**ELEMENTOS NILPOTENTES EM
ANÉIS DE LOOP ALTERNATIVOS**

Albertina Zatelli

Tese Apresentada ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
para a obtenção do grau de doutor em matemática

Orientador: Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies

São Paulo, setembro de 1993.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies pela orientação, oportunidade de trabalhar numa área que me despertou interesse e pela disponibilidade com que sempre me atendeu.

Quero também agradecer aos colegas de curso, professores e funcionários do IME-USP pela amizade e carinho com que sempre me acolheram. Muito especialmente, pela solidariedade que me dedicaram num momento difícil.

Finalmente, agradeço à UFSC por ter me concedido o afastamento, dando-me a oportunidade de aprimorar meus conhecimentos.

Abstract

In this thesis we consider problems related to nilpotency in alternative loop rings.

The first chapter gives a collection of facts both in R. A. loops (i.e. Loops L such that RL is alternative but not associative, for some associative ring R of characteristic different from 2) and group rings that will be needed in the sequel.

In Chapter II we give necessary and sufficient conditions for the existence of nilpotent elements in an alternative loop ring RL , in the case when L is finite and, in Chapter III we extend these results to arbitrary R. A. loops.

Finally in Chapter IV we discuss the nilpotency of the augmentation ideal of RL and other related ideals. In a final section, we also discuss the existence of idempotent ideals in $\mathbb{Z}L$.

RESUMO

Nesta tese consideramos problemas relacionados à nilpotência em anéis de loop alternativos.

No primeiro Capítulo damos uma coleção de fatos sobre R. A. loops (isto é, loops L que possuem anel de loop RL alternativo mas não associativo para algum anel R de característica diferente de 2) e anéis de grupo que serão necessários para desenvolver o trabalho nos demais capítulos.

No Capítulo II, damos condições necessárias e suficientes para a existência de elementos nilpotentes num anel de loop RL de um R. A. loop L finito e, no Capítulo III, estendemos estes resultados para um R. A. loop arbitrário.

Finalmente, no capítulo IV, discutimos a nilpotência do ideal de aumento de RL e de outros ideais relacionados. Na última secção, também discutimos a existência de ideais idempotentes em $\mathbb{Z}L$ (sempre na situação de que L é um R. A. loop).

ÍNDICE

	pag
Introdução	1
Capítulo I . Teoria de R. A. Loops	5
Secção 1.1 . Anéis de Loop	5
Secção 1.2 . Alguns Resultados Sobre Anéis de Grupo	24
Capítulo II . Elementos Nilpotentes em Anéis de Loop de R. A. Loops Finitos	30
Secção 2.1 . Resultados Preliminares	30
Secção 2.2 . Loops Finitos	39
Capítulo III . Elementos Nilpotentes em Anéis de Loop de R. A. Loops Infinitos	44
Capítulo IV . Nilpotência do Ideal de Aumento	53
Secção 4.1 . Ideal de Aumento	53
Secção 4.2 . Ideais Idempotentes de $\mathbb{Z}L$	58
Bibliografia	63

Introdução

Seja R um anel comutativo (e associativo) com unidade e seja L um loop. O anel de loop RL de L sobre R foi introduzido em 1944 por R.H. Bruck, de forma a obter uma família importante de exemplos de álgebras alternativas não associativas.

RL é definido da mesma maneira que os bem conhecidos anéis de grupo, ou seja, tomamos o R -módulo livre RL com base L e estendemos a multiplicação de L via leis de distributividade.

Em [7], E. G. Goodaire definiu os *R. A. loops* como sendo aqueles loops L , que possuem anel de loop alternativo mas não associativo, sobre algum anel R de característica diferente de dois.

Em trabalho posterior [9], sobre a estrutura interna dos R. A. loops, O. Chein e E. G. Goodaire mostraram que os R. A. loops são quase grupos comutativos, pois seu subloop associador coincide com o subloop comutador e é um grupo central de ordem dois (teorema 1.8). De fato, os R. A. loops são obtidos de um caso particular, da construção geral (O. Chein [5], [6]), para loops de moufang.

Continuando a investigação dos loops que possuem anel de loop alternativo, Chein e Goodaire provaram em [8], que se o anel de coeficientes tem característica dois, então a classe destes loops é surpreendentemente mais ampla que a dos R. A. loops.

Os resultados centrais deste trabalho, são dados no sentido de estabelecer, condições necessárias e suficientes, para que um dado anel de loop, não possua elementos nilpotentes diferentes de zero.

Na teoria de anéis de grupo, este problema foi abordado por S.K. Sehgal [19]. No caso de grupos finitos Sehgal obteve uma caracterização de anéis de grupo RG que não possuem elementos nilpotentes diferentes de zero. Seu principal resultado, no entanto, consiste em dar condições necessárias e suficientes, para que a álgebra racional QG tenha a mesma propriedade (proposição 4.1 [19]).

Nos Capítulos 2 e 3 estaremos sempre considerando um anel R de característica diferente de dois e tal que dois não é divisor de zero em R , pois, caso contrário, teremos que RL possui elementos nilpotentes diferentes de zero (veja observações 2.1 e 2.2).

No primeiro Capítulo, apresentamos resultados da teoria de anéis de loop e de anéis de grupo, necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Só incluímos umas poucas demonstrações, aquelas que ajudam a revelar a técnica usada na obtenção dos resultados originais. Neste sentido destacamos a demonstração do teorema 1.10.

No Capítulo 2, tratamos da questão da existência de elementos nilpotentes, em

anéis de loop de R. A. loops finitos, sendo que o principal resultado é a proposição 2.3 o qual foi comunicado na Academia Brasileira de Ciências em 10/04/90.

No Capítulo 3, tratamos novamente da existência de elementos nilpotentes, em anéis de loop de R. A. loops infinitos. No caso em que a torção $T(L)$ é central em L , obtemos o teorema 3.1; quando a torção não é central em L , provamos o seguinte resultado (corolário do teorema 3.2):

Se L é um R. A. loop cuja torção não é central em L , então a álgebra de loop QL , não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, uma das seguintes condições se verifica:

- (i) $T(L)$ é um grupo abeliano de expoente dois,
- (ii) $T(L)$ é o produto direto de um grupo abeliano de expoente dois por um grupo cíclico de ordem quatro,
- (iii) $T(L)$ é um grupo Hamiltoniano de expoente quatro,
- (iv) $T(L)$ é um R. A. loop obtido a partir de um grupo Hamiltoniano de expoente quatro, pela construção do teorema de Chein [5], que, no caso, coincide com os resultados do teorema 1.10.

O resultado acima é o análogo para loops, da proposição 4.1 [19], de Sehgal.

No Capítulo 4, resolvemos o problema da nilpotência do ideal de aumento do anel RL , de um R. A. loop L e de ideais que são o núcleo do epimorfismo natural $RL \longrightarrow R(L/H)$, para algum subloop normal H de L (que como em teoria de anéis de grupo, são denotados por $\Delta_R(L:H)$). Este é o único momento em que

admitimos a possibilidade da característica de R ser igual a dois.

Provamos que o ideal de aumento de RL é nilpotente se, e somente se, L é um 2-loop finito e a característica de R é igual a 2^m para algum $m \geq 1$; e ainda, que um ideal $\Delta_R(L:H)$ é nilpotente se, e somente se, H é um 2-subloop finito de L e a característica de R é igual a 2^m para algum $m \geq 1$.

Também neste capítulo, estudamos os ideais idempotentes do anel de loop $\mathbb{Z}L$ de um R. A. loop L . No teorema 4.3, provamos que se L é um R. A. loop de posto finito e I um ideal idempotente não nulo de $\mathbb{Z}L$, então $I + I^* = \mathbb{Z}L$.

Capítulo 1

Teoria de R. A. Loops

1.1 Anéis de Loop

Nesta seção vamos dar uma breve introdução à teoria de anéis de loop. Nenhum dos resultados expostos neste Capítulo é nosso. Nossa intenção é reunir, para referência rápida, os fatos que serão usados no restante deste trabalho.

A maioria dos resultados serão citados sem demonstração, apenas para ter, de forma condensada e acessível, os principais resultados da teoria.

Achamos conveniente expor a demonstração do teorema 1.10, pois este resultado é usado repetidas vezes nos capítulos dois e três.

Definição 1.1 . *Um loop, é um conjunto L munido de uma operação binária*

$$\begin{aligned} \cdot : L \times L &\longrightarrow L \\ (a, b) &\longmapsto a.b, \end{aligned}$$

que verifica as seguintes condições:

(i) existe um elemento neutro $1 \in L$,

(ii) para qualquer que seja $a \in L$, as aplicações

$$R_a : L \longrightarrow L \quad \text{dada por } R_a(x) = xa$$

e

$$L_a : L \longrightarrow L \quad \text{dada por } L_a(x) = ax$$

são bijeções de L .

Observação 1.1 . As equações $aX = b$ e $XA = b$ possuem solução única em L , a saber:

$$x = R_a^{-1}(b) \quad \text{e} \quad x = L_a^{-1}(b)$$

respectivamente.

Observação 1.2 . Todo elemento $a \in L$ possui inverso à direita a^p e inverso à esquerda a^l (não necessariamente iguais).

Observação 1.3 . Valem as leis de cancelamento.

Observação 1.4 . Um loop associativo é um grupo.

Em qualquer loop L , o comutador (a, b) dos elementos $a, b \in L$ é dado por $ab = ba.(a, b)$ e o associador (a, b, c) dos elementos $a, b, c \in L$ é dado por $ab.c = a.bc(a, b, c)$.

No desenvolvimento deste trabalho, R denotará sempre um anel comutativo (e associativo) com unidade.

De modo análogo aos anéis de grupo, construímos o anel de loop de um loop L sobre um anel R , ou seja, tomamos o R -módulo livre RL com base L e estendemos a multiplicação de L via as leis de distributividade. Desta forma RL possui estrutura de anel, o qual será denominado *anel de loop do loop L sobre R* .

Diremos que um anel A é associativo nas potências, se todo subanel gerado por um único elemento é associativo.

Teorema 1.1 (*Paige-Osborn, [15]*). *Seja R um anel com característica diferente de dois e três. Então, para qualquer loop L , o anel de loop RL é comutativo e associativo nas potências, se, e somente se, L é grupo abeliano.*

O caso em que L é associativo não interessa, visto que pela observação 1.4 L é um grupo e então RL é um anel de grupo (situação já bem conhecida). Assim, vamos nos preocupar com o caso em que L não é associativo, de modo que RL não é um anel associativo. Isto motivou a próxima definição.

Antes, lembremos que um anel A é dito alternativo se ele satisfaz as leis alternativas:

$$\begin{aligned}x.yx &= xy.x, \\xx.y &= x.xy \text{ e} \\x.yy &= xy.y,\end{aligned}$$

para quaisquer que sejam $x, y \in A$.

Definição 1.2 (*E. G. Goodaire [7]*), Um R. A. loop (Ring Alternative Loop) é um loop L , tal que existe um anel R com característica diferente de dois, para o qual o anel de loop RL é alternativo mas não associativo.

Pode-se demonstrar que se L é um R. A. loop, então o anel de loop RL é alternativo mas não associativo para qualquer anel R .

A menos que mencionemos explicitamente o contrário, R será sempre um anel com característica diferente de dois. Usaremos $\text{Car}(R)$ para denotar característica de R .

Teorema 1.2 (*Artin [18]*). Se A é um anel alternativo, então todo subanel de A gerado por dois elementos $x, y \in A$ é associativo.

Seja A um anel qualquer. Como é usual na teoria de anéis, o *associador* $[x, y, z]$ dos elementos x, y , e $z \in A$ é dado por $[x, y, z] = xy.z - x.yz$ e o *comutador* $[x, y]$ dos elementos x, y é dado por $[x, y] = xy - yx$.

Definição 1.3 . Um conjunto não vazio $H \subset L$, é um subloop de L , se H , com a restrição da operação de L , é um loop.

O subloop de L , gerado por todos os comutadores é chamado *subloop comutador*, e o subloop gerado por todos os associadores é chamado *subloop associador*, os quais serão denotados por L' e (L, L, L) , respectivamente.

