**Fórmulas de Substituição
para as
Integrais de Gauge**

Márcia Cristina A. Braz Federson

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. Chaim Samuel Hönl**

Área de concentração: **Teoria de Integração**

–São Paulo, Janeiro de 1993.–

Durante este trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq processos n^{os} 830382.90/9, 830797.91/2, 830075.92/5 e da FAPESP processo n^o 92/14524.

aos meus avós
Alberto,
Eunice,
Ida e
William.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me conduzido neste trabalho, ao meu marido, Fernando, pelo carinho, apoio e sugestões e ao Prof. Chaim, pela orientação, paciência e amizade. Aos colegas Leônidas de Oliveira Brandão e Marcelo Messias sou grata pela ajuda com os computadores, e ao Cássio Yukio Shimuta, pelas dicas valiosas. Agradeço também ao Prof. Plínio A. Q. Simões pelo incentivo durante todo o programa de mestrado.

RESUMO

— Estudamos as integrais vetoriais $\int_a^b d\alpha(t)f(t)$ e $\int_a^b \alpha(t)df(t)$ no sentido de Kurzweil-Henstock para o caso no qual $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$, onde $[a, b]$ é um intervalo de $\mathbb{R}$, X e Y são espaços de Banach. Centramos nossa atenção nas propriedades que nos levam a obter as Fórmulas de Substituição para estas integrais:

$$\int_a^b d_t \left[\int_a^t d\alpha(s)f(s) \right] g(t) = \int_a^b d\alpha(t)f(t)g(t),$$

igualdade que nem sempre é verdadeira, mesmo quando as integrais estão definidas e $\alpha(t) = t$.

ABSTRACT

We study the vector integrals $\int_a^b d\alpha(t)f(t)$ and $\int_a^b \alpha(t)df(t)$ in the sense of Kurzweil-Henstock for the case in which $f : [a, b] \rightarrow X$ and $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$, where $[a, b]$ is an interval of $\mathbb{R}$, X and Y are Banach spaces. We centre our attention to the properties which lead us to obtain the Substitution Formulas for these integrals:

$$\int_a^b d_t \left[\int_a^t d\alpha(s)f(s) \right] g(t) = \int_a^b d\alpha(t)f(t)g(t),$$

equality not always true, even when the integrals are defined and $\alpha(t) = t$.

CONTEÚDO

NOTAÇÃO	i
INTRODUÇÃO	iv
Capítulo 1: A Integral de Riemann-Stieltjes	1
1.1 Funções de Variação Limitada	1
1.2 Funções de Semivariação Limitada e Funções de Variação Fraca Limitada	9
1.3 A Integral de Riemann-Stieltjes e a Integral Interior	12
1.4 Integração por partes	19
Capítulo 2: As Integrais de Gauge	25
2.1 As Integrais Vetoriais de Kurzweil	26
2.2 As Integrais Vetoriais de Henstock	44
2.3 Integrais Vetoriais Impróprias	53
REFERÊNCIAS	58
ÍNDICE DE SÍMBOLOS	60
ÍNDICE ALFABÉTICO	62

NOTAÇÃO

X, Y, Z e W indicam espaços de Banach, $L(X, Y)$ indica o espaço das funções $g : X \rightarrow Y$ lineares e contínuas munido da norma

$$\|g\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|g(x)\|$$

e X' indica o dual de X .

Se X é um espaço de Hilbert e $x, y \in X$, então indicamos o produto interno de x por y por $\langle x, y \rangle$.

Dado um intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, dizemos que $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ é uma divisão de $[a, b]$ e indicamos por $D_{[a,b]}$ o conjunto das divisões de $[a, b]$. Se $d_1, d_2 \in D_{[a,b]}$ são tais que d_2 contém os pontos de d_1 , então dizemos que d_2 é mais fina que d_1 e pomos $d_1 \preceq d_2$. Para $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, sejam $|d| = n$ e $\Delta d = \sup\{t_i - t_{i-1}; i = 1, 2, \dots, |d|\}$.

Seja $f : [a, b] \rightarrow X$. Então D_f denota o conjunto dos pontos de descontinuidade de f . Se f é limitada, escrevemos $\|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|f(t)\|$. Para cada $\delta > 0$,

$$\omega_\delta(f) = \sup\{\|f(t) - f(s)\|; t, s \in [a, b], |t - s| \leq \delta\}$$

é a δ -oscilação de f em $[a, b]$ e, dada $d \in D_{[a,b]}$ com $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, então

$$\omega_d(f) = \sup_{1 \leq i \leq |d|} \{\|f(t) - f(s)\|; t, s \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

é a oscilação de f em $[a, b]$ com respeito à d , e definimos

$$\omega_i(f) = \sup\{\|f(t) - f(s)\|; t, s \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Denotamos por $\mathcal{C}([a, b], X)$ o espaço de Banach das funções contínuas de $[a, b]$ em X munido da seguinte norma:

$$f \in \mathcal{C}([a, b], X) \mapsto \|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|f(t)\| \in \mathbb{R}_+.$$

Dizemos que $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ é uma função fracamente contínua se a função

$$\alpha \cdot x : t \in [a, b] \mapsto \alpha(t) \cdot x \in Y$$

é contínua, $\forall x \in X$ e, neste caso, escrevemos $\alpha \in \mathcal{C}^0([a, b], L(X, Y))$. Então α é limitada e, com a norma do sup, $\mathcal{C}^0([a, b], L(X, Y))$ é um espaço de Banach (pelo teorema de Banach-Steinhaus).

Dado $A \subset [a, b]$, definimos a função característica de A por $\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$ e denotamos por $f|_A$ a restrição à A de uma função $f : [a, b] \rightarrow X$.

Se (x_n) é uma sequência de elementos de X que converge para x , então escrevemos $x_n \rightarrow x$.

Para $f : [a, b] \rightarrow X$ definimos:

$$f(t+) = \lim_{h \downarrow 0} f(t+h), \quad \forall t \in [a, b[$$

e

$$f(t-) = \lim_{h \downarrow 0} f(t-h), \quad \forall t \in]a, b],$$

quando tais limites existem.

Dizemos que $f : [a, b] \rightarrow X$ é uma função em escada, e pomos $f \in E([a, b], X)$, se existe $d \in D_{[a,b]}$ com $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que $f|_{]t_{i-1}, t_i[}$ é constante, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

O comprimento de um intervalo I de $\mathbb{R}$ de extremos u e v com $u \leq v$ é dado por $|I| = v - u$. Se $M \subset \mathbb{R}$, então $\overset{\circ}{M}$ e $\bar{M}$ indicam, respectivamente, o interior e o fecho de M .

Vamos indicar por m a medida de Lebesgue (e diremos simplesmente medida) e por $\mathcal{L}_1(M)$ o espaço das funções $f : M \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ que são Lebesgue integráveis indicando por $\int_M^L f$ a sua integral. $\bar{\mathbb{R}}$ denota a reta estendida $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

Uma propriedade sobre um conjunto $M \subset \mathbb{R}$ vale quase sempre e escrevemos *qs*, se o subconjunto de M no qual ela não vale tem medida zero.

Em $\mathbb{R}$, a bola de centro ξ e raio $\delta > 0$ é denotada por $B_\delta(\xi) =]\xi - \delta, \xi + \delta[$.

