**A aplicação de Gauss de superfícies
de Riemann em R^3 , R^4 , H^3 e H^4 .**

Dulce Mary de Almeida

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria diferencial**
Orientadora: **Profa. Dra. Célia Contin Góes**

-São Paulo, Setembro de 1993-

A minha mãe,

Cleusa;

e ao meu filho,

Heitor.

Resumo

Este trabalho baseia-se nos artigos de Hoffman e Osserman sobre aplicações de Gauss de superfícies de Riemann imersas em $\mathbb{R}^n$ e os casos particulares do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Entre os resultados considerados está um teorema de representação em termos da aplicação de Gauss, para superfícies em $\mathbb{R}^n$, cujo vetor curvatura média nunca se anula. Esta representação pode ser considerada como uma generalização do teorema de representação de Kenmotsu para superfícies em $\mathbb{R}^3$, e como um complemento do teorema de representação para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$.

Nesta dissertação, aplica-se a teoria de Hoffman e Osserman aos casos de imersões de Riemann, mínimas, em $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{H}^4$. Uma referência sobre o assunto é o artigo de Góes e Simões.

Este artigo motiva considerações análogas para imersões em $\mathbb{H}^3$ com curvatura média identicamente um. Tais considerações são parte original desta dissertação.

Entre os resultados originais obtidos, tem-se:

(A)- Fórmulas que fornecem as curvaturas normal e Gaussiana, em função da aplicação de Gauss para superfícies imersas em $\mathbb{H}^4$.

(B)- Um teorema de representação para superfícies imersas em $\mathbb{H}^3$ com curvatura média constante um.

(C)- Uma nova prova do resultado de Bryant: a aplicação de Gauss para superfícies imersas em $\mathbb{H}^3$, com curvatura média identicamente um, é analítica.

Abstract

This work is based on Hoffman and Osserman's paper on the Gauss map of Riemann surfaces immersed in $\mathbb{R}^n$ and the particular cases of $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$. Among the results that we considered there is a representation theorem in terms of the Gauss map for surfaces in $\mathbb{R}^n$ whose mean curvature is never zero. This representation can be considered as both as generalization of the Kenmotsu representation theorem for surfaces in $\mathbb{R}^3$ and as a complement of the representation theorem for minimal surfaces in $\mathbb{R}^n$.

In this dissertation we applied Hoffman and Osserman's theory to the cases of minimal Riemann immersions in $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{H}^4$. One reference about this subject is Goes and Simões's paper.

This paper motivated analogous considerations for immersions in $\mathbb{H}^3$ with identically one mean curvature. Such considerations are the original part of this dissertation.

Among the original results obtained, we have:

(A)- Formulas that give the Gaussian and normal curvatures in function of the Gauss map of surfaces immersed in $\mathbb{H}^4$.

(B)- A representation theorem for surfaces immersed in $\mathbb{H}^3$ with constant one mean curvature.

(C)- A new proof of the Bryant result: the Gauss map of surfaces in $\mathbb{H}^3$ with identically one mean curvature is holomorphic.

CONTEÚDO

1 - INTRODUÇÃO	4
2 - CAPÍTULO I -	
A aplicação de Gauss de superfícies em R^n	7
3 - CAPÍTULO II -	
Superfícies em R^3 e R^4	18
SUPERFÍCIES EM R^3	18
SUPERFÍCIES EM R^4	32
4 - CAPÍTULO III -	
Espaços hiperbólicos	53
5 - CAPÍTULO IV -	
Superfícies mínimas em H^3 e H^4	63
SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM H^3	63
SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM H^4	72
6 - CAPÍTULO V -	
Superfícies em H^3 com curvatura média identicamente um	77
7 - BIBLIOGRAFIA	88

Introdução

O início desta dissertação tem um caráter abrangente, abordando em linhas gerais alguns resultados da teoria sobre aplicação de Gauss de superfícies imersas conformemente em $\mathbb{R}^n$.

Este assunto foi amplamente estudado e possui vasta referência bibliográfica. Em primeira instância o capítulo *I* baseia-se no artigo de Hoffman e Osserman [15] e as principais questões consideradas são:

1)- Dado uma superfície de Riemann S_0 , e uma imersão conforme $X: S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$, que propriedades possui a aplicação de Gauss de S ?

2)- Inversamente, dado uma aplicação $G: S_0 \rightarrow G_{2,n}$, definida sobre uma superfície de Riemann S_0 , sob que condições existe uma imersão X de S_0 sobre uma superfície S em $\mathbb{R}^n$, tal que G é a aplicação de Gauss de S .

Motivados por tais questões estabelece-se condições necessárias e suficientes, para existência e unicidade de imersões conforme de uma superfície de Riemann S_0 em $\mathbb{R}^n$ com uma aplicação de Gauss pré-estabelecida.

Obtem-se, essencialmente, uma representação para superfícies em $\mathbb{R}^n$ cujo vetor curvatura média nunca se anula, em função da aplicação de Gauss. Esta representação pode ser considerada como uma generalização do teorema de representação de Kenmotsu em $\mathbb{R}^3$ [18, Teorema 4], e como um complemento para o teorema de representação para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$ [13, Teorema 3.1].

No capítulo *II*, estuda-se particularmente dois casos de interesse especial, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ [16]. Examinando a forma tomada pelos resultados gerais, obtem-se resultados adicionais, que dependem da forma especial correspondente a Grassmanniana em cada caso: uma esfera em $\mathbb{R}^3$ e um produto de esferas de $\mathbb{R}^4$.

Especificamente, no $\mathbb{R}^3$, é dada uma prova particular do teorema de Ruh e Vilms [23], de que a aplicação de Gauss de uma superfície em $\mathbb{R}^n$ é harmônica se, e somente se, a superfície tem vetor curvatura média paralelo.

Apresenta-se também uma prova do importante resultado de Kenmotsu, que toda aplicação harmônica g de uma superfície de Riemann S_0 na esfera unitária S^2 , é localmente a aplicação de Gauss de uma superfície de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$. A prova

apresentada difere daquela dada por Kenmotsu, pois determina-se a superfície a partir somente da aplicação de Gauss, enquanto que ele prescreve ambas, a aplicação de Gauss e a função curvatura média.

No $\mathbb{R}^4$ consegue-se uma nova prova dos teoremas clássico de Blaschke [3] e Chern e Spanier [7], a respeito da área da imagem das projeções g_1, g_2 da aplicação de Gauss $G = (g_1, g_2)$: se J_1 e J_2 são os jacobianos de g_1 e g_2 respectivamente, então $K = J_1 + J_2$ e $K_n = J_1 - J_2$ onde K e K_n são as curvaturas Gaussiana e normal da superfície S em $\mathbb{R}^4$.

Assumindo que $G = (g_1, g_2)$ é ao mesmo tempo harmônica e conforme e que nem g_1 e nem g_2 são holomorfas, produz-se um teorema de existência para superfícies mínimas em S^3 análogo ao teorema clássico de Weiertrass-Enneper ([21, §8]) de representação integral para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

O fato do modelo do semi-hiperplano $\mathbb{R}_+^n$ para o espaço hiperbólico ser conforme ao espaço $\mathbb{R}^n$, sugere a utilização da teoria desenvolvida nos artigos [15, 16] para o estudo de imersões em $\mathbb{H}^n$.

Dada uma superfície m -dimensional M e uma imersão conforme de M em $\mathbb{H}^n$, as métricas $< , >$ e $(,)$ induzem sobre M métricas que são mutuamente conformes. No capítulo *III*, compara-se entidades geométricas induzidas sobre M por estas duas métricas, tais como conexões Levi-Civita, vetores curvatura média e pontos umbílicos.

Também no capítulo *III*, consegue-se um resultado original (Proposições (3.6) e (3.7)), que pode ser considerado como uma extensão dos teoremas clássicos de Blaschke e Chern e Spanier já citados anteriormente, para superfícies imersas em $\mathbb{H}^4$. O curioso deste resultado é que embora a curvatura Gaussiana de uma superfície S em $\mathbb{H}^4$ se relacione com os fatores da aplicação de Gauss $\tilde{G} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$ de forma um pouco diferente que para superfícies em $\mathbb{R}^4$, a conclusão para curvatura total é análoga. Isto é, dada uma superfície orientada, compacta, imersa em $\mathbb{H}^4$, sua curvatura total é igual a soma das áreas algébricas das imagens dos fatores da aplicação de Gauss.

No capítulo *IV* obtem-se, em analogia ao $\mathbb{R}^n$, teoremas de representações para superfícies mínimas em $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{H}^4$ em termos da aplicação de Gauss.

No último capítulo obtem-se, analogamente, um teorema de representação para superfícies com curvatura média identicamente um em $\mathbb{H}^3$ em termos da aplicação de Gauss. Esse teorema permite definir uma “nova” aplicação de Gauss, equivalente a dada por Bryant [4], e fornece uma nova prova de um resultado de Bryant que diz que essa “nova”

aplicação de Gauss para superfícies de curvatura média constante igual a um em $\mathbb{H}^3$ é analítica.

Nesta oportunidade expresso meus agradecimentos à professora Célia Contin Góes pela dedicação e paciência com que me orientou e também a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta dissertação.

Capítulo 1

A aplicação de Gauss de Superfícies em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo estuda-se a geometria da aplicação de Gauss generalizada para superfícies S em $\mathbb{R}^n$, enfatizando aquelas decorrentes da geometria de S em $\mathbb{R}^n$ e da estrutura conforme de S . Com este fim, tem lugar a primeira definição, formulada como segue.

Definição 1.1 *Uma superfície S em $\mathbb{R}^n$ é um par (S_0, X) , onde S_0 é uma superfície de Riemann e $X: S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação localmente conforme.*

Se $z = \zeta + i\xi$ é um parâmetro local sobre a superfície de Riemann S_0 , e $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ são coordenadas em $\mathbb{R}^n$, então a aplicação definindo S é dada localmente na forma:

$$X(z) = (x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z)) \quad (1.1)$$

A conformidade da aplicação X é expressa por:

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right\| = \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\| \neq 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\rangle = 0 \quad (1.2)$$

isto é, ζ, ξ são parâmetros isotérmicos locais para S .

Usando (1.2) e as derivadas complexas

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - i \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + i \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (1.3)$$

tem-se

$$ds^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right\|^2 d\zeta^2 + \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\|^2 d\xi^2 = \lambda^2 |dz|^2 \quad \text{com} \quad \lambda^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\|^2 = 2 \left\| \frac{\partial X}{\partial z} \right\|^2 \quad (1.4)$$

onde

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial z} \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial x_k}{\partial z} \right|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial x_k}{\partial \zeta} - i \frac{\partial x_k}{\partial \xi} \right|^2 \quad (1.5)$$

Lema 1.1 Dada uma superfície S em $\mathbb{R}^n$, a seguinte relação se verifica sobre S :

$$\frac{4}{\lambda^2} X_{z\bar{z}} = \frac{4}{\lambda^2} X_{\bar{z}z} = \Delta X = 2H \quad (1.6)$$

onde H é o vetor curvatura média de S , e ΔX é o operador Laplace-Beltrami de X sobre S .

Demonstração: As duas primeiras igualdades são imediatas de (1.3) e da definição

$$\Delta X = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} \right).$$

A última igualdade segue conforme demonstração abaixo.

Derivando as relações (1.2) em relação a ζ e ξ tem-se que $\Delta X(z) \in (T_{X(z)}S)^\perp$, onde $(T_{X(z)}S)^\perp$ denota o espaço normal à superfície S em $X(z)$.

Dado $n(z) \in (T_{X(z)}S)^\perp$, a curvatura média de S na direção $n(z)$, denotada por $H(n(z))$, satisfaz:

$$H(n(z)) = \frac{1}{2\lambda^2} \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}, n(z) \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \Delta X, n(z) \rangle$$

pois os parâmetros são isotérmicos.

Define-se a função curvatura média como:

$$\begin{aligned} H: (T_{X(z)}S)^\perp &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (n(z)) &\longmapsto H(n(z)) \end{aligned}$$

A aplicação H assim definida é um funcional linear e portanto existe um único $H \in (T_{X(z)}S)^\perp$ tal que $H(n(z)) = \langle n(z), H \rangle, \forall n(z) \in (T_{X(z)}S)^\perp$. O vetor H é o vetor curvatura média de S em $X(z)$.

Segue que $\langle \Delta X, n \rangle = 2 \langle H, n \rangle, \forall n \in (T_{X(z)}S)^\perp$. Em particular para $n = \Delta X - 2H$ tem-se

$$\langle \Delta X - 2H, \Delta X - 2H \rangle = 0 \implies \Delta X = 2H.$$

■

Definição 1.2 *Sejam: S uma superfície em $\mathbb{R}^n$, $G_{2,n}$ a Grassmanniana dos 2-planos orientados em $\mathbb{R}^n$ e $T_{X(p)}S$ o espaço tangente à superfície S em $X(z)$. A aplicação $G: S_0 \longrightarrow G_{2,n}$ definida por $G(p) = T_{X(p)}S$ é a aplicação de Gauss Generalizada de S .*

Lema 1.2 *Existe uma bijeção entre $G_{2,n}$ e a hiperquádrica $Q_{n-2} = \{[z] \in \mathbb{C}P^{n-1} / z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \text{ e } \sum_{k=1}^n z_k^2 = 0\}$ do espaço projetivo complexo $(n-1)$ -dimensional.*

Demonstração: A equivalência das afirmações abaixo é imediata

- a) $[(z_1, z_2, \dots, z_n)] \in Q_{n-2}$ com $z_k = a_k + ib_k \quad 1 \leq k \leq n$
b) $\|A\| = \|B\| \neq 0$ e $\langle A, B \rangle = 0$ com $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Seja Π_z o plano orientado gerado pelos vetores $A = \text{Re}z$ e $B = \text{Im}z$, nessa ordem, e seja

$$\begin{aligned} \Upsilon: Q_{n-2} &\longrightarrow G_{2,n} \\ [z] &\longmapsto \Pi_z \end{aligned}$$

i) Υ está bem definida:

Dados $[z] = [w] \in Q_{n-2}$ existe $\mu = \mu_1 + i\mu_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) = \mu(w_1, w_2, \dots, w_n) \implies \begin{cases} \text{Re}z = \mu_1 \text{Re}w - \mu_2 \text{Im}w \\ \text{Im}z = \mu_1 \text{Im}w + \mu_2 \text{Re}w \end{cases} \implies \Pi_z = \Pi_w$$

ii) Υ é sobrejetora:

Dado um 2-plano orientado $\Pi \in G_{2,n}$, existe um par ordenado (A, B) de vetores ortonormais, $A, B \in \mathbb{R}^n$, gerando Π (a ordem dependendo da orientação). Pelas afirmações equivalentes segue que existe $[A + iB] \in Q_{n-2}$, tal que, $\Upsilon([A + iB]) = \Pi$.

iii) Υ é injetora:

Dados $[z]$ e $[w] \in Q_{n-2}$ tal que $\Pi_z = \Pi_w$, pelas definições de Π_z e Π_w ,

$\exists \theta \in [0, \pi]$ tal que :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Re}w}{|\text{Re}w|} &= \cos\theta \frac{\text{Re}z}{|\text{Re}z|} + \sin\theta \frac{\text{Im}z}{|\text{Im}z|} \implies \text{Re}w = \frac{|\text{Re}w|}{|\text{Re}z|} (\cos\theta \text{Re}z + \sin\theta \text{Im}z) \\ \frac{\text{Im}w}{|\text{Im}w|} &= -\sin\theta \frac{\text{Re}z}{|\text{Re}z|} + \cos\theta \frac{\text{Im}z}{|\text{Im}z|} \implies \text{Im}w = \frac{|\text{Re}w|}{|\text{Re}z|} (-\sin\theta \text{Re}z + \cos\theta \text{Im}z) \end{aligned}$$

$$\implies w = \frac{|\text{Re}w|}{|\text{Re}z|} e^{-i\theta} z \implies [w] = [z].$$

■

Usando a identificação de Q_{n-2} com $G_{2,n}$ dada pela Υ , a correspondência do plano tangente à S , gerado por $\frac{\partial X}{\partial \zeta}, \frac{\partial X}{\partial \xi}$, ao ponto da quádrlica Q_{n-2} e ainda o fato de que $[z] \in Q_{n-2}$ se, e somente se, $[\bar{z}] \in Q_{n-2}$, define-se:

Definição 1.3 *A aplicação de Gauss Generalizada de uma superfície S em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $G: S_0 \longrightarrow Q_{n-2}$ definida localmente por:*

$$G(z) = \left[\frac{\partial X}{\partial z} \right] \quad (1.7)$$

Este capítulo dedica-se basicamente ao seguinte problema de existência e unicidade.

Problema: “Dada uma superfície de Riemann S_0 e uma aplicação $G: S_0 \longrightarrow Q_{n-2}$, existe uma superfície S tal que G é a aplicação de Gauss de S ? Se existe S , ela é única?”

Isto é, procura-se estabelecer condições necessárias e suficientes para que exista uma aplicação conforme $X: S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, localmente, $\left[\frac{\partial X}{\partial z} \right] = [\varphi] = G$ (z parâmetro local sobre S_0) e condições de unicidade para a aplicação X com tal propriedade.

O teorema que fornece as condições necessárias é consequência dos seguintes lemas:

Lema 1.3 *Seja D um domínio em $\mathbb{C}$ e seja $\varphi: D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Uma condição necessária e suficiente para que exista, para cada ponto $z \in D$, uma vizinhança $\tilde{D} \subset D$ e uma aplicação $X: \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $X_z = \varphi$ é que $Im(\varphi_{\bar{z}}) \equiv 0$ em D .*

Demonstração: Dada uma aplicação nas condições do lema, tem-se

$$X_z = \varphi \implies \varphi_{\bar{z}} = \bar{\varphi}_z \implies \varphi_{\bar{z}} = \overline{(\varphi_z)} \implies Im(\varphi_{\bar{z}}) = 0$$

Reciprocamente, a condição $Im(\varphi_{\bar{z}}) \equiv 0$ é precisamente a condição de compatibilidade do sistema $X_z = \varphi$, portanto a existência local segue do teorema de existência de soluções de equações diferenciais parciais. ■

Lema 1.4 *Seja W um vetor em $\mathbb{C}^n$ da forma $W = A + iB$, onde A e B são vetores reais não nulos satisfazendo $\|A\| = \|B\|$ e $\langle A, B \rangle = 0$. Seja Π o plano gerado por A e B .*

Para cada vetor C em $\mathbb{R}^n$, seja C^π a projeção de C sobre Π . Para cada par de vetores C, D em $\mathbb{R}^n$ seja $U = C + iD \in \mathbb{C}^n$ e seja $U^\pi = C^\pi + iD^\pi$. Então:

$$U^\pi = \langle U, \overline{W} \rangle \frac{W}{\|W\|^2} + \langle U, W \rangle \frac{\overline{W}}{\|W\|^2}$$

Demonstração: A prova é imediata usando-se a bilinearidade do produto interno. ■

Lema 1.5 Dada uma superfície de Riemann S_0 e uma aplicação $G: S_0 \rightarrow Q_{n-2}$, se existe uma superfície regular S descrita por uma aplicação conforme $X: S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, em cada vizinhança coordenada W , $[\frac{\partial X}{\partial z}] = [\varphi]$ onde φ é uma representação de G em coordenadas homogêneas, então $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi\varphi$ para alguma função $\psi: W \subset S_0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ satisfazendo:

$$(\psi\varphi)_{\bar{z}} = X_{z\bar{z}} = \lambda^2 \frac{H}{2} = \|\varphi\|^2 |\psi|^2 H \quad (1.8)$$

$$\|\varphi\|^2 \bar{\psi} H = \varphi_{\bar{z}} + (\log \psi)_{\bar{z}} \varphi \quad (1.9)$$

$$(\varphi_{\bar{z}})^\pi = \eta \varphi \quad \text{onde} \quad \eta = -(\log \psi)_{\bar{z}} = \frac{\langle \varphi_{\bar{z}}, \overline{\varphi} \rangle}{\|\varphi\|^2} \quad \text{e } \Pi \text{ é o plano tangente à } S \quad (1.10)$$

$$(\varphi_{\bar{z}})^\perp = \|\varphi\|^2 \bar{\psi} H \quad (1.11)$$

Demonstração: (1.8) segue do lema (1.1), da igualdade $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi\varphi$ e da relação $\frac{\lambda^2}{2} = \left\| \frac{\partial X}{\partial z} \right\|^2$ dada em (1.4).

A relação (1.9) é a igualdade $(\psi\varphi)_{\bar{z}} = \|\varphi\|^2 |\psi|^2 H$ dividida por ψ .

(1.10) segue do lema (1.4) substituindo U por $\varphi_{\bar{z}}$ e Π pelo plano tangente à superfície S (determinado por φ), juntamente com o fato:

$$[\varphi] \in Q_{n-2} \implies \langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \implies \langle \varphi_{\bar{z}}, \varphi \rangle = 0.$$

As igualdades $\eta = -(\log \psi)_{\bar{z}}$ e $(\varphi_{\bar{z}})^\perp = \|\varphi\|^2 \bar{\psi} H$ são respectivamente as componentes tangente e normal ao plano Π tomadas na expressão (1.9), observado que H é ortogonal ao plano tangente Π . ■

Teorema 1.1 *Seja D um domínio no plano complexo, e seja S uma superfície em $\mathbb{R}^n$ descrita localmente por uma aplicação conforme $X: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Seja φ a aplicação de Gauss de S no sentido de $[\varphi] = [\frac{\partial X}{\partial z}]$ e $\frac{\partial X}{\partial \bar{z}} = \psi\varphi$ para alguma função $\psi: D \longrightarrow \mathbb{C}$. Então as funções : $\eta = \frac{\langle \varphi_z, \overline{\varphi} \rangle}{\|\varphi\|^2}$ e $V = \varphi_{\bar{z}} - \eta\varphi = (\varphi_{\bar{z}})^\perp$ satisfazem, para cada $z \in D$*

$$V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z) \quad \text{onde } R(z) \text{ é um vetor real .} \quad (1.12)$$

Sobre o conjunto onde $V(z) \neq 0$,

$$\text{a função } \alpha(z) \text{ é unicamente definida módulo } 2\pi \text{ e } \alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z). \quad (1.13)$$

Demonstração: Como ψ é uma aplicação de D em $\mathbb{C}$ pode-se representá-la por $\psi(z) = \rho e^{-i\alpha}$ onde $\rho(z) = |\psi(z)|$ e, quando $\rho \neq 0$, $\alpha(z) = -\arctg \frac{\text{Im}\psi(z)}{\text{Re}\psi(z)}$ é unicamente definida módulo 2π .

Por (1.11) tem-se:

$$V = \|\varphi\|^2 \overline{\psi} H = e^{i\alpha} R(z) \text{ onde } R(z) = \|\varphi\|^2 \rho H.$$

Além disso, quando $V \neq 0$ tem-se $\rho \neq 0$ e nestes pontos, usando a relação (1.10), tem-se :

$$\eta_z = -(\log \rho e^{-i\alpha})_{\bar{z}z} \implies \eta_z = -(\log \rho)_{\bar{z}z} + i\alpha_{\bar{z}z}.$$

Como $(\log \rho)_{\bar{z}z}$ e $\alpha_{\bar{z}z}$ são ambos reais segue que $\alpha_{\bar{z}z} = \text{Im}(\eta_z)$.

Convém ainda notar, que nos pontos onde ψ se anula S deixa de ser regular. ■

O lema seguinte garante que as condições (1.12) e (1.13) assim como a condição $V \equiv 0$ embora expressas em termos das coordenadas de φ , dependem somente de G , isto é, da classe projetiva de φ .

Lema 1.6 *Dada uma aplicação $\varphi: D \longrightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, seja $\hat{\varphi} = f\varphi$ onde f é uma função complexa que nunca se anula . Considerando as funções η e V em termos de φ , e as correspondentes $\hat{\eta}$ e $\hat{V}$ em termos de $\hat{\varphi}$, tem-se $\hat{V} = fV$ e sobre o conjunto onde V e $\hat{V}$ são não nulas, as funções α e $\hat{\alpha}$ definidas em (1.12) satisfazem: $\hat{\alpha}_{z\bar{z}} - \text{Im}(\hat{\eta}_z) = \alpha_{z\bar{z}} - \text{Im}(\eta_z)$.*

Demonstração: Seja $f = re^{i\theta}$ com $r = |f|$ e $\theta = \arctg \frac{\text{Im}f}{\text{Re}f}$. Então, segue diretamente da definição que

$$\hat{\eta} = \frac{f_{\bar{z}}}{f} + \eta = (\log f)_{\bar{z}} + \eta = (\log r)_{\bar{z}} + i(\theta)_{\bar{z}} + \eta \quad \text{e}$$

$$\hat{V} = (\hat{\varphi}_{\bar{z}})^\perp = \hat{\varphi}_{\bar{z}} - (\hat{\varphi}_{\bar{z}})^\pi = \hat{\varphi}_{\bar{z}} - \hat{\eta}\hat{\varphi} = f(\varphi_{\bar{z}} - \eta\varphi) = fV.$$

Logo, $V = e^{i\alpha(z)}R(z) \implies \hat{V} = re^{i(\theta+\alpha)}R(z).$

Quando $V \neq 0$ tem-se $\hat{V} \neq 0$ e, portanto, sobre o conjunto onde $V \neq 0$

$\hat{\alpha} = \alpha + \theta$ é uma função definida módulo 2π e satisfaz :

$$\hat{\alpha}_{z\bar{z}} - \text{Im}(\hat{\eta}_z) = \alpha_{z\bar{z}} + \theta_{z\bar{z}} - \text{Im}\{[(\log r)_{\bar{z}} + i\theta_{\bar{z}} + \eta]_z\} = \alpha_{z\bar{z}} - \text{Im}(\eta_z).$$

■

Teorema 1.2 *Seja S uma superfície regular definida por uma imersão conforme $X: S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de uma superfície de Riemann S_0 em $\mathbb{R}^n$. Se o vetor curvatura média de S é diferente de zero em algum ponto e $Y: S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é outra imersão conforme induzindo a mesma aplicação de Gauss $G: S_0 \longrightarrow Q_{n-2}$, então existe uma constante real c e um vetor constante X_0 tal que $X = cY + X_0$.*

Demonstração: Não há perda de generalidade em supor que $Y_z = \hat{\psi}\varphi$ com $\hat{\psi} \equiv 1$, onde φ é uma representação de G em coordenadas homogêneas e z é um parâmetro local sobre $W \subset S_0$.

Do fato de X e Y induzirem a mesma aplicação de Gauss G , tem-se, a existência de uma aplicação $\psi: W \subset S_0 \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $X_z = \psi\varphi$, isto é, $X_z = \psi Y_z$

Definindo as funções $\eta = \frac{\langle \varphi_z, \bar{\varphi} \rangle}{\|\varphi\|^2}$ e $V = \varphi_{\bar{z}} - \eta\varphi$ em termos de φ , tem-se, pelo lema (1.5), que η e V satisfazem as seguintes relações em termos de ψ e $\hat{\psi}$:

$$\begin{aligned} \eta &= -(\log \psi)_{\bar{z}} = -(\log \hat{\psi})_{\bar{z}} = 0 \\ V &= (\varphi_{\bar{z}})^\perp = \|\varphi\|^2 \bar{\psi} H = \|\varphi\|^2 \hat{\psi} \hat{H} = 0 \end{aligned}$$

Da primeira igualdade tem-se que ψ é uma função holomorfa sobre $W \subset S_0$.

Pela segunda relação, nos pontos onde $H \neq 0$ tem-se $V \neq 0$ e $\hat{H} \neq 0$. Do fato de $\hat{H}$ ser um vetor real segue que, nestes pontos ψ é uma função real.

Seja então $z_0 \in S_0$ tal que $H(z_0) \neq 0$, visto que V é uma função contínua, segue que $V \neq 0$ em alguma vizinhança aberta U de z_0 , e portanto, ψ é uma função real em U .

Considerando $\tilde{W}$ tal que $W \cap \tilde{W} \neq \emptyset$, tem-se:

$$X_z = \psi Y_z \quad \text{em} \quad W \quad \text{e} \quad X_{\bar{z}} = \tilde{\psi} Y_{\bar{z}} \quad \text{em} \quad \tilde{W}$$

$$\text{Mas,} \quad X_z = X_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} \quad \text{e} \quad Y_z = Y_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} \quad \text{em} \quad W \cap \tilde{W}$$

Portanto:

$$\psi Y_z = \tilde{\psi} Y_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} \implies \psi Y_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} = \tilde{\psi} Y_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} \implies \psi = \tilde{\psi} \quad \text{em} \quad W \cap \tilde{W}.$$

Assim, ψ está globalmente definida sobre S_0 .

