = 2(b - a) . \end{aligned}$$

Após uma translação e uma homotetia em $\mathbb{R}^3$, podemos admitir que

$$x_3(u, v) = -2v .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dx_3 &= -2dv \\ \Rightarrow x_3 &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z 2i \, dz \quad \text{e} \quad dx_3 = 2i \, dz . \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a representação de Weierstrass para a terceira coordenada x_3 , temos:

$$dx_3 = 2g\eta \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{i \, dz}{g}$$

que é a 1-forma da representação de Weierstrass da imersão que define S .

Resta determinar explicitamente a função g que descreve a aplicação normal de Gauss de S .

c) Após uma translação e uma transformação de Möebius em $\hat{\mathbb{C}}$, podemos fazer o pólo duplo de g ser a origem e as retas L_0 e L_1 corresponderem às retas $\text{Im } z = 0$ e $\text{Im } z = \frac{1}{2}$, respectivamente.

Pelo teorema de Abel (Capítulo 1), temos

$$\sum_j m_j w_j - \sum_j n_j z_j \equiv 0 \pmod{L}$$

onde w_j é o pólo de g de ordem m_j e z_j é zero de ordem n_j , em um domínio fundamental de L . Para o caso presente, temos um único pólo, $p_0 = 0$ e um único zero, $p_1 \in L_1$, que é duplo. Então, devemos ter $2p_1 \equiv 0 \pmod{L}$, isto é,

$$p_1 = w_3 \quad \text{ou} \quad p_1 = w_2 .$$

No primeiro caso, temos um pólo duplo na origem e um zero duplo em w_2 , exatamente como a função $P(z) = \mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(w_2)$. Então,

$$g(z) = kP(z) , \quad k = \text{constante}.$$

Como $g(z)$ e $P(z)$ são reais ao longo de $\text{Im } z = 0$ e $\text{Im } z = \frac{1}{2}$, temos que k é real e, como observamos no Capítulo 2, temos $k = 1$.

Portanto, S tem par de Weierstrass, (g, η) , com $g = P$ e $\eta = \frac{idz}{P}$, isto é, S é um exemplo de Riemann para algum λ .

d) Mostraremos que o segundo caso não pode ocorrer. Suponhamos que g é uma função elíptica de grau dois, com pólo duplo na origem e zero duplo em $w_3 = \frac{i}{2}$.

Consideremos a função elíptica Q definida da seguinte forma:

i) Q restrita ao retângulo fechado de vértices $\frac{i}{2}, \frac{3i}{4}, \frac{3i}{4} + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + \frac{i}{2}$ é a função, dada pelo teorema da aplicação de Riemann, tal que

$$Q\left(\frac{i}{2}\right) = 0$$

Figura 3.5

$$\begin{aligned}
 Q\left(\frac{3i}{4}\right) &= -1 \\
 Q\left(\frac{3i}{4} + t\right) &= e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi \\
 \text{e } Q\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{3i}{4}\right) &= 1
 \end{aligned}$$

ii) O prolongamento aos demais pontos do domínio fundamental do reticulado $L(\lambda, i)$ é feito da seguinte forma:

Se $z = a + ib$; $0 < a < \frac{\lambda}{2}$ e $\frac{i}{2} < b < \frac{3i}{4}$ e $\tilde{z} = \bar{z} + \frac{3i}{2}$, o refletido de z em relação à reta $\gamma(t) = \frac{3i}{4} + t$, definimos

$$Q(\tilde{z}) = I(Q(z))$$

onde I é a inversão em relação à circunferência $Q(\gamma(t))$. Isto prolonga Q ao retângulo de vértices $0, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + i, i$.