Indicamos por $l_p([a, b])$ o espaço vetorial formado pelas famílias $x = (x_t)_{t \in [a, b]}$ de números complexos tais que $\|x\|_p < \infty$, munido da norma $x \in l_p([a, b]) \mapsto \|x\|_p$, onde

$$\|x\|_p = \left(\sum_{t \in [a, b]} |x_t|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

quando $1 \leq p < \infty$ e

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |x_t|.$$

O espaço vetorial da classe de equivalência das funções mensuráveis $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_p < \infty$, onde

$$\|f\|_p = \left[L \int_a^b |f(\cdot)|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

quando $1 \leq p < \infty$ e

$$\|f\|_\infty = \inf \{c; |f(\cdot)| \leq c \text{ q.s.}\}$$

é indicado por $L_p([a, b])$ e $f \in L_p([a, b]) \mapsto \|f\|_p$ é a sua norma.

Quando definirmos um termo qualquer, vamos escrevê-lo em **negrito**.

Usamos o símbolo ■ para indicar o término de uma demonstração.

Outros símbolos e notações podem ser encontrados no ÍNDICE DE SÍMBOLOS.

INTRODUÇÃO

Uma das nossas primeiras questões em Matemática e que envolve Teoria de Integração é a necessidade de calcularmos a área sob o gráfico de uma função. A idéia mais utilizada para aproximação do valor desta área é através da soma das áreas de retângulos.

Na aproximação da integral de Riemann por somas de Riemann, exige-se apenas que a máxima amplitude do comprimento dos intervalos seja menor do que um certo δ . Logo, uma divisão de $[a, b]$ não considera qualquer propriedade especial que a função possa ter. Além disso, o espaço das funções Riemann integráveis é muito pequeno, portanto não tem boas propriedades de convergência.

A integral de Lebesgue amplia a integral de Riemann através de uma definição completamente diferente. Contudo, as funções Lebesgue integráveis não contém as integrais de Riemann impróprias nem as suas integrais impróprias.

Denjoy e Perron (1912-1914) deram uma definição que abrange a integral de Lebesgue e as integrais impróprias. Mais tarde (1957-1961), Kurzweil e Henstock conseguiram dar uma definição riemaniana para a integral de Denjoy-Perron.

A idéia das integrais de Kurzweil e de Henstock é tomar os intervalos I_i de uma divisão de $[a, b]$, com $x_i \in I_i$, tais que o comprimento de cada I_i dependa do comportamento da função perto de x_i . Daí a noção de gauge: uma função que a cada ponto de $[a, b]$ associa um número estritamente positivo. Este número vai determinar o comprimento máximo de cada um dos subintervalos de uma divisão de $[a, b]$.

Se ainda, na definição de integral de Kurzweil, não fizermos a exigência de que $x_i \in I_i$, onde os I_i são subintervalos de uma divisão de $[a, b]$, então temos a integral de McShane. Esta mudança aparentemente insignificante empobrece este subconjunto do espaço das funções Kurzweil integráveis no sentido de que a integral de McShane não mais contém as integrais

impróprias. Por outro lado, o espaço das funções McShane integráveis é equivalente ao espaço das funções Lebesgue integráveis (veja [9]) e, no caso de funções a valores num espaço de Banach, o espaço das funções McShane-Henstock integráveis é equivalente ao espaço das funções Bochner-Lebesgue integráveis (veja [7]). Estes fatos tornam mais fácil o manuseio de certas integrais devido à simplicidade da definição de McShane.

Este trabalho traz a extensão das integrais de Kurzweil e de Henstock para funções de variação limitada e mais gerais, num contexto de espaços vetoriais, e está centrado em demonstrar a Fórmula de Substituição (veja [3])

$$\int_a^b d_t \left[\int_a^t d\alpha(s) f(s) \right] g(t) = \int_a^b d\alpha(t) f(t) g(t),$$

que não é nem verdadeira no caso particular em que $\alpha(t) = t$ para funções à valores em um espaço de Banach. Senão vejamos. Sejam $Y = \mathbb{R}$, $X = l_2([a, b])$, $g : [a, b] \rightarrow X$ dada por $g(t) = e_t$ onde $e_t(s) = 1$, se $s = t$ e $e_t(s) = 0$, se $s \neq t$ e $f : [a, b] \rightarrow X'$ dada por $f(t) = \tilde{e}_t$ onde $\tilde{e}_t(x) = \langle e_t, x \rangle$, $\forall x \in X'$. Então $f(t)g(t) = \langle e_t, e_t \rangle = 1$ e, portanto,

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b dt = b - a.$$

Por outro lado,

$$\int_a^b f(t)dt = 0,$$

o que implica que

$$\int_a^b d_t \left[\int_a^t f(s)ds \right] g(t) = 0.$$

Logo, para $b > a$ temos

$$0 < b - a = \int_a^b f(t)g(t)dt \neq \int_a^b d_t \left[\int_a^t f(s)ds \right] g(t) = 0.$$

Para maiores detalhes veja também o Exemplo 3 da página 37.

Obs.: Excetuado o fato de as integrais de McShane não conterem as integrais impróprias, conforme já comentamos, todos os resultados aqui obtidos podem ser aplicados de modo análogo para estas integrais, ou seja, os resultados válidos para as integrais vetoriais de Kurzweil (Henstock) ainda são verdadeiros para as integrais vetoriais de McShane (McShane-Henstock) feitas as respectivas alterações nas hipóteses.

No Capítulo 1, estabelecemos conceitos que são utilizados ao longo do trabalho. São eles função de variação limitada (1.1), função de semivariação limitada e função de variação fraca limitada (1.2), além de outras definições. Aproveitamos também este capítulo para estudar as fórmulas de substituição para as integrais de Riemann-Stieltjes (1.3 e 1.4) (caso particular das integrais de gauge quando o gauge é uma função constante).

Dividimos o Capítulo 2 em três parágrafos. Os dois primeiros tratam das integrais vetoriais de Kurzweil e de Henstock respectivamente. Os últimos resultados de cada um destes parágrafos focalizam as fórmulas de substituição para estas integrais. O parágrafo 2.3 é dedicado às integrais de gauge impróprias.

Capítulo 1

A Integral de Riemann-Stieltjes

1.1 Funções de Variação Limitada

O objetivo deste parágrafo é definir função de variação limitada e dar as propriedades principais do espaço destas funções. O último resultado deste parágrafo é um interessante teorema de decomposição de funções de variação limitada a valores reais, consequência de propriedades particulares destas funções.

Definição 1.1.1 Consideremos a função $f : [a, b] \rightarrow X$.

(i) Se $d \in D_{[a,b]}$ com $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, então definimos a **d-varição** de f em $[a, b]$ por:

$$V_d(f) = \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|;$$

(ii) Se $\sup_{d \in D_{[a,b]}} V_d(f) < \infty$, então dizemos que f é de **variação limitada** em $[a, b]$ e escrevemos $f \in BV([a, b], X)$. Definimos a **variação** de f em $[a, b]$ por:

$$V(f) = V_{[a,b]}(f) = \sup_{d \in D_{[a,b]}} V_d(f).$$

É imediato que

Proposição 1.1.2 Se $f \in BV([a, b], X)$ temos:

- (i) se $c \in]a, b[$, então $V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$;
- (ii) a função $t \in [a, b] \mapsto V_{[a,t]}(f) \in \mathbb{R}_+$ é crescente;
- (iii) f é limitada e $\|f(t)\| \leq \|f(a)\| + V_{[a,t]}(f)$, $\forall t \in [a, b]$.

Se $X = \mathbb{R}$, então $BV([a, b], \mathbb{R})$ é um espaço de funções deriváveis qs, o qual vamos indicar simplesmente por $BV([a, b])$. Este fato segue do Lema 1.1.3 e do Teorema 1.1.4 a seguir.

Lema 1.1.3 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente, então f é derivável qs e a derivada f' é tal que $f' \in \mathcal{L}_1([a, b])$ com $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$.

Prova (veja [11], pág. 100, teor. 3).