Mas, uma função holomorfa que é real sobre um conjunto aberto tem que ser constante. Então $\psi \equiv c$ (constante real), e portanto, $X_z = c Y_z$ em cada vizinhança parametrizada.

Logo, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ e um vetor constante X_0 , tal que $X - cY = X_0$ em toda S_0 . ■

Comentário: No caso das superfícies mínimas, a unicidade acima não se verifica, na verdade o conjunto de todas as superfícies mínimas locais com a mesma aplicação de Gauss está em correspondência biunívoca com o conjunto das funções holomorfas $\psi: W \subset S_0 \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ver [8, §1]).

Convém notar que, na demonstração do teorema anterior, a conclusão $X_z = \psi Y_z$ com ψ holomorfa sobre $W \subset S_0$, independe de qualquer informação sobre o vetor curvatura média de S .

O teorema seguinte garante que as condições necessárias (1.12) e (1.13), relatadas no Teorema (1.1), são também suficientes para a existência de uma superfície S com uma aplicação de Gauss pré-estabelecida.

Teorema 1.3 *Seja S_0 uma superfície de Riemann simplesmente conexa e seja $G: S_0 \longrightarrow Q_{n-2}$ uma aplicação de S_0 na hiperquádrica complexa Q_{n-2} .*

Seja G representada localmente por uma aplicação φ em $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ e as funções η e V definidas em termos de φ . Então:

1º caso: *Se V nunca se anula sobre S_0 e para cada z é escrito na forma $V(z) = e^{i\alpha(z)} R(z)$, onde $R(z)$ é um vetor real não nulo, e a função $\alpha(z)$ é unicamente*

definida módulo 2π e satisfaz $\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z)$, então existe uma superfície S , regular, descrita por uma aplicação conforme $X: S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, G é a aplicação de Gauss de S .

2º caso: Se $V \equiv 0$ sobre S_0 e S_0 é não compacta então G é a aplicação de Gauss de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Considera-se, para cada ponto $p \in S_0$, uma parametrização no disco $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

Supõe-se que, $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z))$ é uma representação de G em coordenadas homogêneas no domínio D .

Deve-se determinar uma imersão descrita localmente por $X: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\psi: D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, satisfazendo $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi\varphi$ e $(\log\psi)_{\bar{z}} = -\eta$

1º caso: Para definir a função ψ , considera-se, em uma vizinhança $W \subset D$ de cada ponto de D , uma solução ρ da equação diferencial

$$(\log\rho)_{\bar{z}} = -\eta + i\alpha_{\bar{z}}$$

Esta solução existe já que $\text{Im}(\eta_z) = \alpha_{z\bar{z}}$ é a condição de integrabilidade da equação (lema 1.3).

Define-se então $\psi(z) = \rho(z)e^{i\theta(z)}$ onde $\theta(z) = -\alpha(z)$. Portanto,

$$-\eta = (\log\rho)_{\bar{z}} - i\alpha_{\bar{z}} = (\log\rho e^{-i\alpha})_{\bar{z}} = (\log\psi)_{\bar{z}}$$

A relação $\theta(z) = -\alpha(z)$ junto com a hipótese $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ fornece a existência de X , definida numa vizinhança U do ponto, satisfazendo $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi\varphi$. De fato, pelo lema (1.3), existe $X: U \subset W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial z} = \psi\varphi &\iff \text{Im}(\psi\varphi)_{\bar{z}} \equiv 0 \text{ em } W &\iff \text{Im}(\psi_{\bar{z}}\varphi + \psi\varphi_{\bar{z}}) \equiv 0 \\ &\iff \text{Im}[\psi(\varphi_{\bar{z}} - \eta\varphi)] \equiv 0 &\iff \text{Im}(\psi V) \equiv 0 \\ &\iff \text{Im}(\rho e^{i(\theta+\alpha)}R(z)) \equiv 0 &\iff \rho R(z)\text{Im}(e^{i(\theta+\alpha)}) \equiv 0 \\ &\iff \theta + \alpha \equiv 0 \pmod{\pi} \text{ em } W. \end{aligned}$$

A solução global segue do seguinte fato:

Dado $p_0 \in S_0$, existe um aberto $U_0 \subset S_0$ e uma imersão X definida em U_0 que tem G como aplicação de Gauss.

Dado $p' \in$ fronteira de U_0 , existe uma imersão X' e um aberto $\tilde{U}_0$ tal que, X' está definida e tem G como aplicação de Gauss.

A condição $V \neq 0$, implica que o vetor curvatura média de X nunca se anula, portanto pelo Teorema (1.2), existe uma constante real c e um vetor constante X_0 tal que, $X = cX' + X_0$ em $U_0 \cap \tilde{U}_0$.

Considera-se a solução X' , com condição inicial $X(p) = X'(p)$ em algum ponto p em $U_0 \cap \tilde{U}_0$. Como tal solução existe e é única, tem-se que $c = 1$ e X_0 é o vetor nulo, isto é, $X = X'$ em $D_0 \cap \tilde{U}_0$.

Como S_0 é conexa, dados p e $q \in S_0$, $p \neq q$, existe um caminho inteiramente contido em S_0 que liga p a q . Cobrindo este caminho por abertos, e usando o argumento anterior para cada dois abertos que se interceptam, a solução local X se estende para a união destes abertos. O fato de S_0 ser simplesmente conexa garante que a existência de X independe do caminho escolhido. Usando o procedimento anterior para todos os pontos q de S_0 , tem-se a existência global de X sobre S_0 .

2º caso: $V \equiv 0$ sobre S_0

Define-se as funções η e V em termos de φ e observa-se que a equação $\Psi_{\bar{z}} = -\eta$ tem solução no disco D [17, Teorema (1.2.2)]. Então $\psi = e^\Psi$ é solução de $(\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta$, que não tem zeros em D .

Usando então uma solução ψ que não se anula da equação $(\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta$ em D , tem-se

$$(\psi\varphi)_{\bar{z}} = \psi_{\bar{z}}\varphi + \psi\varphi_{\bar{z}} = \psi(\varphi_{\bar{z}} - \eta\varphi) = \psi V \equiv 0 \quad \text{em } D$$

Portanto todas as componentes $(\psi\varphi_k)$ da aplicação $\hat{\varphi} = \psi\varphi$ são holomorfas em D , isto é $G: S_0 \rightarrow Q_{n-2}$ é holomorfa. Segue pelo teorema de representação local das superfícies mínimas que $\hat{\varphi}$ é localmente, a aplicação de Gauss de uma superfície mínima definida em D por :

$$X(\zeta, \xi) = \text{Re} \int_{(\zeta_0, \xi_0)}^{(\zeta, \xi)} (\psi\varphi)(z) dz$$

Para resolver o problema global, observa-se que $\psi\varphi$ é uma aplicação em $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ e, portanto, tem-se pelo menos uma das componentes $\psi\varphi_k$ não identicamente nula sobre D . Seja $\psi\varphi_1 \not\equiv 0$.

Nota-se também que se $\tilde{\varphi}$ é outra representação de G em D , então $\tilde{\varphi} = \delta\varphi$ em D onde δ é uma função que nunca se anula. Então $\hat{\tilde{\varphi}}_1 = \tilde{\psi}\tilde{\varphi}_1 = \delta\tilde{\psi}\varphi_1$ onde $\tilde{\psi}$ é uma solução que nunca se anula da equação $(\log\tilde{\psi})_{\bar{z}} = -\tilde{\eta}$ e $(\tilde{\psi}\tilde{\varphi}_1)$ é analítica em D , portanto, $\hat{\tilde{\varphi}}_1$ tem os mesmos zeros que $\hat{\varphi}_1$ e com as mesmas ordens em D , pois tais zeros são os zeros de φ_1 . Isto significa que a função $\hat{\varphi}_1 = \psi\varphi_1$ é analítica em D e possui zeros isolados de ordens bem definidas, independente da particular representação φ de G .

Da hipótese, S_0 é não compacta, tem-se S_0 conformemente equivalente ao plano ou ao disco .

Considerando então um atlas $\{D_\alpha, \varphi^\alpha\}$ de S_0 , estão determinados pontos isolados de S_0 , correspondentes a todos os zeros das funções φ_1^α , e números inteiros associados a esses pontos, correspondentes às respectivas ordens dos zeros. Existe uma função holomorfa f , em S_0 (disco ou plano), cujos zeros coincidem em posição e ordem com os pontos isolados e os números inteiros associados. Assim, para qualquer φ^α do atlas, tem-se a função $\frac{f}{\varphi_1^\alpha}$ que é diferenciável e não se anula em D_α .

A representação de G dada por $\tilde{\varphi} = \frac{f}{\varphi_1}\varphi = \left(f, f\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, f\frac{\varphi_3}{\varphi_1}, \dots, f\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)$ está globalmente definida em S_0 , pois considerando $D_\alpha \cap D_\beta \neq \emptyset$, tem-se:

$$\frac{f}{\varphi_1^\beta}\varphi^\beta = \left(f, f\frac{\varphi_2^\beta}{\varphi_1^\beta}, \dots, f\frac{\varphi_n^\beta}{\varphi_1^\beta}\right) = \left(f, f\frac{\delta\varphi_2^\alpha}{\delta\varphi_1^\alpha}, \dots, f\frac{\delta\varphi_n^\alpha}{\delta\varphi_1^\alpha}\right) = \frac{f}{\varphi_1^\alpha}\varphi^\alpha \quad \forall \alpha, \beta.$$

Em consequência a superfície $X = Re \int \tilde{\varphi}(z)dz$ definida em $|z| < R \leq \infty$ é uma superfície mínima definida sobre S_0 e tem G como aplicação de Gauss. ■

Capítulo 2

Superfícies em R^3 e R^4

2.1 SUPERFÍCIES EM R^3

Se S é uma superfície imersa em R^3 , a sua aplicação de Gauss G é uma aplicação na quádrlica Q_1 .

A proposição abaixo permite identificar a quádrlica Q_1 com o plano complexo estendido.

Proposição 2.1 *Existe uma isometria entre a quádrlica Q_1 com a métrica de Fubini-Study $ds_1^2 = \frac{2|z \wedge dz|^2}{|z|^4}$, e o plano complexo estendido $\hat{C}$ com a métrica $ds_2^2 = \frac{4}{(1+|w|^2)^2} |dw|^2$.*

Demonstração: Seja $Q_1^* = Q_1 \setminus \{(z_1, z_2, z_3) \in Q_1 / z_3 = 0\} = Q_1 \setminus \{(1, i, 0), (1, -i, 0)\}$ e seja

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{C}^* &\longrightarrow Q_1^* \\ w &\longmapsto \Phi(w) = \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} - w \right), \frac{1}{2} i \left(w + \frac{1}{w} \right), 1 \right) \right] = [(1 - w^2, i(1 + w^2), 2w)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

que é uma aplicação inversível e sua inversa é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}: Q_1^* &\longrightarrow \mathcal{C}^* \\ [(z_1, z_2, z_3)] &\longmapsto \Phi^{-1}([(z_1, z_2, z_3)]) = \frac{-(z_1 + iz_2)}{z_3} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Φ é claramente difeomorfismo biholomórfico.

Para concluir que a aplicação Φ é uma isometria, basta mostrar que ela preserva métrica.

Denotando por $\Phi^*(ds_1^2)$ o “pull back” da métrica de Fubini-Study pela Φ tem-se:

$$\begin{aligned}
\Phi^*(ds_1^2) &= \frac{2 \left\| \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} - w \right), \frac{1}{2} i \left(w + \frac{1}{w} \right), 1 \right) \wedge d \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} - w \right), \frac{1}{2} i \left(w + \frac{1}{w} \right), 1 \right) \right\|^2}{\left\| \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} - w \right), \frac{1}{2} i \left(w + \frac{1}{w} \right), 1 \right) \right\|^4} \\
&= \frac{2 \left\| \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} - w \right), \frac{1}{2} i \left(w + \frac{1}{w} \right), 1 \right) \wedge \left(\frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{w^2} \right) dw, \frac{1}{2} i \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) dw, 0 \right) \right\|^2}{\left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{w} - w \right) \left(\frac{1}{w} - \bar{w} \right) + \frac{1}{4} \left(w + \frac{1}{w} \right) \left(\bar{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) + 1 \right)^2} \\
&= \frac{2 \left\| \left(-\frac{1}{2} i \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) dw, \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{w^2} \right) dw, \frac{i}{w} dw \right) \right\|^2}{\left(\frac{1}{2} \left(|w|^2 + \frac{1}{|w|^2} \right) + 1 \right)^2} \\
&= \frac{(1+|w|^2)^2 \frac{|dw|^2}{|w|^4}}{\left(\frac{(1+|w|^2)^2}{2|w|^2} \right)^2} = ds_2^2
\end{aligned}$$

Estendendo Φ continuamente a $\hat{\mathcal{C}}$, define-se $\Phi(0) = [(1, i, 0)]$ e $\Phi(\infty) = [(1, -i, 0)]$ e tem-se $\Phi: \hat{\mathcal{C}} \rightarrow Q_1$ com as propriedades desejadas. $\blacksquare$

Proposição 2.2 *O plano complexo estendido com a métrica $ds_2^2 = \frac{4}{(1+|w|^2)^2} |dw|^2$ e a esfera unitária $S^2(1)$ com a métrica usual induzida do $\mathbb{R}^3$ são isométricos.*

Demonstração: Seja P a inversa da projeção estereográfica relativa ao pólo norte da esfera $S^2(1)$

$$\begin{aligned}
P: \hat{\mathcal{C}} &\rightarrow S^2(1) \\
w &\mapsto P(w) = \frac{1}{1+|w|^2} (2\operatorname{Re} w, 2\operatorname{Im} w, |w|^2 - 1) \quad \text{se } w \neq \infty \\
\infty &\mapsto P(\infty) = (0, 0, 1) \quad \text{pólo norte}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

A aplicação P é difeomorfismo, e

$$\begin{aligned}
P^{-1}: S^2(1) &\rightarrow \hat{\mathcal{C}} \\
(x, y, z) &\mapsto P^{-1}(x, y, z) = \frac{x+iy}{1-z} \quad \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 1) \\
(0, 0, 1) &\mapsto P^{-1}(0, 0, 1) = \infty
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Calculando o “pull-back” da métrica usual do $\mathbb{R}^3$ dada por $ds_3^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ através da aplicação P , tem-se:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2\operatorname{Re} w}{1+|w|^2} = \frac{w+\bar{w}}{1+|w|^2} &\Rightarrow dx &= \frac{1}{(1+|w|^2)^2} (dw - \bar{w}^2 dw + d\bar{w} - w^2 d\bar{w}) \\
y &= \frac{2\operatorname{Im} w}{1+|w|^2} = \frac{w-\bar{w}}{i(1+|w|^2)} &\Rightarrow i dy &= \frac{1}{(1+|w|^2)^2} (dw + \bar{w}^2 dw - d\bar{w} - w^2 d\bar{w}) \\
z &= \frac{|w|^2 - 1}{1+|w|^2} &\Rightarrow dz &= \frac{2}{(1+|w|^2)^2} (\bar{w} dw + w d\bar{w})
\end{aligned}$$

Portanto $dx + idy = \frac{2}{(1+|w|^2)^2}(dw - w^2 d\bar{w})$ e

$$\begin{aligned} P^*(ds_3^2) &= \frac{4}{(1+|w|^2)^4}((dw - w^2 d\bar{w})(d\bar{w} - \bar{w}^2 dw) + (\bar{w}dw + w d\bar{w})^2) \\ &= \frac{4}{(1+|w|^2)^4}(1 + |w|^2)^2 |dw|^2 = ds_2^2 \end{aligned}$$

■

Segue das proposições (2.1) e (2.2) que Q_1 com a métrica de Fubini-Study é isométrica a esfera $S^2(1)$ com a métrica usual induzida do $\mathbb{R}^3$.

Para superfícies $X: S_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, a aplicação normal de Gauss clássica ν , se relaciona com a aplicação $G: S_0 \rightarrow Q_1$, da seguinte maneira: usando a isometria Φ dada na Proposição (2.1), pode-se expressar a aplicação $G: S_0 \rightarrow Q_1$ sob a forma

$$\Phi \circ f = [(1 - f^2, i(1 + f^2), 2f)] \quad \text{onde} \quad f = \Phi^{-1} \circ G: S_0 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$$

Portanto, dado uma aplicação $f: S_0 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$, existe uma superfície S cuja aplicação de Gauss generalizada é $G = \Phi \circ f$ se, e somente se, existe uma superfície S cuja aplicação de Gauss clássica, $\nu \circ X: S_0 \rightarrow S^2(1)$, satisfaz:

$$\nu \circ X = P \circ f = \frac{1}{1 + |f|^2}(2\text{Re}f, 2\text{Im}f, |f|^2 - 1) \quad (2.5)$$

Figura(2.1)

Expressando a aplicação $f: S_0 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ em termos de um parâmetro local z sobre a superfície de Riemann S_0 , $w = f(z)$, tem-se uma expressão local, $G(z) = [\varphi(z)]$, em coordenadas homogêneas sob a forma

$$\varphi(z) = (1 - f^2(z), i(1 + f^2(z)), 2f(z)) \quad (2.6)$$

Calculando as funções η e V em termos de φ , tem-se a expressão dessas funções em termos de f , como segue:

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{z}} &= (-2f f_{\bar{z}}, i2f f_{\bar{z}}, 2f_{\bar{z}}) \\ \|\varphi\|^2 &= \langle \varphi, \bar{\varphi} \rangle = (1 - f^2)(1 - \bar{f}^2) + (1 + f^2)(1 + \bar{f}^2) + 4|f|^2 = 2(1 + |f|^2)^2 \\ \langle \varphi_{\bar{z}}, \bar{\varphi} \rangle &= -2f f_{\bar{z}}(1 - \bar{f}^2) + 2f f_{\bar{z}}(1 + \bar{f}^2) + 4f_{\bar{z}}\bar{f} = 4f f_{\bar{z}}\bar{f}^2 + 4f_{\bar{z}}\bar{f} = 4\bar{f} f_{\bar{z}}(1 + |f|^2) \\ \eta(z) &= \frac{\langle \varphi_{\bar{z}}, \bar{\varphi} \rangle}{\|\varphi(z)\|^2} = \frac{4\bar{f} f_{\bar{z}}(1 + |f|^2)}{2(1 + |f|^2)^2} = \frac{2\bar{f} f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} V(z) = \varphi_{\bar{z}} - \eta\varphi &= (-2f f_{\bar{z}}, 2i f f_{\bar{z}}, 2f_{\bar{z}}) - \frac{2\bar{f} f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2}(1 - f^2, i(1 + f^2), 2f) \\ &= \frac{-2f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2}(f + \bar{f}, i(\bar{f} - f), |f|^2 - 1) \\ &= \frac{-2f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2}(2\operatorname{Re}f, 2i\operatorname{Im}f, |f|^2 - 1), \quad \text{portanto de (2.5) tem-se} \end{aligned}$$

$$V(z) = -2f_{\bar{z}}\nu \quad \text{e} \quad V = 0 \iff f_{\bar{z}} = 0 \quad (2.8)$$

Visto que a normal unitária ν é um vetor real, segue trivialmente o seguinte lema:

Lema 2.1 *Seja $[\varphi]$ uma aplicação arbitrária, de classe C^1 , na quádrlica Q_1 e sejam η e V definidas em termos de φ . Então a condição necessária (1.12) dada no Teorema (1.1) é sempre satisfeita.*

Portanto uma das duas condições suficientes do Teorema (1.3) para $[\varphi]$ ser a aplicação de Gauss de uma superfície em $\mathbb{R}^n$ é automaticamente satisfeita quando $n = 3$.

Notação:

Para cada função complexa, $w = f(z)$, associa-se as seguintes funções:

$$F = F(f) = \frac{f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2} \quad (2.9)$$

$$\hat{F} = \hat{F}(f) = \frac{f_z}{1 + |f|^2} \quad (2.10)$$

$$L = L(f) = f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_zf_{\bar{z}}}{1 + |f|^2} \quad (2.11)$$

Sobre o conjunto onde $f_{\bar{z}} \neq 0$, pode-se definir

$$S = S(f) = \frac{L(f)}{f_{\bar{z}}} = \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2\bar{f}f_z}{1 + |f|^2} \quad (2.12)$$

$$T = T(f) = \frac{\partial S}{\partial \bar{z}} \quad (2.13)$$

As propriedades invariantes destas funções são resumidas nos dois lemas seguintes:

Lema 2.2 *Se $f: S_0 \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função definida sobre uma superfície de Riemann S_0 , então as seguintes diferenciais são globalmente definidas sobre S_0 :*

$$\hat{F}dz \quad Sdz \quad Fd\bar{z} \quad Ldzd\bar{z} \quad e \quad Tdzd\bar{z}$$

onde aquelas envolvendo S e T são definidas sobre o conjunto onde $Fd\bar{z} \neq 0$.

Demonstração: Sejam z e $\bar{z}$ parâmetros locais para os abertos W e $\tilde{W}$ que se interceptam em S_0

Figura(2.2)

Usando que $\tilde{z}(z)$ e $z(\tilde{z})$ são analíticas onde estão definidas, pois S_0 é superfície de Riemann, tem-se

$$z = z(\tilde{z}) \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{dz}{d\tilde{z}} d\tilde{z} + \frac{dz}{d\bar{\tilde{z}}} d\bar{\tilde{z}} = \frac{dz}{d\tilde{z}} d\tilde{z} \quad \text{e} \quad d\bar{z} = \frac{d\bar{z}}{d\bar{\tilde{z}}} d\bar{\tilde{z}}$$

$$f(z) = f(\tilde{z}) = f(\tilde{z}(z)) \quad \Rightarrow \quad f_z = f_{\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz} + f_{\bar{\tilde{z}}} \frac{d\bar{\tilde{z}}}{dz} = f_{\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz} \quad \text{e} \quad f_{\bar{z}} = f_{\bar{\tilde{z}}} \frac{d\bar{\tilde{z}}}{d\bar{z}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_{z\bar{z}} &= \left(f_{\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz} \right)_{\bar{z}} = f_{\tilde{z}\bar{\tilde{z}}} \frac{d\tilde{z}}{d\bar{\tilde{z}}} \frac{d\bar{\tilde{z}}}{d\bar{z}} + f_{\tilde{z}\bar{\tilde{z}}} \frac{d\bar{\tilde{z}}}{d\bar{\tilde{z}}} \frac{d\bar{\tilde{z}}}{d\bar{z}} + f_{\tilde{z}} \frac{d^2 \bar{\tilde{z}}}{d\bar{z} dz} \\ &= f_{\tilde{z}\bar{\tilde{z}}} \frac{d\bar{\tilde{z}}}{d\bar{z}} \frac{d\bar{\tilde{z}}}{dz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(f(z))dz &= \left(\frac{f_{z\bar{z}}}{f_z} - \frac{2\bar{f}f_z}{1+|f|^2} \right) dz \\
&= \left(\frac{f_{z\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz} - \frac{2\bar{f}f_z \frac{d\bar{z}}{d\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz}}{1+|f|^2} \right) \frac{dz}{d\tilde{z}} d\tilde{z} \\
&= S(f(\tilde{z}))d\tilde{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(f(z))dzd\bar{z} &= \left(f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1+|f|^2} \right) dzd\bar{z} \\
&= \left(f_{z\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz} - \frac{2\bar{f}f_z \frac{d\bar{z}}{d\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz}}{1+|f|^2} \right) \frac{dz}{d\tilde{z}} d\tilde{z} \frac{d\bar{z}}{d\tilde{z}} d\tilde{z} \\
&= L(f(\tilde{z}))d\tilde{z}d\tilde{\bar{z}}
\end{aligned}$$

Analogamente, tem-se $\hat{F}(f(z))dz = \hat{F}(f(\tilde{z}))d\tilde{z}$, $F(f(z))d\bar{z} = F(f(\tilde{z}))d\tilde{\bar{z}}$
 $T(f(z))dzd\bar{z} = T(f(\tilde{z}))d\tilde{z}d\tilde{\bar{z}}$, o que mostra que as diferenciais em questão independem da parametrização e portanto estão globalmente definidas. ■

Lema 2.3 *Seja $W = R[w]$ uma transformação linear fracionária correspondendo a uma rotação da esfera de Riemann:*

$$W = \frac{aw + b}{-\bar{b}w + \bar{a}} \quad , \quad \text{onde} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Então as funções $|F|$, $|\hat{F}|$, S e T são todas invariantes quando substitue-se a função $w = f(z)$ pela função $W = R[f(z)]$

Demonstração:

$$R[f(z)] = \frac{a(f(z)) + b}{-\bar{b}(f(z)) + \bar{a}} \quad \text{com} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
|R[f(z)]|^2 &= \frac{|a|^2|f(z)|^2 + a\bar{b}(f(z)) + b\bar{a}(\bar{f}(z)) + |b|^2}{|b|^2|f(z)|^2 - b\bar{a}(f(z)) - \bar{a}b(\bar{f}(z)) + |a|^2} \\
1 + |R[f(z)]|^2 &= \frac{1 + |f(z)|^2}{|b|^2|f(z)|^2 - b\bar{a}(f(z)) - \bar{a}b(\bar{f}(z)) + |a|^2} = \frac{1 + |f|^2}{|-b(f(z)) + \bar{a}|^2} \\
|(R[f(z)])_z| &= \frac{|f_z|}{|b|^2|f(z)|^2 - b\bar{a}(f(z)) - \bar{a}b(\bar{f}(z)) + |a|^2} = \frac{|f_z|}{|-b(f(z)) + \bar{a}|^2} \\
|(R[f(z)])_{\bar{z}}| &= \frac{|f_{\bar{z}}|}{|b|^2|f(z)|^2 - b\bar{a}(f(z)) - \bar{a}b(\bar{f}(z)) + |a|^2} = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|-b(f(z)) + \bar{a}|^2} \\
\frac{(R[f(z)])_{z\bar{z}}}{(R[f(z)])_{\bar{z}}} &= \left(\frac{f_z}{(-b(f(z)) + \bar{a})^2} \right)_{\bar{z}} \frac{(-b(f(z)) + \bar{a})^2}{f_{\bar{z}}} = \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{b}f_z}{-b(f(z)) + \bar{a}} \\
|F(R[f(z)])| &= \frac{|(R[f(z)])_{\bar{z}}|}{1 + |R[f(z)]|^2} = \frac{|f_{\bar{z}}|}{1 + |f(z)|^2} = |F(f(z))| \\
|\hat{F}(R[f(z)])| &= \frac{|(R[f(z)])_{\bar{z}}|}{1 + |R[f(z)]|^2} = \frac{|f_{\bar{z}}|}{1 + |f(z)|^2} = |\hat{F}(f(z))| \\
S(R[f(z)]) &= \frac{(R[f(z)])_{z\bar{z}}}{(R[f(z)])_{\bar{z}}} - \frac{2\overline{R[f(z)]}(R[f(z)])_z}{1 + |R[f(z)]|^2} \\
&= \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{b}f_z}{-b(f(z)) + \bar{a}} - \frac{2(\bar{a}(\bar{f}(z)) + \bar{b})f_z}{(-b(f(z)) + \bar{a})(-b(f(z)) + \bar{a})^2} \frac{|-b(f(z)) + \bar{a}|^2}{1 + |f(z)|^2} \\
&= \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{b}f_z|f(z)|^2 - 2\bar{a}\bar{f}(z)f_z}{(-b(f(z)) + \bar{a})(1 + |f(z)|^2)} \\
&= \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2(\bar{f}(z))f_z}{1 + |f|^2} = S(f(z)) \\
T(f(z)) &= \frac{\partial(S(f(z)))}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(S(R[f(z)]))}{\partial \bar{z}} = T(R[f(z)])
\end{aligned}$$

■

Combinando os dois lemas anteriores, obtem-se a seguinte proposição

Proposição 2.3 *Seja $g: S_0 \longrightarrow S^2(r)$ uma aplicação regular da superfície de Riemann S_0 na esfera $S^2(r)$. Seja $w = f(z)$ uma representação local de g numa vizinhança U de algum ponto $q \in S_0$, onde z é um parâmetro local complexo sobre S_0 , e w é obtido pela projeção estereográfica relativa à algum ponto $p_0 \notin g(U)$.*

Seja $E = \{p \in S_0 / df_p \text{ é complexa linear}\}$. Então tem-se :

- a) $|F||dz|$ e $|\hat{F}||d\bar{z}|$ são formas diferenciais regulares globalmente definidas sobre S_0 , dependendo somente da aplicação g e não da escolha de parâmetros.
- b) O conjunto E coincide com os zeros de $|F||dz|$
- c) Sdz e $Tdzd\bar{z}$ são formas diferenciais regulares definidas sobre o complementar do conjunto E , ambas dependendo somente de g e não da escolha de parâmetros.