Se $z = a + ib$; $0 < a < \frac{\lambda}{2}$ e $0 < b < i$ e $\tilde{z} = -\bar{z} + \lambda$, o refletido de z em relação à reta $\beta(t) = \frac{\lambda}{2} + t$, definimos

$$Q(\tilde{z}) = \overline{Q(z)}.$$

iii) Se $z = a + bi$ com $0 < a < \lambda$ e $\frac{i}{2} < b < i$ e $\tilde{z} = \bar{z} + i$ a reflexão em relação à reta

$\delta(t) = \frac{i}{2} + t$, definimos

$$Q(\tilde{z}) = \overline{Q(z)} .$$

A aplicação Q assim definida é uma função elíptica de grau dois, definida no tóro T_λ com um pólo duplo na origem e um zero duplo em $w_3 = \frac{i}{2}$.

Então, $Q(z)$ tem os mesmos zeros e pólos de g e, portanto, $g(z) = AQ(z)$, $A =$ constante.

Como $Q(z)$ e $g(z)$ são reais ao longo das retas $\text{Re} z = 0$ ou $\frac{\lambda}{2}$, temos que $A \in \mathbb{R}$ e $A \neq 0$.

O par de Weierstrass que define S (se existir) é (g, η) onde $g = AQ$ e $\eta = \frac{idz}{AQ}$ e a métrica é

$$ds^2 = (|A||Q| + |A^{-1}||Q|^{-1})^2 |dz|^2 .$$

Observamos que ds^2 é invariante por reflexões em relação a $\text{Re} z = 0$ ou $\text{Re} z = \frac{\lambda}{2}$ (pois $-\bar{z}$ é o refletido de z em relação a $\text{Re} z = 0$; $\lambda - \bar{z}$ é o refletido de z em relação a $\text{Re} z = \frac{\lambda}{2}$ e $Q(z) = Q(-\bar{z}) = Q(\lambda - \bar{z})$) e, portanto, essas retas correspondem a geodésicas da superfície S .

Ainda mais, a segunda forma fundamental da imersão é dada por

$$\Pi(z) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{Q'}{Q} i dz^2 \right\}$$

onde $z = u + iv$.

Sobre as retas $\text{Re} z = 0$ e $\text{Re} z = \frac{\lambda}{2}$, temos que $dz = i dv$, Q é real e Q' é imaginário puro, já que $\frac{\partial}{\partial v}(\text{Im } Q) = 0$ sobre essas retas, portanto, $\frac{iQ'}{Q} dz^2$ é real. Isto é, as geodésicas representadas por $\text{Re} z = 0$ e $\text{Re} z = \frac{\lambda}{2}$ são linhas de curvatura de S e, portanto, são curvas contidas em planos paralelos ao plano (x_1, x_3) (já que S é simétrica em relação a esses planos, então as retas L_0 e L_1 , paralelas a x_2 , são cortadas por tais

planos e, portanto, são simétricas em relação a eles. Isso implica que os planos são ortogonais a x_2).

Finalmente, observamos que as integrais que definem S não podem ter períodos ao longo das curvas $\text{Im } z = \text{constante}$, já que estas são curvas fechadas contidas no anel A .

Verifiquemos se esta condição está satisfeita para o par (g, η) , examinando a integral que define x_2 ao longo de uma curva $\gamma(t) = \frac{3}{4}i + t$, $0 \leq t \leq \lambda$.

Devemos ter:

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_{\gamma} i(1 + g^2)f \, dz &= -\text{Re} \int_{\gamma} (g^{-1} + g) \, dz = 0 \\ \Rightarrow A^{-1} \text{Re} \int_{\gamma} \frac{dz}{Q} &= -A \text{Re} \int_{\gamma} Q \, dz \end{aligned}$$

Mas, ao longo de γ temos $|Q| = 1$, isto é, $Q^{-1} = \overline{Q}$, portanto,

$$A^{-1} \text{Re} \int_{\gamma} \overline{Q} \, dz = -A \text{Re} \int_{\gamma} Q \, dz$$

e como dz é real ao longo de γ , temos

$$\begin{aligned} A^{-1} \text{Re} \int_{\gamma} \overline{Q} \, dz &= A \text{Re} \int_{\gamma} Q \, dz \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{A} + A \right) \text{Re} \int_{\gamma} Q \, dz &= 0 \\ \Rightarrow \text{Re} \int_{\gamma} Q \, dz &= 0, \quad \forall A \neq 0. \end{aligned}$$

Mostramos, então, que se existir a superfície S definida pelo par (g, η) , teremos

$$\text{Re} \int_{\gamma} Q \, dz = 0.$$

Mostraremos, porém, que isto é falso e, portanto, não existe tal superfície.

e) Pela construção de Q , a aplicação $Q \circ \gamma(t) = Q\left(\frac{3i}{4} + t\right)$ é injetora sobre o equador $|z| = 1$.