Os seguintes subconjuntos de L são subloop:

$$N_\lambda = \{a \in L / ax.y = a.xy, \forall x, y \in L\}$$

$$N_\mu = \{a \in L / x.ay = xa.y, \forall x, y \in L\}$$

$$N_\rho = \{a \in L / x.ya = xy.a, \forall x, y \in L\}$$

$$N(L) = N_\lambda \cap N_\mu \cap N_\rho$$

$$Z(L) = \{a \in N(L) / ax = xa, x \in L\}$$

e são denominados por *núcleo à esquerda de L* , *núcleo ao centro de L* , *núcleo à direita de L* , *núcleo de L* e *centro de L* respectivamente.

Definição 1.4 . Um subloop H de um loop L é dito normal se, e somente se, H é um subloop que satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \quad Hx = xH,$$

$$(ii) \quad (Hx)y = H(xy) \quad e$$

$$(iii) \quad x(yH) = (xy)H,$$

para todo $x, y \in L$. Para indicar que H é normal em L , escrevemos $H \triangleleft L$.

Exemplos: $L \triangleleft L$ e $Z(L) \triangleleft L$.

Teorema 1.3 . Num loop L as seguintes condições são equivalentes:

$$(i) \quad xy.zx = (x.yz)x = (x.yz)x$$

$$(ii) \quad xy.zx = x(yz.x)$$

$$(iii) \quad (zx.y)x = z(x.yx)$$

$$(iv) \quad (xy.x)z = x(y.xz)$$

para quaisquer $x, y, z \in L$.

As equações equivalentes do teorema 1.3 são chamadas *identidades de Moufang*.

Definição 1.5 . *Um loop L , satisfazendo qualquer uma das identidades de Moufang, é denominado loop de Moufang.*

Num loop de Moufang valem as seguintes propriedades:

- 1) $x^\rho = x^\lambda, \quad \forall x \in L$ (denotaremos este elemento por x^{-1})
- 2) $N_\lambda = N_\mu = N_\rho = N(L)$
- 3) $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy, \quad \forall x, y \in L.$

É fácil ver que, se L é um loop de Moufang, então L satisfaz as leis alternativas. A recíproca não é verdadeira.

Teorema 1.4 (*Teorema de Moufang [4]*). *Sejam L um loop de Moufang e $x, y, z \in L$ elementos que associam em alguma ordem. Então x, y e z geram um grupo, ou seja, eles associam em todas as ordens possíveis.*

Corolário. *Num loop de Moufang L o subloop gerado por quaisquer dois elementos é um grupo.*

O teorema 1.5 a seguir nos dá uma maneira de construir loops de Moufang:

Teorema 1.5 (Chein [5], [6]). *Sejam G um grupo não abeliano com uma involução $g \mapsto g^*$, $g_o \in G$ um elemento central tal que $g_o = g_o^*$ e u uma indeterminada. Então o conjunto $L = G \cup Gu$ com a multiplicação dada por*

$$\begin{cases} g.hu &= hg.u \\ gu.h &= gh^*.u \\ gu.hu &= g_o h^*g, \end{cases} \quad \forall g, h \in G$$

é um loop de Moufang.

Para um tal loop L , os elementos de RL podem ser expressos de modo único na forma

$$x + yu, \quad \text{onde } x, y \in RG.$$

Estendendo $*$ ao anel de grupo RG de maneira natural obtemos a seguinte expressão para multiplicar elementos de RL :

$$(x + yu)(z + wu) = (xz + g_o w^*y) + (wx + yz^*)u,$$

ou seja, multiplicamos elementos do mesmo modo como na chamada multiplicação de Cayley-Dikson.

Um loop obtido pela construção do teorema de Chein será denotado por $L = L(G, *, g_o)$.

Observação 1.5 . *Se $g^* = g^{-1}$ para todo $g \in G$ e $g_o = 1$ então o loop obtido do modo acima recebe a notação especial $M_{2n}(G, 2)$, onde n é a ordem do grupo G .*

O menor loop de Mounfang que não é grupo é $M_{12}(S_3, 2)$, onde S_3 é o grupo das permutações de três elementos.

No decorrer deste trabalho usaremos as seguintes notações:

- E denotará um grupo abeliano de expoente dois.
- K_8 denotará o grupo dos quatérnios de ordem 8.
- C_n denotará um grupo cíclico de ordem n .

Seja a um elemento não central de K_8 e $*$ a involução dada por $g \mapsto g^{-1}$, $\forall g \in K_8$. Tomemos $s = a^2$, então $L = L(K_8, *, s)$ será o loop das unidades dos números de Cayley. Notemos que L é um R. A. loop, pois é bem conhecido que a álgebra racional de Cayley-Dikson QL é um anel alternativo mas não associativo.

Teorema 1.6 (Goodaire [9]). *Suponhamos $L = L(G, *, g_o)$ então L é um R. A. loop se, e somente se, $g + g^*$ está no centro do anel de grupo RG , para todo $g \in G$.*

Aplicando o teorema 1.6 podemos concluir que $M_{16}(K_8, 2)$ é um R. A. loop e que $M_{12}(S_3, 2)$ não é.

De fato, sejam a e b dois geradores de K_8 , e $s = a^2$, então

$$a^{-1} = a^3 = sa$$

$$b^{-1} = b^3 = sb$$

$$s^{-1} = s,$$

ou seja, a involução dada por $g^* = g^{-1}$, para todo $g \in G$, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$g^* = \begin{cases} g, & \text{se } g \in \mathcal{Z}(K_8) \\ sg, & \text{se } g \notin \mathcal{Z}(K_8), \end{cases}$$

donde $g + g^* = 2g$ se $g \in \mathcal{Z}(K_8)$ ou $g + g^* = (1 + s)g$ se $g \notin \mathcal{Z}(K_8)$. Desta forma obtemos que $(g + g^*) \in \mathcal{Z}(RK_8)$ para qualquer que seja o elemento $g \in K_8$ e pelo teorema 1.6 segue que $M_{16}(K_8, 2)$ é um R. A. loop.

Agora, sejam a um gerador de ordem 2 e b um gerador de ordem 3 de S_3 , assim

$$b^{-1} = b^2 \quad \text{e} \quad a^{-1} = a$$

logo, $b + b^* = b + b^{-1} = b + b^2$ o qual não é elemento central em RS_3 pois não comuta com a . Novamente, pelo teorema 1.6, obtemos que $M_{12}(S_3, 2)$ não é um R. A. loop.

Teorema 1.7 [9] . *RL é alternativo se, e só se, para quaisquer $g, h, k \in L$, uma das seguintes condições é verificada:*

- (i) *se g, h, k associam em alguma ordem particular, então eles associam em todas as ordens,*
- (ii) *se g, h, k não associam, então $g.hk = kh.g = gk.h = hg.k$.*

Demonstração. Sejam $g, h, k \in L$. Linearizamos a equação $xy^2 = xy.y$ tomando $x = g$, $y = h + k$. Então

$$g.hk + g.kh = gh.k + gk.h,$$

assim, se $gh.k \neq g.hk$ devemos ter $g.hk = gk.h$. Usando a linearização das outras duas leis alternativas provamos que $g.hk = hg.k$ e $g.hk = kh.g$.

Se $(g, h, k) = 1$ então, pelo teorema, 1.4 segue que g, h e k geram um grupo e assim associam em todas as ordens.

A recíproca é fácil. □

Corolário 1. Se RL é um anel de loop alternativo e $g, h \in L$ comutam, então g e h associam com qualquer elemento $k \in L$.

Demonstração. Se $gh = hg$, dado $k \in L$ temos que se $(g, h, k) \neq 1$ então $kg.h = k.hg = k.gh$, contradição. □

Corolário 2. Um produto direto de dois loops é um R. A. loop, se e somente se, um deles é grupo abeliano e o outro é um R. A. loop.

Demonstração. Seja $L_1 = L \times K$, onde L e K são loops. Desde que L_1 é um R. A. loop ambos RL e RK são anéis de loop alternativos e certamente um deles não é associativo, caso contrário, L_1 não seria R. A. loop. Sem perda de generalidade podemos supor que L é um R. A. loop. Sejam $g, h, k \in L$ tais que $(g, h, k) \neq 1$. Sejam $a, b \in K$ elementos arbitrários. Então $(g, 1), (h, a)$ e (k, b) são elementos que não associam em $L \times K$. Portanto, por (ii) do teorema 1.7

$$((g, 1)(h, a))(k, b) = (g, 1)((k, b)(h, a))$$

assim,

$$(gh.k, ab) = (g.kh, ba) = (gh.k, ba)$$

o que implica $ab = ba$ donde segue que K é um grupo abeliano. $\square$

Lema 1.1 . *Se R é um R. A. loop, então para qualquer elemento $g \in L$, temos que $g^2 \in N(L)$.*

Demonstração. Desde que RL é alternativo, ele satisfaz as identidades de Moufang:

$$xy.zx = x(yz.x) = (x.yz)x.$$

Linearizando a primeira igualdade, com a mudança de variável $(x \mapsto x + w)$ obtemos:

$$xy.zw + wy.zx = (x.yz)w + (w.yz)x.$$

Façamos $x = y = g$, $z = h$, $w = k$, para $g, h, k \in L$. Então

$$g^2.hk + kg.hg = (g.gh)k + (k.gh)g = (g^2.h)k + (k.gh)g$$

sendo que a última igualdade é consequência do corolário do teorema 1.4

Suponhamos $(g^2, h, k) \neq 1$. Então da equação anterior temos que

$$(1) \quad g^2h.k = kg.hg.$$

neste caso, certamente $(g, h, k) \neq 1$ pois caso contrário, pelo teorema 1.4 teríamos que g, h e k geram um grupo, contrariando nossa hipótese.

Vamos provar que $(kg, h, g) \neq 1$. De fato, já que $(g, h, k) \neq 1$, pelo corolário 1 do teorema 1.7, temos que

$$kh \neq hk \implies kh.g \neq hk.g \implies g(kh.g) \neq g(hk.g).$$

Mas por (ii) do teorema 1.7 $h.kg = kh.g$ e pelas propriedades de Moufang $gh.kg = g(hk.g)$, de modo que

$$g(h.kg) = g(kh.g) \neq g(hk.g) = gh.kg$$

donde concluimos que $(kg, h, g) \neq 1$.

Aplicando a igualdade (1) acima, o corolário 2 do teorema 1.7, e a parte (ii) do mesmo teorema aos fatos

$$(g, h, k) \neq 1, \quad (g^2, h, k) \neq 1 \quad \text{e} \quad (kg, h, g) \neq 1$$

obtemos:

$$\begin{aligned} kh.g^2 &= (kh.g)g = (h.kg)g = kg.hg \stackrel{(1)}{=} g^2h.k = \\ &= g^2.kh = kg^2.h = k.hg^2, \end{aligned}$$

contradição.

Portanto devemos ter que $(g^2, h, k) = 1$ para quaisquer $g, h, k \in L$, ou seja, $g^2 \in N(L)$ para todo $g \in L$. $\square$

Lema 1.2 (Kleinfeld [18]). *Em qualquer anel alternativo com núcleo N temos:*

- (i) $[x, n][x, y, z] = 0$, para todo $n \in N$ e $x, y, z \in A$,
- (ii) se $a, b \in A$ são tais que $ab.c = a.bc$ para qualquer $c \in A$, então os elementos $[a, b]$ e $[a, ab]$ estão em N .

Teorema 1.8 [9]. *Seja L um R. A. loop. Então*

- (i) $g^2 \in N(L)$, para todo $g \in L$,

$$(ii) \quad N(L) = \mathcal{Z}(L),$$

$$(iii) \quad gh = hg \iff (g, h, L) = 1, \text{ para todo } g, h \in L,$$

$$(iv) \quad \text{se } (g, h, k) \neq 1 \text{ então } (g, h, k) = (g, h) = (h, k) = (g, k) \text{ é um elemento central s de ordem 2,}$$

$$(v) \quad L' = (L, L, L) = \{1, s\}.$$

A demonstração é trabalhosa. Segue dos resultados (i) e (ii) do teorema 1.7, linearização das identidades de Moufang, lema de Kleinfeld e da aplicação do seguinte resultado devido também a Kleinfeld:

Em qualquer anel A alternativo a função $f : A^4 \longrightarrow A$ dada por

$$f(w, x, y, z) = [wx, y, z] - x[w, y, z] - [x, y, z]w$$

é uma função alternativa .