Demonstração: As funções $|F|$, $|\hat{F}|$, S e T são claramente diferenciáveis quando $f \neq \infty$.

A diferenciabilidade no ponto $f = \infty$ segue do lema (2.3) pelo seguinte argumento: na vizinhança do ponto onde $f = \infty$, considera-se uma rotação preliminar $R[w]$ levando ∞ à um ponto finito, e usa-se a invariância das funções correspondentes através desta rotação.

A independência da escolha de parâmetros é aplicação direta do lema (2.2), enquanto que o item b) é consequência da definição da função F .

■

Teorema 2.1 *Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e seja $w = f(z)$ a aplicação de Gauss de S sobre a esfera unitária (isto é, $\nu = \frac{1}{1+|f|^2}(2\text{Re}f, 2\text{Im}f, |f|^2 - 1)$) onde z é um parâmetro conforme local sobre S_0 . Sejam F e T as funções associadas em termos de $w = f(z)$.*

Então em cada ponto de S_0 , uma das duas condições seguintes são satisfeitas:

$$a) F(f) = 0 \quad \text{ou} \quad b) F(f) \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}[T(f)] = 0$$

Demonstração: Pelas propriedades invariantes do Lema (2.3) pode-se fazer uma escolha do parâmetro w sobre a esfera unitária, tal que, $f(z) \neq \infty$ em uma vizinhança do ponto dado sobre S_0 . Nessa vizinhança, as condições acima são equivalentes à seguinte:

$$a) f_{\bar{z}} = 0 \quad \text{ou} \quad b) f_{\bar{z}} \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}\left[\left(\frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2\bar{f}f_z}{1+|f|^2}\right)_{\bar{z}}\right] = 0$$

A equação (b) acima é simplesmente a forma tomada pela equação básica $\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z)$ sobre o conjunto onde $V(z) \neq 0$, quando especificada para $n = 3$.

De fato, $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ onde $R(z)$ é um vetor real, comparada com $V(z) = -2f_{\bar{z}}\nu$ implica que, em todo ponto onde $f_{\bar{z}} \neq 0$, $\alpha = \arg(f_{\bar{z}})$ (módulo 2π). Portanto,

$$\alpha_{z\bar{z}} = [\arg(f_{\bar{z}})]_{z\bar{z}} = [Im(\log f_{\bar{z}})]_{z\bar{z}} = Im[(\log f_{\bar{z}})_{z\bar{z}}] = Im\left[\left(\frac{f_{\bar{z}z}}{f_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}}\right]$$

Por outro lado tem-se:

$$\eta = \frac{2\bar{f}f_{\bar{z}}}{1+|f|^2} = 2\bar{f}F \implies Im(\eta_z) = 2Im[(\bar{f}F)_z]$$

Mas

$$\begin{aligned} (\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f}F)_z &= \\ &= \bar{f}_{\bar{z}}\hat{F} + \bar{f}\hat{F}_{\bar{z}} - \bar{f}_zF - \bar{f}F_z \\ &= \bar{f}_{\bar{z}}\left(\frac{f_z}{1+|f|^2}\right) + \bar{f}\left(\frac{f_{zz}(1+|f|^2) - f_z\bar{f}f_z - f_z\bar{f}_zf}{(1+|f|^2)^2}\right) - \bar{f}_z\left(\frac{f_z}{1+|f|^2}\right) - \bar{f}\left(\frac{f_{zz}(1+|f|^2) - f_z\bar{f}f_z - f_z\bar{f}_zf}{(1+|f|^2)^2}\right) \\ &= \frac{|f_z|^2}{1+|f|^2} - \frac{|f|^2|f_z|^2}{(1+|f|^2)^2} - \frac{|f_z|^2}{1+|f|^2} + \frac{|f|^2|f_z|^2}{1+|f|^2} \\ &= \frac{|f_z|^2}{1+|f|^2}\left(1 - \frac{|f|^2}{1+|f|^2}\right) + \frac{|f_z|^2}{1+|f|^2}\left(\frac{|f|^2}{1+|f|^2} - 1\right) \\ &= \frac{|f_z|^2}{(1+|f|^2)^2} - \frac{|f_z|^2}{(1+|f|^2)^2} = |\hat{F}|^2 - |F|^2 \in \mathbb{R} \\ \implies Im[(\bar{f}F)_z] &= Im[(\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}}] \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } Im(\eta_z) = 2Im[(\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}}] = Im\left[\left(\frac{2\bar{f}f_{\bar{z}}}{1+|f|^2}\right)_{\bar{z}}\right].$$

Portanto a equação $\alpha_{z\bar{z}} = Im(\eta_z)$ se reduz a equação dada em (b) e isto prova o teorema. ■

O teorema seguinte reformula o teorema básico de existência (Teorema (1.3)), em termos da aplicação clássica de Gauss em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.2 *Seja S_0 uma superfície de Riemann simplesmente conexa e seja $g: S_0 \longrightarrow S^2(1)$ uma aplicação diferenciável de S_0 na esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.*

1º caso: *Se $|F| |dz| \equiv 0$ sobre S_0 e S_0 é não compacta, então existe uma superfície mínima definida por uma imersão conforme $X: S_0 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $g = \nu \circ X$ onde $\nu: S \longrightarrow S^2(1)$ é a aplicação clássica de Gauss de S .*

2º caso: Se $|F| |dz|$ nunca se anula sobre S_0 , então existe uma imersão conforme $X: S_0 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ com $g = \nu \circ X$ se, e somente se, $\text{Im}(T|dz|^2) \equiv 0$.

Demonstração: Observa-se inicialmente, que pelos lemas (2.2) e (2.3), as condições dos casos (1) e (2) acima estão bem definidas, independentes da escolha de parâmetros locais z sobre S_0 e w sobre $S^2(1)$.

Pela prova do Teorema (2.1) a condição $\text{Im}(T|dz|^2) \equiv 0$ é precisamente a forma tomada por $\alpha_{z\bar{z}} = \text{Im}(\eta_z)$, ao passo que a condição $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ é automaticamente satisfeita em $\mathbb{R}^3$ (conforme observado no Lema (2.1)).

Portanto o Teorema (2.2) é precisamente o Teorema (1.3) quando $n = 3$. O que conclui a demonstração. ■

Definição 2.1 Seja $g: S_0 \longrightarrow S^2(r)$ uma aplicação diferenciável da superfície de Riemann S_0 na esfera $S^2(r)$ e $w = f(z)$ uma representação local de g . Então o campo tensão de g , $\tau(g)$, é definido por:

$$\tau(g) = 4 \left(f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1 + |f|^2} \right)$$

e a aplicação g é harmônica se, e somente se, $\tau(g) \equiv 0$.

Lema 2.4 Seja $w = f(z)$ uma expressão local de uma aplicação diferenciável $g: S_0 \longrightarrow S^2(r)$. Então :

$$\begin{aligned} g \text{ é holomorfa} & \iff F d\bar{z} \equiv 0 \\ g \text{ é anti-holomorfa} & \iff \hat{F} dz \equiv 0 \\ g \text{ é harmônica} & \iff L dz d\bar{z} \equiv 0 \end{aligned}$$

Demonstração: É imediata das definições de F , $\hat{F}$ e L , observado que $L(f) = \frac{\tau(g)}{4}$. ■

Lema 2.5 Seja $g: S_0 \longrightarrow S^2(r)$ uma aplicação da superfície de Riemann S_0 na esfera $S^2(r)$, representada localmente por $w = f(z)$. Seja $\gamma(z) = \overline{F}\hat{F} = \frac{f_z \bar{f}_{\bar{z}}}{(1+|f|^2)^2}$. Então $\gamma(z)dz^2$ é uma forma diferencial regular definida globalmente sobre S_0 . Se a aplicação g é harmônica, então γ é holomorfa e $\gamma(z) \equiv 0$ se, e somente se, g é conforme ou anti-conforme.

Demonstração: A primeira parte do lema é análoga a demonstração dos lemas (2.2) e (2.3), observado que $\gamma(z)dz^2 = \bar{F}dz\hat{F}dz$.

O restante da demonstração é consequência da seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\gamma_{\bar{z}} &= \frac{(f_{zz}\bar{f}_z + f_z\bar{f}_{zz})(1+|f|^2)^2 - (f_z\bar{f}_z)(2(1+|f|^2))(f_z\bar{f} + f\bar{f}_z)}{(1+|f|^2)^4} \\ &= \frac{1}{(1+|f|^2)^2} \left[\bar{f}_z \left(f_{zz} - \frac{2f_z\bar{f}_z}{1+|f|^2} \right) + f_z \left(\bar{f}_{zz} - \frac{2\bar{f}_z f_z}{1+|f|^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(1+|f|^2)^2} [\bar{f}_z(L(f)) + f_z(\overline{L(f)})]\end{aligned}$$

Pois,

$$g \text{ harmônica} \implies L(f) \equiv 0 \implies \gamma_{\bar{z}} \equiv 0 \implies \gamma \text{ holomorfa} \quad .$$

$$\gamma(z) \equiv 0 \iff (f_z\bar{f}_z) \equiv 0 \iff \begin{cases} f_z \equiv 0 & \iff g \text{ é anti-conforme} \\ \text{ou} \\ \bar{f}_z \equiv 0 & \iff g \text{ é conforme} \end{cases}$$

■

Corolário 2.1 *Nas hipóteses do Lema (2.5), se g é uma aplicação harmônica que não é conforme nem anti-conforme, então, as funções f_z e $\bar{f}_z$ têm, no máximo, zeros isolados.*

Demonstração: Do fato de g ser harmônica tem-se, pelo lema anterior, que $\gamma(z)$ é holomorfa, e do fato de g não ser conforme nem anti-conforme tem-se :

$$\begin{aligned}\gamma(z) \not\equiv 0 &\implies \gamma(z) \text{ tem no máximo zeros isolados} \\ &\implies f_z \text{ e } \bar{f}_z \text{ têm no máximo zeros isolados.}\end{aligned}$$

■

Teorema 2.3 *Sejam dadas uma aplicação $g: S_0 \longrightarrow S^2(1)$, representada localmente por uma função complexa $w = f(z)$, e uma função $h: S_0 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se existe uma imersão $X: S_0 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $g = \nu \circ X$ onde $\nu: S_0 \longrightarrow S^2(1)$ é a aplicação de Gauss clássica de S e h é a curvatura média escalar de S então, h e f estão relacionadas pela seguinte equação:*

$$h \left(f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1+|f|^2} \right) = h_z f_{\bar{z}} \quad (\text{equação de Kenmotsu [18]})$$

Nos pontos onde $f_{\bar{z}} \neq 0$ e $h \neq 0$, pode-se escrever esta equação como:

$$S(f(z)) = (\log h)_z \implies T(f) = (\log h)_{z\bar{z}} \implies \text{Im}[T(f)] = 0$$

Demonstração: O vetor curvatura média H de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito na forma $H = h\nu$, onde ν é a normal unitária e h é a curvatura média escalar.

Portanto, a equação (1.11), $V = \|\varphi\|^2 \bar{\psi} H$, no caso $\mathbb{R}^3$, corresponde a:

$$-2f_{\bar{z}}\nu = \|\varphi\|^2 \bar{\psi} h\nu \implies -2f_{\bar{z}} = \|\varphi\|^2 \bar{\psi} h$$

$$\text{Mas } \varphi(z) = (1 - f^2, i(1 + f^2), 2f) \implies \|\varphi\|^2 = 2(1 + |f|^2)^2$$

Portanto:

$$\bar{\psi} h = \frac{-2f_{\bar{z}}}{\|\varphi\|^2} = \frac{-f_{\bar{z}}}{(1 + |f|^2)^2} \quad (2.14)$$

Se $h = 0$ a equação de Kenmotsu é imediata.

Se $h \neq 0$ então nestes pontos $\bar{\psi} = \frac{-f_{\bar{z}}}{h(1 + |f|^2)^2}$

Da equação (1.10) sabe-se que $\bar{\psi}$ é tal que $\bar{\eta} = -(\log \bar{\psi})_z$

Da equação (2.7) segue que $(\log \bar{\psi})_z = \frac{-2f\bar{f}_{\bar{z}}}{1 + |f|^2}$

Por outro lado :

$$(\log \bar{\psi})_z + (\log h)_z = (\log \bar{\psi} h)_z$$

$$= \left(\log \frac{-f_{\bar{z}}}{(1 + |f|^2)^2} \right)_z$$

$$= (\log(f_{\bar{z}}))_z - 2(\log(1 + |f|^2))_z$$

$$= \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - 2 \frac{f\bar{f}_{\bar{z}} + \bar{f}f_z}{1 + |f|^2}$$

$$\implies (\log h)_z = \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2f\bar{f}_{\bar{z}}}{1 + |f|^2} \quad \text{que é precisamente a equação de Kenmotsu.} \quad \blacksquare$$

Teorema 2.4 (Recíproca do Teorema (2.3)) Dados uma aplicação $g: S_0 \longrightarrow S^2(1)$, representada localmente por uma função complexa $w = f(z)$, e uma função $h: S_0 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se h e f satisfazem a equação de Kenmotsu e $f_{\bar{z}} \equiv 0$ ou $f_{\bar{z}}$ nunca se anula sobre S_0 , então existe uma imersão $X: S_0 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $g = \nu \circ X$ onde $\nu: S \longrightarrow S^2(1)$ é a aplicação de Gauss clássica de S e h é a curvatura média escalar.

Demonstração: Se $f_{\bar{z}}$ nunca se anula, então pela relação $\bar{\psi}h = \frac{-f_z}{(1+|f|^2)^2}$, tem-se que h também nunca se anula e a equação de Kenmotsu é precisamente a condição suficiente $\text{Im}[T(f)] \equiv 0$ do teorema geral de existência (Teorema (2.2)).

O caso $f_{\bar{z}} \equiv 0$ corresponde ao caso mínima do referido teorema e isso conclui a demonstração. ■

Corolário 2.2 (Ruh [22], Ruh e Vilms [23]) Uma superfície regular S em $\mathbb{R}^3$ tem curvatura média constante se, e somente se, a aplicação de Gauss é harmônica.

Demonstração: Se $h \equiv 0$, então, pela equação (2.14), $f_{\bar{z}} \equiv 0$, e isso implica que $L(f(z)) = f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_zf_{\bar{z}}}{1+|f|^2} \equiv 0$, portanto g é harmônica.

Se $h \equiv c$ (constante $\neq 0$), pela equação de Kenmotsu segue que $h(f_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{f}f_zf_{\bar{z}}}{1+|f|^2}) = h_z f_{\bar{z}} \equiv 0$. Isso implica que $L(f) \equiv 0$, e portanto, também neste caso, g é harmônica.

Reciprocamente, se g é harmônica então $L(f) \equiv 0$, e portanto, pela equação de Kenmotsu, $h_z f_{\bar{z}} \equiv 0$.

Por outro lado:

$$L(f) \equiv 0 \implies \gamma(z) = \frac{f_z \bar{f}_z}{(1+|f|^2)^2} \text{ é holomorfa (Lema(2.5))}$$

Portanto os zeros de $(f_z \bar{f}_z)$ são isolados ou $(f_z \bar{f}_z)$ é identicamente nula. Tem-se então as seguintes possibilidades:

- i) $f_{\bar{z}} \equiv 0 \implies h \equiv 0$ (equação 2.14)
- ii) $f_{\bar{z}} \not\equiv 0$ e $f_z \equiv 0 \implies S$ é parte de uma esfera (ver observação abaixo) $\implies h = \frac{1}{r^2} = \text{constante}$.
- iii) $f_{\bar{z}} \not\equiv 0$ e $f_z \not\equiv 0 \implies$ os zeros de $f_{\bar{z}}$ são isolados $\implies h_z \equiv 0$ (exceto num conjunto isolado de pontos) $\implies h = c$ (constante), visto que h é função real.

Observação - Demonstrando que se $f_z \equiv 0$ e $f_{\bar{z}} \not\equiv 0$ então S é parte de uma esfera.

Seja $D\nu_p: T_p S \longrightarrow T_p S$ o operador de Weingarten de S em p .

$D\nu_p$ é simétrico e portanto $\langle D\nu_p(v), w \rangle = \langle v, D\nu_p(w) \rangle, \forall v, w \in T_p S$.

O polinômio característico de $D\nu_p$ é dado por $p(x) = x^2 - 2h_p x + K_p$ onde h_p e K_p são respectivamente a curvatura média e a curvatura Gaussiana de S em p . Portanto

$$D\nu_p \circ D\nu_p - 2h_p D\nu_p + K_p Id \equiv 0$$

O operador adjunto $(D\nu_p)^*$ satisfaz $(D\nu_p)^* = D\nu_p$ e portanto

$$\langle D\nu_p(v), D\nu_p(w) \rangle = \langle (D\nu_p \circ D\nu_p)(v), w \rangle, \quad \forall v, w \in T_p S$$

Por outro lado, $f_z \equiv 0$ implica que $g = \nu \circ X$ é anti-conforme e têm-se:

$$\langle D\nu_p(v), D\nu_p(w) \rangle = \mu^2 \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in T_p S, \quad \mu \neq 0$$

$$\implies D\nu_p \circ D\nu_p = \mu^2 Id \implies h_p D\nu_p = \left(\frac{K_p + \mu^2}{2} \right) Id$$

Se $h_p \neq 0$ então $D\nu_p = \left(\frac{K_p + \mu^2}{2h_p} \right) Id$, e portanto p é ponto umbílico.

Se $h_p = 0$ então $K_p = -\mu^2 < 0$, e portanto p não é ponto umbílico.

Logo $p \in S$ é ponto umbílico se, e somente se, $h_p \neq 0$. Então o conjunto dos pontos umbílicos é aberto e fechado em S .

Portanto, ou S não tem pontos umbílicos e, neste caso, $H \equiv 0$ e $K < 0$; ou todos os pontos de S são umbílicos e, neste caso, S é parte de uma esfera.

A condição $f_{\bar{z}} \neq 0$ implica $H \neq 0$, portanto as condições $f_z \equiv 0$ e $f_{\bar{z}} \neq 0$ juntas implicam que S é parte de uma esfera. ■

Corolário 2.3 *Seja S_0 uma superfície de Riemann simplesmente conexa e seja $g: S_0 \rightarrow S^2(1)$ uma aplicação harmônica que em parte alguma é conforme (isto é, para qualquer representação f de g , $f_{\bar{z}}$ nunca se anula). Então existe uma imersão conforme $X: S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de curvatura média constante tal que $g = \nu \circ X$ onde $\nu: S \rightarrow S^2(1)$ é a aplicação de Gauss clássica de S .*

Demonstração: g é harmônica se, e somente se, $L(f) \equiv 0$. Portanto

$$T(f) = \frac{\partial S}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \quad \text{onde} \quad S(f) = \frac{L(f)}{f_{\bar{z}}} \implies \text{Im}(T|dz^2|) \equiv 0$$

e o Teorema (2.2) garante a existência de uma imersão conforme $X: S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $g = \nu \circ X$. O fato de S ter curvatura média constante é imediato do corolário (2.2). ■

Teorema 2.5 (Kenmotsu [18]) *Seja $g: S_0 \rightarrow S^2(1)$ uma aplicação harmônica de uma superfície de Riemann simplesmente conexa na esfera unitária. Então existe uma imersão (possivelmente com pontos de ramificação) $X: S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, onde S tem curvatura média constante, tal que $g = \nu \circ X$ onde $\nu: S \rightarrow S^2(1)$ é a aplicação de Gauss clássica de S .*

Demonstração: Se g é conforme então $f_{\bar{z}} \equiv 0$, e portanto, o resultado segue do caso (1) do teorema geral de existência (Teorema (2.1)).

Se g não é conforme, então pelo corolário (2.1), ou g é anti-conforme, ou os zeros de $f_{\bar{z}}$ são isolados.

Se g é anti-conforme, S é parte de uma esfera (ver observação no corolário (2.2)).

No caso em que os zeros de $f_{\bar{z}}$ são isolados, pode-se construir o fator integrante $\psi = \frac{-\bar{f}_{\bar{z}}}{h(1+|f|^2)^2}$, usando qualquer constante h não nula. A função ψ assim definida é tal que h e f satisfazem a equação de Kenmotsu, e portanto, exceto num conjunto isolados de pontos, vale a condição suficiente $\text{Im}(T|dz|^2) = 0$ do teorema geral de existência. Então existe uma imersão, possivelmente com pontos de ramificação, $X: S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, tal que $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi \varphi = \frac{-\bar{f}_{\bar{z}}}{h(1+|f|^2)^2} (1 - f^2, i(1 + f^2), 2f)$.

Os pontos de ramificação são os pontos onde $f_{\bar{z}} = 0$ e, portanto, $\psi(z) = 0$. Isto é, a superfície S não é regular nesses pontos. ■

2.2 SUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}^4$

Assim como para superfícies em $\mathbb{R}^3$, a quádrlica Q_2 também possui particularidades geométricas que permitem representar explicitamente a aplicação de Gauss de superfícies em $\mathbb{R}^4$.

Neste caso, para se adaptar o teorema geral de existência e unicidade desenvolvido em termos genéricos no capítulo I, faz-se necessário um pequeno estudo da quádrlica Q_2 .

Proposição 2.4 *Existe uma isometria biholomórfica entre a quádrlica Q_2 , com a métrica de Fubini-Study, e $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$, com a métrica $ds_4^2 = \frac{2|dw_1|^2}{(1+|w_1|^2)^2} + \frac{2|dw_2|^2}{(1+|w_2|^2)^2}$.*

Demonstração: A aplicação

$$\begin{aligned} F: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow Q_2^* = \{[(z_1, z_2, z_3, z_4)] \in Q_2 / z_1 - iz_2 \neq 0\} \\ (w_1, w_2) &\longmapsto F(w_1, w_2) = [(1 + w_1 w_2, i(1 - w_1 w_2), w_1 - w_2, -i(w_1 + w_2))] \end{aligned}$$

é difeomorfismo holomórfico e sua inversa holomorfa é dada por:

$$\begin{aligned} F^{-1}: Q_2^* &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ [(z_1, z_2, z_3, z_4)] &\longmapsto F^{-1}([(z_1, z_2, z_3, z_4)]) = \left(\frac{z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2}, \frac{-z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2} \right) \end{aligned}$$

Denotando por $F^*(ds_1^2)$ o “pull-back” da métrica de Fubini-Study pela F tem-se:

$$F^*(ds_1^2) = F^* \left(\frac{2 \sum_{\substack{i < j \\ 1 \leq i, j \leq 4}} |z_i dz_j - z_j dz_i|^2}{(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + w_1 w_2 & \implies & dz_1 = w_1 dw_2 + w_2 dw_1 \\ z_2 &= i(1 - w_1 w_2) & \implies & dz_2 = -i(w_1 dw_2 + w_2 dw_1) \\ z_3 &= w_1 - w_2 & \implies & dz_3 = dw_1 - dw_2 \\ z_4 &= -i(w_1 + w_2) & \implies & dz_4 = -i(dw_1 + dw_2) \end{aligned}$$

Então

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 2(1 + |w_1|^2)(1 + |w_2|^2)$$

$$\begin{aligned} e \quad & \sum_{\substack{i < j \\ 1 \leq i, j \leq 4}} |z_i dz_j - z_j dz_i|^2 = \\ &= 8|w_1|^2 |dw_2|^2 + 8|w_2|^2 |dw_1|^2 + 2|dw_1 + dw_2|^2 \\ &+ 2|w_1^2 dw_2 + w_2^2 dw_1|^2 + 2|dw_1 - dw_2|^2 + 2|w_1^2 dw_2 - w_2^2 dw_1|^2 \\ &= 8|w_1|^2 |dw_2|^2 + 8|w_2|^2 |dw_1|^2 + 4|dw_1|^2 + 4|dw_2|^2 + 4|w_1|^4 |dw_2|^2 + 4|w_2|^4 |dw_1|^2 \\ &= 4|dw_1|^2 (1 + |w_2|^2)^2 + 4|dw_2|^2 (1 + |w_1|^2)^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$F^*(ds_1^2) = \frac{2|dw_1|^2}{(1 + |w_1|^2)^2} + \frac{2|dw_2|^2}{(1 + |w_2|^2)^2}$$

Visto que $Q_2^* = Q_2 \setminus \{L' \cup L''\}$ onde $L' = \{[(iz_2, z_2, -iz_4, z_4)] \in Q_2\}$ e $L'' = \{[(iz_2, z_2, iz_4, z_4)] \in Q_2\}$

estende-se F a Q_2 , definindo

$$\begin{aligned} F(\infty, z_2) &= [(z_2, -iz_2, 1, -i)] = L'' \setminus [(1, -i, 0, 0)] \\ F(z_1, \infty) &= [(z_1, -iz_1, -1, -i)] = L' \setminus [(1, -i, 0, 0)] \\ F(\infty, \infty) &= [(1, -i, 0, 0)] \end{aligned}$$

e tem-se $F: \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow Q_2$ com as propriedades desejadas. ■

Proposição 2.5 *O plano complexo estendido $\hat{\mathbb{C}}$ com a métrica $ds_5^2 = \frac{2|dw|^2}{(1+|w|^2)^2}$ é isométrico à esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, com a métrica induzida do $\mathbb{R}^3$ através da aplicação $\tilde{P} = \Lambda \circ P: \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ onde P é inversa da projeção estereográfica relativa ao polo norte da esfera $S^2(1)$ e $\Lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}q$ é a homotetia de $S^2(1)$ em $S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.*

Demonstração: Segue da proposição (2.2). Observado que a aplicação $\tilde{P}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}P(q)$, e portanto

$$\tilde{P}^*(ds_3^2) = \tilde{P}^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \frac{1}{2}P^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \frac{2|dw|^2}{(1+|w|^2)^2} = ds_5^2$$

Das proposições (2.4) e (2.5) conclui-se que a hiperquádrica Q_2 , com a métrica de Fubini-Study, é isométrica ao produto de duas esferas $S_1 \times S_2$ (S_k : é a esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$), com a métrica produto induzida do $\mathbb{R}^3$.

Dadas uma superfície de Riemann S_0 e uma aplicação $G: S_0 \longrightarrow Q_2$, pode-se considerar variáveis complexas estendidas, w_k , para parametrizar S_k , onde w_k é dada em termos de coordenadas homogêneas sobre $\mathbb{C}P^3$ por

$$F^{-1}([(z_1, z_2, z_3, z_4)]) = \left(\frac{z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2}, \frac{-z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2} \right) = (w_1, w_2)$$

e expressar localmente G por $G(z) = [\varphi(z)]$ em termos de um parâmetro local conforme z sobre S_0 por um par de funções $w_1 = f_1(z)$, $w_2 = f_2(z)$ por

$$\begin{aligned} [\varphi(z)] &= F(f_1(z), f_2(z)) = \\ &= [(1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z)))] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Figura(2.3)

Deste modo pode-se representar a aplicação $[\varphi]$ em coordenadas homogêneas por:

$$\varphi(z) = (1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z))) \quad (2.16)$$

e usar esta representação para calcular as funções η e V . Nestes termos, tem-se:

$$\varphi_{\bar{z}} = (f_1)_{\bar{z}}(f_2, -if_2, 1, -i) + (f_2)_{\bar{z}}(f_1, -if_1, -1, -i)$$

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= |1 + f_1 f_2|^2 + |1 - f_1 f_2|^2 + |f_1 - f_2|^2 + |f_1 + f_2|^2 \\ &= 2(1 + |f_1|^2 |f_2|^2 + |f_1|^2 + |f_2|^2) \\ &= 2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2) \end{aligned}$$

$$\langle \varphi_{\bar{z}}, \bar{\varphi} \rangle = 2(f_1)_{\bar{z}}(\bar{f}_1 |f_2|^2 + \bar{f}_1) + 2(f_2)_{\bar{z}}(\bar{f}_2 |f_1|^2 + \bar{f}_2)$$

$$\eta(z) = \frac{\langle \varphi_{\bar{z}}, \bar{\varphi} \rangle}{\|\varphi\|^2} = \frac{(f_1)_{\bar{z}} \bar{f}_1}{1 + |f_1|^2} + \frac{(f_2)_{\bar{z}} \bar{f}_2}{1 + |f_2|^2} = \bar{f}_1 F_1 + \bar{f}_2 F_2, \quad \text{onde} \quad F_k = F(f_k) \quad (2.17)$$

$$V(z) = \varphi_{\bar{z}} - \eta\varphi$$

$$\begin{aligned} &= F_1((1 + |f_1|^2)(f_2, -if_2, 1, -i) - \bar{f}_1(1 + f_1f_2, i(1 - f_1f_2), f_1 - f_2, -i(f_1 + f_2))) \\ &+ F_2((1 + |f_2|^2)(f_1, -if_1, -1, -i) - \bar{f}_2(1 + f_1f_2, i(1 - f_1f_2), f_1 - f_2, -i(f_1 + f_2))) \\ &= F_1(f_2 - \bar{f}_1, -i(f_2 + \bar{f}_1), 1 + \bar{f}_1f_2, -i(1 - \bar{f}_1f_2)) + \\ &+ F_2(f_1 - \bar{f}_2, -i(f_1 + \bar{f}_2), -1 - f_1\bar{f}_2, -i(1 - f_1\bar{f}_2)) \end{aligned}$$

Portanto

$$V(z) = F_1A - F_2\bar{A} \quad \text{onde} \quad (2.18)$$

$$A(z) = (f_2(z) - \bar{f}_1(z), -i(f_2(z) + \bar{f}_1(z)), 1 + \bar{f}_1(z)f_2(z), -i(1 - \bar{f}_1(z)f_2(z))) \quad (2.19)$$

Lema 2.6 Nas hipóteses do Teorema (1.1) para $n = 4$, as seguintes condições são equivalentes:

- i) $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ onde $R(z)$ é um vetor real
- ii) A matriz hermitiana 4×4 , $V^t\bar{V}$, é uma matriz real
- iii) $(|F_1|^2 - |F_2|^2)(\text{Im}A_j\bar{A}_l) = 0$; $1 \leq j, l \leq 4$
- iv) $|F_1| \equiv |F_2|$

Demonstração:

$$(i) \Rightarrow (ii) \quad V^t\bar{V} = e^{i\alpha(z)}R^t(z)e^{-i\alpha(z)}R(z) = R^t(z)R(z), \quad \text{matriz real}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supondo $V \neq 0$ (pois, se $V = 0$, o resultado é trivial) e denotando $V = (V_1, V_2, V_3, V_4)$, existe $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $V_k = e^{i\alpha}|V_k| \neq 0$.