Denotemos $Q \circ \gamma(t) = e^{i\theta(t)}$. Então, ao longo de γ temos $dQ = iQ d\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e

$$dz = \frac{dQ}{Q'} = \frac{Q}{Q'} \frac{dQ}{Q} = \frac{iQ}{Q'} d\theta .$$

Além disso, ao longo de γ ,

$$Q + \frac{1}{Q} = Q + \overline{Q} = 2 \cos \theta .$$

Observamos que a função Q é real nos pontos do segmento $\left[\frac{\lambda}{2} + \frac{i}{4}, \frac{\lambda}{2} + \frac{i}{2}\right]$ e que $Q(w_2) = c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$.

Portanto, $Q(w_2) = \cos \alpha$, para algum $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Assim,

$$I(Q(w_2)) = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha .$$

Consideremos então as funções elípticas:

$$f(z) = \left(\frac{Q'(z)}{Q(z)} \right)^2$$

e

$$h(z) = Q(z) + \frac{1}{Q(z)} - (\cos \alpha + \sec \alpha) = \frac{(Q(z) - \cos \alpha)(Q(z) - \sec \alpha)}{Q(z)} .$$

Observamos que z_0 é zero de h se, e somente se

$$\begin{cases} Q(z_0) = \cos \alpha \Leftrightarrow z_0 = \frac{\lambda+i}{2} = w_2 \\ \text{ou} \\ Q(z_0) = \sec \alpha \Leftrightarrow z_0 = \frac{\lambda}{2} + i \end{cases}$$

e que $Q(z) - \cos \alpha$ tem zero duplo em w_2 (porque $c = \cos \alpha$ está no eixo de simetria de Q).

Então, w_2 é zero simples de $Q'(z)$ e, portanto, é zero duplo de $f(z) = \left(\frac{Q'(z)}{Q(z)} \right)^2$, já que $Q(w_2) = c \neq 0$.

Da mesma forma, $Q(z) - \sec \alpha$ tem zero duplo em $\frac{\lambda}{2} + i$. Portanto, $\frac{\lambda}{2} + i$ é zero simples de $Q'(z)$. Segue que $\frac{\lambda}{2} + i$ é zero duplo de $f(z) = \left(\frac{Q'(z)}{Q(z)} \right)^2$.

Por outro lado os pólos de $h(z)$ são os zeros de $Q(z)$, isto é, apenas $z = \frac{i}{2}$. Como os zeros de $Q'(z)$ são $w_2 = \frac{\lambda+i}{2}$ e $\frac{\lambda}{2} + i$, temos que os pólos de $f(z)$ são também os zeros de $Q(z)$, isto é, apenas $z = \frac{i}{2}$.

Assim, $f(z)$ e $h(z)$ têm os mesmos zeros e pólos e, portanto, existe $\tilde{k} \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \tilde{k}h(z) .$$

Além disso,

$$f\left(\frac{3i}{4}\right) = \left(\frac{Q'\left(\frac{3i}{4}\right)}{Q\left(\frac{3i}{4}\right)}\right)^2 = (i\tilde{r})^2 < 0$$

onde $\tilde{r} \in \mathbb{R}$ e

$$h\left(\frac{3i}{4}\right) = \frac{(-1-r)(-1-\frac{1}{r})}{-1} < 0$$

onde $r = \cos \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e, portanto, $\tilde{k} \in \mathbb{R}$ e $\tilde{k} > 0$; que chamaremos $\tilde{k} = d^2$.