Corolário. Num R . A . loop temos que:

$$(i) \quad (xy, z) = (x, z)(y, z)(x, y, z), \text{ para todo } x, y, z \in L.$$

$$(ii) \quad (xy, z, w) = (x, z, w)(y, z, w), \text{ para todo } x, y, z, w \in L$$

$$(iii) \quad \text{para quaisquer } z, w \in L$$

$$\mathcal{Z}(z) = \{x \in L \mid xz = zx\} \quad e$$

$$N(z, w) = \{x \in L \mid (x, z, w) = 1\}$$

são subloops de L .

Observação 1.6 . *Em qualquer loop L no qual vale uma das leis alternativas temos que se*

$$\{x, y, xy\} \cap Z(L) \neq \emptyset$$

então $xy = yx$.

De fato, se $xy \in Z(L)$ então

$$xy.y = y.xy = yx.y$$

e pela lei de cancelamento $xy = yx$.

Definição 1.6 . *Dizemos que um loop possui a propriedade da comutatividade limitada se para quaisquer $x, y \in L$ tais que $xy = yx$, temos que, ou $x \in Z(L)$ ou $y \in Z(L)$ ou $xy \in Z(L)$.*

Teorema 1.9 [9]. *Um R. A. loop possui a propriedade da comutatividade limitada.*

Corolário. *Seja L um loop de Moufang não associativo. Então L é um R. A. loop se, e somente se, L possui a lei da comutatividade limitada e um único comutador diferente de 1.*

Teorema 1.10 [10]. *Seja L um R. A. loop. Então existe um grupo não abeliano $G \subset L$ e um elemento u em L , não pertencente à G tal que $Z(G) = Z(L)$, $L = L(G, *, g_o)$, onde $g_o = u^2 \in Z(G)$ e $*$: $G \longrightarrow G$ é a involução dada por*

$$g^* = \begin{cases} g, & \text{se } g \in Z(G) \\ sg, & \text{se } g \notin Z(G). \end{cases}$$

em que s é o único comutador diferente da unidade em L , além disso, todo elemento $x \in RL$ pode ser escrito de maneira única na forma

$$r = x + yu \quad \text{com} \quad x, y \in RG.$$

A involução e a multiplicação em RL são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} (x + yu)^* &= x^* + sy.u \quad e \\ (x + yu)(z + wu) &= (xz + g_0 w^* y) + (wx + yz^*)u. \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $a, b, u \in L$ tais que $(a, b, u) = s$ então por (iv) do teorema 1.8,

$$(a, b) = (a, u) = (b, u) = (a, b, u) = s.$$

Vamos mostrar que $G = \langle \mathcal{Z}(L), a, b \rangle$ é um grupo que está nas condições do teorema.

Seja $v \in L$ tal que $(a, b, v) = 1$ então ou $(a, v) = 1$ ou $(b, v) = 1$, pois

$$(a, b, v) = (a, b)(a, v)(b, v) = s(a, v)(b, v).$$

Suponhamos que $(a, v) = 1$, então pela lei da comutatividade limitada devemos ter que $v \in \mathcal{Z}(L)$ ou $av \in \mathcal{Z}(L)$. Desta forma concluímos que se $(a, b, v) = 1$ $v \in \langle \mathcal{Z}(L), a, b \rangle = G$.

Suponhamos agora que se $v \in (L \setminus G)$ então, $(a, v) = s$ e $(b, v) = s$, pois, caso contrário, pelo corolário 1 do teorema 1.7, temos que $(a, b, v) = 1$ e, pelo visto acima, $v \in G$, contradição. De modo que

$$(a, b, v) = (a, b)(a, v)(b, v) = s.$$

Donde concluímos que a e b não associam com qualquer elemento que não está em G . Assim,

$$(a, b, vu^{-1}) = (a, b, u^{-1})(a, b, v) = s^2 = 1$$

e temos então, $vu^{-1} \in G$. Consequentemente, $v = vu^{-1}.u \in Gu$ e assim,

$$L = G \cup Gu.$$

Notemos que, se $g \in G$, então gu não associa com a e b pois $gu \notin G$.

Suponhamos que $(h, u) = 1$. Pelo teorema 1.9, todo R. A. loop L possui a propriedade da comutatividade limitada, assim devemos ter $h \in \mathcal{Z}(L)$, pois $u \notin \mathcal{Z}(L)$, e desde que, $(hu, a, b) \neq 1$ temos também $hu \notin N(L) = \mathcal{Z}(L)$. De forma que

$$(h, u) = 1 \iff h \in \mathcal{Z}(L), \quad \text{para todo } h \in L.$$

Seja $*$: $G \longrightarrow G$ dada por:

$$g^* = ug.u^{-1} = \begin{cases} g, & \text{se } g \in \mathcal{Z}(G) \\ sg & \text{se } g \notin \mathcal{Z}(G). \end{cases}$$

É fácil verificar que $*$ é uma involução em G que fixa todos os elementos que estão no centro de G .

Notemos que, por (ii) do teorema 1.8, temos que $u^2 \in \mathcal{Z}(G)$.

Para o que segue usaremos as seguintes notações:

- (a) indica que a igualdade é consequência das leis alternativas,
- (b) indica que a igualdade é decorrente de (ii) do teorema 1.7
- (c) indica que a igualdade é decorrente de (iii) do teorema 1.8,

- (m) indica que a igualdade é consequência das identidades de Moufang.

Observemos ainda, que, para qualquer $g \in G$ tem-se:

$$ug = ug.u^{-1}u \stackrel{(a)}{=} (ug.u^{-1})u = g^*u.$$

Deste modo, $ug = g^*u$ para qualquer $g \in G$.

Usaremos a notação (d) para indicar que a igualdade é consequência da observação acima.

Vamos agora verificar como multiplicamos os elementos de L :

sejam $g, h \in G$, e suponhamos que $(g, h) = 1$, então,

$$1) g.hu \stackrel{(c)}{=} gh.u = hg.u$$

$$2) gu.h = g.uh = g.h^*u = gh^*.u$$

$$3) gu.hu \stackrel{(c)}{=} (gu.h)u \stackrel{(2)}{=} (gh^*.u)u \stackrel{(a)}{=} gh^*.u^2 = u^2.gh^* = u^2.h^*g$$

se $(g, h) = s$, então por (iv) do teorema 1.8

$$s = (g, h) = (h, u) = (g, u) = (g, h, u), \quad \text{assim,}$$

$$1) g.hu \stackrel{(b)}{=} hg.u$$

$$2) gu.h \stackrel{(b)}{=} g.hu \stackrel{(b)}{=} hg.u = sgh.u = gh^*.u$$

$$3) gu.hu = s(ug.hu) \stackrel{(m)}{=} s((u.gh)u) \stackrel{(d)}{=} s(h^*g^*.u)u \stackrel{(a)}{=} s(hg.u^2) = u^2h^*g.$$

De modo que, $L = L(G, *, g_0 = u^2)$. □

Observação 1.7 *Seja L um R. A. loop. Se H é qualquer subgrupo de L não abeliano que contém o centro de L então $L = L(H, *, g_0)$, onde $*: H \rightarrow H$ é como no teorema 1.10 e $g_0 = u^2$ para qualquer elemento u em L que não está em H .*

De fato, sejam $a, b \in H$ tais que $(a, b) = s$ e $u \in L$ um elemento que não está em H . Claramente $(a, b, u) = s$, pois, caso contrário, pelo teorema 1.4, teríamos que $u \in H$, contradição.

Assim, pela demonstração do teorema 1.10, temos que, $L = L(G, *, u^2)$, onde $G = \langle Z(L), a, b \rangle$ e $*$ é a involução dada por

$$g^* = \begin{cases} g, & \text{se } g \in Z(H) \\ sg, & \text{se } g \notin Z(H). \end{cases}$$

Desde que, por hipótese, $Z(L) \subset Z(H)$, temos que $G \subset H$. Por outro lado, se $h \in H$ então

$$(hu, a, b) = (h, a, b)(u, a, b) = 1.s = s,$$

logo, $hu \in Gu$ e assim temos que $h \in G$, resultando que $G \subset H$.

Consequentemente, $H = G$. □

Definição 1.7 . A norma $n(x)$, de um elemento $x \in RL$, é definida por

$$n(x) = x^*x.$$

Observação 1.8 . Devido ao teorema 1.2 é fácil ver que $n(x^2) = (n(x))^2$.

Para um subloop normal H de L , $\Delta_R(L:H)$ denotará o núcleo do epimorfismo natural $RL \rightarrow R(L/H)$. Pode-se demonstrar que $\Delta_R(L:H)$ é gerado sobre RL pelo conjunto $\{h - 1 \mid h \in H\}$.

Observação 1.9 . *Claramente temos que $RL/\Delta_R(L:H) \cong R(L/H)$.*

Observação 1.10 . *Em [10] foi observado que se $L = L(G, *, g_o)$ e $H \subseteq G$ então*

$$\Delta_R(L:H) = \Delta_R(G:H) + \Delta_R(G:H)u$$

Observação 1.11 . *Se $H \triangleleft L$ e $x \in RL$ é tal que $x^2 = 0$, então*

$$x \in \Delta_R(L:H).$$

Observação 1.12 *Seja L um $R.A.$ loop. Desde que $L' = (L, L, L) = \{1, s\}$, temos que o conjunto dos elementos de torção $T(L)$, é um subloop de L e que o conjunto dos elementos de torção $T(G)$ de qualquer grupo $G \subset L$ é um subgrupo de G .*

De fato, desde que $L' = (L, L, L) = \{1, s\}$, temos que:

$$\begin{array}{ll} gt = tg & \text{ou} \quad gt = st.g \\ g.ht = gh.t & \text{ou} \quad g.ht = s(gh.t) = gh.st \\ tg.h = t.gh & \text{ou} \quad tg.h = st.gh \end{array}$$

para quaisquer $t \in T(L)$ e $g, h \in L$. Donde segue que $T(L)$ é um subgrupo normal de L .

Da mesma forma concluímos que o conjunto dos elementos de torção $T(G)$ de qualquer grupo $G \subset L$, é um subgrupo normal de G , pois neste caso, se G não é abeliano, existem $a, b \in G$ tais que $(a, b) = s$, donde segue que $s \in T(G)$.

1.2 Alguns Resultados Sobre Anéis de Grupo

Sobre teoria de grupos, lembramos algumas definições e resultados que podem ser encontrados em diversas referências, por exemplo em [19].

(1) Se A é um anel associativo sem elementos nilpotentes diferentes de zero, então todo elemento idempotente e de A é central.

$$(2) \quad (\oplus_{i=1}^n R_i)G \cong \oplus_{i=1}^n (R_i G).$$

$$(3) \quad R(G_1 \times G_2) \cong (RG_1)G_2 \cong RG_1 \otimes_R RG_2.$$

Se R é um anel com característica $n > 0$ e não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, então $n = p_1 p_2 \dots p_k$, um produto de primos distintos. Assim, podemos escrever $R = \oplus_{i=1}^k R_i$ onde R_i tem característica p_i . Donde afirmamos:

(4) Se $\text{Car } R > 0$ então RG não tem elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, $R = \oplus_{i=1}^n R_i$, onde $\text{Car}(R_i) = p_i$ e cada $R_i G$ não tem elementos

nilpotentes diferentes de zero.

(5) Seja G um grupo finito. Suponhamos que $\alpha = \sum \alpha(g)g \in RG$ é nilpotente. Então $|G|\alpha(1)$ é um elemento nilpotente de R .

De fato, seja P um ideal primo de R . Olhando para a imagem $\tilde{\alpha}$ de α em $(R/P)G$ e tomando o traço da matriz da representação regular de $\tilde{\alpha}$, temos

$$|G|\tilde{\alpha}(1) = \bar{0} \implies |G|\alpha(1) = 0 \pmod{P}$$

e portanto $|G|\alpha(1) \in \cap_{\tau} P_{\tau}$ (intersecção de todos os ideais primos P_{τ} de R), o qual é nilpotente.