Então se $V^t\bar{V} = (V_j\bar{V}_l)_{1 \leq j, l \leq 4}$ é uma matriz real, para todo j tem-se $V_j\bar{V}_k = e^{i\alpha_j}|V_j|e^{-i\alpha}|V_k| = e^{i(\alpha_j - \alpha)}|V_j||V_k| \in \mathbb{R}$. Isso implica que $\alpha_j - \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$, $\forall j$, e portanto $V = e^{i\alpha}(\pm|V_1|, \pm|V_2|, \pm|V_3|, \pm|V_4|) \in e^{i\alpha}\mathbb{R}$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Considerando $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, da equação (2.18) tem-se :

$$\begin{aligned} V_j \bar{V}_l &= (F_1 A_j - F_2 \bar{A}_j)(\bar{F}_1 \bar{A}_l - \bar{F}_2 A_l) \\ &= |F_1|^2 A_j \bar{A}_j + |F_2|^2 \bar{A}_j A_l - (F_1 \bar{F}_2 A_j A_l + F_2 \bar{F}_1 \bar{A}_j \bar{A}_l) \\ &= |F_1|^2 A_j \bar{A}_l + |F_2|^2 \bar{A}_j A_l - 2\text{Re}(F_1 \bar{F}_2 A_j A_l), \quad 1 \leq j, l \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_j \bar{V}_l \in \mathbb{R}, \quad \forall j, l &\iff \text{Im}(|F_1|^2 A_j \bar{A}_l + |F_2|^2 \bar{A}_j A_l) = 0 \\ &\iff (|F_1|^2 - |F_2|^2)(\text{Im} A_j \bar{A}_l) = 0, \quad \forall j, l. \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Da equação (2.19) tem-se :

$$\|A\|^2 = \langle A, \bar{A} \rangle = 2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2) = \|\varphi\|^2 \quad \text{e} \quad \langle A, A \rangle = 0 \quad (2.20)$$

que juntamente com (2.18) implica

$$V(z) = 0 \iff F_1 = 0 \quad \text{e} \quad F_2 = 0 \iff (f_1)_{\bar{z}} = 0 \quad \text{e} \quad (f_2)_{\bar{z}} = 0 \quad (2.21)$$

Portanto se $V(z) = 0$, (iv) é imediata

Suponha por absurdo que $\exists z_0$ tal que $V(z_0) \neq 0$ e $|F(f_1(z_0))| \neq |F(f_2(z_0))|$

De (iii) e (2.19) tem-se :

$$\left. \begin{aligned} \text{Im}(A_1(z_0) \bar{A}_2(z_0)) &= (|f_2(z_0)|^2 - |f_1(z_0)|^2) = 0 \\ \text{Im}(A_3(z_0) \bar{A}_4(z_0)) &= (1 - |f_1(z_0)|^2 |f_2(z_0)|^2) = 0 \end{aligned} \right\} \implies |f_1(z_0)| = |f_2(z_0)| = 1$$

Então:

$$\left. \begin{aligned} \text{Im}(A_1(z_0) \bar{A}_3(z_0)) &= 2\text{Im}(f_1(z_0) + f_2(z_0)) = 0 \\ \text{Im}(A_2(z_0) \bar{A}_3(z_0)) &= -2\text{Re}(f_1(z_0) + f_2(z_0)) = 0 \\ \text{Im}(A_1(z_0) \bar{A}_4(z_0)) &= 2\text{Re}(f_2(z_0) - f_1(z_0)) = 0 \\ \text{Im}(A_2(z_0) \bar{A}_4(z_0)) &= 2\text{Im}(f_2(z_0) - f_1(z_0)) = 0 \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\implies f_1(z_0) + f_2(z_0) = f_2(z_0) - f_1(z_0) = 0 \implies f_1 = 0 \quad \text{e} \quad f_2 = 0, \quad \text{que é absurdo}$$

Portanto $|F_1| \equiv |F_2|$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) é trivial. ■

Teorema 2.6 *Seja S uma superfície orientada imersa em $\mathbb{R}^4$, cuja aplicação de Gauss G é dada localmente via um par de funções $f_1(z)$, $f_2(z)$ por $G(z) = [\varphi(z)]$ onde*

$$\varphi(z) = (1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z)))$$

e z é um parâmetro conforme local sobre S . Então :

$$a) |F_1| \equiv |F_2| \quad e \quad b) \operatorname{Im}(T_1 + T_2) = 0 \quad \text{onde} \quad (f_1)_{\bar{z}} \neq 0, \quad (f_2)_{\bar{z}} \neq 0 \quad e \quad T_k = T(f_k)$$

Demonstração: *Pelas equivalências (i) e (iv) do lema anterior segue que a relação (a) é precisamente a condição necessária e suficiente (1.12) no caso $n = 4$.*

A relação (b) é precisamente a condição (1.13) do Teorema (1.1) no caso $n = 4$. De fato:

Se $V \neq 0$ $\arg V \equiv \alpha \pmod{2\pi}$. Visto que $|F_1| \equiv |F_2|$, tem-se

$$\begin{aligned} V = F_1 A - F_2 \bar{A} &\implies F_1 F_2 \bar{V} = F_1 F_2 (\overline{F_1 A} - \overline{F_2 A}) \\ &= |F_1|^2 F_2 \bar{A} - |F_2|^2 F_1 A \\ &= -|F_1|^2 V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \arg F_1 + \arg F_2 &= 2\alpha \pmod{2\pi} \\ \implies \alpha &= \frac{1}{2}(\arg F_1 + \arg F_2) \pmod{\pi} \\ \implies \alpha &= \frac{1}{2}(\arg(f_1)_{\bar{z}} + \arg(f_2)_{\bar{z}}) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Portanto

$$\alpha_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \{ [\operatorname{Im}(\log(f_1)_{\bar{z}}) + \operatorname{Im}(\log(f_2)_{\bar{z}})]_{z\bar{z}} \} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{(f_1)_{\bar{z}z}}{(f_1)_{\bar{z}}} + \frac{(f_2)_{\bar{z}z}}{(f_2)_{\bar{z}}} \right)_{\bar{z}} \right]$$

Por outro lado, como foi demonstrado no Teorema (2.1)

$$\begin{aligned} \eta = \bar{f}_1 F_1 + \bar{f}_2 F_2 &\implies \operatorname{Im}(\eta_z) = \operatorname{Im}[(\bar{f}_1 F_1)_z + (\bar{f}_2 F_2)_z] \\ &= \operatorname{Im}[(\bar{f}_1 \hat{F}_1 + \bar{f}_2 \hat{F}_2)_{\bar{z}}] \end{aligned}$$

onde $\hat{F}_k = \hat{F}(f_k)$. Segue que

$$\alpha_{z\bar{z}} - \operatorname{Im}(\eta_z) = 0 \implies \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{(f_1)_{\bar{z}z}}{(f_1)_{\bar{z}}} - 2 \frac{\bar{f}_1 (f_1)_z}{1 + |f_1|^2} + \frac{(f_2)_{\bar{z}z}}{(f_2)_{\bar{z}}} - 2 \frac{\bar{f}_2 (f_2)_z}{1 + |f_2|^2} \right)_{\bar{z}} \right] = 0$$

$$\implies \frac{1}{2} \operatorname{Im}(T_1 + T_2) = 0$$

Além disso das equações (2.20) e (2.18) tem-se $\|V\|^2 = (|F_1|^2 + |F_2|^2)\|\varphi\|^2$, então sobre o conjunto onde $(f_1)_{\bar{z}} \neq 0$ e $(f_2)_{\bar{z}} \neq 0$ tem-se $V \neq 0$. ■

Pode-se agora reenunciar o teorema geral de existência para o caso $n = 4$.

Teorema 2.7 *Seja S_0 uma superfície de Riemann simplesmente conexa e seja $G: S_0 \rightarrow Q_2$ uma aplicação na quádrlica Q_2 representada localmente por um par de funções complexas $f_1(z), f_2(z)$ tais que $G(z) = [\varphi(z)]$ onde*

$$\varphi(z) = (1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z)))$$

1º caso: *Se $|F_1| \equiv |F_2| \equiv 0$ e S_0 é não compacta, então G é a aplicação de Gauss de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$.*

2º caso: *Se $|F_1|$ e $|F_2|$ nunca se anulam, então G é a aplicação de Gauss de uma superfície S em $\mathbb{R}^4$ dada por uma imersão conforme de S_0 se, e somente se, $|F_1| \equiv |F_2|$ e $\text{Im}(T_1 + T_2) \equiv 0$. Além disso, S é unicamente determinada a menos de uma translação e homotetia do $\mathbb{R}^4$.*

Demonstração: Pela relação (2.21) o caso (1) do teorema acima se reduz ao caso (2) do teorema geral de existência (Teorema (1.3)).

No caso (2) as equações $|F_1| \equiv |F_2|$ e $\text{Im}(T_1 + T_2) \equiv 0$ são precisamente a forma tomada pelas condições necessárias e suficientes, (1.12) e (1.13), quando $n = 4$. Portanto a existência de S no caso (2) segue do caso (1) do Teorema (1.3), enquanto que a unicidade segue do teorema de unicidade para superfícies com vetor curvatura média diferente de zero em algum ponto (Teorema (1.2)). ■

Corolário 2.4 *Com a notação do Teorema (2.7), se G é uma aplicação harmônica, e se F_1, F_2 nunca se anulam, então G é a aplicação de Gauss de uma imersão conforme de S_0 em $\mathbb{R}^4$ se, e somente se, $|F_1| \equiv |F_2|$.*

Demonstração: Identificando Q_2 com o produto de duas esferas de curvatura 2, $Q_2 = S_1 \times S_2$, e denotando por $\Gamma_k: Q_2 \rightarrow S_k$, para $k = 1, 2$, a aplicação projeção, tem-se, por definição, que a aplicação de Gauss G é harmônica se cada um dos fatores $g_k = \Gamma_k \circ G$ é uma aplicação harmônica na esfera S_k .

Portanto pelo lema (2.4) segue que G ser harmônica é equivalente a $L(f_1) \equiv L(f_2) \equiv 0$, ou seja $T_1 \equiv T_2 \equiv 0$. Então a condição $\text{Im}(T_1 + T_2) \equiv 0$ é automaticamente satisfeita, e o corolário segue do caso (2) do teorema anterior.

Em particular, este corolário mostra que o resultado de Kenmotsu que toda aplicação harmônica chegando na esfera surge como aplicação de Gauss de uma superfície de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ (ver Teorema (2.5)), não se estende para $\mathbb{R}^4$. Considerando por exemplo um par de funções complexas $f_1(z)$, $f_2(z)$, tais que $f_1(z)$ e $\bar{f}_2(z)$ são funções holomorfas não constantes. Então a condição $|F_1| \equiv |F_2|$ não se verifica e desse modo f_1 , f_2 não podem representar a aplicação de Gauss (no sentido de (2.15)) de alguma superfície em $\mathbb{R}^4$. Por outro lado, ambas representam aplicações harmônicas indo na esfera e desse modo a correspondente aplicação definida por

$G(z) = [\varphi(z)]$ onde

$$\varphi(z) = (1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z)))$$

é uma aplicação harmônica indo na Grassmanniana.

Corolário 2.5 *Seja Σ um subconjunto qualquer de Q_2 tal que $\Gamma_2(\Sigma)$ é um ponto e $\Gamma_1(\Sigma)$ não é um ponto nem um conjunto aberto. Então Σ não é imagem pela aplicação de Gauss de alguma superfície em $\mathbb{R}^4$.*

Demonstração: Se $\Gamma_2(\Sigma)$ é um ponto, então f_2 é constante e portanto $|F_2| \equiv 0$. E segue da equação $|F_1| \equiv |F_2|$ que f_1 é holomorfa. Portanto ou f_1 é constante ou a imagem pela f_1 de S é um conjunto aberto. ■

Proposição 2.6 *Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^4$, e seja G sua aplicação de Gauss dada, localmente, por um par de funções $f_1(z)$, $f_2(z)$ tais que $G = [\varphi(z)]$ e*

$$\varphi(z) = (1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z)))$$

onde z é um parâmetro local conforme sobre S .

Seja $A(z) = (f_2(z) - \bar{f}_1(z), -i(f_2(z) + \bar{f}_1(z)), 1 + \bar{f}_1(z)f_2(z), -i(1 - \bar{f}_1(z)f_2(z)))$. Então, sobre qualquer domínio de S onde f_1 e f_2 são ambos finitos, existe um referencial ortonormal adaptado e_1, e_2, e_3, e_4 dado por:

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}\text{Re}\bar{\varphi}}{\|\varphi\|} \quad e_2 = \frac{\sqrt{2}\text{Im}\bar{\varphi}}{\|\varphi\|} \quad e_3 = \frac{\sqrt{2}\text{Re}A}{\|A\|} \quad e_4 = \frac{\sqrt{2}\text{Im}A}{\|A\|}$$

correspondendo à uma orientação positiva em $\mathbb{R}^4$.

Demonstração: Como $[\varphi]$ é a aplicação de Gauss de S , tem-se, pela definição de G , que e_1, e_2 são vetores ortonormais e geram o plano tangente de S , em cada ponto.

Além disso,

$$\langle A, \varphi \rangle = \langle A, \bar{\varphi} \rangle \equiv 0 \implies \begin{cases} \operatorname{Im} \bar{\varphi} \perp \operatorname{Re} A \\ \operatorname{Im} \bar{\varphi} \perp \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Re} \bar{\varphi} \perp \operatorname{Re} A \\ \operatorname{Re} \bar{\varphi} \perp \operatorname{Im} A \end{cases}$$

e as relações (2.20) implicam $e_3 \perp e_4$ e e_3, e_4 unitários.

Note-se ainda que e_1, e_2, e_3, e_4 só estão definidos quando $\|A\|$ e $\|\varphi\|$ são finitas e, pela relação $\|A\|^2 = \|\varphi\|^2 = 2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)$, essa condição é equivalente a f_1 e f_2 serem ambas finitas.

A orientação positiva segue do fato que $\bar{\varphi}(0) = (1, -i, 0, 0)$ e $A(0) = (0, 0, 1, -i)$ ■

O próximo assunto estabelece relações entre as propriedades analíticas das componentes da aplicação de Gauss, isto é, das funções f_1, f_2 , e as propriedades geométricas da superfície S .

Lema 2.7 Seja $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $z \longmapsto f(z)$

uma função complexa. Então o jacobiano J de f é dado por $J = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$

Demonstração: Usando a identificação de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, seja

$$z = (\zeta + i\xi) = (\zeta, \xi) \quad \text{e} \quad f(z) = f_1(z) + if_2(z) = (f_1(\zeta, \xi), f_2(\zeta, \xi))$$

O jacobiano J de f é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \langle df(e_1), e_1 \rangle & \langle df(e_2), e_1 \rangle \\ \langle df(e_1), e_2 \rangle & \langle df(e_2), e_2 \rangle \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial f_2}{\partial \zeta}$$

onde $e_1 = (1, 0)$ $e_2 = (0, 1)$

Por outro lado usando a definição (1.3) das derivadas complexas têm-se:

$$\left. \begin{aligned} |f_z|^2 &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 \right] \\ |f_{\bar{z}}|^2 &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = J$$

■

Lema 2.8 *Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^4$ e seja $G: S \rightarrow Q_2$ sua aplicação de Gauss. Seja $\Gamma_k: Q_2 \rightarrow S_k$, para $k = 1, 2$, as projeções onde Q_2 é identificado com o produto de esferas de curvatura 2, $Q_2 = S_1 \times S_2$. Finalmente, seja J_k o jacobiano da aplicação $g_k = \Gamma_k \circ G$ de (S, ds^2) em S_k com a métrica canônica. Então $J_k = \frac{2}{\lambda^2} (|F_k|^2 - |\hat{F}_k|^2)$ onde*

$$F_k = \frac{(f_k)_{\bar{z}}}{1 + |f_k|^2}, \quad \hat{F}_k = \frac{(f_k)_z}{1 + |f_k|^2}$$

Demonstração:

Figura(2.4)

A métrica em S é dada por $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ (equação (1.4)) e S_k é isométrica a $\hat{\mathbb{C}}$ com a métrica $ds_5^2 = \frac{2|dw|^2}{(1+|w|^2)^2}$, através da aplicação $\tilde{P}$ (Proposição (2.5)).

Sejam:

$$\left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \quad \text{base ortonormal positiva em } T_p S$$

$$\left\{ \frac{1+|f_k|^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{1+|f_k|^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial u} \right\} \quad \text{base ortonormal positiva em } T_{g_k(p)} S_k$$

Isto é, as bases

$$\left\{ dg_k \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right), dg_k \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right\} \text{ e } \left\{ \left(\frac{1+|f_k|^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial v} \right), \left(\frac{1+|f_k|^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial u} \right) \right\}$$

estão na mesma orientação de $T_{g_k(p)} S_k$.

Por definição tem-se :

$$J_k = \begin{vmatrix} \ll df_k \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \frac{1+|f_k|^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial v} \gg & \ll df_k \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \frac{1+|f_k|^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial v} \gg \\ \ll df_k \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \frac{1+|f_k|^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial u} \gg & \ll df_k \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \frac{1+|f_k|^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial u} \gg \end{vmatrix}$$

onde $\ll, \gg_{g_k(p)} = \frac{2}{(1+|f_k|^2)^2} \langle, \rangle_{f_k(z)}$

Então

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{(1+|f_k|^2)^2}{2} \begin{vmatrix} \ll df_k \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \frac{\partial}{\partial v} \gg & \ll df_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right), \frac{\partial}{\partial v} \gg \\ \ll df_k \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \frac{\partial}{\partial u} \gg & \ll df_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right), \frac{\partial}{\partial u} \gg \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{4(1+|f_k|^2)^2}{2(1+|f_k|^2)^4} \begin{vmatrix} \langle df_k \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \frac{\partial}{\partial v} \rangle & \langle df_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right), \frac{\partial}{\partial v} \rangle \\ \langle df_k \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \frac{\partial}{\partial u} \rangle & \langle df_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right), \frac{\partial}{\partial u} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{\lambda^2(1+|f_k|^2)^2} (-J) \end{aligned}$$

onde J é o jacobiano da aplicação $f_k: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Segue pelo lema anterior que

$$J_k = \frac{-2}{\lambda^2(1+|f_k|^2)^2} (|(f_k)_z|^2 - |(f_k)_{\bar{z}}|^2) = \frac{2}{\lambda^2} (|F_k|^2 - |\hat{F}_k|^2).$$

■

Proposição 2.7 *Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^4$. A curvatura Gaussiana K e a curvatura normal K_n de S são dadas pelas fórmulas:*

$$K = J_1 + J_2$$

$$K_n = J_1 - J_2$$

Demonstração: Usando o lema (2.8) e a relação $|\hat{F}|^2 - |F|^2 = (\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f}F)_z$ de -
monstrada no Teorema (2.1), tem-se :

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 &= \frac{2}{\lambda^2} \{ (\bar{f}_1 F_1 + \bar{f}_2 F_2)_z - (\bar{f}_1 \hat{F}_1 + \bar{f}_2 \hat{F}_2)_{\bar{z}} \} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \left\{ (\eta)_z - \left[(\log(1 + |f_1|^2))_z - \frac{f_1(\bar{f}_1)_z}{1+|f_1|^2} + (\log(1 + |f_2|^2))_z - \frac{f_2(\bar{f}_2)_z}{1+|f_2|^2} \right]_{\bar{z}} \right\} \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \{ (\log\psi)_{z\bar{z}} + (\log(1 + |f_1|^2))_{z\bar{z}} + (\log(1 + |f_2|^2))_{z\bar{z}} - (f_1 \bar{F}_1 + f_2 \bar{F}_2)_{\bar{z}} \} \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \{ (\log\psi)_{z\bar{z}} + (\log(1 + |f_1|^2))_{z\bar{z}} + (\log(1 + |f_2|^2))_{z\bar{z}} + (\log\bar{\psi})_{z\bar{z}} \} \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} (\log\lambda^2)_{z\bar{z}} \end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 2\|X_z\|^2 \\ &= 2|\psi|^2\|\varphi\|^2 \\ &= 4|\psi|^2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2) \end{aligned}$$

Portanto $J_1 + J_2$ é precisamente a fórmula da curvatura Gaussiana em termos dos parâmetros isotérmicos.

Para provar que : $K_n = J_1 - J_2$, sejam:

$$\left\{ e_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z}, e_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\} \quad \text{referencial ortonormal orientado no fibrado tangente de } S$$

$$\left\{ e_3 = \frac{\sqrt{2}\operatorname{Re}A}{\|A\|}, e_4 = \frac{\sqrt{2}\operatorname{Im}A}{\|A\|} \right\} \quad \text{referencial ortonormal orientado no fibrado normal de } S$$

isto é

$$\left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi}, e_3, e_4 \right\} \quad \text{base positiva de } \mathbb{R}^4$$

Para qualquer 1- forma $w = adz + bd\bar{z}$ sobre S tem-se:

$$dw = \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} = \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$$

$$\implies dw(e_1, e_2) = \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}(e_1, e_2)$$

$$= \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \right) dz \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right) d\bar{z} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \right)$$

Portanto, $dw(e_1, e_2) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \right)$

Por definição, $\frac{i}{2} K_n = -dw_3^4(e_1, e_2)$, onde w_3^4 é a forma de conexão associada aos campos de vetores e_3, e_4 do fibrado normal da superfície S .

$$w_3^4 = adz + bd\bar{z}$$

$$w_3^4(e_1) = w_3^4 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= adz \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right) + bd\bar{z} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} a$$

$$w_3^4(e_2) = w_3^4 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$= adz \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + bd\bar{z} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} b$$

Por outro lado tem-se:

$$\begin{aligned} w_3^4(e_1) &= \langle \nabla_{e_1} e_3, e_4 \rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z}} e_3, e_4 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\langle \frac{\partial}{\partial z} (e_3), e_4 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2i\lambda \|A\|^2} \langle \bar{A}_z + A_z, \bar{A} - A \rangle \\ &= -\frac{1}{2i\lambda \|A\|^2} [\langle \bar{A}_z, \bar{A} \rangle - \langle \bar{A}_z, A \rangle + \langle A_z, \bar{A} \rangle - \langle A_z, A \rangle] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2i\|A\|^2}[\langle A_z, \bar{A} \rangle - \langle \bar{A}_z, A \rangle]$$

$$\begin{aligned} w_3^4(e_2) &= \langle \nabla_{e_2} e_3, e_4 \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(e_3), e_4 \rangle \\ &= -\frac{1}{2i\lambda\|A\|^2} \langle \bar{A}_{\bar{z}} + A_{\bar{z}}, \bar{A} - A \rangle \\ &= -\frac{1}{2i\lambda\|A\|^2} [-\langle \bar{A}_{\bar{z}}, A \rangle + \langle A_{\bar{z}}, \bar{A} \rangle] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2i\|A\|^2}[\langle A_{\bar{z}}, \bar{A} \rangle - \langle \bar{A}_{\bar{z}}, A \rangle]$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} = -\frac{1}{2i\|A\|^4} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\langle A_{\bar{z}}, \bar{A} \rangle - \langle \bar{A}_{\bar{z}}, A \rangle] \|A\|^2 - [\langle A_{\bar{z}}, \bar{A} \rangle - \langle \bar{A}_{\bar{z}}, A \rangle] (\|A\|^2)_z \right\}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i\|A\|^4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\langle A_z, \bar{A} \rangle - \langle \bar{A}_z, A \rangle] \|A\|^2 - [\langle A_z, \bar{A} \rangle - \langle \bar{A}_z, A \rangle] (\|A\|^2)_{\bar{z}} \right\}$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i\|A\|^2} \left\{ 2\langle A_{\bar{z}}, \bar{A}_z \rangle - 2\langle A_z, \bar{A}_{\bar{z}} \rangle \right\}$$

$$+ \frac{1}{2i\|A\|^4} \left\{ -2\langle A, \bar{A}_{\bar{z}} \rangle (\|A\|^2)_z + 2\langle \bar{A}_z, A \rangle (\|A\|^2)_{\bar{z}} \right\}$$

$$= -\frac{1}{i\|A\|^2} \left\{ \langle A_{\bar{z}}, \bar{A}_z \rangle - \langle A_z, \bar{A}_{\bar{z}} \rangle \right\}$$

$$+ \frac{1}{i\|A\|^4} \langle (\|A\|^2)_{\bar{z}} \bar{A}_z - (\|A\|^2)_z \bar{A}_{\bar{z}}, A \rangle$$