Teorema 1.1.4 *Seja $f \in BV([a, b])$. Então temos que*

- (i) *existem funções crescentes $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f = f_1 - f_2$;*
- (ii) *f é derivável qs e a derivada f' é tal que $f' \in \mathcal{L}_1([a, b])$.*

Prova (para (i), basta tomarmos $f_1(t) = V_{[a,t]}(f)$ e $f_2(t) = V_{[a,t]}(f) - f(t) \forall t \in [a, b]$ e (ii) segue de (i) e do lema anterior).

Lema 1.1.5 *Seja $f \in BV([a, b], X)$. Definindo a função $v_f(t) = V_{[a,t]}(f)$, para $t \in [a, b]$, temos:*

- (i) *$v_f(t+) - v_f(t) = \|f(t+) - f(t)\|, \forall t \in [a, b[;$*
- (ii) *$v_f(t) - v_f(t-) = \|f(t) - f(t-)\|, \forall t \in]a, b].$*

Prova (veja [2], pág. 29, prop. 2.8).

Teorema 1.1.6 *Se $f \in BV([a, b], X)$, então o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.*

Prova (veja [2], pág. 30, prop. 2.10).

O exemplo a seguir mostra que mesmo uma função numérica contínua pode ter variação infinita e, portanto, não ser de $BV([a, b])$.

Exemplo 1 *Consideramos $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(t) = \begin{cases} t \sin\left(\frac{1}{t}\right); & t \in]0, 1] \\ 0; & t = 0 \end{cases}.$$

Agora, vamos definir um espaço de funções que contém propriamente o espaço das funções de variação limitada. Tal espaço é o espaço das funções chamadas *regradas*.

Definição 1.1.7 *Podemos definir:*

(i) $f : [a, b] \rightarrow X$ é uma **função regradada**, e escrevemos $f \in G([a, b], X)$, se

$$\exists f(t+), \forall t \in [a, b[$$

e

$$\exists f(t-), \forall t \in]a, b].$$

(ii) $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ é uma **função fracamente regradada** se a função

$$\alpha \cdot x : t \in [a, b] \mapsto \alpha(t) \cdot x \in Y$$

é regradada, $\forall x \in X$. Neste caso, escrevemos $\alpha \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$ com

$$\alpha(t+) \cdot x = (\alpha \cdot x)(t+) \text{ e } \alpha(t-) \cdot x = (\alpha \cdot x)(t-).$$

Obs.: usando o de Banach-Steinhaus, demonstra-se que $\alpha(t+)$ e $\alpha(t-)$ existem e pertencem à $L(X, Y)$.

Com a norma do sup, tanto $G([a, b], X)$ como $G^\sigma([a, b], L(X, Y))$ são espaços de Banach e as funções pertencentes à estes espaços são limitadas.

Então, pode-se mostrar que o espaço das funções em escada é denso no espaço das funções regradadas.

Proposição 1.1.8 *Seja $f : [a, b] \rightarrow X$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $f \in G([a, b], X)$:

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in E([a, b], X)$ tal que $\forall t \in [a, b]$ tem-se que $\|f(t) - f_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$;

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, se $t, s \in]t_{i-1}, t_i[$, então $\|f(t) - f(s)\| < \varepsilon$.

Prova (veja [4], teor. 3.1).

Também pode-se mostrar que

Teorema 1.1.9 $BV([a, b], X) \subset G([a, b], X)$.

Prova (veja [2], pág. 28, teor. 2.7).

Agora, vamos definir função absolutamente contínua para, em seguida, darmos a versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de Lebesgue: o Teorema de Lebesgue.

Depois, definimos função singular para, então, chegarmos ao teorema de decomposição da uma função de $BV([a, b])$ como soma de uma função absolutamente contínua, uma função singular e uma componente de salto.

Definição 1.1.10 Dizemos que $f : [a, b] \rightarrow X$ é absolutamente contínua em $[a, b]$ se:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \|f(y_i) - f(x_i)\| < \varepsilon$, para toda família finita $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ de intervalos interiormente disjuntos, com $I_i =]x_i, y_i[$ para cada i , e tal que $\sum_{i=1}^n |I_i| < \delta$. Neste caso, escrevemos $f \in AC([a, b], X)$ e, quando $X = \mathbb{R}$, escrevemos $f \in AC([a, b])$.

Daí, segue da definição que

Teorema 1.1.11 $AC([a, b], X) \subset BV([a, b], X)$

Teorema 1.1.12 (TEOREMA DE LEBESGUE)

- (i) Seja $F \in AC([a, b])$. Então $F' \in \mathcal{L}_1([a, b])$ e $L \int_a^\xi F' = F(\xi) - F(a)$, $\forall \xi \in [a, b]$.
- (ii) Sejam $f \in \mathcal{L}_1([a, b])$ e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(\xi) = L \int_a^\xi f$. Então temos que $F \in AC([a, b])$ e $F' = f$ q.s.

Prova (veja [11], pág. 110, teor. 14).

É bem conhecido o exemplo da função contínua monótona crescente de $[0, 1]$ sobre $[0, 1]$ que é constante fora do conjunto triádico de Cantor. Para esta função temos $f' = 0$ q.s. e $f \notin AC([0, 1])$, apesar de f ser de variação limitada.

Definição 1.1.13 *Seja $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \cap BV([a, b])$. Então f é singular se e somente se $f' = 0$ q.s. Neste caso, escrevemos $f \in \mathcal{C}_{sing}([a, b])$.*

Lema 1.1.14 *Seja $f \in \mathcal{L}_1(E)$. Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall A \subset E$ com $m(A) < \delta$ tem-se que $L \int_A |f| < \varepsilon$.*

Prova (basta tomarmos $f = f^+ - f^-$ e aplicarmos a prop. 14, pág. 88 de [11]).

Teorema 1.1.15 *Seja $f \in BV([a, b])$. Então existe uma decomposição de f como soma de uma função de salto, uma função singular e uma função absolutamente contínua.*

Prova

Por hipótese, $f \in BV([a, b])$, então f é contínua exceto em uma quantidade enumerável de pontos (Teorema 1.1.6).

Para cada $\xi \in D_f \cap [a, b[$, seja $c_{\xi+} = f(\xi+) - f(\xi)$ e, para cada $\xi \in D_f \cap]a, b]$, seja $c_{\xi-} = f(\xi) - f(\xi-)$.

Portanto, para cada $\xi \in D_f \cap [a, b[$, a função $f - c_{\xi+} \cdot \chi_{[\xi, b]}$ é contínua à direita em ξ , pois

$$[f(\xi+) - c_{\xi+} \cdot \chi_{[\xi, b]}(\xi+)] - [f(\xi) - c_{\xi+} \cdot \chi_{[\xi, b]}(\xi)] = 0$$

e, do mesmo modo, para cada $\xi \in D_f \cap]a, b]$, a função $f - c_{\xi-} \cdot \chi_{[\xi, b]}$ é contínua à esquerda em ξ , pois

$$[f(\xi) - c_{\xi-} \cdot \chi_{[\xi, b]}(\xi)] - [f(\xi-) - c_{\xi-} \cdot \chi_{[\xi, b]}(\xi-)] = 0.$$

Consideremos a função $v_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v_f(t) = V_{[a, t]}(f)$.