(6) Seja K um corpo. Se KG não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, então todo subgrupo finito de G é normal em G e portanto os elementos de torção de G formam um subgrupo $T(G)$ de G .

De fato, se $\text{Car}(K) = p > 0$ então G não possui elementos de ordem p visto que, se assim fosse, teríamos que $(g-1)^p = g^p - 1 = 0$. Seja $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ um subgrupo qualquer de G , então

$$\left((1/n) \left(\sum_{i=1}^n h_i \right) \right)^2 = (1/n) \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)$$

portanto $e = (1/n)(\sum_{i=1}^n h_i)$ é um idempotente e, pelo item (1), é central. Assim, temos que, para todo $g \in G$, $g^{-1}h_i g = h_j$ para algum $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Consequentemente H é normal em G .

Como corolário segue o seguinte resultado.

(7) Seja K um corpo e G um grupo finito. Se KG não possui elementos nilpotentes então ou G é um grupo abeliano ou um grupo Hamiltoniano.

Lembremos que um grupo G é Hamiltoniano se, e somente se, pode ser escrito na forma

$$G = A \times E \times K_8$$

onde A é um grupo abeliano no qual todo elemento tem ordem ímpar.

Proposição 1.1 ([19], proposição 3.1). *A álgebra de grupo $\mathbb{Z}_p G$ de um grupo finito G sobre o corpo $\mathbb{Z}_p$ de p elementos não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, G é um grupo abeliano e o primo p não divide a ordem de G .*

Proposição 1.2 ([19], proposição 3.2). *Seja G um grupo finito e R um anel com característica $n > 0$. Então RG não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, R não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, a ordem de G não é divisor de zero em R e G é grupo abeliano.*

Corolário ([19], corolário 3.3). *Seja G um grupo abeliano arbitrário. Então RG não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, R não possui elementos nilpotentes diferentes de zero e a ordem de qualquer elemento de $T(G)$ não é divisor de zero em R .*

Teorema 1.11 ([14], teorema 1). *Seja $Q_k = Q(\xi_k)$ um corpo ciclotômico onde ξ_k é uma k -ésima raiz primitiva da unidade e $k \geq 3$ é um inteiro ímpar, seja r a ordem multiplicativa de 2 módulo k , isto é, o menor expoente positivo n tal que 2^n é congruo à 1 módulo k . Então o menor número de quadrados necessários para representar -1 é dois se r for par e é quatro se r for ímpar.*

O próximo resultado nos diz quando o anel de grupo RK_8 pode ter elementos nilpotentes diferentes de zero.

Proposição 1.3 ([19], proposição 3.4). *Seja R um anel no qual 2 não é divisor de zero. Então RK_8 não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, a equação*

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

possui apenas a solução trivial em R .

Demonstração. Escrevemos $K_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ e seja $s = a^2$.

Suponhamos por absurdo que existam $x, y, z \in R$ tais que $x \neq 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Então o elemento

$$\alpha = (1 - s)(xa + yb + zab) \neq 0$$

mas

$$\alpha^2 = 2(s - 1)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Para provar a condição suficiente, consideremos $\alpha = \sum \alpha(g)g \in RK_8$, tal que $\alpha^2 = 0$. Assim $\bar{\alpha} = \sum \alpha(g)\bar{g} \in R(K_8 / \langle s \rangle)$, também possui quadrado nulo.

Notemos que R não possui elementos nilpotentes diferentes de zero pois, por hipótese, a equação $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ possui apenas a solução trivial, além disso, 2 não é divisor de zero em R e $K_8 / \langle s \rangle$ é um grupo abeliano de expoente dois. Assim, pelo corolário da proposição 1.2, temos que $R(K_8 / \langle s \rangle)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, de forma que, $\bar{\alpha} = \bar{0}$, logo,

$\alpha \in \Delta_R(K_8, \langle s \rangle)$. Sendo assim, α é da forma

$$\alpha = (1 - s)(r + xa + yb + zab), \quad \text{onde} \quad r, x, y, z \in R.$$

Então, por (5) temos que $r = 0$, portanto

$$\alpha^2 = 2(s - 1)(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Logo, desde que 2 não é divisor de zero em R , temos que $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ assim, novamente pela nossa hipótese, $x = y = z = 0$. Consequentemente $\alpha = 0$. $\square$

Teorema 1.12 ([19], teorema 3.5) *A álgebra de grupo racional QG de um grupo finito G não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, uma das seguintes é válida*

- (i) G é um grupo abeliano.
- (ii) G é um grupo Hamiltoniano de ordem 2^nm , m ímpar, tal que a ordem multiplicativa de 2 módulo m é par.

Demonstração. Suponhamos G um grupo não abeliano tal que QG não possua elementos nilpotentes diferentes de zero. Então por (7)

$$G = A \times E \times K_8$$

$$QG = (QE)(A \times K_8) = \bigoplus_1^k Q(A \times K_8) = \bigoplus_1^k (QA)k_8.$$

Assim, é suficiente considerar $(QA)K_8$. Mas, pela proposição II.2.6 de [19], sabemos que

$$QA = \bigoplus_{d|e} n_d Q_d$$

onde $n_d Q_d$ denota n_d cópias de $Q(\xi_d)$, ξ_d é uma d -ésima raiz primitiva da unidade e e é o expoente de A . Então

$$(QA)K_8 = \bigoplus_{d|e} n_d Q_d K_8.$$

Agora (ii) segue da proposição 1.3 e do teorema 1.11. O mesmo argumento juntamente com a proposição 1.3 e o teorema 1.11 nos dá a recíproca. $\square$

Capítulo 2

Elementos Nilpotentes em Anéis de Loop de R. A. Loops Finitos

2.1 Resultados Preliminares

Os resultados desta secção são para loops quaisquer, não necessariamente finitos.

O primeiro resultado deste capítulo, a proposição 2.1, mostra que se L é um R. A. loop, então, a involução dada no teorema 1.10 é a única involução de L tal que $L = L(G, *, g_o)$ para algum grupo G .

A proposição 1.3 dá condições necessárias e suficientes para que o anel de grupo RK_8 não possua elementos nilpotentes diferentes de zero. Nós obtemos um resultado análogo no lema 2.3.

O principal resultado deste capítulo é a proposição 2.3 que estende, para R. A. loops, o teorema 3.5 de [19].

No que segue, se L é um R. A. loop então s denotará o único comutador diferente do elemento unidade. O qual sabemos ser um elemento central de ordem dois.

Observação 2.1 . Neste Capítulo e no Capítulo III estaremos considerando R um anel com característica diferente de dois pois, caso contrário,

$$(s - 1)^2 = s^2 - 1 = 1 - 1 = 0,$$

resultando que $s - 1$ é um elemento nilpotente diferente de zero em RL .

Observação 2.2 . A hipótese de que RL não possui elementos nilpotentes diferentes de zero nos leva a concluir que dois não é divisor de zero em R pois, se existisse elemento $m \in R$ tal que $2m = 0$ então teríamos

$$(m(s - 1))^2 = 2m^2(s - 1) = 0$$

e $m(s - 1)$ seria um elemento nilpotente diferente de zero em RL .

Proposição 2.1 . Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop. Então a involução

$$* : G \longrightarrow G \text{ é dada por } g^* = \begin{cases} g, & \text{se } g \in Z(G) \\ sg, & \text{se } g \notin Z(G). \end{cases}$$

Demonstração. Suponhamos que existam uma involução $\iota : G \longrightarrow G$ e um elemento $h_o \in Z(G)$ tais que $L = L(G, \iota, h_o)$.

Sejam $a, b \in G$ e $u \in (L \setminus G)$ tais que $(a, b) = s$ e $u^2 = h_o$ então pelo teorema 1.4 $(a, b, u) = s$ pois, caso contrário, teríamos $u \in H$. Assim, pela demonstração do teorema 1.10, temos que $L = L(H, *, h_o)$ onde $H = \langle Z(L), a, b \rangle$ e

$*$: $H \longrightarrow H$ é a involução dada por

$$g^* = \begin{cases} g, & \text{se } g \in \mathcal{Z}(H) \\ sg, & \text{se } g \notin \mathcal{Z}(H). \end{cases}$$

Vamos agora provar que $H = G$.

Notemos que

$$\mathcal{Z}(L) \subset G$$

pois, se existe elemento $n \in \mathcal{Z}(L)$ tal que $n \notin G$, então $n = gu$ para algum $g \in G$.

Seja $h \in G$ arbitrário. Então, temos que,

$$gh^*.u = gu.h = nh = hn = h.gu = gh.u$$

logo,

$$gh^* = gh \implies h = h^*.$$

Logo, pela definição de $*$, temos que,

$$h \in \mathcal{Z}(H) = \mathcal{Z}(L)$$

e, conseqüentemente, $G \subset \mathcal{Z}(L)$; resultando que G é um grupo comutativo, contradição. Assim,

$$\mathcal{Z}(H) = \mathcal{Z}(L) \subset G$$

o que nos permite concluir que, $H = \langle \mathcal{Z}(L), a, b \rangle \subset G$.

Por outro lado $G \subset H$, pois caso contrário, teríamos um elemento $g \in G$, com $g = hu$ para algum $h \in H$, e assim,

$$1 = (g, a, b) = (hu, a, b) = (h, a, b)(u, a, b) = (h, a, b)s = s,$$

contradição.

Consequentemente $H = G$.

Agora tomemos $g \in G$, então

$$u.gu = h_o g^* \quad \text{e} \quad u.gu = h_o g',$$

donde temos que $g' = g^*$ para todo $g \in G$. □

A proposição 2.2, a seguir, estabelece equações com o objetivo de facilitar cálculos futuros.

Proposição 2.2 . *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R . A. loop. Dado um elemento $x \in RL$ escrito na forma:*

$$x = (1 - s)(\alpha + \beta u), \quad \alpha, \beta \in RG,$$

temos que:

$$(i) \quad x^2 = 2(1 - s)[(\alpha^2 + g_o \beta^* \beta) + \beta(\alpha + \alpha^*)u],$$

$$(ii) \quad n(x) = 2(1 - s)(\alpha \alpha^* - g_o \beta \beta^*).$$

Se adicionalmente tivermos que $\alpha^ = s\alpha$ então*

$$(iii) \quad x^2 = 2(1 - s)(\alpha^2 + g_o \beta^* \beta).$$

Se além disso,

$$g_o = s, \quad \alpha = x_1 a + x_2 b + x_3 ab \quad \text{e} \quad \beta = x_4 + x_5 a + x_6 b + x_7 ab,$$

onde a, b são elementos não centrais em G , tais que $a^2 = b^2 = s$, e cada $x_i \in RZ(G)$, então temos que

$$(iv) \quad x^2 = 2(s-1)(\sum_{i=1}^7 x_i^2).$$

Demonstração. Seja $x \in RL$ da forma acima. Então, aplicando a multiplicação e a involução dadas no teorema 1.10 temos que:

$$\begin{aligned} x^2 &= (1-s)^2(\alpha + \beta u)^2 \\ &= 2(1-s)(\alpha^2 + \alpha.\beta u + \beta u.\alpha + \beta u.\beta u) \\ &= 2(1-s)(\alpha^2 + \beta\alpha.u + \beta\alpha^*.u + \beta^*\beta.u^2) \\ &= 2(1-s)[(\alpha^2 + g_o\beta^*\beta) + \beta(\alpha + \alpha^*)u], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(x) = xx^* &= [(1-s)(\alpha + \beta u)][(1-s)(\alpha^* + s\beta u)] \\ &= (1-s)^2[\alpha\alpha^* + s(\alpha.\beta u) + \beta u.\alpha^* + s(\beta u.\beta u)] \\ &= 2(1-s)[\alpha\alpha^* + g_o s\beta^*\beta + s\beta\alpha.u + \beta\alpha.u] \\ &= 2(1-s)(\alpha\alpha^* - g_o\beta^*\beta + (1+s)\beta\alpha.u) \\ &= 2(1-s)(\alpha\alpha^* - g_o\beta^*\beta). \end{aligned}$$