Sendo:

$$A = (f_2 - \bar{f}_1, -i(f_2 + \bar{f}_1), 1 + \bar{f}_1 f_2, -i(1 - \bar{f}_1 f_2))$$

$$A_{\bar{z}} = ((f_2)_{\bar{z}} - (\bar{f}_1)_{\bar{z}}, -i((f_2)_{\bar{z}} + (\bar{f}_1)_{\bar{z}}), (\bar{f}_1)_{\bar{z}} f_2 + \bar{f}_1 (f_2)_{\bar{z}}, i((\bar{f}_1)_{\bar{z}} f_2 + \bar{f}_1 (f_2)_{\bar{z}}))$$

$$A_z = ((f_2)_z - (\bar{f}_1)_z, -i((f_2)_z + (\bar{f}_1)_z), (\bar{f}_1)_z f_2 + \bar{f}_1 (f_2)_z, i((\bar{f}_1)_z f_2 + \bar{f}_1 (f_2)_z))$$

$$\bar{A} = (\bar{f}_2 - f_1, i(\bar{f}_2 + f_1), 1 + f_1 \bar{f}_2, i(1 - f_1 \bar{f}_2))$$

$$\bar{A}_z = ((\bar{f}_2)_z - (f_1)_z, i((\bar{f}_2)_z + (f_1)_z), (f_1)_z \bar{f}_2 + f_1 (\bar{f}_2)_z, -i((f_1)_z \bar{f}_2 + f_1 (\bar{f}_2)_z))$$

$$\bar{A}_{\bar{z}} = ((\bar{f}_2)_{\bar{z}} - (f_1)_{\bar{z}}, i((\bar{f}_2)_{\bar{z}} + (f_1)_{\bar{z}}), (f_1)_{\bar{z}} \bar{f}_2 + f_1 (\bar{f}_2)_{\bar{z}}, -i((f_1)_{\bar{z}} \bar{f}_2 + f_1 (\bar{f}_2)_{\bar{z}}))$$

$$\langle A_{\bar{z}}, \bar{A}_z \rangle - \langle A_z, \bar{A}_{\bar{z}} \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= 2\{[(f_2)_{\bar{z}}(\bar{f}_2)_z + (\bar{f}_1)_{\bar{z}}(f_1)_z + |f_2|^2(f_1)_z(\bar{f}_1)_{\bar{z}} + |f_1|^2(f_2)_{\bar{z}}(\bar{f}_2)_z + f_1 f_2(\bar{f}_1)_{\bar{z}}(\bar{f}_2)_z \\ &+ \bar{f}_1 \bar{f}_2(f_2)_{\bar{z}}(f_1)_z] - [(f_2)_z(\bar{f}_2)_{\bar{z}} + (\bar{f}_1)_z(f_1)_{\bar{z}} + |f_2|^2(\bar{f}_1)_z(f_1)_{\bar{z}} + |f_1|^2(f_2)_z(\bar{f}_2)_{\bar{z}} \\ &+ f_1 f_2(\bar{f}_1)_z(\bar{f}_2)_{\bar{z}} + \bar{f}_1 \bar{f}_2(f_2)_z(f_1)_{\bar{z}}]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (\|A\|^2)_{\bar{z}} \bar{A}_z - (\|A\|^2)_z \bar{A}_{\bar{z}}, A \rangle &= \\
&= 2\|A\|^2 \left\{ f_1 f_2 (\bar{f}_2)_z (\bar{f}_1)_{\bar{z}} + \frac{|f_2|^2(1+|f_1|^2)}{1+|f_2|^2} [(\bar{f}_2)_z (f_2)_{\bar{z}} - (\bar{f}_2)_{\bar{z}} (f_2)_z] \right. \\
&\quad + \frac{|f_1|^2(1+|f_2|^2)}{1+|f_1|^2} [(f_1)_z (\bar{f}_1)_{\bar{z}} - (f_1)_{\bar{z}} (\bar{f}_1)_z] + \bar{f}_1 \bar{f}_2 (f_1)_z (f_2)_{\bar{z}} - f_1 f_2 (\bar{f}_2)_{\bar{z}} (\bar{f}_1)_z \\
&\quad \left. - \bar{f}_1 \bar{f}_2 (f_1)_{\bar{z}} (f_2)_z \right\}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{i\|A\|^2} \left\{ \langle A_{\bar{z}}, \bar{A}_z \rangle - \langle A_z, \bar{A}_{\bar{z}} \rangle \right\} + \frac{1}{i\|A\|^4} \langle (\|A\|^2)_{\bar{z}} \bar{A}_z - (\|A\|^2)_z \bar{A}_{\bar{z}}, A \rangle \\
&= -\frac{2}{i\|A\|^2} \left\{ (f_2)_{\bar{z}} (\bar{f}_2)_z \left[1 + |f_1|^2 - \frac{|f_2|^2(1+|f_1|^2)}{1+|f_2|^2} \right] - (f_2)_z (\bar{f}_2)_{\bar{z}} \left[1 + |f_1|^2 - \frac{|f_2|^2(1+|f_1|^2)}{1+|f_2|^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + (\bar{f}_1)_{\bar{z}} (f_1)_z \left[1 + |f_2|^2 - \frac{|f_1|^2(1+|f_2|^2)}{1+|f_1|^2} \right] - (\bar{f}_1)_z (f_1)_{\bar{z}} \left[1 + |f_2|^2 - \frac{|f_1|^2(1+|f_2|^2)}{1+|f_1|^2} \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{i\|A\|^2} \left\{ \frac{(|(f_2)_z|^2 - |(f_2)_{\bar{z}}|^2)}{(1+|f_2|^2)^2} \|A\|^2 + \frac{(|(f_1)_z|^2 - |(f_1)_{\bar{z}}|^2)}{(1+|f_1|^2)^2} \|A\|^2 \right\} \\
&= \frac{\lambda^2}{2i} (J_1 - J_2) \\
&\implies dw_3^4(e_1, e_2) = \frac{1}{2i} (J_1 - J_2) \\
&\implies \frac{i}{2} K_n = -dw_3^4(e_1, e_2) \\
&\quad = -\frac{1}{2i} (J_1 - J_2) \\
&\implies K_n = -\frac{1}{i^2} (J_1 - J_2) \\
&\quad = J_1 - J_2
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.8 *Seja S uma superfície orientada, compacta, imersa em $\mathbb{R}^4$. Então a curvatura total de S é igual à soma das áreas algébricas das imagens dos fatores da aplicação de Gauss:*

$$\int_S K dA = \int_S J_1 dA + \int_S J_2 dA = 2\pi(d_1 + d_2)$$

onde d_k é o grau da aplicação g_k . A curvatura normal total é dada pela diferença das áreas:

$$\int_S K_n dA = \int_S J_1 dA - \int_S J_2 dA = 2\pi(d_1 - d_2)$$

Além disso, se $\int_S K_n dA = 0$ então $d_1 = d_2 = \frac{\chi(S)}{2}$ onde $\chi(S)$ denota a característica de Euler de S .

Demonstração: Como S é compacta e g_k é contínua tem-se que a imagem de S pela g_k é a esfera $S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. O teorema segue desse fato juntamente com a proposição (2.7).

Observando ainda a fórmula de Gauss-Bonnet, $\int_S K dA = 2\pi\chi(S)$, tem-se: $2\pi(d_1 + d_2) = 2\pi\chi(S)$, e portanto, se $d_1 = d_2$ então $2d_1 = \chi(S)$, ou seja, $d_1 = d_2 = \frac{\chi(S)}{2}$. ■

Lema 2.9 Seja $f(z)$ um função complexa de classe C^3 . Então sobre o conjunto onde $f_z \neq 0$ a seguinte relação se verifica :

$$(\log|F|)_{z\bar{z}} = \operatorname{Re}\{T\} + |\hat{F}|^2 - |F|^2$$

Demonstração: Usando a relação : $|\hat{F}|^2 - |F|^2 = (\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f}F)_z$, e a definição

$$T(f) = \left(\frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - 2 \frac{\bar{f}f_z}{1 + |f|^2} \right)_{\bar{z}} = (\log(f_{\bar{z}}))_{z\bar{z}} - 2(\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}}$$

tem-se

$$\operatorname{Re}T(f) = \operatorname{Re}[(\log(f_{\bar{z}}))_{z\bar{z}}] - 2\operatorname{Re}[(\bar{f}F)_z] - 2|\hat{F}|^2 + 2|F|^2$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\log(1 + |f|^2))_{\bar{z}} &= \bar{f}F + f\bar{\hat{F}} \\ \implies (\log(1 + |f|^2))_{z\bar{z}} &= (\bar{f}F)_z + (f\bar{\hat{F}})_z \\ \implies (\log(1 + |f|^2))_{z\bar{z}} &= (\bar{f}F)_z + |\hat{F}|^2 - |F|^2 + (f\bar{F})_{\bar{z}} \\ &= 2\operatorname{Re}[(\bar{f}F)_z] + |\hat{F}|^2 - |F|^2 \\ &= \operatorname{Re}[(\log(1 + |f|^2))_{z\bar{z}}] \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(T(f)) &= \operatorname{Re}\{[\log(f_{\bar{z}})]_{z\bar{z}}\} - \operatorname{Re}\{[\log(1 + |f|^2)]_{z\bar{z}}\} - |\hat{F}|^2 + |F|^2 \\ &= \operatorname{Re}[(\log F)_{z\bar{z}}] - |\hat{F}|^2 + |F|^2 \\ &= (\log|F|)_{z\bar{z}} - |\hat{F}|^2 + |F|^2 \end{aligned}$$

■

Proposição 2.8 *Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^4$, seja (f_1, f_2) representação local das componentes da aplicação de Gauss e sejam T_1, T_2 dados por*

$$T_i = \left[\frac{(f_i)_{z\bar{z}}}{(f_i)_{\bar{z}}} - 2\bar{f}_i \hat{F}_i \right]_{\bar{z}} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

sobre o conjunto onde $(f_1)_{\bar{z}}$ e $(f_2)_{\bar{z}}$ são não nulos. Então a curvatura K_n do fibrado normal à S é dada por :

$$K_n = \frac{2}{\lambda^2} \text{Re}(T_1 - T_2) = \frac{2}{\lambda^2} (T_1 - \bar{T}_2)$$

Demonstração: *Da proposição (2.7) e da condição básica $|F_1| \equiv |F_2|$ dada no teorema geral de existência e unicidade para o caso $n = 4$, tem-se*

$$K_n = J_1 - J_2 = \frac{2}{\lambda^2} (|\hat{F}_2|^2 - |\hat{F}_1|^2)$$

Portanto, pelo Lema (2.9) segue que

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{2}{\lambda^2} [(\log |F_2|)_{z\bar{z}} + |F_2|^2 - \text{Re}(T_2)] - [(\log |F_1|)_{z\bar{z}} + |F_1|^2 - \text{Re}(T_1)] \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \text{Re}(T_1 - T_2) \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \text{Re}(T_1 - \bar{T}_2) \\ &= \frac{2}{\lambda^2} (T_1 - \bar{T}_2) \end{aligned}$$

visto que uma superfície S em $\mathbb{R}^2$ satisfaz à condição básica

$$\text{Im}(T_1 + T_2) = \text{Im}(T_1 - \bar{T}_2) \equiv 0 \quad \text{onde } (f_1)_{\bar{z}} \neq 0 \text{ e } (f_2)_{\bar{z}} \neq 0 \quad \blacksquare$$

Corolário 2.6 *Uma superfície S em $\mathbb{R}^4$ cuja curvatura média nunca se anula, tem $K_n \equiv 0$ se, e somente se, $\text{Re}T_1 = \text{Re}T_2$, ou equivalentemente, $T_2 = \bar{T}_1$.*

Demonstração: *Da equação (1.11) tem-se $\|V\|^2 = \|\varphi\|^4 |\psi|^2 \|H\|^2$*

Das equações (2.18) e (2.20) segue

$$\|H\|^2 = \frac{|F_1|^2 + |F_2|^2}{|\psi|^2 \|\varphi\|^2} = \frac{2(|F_1|^2 + |F_2|^2)}{\lambda^2} \quad (2.22)$$

que junto com a condição básica $|F_1| \equiv |F_2|$ implicam que a hipótese de H nunca se anular é equivalente à $(f_1)_{\bar{z}}$ e $(f_2)_{\bar{z}}$ nunca se anularem.

Portanto, pela proposição anterior,

$$K_n = 0 \iff \text{Re}T_1 = \text{Re}T_2 \iff T_1 = \overline{T_2}$$

■

Entre superfícies em $\mathbb{R}^4$ para as quais $\overline{T_1} = T_2$ vale automaticamente, estão aquelas com aplicação de Gauss harmônica, pois neste caso particular $T_1 = T_2 = 0$.

A proposição seguinte mostra que incluída entre superfícies com aplicação de Gauss harmônica está a importante subclasse de superfícies mínimas em uma 3-esfera $S^3(r)$ de $\mathbb{R}^4$.

Proposição 2.9 *Uma superfície S em $\mathbb{R}^4$ está contida minimamente em alguma 3-esfera $S^3(r)$ se, e somente se, as funções $f_1(z), f_2(z)$ definindo a aplicação de Gauss em termos de um parâmetro isotérmico z satisfazem:*

$$a) \quad (f_1)_{\bar{z}} \neq 0 \quad (f_2)_{\bar{z}} \neq 0 \quad \text{em todo ponto}$$

$$b) \quad \frac{(f_1)_z}{(f_1)_{\bar{z}}} = -\frac{(f_2)_z}{(f_2)_{\bar{z}}} \quad \text{em todo ponto}$$

$$c) \quad L[f_1] = L[f_2] \equiv 0$$

Demonstração: A condição (c) é a afirmação de que a aplicação de Gauss é harmônica.

Da equação (2.22) a condição (a) é equivalente a curvatura média de S nunca se anular.

É um resultado conhecido [14, Teorema 2] que a aplicação de Gauss de uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^n$ é ao mesmo tempo harmônica e conforme se, e somente se, S é mínima em $\mathbb{R}^n$ ou S é mínima em uma hiperesfera de $\mathbb{R}^n$.

Portanto uma superfície S em $\mathbb{R}^4$ satisfazendo (a) e (c) é mínima em algum $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ se, e somente se, a aplicação de Gauss de S é conforme.

Seja $d\hat{s}^2$ o “pull-back” da métrica sobre a Grassmanniana pela aplicação de Gauss. Então pela Proposição (2.4) e pela equação (2.15) tem-se:

$$\begin{aligned}
d\hat{s}^2 &= \frac{2|df_1|^2}{(1+|f_1|^2)^2} + \frac{2|df_2|^2}{(1+|f_2|^2)^2} \\
&= \frac{2|(f_1)_z dz + (f_1)_{\bar{z}} d\bar{z}|^2}{(1+|f_1|^2)^2} + \frac{2|(f_2)_z dz + (f_2)_{\bar{z}} d\bar{z}|^2}{(1+|f_2|^2)^2} \\
&= 2(|\hat{F}_1|^2 + |F_1|^2 + |\hat{F}_2|^2 + |F_2|^2)|dz|^2 \\
&\quad + 2(\overline{F_1} \hat{F}_1 dz^2 + \overline{\hat{F}_1} F_1 dz^2 + \overline{F_2} \hat{F}_2 dz^2 + \overline{\hat{F}_2} F_2 dz^2) \\
&= 2(|\hat{F}_1|^2 + |F_1|^2 + |\hat{F}_2|^2 + |F_2|^2)|dz|^2 + 4\text{Re}\{(\overline{F_1} \hat{F}_1 + \overline{F_2} \hat{F}_2)dz^2\}
\end{aligned}$$

Segue que a aplicação de Gauss é conforme se, e somente se $\overline{F_1} \hat{F}_1 + \overline{F_2} \hat{F}_2 = 0$

Por outro lado, a condição básica de integrabilidade $|F_1| \equiv |F_2|$ pode ser escrita como $F_1 \overline{F_1} - F_2 \overline{F_2} = 0$ enquanto que a condição

a) $(f_1)_{\bar{z}} \neq 0$ e $(f_2)_{\bar{z}} \neq 0$ é equivalente à $F_1 \neq 0$ e $F_2 \neq 0$

Assim, se G é conforme, as equações :

$$(1) \quad \overline{F_1} \hat{F}_1 + \overline{F_2} \hat{F}_2 = 0$$

$$(2) \quad \overline{F_1} F_1 - \overline{F_2} F_2 = 0$$

consideradas como equações lineares simultâneas em $\overline{F_1}, \overline{F_2}$ têm solução não trivial e portanto

$$\begin{vmatrix} F_1 & -F_2 \\ \hat{F}_1 & \hat{F}_2 \end{vmatrix} = F_1 \hat{F}_2 + \hat{F}_1 F_2 = 0$$

Mas, a equação $F_1 \hat{F}_2 + \hat{F}_1 F_2 = 0$ é equivalente à

$$(f_1)_{\bar{z}}(f_2)_z + (f_2)_{\bar{z}}(f_1)_z = 0$$

De fato:

$$F_1 \hat{F}_2 + \hat{F}_1 F_2 = 0 \iff \frac{(f_1)_{\bar{z}}}{1+|f_1|^2} \frac{(f_2)_z}{1+|f_2|^2} + \frac{(f_1)_z}{1+|f_1|^2} \frac{(f_2)_{\bar{z}}}{1+|f_2|^2} = 0$$

$$\iff \frac{(f_1)_{\bar{z}}(f_2)_z + (f_1)_z(f_2)_{\bar{z}}}{(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2)} = 0 \iff (f_1)_{\bar{z}}(f_2)_z + (f_1)_z(f_2)_{\bar{z}} = 0$$

$$\iff \frac{(f_1)_z}{(f_1)_{\bar{z}}} = -\frac{(f_2)_z}{(f_2)_{\bar{z}}}$$

que é a condição (b) do teorema.

Reciprocamente se $\frac{(f_1)_z}{(f_1)_{\bar{z}}} = -\frac{(f_2)_z}{(f_2)_{\bar{z}}}$ então $F_1\hat{F}_2 + \hat{F}_1F_2 = 0$ que junto com

$F_1\overline{F_1} - F_2\overline{F_2} = 0$ e com $F_1 \neq 0$ e $F_2 \neq 0$ implicam que

$$\begin{vmatrix} \overline{F_1} & -\overline{F_2} \\ \hat{F}_2 & \hat{F}_1 \end{vmatrix} = \overline{F_1}\hat{F}_1 + \overline{F_2}\hat{F}_2 = 0$$

que é a condição de conformidade da aplicação de Gauss. E isto completa a prova. ■

Capítulo 3

Espaços hiperbólicos

Neste capítulo desenvolve-se alguns fatos básicos sobre os espaços hiperbólicos, os quais permitem um estudo comparativo entre estes e os espaços euclidianos e fornecem condições para se adaptar a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores para o caso de superfícies imersas em espaços hiperbólicos. Para isso, usa-se o semi-hiperplano superior como modelo para o espaço hiperbólico e explora-se a conformidade entre as métricas induzidas sobre a superfície, pelas métricas euclidiana e hiperbólica através da imersão.

No texto, denota-se por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica euclidiana usual sobre $\mathbb{R}^n$ e por $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{R}_+^n$ o conjunto $K = \{(x, t) / x \in \mathbb{R}^{n-1}, t > 0\}$ com as métricas $(\cdot, \cdot)_{(x,t)} = \frac{1}{t^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respectivamente. Dada uma variedade m -dimensional M , denotam-se por X e $\tilde{X}$ imersões conformes respectivamente de M em $\mathbb{R}_+^n$ e de M em $\mathbb{H}^n$ com $X(p) = \tilde{X}(p)$, $\forall p \in M$.

Proposição 3.1 *Se ∇ e $\tilde{\nabla}$ são as conexões Levi-Civita com respeito à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $(\cdot, \cdot)$ em K , respectivamente, e se Y é um subconjunto aberto de K então:*

$$\tilde{\nabla}_V W = \nabla_V W - \frac{1}{t} \langle V, U_n \rangle W - \frac{1}{t} \langle W, U_n \rangle V + \frac{1}{t} \langle V, W \rangle U_n \quad \forall V, W \in \chi(Y) \quad (3.1)$$

onde $U_n(x, t) = (0, 0, \dots, 0, 1)$, $\forall (x, t) \in K$ e $\chi(Y)$ é o conjunto dos campos de vetores tangentes diferenciáveis definidos sobre Y .

Demonstração: Seja (e_A) , $A = 1, 2, \dots, n$, referencial ortonormal de $\mathbb{R}_+^n$ e seja $(\tilde{e}_A)$ dado por $\tilde{e}_A(x, t) = te_A(x, t)$. Então $(\tilde{e}_A)$ é um referencial ortonormal de $\mathbb{H}^n$.

De fato,

$$(\tilde{e}_A, \tilde{e}_B)_{(x,t)} = \frac{1}{t^2} \langle \tilde{e}_A, \tilde{e}_B \rangle = \frac{1}{t^2} \langle te_A, te_B \rangle = \langle e_A, e_B \rangle = \delta_{AB}$$

Sejam (Θ^A) e $(\tilde{\Theta}^A)$, $A = 1, 2, \dots, n$, os referencias duais de (e_A) e $(\tilde{e}_A)$, respectivamente. Desta forma, tem-se $\tilde{\Theta}^A = \frac{1}{t}\Theta^A$, pois

$$\tilde{\Theta}^A(\tilde{e}_B) = \tilde{\Theta}^A(te_B) = \frac{1}{t}\Theta^A(te_B) = \Theta^A(e_B) = \delta_{AB}$$

Sejam (Θ_B^A) e $(\tilde{\Theta}_B^A)$, $A, B = 1, 2, \dots, n$, as 1-formas de conexão relativas a (e_A) e $(\tilde{e}_A)$ com respeito à ∇ e $\tilde{\nabla}$, isto é :

$$\begin{aligned} \Theta_B^A(V) &= \langle \nabla_V e_B, e_A \rangle, \quad \forall V \in \chi(Y) \\ \tilde{\Theta}_B^A(V) &= \langle \tilde{\nabla}_V \tilde{e}_B, \tilde{e}_A \rangle \end{aligned}$$

Da primeira equação de estrutura de M obtem-se:

$$\begin{cases} I) & d\Theta^A = \sum_B -\Theta_B^A \wedge \Theta^B, \quad \forall A \quad e \quad \Theta_B^A = -\Theta_A^B \\ II) & d\tilde{\Theta}^A = \sum_B -\tilde{\Theta}_B^A \wedge \tilde{\Theta}^B, \quad \forall A \quad e \quad \tilde{\Theta}_B^A = -\tilde{\Theta}_A^B \end{cases}$$

Por outro lado:

$$III) \quad d\tilde{\Theta}^A = d\left(\frac{1}{t}\Theta^A\right) = d\left(\frac{1}{t}\right) \wedge \Theta^A + \frac{1}{t}d\Theta^A = \sum_B -\frac{1}{t^2} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^B \wedge \Theta^A + \frac{1}{t}d\Theta^A$$

Visto que:

$$\left(d\left(\frac{1}{t}\right)\right)(V) = \left\langle -\frac{1}{t^2}U_n, \sum_B \Theta^B(V) e_B \right\rangle = \left(\sum_B -\frac{1}{t^2} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^B\right)(V)$$

De (I), (II) e (III) segue:

$$\begin{aligned} & \sum_B -\tilde{\Theta}_B^A \wedge \tilde{\Theta}^B = \sum_B -\frac{1}{t^2} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^B \wedge \Theta^A + \frac{1}{t} \sum_B -\Theta_B^A \wedge \Theta^B, \quad \forall A \\ \Rightarrow & \sum_B (-\tilde{\Theta}_B^A) \wedge \left(\frac{1}{t}\Theta^B\right) = \sum_B \frac{1}{t^2} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A \wedge \Theta^B - \frac{1}{t} \sum_B \Theta_B^A \wedge \Theta^B \\ \Rightarrow & \sum_B (\tilde{\Theta}_B^A - \Theta_B^A + \frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A) \wedge \Theta^B = 0, \quad \forall A. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Cartan segue que:

$$V) \quad \tilde{\Theta}_B^A - \Theta_B^A + \frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A = \sum_C \alpha_{BC}^A \Theta^C, \quad \forall A, B \quad e \quad \alpha_{BC}^A = \alpha_{CB}^A, \quad \forall A, B, C.$$

Mas, (V) juntamente com a antissimetria de $\tilde{\Theta}_B^A$ e Θ_B^A implicam que:

$$\frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A + \frac{1}{t} \langle U_n, e_A \rangle \Theta^B = \sum_C \alpha_{BC}^A \Theta^C + \sum_C \alpha_{AC}^B \Theta^C, \quad \forall A, B$$

$$\Rightarrow \text{VI)} \quad \frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A(e_C) + \frac{1}{t} \langle U_n, e_A \rangle \Theta^B(e_C) = \alpha_{BC}^A + \alpha_{AC}^B, \quad \forall A, B, C.$$

Então, se $C \neq B$, $\forall A, B, C$ tem-se $\alpha_{BC}^A = \alpha_{CB}^A$ e

$$\begin{cases} \frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A(e_C) = \alpha_{BC}^A + \alpha_{AC}^B \\ \frac{1}{t} \langle U_n, e_C \rangle \Theta^B(e_A) + \frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^C(e_A) = \alpha_{CA}^B + \alpha_{BA}^C \\ \frac{1}{t} \langle U_n, e_C \rangle \Theta^A(e_B) = \alpha_{CB}^A + \alpha_{AB}^C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{VIII)} \quad \alpha_{BC}^A = 0 \quad \text{se } C \neq B, \quad \forall A, B, C.$$

Ainda de (VI) tem-se :

$$\frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A(e_B) + \frac{1}{t} \langle U_n, e_A \rangle \Theta^B(e_B) = \alpha_{BB}^A + \alpha_{AB}^B$$

Mas de (V)

$$\alpha_{AB}^B = \alpha_{BA}^B = \tilde{\Theta}_B^B(e_A) - \Theta_B^B(e_A) + \frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^B(e_A) = \frac{1}{t} \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A(e_B)$$

Portanto (V) juntamente com o fato que $\alpha_{BC}^A = 0$ se $C \neq B$ e

$\alpha_{BB}^A = \frac{1}{t} \langle U_n, e_A \rangle$, $\forall A, B$ implicam:

$$\tilde{\Theta}_B^A = \Theta_B^A + \frac{1}{t} [\langle U_n, e_A \rangle \Theta^B - \langle U_n, e_B \rangle \Theta^A], \quad \forall A, B. \quad (3.2)$$

Visto que:

$$\tilde{\nabla}_V \tilde{e}_A = \sum_B (\tilde{\nabla}_V \tilde{e}_A, \tilde{e}_B) \tilde{e}_B = \sum_B \tilde{\Theta}_A^B(V) \tilde{e}_B \quad \text{e} \quad \nabla_V e_A = \sum_B \Theta_A^B(V) e_B$$

segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_V W &= \tilde{\nabla}_V (\sum_A (W, \tilde{e}_A) \tilde{e}_A) \\ &= \sum_A (\tilde{\nabla}_V (W, \tilde{e}_A) \tilde{e}_A) \\ &= \sum_A \{ [d(W, \tilde{e}_A)](V) \tilde{e}_A + (W, \tilde{e}_A) \tilde{\nabla}_V \tilde{e}_A \}, \quad \text{onde} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_V \tilde{e}_A &= \sum_B (\tilde{\Theta}_A^B(V) \tilde{e}_B) \\ &= \sum_B (\Theta_A^B(V) \tilde{e}_B) + \frac{1}{t} \sum_B [\langle U_n, e_B \rangle \Theta^A(V) - \langle U_n, e_A \rangle \Theta^B(V)] \tilde{e}_B \\ &= t \sum_B (\Theta_A^B(V) e_B) + \Theta^A(V) U_n - \langle U_n, e_A \rangle V \\ &= t \nabla_V e_A + \langle V, e_A \rangle U_n - \langle U_n, e_A \rangle V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_A ((W, \tilde{e}_A) \tilde{\nabla}_V \tilde{e}_A) &= \sum_A \left(\frac{1}{t} \langle W, e_A \rangle \tilde{\nabla}_V \tilde{e}_A \right) \\
&= \sum_A \left(\langle W, e_A \rangle \nabla_V e_A \right) + \frac{1}{t} \langle W, V \rangle U_n - \frac{1}{t} \langle U_n, W \rangle V \\
&= \nabla_V W - \sum_A [d \langle W, e_A \rangle](V) e_A + \frac{1}{t} \langle W, V \rangle U_n \\
&\quad - \frac{1}{t} \langle U_n, W \rangle V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d(W, \tilde{e}_A)](V) &= \langle W, e_A \rangle [d(\frac{1}{t})](V) + \frac{1}{t} [d \langle W, e_A \rangle](V) \\
&= \langle W, e_A \rangle \langle -\frac{1}{t^2} U_n, V \rangle + \frac{1}{t} [d \langle W, e_A \rangle](V)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_A [d(W, \tilde{e}_A)](V) \tilde{e}_A &= -\frac{1}{t} \langle U_n, V \rangle \sum_A \langle W, e_A \rangle e_A + \sum_A [d \langle W, e_A \rangle](V) e_A \\
&= -\frac{1}{t} \langle U_n, V \rangle W + \sum_A [d \langle W, e_A \rangle](V) e_A
\end{aligned}$$

Portanto

$$\tilde{\nabla}_V W = \nabla_V W + \frac{1}{t} \langle W, V \rangle U_n - \frac{1}{t} \langle U_n, W \rangle V - \frac{1}{t} \langle U_n, V \rangle W$$

■

Proposição 3.2 *Seja M uma variedade m -dimensional. Sejam X e $\tilde{X}$ imersões conforme de M em $\mathbb{R}_+^n$ e de M em $\mathbb{H}^n$, respectivamente, com $X(p) = \tilde{X}(p), \forall p \in M$. Se $\tilde{B}$ e B , $\tilde{H}$ e H são, respectivamente, a segunda forma fundamental e os vetores curvatura média das imersões conforme $\tilde{X}$ e X . Então:*

$$\tilde{B}(V, W) = B(V, W) + \frac{1}{t} \langle dX(V), dX(W) \rangle (U_n)^N, \quad \forall V, W \in \chi(M) \quad (3.3)$$

$$\tilde{H} = t^2 H + t(U_n)^N \quad (3.4)$$

$$\tilde{X} \text{ é mínima se, e somente, } H = -\frac{1}{t}(U_n)^N \quad (3.5)$$

onde $()^N$ indica a projeção ortogonal no fibrado normal de campos de vetores ao longo de X .