Como v_f é crescente (Proposição 1.1.2), então

$$\sum_{t \in D_f \cap [a, b[} [v_f(t+) - v_f(t)] + \sum_{t \in D_f \cap]a, b]} [v_f(t) - v_f(t-)] \leq V(f).$$

Daí, segue que as séries $\sum_{t \in D_f \cap [a, b[} \|f(t+) - f(t)\|$ e $\sum_{t \in D_f \cap]a, b]} \|f(t) - f(t-)\|$ são absolutamente convergentes (veja o Lema 1.1.5) e, então, a função de salto $f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_1 = \sum_{\xi \in D_f \cap [a, b[} c_{\xi+} \cdot \chi_{[\xi, b]} + \sum_{\xi \in D_f \cap]a, b]} c_{\xi-} \cdot \chi_{[\xi, b]}$$

é tal que $f_1 \in BV([a, b])$.

Além disso, $f - f_1$ é contínua, pois $f_1(\xi+) - f_1(\xi) = f(\xi+) - f(\xi)$, $\forall \xi \in [a, b[$ e $f_1(\xi) - f_1(\xi-) = f(\xi) - f(\xi-)$, $\forall \xi \in]a, b]$.

E, $f, f_1 \in BV([a, b])$ implica que $f - f_1 \in BV([a, b])$.

Então, fazendo $h = f - f_1$, temos que $h \in BV([a, b])$ e é contínua.

Daí, pelo Teorema 1.1.4 (ii) temos que $\exists h' \text{ q.s. e } h' \in \mathcal{L}_1([a, b])$.

Logo,

$$\exists f_2(t) = L \int_a^t h', \forall t \in [a, b].$$

Então, pelo Lema 1.1.14, $f_2 \in AC([a, b])$.

Agora, colocando $f_3 = h - f_2$, temos que $f_3 \in BV([a, b])$ e isto implica que $\exists f'_3 \text{ q.s.}$, pelo Teorema 1.1.4 (ii).

Assim,

$$L \int_a^t f'_3 = L \int_a^t h' - L \int_a^t f'_2 = f_2(t) - [f_2(t) - f_2(a)] = f_2(a), \forall t \in [a, b],$$

pela definição de f_2 e pelo Teorema de Lebesgue (Teorema 1.1.12 (i)).

Logo, $f'_3 = 0$ q.s, isto é, f_3 é singular.

Então $f = f_1 + f_2 + f_3$ com f_1 uma função de salto, $f_2 \in AC([a, b])$ e $f_3 \in \mathcal{C}_{sing}([a, b])$. ■

1.2 Funções de Semivariação Limitada e Funções de Variação Fraca Limitada

As funções de semivariação limitada e as funções de variação fraca limitada, que passamos a definir, são funções mais gerais do que as funções de variação limitada estudadas no parágrafo anterior. Vejamos:

Definição 1.2.1 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$. Então:*

(i) *dada $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, a **d-semivariação** de α em $[a, b]$ é dada por:*

$$SV_d(\alpha) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot x_i \right\|; x_i \in X \text{ e } \|x_i\| \leq 1 \right\}$$

(ii) *a semivariação de α em $[a, b]$ é dada por:*

$$SV(\alpha) = SV_{[a,b]}(\alpha) = \sup_{d \in D_{[a,b]}} SV_d(\alpha)$$

e, se $SV(\alpha) < \infty$, então dizemos que α é de semivariação limitada e escrevemos $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$:

(iii) *se $X = \mathbb{R}$, então escrevemos $W(\alpha)$ em vez de $SV(\alpha)$ e $BW([a, b], Y)$ em vez de $SV([a, b], L(\mathbb{R}, Y))$. Chamamos $W(\alpha)$ de **variação fraca** de α e $BW([a, b], Y)$ de espaço das funções de variação fraca limitada. Obviamente,*

$$W_d(\alpha) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \lambda_i [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\|; \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ e } |\lambda_i| \leq 1 \right\}$$

e

$$W(\alpha) = W_{[a,b]}(\alpha) = \sup_{d \in D_{[a,b]}} W_d(\alpha).$$

Então, da definição segue que

Proposição 1.2.2 $BV([a, b], L(X, Y)) \subset SV([a, b], L(X, Y)) \subset BW([a, b], L(X, Y))$.

Damos a seguir um exemplo muito simples de uma função de $BW([a, b], X)$ que não está em $BV([a, b], X)$.

Exemplo 2 Consideremos $X = L_\infty([a, b])$.

Seja $f : [a, b] \rightarrow L_\infty([a, b])$ dada por $f(t) = \chi_{[a, t]}$.

Então, para $d \in D_{[a, b]}$ com $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ temos

$$\|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_\infty = \|\chi_{[t_{i-1}, t_i]}\|_\infty = 1, \forall i.$$

Portanto, $V_d(f) = |d|$ o que implica que $V(f) = \infty$ e $f \notin BV([a, b], X)$.

Porém,

$$W_d(f) = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i [f(t_i) - f(t_{i-1})] \right\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \chi_{[t_{i-1}, t_i]} \right\|_\infty \leq 1,$$

para $\lambda_i \in \mathbb{R}$ com $|\lambda_i| \leq 1, \forall i$.

Daí, $W(f) = 1$ e $f \in BW([a, b], X)$.

Mais geralmente temos que

Proposição 1.2.3 $BV([a, b], X) = BW([a, b], X)$ se e só se a dimensão de X é finita.

Prova (veja [10])

É imediato que

Proposição 1.2.4 *Temos*

(i) *se $\alpha \in BW([a, b], X)$, então α é limitada e*

$$\|\alpha(t)\| \leq \|\alpha(a)\| + BW(\alpha), \forall t \in [a, b].$$

(ii) *se $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$, então α é limitada e*

$$\|\alpha(t)\| \leq \|\alpha(a)\| + SV(\alpha), \forall t \in [a, b].$$

1.3 A Integral de Riemann-Stieltjes e a Integral Interior

Neste parágrafo, definiremos integral de Riemann-Stieltjes e integral interior e damos alguns teoremas sobre a existência da integral de Riemann-Stieltjes. Depois, definiremos e damos propriedades das funções integrais de funções Riemann-Stieltjes integráveis.

Definição 1.3.1 *Seja $d \in D_{[a,b]}$ com $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.*

(i) O conjunto $D = \{(\xi_i, t_i); i = 1, 2, \dots, n\}$, onde $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada i , é chamado uma divisão marcada de $[a, b]$;

(ii) O conjunto $D^\bullet = \{(\xi_i, t_i); i = 1, 2, \dots, n\}$, onde $\xi_i \in]t_{i-1}, t_i[$ para cada i , é chamado uma divisão interior marcada de $[a, b]$.

Denotamos por $TD_{[a,b]}$ o conjunto das divisões marcadas de $[a, b]$ e por $TD_{[a,b]}^\bullet$ o conjunto das divisões interiores marcadas de $[a, b]$.

Sejam $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$. Se $D = \{(\xi_i, t_i); i = 1, 2, \dots, n\} \in TD_{[a,b]}$, então $|D| = n$, $\Delta D = \sup\{t_i - t_{i-1}; i = 1, 2, \dots, |D|\}$, $s^\alpha(f, D) = \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i)$ e $s^f(\alpha, D) = \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})]$. Quando não for preciso explicitar $|D|$, escrevemos simplesmente $D = (\xi_i, t_i)$ para uma divisão marcada de $[a, b]$.

Definição 1.3.2 *Dadas $D = \{(\xi_i, t_i); i = 1, 2, \dots, n\}$ e $D' = \{(\xi'_j, t'_j); j = 1, 2, \dots, m\}$ em $TD_{[a,b]}$, dizemos que D é mais fina que D' , e pomos $D' \preceq D$, se $d, d' \in D_{[a,b]}$, onde $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e $d' : a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_m = b$, são tais que $d' \preceq d$.*

Definição 1.3.3 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$. Para $D \in TD_{[a,b]}$ definimos as integrais de Riemann-Stieltjes por:*

(i)

$$\int_a^b d\alpha(t)f(t) = \lim_{\Delta D \rightarrow 0} s^\alpha(f, D)$$

quando tal limite existe e, neste caso, escrevemos $f \in R^\alpha([a, b], X)$ (se $\alpha(t) = t$, escrevemos $f \in R([a, b], X)$ e $\int_a^b d\alpha(t)f(t) = \int_a^b f(t)dt$);

(ii)

$$\int_a^b \alpha(t)df(t) = \lim_{\Delta D \rightarrow 0} s^f(\alpha, D)$$

quando tal limite existe e, neste caso, escrevemos $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$.