Consideremos a hipótese adicional que $\alpha^* = s\alpha$ então

$$\begin{aligned} x^2 &= 2(1-s)[(\alpha^2 + g_o\beta^*\beta) + \beta(\alpha + \alpha^*)u] \\ &= 2(1-s)[(\alpha^2 + g_o\beta^*\beta) + \beta(\alpha + s\alpha)u] \\ &= 2(1-s)[(\alpha^2 + g_o\beta^*\beta) + (1+s)\beta\alpha.u] \\ &= 2(1-s)(\alpha^2 + g_o\beta^*\beta). \end{aligned}$$

Se tivermos ainda que $g_o = s$, $\alpha = x_1a + x_2b + x_3ab$ e $\beta = x_4 + x_5a + x_6b + x_7ab$ onde a e b são elementos não centrais em G tais que $a^2 = b^2 = s$ e cada $x_i \in RZ(G)$, então:

$$\begin{aligned}
(1-s)\alpha^2 &= (1-s)(x_1a + x_2b + x_3ab)^2 \\
&= (1-s)(sx_1^2 + x_1x_2ab + x_1x_3sb + x_2x_1ba + sx_2^2 + x_2x_3b.sba + \\
&\quad + x_1x_3sba.a + x_2x_3ab.b + x_3^2ab.sba) \\
&= (1-s)[s(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (1+s)(x_1x_2ab + x_1x_3b + x_2x_3a)] \\
&= (s-1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).
\end{aligned}$$

Analogamente provamos que:

$$(1-s)\beta^*\beta = (1-s)(x_4^2 + x_5^2a + x_6^2b + x_7^2ab),$$

donde temos que:

$$(1-s)g_o\beta^*\beta = (1-s)s\beta^*\beta = (s-1)(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2).$$

Portanto substituindo estes resultados na equação de x^2 acima obtemos

$$x^2 = 2(s-1) \left(\sum_{i=1}^7 x_i^2 \right).$$

□

O próximo resultado revelou-se ponto chave para a demonstração do teorema 3.2.

Lema 2.1 . *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop. Se RL é um anel alternativo sem elementos nilpotentes e $g_o \in T(G)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g_o^m = s$ e o menor elemento com esta propriedade é um número ímpar.*

Demonstração. Desde que $L = L(G, *, g_o)$ existem elementos $a, b, u \in L$ tais que $(a, b) = (a, b, u) = s$ e $u^2 = g_o$.

Afirmamos inicialmente que, se $g_o \in T(G)$ mas $g_o^k \neq s$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, então RL possui elementos nilpotentes diferentes de zero.

De fato, seja $n = o(g_o)$ a ordem de g_o . Façamos

$$x = (1 - s)\gamma(a + au), \text{ onde } \gamma = \sum_{i=1}^n g_o^i.$$

Temos então que $x \neq 0$, pois, por hipótese, $g_o^k \neq s$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $(\gamma a)^* = s(\gamma a)$ e assim, pela equação (iii) da proposição 2.2

$$\begin{aligned} x^2 &= 2(1 - s)((\gamma a)^2 + g_o(\gamma a)^*(\gamma a)) \\ &= 2(1 - s)(n\gamma a^2 + g_o(s\gamma a)(\gamma a)) \\ &= 2(1 - s)(n\gamma a^2 + g_o\gamma^2(as)a) \\ &= 2(1 - s)(n\gamma a^2 + sn\gamma a^2) \\ &= 2(1 - s)(1 + s)n\gamma a^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Contradição.

Suponhamos agora que s é uma potência de g_o e, por absurdo, que o menor elemento k tal que $g_o^k = s$ seja um número par. Vamos mostrar que $n = o(g_o) = 2k$.

De fato, desde que $g_o^{2k} = s^2 = 1$ temos que $n \leq 2k$, mas devido a definição de k , temos que $k \leq n$, de modo que $k \leq n \leq 2k$. Seja $n = k + i$ onde $0 \leq i \leq k$; então

$$1 = g_o^n = g_o^k g_o^i = s g_o^i$$

o que implica $g_o^i = s$, donde $k \leq i$. Consequentemente $k = i$ e assim, $n = 2k$.

Agora, sejam $h = g_o^{k+1} = sg_o$, $m = o(h)$ e r o menor elemento tal que $h^r = s$. Desde que $h^k = g_o^k = s$ (pois k é um número par), temos que $r \leq k$. Como antes, podemos mostrar que $m = 2r$. Também, $g_o^m = h^m = 1$, então $2r = m \geq n = 2k$ e assim, $r \geq k$ de modo que $r = k$.

Se tomarmos

$$x = (1 - h + h^2 - h^3 + \dots - h^{n-1})(a + au)$$

temos que $x \neq 0$ mas

$$\begin{aligned} x^2 &= (1 - h + h^2 - h^3 + \dots - h^{n-1})^2 (a + au)^2 \\ &= (1 - h + h^2 - h^3 + \dots - h^{n-1})^2 (a^2 + a(as)g_o) \\ &= (1 - h + h^2 - h^3 + \dots - h^{n-1})^2 a^2(1 + h) \\ &= 0, \end{aligned}$$

contradição.

Concluimos então que existe uma potência de g_o que é igual a s e que a menor potência com esta propriedade é um número ímpar. $\square$

Corolário. *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop. Se RL é um anel alternativo sem elementos nilpotentes diferentes de zero e $g_o \in T(G)$, então podemos obter L como $L = L(G, *, s)$.*

Demonstração. Sejam $a, b, u \in L$ como antes. De acordo com o lema 2.1 existe $k \in \mathbb{N}$ ímpar tal que $g_o^k = s$. Seja $z = g_o^{(k-1)/2}u$. então, da observação 1.7, segue que $L = L(G, *, z^2 = s)$. $\square$

Como vimos no Capítulo I, se um elemento

$$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)g \in RG$$

possui quadrado nulo, então $|G|\alpha(1)$ é um elemento nilpotente de R . De modo que, se ainda, R é um anel que não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, obtemos que $|G|\alpha(1) = 0$. Assim, se $|G|$ não é divisor de zero em R então necessariamente $\alpha(1) = 0$. Cabe observar que o lema 2.2 abaixo é demonstrado no sentido de obter um resultado análogo para loops.

Lema 2.2 . *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R . A. loop tal que $RZ(G)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero. Denotemos por X um transversal para $\langle s \rangle$ em $Z(G)$, isto é, um conjunto completo de representantes das classes laterais. Se $x \in RL$ é da forma*

$$x = (1 - s)[(x_o + x_1a + x_2b + x_3ab) + (x_4 + x_5a + x_6b + x_7ab)u],$$

com $x_i \in RX$ $i = 0, 1, \dots, 7$ e $x^2 = 0$, então $x_o = 0$.

Demonstração. Seja $x \in RL$ como descrito acima. Façamos

$$\alpha = x_o + x_1a + x_2b + x_3ab$$

$$\beta = x_4 + x_5a + x_6b + x_7ab.$$

Desde que $x^2 = 0$ segue, pela observação 1.8, que $(n(x))^2 = 0$. Agora, pela parte (ii) da proposição 2.2, temos que

$$\begin{aligned} n(x) &= 2(1 - s)(\alpha\alpha^* - g_o\beta\beta^*) = \\ &= 2(1 - s)[(x_o^2 + x_1^2sa^2 + x_2^2sb^2 + x_3a^2b^2) - g_o(x_4^2 + x_5^2sa^2 + x_6^2sb^2 + x_7a^2b^2)] \end{aligned}$$

assim, $n(x) \in R\mathcal{Z}(G)$, o que implica que $n(x) = 0$, pois $R\mathcal{Z}(G)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero. Por (i) da proposição 2.2 temos que $0 = x^2 = 2(1-s)[(\alpha^2 + g_o\beta\beta^*) + \beta(\alpha + \alpha^*)u]$.

Portanto, temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} 0 &= 2(1-s)(\alpha^2 + g_o\beta\beta^*) \\ 0 &= 2(1-s)(\alpha\alpha^* - g_o\beta\beta^*). \end{aligned}$$

Isto nos permite concluir que

$$0 = 2(1-s)\alpha(\alpha + \alpha^*),$$

donde $4(1-s)x_o^2 = 0$, logo $2((1-s)x_o)^2 = 0$. Desde que, 2 não é divisor de zero em R (veja observação 2.2) e $R\mathcal{Z}(G)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, temos que $(1-s)x_o = 0$. Mas $x_o \in RX$, logo $x_o = 0$. $\square$

2.2 Loops Finitos

No restante deste capítulo estaremos considerando que L é um R. A. loop finito.

Lema 2.3 . *Se $L = L(K_8, *, g_o)$, então RL não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se $g_o = s$ e a equação*

$$(1) \quad \sum_{i=1}^7 X_i^2 = 0,$$

não possui solução não trivial em R .

Demonstração. Desde que RL não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, pelo lema 2.1, temos que alguma potência de g_o é igual a s e que o menor número $k \in \mathbb{N}$ tal que $g_o^k = s$ é ímpar. Seja $h = g_o^{1-k}$ então $g_o = sh$ e $o(h) = k$. Desde que K_8 não possui elementos diferentes da unidade com ordem ímpar, temos que $h = 1$ e portanto $g_o = s$.

Agora, se existirem elementos $x_1, \dots, x_7 \in R$ tal que $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 0$ e $x_k \neq 0$ para algum $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, então o elemento

$$x = (1 - s)[(x_o + x_1a + x_2b + x_3ab) + (x_4 + x_5a + x_6b + x_7ab)u]$$

é não nulo mas, pela parte (iv) da proposição 2.2, temos que

$$x^2 = 2(s - 1)(\sum_{i=1}^7 x_i^2) = 0,$$

uma contradição.

Reciprocamente, seja $x \in RL$ tal que $x^2 = 0$. Desde que a equação (1) vale, temos que R não possui elementos nilpotentes diferentes de zero. Também $L/\langle s \rangle$ é um grupo abeliano de expoente dois, assim, pelo corolário da proposição 1.2, $R(L/\langle s \rangle)$ não tem elementos nilpotentes diferentes de zero e, pela observação 1.9, temos que $x \in \Delta_R(K_8, \langle s \rangle)$. Portanto x é da forma

$$x = (1 - s)[(x_o + x_1a + x_2b + x_3ab) + (x_4 + x_5a + x_6b + x_7ab)u]$$

com $x_i \in R$, $i = 0, 1, \dots, 7$.

Desde que a equação $\sum_{i=1}^7 X_i^2 = 0$ possui apenas a solução trivial temos que o mesmo acontece com a equação $\sum_{i=1}^3 Y_i^2$. Logo, pela proposição 1.3, RK_8 não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, assim, temos que $RZ(K_8)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero portanto, pelo lema 2.2, $x_o = 0$. Pela parte (iv) da proposição 2.2

$$0 = x^2 = 2(s-1)(\sum_{i=1}^7 x_i^2) \implies \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 0$$

pois pela observação 2.2 2 não é divisor de zero em R . Assim, desde que (1) é válida, temos que $x_i = 0, i = 1, \dots, 7$. Consequentemente $x = 0$. $\square$

Lema 2.4 . *Seja $L = L(E \times K_8, *, g_o)$, então a álgebra racional QL não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, $g_o = s$.*

Demonstração. A condição necessária é provada de modo análogo ao lema 2.3.

Reciprocamente, seja $x \in QL$ tal que $x^2 = 0$. Desde que $L/\langle s \rangle$ é um 2-grupo abeliano, pelo corolário da proposição 1.2, resulta que $Q(R/\langle s \rangle)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, e assim, pela observação 1.9, temos que $x \in \Delta_Q(E \times K_8, \langle s \rangle)$. Portanto x é da forma

$$x = (1-s)[(x_o + x_1a + x_2b + x_3ab) + (x_4 + x_5a + x_6b + x_7ab)u]$$

com $x_i \in QX$, onde X é um transversal de $\langle s \rangle$ em $\mathcal{Z}(E \times K_8)$.