Demonstração: Sejam (e_A) e $(\tilde{e}_A = te_A)$, $1 \leq A \leq n$, referenciais ortonormais adaptados às imersões X e $\tilde{X}$, tais que para $1 \leq A \leq m$, são referenciais ortonormais no fibrado tangente. Então da definição de $\tilde{B}$ e de (3.1) tem-se :

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(V, W) &= \sum_{i=m+1}^n (\tilde{\nabla}_{d\tilde{X}(V)} d\tilde{X}(W), \tilde{e}_i) \tilde{e}_i = \sum_{i=m+1}^n \langle \tilde{\nabla}_{d\tilde{X}(V)} d\tilde{X}(W), e_i \rangle e_i \\
&= \sum_{i=m+1}^n \langle \nabla_{d\tilde{X}(V)} d\tilde{X}(W) - \frac{1}{t} \langle d\tilde{X}(V), U_n \rangle d\tilde{X}(W), e_i \rangle e_i \\
&+ \sum_{i=m+1}^n \langle -\frac{1}{t} \langle d\tilde{X}(W), U_n \rangle d\tilde{X}(V) + \frac{1}{t} \langle d\tilde{X}(V), d\tilde{X}(W) \rangle U_n, e_i \rangle e_i \\
&= \sum_{i=m+1}^n \{ \langle \nabla_{dX(V)} dX(W), e_i \rangle e_i + \frac{1}{t} \langle dX(V), dX(W) \rangle \langle U_n, e_i \rangle e_i \} \\
&= B(V, W) + \frac{1}{t} \langle dX(V), dX(W) \rangle (U_n)^N
\end{aligned}$$

Da definição de $\tilde{H}$ e da relação acima segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{B}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (B(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) + \frac{1}{t} \langle dX(\tilde{e}_i), dX(\tilde{e}_i) \rangle (U_n)^N) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (t^2 B(e_i, e_i) + t \langle dX(e_i), dX(e_i) \rangle (U_n)^N) \\
&= t^2 H + t (U_n)^N
\end{aligned}$$

e isso conclui a prova. ■

Proposição 3.3 Se h_{ij}^ν e $\tilde{h}_{ij}^\nu$ são os coeficientes da 2ª forma fundamental de X na direção normal e_ν e de $\tilde{X}$ na direção normal $\tilde{e}_\nu$, respectivamente. Então:

$$\tilde{h}_{ij}^\nu = th_{ij}^\nu + \langle dX(e_i), dX(e_j) \rangle \langle U_n, e_\nu \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq m \text{ e } m+1 \leq \nu \leq n \quad (3.6)$$

onde (e_A) , $1 \leq A \leq n$, é um referencial ortonormal local adaptado à imersão X .

Demonstração: Da equação (3.3) têm-se:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{ij}^\nu &= (\tilde{B}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), \tilde{e}_\nu) \\
&= \frac{1}{t^2} \langle t^2 \tilde{B}(e_i, e_j), te_\nu \rangle \\
&= t \langle B(e_i, e_j) + \frac{1}{t} \langle dX(e_i), dX(e_j) \rangle (U_n)^N, e_\nu \rangle \\
&= th_{ij}^\nu + \langle dX(e_i), dX(e_j) \rangle \langle U_n, e_\nu \rangle
\end{aligned}$$
■

Corolário 3.1 Sejam M uma superfície m -dimensional, $\tilde{X}$ e X imersões conformes de M em $\mathbb{H}^n$ e de M em $\mathbb{R}_+^n$, respectivamente, com $X(p) = \tilde{X}(p)$, $\forall p \in M$. Então $p \in M$ é ponto umbílico para $\tilde{X}$ se, e somente se p é ponto umbílico para X .

Demonstração: Por definição $p \in M$ é ponto umbílico para $\tilde{X}$ se, e somente se,

$$\forall \nu, \exists \tilde{\lambda}_\nu \in \mathbb{R} \text{ tal que } \tilde{A}^\nu(V) = \tilde{\lambda}_\nu V, \quad \forall V \in T_p M,$$

onde $\tilde{A}^\nu$ é o operador de Weingarten na direção normal $\tilde{e}_\nu$ associado a $\tilde{X}$. Esta afirmação é equivalente à :

$$\forall \nu, \quad \tilde{h}_{ij}^\nu = 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } \tilde{h}_{ii}^\nu = \tilde{\lambda}_\nu$$

Da proposição (3.3) segue que p é ponto umbílico para $\tilde{X}$ se, e somente se

$$\forall \nu, \quad th_{ij}^\nu = 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } h_{ii}^\nu = \frac{1}{t}(\tilde{\lambda}_\nu - \langle U_n, e_\nu \rangle) = \lambda_\nu$$

que é equivalente a definição de p ser ponto umbílico para X . ■

Para definir a aplicação normal de Gauss de uma imersão $\tilde{X}$, observa-se que, se $q = (0, 0, \dots, 0, 1)$, então $T_q \mathbb{H}^n$ é o próprio $\mathbb{R}^n$, já que $\langle \cdot, \cdot \rangle_q = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Assim, se $L_{x,q}$ é uma isometria de $\mathbb{H}^n$ que leva x em q , tem-se $(L_{x,q})_*(T_x \mathbb{H}^n) = T_q \mathbb{H}^n \equiv \mathbb{R}^n$, e isto sugere a proposição dada a seguir, que por sua vez, motiva a definição da aplicação normal de Gauss no modelo do semi-hiperplano superior para $\mathbb{H}^n$.

Proposição 3.4 Dado $(x, t) \in \mathbb{H}^n$ seja $\hat{x} = (x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, 0)$. Então dado $(a, b) \in \mathbb{H}^n$ a aplicação

$$\begin{aligned} L_{a,b}: \mathbb{H}^n &\longrightarrow \mathbb{H}^n \\ (x, t) &\longmapsto \frac{b^n}{a^n}[(x, t) - \hat{a}] + \hat{b} \end{aligned}$$

é uma isometria de $\mathbb{H}^n$ tal que $L_{a,b}(a) = b$ e $(L_{a,b})_*(v) = \frac{b^n}{a^n}v$, $\forall v \in T_a(\mathbb{H}^n)$.

Demonstração: Observa-se que $L_{a,b}$ é inversível e sua inversa é dada por

$$(L_{a,b})^{-1} = L_{b,a} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} L_{a,b}(a) &= \frac{a^n}{b^n}(a - \hat{a}) + \hat{b} \\ &= \frac{b^n}{a^n}(0, 0, \dots, 0, a^n) + (b^1, b^2, \dots, b^{n-1}, 0) = b \end{aligned}$$

$$(L_{a,b})_*(x, t) = \frac{b^n}{a^n} Id$$

$$\begin{aligned} ((L_{a,b})_*(v), (L_{a,b})_*(w))_{L_{a,b}(x,t)} &= \frac{1}{\left(\frac{b^n}{a^n}t\right)^2} \left\langle \frac{b^n}{a^n}v, \frac{b^n}{a^n}w \right\rangle \\ &= \frac{1}{t^2} \langle v, w \rangle = (v, w)_{(x,t)}, \quad \forall v, w \in T_{(x,t)}(\mathbb{H}^n) \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Portanto se S é uma superfície imersa em $\mathbb{H}^n$ dada por um par $(S_0, \tilde{X})$ onde S_0 é uma superfície de Riemann e $\tilde{X}(p) = (x(p), t(p))$ é uma imersão conforme de S_0 em $\mathbb{H}^n$ e se $q = (0, 0, \dots, 0, 1)$; a aplicação $(L_{\tilde{X}(p), q})_*$ leva $T_{\tilde{X}(p)}\mathbb{H}^n$ isometricamente em $T_q\mathbb{H}^n \equiv \mathbb{R}^n, \forall p \in S_0$.

Definição 3.1 Dado S_0 uma superfície de Riemann e $\tilde{X}: S_0 \rightarrow \mathbb{H}^n$ uma imersão conforme, a aplicação de Gauss generalizada de $\tilde{X}$ é definida por

$$\begin{aligned} \tilde{G}: S_0 &\rightarrow G_{2,n} \\ p &\mapsto G(p) = (L_{\tilde{X}(p), q})_*(d\tilde{X}_p(T_p S_0)) \end{aligned}$$

Como consequência da identificação de $G_{2,n}$ com Q_{n-2} desenvolvida no capítulo I, $\tilde{G}$ pode ser definida localmente, segundo definição (1.3), por $\tilde{G}(z) = \left[\frac{\partial X}{\partial z} \right]$ onde z é um parâmetro local sobre S_0 e $X: S_0 \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ é uma imersão conforme dada por $X(p) = \tilde{X}(p), \forall p \in S_0$.

Proposição 3.5 Sejam S uma superfície imersa em $\mathbb{H}^4$ dada por um par $(S_0, \tilde{X})$; $\tilde{G}: S \rightarrow Q_2$ a aplicação de Gauss de S definida localmente por um par de funções $f_1(z), f_2(z)$ por (2.15); $\Gamma_k: Q_2 \rightarrow S_k$, para $k = 1, 2$, as aplicações projeção onde $Q_2 = S_1 \times S_2$ é o produto de esferas de curvatura 2 (conforme identificação feita nas proposições (2.4) e (2.5)) e $\tilde{J}_k$ o jacobiano da aplicação $\tilde{g}_k = \Gamma_k \circ \tilde{G}$ de $(S, d\tilde{s}^2)$ em S_k , onde S_k é a esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $d\tilde{s}^2 = \tilde{\lambda}^2 |dz|^2$ é a métrica Riemanniana induzida sobre S por $\tilde{X}$. Então:

$$\tilde{J}_k = \frac{2}{\tilde{\lambda}^2} (|\tilde{F}_k|^2 - |\hat{F}_k|^2) = t^2 J_k, \text{ para } k = 1, 2.$$

onde J_k é o jacobiano da aplicação g_k de (S, ds^2) em S_k e $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ é a métrica Riemanniana induzida sobre S por X .

Demonstração: A primeira igualdade segue por demonstração análoga a do lema (2.8).

A igualdade $\tilde{J}_k = t^2 J_k$ segue de $\tilde{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2}{t^2}$ e de $J_k = \frac{2}{\lambda^2} (|F_k|^2 - |\hat{F}_k|^2)$ ■

Proposição 3.6 Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{H}^4$. A curvatura gaussiana $\tilde{K}$ e a curvatura normal $\tilde{K}_n$ de S são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= t^2 K + \frac{2t^2}{\lambda^2} (\log t^2)_{z\bar{z}} = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \frac{2}{\lambda^2} (\log t^2)_{z\bar{z}} \\ \tilde{K}_n &= t^2 K_n = \tilde{J}_1 - \tilde{J}_2 \end{aligned}$$

onde K e K_n são, respectivamente, as curvaturas Gaussiana e normal de S quando considerada como superfície imersa em $\mathbb{R}_+^4$.

Demonstração: Seja

$$\left\{ \tilde{e}_1 = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \tilde{e}_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \xi} \right\}, \quad \text{referencial ortonormal no fibrado tangente de } S$$

Por definição, $\tilde{K} = -d\tilde{\Theta}_1^2(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ onde $\tilde{\Theta}_1^2$ é a forma de conexão dada por $\tilde{\Theta}_1^2(v) = (\tilde{\nabla}_v \tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$, $\forall v \in T_p S$

Segue da equação (3.2) que:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= -t^2 d(\Theta_1^2 + \frac{1}{t} [\langle U_4, e_2 \rangle \Theta^1 - \langle U_4, e_1 \rangle \Theta^2])(e_1, e_2) \\ &= -t^2 \{ d\Theta_1^2(e_1, e_2) - [d(\frac{1}{t} \langle U_4, e_2 \rangle)](e_2) \\ &\quad + \frac{1}{t} \langle U_4, e_2 \rangle d\Theta^1(e_1, e_2) - [d(\frac{1}{t} \langle U_4, e_1 \rangle)](e_1) \\ &\quad - \frac{1}{t} \langle U_4, e_1 \rangle d\Theta^2(e_1, e_2) \} \end{aligned}$$

Observa-se que:

$$d\Theta_1^2(e_1, e_2) = -K$$

$$d(\frac{1}{t} \langle U_4, e_2 \rangle)(e_2) = \left[d\left(\frac{t_\xi}{\lambda t}\right) \right](e_2) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{t_\xi}{\lambda t} \right) \right)$$

$$d(\frac{1}{t} \langle U_4, e_1 \rangle)(e_1) = \left[d\left(\frac{t_\zeta}{\lambda t}\right) \right](e_1) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{t_\zeta}{\lambda t} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} d\Theta^1(e_1, e_2) &= -\Theta^1([e_1, e_2]) = -\langle \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1, e_1 \rangle \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \zeta}} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi}} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \xi} \rangle = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{t} \langle U_4, e_2 \rangle d\Theta^1(e_1, e_2) = \frac{t_\xi}{\lambda t} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned} d\Theta^2(e_1, e_2) &= -\Theta^2([e_1, e_2]) = -\langle \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \zeta}} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi}} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \rangle = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{t} \langle U_4, e_1 \rangle d\Theta^2(e_1, e_2) = -\frac{t_\zeta}{\lambda t} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

Portanto

$$\tilde{K} = t^2 K + \frac{t^2}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{t_\xi}{t} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{t_\zeta}{t} \right) \right) = t^2 K + \frac{t^2}{\lambda^2} (\Delta \log t)$$

Da proposição anterior e da proposição (2.7) segue que:

$$\tilde{K} = t^2(J_1 + J_2) + \frac{2t^2}{\lambda^2}(\log t^2)_{z\bar{z}} = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \frac{2}{\lambda^2}(\log t^2)_{z\bar{z}}$$

Para o cálculo de $\tilde{K}_n$ seja:

$$\{\tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}, \text{ referencial ortonormal no fibrado normal de } S$$

Por definição, $\tilde{K}_n = -d\tilde{\Theta}_3^4(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ onde $\tilde{\Theta}_3^4$ é a forma de conexão dada por

$$\tilde{\Theta}_3^4(v) = (\tilde{\nabla}_v \tilde{e}_3, \tilde{e}_4), \quad \forall v \in T_p S$$

Da equação (3.2) tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n &= -d(\Theta_3^4 + \frac{1}{t} \langle U_4, e_4 \rangle \Theta^3 - \frac{1}{t} \langle u_4, e_3 \rangle \Theta^4)(te_1, te_2) \\ &= -t^2 \{d\Theta_3^4(e_1, e_2) + \frac{1}{t} \langle U_4, e_4 \rangle d\Theta^3(e_1, e_2) - \frac{1}{t} \langle U_4, e_3 \rangle d\Theta^4(e_1, e_2)\} \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} d\Theta^3(e_1, e_2) &= -\sum_{j=1}^4 \Theta_j^3 \wedge \Theta_j(e_1, e_2) \\ &= -\Theta_1^3 \wedge \Theta^1(e_1, e_2) - \Theta_2^3 \wedge \Theta^2(e_1, e_2) \\ &= -\langle \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1, e_3 \rangle \\ &= -\frac{1}{\lambda} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi}} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi}} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi}, e_3 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Analogamente, $d\Theta^4(e_1, e_2) = 0$

Portanto, $\tilde{K}_n = -t^2 d\Theta_3^4(e_1, e_2) = t^2 K_n$

Da proposição anterior e da proposição (2.7) segue que

$$\tilde{K}_n = t^2(J_1 - J_2) = \tilde{J}_1 - \tilde{J}_2$$

■

Proposição 3.7 *Seja S uma superfície orientada, compacta, imersa em $\mathbb{H}^4$. Então a curvatura total de S é igual a soma das áreas algébricas das imagens dos fatores da aplicação de Gauss:*

$$\int_S \tilde{K} dA = \int_S \tilde{J}_1 dA + \int_S \tilde{J}_2 dA = 2\pi(d_1 + d_2)$$

onde d_k é o grau da aplicação $\tilde{g}_k$; e a curvatura normal total é dada pela diferença das áreas:

$$\int_S \tilde{K}_n dA = \int_S \tilde{J}_1 dA - \int_S \tilde{J}_2 dA = 2\pi(d_1 - d_2)$$

Além disso, se $\int_S \tilde{K}_n dA = 0$ então $d_1 = d_2 = \frac{\chi(S)}{2}$ onde $\chi(S)$ denota a característica de Euler de S .

Demonstração: *Visto que*

$$\frac{2}{\tilde{\lambda}^2}(\log t^2)_{z\bar{z}} = \frac{4}{\tilde{\lambda}^2}(\log t)_{z\bar{z}} = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2}(\Delta \log t) = \Delta_S \log t$$

e pelo Teorema de Stokes

$$\int_S (\Delta_S \log t) dA = 0, \quad \text{pois} \quad \partial S = \emptyset$$

a demonstração é consequência imediata da proposição (3.6) e do Teorema de Gauss-Bonnet.

■

Capítulo 4

Superfícies mínimas em H^3 e H^4

O objetivo deste capítulo é estabelecer condições para uma aplicação de classe C^∞ de uma superfície de Riemann S_0 , na quádrlica Q_1 ou Q_2 , ser a aplicação de Gauss Generalizada de uma imersão mínima conforme de S_0 em H^3 e H^4 , respectivamente.

Antes porém, convém notar que sem a restrição adicional mínima o problema de existência de superfícies imersas em H^n com uma aplicação de Gauss pré-estabelecida está completamente resolvido no capítulo I (Teorema 1.3). Usando o semi-plano superior $K = \{(x, t)/x \in \mathbb{R}^{n-1}, t > 0\}$ com a métrica $(\cdot, \cdot)(x, t) = \frac{1}{t^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$ como modelo para o espaço hiperbólico pode-se utilizar este teorema para adaptar a teoria aos espaços hiperbólicos.

4.1 Superfícies mínimas em H^3

Se S é uma superfície imersa em H^3 determinada por um par $(S_0, \tilde{X})$ e $X: S_0 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ é uma imersão localmente conforme definida por $X(p) = \tilde{X}(p), \forall p \in S_0$, então a aplicação de Gauss generalizada de S é dada localmente por

$$\tilde{G}(z) = [(1 - f^2(z)), i(1 + f^2(z)), 2f(z)]$$

onde $f: S_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é a composição da projeção estereográfica relativa ao pólo norte da esfera euclidiana unitária com a aplicação de Gauss clássica de $X(S_0)$ dada por

$$\nu(z) = \frac{1}{1 + |f(z)|^2} (2\operatorname{Re} f(z), 2\operatorname{Im} f(z), |f(z)|^2 - 1)$$

Além disso X é tal que

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \psi(1 - f^2(z), i(1 + f^2(z)), 2f(z))$$

para alguma função ψ definida em $U \subset S_0$.

Se h é a curvatura média escalar de X definida por $H = h\nu$ então h, f e ψ estão relacionados pela equação (2.14), isto é $h = \frac{-f_z}{\psi(1+|f|^2)^2}$.

Por outro lado, se $\nu = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ e se $\tilde{X} = (x^1, x^2, t)$ tem $\tilde{H} \equiv 0$, então pela equação (3.5)

$$h = -\frac{1}{t}\nu^3 = \frac{-(|f|^2 - 1)}{t(1 + |f|^2)} \quad (4.1)$$

Portanto das duas expressões de h , obtem-se:

$$f_{\bar{z}} = 0 \iff h = 0 \iff \nu^3 = 0 \iff |f|^2 = 1 \quad (4.2)$$

$$\bar{\psi} = \frac{t\bar{f}_z}{|f|^4 - 1} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{t\bar{f}_z}{|f|^4 - 1}(1 - f^2, i(1 + f^2), 2f) \quad (4.4)$$

Proposição 4.1 *Seja S_0 uma superfície de Riemann conexa e seja $\tilde{G}: S_0 \rightarrow Q_1$ uma aplicação diferenciável. Então as seguintes condições são necessárias para $\tilde{G}$ ser a aplicação de Gauss generalizada de uma imersão mínima conforme de S_0 em $\mathbb{H}^3$.*

- 1) A 1-forma diferencial $\alpha = \frac{\bar{f}_z}{|f|^4 - 1} dz$ é globalmente definida sobre S_0 .
- 2) A 2-forma diferencial $\omega = \left\{ (|f|^2 - 1)f_{z\bar{z}} - 2\frac{\bar{f}|f|^2}{|f|^2 + 1}f_z\bar{f}_{\bar{z}} \right\} |dz|^2$ é identicamente nula sobre S_0 .

Nessas condições tem-se:

$$\begin{cases} t &= \exp(2\operatorname{Re} \int_{S_0} \beta_3) \\ x^2 &= 2\operatorname{Re} \int_{S_0} t\beta_2 \\ x^1 &= 2\operatorname{Re} \int_{S_0} t\beta_1 \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $\beta_1 = (1 - f^2)\alpha$, $\beta_2 = i(1 + f^2)\alpha$, $\beta_3 = 2f\alpha$.

Demonstração: Segue da expressão de $\bar{\psi}$ em (4.3) que a razão $\frac{\bar{f}_z}{|f|^4 - 1}$ está bem definida em cada domínio parametrizado z de S_0 . Portanto se (U, z) e $(\tilde{U}, \tilde{z})$ são vizinhanças coordenadas que se interceptam sobre S_0 (Figura 2.2) tem-se:

$$z = z(\tilde{z}) \Rightarrow dz = \frac{dz}{d\tilde{z}} d\tilde{z} \quad \bar{f}(z) = \bar{f}(\tilde{z}) \Rightarrow \bar{f}_z = \bar{f}_{\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz}$$

Então,

$$\alpha(z) = \frac{\bar{f}(z)}{|f|^4 - 1} dz = \frac{\bar{f}_z \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}}}{(|f|^4 - 1)} \frac{dz}{d\bar{z}} d\bar{z} = \alpha(\bar{z})$$

o que prova (1).

Como consequência as 1-formas β_1, β_2 e β_3 são globalmente definidas sobre S_0 .

Além disso usando os parâmetros z e $\bar{z}$, na intersecção tem-se:

$$d\bar{z} = \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}} d\bar{z}, \quad f_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}}, \quad f_{z\bar{z}} = f_{\bar{z}\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}} \frac{dz}{dz}$$

e portanto a 2-forma ω também é globalmente definida sobre S_0 .

A condição $\omega \equiv 0$ é consequência do seguinte fato

A equação (4.3) implica que

$$\begin{aligned} (\log \bar{\psi})_z &= \frac{\bar{\psi}_z}{\bar{\psi}} = \frac{(t_z f_z + t f_{zz})(|f|^4 - 1) - t f_z [2|f|^2 (\bar{f}_z f + \bar{f} f_z)]}{t f_z (|f|^4 - 1)} \\ &= \frac{t_z}{t} + \frac{f_{zz}}{f_z} - \frac{2|f|^2 (\bar{f}_z f + \bar{f} f_z)}{|f|^4 - 1} \end{aligned}$$

Mas, da equação (4.4): $\frac{t_z}{t} = \frac{2f\bar{f}_z}{|f|^4 - 1}$

Portanto

$$(\log \bar{\psi})_z = \frac{-2f\bar{f}_z}{|f|^2 + 1} + \frac{f_{zz}}{f_z} - \frac{2|f|^2 \bar{f} f_z}{|f|^4 - 1}$$

Das equações (1.10) e (2.7) segue que:

$$(\log \bar{\psi})_z = -\bar{\eta} = \frac{-2f\bar{f}_z}{1 + |f|^2} \Rightarrow \frac{f_{zz}}{f_z} - \frac{2|f|^2 \bar{f} f_z}{|f|^4 - 1} = 0$$

isso implica que $\omega \equiv 0$.

Para concluir, as fórmulas (4.5) são consequência de (4.4), pois desta relação obtem-se:

$$(x^1)_z = \frac{t\bar{f}_z(1-f^2)}{|f|^4-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \zeta} - i \frac{\partial x^1}{\partial \xi} \right)$$

$$\Rightarrow 2\text{Re} \int_{S_0} t\beta_1 = \int_{S_0} 2\text{Re}[(x^1)_z dz] = \int_{S_0} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial x^1}{\partial \xi} d\xi \right) = x^1$$

$$(x^2)_z = \frac{i(1+f^2)t\bar{f}_z}{|f|^4-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^2}{\partial \zeta} - i \frac{\partial x^2}{\partial \xi} \right) \Rightarrow 2\text{Re} \int_{S_0} t\beta_2 = \int_{S_0} \left(\frac{\partial x^2}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial x^2}{\partial \xi} d\xi \right) = x^2$$

$$\frac{t_z}{t} = \frac{2f\bar{f}_z}{|f|^4-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta} - i \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) \Rightarrow 2\text{Re} \int_{S_0} \beta_3 = \int_{S_0} \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi \right) = \log t$$

$$\Rightarrow t = \exp(2\text{Re} \int_{S_0} \beta_3)$$

■

Teorema 4.1 *Seja S_0 uma superfície de Riemann conexa. Se $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ são duas imersões mínimas conforme de S_0 em $\mathbb{H}^3$ com a mesma aplicação de Gauss generalizada, então existe uma isometria $T: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que $T \circ \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$.*

Demonstração: Sejam H_1 e H_2 os vetores curvatura média de X_1 e X_2 , respectivamente.

1º caso: Se $H_1 \equiv 0$

De (4.2) tem-se $\nu^3 \equiv 0$, isso implica que $X_1(S_0)$ é um cilindro sobre uma curva com diretriz paralela ao eixo t .

Portanto $X_1(S_0)$ possui uma parametrização em parâmetros isotérmicos da forma $X_1(\zeta, \xi) = (f_1(\zeta), f_2(\zeta), \xi)$ com a curva $\gamma(\zeta) = (f_1(\zeta), f_2(\zeta))$ parametrizada pelo comprimento de arco

Então :

$$\begin{aligned} (X_1)_\zeta(\zeta, \xi) &= (f'_1(\zeta), f'_2(\zeta), 0) & (X_1)_{\zeta\xi} &= (0, 0, 0) = X_{\xi\xi} \\ (X_1)_\xi(\zeta, \xi) &= (0, 0, 1) & (X_1)_{\zeta\zeta} &= (f''_1(\zeta), f''_2(\zeta), 0) \end{aligned}$$

Segue que, os coeficientes da 1ª forma fundamental são dados por:

$$a) \quad E = G = (f'_1)^2 + (f'_2)^2 = 1 \Rightarrow f'_1 f''_1 + f'_2 f''_2 = 0 \quad e \quad F = 0$$

A normal unitária $\nu = ((X_1)_\zeta \wedge (X_1)_\xi) = (f'_2, -f'_1, 0)$.

Os coeficientes da 2ª forma fundamental são : $h_{11} = f'_2 f''_1 - f'_1 f''_2$ e $h_{12} = h_{22} = 0$

Portanto, o vetor curvatura média de X_1 é dado por $H_1 = \frac{h_{11}G - 2h_{12}F + h_{22}E}{2(EG - F^2)} = \frac{f'_2 f''_1 - f'_1 f''_2}{2}$

Mas por hipótese $H_1 \equiv 0$ e portanto,

$$b) \quad f'_2 f''_1 - f'_1 f''_2 = 0$$

O sistema de equações em f''_1 e f''_2 dadas por (a) e (b) tem determinante não nulo e portanto só admite a solução trivial.

Segue que, a equação $\gamma'' = k\nu$, onde k é a curvatura da curva γ e ν é o campo normal unitário ao longo de γ , implica em $k \equiv 0$, isto é γ é uma reta.

Portanto $X_1(S_0)$ é um plano paralelo ao eixo dos t .

Observando que a hipótese implica a mesma f para X_1 e X_2 e portanto $H_1 \equiv 0$ se, e somente se, $H_2 \equiv 0$, segue que $\tilde{X}_1(S_0)$ e $\tilde{X}_2(S_0)$ são planos paralelos com $\nu^3 \equiv 0$, e isto conclui a demonstração para este caso.

2º caso: Se H_1 é diferente de zero em algum ponto.

Inicialmente observa-se que o mesmo ocorre para H_2 . Do Teorema (1.2) existe $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ e um vetor $d = (d^1, d^2, d^3)$ tal que $X_2 = cX_1 + d$. Se $X_1 = (x^1, x^2, t)$ e $X_2 = (y^1, y^2, s)$ então $s = ct + d^3$ implica que $s_z = ct_z$.

Por outro lado de (4.4) tem-se

$$\frac{t_z}{t} = \frac{2f\bar{f}_z}{|f|^4 - 1} = \frac{s_z}{s}$$

Segue que

$$\frac{s_z}{s} = \frac{ct_z}{ct + d^3} = \frac{t_z}{t} \Rightarrow d^3 = 0 \quad \text{e} \quad c > 0$$

pois, se $t_z \equiv 0$ então $f \equiv 0$ e isso implica que $H \equiv 0$ (contraria a hipótese).