Usando divisões marcadas interiores, podemos definir integrais mais gerais do que as integrais de Riemann-Stieltjes. São elas as integrais interiores.

Definição 1.3.4 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$. Definimos as integrais interiores por:*

(i)

$$\int_a^b \cdot d\alpha(t)f(t) = \lim_{D^\bullet \in TD_{[a,b]}^\bullet} s^\alpha(f, D^\bullet)$$

quando tal limite existe e, neste caso, escrevemos $f \in I^\alpha([a, b], X)$;

(ii)

$$\int_a^b \cdot \alpha(t)df(t) = \lim_{D^\bullet \in TD_{[a,b]}^\bullet} s^f(\alpha, D^\bullet)$$

quando tal limite existe e, neste caso, escrevemos $\alpha \in I^f([a, b], L(X, Y))$.

Obs.: *Dizer que $\exists \lim_{D^\bullet \in TD_{[a,b]}^\bullet} s^\alpha(f, D^\bullet)$ é equivalente à dizer que existe $I \in Y$ satisfazendo:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists D_\varepsilon^\bullet \in TD_{[a,b]}^\bullet \text{ tal que } \forall D^\bullet \supset D_\varepsilon^\bullet \text{ temos que } \|I - s^\alpha(f, D^\bullet)\| < \varepsilon.$$

No que segue, vamos assumir $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ e $f : [a, b] \rightarrow X$.

Proposição 1.3.5 *Temos:*

(i) $R^\alpha([a, b], X) \subset I^\alpha([a, b], X)$ e, para $f \in R^\alpha([a, b], X)$ temos

$$\int_a^b d\alpha(t)f(t) = \int_a^b \alpha(t)f(t);$$

(ii) $R^f([a, b], L(X, Y)) \subset I^f([a, b], X)$ e, para $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$ temos

$$\int_a^b \alpha(t)df(t) = \int_a^b \alpha(t)f(t).$$

Prova (observemos que $TD_{[a,b]}^\bullet \subset TD_{[a,b]}$, que $\exists \lim_{\Delta d \rightarrow 0} s^\alpha(f, D)$ implica que $\exists \lim_{D^\bullet \in TD_{[a,b]}^\bullet} s^\alpha(f, D^\bullet)$ e que $\exists \lim_{\Delta d \rightarrow 0} s^f(\alpha, D)$ implica que $\exists \lim_{D^\bullet \in TD_{[a,b]}^\bullet} s^f(\alpha, D^\bullet)$).

Entretanto,

Teorema 1.3.6 *Se $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ são limitadas e se D_f e D_α não têm pontos comuns, então*

(i) $f \in I^\alpha([a, b], X)$ implica que $f \in R^\alpha([a, b], X)$ e as integrais coincidem;

(ii) $\alpha \in I^f([a, b], X)$ implica que $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$ e as integrais coincidem.

Prova (veja [4], teor. 1.1.2)

Para as integrais interiores e de Riemann-Stieltjes valem as seguintes propriedades:

(1) bilinearidade, isto é, para $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ e $c \in \mathbb{R}$ temos:

se $f \in R^\alpha([a, b], X) \cap R^\beta([a, b], X)$, então $f \in R^{\alpha+\beta}([a, b], X)$ e

$$\int_a^b d(\alpha + \beta)(t)f(t) = \int_a^b d\alpha(t)f(t) + \int_a^b d\beta(t)f(t),$$

se $f \in R^\beta([a, b], X)$, então $f \in R^{c\beta}([a, b], X)$ e

$$\int_a^b d(c\beta)(t)f(t) = c \int_a^b d\beta(t)f(t),$$

se $f, g \in R^\alpha([a, b], X)$, então $(f + g) \in R^\alpha([a, b], X)$ e

$$\int_a^b d\alpha(t)(f + g)(t) = \int_a^b d\alpha(t)f(t) + \int_a^b d\alpha(t)g(t),$$

se $f \in R^\alpha([a, b], X)$, então $cf \in R^\alpha([a, b], X)$ e

$$\int_a^b d\alpha(t)(cf)(t) = c \int_a^b d\alpha(t)f(t),$$

e o mesmo acontece para as outras integrais;

(2) integrabilidade num intervalo implica integrabilidade nos subintervalos.

Lema 1.3.7 (*LEMA DE SACKS-HENSTOCK* - para integrais de Riemann-Stieltjes)

(i) Seja $f \in R^\alpha([a, b], X)$. Se para $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ é tal que $\forall D \in TD_{[a,b]}$ com $\Delta D < \delta$ temos

$$\|s^\alpha(f, D) - \int_a^b d\alpha(t)f(t)\| < \varepsilon,$$

então, para $a \leq c_1 \leq \eta_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq \eta_2 \leq d_2 \leq \dots \leq c_k \leq \eta_k \leq d_k \leq b$ com $\eta_j \in [c_j, d_j]$ e $d_j - c_j < \delta$ para cada j , temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^k \left\{ [\alpha(d_j) - \alpha(c_j)]f(\eta_j) - \int_{c_j}^{d_j} d\alpha(t)f(t) \right\} \right\| < \varepsilon;$$

(ii) Seja $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$. Se para $\varepsilon > 0$, o gauge δ de $[a, b]$ é tal que $\forall D \in TD_{[a,b]}$ δ -fina temos

$$\|s^f(\alpha, D) - \int_a^b \alpha(t)df(t)\| < \varepsilon,$$

então, para $a \leq c_1 \leq \eta_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq \eta_2 \leq d_2 \leq \dots \leq c_k \leq \eta_k \leq d_k \leq b$ com $\eta_j \in [c_j, d_j]$ e $d_j - c_j < \delta$ para cada j , temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^k \left\{ \alpha(\eta_j)[f(d_j) - f(c_j)] - \int_{c_j}^{d_j} \alpha(t)df(t) \right\} \right\| < \varepsilon.$$

Prova(ídem à demonstração do Lema 2.1.6, pág 28, fazendo δ constante.)

Assim como o Teorema 1.3.6, os dois próximos teoremas propõem condições para a existência das integrais de Riemann-Stieltjes.

Teorema 1.3.8 *Sejam $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$ e $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$. Então $f \in R^\alpha([a, b], X)$ com*

$$\left\| \int_a^b d\alpha(t)f(t) \right\| \leq SV(\alpha) \cdot \|f\|$$

e, para $D \in TD_{[a, b]}$, temos que

$$\|s^\alpha(f, D) - \int_a^b d\alpha(t)f(t)\| \leq SV(\alpha) \cdot \omega_{\Delta D}(f).$$

Prova (veja [2], pág. 66, teor. 1.1).

De modo análogo, podemos mostrar o seguinte teorema:

Teorema 1.3.9 *Sejam $\alpha \in \mathcal{C}([a, b], L(X, Y))$ e $f \in BW([a, b], X)$. Então $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$ com*

$$\left\| \int_a^b \alpha(t)df(t) \right\| \leq \|\alpha\| \cdot BW(f)$$

e, para $D \in TD_{[a, b]}$, temos que

$$\|s^f(\alpha, D) - \int_a^b \alpha(t)df(t)\| \leq \omega_{\Delta D}(\alpha) \cdot BW(f).$$

Mais tarde, no parágrafo seguinte sobre integração por partes, demonstramos um teorema que diz que $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$ se e somente se $f \in R^\alpha([a, b], X)$ (Teorema 1.4.1).