Pelo lema 2.2, temos que $x_o = 0$. Consequentemente, pela parte (iv) da proposição 2.2,

$$0 = x^2 = 2(s-1)(\sum_{i=1}^7 x_i^2) = \sum_{i=1}^7 ((1-s)x_i)^2.$$

Agora notemos que

$$(1-s)x_i \in Q\mathcal{Z}(E \times K_8) \cong \oplus_1^m Q,$$

assim, $\sum_{i=1}^7 ((1-s)x_i)^2 = 0$ em cada componente da soma direta. Portanto

$$(1-s)x_i = 0, \quad i = 1, \dots, 7.$$

Consequentemente $x = 0$. □

Proposição 2.3 *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop finito. Então QL não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se,*

$$L = L(E \times K_8, *, g_o = s).$$

Demonstração. Suponhamos que QL seja um anel sem elementos nilpotentes diferentes de zero. Então, naturalmente, o mesmo acontece com QG . Logo G é um grupo Hamiltoniano pois, G não é abeliano. Então

$$G = A \times E \times K_8$$

onde A é um grupo abeliano no qual todo elemento possui ordem ímpar. Além disso, pelo lema 2.1 e seu corolário, $L = L(G, *, g_o^k = s)$ para algum k ímpar. Suponhamos, por absurdo, que exista elemento a em A com ordem m maior do que 1. Sabemos que

$$Q\langle a \rangle \cong \bigoplus_{d|m} n_d Q(\xi_d) \quad \text{onde } \xi_d \text{ é uma } d\text{-ésima raiz primitiva da unidade}$$

assim, desde que $m = o(a)$ é um número ímpar maior ou igual a três, pelo teorema 1.11, a equação

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0$$

possui solução não trivial em $Q\langle a \rangle$. Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in QA$, tais que, $x_1 \neq 0$ e $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0$. Então o elemento

$$\alpha = (1 - s)((x_1a + x_2b + x_3ab) + (x_4 + x_5a)u)$$

é um elemento não nulo de QL , mas pela (iv) da proposição 2.2, possui quadrado nulo, contradição. De modo que $A = \{1\}$. E assim, $G = E \times K_8$. Observemos ainda que o elemento $h = g_o s$ possui ordem k , como $E \times K_8$ não possui elementos de ordem ímpar diferentes da unidade, segue que $1 = h = g_o s$, resultando que $g_o = s$.

A condição suficiente segue do lema 2.4.

□

Capítulo 3

Elementos Nilpotentes em Anéis de Loop de R. A. Loops Infinitos

O primeiro resultado deste capítulo dá uma caracterização da torção $T(L)$ de um R. A. loop L , que como já vimos no primeiro capítulo, é um subloop normal de L .

O teorema 3.1 dá condições necessárias e suficientes para que um anel de loop de um R. A. loop L não possua elementos nilpotentes diferentes de zero, no caso em que a torção é central em L .

O teorema 3.2 dá condições necessárias e suficientes para que a álgebra de loop QL não possua elementos nilpotentes diferentes de zero, no caso que a torção não é central em L .

Proposição 3.1 *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop. Então, uma e somente uma, das seguintes condições é válida:*

- (i) se $T(L)$ é central em L , então temos que $T(L) = T(G)$ e $g_o \notin T(G)$,
- (ii) se $T(L)$ não é central em L , então existe um subgrupo H de L e um elemento não central $z \in T(L)$, tal que $T(L) = T(H) \cup T(H)z$.
-

Demonstração. (1) Se $T(L)$ é central em L , então temos que

$$T(L) \subset Z(L) = Z(G) \subset G.$$

Consequentemente, $T(L) = T(G)$ e obviamente, neste caso, $g_o \notin T(G)$ (caso contrário teríamos $u \in T(L)$).

(2) Se $T(L)$ é não central em L , então existe $z \in T(L)$ tal que $z \notin Z(L) = N(L)$; logo, existem elementos $x, y \in L$ tais que $(x, y, z) \neq 1$. Consequentemente, como na demonstração do teorema 1.10, $L = L(H, *, h_o)$, onde $H = \langle Z(L), x, y \rangle$ e $h_o = z^2$.

Queremos mostrar que

$$T(L) = T(H) \cup T(H)z.$$

De fato, desde que $L = H \cup Hz$ então para qualquer $w \in T(L)$, temos que, ou $w = h \in H$, resultando $w \in T(L) \cap H = T(H)$, ou $w = hz \in Hz$ e assim

$$w^2 = \begin{cases} h_o h^2, & \text{se } h \in Z(L) \\ h_o s h^2, & \text{se } h \notin Z(L). \end{cases}$$

Desde que $w \in T(L)$ e $\{h_o, s\} \subset Z(T(L))$, temos que $h \in (T(L) \cap H) = T(H)$, de modo que $w \in T(H)z$. Portanto $T(L) \subset T(H) \cup T(H)z$. Observemos que $T(H) \subset T(L)$; assim, para provar a inclusão contrária, é suficiente examinar o caso em que $w \in T(H)z$. Neste caso $w = gz$, para algum $g \in T(H)$. Desde que $L' = \{1, s\} \subset N(L)$, temos que $w^n = s^k g^n z^n$ para algum $k \in \{0, 1\}$ e, portanto, $w \in T(L)$. □

Teorema 3.1 . *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop tal que $T(L)$ é central em L . Então RL não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, R não possui elementos nilpotentes diferentes de zero e $o(g)$ não é divisor de zero em R , para qualquer $g \in T(L)$.*

Demonstração. Devido à inexistência de elementos nilpotentes diferentes de zero em RL temos que o mesmo acontece em $RT(L)$. Desde que $T(L)$ é um grupo abeliano, a condição necessária segue do corolário da proposição 1.2.

Para provar a recíproca, suponhamos que existe elemento $x \in RL$ tal que $x^2 = 0$. Podemos também supor que L é finitamente gerado pois, podemos tomar o subloop gerado pelo suporte de x . Sendo $L/\langle s \rangle$ um grupo abeliano, e desde que para qualquer elemento $\bar{g} \in T(L/\langle s \rangle)$, $o(\bar{g})$ não é divisor de zero em R , novamente pelo corolário da proposição 1.2, temos que $R(L/\langle s \rangle)$ é anel sem elementos nilpotentes não nulos. Portanto, segue que $x \in \Delta_R(L/\langle s \rangle)$ e assim x é da forma:

$$(1) \quad x = (1 - s)(\alpha + \beta u), \quad \text{onde } \alpha, \beta \in R(G).$$

Pela parte (i) da proposição 2.2 temos que

$$(2) \quad x^2 = 2(1 - s)[(\alpha^2 + g_o \beta^* \beta) + \beta(\alpha + \alpha^*)u].$$

Sejam $a, b \in G$ elementos não centrais e X um transversal de $\langle s \rangle$ em $Z(G)$. Então, podemos assumir que α, β são da forma:

$$\alpha = x_o + x_1 a + x_2 b + x_3 ab$$

$$\beta = x_4 + x_5 a + x_6 b + x_7 ab,$$

com $x_i \in RX$, $i = 0, \dots, 7$.

Devido a nossa hipótese de que R não possui elementos nilpotentes diferentes de zero e que $o(g)$ não é divisor de zero em R , para todo $g \in T(G)$, sempre pelo corolário da proposição 1.2, concluímos que $RZ(G)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero. Portanto, pelo lema 2.2, temos que $x_o = 0$.

Assim, $\alpha^* = s\alpha$ e, por (iii) da proposição 2.2, temos que

$$(3) \quad 0 = x^2 = 2(1-s)(\alpha^2 + g_o\beta^*\beta).$$

Desde que $G/T(G)$ é um grupo abeliano finitamente gerado, ele é um grupo totalmente ordenado. Seja $\mathcal{Q}$ um transversal totalmente ordenado de $T(G)$ em G . Então existem $m \in \mathbb{N}$ e um conjunto $Y = \{q_1, q_2, \dots, q_m\} \subset \mathcal{Q}$ tal que $q_i < q_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, $g_o \in Y$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i q_i \quad \text{e} \quad \beta = \sum_{i=1}^m \beta_i q_i,$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in RT(G) = RT(L) \subset RZ(L) = RZ(G)$. Assim, temos que

$$\alpha^2 = \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \alpha_j q_i q_j \quad \text{e} \quad g_o \beta^* \beta = \sum_{i,j=1}^m \beta_i \beta_j g_o q_i^* q_j = \sum_{i,j=1}^m \beta_i \beta_j g_o h_i q_i q_j$$

onde

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{se } q_i \in Z(G) \\ s & \text{se } q_i \notin Z(G). \end{cases}$$

Desde que $q_1^2 < g_o q_1^2$ ou $q_1^2 > g_o q_1^2$, resulta da equação (3) que $((1-s)\alpha_1)^2 = 0$ ou $((1-s)\beta_1)^2 = 0$ respectivamente; portanto, segue que $(1-s)\alpha_1 = 0$ ou $(1-s)\beta_1 = 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $(1-s)\alpha_1 = 0$, neste caso, novamente pela equação (3) obtemos que também $(1-s)\beta_1 = 0$. Repetindo este procedimento um número finito de vezes, chegamos ao final com $(1-s)\alpha_i = 0$ e $(1-s)\beta_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Consequentemente $x = 0$. □

Teorema 3.2 . *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop tal que $T(L)$ não é central em L . Então, a álgebra racional QL não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, somente se, para qualquer elemento não central u em $T(L)$ temos que $u^2 = s$.*

Demonstração. Seja u um elemento não central em $T(L)$. Como antes, existem elementos $a, b \in L$ tais que $L = L(H, *, h_o)$, onde $H = \langle \mathcal{Z}(L), a, b \rangle$ e $h_o = u^2$. Desde que $h_o \in T(L) \cap H = T(H)$, pelo lema 2.1, h_o é uma potência de s e o menor elemento k tal que $h_o^k = s$ é um número ímpar. Seja $h = h_o^{1-k}$; então h possui ordem k e $h_o = hs$.

Se $h \neq 1$ temos que $k \geq 3$. Sabemos que $Q\langle h \rangle \cong \bigoplus_{d|k} n_d Q(\xi_d)$ onde ξ_d é uma d -ésima raiz primitiva da unidade, e assim pelo teorema 1.11, a equação

$$\sum_{i=1}^5 X_i^2 = 0 \quad \text{possui solução não nula em } Q(\xi_k).$$

Tomemos $x_1, x_2, \dots, x_5 \in Q\langle h \rangle$, tais que

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0, \quad \text{e} \quad x_1 \neq 0$$

Façamos

$$x = (1 - s)[(x_1a + x_2b + x_3ab) + (x_4 + x_5a)u],$$

então

$$x^2 = 2(s - 1)\left(\sum_{i=1}^5 x_i^2\right) = 0$$

mas $x \neq 0$, uma contradição. Portanto $h_o = s$ e $u^2 = s$.

Reciprocamente, seja $x \in QL$ tal que $x^2 = 0$. Podemos também supor que L é finitamente gerado (basta considerar o subloop gerado pelo suporte de x). Para qualquer elemento $u \in T(L)$, existem elementos não centrais $a, b \in L$ tais que $L = L(H, *, h_o)$ onde $H = \langle Z(L), a, b \rangle$ e $h_o = u^2$. Portanto, pela prova da proposição 3.1,

$$T(L) = T(H) \cup T(H)u.$$

Observemos que:

- (1) Pela observação 1.12, $T(L)$ é um subloop de L e $T(H)$ é um subgrupo de H .
- (2) Segue da nossa hipótese que para qualquer elemento não central $g \in T(L)$, temos que $g^2 = s$; então $o(g) = 4$.
- (3) Para qualquer elemento central $z \in T(L)$, temos que zu é um elemento não central em $T(L)$. Novamente pela nossa hipótese, $s = (zu)^2 = h_o z^* z = sz^2$. Então temos que $o(z) = 2$.
- (4) Seja N um subgrupo de $T(H)$. Então, ou N é central em $T(H)$ ou existe um elemento não central $n \in N \subset L$. Lembremos que pela nossa hipótese, $n^2 = s$, logo $s \in N$. Portanto, temos que N é um subgrupo normal de $T(H)$; conseqüentemente, neste caso, $T(H)$ é um 2-grupo Hamiltoniano.