Portanto a aplicação $T(x^1, x^2, t) = c(x^1, x^2, t) + (d^1, d^2, 0)$ é uma isometria de $\mathbb{H}^3$ tal que $T \circ \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$

De fato, T é inversível e sua inversa é a aplicação

$$T^{-1}(y^1, y^2, t) = \frac{(y^1, y^2, t) - (d^1, d^2, 0)}{c}$$

e

$$(T(x^1, x^2, t))_* = c Id_{3 \times 3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ([T(x^1, x^2, t)]_*(v), [T(x^1, x^2, t)]_*(w))_{T(x^1, x^2, t)} &= (cv, cw)_{T(x^1, x^2, t)} \\ &= \frac{c^2}{c^2 t^2} \langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle_{(x^1, x^2, t)} \end{aligned}$$

■

Teorema 4.2 *Seja S_0 uma superfície de Riemann simplesmente conexa, não compacta e não parabólica e seja $\tilde{G}: S_0 \rightarrow Q_1$ uma aplicação regular. Se $f: S_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é a expressão de $\tilde{G}$, obtida através da identificação natural de Q_1 com $\hat{\mathbb{C}}$ e $|f|^2 \neq 1$ sobre S_0 então as formas diferenciais α e ω são globalmente definidas sobre S_0 e a condição $\omega \equiv 0$ implica na existência de uma imersão mínima conforme $\tilde{X}$ de S_0 em $\mathbb{H}^3$ que tem $\tilde{G}$ como aplicação de Gauss generalizada.*

Observação:

1) Não existe imersão mínima conforme de uma superfície de Riemann compacta ou de tipo parabólico em $\mathbb{H}^n$.

2) A condição $|f|^2 \neq 1$ sobre S_0 implica o seguinte:

a) a imagem da aplicação de Gauss clássica de $X(S_0)$ está contida em um dos hemisférios da esfera euclidiana unitária;

b) o vetor curvatura média de X nunca se anula;

c) $f_{\bar{z}}$ nunca se anula e assim f não é conforme em parte alguma.

Demonstração: O fato de f ser globalmente definida sobre S_0 implica que ω está definida sobre toda S_0 e α em todos os pontos de S_0 onde $|f|^2 \neq 1$. Portanto a condição $|f|^2 \neq 1$ sobre S_0 implica que α é globalmente definida.

A existência local de $\tilde{X}$ é consequência da condição $\omega \equiv 0$ que é precisamente a condição de integrabilidade do sistema (4.4).

A existência global segue do Teorema (4.1) e do fato de S_0 ser simplesmente conexa, através de um argumento usual de monodromia, como na demonstração do 1º caso do Teorema (1.3). ■

Teorema 4.3 *Seja S_0 uma superfície de Riemann e $\tilde{X}: S_0 \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão mínima conforme. Se $f: S_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é a aplicação de Gauss generalizada obtida através da identificação de Q_1 com $\hat{\mathbb{C}}$ então a forma diferencial quadrática $\gamma_1 = \frac{f_z \bar{f}_{\bar{z}}}{|f|^4 - 1} dz^2$ é globalmente definida e holomorfa sobre S_0 .*

Demonstração: Em razão de (4.3) e do fato de $\bar{\psi}$ ser globalmente definida sobre S_0 , tem-se $\frac{f_z \bar{f}_{\bar{z}}}{|f|^4 - 1}$ bem definida em cada vizinhança parametrizada (U, z) de S_0 . Além disso, se (U, z) e $(\tilde{U}, \tilde{z})$ são vizinhanças paramétricas locais que se interceptam sobre S_0 (Figura 2.2), então na intersecção, tem-se:

$$\gamma_1(z) = \frac{f_z \bar{f}_{\bar{z}}}{|f|^4 - 1} dz^2 = \frac{f_{\bar{z}} \frac{dz}{d\tilde{z}} \bar{f}_{\bar{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz}}{|f|^4 - 1} \left(\frac{dz}{d\tilde{z}} \right)^2 d\tilde{z}^2 = \gamma_1(\tilde{z})$$

o que prova que γ_1 é globalmente definida sobre S_0 .

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_z \bar{f}_{\bar{z}}}{|f|^4 - 1} \right)_{\bar{z}} &= \frac{1}{(|f|^4 - 1)^2} [(f_{z\bar{z}} \bar{f}_z + f_z \bar{f}_{\bar{z}\bar{z}})(|f|^4 - 1) - 2|f|^2 f_z \bar{f}_{\bar{z}} (f_{\bar{z}} \bar{f} + \bar{f}_{\bar{z}} f)] \\ &= \frac{\bar{f}_{\bar{z}}}{(|f|^2 - 1)^2 (|f|^2 + 1)} \left[(|f|^2 - 1) f_{z\bar{z}} - \frac{2|f|^2 \bar{f} f_z f_{\bar{z}}}{|f|^2 + 1} \right] \\ &\quad + \frac{f_z}{(|f|^2 - 1)^2 (|f|^2 + 1)} \left[(|f|^2 - 1) \bar{f}_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{2|f|^2 f \bar{f}_{\bar{z}} \bar{f}_{\bar{z}}}{|f|^2 + 1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

visto que da proposição (4.1) $\omega \equiv 0$. Portanto, γ_1 é holomorfa sobre S_0 . ■

O lema seguinte relaciona a aplicação de Gauss de uma superfície arbitrária imersa em $\mathbb{R}^3$ com os coeficientes da 2ª forma fundamental, permitindo caracterizar os pontos umbílicos das superfícies mínimas, não totalmente geodésicas, imersas em $\mathbb{H}^3$.

Lema 4.1 *Seja f a aplicação de Gauss de uma superfície arbitrária em $\mathbb{R}^3$. Então :*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| = \frac{\lambda}{2}(1 + |f|^2)|\phi| \quad \text{onde} \quad \phi = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - ih_{12}$$

e h_{ij} são os coeficientes da 2ª forma fundamental

Demonstração: Sejam : $z = \zeta + i\xi$ parâmetros isotérmicos locais ,
 $X(z) = (x^1(z), x^2(z), x^3(z))$ a imersão e $\nu(z) = (\nu^1(z), \nu^2(z), \nu^3(z))$ a aplicação de Gauss clássica.

Então $f(z) = P^{-1} \circ \nu(z)$, onde P^{-1} é a projeção estereográfica relativa ao pólo norte da esfera euclidiana unitária (Figura 2.1).

Escolhe-se:

$$\{e_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \quad e_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial X}{\partial \xi}\}, \quad \text{referencial ortonormal tal que } \nu(z) = e_1 \wedge e_2$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-\nu^3(z)}(\nu^1(z) + i\nu^2(z)) \\ \Rightarrow f_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} - i \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{1}{2(1-\nu^3(z))^2} \left\{ \left(\frac{\partial(\nu^1(z))}{\partial \zeta} + i \frac{\partial(\nu^2(z))}{\partial \zeta} \right) (1 - \nu^3(z)) + (\nu^1(z) + i\nu^2(z)) \frac{\partial(\nu^3(z))}{\partial \zeta} \right. \\ &\quad \left. - i \left[\left(\frac{\partial(\nu^1(z))}{\partial \xi} + i \frac{\partial(\nu^2(z))}{\partial \xi} \right) (1 - \nu^3(z)) + (\nu^1(z) + i\nu^2(z)) \frac{\partial(\nu^3(z))}{\partial \xi} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2(1-\nu^3(z))^2} \left\{ \left[\left(-\frac{\partial x^1}{\partial \zeta} - i \frac{\partial x^2}{\partial \zeta} \right) (1 - \nu^3(z)) - \frac{\partial x^3}{\partial \zeta} (\nu^1(z) + i\nu^2(z)) \right] h_{11} \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(-\frac{\partial x^1}{\partial \xi} - i \frac{\partial x^2}{\partial \xi} + i \frac{\partial x^1}{\partial \zeta} - \frac{\partial x^2}{\partial \zeta} \right) (1 - \nu^3(z)) + \left(-\frac{\partial x^3}{\partial \xi} + i \frac{\partial x^3}{\partial \zeta} \right) (\nu^1(z) + i\nu^2(z)) \right] h_{12} \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(i \frac{\partial x^1}{\partial \xi} - \frac{\partial x^2}{\partial \xi} \right) (1 - \nu^3(z)) + i \frac{\partial x^3}{\partial \xi} (\nu^1(z) + i\nu^2(z)) \right] h_{22} \right\} \end{aligned}$$

Visto que:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \zeta} = -h_{11} \frac{\partial X}{\partial \zeta} - h_{21} \frac{\partial X}{\partial \xi} \quad e \quad \frac{\partial \nu}{\partial \xi} = -h_{12} \frac{\partial X}{\partial \zeta} - h_{22} \frac{\partial X}{\partial \xi}$$

Então, as fórmulas:

$$I) \quad \nu(z) = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial x^2}{\partial \zeta} \frac{\partial x^3}{\partial \xi} - \frac{\partial x^2}{\partial \xi} \frac{\partial x^3}{\partial \zeta}, \frac{\partial x^1}{\partial \xi} \frac{\partial x^3}{\partial \zeta} - \frac{\partial x^1}{\partial \zeta} \frac{\partial x^3}{\partial \xi}, \frac{\partial x^1}{\partial \zeta} \frac{\partial x^2}{\partial \xi} - \frac{\partial x^1}{\partial \xi} \frac{\partial x^2}{\partial \zeta} \right)$$

$$II) \quad \left\| \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\|^2 = \lambda^2 \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\rangle = 0$$

implicam que os coeficientes de h_{11} , h_{22} e h_{12} na expressão de f_z são:

$$\begin{aligned} \text{o coeficiente de } h_{11} &= \frac{-1}{(1-\nu^3)^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x^2}{\partial \bar{z}} \right) \\ \text{o coeficiente de } h_{22} &= \frac{1}{(1-\nu^3)^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x^2}{\partial \bar{z}} \right) \\ \text{o coeficiente de } h_{12} &= \frac{2i}{(1-\nu^3)^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x^2}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

Então, segue que

$$f_z = \frac{1}{(1-\nu^3)^2} (-h_{11} + h_{22} + 2ih_{12}) \left(\frac{\partial x^1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x^2}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{-2\phi}{(1-\nu^3)^2} \frac{\partial(x^1 + ix^2)}{\partial \bar{z}}.$$

Observando que

$$III) \quad (1 + |f|^2)(1 - \nu^3) = 2$$

obtem-se:

$$IV) \quad f_z = -\phi \frac{(1 + |f|^2)^2}{2} \frac{\partial(x^1 + ix^2)}{\partial \bar{z}}$$

Das fórmulas I) e II) tem-se

$$\left. \begin{aligned} 4 \left| \frac{\partial x^1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x^2}{\partial \bar{z}} \right|^2 &= 2\lambda^2(1 - \nu^3) - \left| \frac{\partial x^3}{\partial \zeta} + i \frac{\partial x^3}{\partial \xi} \right|^2 \\ \left| \frac{\partial x^3}{\partial \zeta} + i \frac{\partial x^3}{\partial \xi} \right|^2 &= \lambda^2(\nu_1^2 + \nu_2^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial x^1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x^2}{\partial \bar{z}} \right| = \frac{\lambda}{2}(1 - \nu^3) \Rightarrow \left| \frac{\partial x^1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x^2}{\partial \bar{z}} \right| = \frac{\lambda}{1 + |f|^2}$$

Então, $|f_z| = \frac{\lambda}{2}(1 + |f|^2)|\phi|$, o que conclui a demonstração do Lema. ■

Corolário 4.1 *Seja S_0 uma superfície de Riemann e $\tilde{X}: S_0 \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão mínima conforme. Se $\tilde{X}$ não é totalmente geodésica, seus pontos umbílicos são isolados.*

Demonstração: Pelo corolário(3.1), p é ponto umbílico para $\tilde{X}$ se, e somente se, p é ponto umbílico para X . Mas do lema (4.1), p é ponto umbílico para X se, e somente se, $f_z(p) = 0$. Logo, se p é ponto umbílico para $\tilde{X}$, então p é um zero da forma γ_1 .

Suponha, por absurdo, que $\gamma_1 \equiv 0$. Tal hipótese implica :

$$a) \quad f_z \equiv 0 \quad \text{ou} \quad b) \quad f_{\bar{z}} \equiv 0 \quad \text{ou} \quad c) \quad \forall p \in S_0, \quad f_z(p) = 0 \quad \text{ou} \quad f_{\bar{z}}(p) = 0.$$

(a) $f_z \equiv 0 \Rightarrow$ todos os pontos de $X(S_0)$ são umbílicos $\Rightarrow X(S_0)$ é parte de um plano ou de uma esfera de $\mathbb{R}^3$.

Se $\tilde{X}(S_0) \subset \text{plano}$ então, $f_{\bar{z}} \equiv 0$ e recai no caso b).

Se $\tilde{X}(S_0)$ é parte de uma esfera de $\mathbb{R}^3$, então tem-se as seguintes possibilidades para $\tilde{X}(S_0)$:

i)	superfície eqüidistante	ii)	horoefera
iii)	esfera de $\mathbb{H}^3$	iv)	totalmente geodésica

Como $\tilde{H} \equiv 0$, (i) e (ii) não podem ocorrer. Se $\tilde{X}$ é uma esfera de $\mathbb{H}^3$ com $\tilde{H} \equiv 0$ então seu centro pertence a fronteira de $\mathbb{H}^3$ e, portanto, neste caso, $\tilde{X}$ é totalmente geodésica, o que contraria a hipótese.

(b) $f_{\bar{z}} \equiv 0$. Da equação (4.2) e da demonstração do 1º caso do Teorema (4.1), segue que $X(S_0)$ é parte de um plano com $\nu^3 \equiv 0$ e, portanto, $\tilde{X}(S_0)$ é totalmente geodésica.

(c) $\forall p \in S_0$, $f_z(p) = 0$ ou $f_{\bar{z}}(p) = 0$.

Suponha que exista $p \in S_0$ tal que $f_z(p) \neq 0$. Por continuidade $f_z(p') \neq 0$, $\forall p' \in W$ onde W é vizinhança aberta de p , então pela hipótese dada em (c) tem-se $f_{\bar{z}}(p) \equiv 0$ em W . Segue de a) e b) que $\tilde{X}(S_0)$ é totalmente geodésica.

Portanto se $\tilde{X}$ não é totalmente geodésica, então γ_1 é uma forma holomorfa não nula, em consequência, os zeros de γ_1 são isolados, e isto conclui a demonstração. ■

Observação :

Considerando a projeção estereográfica relativa ao pólo sul da esfera euclidiana unitária, a identificação de Q_1 com $\hat{\mathbb{C}}$ é dada através da correspondência

$$\Gamma(w) = [(w^2 - 1, i(w^2 + 1), 2w)], \quad \Gamma(\infty) = [(1, i, 0)], \quad \Gamma^{-1}([z^1, z^2, z^3]) = \frac{z^1 - iz^2}{z^3}$$

onde $w \in \hat{\mathbb{C}}$ e (z^1, z^2, z^3) são coordenadas homogêneas sobre $Q_1 \subset \mathbb{C}P^2$. Então ao invés de (4.4) tem-se

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{t\bar{f}_z}{|f|^4 - 1}(f^2 - 1, i(f^2 + 1), 2f)$$

e as conclusões são semelhantes.

4.2 Superfícies mínimas em H^4

Conforme teoria desenvolvida no capítulo II (secção 2.2), se S é uma superfície imersa em H^4 , a sua aplicação de Gauss generalizada é expressa localmente, via um par de funções $(f_1, f_2): S_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ por $\tilde{G}(z) = [\varphi(z)]$ onde

$$\varphi(z) = (1 + f_1(z)f_2(z), i(1 - f_1(z)f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z))),$$

$z = \zeta + i\xi$ são parâmetros isotérmicos locais sobre S_0 e as funções f_1, f_2 são obtidas naturalmente através da identificação de Q_2 com $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$. Além disso, se

$$A(z) = (f_2(z) - \bar{f}_1(z), -i(f_2(z) + \bar{f}_1(z)), 1 + \bar{f}_1(z)f_2(z), -i(1 - \bar{f}_1(z)f_2(z))),$$

os vetores:

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}Re\bar{\varphi}}{\|\varphi\|}, \quad e_2 = \frac{\sqrt{2}Im\bar{\varphi}}{\|\varphi\|}, \quad e_3 = \frac{\sqrt{2}ReA}{\|A\|}, \quad e_4 = \frac{\sqrt{2}ImA}{\|A\|}$$

são um referencial ortonormal positivo em $\mathbb{R}^4$ adaptado à imersão X em $\mathbb{R}_+^4$.

Isso juntamente com a equação (2.18) implica :

$$V = (F_1 - F_2) \frac{\|A\|}{\sqrt{2}} e_3 + i(F_1 + F_2) \frac{\|A\|}{\sqrt{2}} e_4 \quad \text{onde} \quad F_1 = \frac{(f_1)_{\bar{z}}}{1 + |f_1|^2} \quad \text{e} \quad F_2 = \frac{(f_2)_{\bar{z}}}{1 + |f_2|^2}$$

Desta relação, de (2.20), de $H = h_1 e_3 + h_2 e_4$ e de $V = \|\varphi\|^2 \bar{\psi} H$ obtém-se:

$$h_1 = \frac{F_1 - F_2}{2\bar{\psi}\sqrt{(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)}}, \quad h_2 = \frac{i(F_1 + F_2)}{2\bar{\psi}\sqrt{(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)}}$$

onde ψ é uma função de S_0 em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi\varphi$.

Por outro lado, assumindo que $\tilde{X}$ é mínima, se H é o vetor curvatura média de $X = (x^1, x^2, x^3, t)$, de (3.5) tem-se:

$$H = \frac{-(U_4)^N}{t} = \frac{-(e_3^4)e_3 - (e_4^4)e_4}{t}$$

onde e_3^4 e e_4^4 são a 4ª componente de e_3 e e_4 , respectivamente, isto é .

$$H = \frac{\text{Im}(1-f_1\bar{f}_2)}{t\sqrt{(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2)}}e_3 + \frac{\text{Re}(1-f_1\bar{f}_2)}{t\sqrt{(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2)}}e_4$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{\text{Im}(1-f_1\bar{f}_2)}{t\sqrt{(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2)}} \quad e \quad h_2 = \frac{\text{Re}(1-f_1\bar{f}_2)}{t\sqrt{(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2)}}$$

Portanto das duas expressões de h_1 e h_2 obtem-se:

$$H = 0 \iff (f_1)_{\bar{z}} = (f_2)_{\bar{z}} = 0 \iff 1 - f_1\bar{f}_2 = 0 \quad (4.6)$$

$$e \quad \begin{cases} a) & 2 \bar{\psi} i \text{Im}(1 - f_1\bar{f}_2) = it(F_1 - F_2) \\ b) & 2 \bar{\psi} \text{Re}(1 - f_1\bar{f}_2) = it(F_1 + F_2) \end{cases}$$

Somando (a) e (b) tem-se:

$$\bar{\psi} = \frac{itF_1}{(1 - f_1\bar{f}_2)} = \frac{it(f_1)_{\bar{z}}}{(1 + |f_1|^2)(1 - f_1\bar{f}_2)} \quad (4.7)$$

Subtraindo (a) de (b) tem-se:

$$\bar{\psi} = \frac{itF_2}{(1 - \bar{f}_1f_2)},$$

que juntamente com (4.7) implica em:

$$F_2(1 - f_1\bar{f}_2) = (1 - \bar{f}_1f_2)F_1 \quad (4.8)$$

Também de (4.7) obtem-se:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{-it(\bar{f}_1)_z}{(1 + |f_1|^2)(1 - \bar{f}_1f_2)}(1 + f_1f_2, i(1 - f_1f_2), f_1 - f_2, -i(f_1 + f_2)) \quad (4.9)$$

Como $\bar{\psi}$ está bem definida, as razões $\frac{(f_1)_z}{1-f_1f_2}$ e $\frac{(f_2)_z}{1-\bar{f}_1f_2}$ estão bem definidas em cada vizinhança parametrizada de S_0 .

Portanto as 1-formas diferenciais

$$\alpha_1 = \frac{(\bar{f}_1)_z}{(1 - \bar{f}_1f_2)(1 + |f_1|^2)}dz \quad e \quad \alpha_2 = \frac{(\bar{f}_2)_z}{(1 - f_1\bar{f}_2)(1 + |f_2|^2)}dz$$

são globalmente definidas sobre S_0 .

Além disso, através da identificação de Q_2 com $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$, a existência de α_1 e α_2 dependem da aplicação G e não propriamente de $\tilde{X}$ e estão definidas em todos os pontos de S_0 onde $(1 - f_1\bar{f}_2) \neq 0$.

Teorema 4.4 *Seja S_0 uma superfície de Riemann conexa e seja $\tilde{G}: S_0 \rightarrow Q_2$ regular. Então, as seguintes condições são necessárias para a existência de uma imersão mínima conforme $\tilde{X} = (x^1, x^2, x^3, t)$, de S_0 em H^4 , possuindo $\tilde{G}$ como aplicação de Gauss:*

- I) α_1 e α_2 são globalmente definidas e $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.
 II) As 2-formas diferenciais:

$$\omega_1 = [(f_1 \bar{f}_2 - 1)(f_1)_{z\bar{z}} - \frac{2|f_1|^2 \bar{f}_2}{1+|f_1|^2} (f_1)_z (f_1)_{\bar{z}} + \frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{1+|f_1|^2} (f_1)_z (f_1)_{\bar{z}}] |dz|^2$$

$$\omega_2 = [(\bar{f}_1 f_2 - 1)(f_2)_{z\bar{z}} - \frac{2|f_2|^2 \bar{f}_1}{1+|f_2|^2} (f_2)_z (f_2)_{\bar{z}} + \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{1+|f_2|^2} (f_2)_z (f_2)_{\bar{z}}] |dz|^2$$

satisfazem $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv 0$.

Se estas condições são satisfeitas, tem-se:

$$\begin{cases} t = \exp(2 \operatorname{Re} \int_{S_0} \beta_4) \\ x^3 = 2 \operatorname{Re} \int_{S_0} t \beta_3 \\ x^2 = 2 \operatorname{Re} \int_{S_0} t \beta_2 \\ x^1 = 2 \operatorname{Re} \int_{S_0} t \beta_1 \end{cases} \quad (4.10)$$

onde

$$\beta_1 = -i(1 + f_1 f_2) \alpha_1, \quad \beta_2 = (1 - f_1 f_2) \alpha_1, \quad \beta_3 = -i(f_1 - f_2) \alpha_1, \quad \beta_4 = -(f_1 + f_2) \alpha_1$$

Demonstração: A condição $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ é imediata de (4.8). Segundo observação anterior α_1 e α_2 são globalmente definidas, o que implica que as 1-formas diferenciais $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ são globalmente definidas.

Da mesma forma que para α_1 e α_2 as 2-formas ω_1 e ω_2 também são globalmente definidas e a condição identicamente nulas segue de $(\log \bar{\psi})_z + \bar{\eta} = 0$, conforme demonstração abaixo.

De (4.7) obtem-se

$$(\log \bar{\psi})_z = \frac{t_z}{t} + \frac{(f_1)_{z\bar{z}}}{(f_1)_{\bar{z}}} + \frac{(f_1)_z \bar{f}_2 + f_1 (\bar{f}_2)_z}{1 - f_1 \bar{f}_2} - \frac{(f_1)_z \bar{f}_1 + (\bar{f}_1)_z f_1}{1 + |f_1|^2}$$

Mas de (4.9)

$$\frac{t_z}{t} = \frac{-(\bar{f}_1)_z (f_1 + f_2)}{(1 - \bar{f}_1 f_2)(1 + |f_1|^2)}$$

Usando que $\bar{\eta} = f_1 \bar{F}_1 + f_2 \bar{F}_2$ segue

$$(\log \bar{\psi})_z + \bar{\eta} = \frac{-(\bar{f}_1)_z(f_1 + f_2)}{(1 - \bar{f}_1 f_2)(1 + |f_1|^2)} + \frac{(f_1)_{\bar{z}z}}{(f_1)_{\bar{z}}} + \frac{(f_1)_z \bar{f}_2 + f_1(\bar{f}_2)_z}{1 - f_1 \bar{f}_2} - \frac{(f_1)_z \bar{f}_1}{1 + |f_1|^2} + \frac{f_2(\bar{f}_2)_z}{1 + |f_2|^2}$$

que juntamente com (4.8) e $(\log \bar{\psi})_z + \bar{\eta} = 0$ implica em

$$\frac{(f_1)_{\bar{z}z}}{(f_1)_{\bar{z}}} + \frac{(f_1)_z \bar{f}_2}{1 - f_1 \bar{f}_2} - \frac{(f_1)_z \bar{f}_1}{1 + |f_1|^2} = 0$$

a qual mutiplicada por $(f_1 \bar{f}_2 - 1)(f_1)_{\bar{z}}$ é precisamente

$$(f_1 \bar{f}_2 - 1)(f_1)_{\bar{z}z} - \frac{2|f_1|^2 \bar{f}_2}{1 + |f_1|^2}(f_1)_z(f_1)_{\bar{z}} + \frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{1 + |f_1|^2}(f_1)_z(f_1)_{\bar{z}} = 0 \Rightarrow \omega_1 \equiv 0$$

Analogamente usando a expressão de $\bar{\psi}$ dada em termos de f_2 obtem-se $\omega_2 \equiv 0$.

O restante da demonstração é consequência de (4.9) e segue por analogia à prova das fórmulas em (4.5). ■

Teorema 4.5 *Seja S_0 uma superfície de Riemann e sejam $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ imersões mínimas conformes de S_0 em $\mathbb{H}^4$. Se $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ tem a mesma aplicação de Gauss generalizada, então existe uma isometria $T: \mathbb{H}^4 \longrightarrow \mathbb{H}^4$ tal que $T \circ \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$.*

Demonstração:

1º caso: Se X_1 é mínima em $\mathbb{R}_+^4$

Seja H_1 o vetor curvatura média de X_1 . De (4.6) obtem-se:

$$\begin{aligned} H_1 \equiv 0 &\iff (f_1)_{\bar{z}} \equiv (f_2)_{\bar{z}} \equiv 0 \iff (1 - f_1 \bar{f}_2) \equiv 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} f_1 \equiv \frac{1}{f_2} \Rightarrow (f_1)_z \equiv 0 \\ f_2 \equiv \frac{1}{f_1} \Rightarrow (f_2)_z \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow f_1 \text{ e } f_2 \text{ constantes} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A(z) = \text{constante} \Rightarrow e_3 \text{ e } e_4 \text{ constantes} \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{X}_1$ é parte de um plano. Como, $H_1 \equiv 0$ implica em $(U_4)^N \equiv 0$, segue que U_4 é tangente à superfície, em consequência, o plano é paralelo ao eixo dos t e $\tilde{X}_1(S_0)$ é totalmente geodésica.

Observando que, a hipótese implica as mesmas f_1 e f_2 para $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$, tem-se X_1 mínima em $\mathbb{R}_+^4$ se, e somente se, X_2 mínima em $\mathbb{R}_+^4$. Então, neste caso, $\tilde{X}_1(S_0)$ e $\tilde{X}_2(S_0)$ são superfícies totalmente geodésicas, e isso conclui a demonstração.

2º caso: Se H_1 é diferente de zero em algum ponto.

A demonstração é análoga à do Teorema (4.1) para o mesmo caso. ■

Teorema 4.6 *Seja S_0 uma superfície de Riemann simplesmente conexa, não compacta e não parabólica e seja $\tilde{G}: S_0 \rightarrow Q_2$ regular.*

Se $f_1, f_2: S_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ são as componentes de $\tilde{G}$ obtidas através da identificação natural de Q_2 com $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$, e $(1 - f_1 \bar{f}_2) \neq 0$ sobre S_0 então as formas diferenciais $\alpha_1, \alpha_2, \omega_1$ e ω_2 são globalmente definidas e as condições $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ e $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv 0$ implicam a existência de uma imersão mínima conforme $\tilde{X}$, de S_0 em $\mathbb{H}^4$, que têm $\tilde{G}$ como aplicação de Gauss generalizada.