Definimos, agora, as funções integrais de $f \in R^\alpha([a, b], X)$ e de $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$ e damos propriedades para aquelas funções nos resultados que seguem.

Definição 1.3.10 *Temos:*

(i) *se $f \in R^\alpha([a, b], X)$, então definimos a função $\tilde{f}_\alpha : [a, b] \rightarrow Y$ por*

$$\tilde{f}_\alpha(\xi) = \int_a^\xi d\alpha(t)f(t)$$

(se $\alpha(t) = t$, então $\tilde{f}_\alpha = \tilde{f}$);

(ii) se $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$, então definimos a função $\tilde{\alpha}_f : [a, b] \rightarrow Y$ por

$$\tilde{\alpha}_f(\xi) = \int_a^\xi \alpha(t) df(t).$$

Teorema 1.3.11 Se $\alpha \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$ e $f \in R^\alpha([a, b], X)$, então $\tilde{f}_\alpha \in G([a, b], Y)$ com

$$\tilde{f}_\alpha(\xi+) - \tilde{f}_\alpha(\xi) = [\alpha(\xi+) - \alpha(\xi)]f(\xi), \forall \xi \in [a, b[$$

e

$$\tilde{f}_\alpha(\xi) - \tilde{f}_\alpha(\xi-) = [\alpha(\xi) - \alpha(\xi-)]f(\xi), \forall \xi \in]a, b].$$

Prova

Por hipótese $f \in R^\alpha([a, b], X)$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ com $\Delta D < \delta$ temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i) - \int_a^b d\alpha(t)f(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\alpha \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$, então $\exists \alpha(\xi+) \cdot x = (\alpha \cdot x)(\xi+)$, $\forall x \in X$, $\forall \xi \in [a, b]$.

Então, $\exists \varepsilon' > 0$ tal que para $0 < h < \varepsilon'$ temos que

$$\|[\alpha(\xi+h) - \alpha(\xi+)]f(\xi)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $\delta < \varepsilon'$ e $h < \delta$ vem:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{f}_\alpha(\xi+h) - \tilde{f}_\alpha(\xi) - [\alpha(\xi+) - \alpha(\xi)]f(\xi)\| = \\ & = \left\| \int_\xi^{\xi+h} d\alpha(t)f(t) - [\alpha(\xi+) - \alpha(\xi)]f(\xi) \right\| \leq \\ & \leq \left\| \int_\xi^{\xi+h} d\alpha(t)f(t) - [\alpha(\xi+h) - \alpha(\xi)]f(\xi) \right\| + \|[\alpha(\xi+h) - \alpha(\xi)]f(\xi) - [\alpha(\xi+) - \alpha(\xi)]f(\xi)\| < \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \|[\alpha(\xi + h) - \alpha(\xi)]f(\xi)\|,$$

pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 1.3.7) e segue a tese.

A demonstração da outra igualdade é análoga. ■

Corolário 1 Se $\alpha \in \mathcal{C}^\sigma([a, b], L(X, Y))$ e $f \in R^\alpha([a, b], X)$, então $\tilde{f}_\alpha \in \mathcal{C}([a, b], Y)$.

Teorema 1.3.12 Se $f \in G([a, b], X)$ e $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$, então $\hat{\alpha}_f \in G([a, b], Y)$ com

$$\hat{\alpha}_f(\xi+) - \hat{\alpha}_f(\xi) = \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)], \forall \xi \in [a, b[$$

e

$$\hat{\alpha}_f(\xi) - \hat{\alpha}_f(\xi-) = \alpha(\xi)[f(\xi) - f(\xi-)], \forall \xi \in]a, b].$$

Prova

Por hipótese $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ com $\Delta D < \delta$ temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})] - \int_a^b \alpha(t)df(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $f \in G([a, b], X)$, então $\exists f(\xi+) = \lim_{h \downarrow 0} f(\xi + h)$, $\forall \xi \in [a, b[$.

Então, $\exists \varepsilon' > 0$ tal que para $0 < h < \varepsilon'$ temos que

$$\|f(\xi + h) - f(\xi+)\| < \frac{\varepsilon}{2 \|\alpha(\xi)\|}.$$

Tomando $\delta < \varepsilon'$ e $h < \delta$ vem:

$$\|\hat{\alpha}_f(\xi + h) - \hat{\alpha}_f(\xi) - \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)]\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_{\xi}^{\xi+h} \alpha(t) df(t) - \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)] \right\| \leq \\
&\leq \left\| \int_{\xi}^{\xi+h} \alpha(t) df(t) - \alpha(\xi)[f(\xi+h) - f(\xi)] \right\| + \|\alpha(\xi)[f(\xi+h) - f(\xi+)]\| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|\alpha(\xi)\| \|f(\xi+h) - f(\xi+)\|,
\end{aligned}$$

pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 1.3.7) e segue a tese.

A demonstração da outra igualdade é análoga. ■

Corolário 1 Se $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$ e $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$, então $\tilde{\alpha}_f \in \mathcal{C}([a, b], Y)$.

1.4 Integração por partes

Dadas as funções $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$, vamos estudar condições necessárias para a validade da fórmula de integração por partes para as integrais de Riemann-Stieltjes. Também vamos explorar o caso em que ou f ou α é uma função integral. Desta forma, obtemos as fórmulas de substituição para estas integrais.

Sejam, então, $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$. Chamamos **fórmula de integração por partes** à igualdade do teorema abaixo.

Teorema 1.4.1 $f \in R^\alpha([a, b], X)$ se e só se $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$ e temos que

$$\int_a^b d\alpha(t)f(t) + \int_a^b \alpha(t)df(t) = \alpha(b)f(b) - \alpha(a)f(a).$$

Prova

($\Rightarrow$) Por hipótese, $f \in R^\alpha([a, b], X)$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ com $\Delta D < \delta$ temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i) - \int_a^b d\alpha(t)f(t) \right\| < \varepsilon.$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \alpha(b)f(b) - \alpha(a)f(a) - \int_a^b d\alpha(t)f(t) \right\} - \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})] \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(t_i)f(t_i) - \alpha(t_{i-1})f(t_{i-1})] - \int_a^b d\alpha(t)f(t) - \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})] \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(t_i) - \alpha(\xi_i)]f(t_i) + \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(\xi_i) - \alpha(t_{i-1})]f(t_{i-1}) - \int_a^b d\alpha(t)f(t) \right\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

pois $\Delta D < \delta$ implica que $(t_i - t_{i-1}) < \delta$, $\forall i$ e, portanto, $(t_i - \xi_i) < \delta$ e $(\xi_i - t_{i-1}) < \delta$, $\forall i$.

($\Leftarrow$) Análoga. ■

Pelos Teoremas 1.3.6, 1.3.8 e 1.3.9 obtemos o seguinte corolário:

Corolário 1 *Existem as integrais de Riemann-Stieltjes para as funções $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ e vale a fórmula de integração por partes, se uma das condições abaixo são satisfeitas:*

- (i) D_α e D_f não têm pontos comuns e $f \in I^\alpha([a, b], X)$ ou $\alpha \in I^f([a, b], L(X, Y))$;
- (ii) $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$ e $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$;
- (iii) $\alpha \in \mathcal{C}([a, b], L(X, Y))$ e $f \in BW([a, b], X)$.