Assim, por (1), (2), (3) e (4), temos que, ou

- (5) $T(H)$ é um 2-subgrupo abeliano (portanto central) de $T(L)$ e, neste caso, $T(L)$ é um grupo abeliano da forma $E \times C_4$,

ou

- (6) $T(H)$ é um grupo abeliano de expoente 4 da forma $E \times C_4$ e, neste caso,

$T(L)$ é um 2-grupo Hamiltoniano,

ou

(7) $T(H)$ não é grupo abeliano e, neste caso, $T(L)$ é um 2-loop Hamiltoniano.

Portanto, em qualquer um dos casos, temos que:

$$(8) \quad T(H) \subset E \times K_8.$$

Como sempre, $L/\langle s \rangle$ é um grupo abeliano. Assim pelo corolário da proposição 1.2, temos que $R(L/\langle s \rangle)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero, donde concluímos que $x \in \Delta_R(L/\langle s \rangle)$. Segue que x é da forma

$$x = (1 - s)(\alpha + \beta u) \quad \text{onde } \alpha, \beta, \in RH.$$

Consequentemente, por (i) da proposição 2.2, temos que

$$x^2 = 2(1 - s)[(\alpha^2 + t\beta^*\beta) + \beta(\alpha + \alpha^*)u].$$

Se X é um transversal de $\langle s \rangle$ em $\mathcal{Z}(H)$, podemos considerar α, β escritos na forma

$$\alpha = x_o + x_1a + x_2b + x_3ab$$

$$\beta = x_4 + x_5a + x_6b + x_7ab$$

onde $x_i \in RX$, $i = 0, \dots, 7$. Pelo corolário da proposição 1.2, $\mathcal{QZ}(H)$ não possui elementos nilpotentes diferentes de zero. Portanto, pelo lema 2.2, $x_o = 0$. Pela parte (iii) da proposição 2.2 temos que

$$0 = x^2 = 2(s - 1)(\sum_{i=1}^7 x_i^2).$$

Também, como no teorema 3.1 existe um transversal totalmente ordenado $\mathcal{Q}$ para $T(H)$ em H , tendo um subconjunto $\{q_1, q_2, \dots, q_m\} \subset \mathcal{Q}$ tal que $q_j < q_{j+1}$,

$1 \leq j \leq m-1$ e para todo $i = 1, \dots, 7$ podemos escrever

$$x_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} q_j, \quad \text{onde} \quad \alpha_{ij} \in QT(H), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= 2(s-1) \left(\sum_{i=1}^7 x_i^2 \right) = 2(s-1) \left(\sum_{i=1}^7 \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m (\alpha_{ij} \alpha_{ik}) q_j q_k \right) \right) \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^m \left(2(s-1) \left(\sum_{i=1}^7 (\alpha_{ij} \alpha_{ik}) q_j q_k \right) \right). \end{aligned}$$

Desde que q_1^2 é o menor termo da equação acima, deduzimos que

$$0 = 2(s-1) \sum_{i=1}^7 \alpha_{i1} \alpha_{i1} = 2(s-1) \sum_{i=1}^7 \alpha_{i1}^2 = \sum_{i=1}^7 ((s-1) \alpha_{i1})^2 \in QZ(T(H)).$$

Assim, devido a (8) e ao lema 2.3 temos que $(s-1) \alpha_{i1} = 0$ $i = 1, \dots, 7$.

Similarmente deduzimos que $(s-1) \alpha_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, 7$ e $j = 2, \dots, m$ resultando que $(s-1)x_i = 0$, $i = 1, \dots, 7$. Consequentemente, $x = 0$. $\square$

Pela demonstração do teorema 3.2 acima observamos que podemos reenunciar o resultado da seguinte forma:

Corolário: *Seja L um R. A. loop no qual a torção não é central em L . Então a álgebra racional QL não possui elementos nilpotentes diferentes de zero se, e somente se, uma das seguintes condições se verifica:*

- (i) $T(L)$ é um grupo abeliano de expoente dois,
- (ii) $T(L)$ é o produto direto de um grupo abelino de expoente dois por um grupo cíclico de ordem quatro,

- (iii) $T(L)$ é um grupo Hamiltoniano de expoente quatro,
 - (iv) $T(L)$ é um R. A. loop obtido a partir de um grupo Hamiltoniano de expoente quatro, como no teorema 1.10.
-

Capítulo 4

Nilpotência do Ideal de Aumento

4.1 Ideal de Aumento

Nesta secção resolvemos o problema da nilpotência do ideal de aumento do anel de loop RL de um R. A. loop L e de outros ideais similares. Usaremos livremente o fato de que se L é um R. A. loop e R é um anel de característica 2, então RL também é um anel alternativo [8].

Lema 4.1 . *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop. Então o ideal de aumento $\Delta(L)$ de RL é nilpotente se, e somente se, o ideal de aumento de $\Delta(G)$ de RG é nilpotente.*

Demonstração. A condição necessária é óbvia.

Reciprocamente, suponhamos que $\Delta(G)$ seja nilpotente. Então, pelo lema I.2.21 de [20] temos que G deve ser um p-grupo finito e que R tem característica p^m para algum $m \geq 1$.

Desde que $s \in G$ (pois existem elementos $a, b \in G$ que não comutam) e $\text{o}(s) = 2$ segue que G deve ser um 2-grupo finito e característica de R igual a 2^m , para algum $m \geq 1$.

Lembremos que $|L| = 2|G|$, de modo que $L/\langle s \rangle$ também é um 2-grupo finito. Novamente, pelo lema I.2.21 de [20] concluímos que $\Delta_R(L:\langle s \rangle)$ é nilpotente.

Pela observação 1.9 temos que

$$RL/\Delta_R(L:\langle s \rangle) \cong R(L/\langle s \rangle),$$

pois $\langle s \rangle$ é normal em L .

Suponhamos que r é o grau de nilpotência do ideal de aumento de $L/\langle s \rangle$, temos então que

$$\Delta(L/\langle s \rangle)^r = \bar{0}$$

no quociente $RL/\Delta_R(L:\langle s \rangle)$, isto é, qualquer produto de r elementos de $\Delta_R(L)$ em qualquer que seja o arranjo de parênteses, está em $\Delta_R(L:\langle s \rangle)$.

Mas

$$\Delta_R(L:\langle s \rangle) = RL(1 - s)$$

assim,

$$\Delta(L)^{2(m+1)r} \subset (\Delta_R(L:\langle s \rangle))^{m+1} \subset ((1 - s)RL)^{(m+1)} \subset (1 - s)^{(m+1)}RL = 2^m RL$$

a terceira inclusão da expressão acima é decorrente do fato que $(1 - s)$ é central em RL e associa com qualquer elemento de RL ; a igualdade segue da constatação que $(1 - s)^{m+1} = 2^m(1 - s)$.

Desde que característica de R é igual a 2^m , concluímos que $\Delta(L)$ é nilpotente e que seu grau de nilpotência é menor ou igual a $2(m + 1)r$. $\square$

Corolário Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R . A. loop. Então o ideal de aumento $\Delta(L)$ de RL é nilpotente se, e somente se, L é um 2-loop finito e a característica de R é igual a 2^m , para algum $m \geq 1$.

Teorema 4.1 . Seja H um subloop normal de L . Então o ideal $\Delta_R(L : H)$ é um ideal nilpotente de RL se, e somente se, H é um 2-subloop finito de L e a característica de R é igual a 2^m , para algum $m \geq 1$.

Demonstração. Suponhamos que $\Delta_R(L : H)$ é nilpotente. Desde que $\Delta_R(H)$ está contido em $\Delta_R(L : H)$, temos que $\Delta_R(H)$ é nilpotente, assim, pelo corolário do lema 4.1, segue a tese.

Reciprocamente, suponhamos que $H \triangleleft L$ e que a característica de R é igual a 2^m , para algum $m \geq 1$. Pelo corolário do lema 4.1, segue que $\Delta_R(H)$ é nilpotente.

Primeiramente, vamos trabalhar com a hipótese adicional de que H é associativo.

Neste caso, existe um grupo não abeliano $G \subset L$ que contém $H \cup \mathcal{Z}(L)$, e pela observação 1.7 temos que $L = L(G, *, u^2)$, para qualquer $u \in L \setminus G$.

Claramente $u \notin H$ pois $H \subset G$. Também temos que $H \triangleleft G$ visto que $Hg = gH$ para qualquer $g \in G$ (pois $H \triangleleft L$).

Pela observação 1.10, sabemos que

$$\Delta_R(L : H) = \Delta_R(G : H) + \Delta_R(G : H)u,$$

Seja X um transversal de H em G .

Dado um elemento $\alpha \in \Delta_R(G : H)$ temos que α pode ser escrito na forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^n r_{i,j} x_i (h_j - 1) \text{ onde } r_{i,j} \in R, \ x_i \in X \text{ e } h_j \in H$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$; assim,

$$\alpha^* = \sum_{i=1}^n r_{i,j} (h_j^* - 1) x_i^*,$$

$$\text{mas } (h_j^* - 1) x_i^* = \begin{cases} x_i (h_j^* - 1), & \text{se } (x_i, h_j) = 1 \\ s x_i (h_j^* - 1), & \text{se } (x_i, h_j) = s \end{cases} = \begin{cases} x_i (h_j - 1) & \text{ou} \\ s x_i (h_j - 1) \end{cases}$$

de modo que $\alpha^* \in \Delta_R(G : H)$.

Assim, se $w \in \Delta_R(G : H)^t$ então $w^* \in \Delta_R(G : H)^t$, para qualquer número natural $t \geq 1$.

Vamos provar, por indução, que

$$\Delta_R(L : H)^t \subset \Delta_R(G : H)^t + \Delta_R(G : H)^t u.$$

Para $t = 1$ a afirmação vale. Suponhamos que para todo $k \leq t - 1$ tenhamos

$$\Delta_R(L : H)^k \subset \Delta_R(G : H)^k + \Delta_R(G : H)^k u$$

Seja $x \in \Delta_R(L : H)^t$, então existem elementos

$$y \in \Delta_R(L : H)^r \text{ e } z \in \Delta_R(L : H)^{t-r} \text{ para algum } r \in \{1, 2, \dots, t-1\},$$

tais que $x = yz$. Assim, pela hipótese de indução, existem elementos y_1, y_2 em $\Delta_R(G : H)^r$ e z_1, z_2 em $\Delta_R(G : H)^{t-r}$ tais que

$$y = y_1 + y_2 u$$

e

$$z = z_1 + z_2 u,$$

de modo que

$$x = yz = (y_1 z_1 + z_2^* y_2) + (y_2 z_1^* + z_2 y_1) u.$$

Desde que, pelo observado acima, $z_2^*, z_1^* \in \Delta_R(G : H)^{t-r}$ temos que x está em $\Delta_R(L : H)^t$. Portanto segue a afirmação.

Desde que $\Delta_R(G : H)$ é nilpotente, concluímos que $\Delta_R(L : H)$ é nilpotente, e que seu grau de nilpotência é igual ao grau de nilpotência de $\Delta_R(G : H)$.

Consideremos agora o caso em que H não é associativo. Nesta situação existem elementos $a, b, u \in H$ tais que $(a, b, u) = s$. Como sempre, segue que, $L = L(G, *, g_o)$ onde $g_o = u^2$ e $G = \langle \mathcal{Z}(L), a, b \rangle$.

Seja X um transversal de H em L . Desde que a, b, u são elementos de H , claramente, $X \subset \mathcal{Z}(L) = N(L)$.

Assim, todo elemento $w \in \Delta_R(L : H)$ pode ser escrito na forma

$$w = \sum_{i,j}^n r_{i,j} x_i (h_i - 1) \text{ onde } r_{i,j} \in R, x_i \in \mathcal{Z}(L) = N(L) \text{ e } h_i \in H,$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Analisemos um elemento de $\Delta_R(L : H)^t$, ou seja, um elemento que é um produto de t elementos com a mesma forma de w em algum arranjo de parênteses. Tendo em conta a propriedade distributiva e a definição de $\Delta_R(L : H)$, é suficiente analisar os termos da forma

$$\alpha = \prod_{i=1}^t x_i (h_i - 1)$$

onde $(\prod_{i=1}^n)$ representa o produto, em algum determinado arranjo de parênteses.