Demonstração: A condição $(1 - f_1 \bar{f}_2) \neq 0$ sobre S_0 implica a existência global de α_1 e α_2 , enquanto, as condições $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv 0$ são as condições de integrabilidade do sistema (4.9). Isso fornece a existência local de $\tilde{X}$. A existência global segue do Teorema anterior e de argumento usual de monodromia, já utilizado no início desta dissertação. ■

Teorema 4.7 *Sejam S_0 uma superfície de Riemann conexa, $\tilde{X}$ uma imersão conforme de S_0 em $\mathbb{H}^4$ e $f_1, f_2: S_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ as componentes de sua aplicação de Gauss, obtidas através da identificação natural de Q_2 com $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$. Então a forma diferencial quadrática*

$$\gamma_0 = \frac{(f_1)_z (f_2)_z (\bar{f}_1)_z (\bar{f}_2)_z}{(1 - \bar{f}_1 f_2)(1 - f_1 \bar{f}_2)(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2)} dz^2$$

é globalmente definida e holomorfa sobre S_0 .

Demonstração: A existência global segue das equações (4.7) e (4.8) e as condições $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ e $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv 0$ dadas no Teorema (4.4) implicam que γ_0 é holomorfa. ■

Capítulo 5

Superfícies em H^3 com curvatura média identicamente um

Considerando $\mathbb{R}_+^3$ como modelo para H^3 , pode-se afirmar, segundo resultados expressos no capítulo II para superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, que dada uma superfície de Riemann S_0 e uma imersão conforme $\tilde{X}: S_0 \rightarrow S \subset H^3$, se $\tilde{G}$ é a aplicação de Gauss generalizada de $\tilde{X}$ e h é a curvatura média de S quando considerada como superfície de $\mathbb{R}_+^3$, então necessariamente

$$h = \frac{-f_{\bar{z}}}{\bar{\psi}(1 + |f|^2)^2} \quad (\text{equação (2.14)}).$$

onde f é obtida de $\tilde{G}$, através da identificação de Q_1 com $\hat{\mathbb{C}}$ e ψ é uma função definida em S_0 satisfazendo

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \psi(1 - f^2, i(1 + f^2), 2f)$$

Por outro lado, se $\tilde{H}$ é o vetor curvatura média de $\tilde{X} = (x^1, x^2, t)$, visto que

$$\tilde{H} = t^2 H + t\nu^3 \nu$$

e

$$\nu(z) = (\nu^1, \nu^2, \nu^3) = \frac{1}{1 + |f|^2} (2\operatorname{Re} f, 2\operatorname{Im} f, |f|^2 - 1)$$

é a aplicação de Gauss clássica de $X(S_0)$ em $\mathbb{R}_+^3$, e assumindo que $\tilde{X}$ tem curvatura média

constante igual a um, tem-se:

$$\tilde{H} = \tilde{\nu} = t\nu \Rightarrow h = \frac{1 - \nu^3}{t} = \frac{2}{t(1 + |f|^2)}$$

Portanto, das duas expressões de h , obtem-se:

$$f_{\bar{z}} = 0 \iff h = 0 \iff \nu^3 = 1 \iff \nu(z) = (0, 0, 1) \iff f(z) = \infty \quad (5.1)$$

$$\bar{\psi} = \frac{-t\bar{f}_{\bar{z}}}{2(1 + |f|^2)} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{-t\bar{f}_z}{2(1 + |f|^2)}(1 - f^2, i(1 + f^2), 2f) \quad (5.3)$$

Então,

$$\alpha_3 = \frac{-\bar{f}_z}{2(1 + |f|^2)}dz$$

é uma 1-forma diferencial globalmente definida sobre S_0 .

Também, de (5.2) tem-se:

$$(\bar{\psi})_z = \frac{1}{2(1+|f|^2)^2} \{(-t_z f_{\bar{z}} - t f_{\bar{z}z})(1 + |f|^2) + t f_{\bar{z}}(\bar{f}_z f + \bar{f} f_z)\}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{\psi}_z}{\bar{\psi}} = \frac{t_z}{t} + \frac{f_{\bar{z}z}}{f_{\bar{z}}} - \frac{f\bar{f}_z}{1+|f|^2} - \frac{\bar{f}f_z}{1+|f|^2}$$

Mas, da equação (5.3)

$$\frac{t_z}{t} = \frac{-f\bar{f}_z}{1 + |f|^2}$$

Então segue que

$$(\log \bar{\psi})_z = \frac{-2f\bar{f}_z}{1 + |f|^2} + \frac{f_{\bar{z}z}}{f_{\bar{z}}} - \frac{\bar{f}f_z}{1 + |f|^2}$$

Portanto, $(\log \bar{\psi})_z + \bar{\eta} = 0$ e a equação (2.7) implicam

$$\frac{f_{\bar{z}z}}{f_{\bar{z}}} - \frac{\bar{f}f_z}{1 + |f|^2} = 0$$

que multiplicada por $f_{\bar{z}}(1 + |f|^2)$ é precisamente

$$f_{\bar{z}z}(1 + |f|^2) - \bar{f}f_z f_{\bar{z}} = 0 \quad (5.4)$$

Pode-se então definir a 2-forma diferencial

$$\omega_3 = \{f_{\bar{z}z}(1 + |f|^2) - \bar{f}f_z f_{\bar{z}}\}|dz|^2,$$

a qual é globalmente definida sobre S_0 .

Portanto o anulamento da 2-forma diferencial ω_3 é uma condição necessária para $\tilde{G}$ ser a aplicação de Gauss generalizada de $\tilde{X}$.

Observa-se que, assumindo a existência de $\tilde{X}$, tem-se α_3 globalmente definida sobre S_0 e, conseqüentemente, as 1-formas diferenciais

$$\beta_1 = (1 - f^2)\alpha_3, \quad \beta_2 = i(1 + f^2)\alpha_3, \quad \beta_3 = 2f\alpha_3$$

são globalmente definidas sobre S_0 .

Teorema 5.1 *Seja S_0 uma superfície de Riemann conexa e seja $\tilde{G}: S_0 \rightarrow Q_1$ uma aplicação diferenciável. Então as seguintes condições são necessárias para $\tilde{G}$ ser a aplicação de Gauss generalizada de uma imersão conforme de S_0 em $\mathbb{H}^3$ com curvatura média identicamente um:*

- 1) $\omega_3 \equiv 0$.
- 2) α_3 é globalmente definida sobre S_0 .

Além disso, se estas condições são satisfeitas, tem-se:

$$\begin{cases} t = \exp(2\operatorname{Re} \int_{S_0} \beta_3) \\ x^2 = 2\operatorname{Re} \int_{S_0} t\beta_2 \\ x^3 = 2\operatorname{Re} \int_{S_0} t\beta_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Demonstração: As condições (1) e (2) já foram verificadas anteriormente.

Da equação (5.3) tem-se:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{t_z}{t} = \frac{-f\bar{f}_z}{1+|f|^2} &\Rightarrow 2\operatorname{Re} \int_{S_0} \beta_3 = 2 \int_{S_0} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{-f\bar{f}_z}{1+|f|^2} \right) dz \right] \\ &= 2 \int_{S_0} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{t_z}{t} \right) dz \right] = \int_{S_0} \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi \right) = \log t \\ &\Rightarrow t = \exp(2\operatorname{Re} \int_{S_0} \beta_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (x^2)_z = \frac{-it\bar{f}_z(1+|f|^2)}{2(1+|f|^2)} &\Rightarrow 2\operatorname{Re} \int_{S_0} t\beta_2 = 2 \int_{S_0} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{-it\bar{f}_z(1+|f|^2)}{2(1+|f|^2)} \right) dz \right] \\ &= 2 \int_{S_0} \operatorname{Re} [(x^2)_z dz] = \int_{S_0} \left(\frac{\partial x^2}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial x^2}{\partial \xi} d\xi \right) = x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \quad (x^1)_z = \frac{-t\bar{f}_z(1-f^2)}{2(1+|f|^2)} &\Rightarrow 2\operatorname{Re} \int_{S_0} t\beta_1 = 2 \int_{S_0} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{-t\bar{f}_z(1-f^2)}{2(1+|f|^2)} \right) dz \right] \\
&= 2 \int_{S_0} \operatorname{Re}[(x^1)_z dz] = \int_{S_0} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial x^1}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) = x^1
\end{aligned}$$

■

Teorema 5.2 *Seja S_0 uma superfície de Riemann conexa. Se $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ são duas imersões conforme, com curvatura média constante igual a um, de S_0 em $\mathbb{H}^3$, tendo a mesma aplicação de Gauss generalizada, então existe uma isometria $T: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que $T \circ \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$.*

Demonstração: Sejam H_1 e H_2 os vetores curvatura média respectivamente, de X_1 e X_2 em $\mathbb{R}_+^4$.

1º caso: Se H_1 é diferente de zero em algum ponto.

Do Teorema (1.2) existe uma constante real c e um vetor constante $d = (d^1, d^2, d^3)$ tal que $X_2 = cX_1 + d$.

Se $X_1 = (x^1, x^2, t)$ e $X_2 = (y^1, y^2, s)$ então:

$$s = ct + d^3 \Rightarrow s_z = ct_z$$

Por outro lado da equação (5.3)

$$\frac{t_z}{t} = \frac{-f\bar{f}_z}{(1+|f|^2)} = \frac{s_z}{s},$$

segue portanto que

$$\frac{t_z}{t} = \frac{ct_z}{ct + d^3} \Rightarrow t_z d^3 = 0 \Rightarrow d^3 = 0 \quad \text{ou} \quad t_z \equiv 0$$

Mas $t_z \equiv 0$ não pode ocorrer, pois se $t_z \equiv 0$, então de (5.3)

$$f \equiv 0 \Rightarrow f_z \equiv 0 \Rightarrow H_1 \equiv 0$$

o que contraria a hipótese $H_1 \neq 0$ em algum ponto.

Portanto $d^3 = 0$ e isso implica $c > 0$

Logo,

$$\begin{aligned}
T: \quad \mathbb{H}^3 &\longrightarrow \mathbb{H}^3 \\
(x^1, x^2, t) &\longmapsto c(x^1, x^2, t) + (d^1, d^2, 0)
\end{aligned}$$

é uma isometria de $\mathbb{H}^3$ tal que $T \circ \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$

2º caso: Se $H_1 \equiv 0$

Inicialmente observa-se que a hipótese de $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ induzirem a mesma aplicação de Gauss também implica que $H_2 \equiv 0$.

Da equação (5.1) têm-se $\nu(z) = (0, 0, 1)$

Então $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ são duas horoesferas de $\mathbb{H}^3$. Portanto, existe uma isometria que leva uma na outra. ■

Através da identificação de Q_1 com $\hat{\mathcal{C}}$ a existência de α_3 e ω_3 dependem somente de $\tilde{G}$ e não propriamente de $\tilde{X}$ e estão definidas em todos os pontos de S_0 .

Teorema 5.3 *Seja S_0 uma superfície de Riemann simplesmente conexa e seja $\tilde{G}: S_0 \rightarrow Q_1$ regular. Se $f: S_0 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ é a expressão de $\tilde{G}$, obtida através da identificação natural de Q_1 com $\hat{\mathcal{C}}$, as formas diferenciais α_3 e ω_3 são globalmente definidas e a condição $\omega_3 \equiv 0$ implica a existência de uma imersão conforme $\tilde{X}$, de S_0 em $\mathbb{H}^3$, com curvatura média constante igual a um, que tem $\tilde{G}$ como aplicação de Gauss generalizada.*

Demonstração: A condição $\omega_3 \equiv 0$ é a condição de integrabilidade do sistema

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{-t\bar{f}_z}{2(1+|f|^2)}(1-f^2, i(1+|f|^2), 2f)$$

pois,

$$(x^1)_z = \frac{t\bar{f}_z(f^2-1)}{2(1+|f|^2)} \quad (x^1)_{\bar{z}} = \frac{t\bar{f}_z(\bar{f}^2-1)}{2(1+|f|^2)}$$

$$(x^1)_{z\bar{z}} = \frac{t(f^2-1)}{2(1+|f|^2)^2}(\bar{f}_{\bar{z}z}(1+|f|^2) - f\bar{f}_z\bar{f}_{\bar{z}}) - \frac{t\bar{f}(f^2-1)}{(1+|f|^2)^2}f_{\bar{z}}\bar{f}_z + \frac{t\bar{f}\bar{f}_z f_z}{1+|f|^2}$$

$$(x^1)_{\bar{z}z} = \frac{t(\bar{f}^2-1)}{2(1+|f|^2)^2}(f_{\bar{z}z}(1+|f|^2) - \bar{f}f_z f_{\bar{z}}) - \frac{t\bar{f}(\bar{f}^2-1)}{(1+|f|^2)^2}f_{\bar{z}}\bar{f}_z + \frac{t\bar{f}\bar{f}_z f_z}{1+|f|^2}$$

$$(x^1)_{z\bar{z}} - (x^1)_{\bar{z}z} = \frac{t\bar{f}_z f_z}{(1+|f|^2)^2}[-\bar{f}(f^2-1) + f(\bar{f}^2-1) + f(1+|f|^2) - \bar{f}(1+|f|^2)] = 0$$

Analogamente tem-se $(x^2)_{z\bar{z}} - (x^2)_{\bar{z}z} = 0$ e $(t)_{z\bar{z}} - (t)_{\bar{z}z} = 0$.

Portanto o sistema de equações diferenciais é compatível, o que fornece a existência local de $\tilde{X}$.

A existência global segue da hipótese de S_0 ser simplesmente conexa, através de um argumento usual de monodromia, análogo ao utilizado na prova do 1º caso do Teorema (1.3). ■

Teorema 5.4 *Sejam S_0 uma superfície de Riemann e $\tilde{X}: S_0 \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão conforme com curvatura média constante identicamente um. Se $f: S_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é a aplicação de Gauss generalizada (obtida através da identificação de Q_1 com $\hat{\mathbb{C}}$) então a forma diferencial quadrática $\gamma_2 = \frac{f_z \bar{f}_{\bar{z}}}{1+|f|^2} dz^2$ é globalmente definida e holomorfa sobre S_0 .*

Demonstração: A condição γ_2 holomorfa segue de $\omega_3 \equiv 0$, pois,

$$\left(\frac{f_z \bar{f}_{\bar{z}}}{1+|f|^2} \right)_{\bar{z}} = \frac{1}{(1+|f|^2)^2} [\bar{f}_z (f_{z\bar{z}}(1+|f|^2) - \bar{f} f_z f_{\bar{z}}) + f_z (\bar{f}_{z\bar{z}}(1+|f|^2) - f \bar{f}_z \bar{f}_{\bar{z}})] = 0$$

■

Corolário 5.1 *Se $\tilde{X}(S_0)$ não é uma horoesfera então seus pontos umbílicos são isolados.*

Demonstração: A hipótese garante que a forma γ_2 não é identicamente nula, pois, se $\gamma_2 \equiv 0$ então:

$$a) \quad f_z \equiv 0 \quad \text{ou} \quad b) \quad \bar{f}_{\bar{z}} \equiv 0 \quad \text{ou} \quad c) \quad \forall p \in S_0, \quad f_z(p) = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{f}_{\bar{z}}(p) = 0$$

$$(a) \quad f_z \equiv 0.$$

Pelo Lema (4.1) segue que todos os pontos de $X(S_0)$ são umbílicos e portanto $X(S_0)$ é parte de um plano ou de uma esfera de $\mathbb{R}^3$.

Se $\tilde{X}_0$ é parte de um plano então $f_{\bar{z}} \equiv 0$ e recai no caso b).

Se $\tilde{X}(S_0)$ é parte de uma esfera de $\mathbb{R}^3$ de centro (x_0, y_0, t_0) então, para todo (x, y, t) pertencente à $\tilde{X}(S_0)$ tem-se:

$$\nu^3 = \frac{1}{r}(t - t_0) \quad \text{e} \quad \tilde{H}(x, y, t) = \left(-\frac{1}{r} + \nu^3 \right) t \nu$$

Portanto a hipótese $\tilde{h} \equiv 1$ implica que $-\frac{t_0}{r} = 1$, isto é, $t_0 = -r$ e então, $\tilde{X}(S_0)$ é uma horoesfera, o que contraria a hipótese.

(b) $f_{\bar{z}} \equiv 0$.

Pela relação (5.1) $\tilde{X}(S_0)$ é uma horoesfera, o que contraria a hipótese.

c) $\forall p \in S_0, f_z(p) = 0$ ou $f_{\bar{z}}(p) = 0$

Suponha que exista $p \in S_0$ tal que $f_z(p) \neq 0$. Então, por continuidade, existe uma vizinhança aberta W de p tal que $f_z(p') \neq 0, \forall p' \in W$, isto é, $f_{\bar{z}} \equiv 0$ em W . Segue dos casos anteriores que $\tilde{X}(S_0)$ é uma horoesfera.

Se p é ponto umbílico de $\tilde{X}(S_0)$, então pelo corolário (3.1) e pelo lema (4.1) $f_z(p) = 0$, isto é p é um zero de γ_2 . Visto que os zeros de γ_2 são isolados (pois, γ_2 é uma forma holomorfa não nula), segue que os pontos umbílicos de $\tilde{X}(S_0)$ são isolados. ■

A aplicação normal de Gauss definida por Robert L. Bryant em seu artigo intitulado “Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space” [4], quando repassada para o modelo do semi-hiperplano superior K , possui a seguinte definição equivalente.

Definição 5.1 Sejam S_0 uma superfície de Riemann, $\tilde{X}: S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{H}^3$ uma imersão e S orientada pela normal ν .

A “nova” aplicação de Gauss de S é definida por $F \circ \tilde{X}$, onde F é dada por:

$$F: S \rightarrow \hat{\mathcal{C}} \equiv \text{fronteira ideal de } \mathbb{H}^3.$$

$$p \mapsto F(p) = \begin{cases} \infty & \text{se } \nu(p) = (0, 0, 1) \\ q & \text{se } \nu(p) = (\nu^1, \nu^2, \nu^3) \text{ com } \nu^3 \neq 1 \end{cases}$$

onde q é a fronteira ideal “positiva” da geodésica γ de $\mathbb{H}^3$ que passa por p com velocidade $\nu(p)$, isto é, $q = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \nu(p)$.

Lema 5.1 Dados $\tilde{X} = (x^1, x^2, t)$, $t > 0$ e $v = (a, b, c)$ com $c \leq 0$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, a fronteira ideal da geodésica do $\mathbb{H}^3$ que passa por $\tilde{X}$ com velocidade v são os pontos:

$$\begin{aligned} L &= x^1 + ix^2 + \frac{t}{1-c}(a + ib) & e & \quad L' = x^1 + ix^2 - \frac{t}{1+c}(a + ib) & , & \quad \text{se } c \neq 0 \\ L &= x^1 + ix^2 + t(a + ib) & e & \quad L' = x^1 + ix^2 - t(a + ib) & , & \quad \text{se } c = 0 \end{aligned}$$

onde L é a fronteira ideal positiva e L' é a fronteira ideal negativa.

Demonstração: Seja Π o plano que passa por $\tilde{X}$ e é paralelo ao espaço gerado por v e $k = (0, 0, 1)$.

Os pontos L e L' são, por definição de fronteira ideal, intersecções do plano $\{z = 0\}$ com a circunferência passando por $\tilde{X}$, situada no plano Π e tangente à reta $s: \tilde{X} + tv$ em $\tilde{X}$ com centro no plano $\{z = 0\}$.

Supondo inicialmente $c < 0$, sejam C o centro da circunferência, Q a projeção de $\tilde{X}$ sobre o plano $\{z = 0\}$, P a intersecção da reta s com o plano $\{z = 0\}$ e r o raio da circunferência.

Figura(5.1)

Então:

$$Q = (x^1, x^2, 0) \quad P = (x^1, x^2, t) + \tau(a, b, c) \quad \text{onde} \quad t + \tau c = 0$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{t}{c} > 0 \Rightarrow P = \left(x^1 - \frac{t}{c}a, x^2 - \frac{t}{c}b, 0\right)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= Q - P = \left(\frac{t}{c}a, \frac{t}{c}b, 0\right) = -\frac{t}{c}(-a, -b, 0) \\ \|\vec{PQ}\| &= \overline{PQ} = -\frac{t}{c}\sqrt{a^2 + b^2} \\ \frac{\vec{PQ}}{\overline{PQ}} &= \frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b, 0) \end{aligned}$$

Então

$$\Delta P\tilde{X}C \Rightarrow t^2 = \overline{PQ} \times \overline{QC} \Rightarrow \overline{QC} = \frac{t^2}{\overline{PQ}} = -\frac{tc}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Segue que:

$$C = Q + \overline{QC} \frac{\vec{PQ}}{\overline{PQ}} = (x^1, x^2, 0) + \frac{tc}{a^2+b^2}(a, b, 0) = \left(x^1 + \frac{tac}{a^2+b^2}, x^2 + \frac{tcb}{a^2+b^2}, 0\right)$$

$$r^2 = t^2 + \overline{QC}^2 = t^2 + \frac{t^2 c^2}{a^2+b^2} = \frac{t^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2} = \frac{t^2}{a^2+b^2} \Rightarrow r = \frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\begin{aligned} L &= C - r \frac{\vec{PQ}}{\overline{PQ}} = \left(x^1 + \frac{ta}{a^2+b^2}(c+1), x^2 + \frac{tb}{a^2+b^2}(c+1), 0\right) = \left(x^1 + \frac{ta}{1-c}, x^2 + \frac{tb}{1-c}, 0\right) \\ &= x^1 + ix^2 + \frac{t}{1-c}(a+ib) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L' &= C + r \frac{\vec{PQ}}{\overline{PQ}} = \left(x^1 + \frac{ta}{a^2+b^2}(c-1), x^2 + \frac{tb}{a^2+b^2}(c-1), 0\right) = \left(x^1 - \frac{ta}{1+c}, x^2 - \frac{tb}{1+c}, 0\right) \\ &= x^1 + ix^2 - \frac{t}{1+c}(a+ib) \end{aligned}$$

No caso em que $c = 0$, tem-se $r = t$, $a^2 + b^2 = 1$, $Q = C$ e segue que:

Figura(5.2)

$$L = (x^1, x^2, 0) + t \frac{(a, b, 0)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = x^1 + ix^2 + t(a + ib)$$

$$L' = (x^1, x^2, 0) - t \frac{(a, b, 0)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = x^1 + ix^2 - t(a + ib)$$

■

Considerando S imersa em $\mathbb{R}_+^3$, orientada pela normal

$$\nu(z) = \frac{1}{1 + |f|^2} (2\operatorname{Re} f, 2\operatorname{Im} f, |f|^2 - 1),$$

a “nova” aplicação normal de Gauss $F: S \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$ é dada por:

1º caso: Se $|f|^2 > 1$

Considera-se $(a, b, c) = -\nu(z)$.

Portanto,

$$c = \frac{1 - |f|^2}{1 + |f|^2} < 0 \quad e \quad F(z) = L'(z)$$

Então,

$$\frac{a + ib}{1 + c} = \frac{-2f}{(1 + |f|^2)\left(1 + \frac{1 - |f|^2}{1 + |f|^2}\right)} = -f \Rightarrow L' = x^1 + ix^2 + tf = F(z)$$

2º caso: Se $|f|^2 < 1$

Considera-se $(a, b, c) = \nu(z)$

Portanto,

$$c = \frac{|f|^2 - 1}{1 + |f|^2} < 0 \quad e \quad F(z) = L(z)$$

Então,

$$\frac{a + ib}{1 - c} = \frac{2f}{(1 + |f|^2)\left(1 - \frac{|f|^2 - 1}{1 + |f|^2}\right)} = f \Rightarrow L = x^1 + ix^2 + tf = F(z)$$

3º caso: Se $|f|^2 = 1$

Considera-se $(a, b, c) = \nu(z)$ com $c = 0$ e $F(z) = L(z)$

Então:

$$L(z) = x^1 + ix^2 + t(a + ib) = x^1 + ix^2 + tf = F(z)$$

4º caso: Se $\nu(z) = (0, 0, 1)$

Então $F(z) = \infty$.

Isso mostra que a aplicação de Gauss clássica de S e a “nova” aplicação de Gauss estão relacionadas pela expressão $F(z) = x^1 + ix^2 + tf(z)$.

Teorema 5.5 *Sejam S_0 uma superfície de Riemann e $\tilde{X}: S_0 \rightarrow S \subset \mathbb{H}^3$ uma imersão conforme com curvatura média identicamente um. Então a “nova” aplicação normal de Gauss, $F: S_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, é analítica em S_0 .*

Demonstração: Se $\tilde{X}(z) = (x^1(z), x^2(z), x^3(z))$ então

$$F(z) = x^1(z) + ix^2(z) + tf(z)$$

e de (5.3)

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \bar{z}} = \frac{-tf_{\bar{z}}}{2(1+|f|^2)}(1 - \bar{f}^2, -i(1 + \bar{f}^2), 2\bar{f})$$

Portanto

$$x^1_{\bar{z}} + ix^2_{\bar{z}} = \frac{-tf_{\bar{z}}}{2(1+|f|^2)}(1 - \bar{f}^2 + 1 + \bar{f}^2) = \frac{-tf_{\bar{z}}}{1+|f|^2}$$

$$t_{\bar{z}} = \frac{-tf_{\bar{z}}\bar{f}}{1+|f|^2}$$

Então

$$\begin{aligned} F_{\bar{z}} &= x^1_{\bar{z}} + ix^2_{\bar{z}} + t_{\bar{z}}f + tf_{\bar{z}} = \frac{-tf_{\bar{z}}}{1+|f|^2} - \frac{t|f|^2 f_{\bar{z}}}{1+|f|^2} + tf_{\bar{z}} \\ &= \frac{-tf_{\bar{z}}(1+|f|^2)}{1+|f|^2} + tf_{\bar{z}} = 0 \end{aligned}$$

■

Bibliografia

- [1] Ahlfors, L. V. : *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1953).
- [2] Ahlfors, L. V. and Sario, L. : *Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton (1960).
- [3] Blaschke, W.: *Sulla geometria differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4* , Ann. Mat. Pura Appl. (4) **28** (1949), 205-209.
- [4] Bryant, Robert L.: *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque **155** (1987), (exposé n° XVI) 321-347.
- [5] Carmo, M. P.: *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
- [6] Carmo, M. P.: *Geometria Riemanniana*, IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro (1988).
- [7] Chern, S. S. and Spanier, E.: *A theorem on orientable surfaces in four-dimensional space*, Comment. Math. Helv. **25** (1951), 205-209.
- [8] Chern, S. S. and Osserman, R.: *Complete minimal surfaces in Euclidian n -space*, J. Analyse Math. **19** (1967), 15-34.
- [9] Churchill, R. V.: *Variáveis complexas e suas aplicações*, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo (1975).
- [10] Góes, C. C.: *As normais às superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$* , Dissertação de mestrado, IME-USP (1975).

- [11] Góes, C. C. and Simões, P. A. Q.: *Some remarks on minimal immersions in hyperbolic spaces*, Bol. Soc. Bras. Mat. (2) **16** (1985), 55-65.
- [12] Góes, C. C. and Simões, P. A. Q.: *The generalized Gauss map of minimal surfaces in $\mathbb{H}^3$ and $\mathbb{H}^4$* , Bol. Soc. Bras. (2) **18** (1987), 35-47.
- [13] Hoffman, D. A. and Osserman, R.: *The geometry of the generalized Gauss map*, Mem. Amer. Math. Soc. (28) **236** (1980).
- [14] Hoffman, D. A. and Osserman, R.: *The area of the generalized Gaussian image and the stability of minimal surfaces in S^n and $\mathbb{R}^n$* , Math. Ann., **260** (1982), 437-452.
- [15] Hoffman, D. A. and Osserman, R.: *The Gauss map of surfaces in $\mathbb{R}^n$* , J. Differential Geom. **18** (1983), 733-754.
- [16] Hoffman, D. A. and Osserman, R.: *The Gauss map of surfaces in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$* , Proc. London Math. Soc. (3) **50** (1985), 27-56.
- [17] Hörmander, L.: *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton (1966).
- [18] Kenmotsu, K.: *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann. **245** (1979), 89-99.
- [19] Lima, E. L.: *Curso de análise*, IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, Vol II (1981).
- [20] O' Neill, B.: *Elementary differential geometry*, Academic Press, New York (1969).
- [21] Osserman, R.: *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand-Reinhold, New York (1969).
- [22] Ruh, E. A.: *Asymptotic behavior of non-parametric minimal hypersurfaces*, J. Differential Geom., **4** (1970), 509-513.
- [23] Ruh, E. A. and Vilms, J.: *The tension field of the Gauss map*, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970) 569-573.

- [24] Spivak, M.: *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, Inc., Berkeley, Vol I à IV (1979).
- [25] Springer, G.: *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. (1957).