No caso geral, a fórmula de integração por partes não vale para as integrais interiores conforme mostra o exemplo seguinte:

Exemplo 3 *Sejam $\alpha, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\alpha = f = \chi_{\{a\}}$.*

Para $D^\bullet = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}^\bullet$, temos:

$$[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i) = 0, \forall i \text{ e } \alpha(\xi_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})] = 0, \forall i.$$

Daí,

$$\int_a^b \cdot d\alpha(t)f(t) = 0 \text{ e } \int_a^b \cdot \alpha(t)df(t) = 0.$$

E segue que

$$0 = \int_a^b \cdot d\alpha(t)f(t) + \int_a^b \cdot \alpha(t)df(t) \neq \alpha(b)f(b) - \alpha(a)f(a) = 1.$$

Agora consideremos o caso em que $\alpha = \tilde{\beta}$, com $\beta \in R([a, b], L(X, Y))$.

É fácil mostrarmos que

Proposição 1.4.2 Para $\beta \in R([a, b], L(X, Y))$ e $\alpha = \tilde{\beta}$ temos que $\alpha \in AC([a, b], L(X, Y))$ e $V(\alpha) \leq (b - a)\|\beta\|$.

Então, pela Proposição 1.4.2 acima e pelo corolário do Teorema 1.4.1 é imediato o seguinte resultado para a fórmula de integração por partes:

Teorema 1.4.3 Sejam $\beta \in R([a, b], L(X, Y))$, $\alpha = \tilde{\beta}$ e $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$. Então temos que $f \in R^\alpha([a, b], X)$, $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$ e

$$\int_a^b d\alpha(t)f(t) + \int_a^b \alpha(t)df(t) = \alpha(b)f(b) - \alpha(a)f(a).$$

De modo mais geral, podemos tomar $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ uma função integral do tipo Riemann-Stieltjes, ou seja, $\alpha = \tilde{\beta}_\gamma$ com $\gamma : [a, b] \rightarrow L(W, Y)$ e $\beta \in R^\gamma([a, b], L(X, W))$. Com isto, vamos obter um teorema para a fórmula de substituição.

Teorema 1.4.4 Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow L(W, Y)$, $\beta \in R^\alpha([a, b], L(X, W))$, $\gamma = \tilde{\beta}_\alpha$ e seja também $f \in BV([a, b], X)$. Então $f \in R^\gamma([a, b], X)$ se e só se $\beta \cdot f \in R^\alpha([a, b], W)$. Neste caso,

$$\int_a^b d\alpha(t)\beta(t)f(t) = \int_a^b d\gamma(t)f(t).$$

Prova

Por hipótese, $\beta \in R^\alpha([a, b], L(X, W))$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ com $\Delta D < \delta$ temos que

$$\left\| \sum_{i=j}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\beta(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t)\beta(t) \right\} \right\| < \varepsilon, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, |D|\},$$

pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 1.3.7).

Tomando as somas aproximadas de $\int_a^b d\alpha(t)\beta(t)f(t)$ e de $\int_a^b d\gamma(t)f(t)$ vem:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \beta(\xi_i) f(\xi_i) - \sum_{i=1}^{|D|} [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\xi_i) \right\| = \\ & = \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \beta(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t) \beta(t) \right\} f(\xi_i) \right\| = I. \end{aligned}$$

Para $\gamma_i \in L(X, Y)$ e $x_i \in X$ temos:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \right) x_0 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n \gamma_i \right) (x_j - x_{j-1}).$$

Então, fazendo $\gamma_i = [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \beta(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t) \beta(t)$, $x_i = f(\xi_i)$ e $x_0 = f(a)$ temos:

$$\begin{aligned} I & \leq \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \beta(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t) \beta(t) \right\} \right\| \|f(a)\| + \\ & + \sum_{j=1}^{|D|} \left\| \sum_{i=j}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \beta(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t) \beta(t) \right\} \right\| \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\| < \\ & < \varepsilon \cdot \|f(a)\| + \varepsilon \cdot V(f). \end{aligned}$$

E segue a tese. ■

Agora, tomando f como sendo uma função integral, chegamos ao teorema para a fórmula de substituição que segue:

Teorema 1.4.5 *Sejam $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$, $g : [a, b] \rightarrow W$, $f \in R^g([a, b], L(W, X))$, e $\beta = \hat{f}_g : [a, b] \rightarrow X$. Então $\alpha \in R^\beta([a, b], L(X, Y))$ se e só se $\alpha \cdot f \in R^g([a, b], Y)$. Neste caso,*

$$\int_a^b \alpha(t) f(t) dg(t) = \int_a^b \alpha(t) d\beta(t).$$

Prova

Por hipótese, $f \in R^g([a, b], L(W, X))$

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ com $\Delta D < \delta$ temos que

$$\left\| \sum_{i=j}^{|D|} \left\{ f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dg(t) \right\} \right\| < \varepsilon, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, |D|\},$$

pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 1.3.7).

Tomando as somas aproximadas de $\int_a^b \alpha(t)f(t)dg(t)$ e de $\int_a^b \alpha(t)d\beta(t)$ vem:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)[\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})] \right\| = \\ & = \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i) \left\{ f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dg(t) \right\} \right\| = I. \end{aligned}$$

Para $\alpha_i \in L(X, Y)$ e $x_i \in X$ temos que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \left(\sum_{i=j}^n x_i \right).$$

Então, fazendo $x_i = f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dg(t)$, $\alpha_i = \alpha(\xi_i)$ e $\alpha_0 = \alpha(a)$ temos:

$$\left\| \sum_{i=j}^{|D|} \left\{ f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dg(t) \right\} \right\| = \left\| \sum_{i=j}^{|D|} x_i \right\| < \varepsilon, \quad \forall j,$$

pela integrabilidade de f .

Logo,

$$\begin{aligned} I & \leq \|\alpha(a)\| \left\| \sum_{i=1}^{|D|} x_i \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{|D|} [\alpha(\xi_j) - \alpha(\xi_{j-1})] \left(\sum_{i=j}^{|D|} x_i \right) \right\| < \\ & < \|\alpha(a)\| \cdot \varepsilon + SV(\alpha) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

E segue a tese. ■

Capítulo 2

As Integrais Vetoriais de Gauge

Nos parágrafos 2.1 e 2.2 deste capítulo, vamos definir e dar algumas propriedades das integrais vetoriais de Kurzweil e de Henstock, respectivamente. Uma destas propriedades é enunciada no LEMA DE SACKS-HENSTOCK para integrais de Kurzweil e de Henstock que é importante para a generalização dos resultados obtidos no capítulo anterior para as integrais de Riemann-Stieltjes, incluindo as fórmulas de substituição.

No parágrafo 2.3, vamos ver uma propriedade particularmente interessante de ambos os espaços das funções Kurzweil integráveis e das funções Henstock integráveis: tais espaços contêm suas integrais impróprias.

2.1 A Integral Vetorial de Kurzweil

Definição 2.1.1 *Vamos definir:*

- (i) chamamos **gauge de $[a, b]$** uma função $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$;
- (ii) dada $D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$, dizemos que D é **δ -fina** se e só se $[t_{i-1}, t_i] \subset B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$ para cada i ;
- (iii) dados $c \in [a, b]$ e δ um gauge de $[a, b]$, dizemos que δ é **c -especial** ou δ é **especial relativamente à c** , se $c \in B_{\delta(\xi)}(\xi)$ implica que $\xi = c$.