Então, ao longo da curva $\gamma(t) = \frac{3i}{4} + t$ temos $Q = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$ e

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q'}{Q}\right)^2 &= d^2(Q + \overline{Q} - (\cos \alpha + \sec \alpha)) \\ &= d^2(2 \cos \theta - (\cos \alpha + \sec \alpha)) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde $\tilde{k}$ é real positivo, o mesmo ocorrendo com $\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta$.

Assim, $\frac{Q'}{Q}$ é imaginário puro e

$$\frac{Q'}{Q} = \pm i d \sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta} .$$

Voltemos então ao cálculo de $\operatorname{Re} \int_{\gamma} Q dz$, onde $\gamma(t) = \frac{3i}{4} + t$:

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \int_{\gamma} Q dz = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{Q i Q}{Q'} d\theta \\ &= \pm \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\theta}{d \sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} \\ &= \pm \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta + i \sin \theta) d\theta}{d \sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pm d^{-1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{d\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} \\
&= \pm d^{-1} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{d\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{d\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} \right].
\end{aligned}$$

Na primeira integral, temos $\cos \theta \geq 0$ e

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta} \leq \sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha} \\
\Rightarrow &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha}} < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} \\
\Rightarrow &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} > \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Na segunda integral temos $\cos \theta \leq 0$ e

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta} \geq \sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha} \\
\Rightarrow &\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} > \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} > \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha}} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0 \\
&\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \theta}} > 0
\end{aligned}$$

□

REFERÊNCIAS

- [1] Ahlfors, L.V. *Complex analysis*.
- [2] Aragona, A.J. *Notas de "Funções Analíticas"*. IME-USP.
- [3] Callahan, M.; Hoffman, D.; Meeks III, W. The structure of singly-periodic minimal surfaces. *Inventiones Math.*, **99**: 455–481, 1990.
- [4] Carmo, M.P. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA.
- [5] Carmo, M.P. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [6] Costa, C.J. *Funções elípticas, algébricas e superfícies mínimas*. IMPA, 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [7] Costa, C.J. *Surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$* . Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Chambéry, Grenoble, 1988–1989 (53–91).
- [8] Courant–Hilbert *Methods of mathematical physics*. Volume 1. Interscience Publishers, Inc., New York, 1966.
- [9] Góes, C.C. *As normais às superfícies mínimas no $\mathbb{R}^3$* . Tese de Mestrado, IME-USP, 1975.
- [10] Hoffman, D.; Karcher, H.; Rosenberg, H. Embedded minimal annuli in $\mathbb{R}^3$ bounded by a pair of straight lines. *Comment. Math. Helvetici*, **66**:599–617, 1991.
- [11] Hönig, C.S. *Análise funcional e o problema de Stürm-Liouville*. IME-USP.
- [12] Jorge, L.P.; Meeks, W. The topology of complete minimal surfaces of finite total gaussian curvature. *Topology*, **22**: 203–21, 1982.
- [13] Karcher, H. Construction of minimal surfaces. *Surveys in Geometry*, Bonn, 1989.
- [14] Lang, S. *Elliptic functions*. Reading, Addison-Wesley, 1973.

- [15] Lewy, H. On the boundary behavior of minimal surfaces. *Proc. N.A.S.*, 37:103–110, 1951.
- [16] Markushewich, A. *Teoria de las funciones analíticas*. Tomo II. Editorial MIR, Moscow, 1987.
- [17] Nitsche, J.C.C. *Lectures on minimal surfaces*. Volume 1. Cambridge University Press, 1989.
- [18] O'Neill, B. *Elementary differential geometry*. New York, Academic Press, 1966.
- [19] Osserman, R. *A survey of minimal surfaces*. 2.ed. Dover Publications, New York, 1986.
- [20] Riemann, B. *Oeuvres mathématiques de Riemann*. Gauthiers-Villars, Paris, 1898.
- [21] Segal, S.L. *Nine introductions in complex analysis*. Amsterdam, North-Holland, 1981.
- [22] Shiffman, M. On surfaces of stationary area bounded by two circles, or convex curves, in parallel planes. *Annals of Math.*, 63:77–90, 1956.