Desde que $x_i \in \mathcal{Z}(L) = N(L)$ segue que $\alpha = (x_1 x_2 x_3 \dots x_t)(\prod_{i=1}^t (h_i - 1))$.
 Notemos que $\prod_{i=1}^t (h_i - 1) \in \Delta_R(H)^t$ e assim

$$\Delta_R(L : H)^t \subset RL\Delta_R(H)^t.$$

Sendo a inclusão contrária evidente, segue que

$$\Delta_R(L : H)^t = RL\Delta_R(H)^t.$$

Desde que, como já vimos acima, $\Delta_R(H)$ é nilpotente temos que $\Delta_R(L : H)$ é nilpotente e seu grau de nilpotência é igual ao grau de nilpotência de $\Delta_R(H)$. $\square$

4.2 Ideais Idempotentes

No estudo de anéis de grupo, a existência de ideais idempotentes em $\mathbb{Z}G$ desempenha um papel importante, pois ela está ligada à solubilidade do grupo dado. Este estudo começa com dois artigos de T. Akasaki [1], [2]. Ele prova que um grupo finito G é solúvel se, e somente se, $\mathbb{Z}G$ não contém ideais idempotentes contidos no ideal de aumento ([2], teorema 2).

Este resultado foi melhorado por K.W. Roggenkamp [17] e estendido por P.F. Smith ([21], teorema 2.2) que provou que, se G é um grupo policíclico, então $\mathbb{Z}G$ não contém ideais idempotentes não triviais.

No teorema 4.2 provamos um análogo do teorema de Akasaki para R. A. loops e, no teorema 4.3, provamos que se I é um ideal não nulo de $\mathbb{Z}L$ então $I + I^* = \mathbb{Z}L$.

Lema 4.2 *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop e I um ideal idempotente do anel de loop $\mathbb{Z}L$ contido em $\Delta_{\mathbb{Z}}(L : < s >)$. Então I é o ideal nulo.*

Demonstração. Suponhamos que $L = L(G, *, g_o)$ é um R. A. loop e que I é um ideal idempotente do anel de loop $\mathbb{Z}L$ tal que $I \subset \Delta_{\mathbb{Z}}(L : < s >)$, vamos provar que $I = \{0\}$.

De fato, seja $x \in I$ então, para todo número natural $n \geq 1$, existem elementos $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ tais que $x = \prod_{i=1}^n x_i$, onde $(\prod_{i=1}^n)$ significa o produto dos elementos x_i em algum arranjo de parênteses (pois $I^n = I$). Desde que

$I \subset \Delta_{\mathbb{Z}}(L : < s >)$, existem elementos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}L$ tais que para $i = 1, \dots, n$ $x_i = (1 - s)\alpha_i$.

$$\text{Logo, } x = \prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n (1 - s)\alpha_i = 2^{n-1} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)$$

a penúltima igualdade é consequência do fato que $s \in \mathcal{Z}(L) = \mathcal{N}(L)$, donde segue que o elemento $(1 - s)$ é central em $\mathbb{Z}L$ e associa com todos os elementos de $\mathbb{Z}L$. A última igualdade segue da constatação de que $(1 - s)^n = 2^{n-1}(1 - s)$.

Assim para todo número natural $n \geq 1$ temos que existem elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}L$ tais que

$$x = 2^{n-1}(1 - s) \prod_i^n \alpha_i$$

o que nos permite concluir que $x = 0$. Portanto $I = \{0\}$. □

Teorema 4.2 *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop finito e I um ideal idempotente de $\mathbb{Z}L$ tal que $I \subset \Delta_{\mathbb{Z}}(L : G)$ então $I = \{0\}$.*

Demonstração. Suponhamos que $L = L(G, *, g_o)$ é um R. A. loop e que I é um ideal idempotente de $\mathbb{Z}L$ contido em $\Delta_{\mathbb{Z}}(L : G)$. Pela observação 1.10 sabemos que

$$\Delta_{\mathbb{Z}}(L : G) = \Delta_{\mathbb{Z}}(G) + \Delta_{\mathbb{Z}}(G)u.$$

Tomemos o seguinte subconjunto de G

$$J = \{\beta \in \mathbb{Z}G : \exists (\delta \in \mathbb{Z}G) / \beta + \delta u \in I\}$$

É fácil verificar que J é um ideal de $\mathbb{Z}G$ e que $J \subset \Delta_{\mathbb{Z}}(G)$. Vamos provar que J é ideal idempotente de $\mathbb{Z}G$.

De fato, seja $\beta \in \mathbb{Z}G$ então existe elemento $\delta \in \mathbb{Z}G$ tal que o elemento $z = (\beta + \delta u) \in I$, então

$$(\beta^*u + \delta g_o) \in I \implies g_o\delta \in J \implies \delta \in J$$

temos também que

$$(\beta^*u + \delta g_o)u \in I \implies (\beta^*g_o + g_o\delta u) \in I \implies g_o\beta^* \in J \implies \beta^* \in J$$

Agora, desde que $(\beta + \delta u) \in I$ temos que existem elementos $z = z_1 + z_2u$ e $w = w_1 + w_2u$ no ideal I tais que

$$\beta + \delta u = zw = (z_1 + z_2u)(w_1 + w_2u) = (z_1w_1 + g_o w_2^* z_2) + (w_2z_1 + z_2w_1^*)u$$

donde segue que $\beta = z_1w_1 + g_o w_2^* z_2$ onde $z_1, w_1, z_2, w_2^* \in J$. Consequentemente $\beta \in J^2$, resultando que J é um ideal idempotente de $\mathbb{Z}G$. Agora, notemos que G é solúvel pois $G^{(2)} = [G', G'] = \{1\}$ e é finito por hipótese. Assim, pelo teorema 2 de [2], segue que $J = \{0\}$ e consequentemente $I = \{0\}$. $\square$

Teorema 4.3 *Seja $L = L(G, *, g_o)$ um R. A. loop de posto finito e I um ideal idempotente de $\mathbb{Z}L$. Então ou I é o ideal nulo ou $I + I^* = \mathbb{Z}L$.*

Demonstração. Suponhamos que $L = L(G, *, g_o)$ é um R. A. loop e que I é um ideal idempotente do anel de loop $\mathbb{Z}L$. Observemos que I^* é também um ideal idempotente de $\mathbb{Z}L$.

(1) Desde que $L/\langle s \rangle$ é um grupo abeliano de posto finito, claramente $L/\langle s \rangle$ é um grupo policíclico, segue portanto do teorema 2.2 de [21] que $\mathbb{Z}(L/\langle s \rangle)$ não possui ideais idempotentes não triviais.

(2) É fácil ver que G é solúvel pois $G^{(2)} = [G', G'] = \{1\}$. Também temos que G satisfaz a condição maximal para subgrupos pois sendo L de posto finito, o mesmo acontece com G , de modo que, G é um grupo policíclico. Assim, pelo teorema 2.2 de [21], concluimos que $\mathbb{Z}G$ também não possui ideais idempotentes não triviais.

(3) Da observação 1.9 temos que

$$\mathbb{Z}L/\Delta_{\mathbb{Z}}(L : \langle s \rangle) \cong \mathbb{Z}(L/\langle s \rangle).$$

Desde que $I^2 = I$ temos que $\bar{I}^2 = \bar{I}$, assim por (1)

$$\bar{I} = \bar{0} \quad \text{ou} \quad \bar{I} = \mathbb{Z}(L/\langle s \rangle),$$

e de (3) segue que

$$I \subset \Delta_{\mathbb{Z}}(L : \langle s \rangle) \quad \text{ou} \quad I = \mathbb{Z}L + \Delta_{\mathbb{Z}}(L : \langle s \rangle).$$

Se $I \subset \Delta_{\mathbb{Z}}(L : \langle s \rangle)$, do lema 4.2 segue que $I = \{0\}$.

Se $I = \mathbb{Z}L + \Delta_{\mathbb{Z}}(L : \langle s \rangle)$; temos que existe elemento $\alpha \in \mathbb{Z}L$ tal que $1 + \alpha(1 - s) = x \in I$, logo, $(1 + s) = x(1 + s)$ donde concluimos que $(1 + s) \in I$.

Como no teorema 4.2 anterior o subconjunto de G

$$J = \{\beta \in \mathbb{Z}G : \exists (\delta \in \mathbb{Z}G) / \beta + \delta u \in I\}$$

é um ideal idempotente de $\mathbb{Z}G$.

Por (2), $\mathbb{Z}G$ não possui ideais idempotentes não triviais, então temos que $J = \mathbb{Z}G$, pois $(1 + s) \in J$.

Assim, existe elemento $\gamma \in \mathbb{Z}G$, tal que o elemento $y = (1 + \gamma u) \in I$. Então

$$y^* = (1 + s\gamma u) \in I^* \implies y + y^* = (2 + (s + 1)\gamma u) \in I + I^*.$$

Consequentemente $2 \in I + I^*$, pois $(1 + s) \in I$. Mas

$$2 = (1 - s) + (1 + s) \implies (1 - s) \in I + I^*$$

desde que

$$1 + \alpha(1 - s) = x \in I, \text{ temos que } 1 \in I + I^*$$

e consequentemente $I + I^* = \mathbb{Z}L$. □

Bibliografia

- [1] Akasaki, T., *Idempotent Ideals in Integral Group Rings*, Journal of Algebra 23, 343-346, 1972.
- [2] Akasaki, T., *Idempotent Ideals in Integral Group Rings II*, Arch. Math. 24, 126-128, 1973.
- [3] Ayoub, R.G., Ayoub, C., *On the Group Ring of a Finite Abelian Group*, Bull. Austral. Math. Soc. 1, 245-261, 1969.
- [4] Bruck, R.H., *A Survey of Binary Systems*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Band 30, Springer, Verlag, Berlin, 1958.
- [5] Chein, O., *Moufang Loops of Small Order*, Trans. Amer. Math. Soc. 188, 31-51, 1974.
- [6] Chein, O., *Moufang Loops of Small Order*, Memoirs Amer. Math. Soc. 197, 13, 1978.
- [7] Chein, O. and Goodaire, E.G., *Loops whose Loop Rings are Alternative*, Comm. in Algebra 14, 293-310, 1986.

- [8] Chein, O. and Goodaire, E.G., *Loops whose Loop Rings in Characteristic 2 are Alternative*, Comm. in Algebra 18(3), 659-688, 1990.
- [9] Goodaire, E.G., *Alternative Loop Rings*, Publ. Math. Debrecen 30, 31-38, 1983.
- [10] Goodaire, E.G. and Parmenter, M.M., *Semi-simplicity of Alternative Loop Rings*, Acta Math. Hung., 50, 3-4, 241-248, 1987.
- [11] Goodaire, E.G. and Parmenter, M.M., *Units in Alternative Loop Rings*, Israel J. of Math., 53, 209-216, 1986.
- [12] Goodaire, E.G. e Polcino Milies, C.F., *Isomorphisms of Integral Alternative Loop Rings*, Rend. Círcolo Mat. Palermo, II, 37, 126-135, 1988.
- [13] Goodaire, E.G. e Polcino Milies, C.F., *Torsion Units in Alternative Loop Rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 107 (1), 7-15, 1989.
- [14] Moser, C., *Représentation de -1 Comme Somme de Carrés dans un Corps Cyclotomique Quelconque*, J. Number Theory 5, 139-141, 1973.
- [15] Paige, L.J., *A Theorem on Commutative Power Associative Loop Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 6, 279-280, 1955.
- [16] Passman, D.S., *The Algebraic Structure of Group Rings*, John Wiley, New York, 1977.
- [17] Roggenkamp, K.W., *Integral Group Rings of Solvable Finite Groups have no Idempotent Ideals*, Arch. Math. 25, 125-128, 1974.

- [18] Schafer. R.D., *Introduction to Non-Associative Algebras*, Academic Press, 1966.
- [19] Sehgal, S.K., *Nilpotent Elements in Group Rings*, Manuscripta Math. 15, 65-80, 1975.
- [20] Sehgal, S.K., *Topics in Groups Rings*, Marcel Dekker, Inc. New York. 1978
- [21] Smith, P.F., *A Note on Idempotent Ideals in Group Rings*, Arch. Math. Vol. XXVII, 22-27, 1976.