Exemplo 1 *Seja $c \in [a, b]$. Então qualquer gauge δ de $[a, b]$ tal que $\delta(\xi) \leq |\xi - c|$, $\forall \xi \neq c$ é c -especial.*

Daí, podemos generalizar este exemplo como segue:

Proposição 2.1.2 *Dado um número finito de pontos de $[a, b]$, existe um gauge de $[a, b]$ que é especial relativamente à estes pontos.*

Teorema 2.1.3 *São equivalentes as afirmações:*

- (i) para todo gauge δ de $[a, b]$, existe $D \in TD_{[a, b]}$ δ -fina;
- (ii) toda cobertura aberta de $[a, b]$ admite uma subcobertura finita.

Prova

(i) $\implies$ (ii)

Seja $B = \{I_j; j \in A\}$ uma cobertura aberta de $[a, b]$.

Podemos admitir, sem perda de generalidade, que os I_j 's são intervalos abertos não vazios.

Definamos um gauge δ de $[a, b]$ da seguinte maneira: para cada $\xi \in [a, b]$, fixemos um I_j tal que $\xi \in I_j$ e tomemos $\delta(\xi)$ tal que $B_{\delta(\xi)}(\xi) \subset I_j$.

Por hipótese, $\exists D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, |D|\}$, tomemos $j_i \in A$ tal que I_{j_i} é o intervalo fixado à pouco para ξ_i .

Fazendo $A' = \{j_i \in A; i \in \{1, 2, \dots, |D|\}\}$ temos que $B' = \{I_j; j \in A'\}$ é uma subcobertura finita de B para $[a, b]$.

(ii) $\implies$ (i)

Seja δ um gauge de $[a, b]$.

Portanto, $B = \{B_{\delta(\xi)}(\xi); \xi \in [a, b]\}$ é uma cobertura aberta de $[a, b]$, que admite uma subcobertura finita $B = \{B_{\delta(\xi^j)}(\xi^j); j = 1, 2, \dots, m\}$, por hipótese.

Tomemos $t_0 = a$.

Indicamos por ξ_1 um ponto ξ^i tal que $\xi^i + \delta(\xi^i)$ seja máximo entre os ξ^j 's tais que $a \in B_{\delta(\xi^j)}(\xi^j)$.

Indiquemos por ξ_2 um ponto ξ^i tal que $\xi^i + \delta(\xi^i)$ seja máximo entre os ξ^j 's tais que $\xi_1 + \delta(\xi_1) \in B_{\delta(\xi^j)}(\xi^j)$.

Tomando $t_1 \in B_{\delta(\xi_1)}(\xi_1) \cap B_{\delta(\xi_2)}(\xi_2)$ tal que $\xi_1 \leq t_1 \leq \xi_2$ temos: $\xi_1 \in [t_0, t_1] \subset B_{\delta(\xi_1)}(\xi_1)$.

Indicamos por ξ_3 um ponto ξ^i tal que $\xi^i + \delta(\xi^i)$ seja máximo entre os ξ^j 's tais que $\xi_2 + \delta(\xi_2) \in B_{\delta(\xi_j)}(\xi^j)$.

Tomando $t_2 \in B_{\delta(\xi_2)}(\xi_2) \cap B_{\delta(\xi_3)}(\xi_3)$ tal que $\xi_2 \leq t_1 \leq \xi_3$ temos: $\xi_2 \in [t_1, t_2] \subset B_{\delta(\xi_2)}(\xi_2)$.

Repetindo este processo obtemos um número finito de ξ_n 's.

Quando $\xi_n + \delta(\xi_n) > b$ o processo terminou e definimos $t_n = b$.

Então, $D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ e é δ -fina. ■

Daí, segue o

Teorema 2.1.4 (LEMA DE COUSIN) *Para todo gauge δ de $[a, b]$, existe $D \in TD_{[a,b]}$ δ -fina.*

Então, o Teorema 2.1.3 equivale à dizer que o Lema de Cousin caracteriza o corpo dos números reais (veja [5], apêndice C).

Vamos sempre admitir $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ e $f : [a, b] \rightarrow X$ se não houver menção explícita em contrário.

Definição 2.1.5 *Definimos:*

(i) f é Kurzweil integrável em relação à α , e denotamos $f \in K^\alpha([a, b], X)$, se existe $I \in Y$ satisfazendo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ gauge de } [a, b] \text{ tal que } \forall D \in TD_{[a,b]} \delta\text{-fina temos que } \|s^\alpha(f, D) - I\| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $I = \int_a^b d\alpha(t)f(t)$ (quando $\alpha(t) = t$, escrevemos $K([a, b], X)$ e $\int_a^b d\alpha(t)f(t) = \int_a^b f(t)dt$).

(ii) α é Kurzweil integrável em relação à f , e denotamos $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$, se existe $I \in Y$ satisfazendo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ gauge de } [a, b] \text{ tal que } \forall D \in TD_{[a, b]} \delta\text{-fina temos que } \|s^f(\alpha, D) - I\| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $I = \int_a^b \alpha(t) df(t)$.

Em ambos os espaços $K^\alpha([a, b], X)$ e $K^f([a, b], L(X, Y))$ valem as seguintes propriedades:

- (1) bilinearidade da integral;
- (2) integrabilidade num intervalo implica integrabilidade nos subintervalos e vice-versa, isto é, se $f \in K^\alpha([a, b], X)$, então $f \in K^\alpha([u, v], X)$, $\forall [u, v] \subset [a, b]$ e, se $f \in K^\alpha([a, c], X)$ e $f \in K^\alpha([c, b], X)$, então $f \in K^\alpha([a, b], X)$ com

$$\int_a^b d\alpha(t)f(t) = \int_a^c d\alpha(t)f(t) + \int_c^b d\alpha(t)f(t)$$

e o mesmo vale para a outra integral.

Seguimos com o LEMA DE SACKS-HENSTOCK, ferramenta muito útil para a demonstração da maioria dos resultados deste e do próximo parágrafos.

Lema 2.1.6 (LEMA DE SACKS-HENSTOCK)

(i) Seja $f \in K^\alpha([a, b], X)$. Se para $\varepsilon > 0$, o gauge δ de $[a, b]$ é tal que $\forall D \in TD_{[a, b]} \delta$ -fina temos

$$\|s^\alpha(f, D) - \int_a^b d\alpha(t)f(t)\| < \varepsilon,$$

então, para $a \leq c_1 \leq \eta_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq \eta_2 \leq d_2 \leq \dots \leq c_k \leq \eta_k \leq d_k \leq b$ com $\eta_j \in [c_j, d_j] \subset B_{\delta(\eta_j)}(\eta_j)$ para cada j , temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^k \left\{ [\alpha(d_j) - \alpha(c_j)]f(\eta_j) - \int_{c_j}^{d_j} d\alpha(t)f(t) \right\} \right\| < \varepsilon;$$

(ii) Seja $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$. Se para $\varepsilon > 0$, o gauge δ de $[a, b]$ é tal que $\forall D \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos

$$\|s^f(\alpha, D) - \int_a^{K^b} \alpha(t) df(t)\| < \varepsilon,$$

então, para $a \leq c_1 \leq \eta_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq \eta_2 \leq d_2 \leq \dots \leq c_k \leq \eta_k \leq d_k \leq b$ com $\eta_j \in [c_j, d_j] \subset B_{\delta(\eta_j)}(\eta_j)$ para cada j , temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^k \left\{ \alpha(\eta_j)[f(d_j) - f(c_j)] - \int_{c_j}^{K^{d_j}} \alpha(t) df(t) \right\} \right\| < \varepsilon.$$

Prova

Esta demonstração é baseada em [8], pág. 90.

Vamos fazer a demonstração de (i). A demonstração de (ii) é análoga.

Para cada j , seja $J_j = [c_j, d_j]$.

O conjunto $[a, b] \setminus \cup_{j=1}^k J_j$ consiste de um número finito de intervalos de $[a, b]$.

Sejam $K_1, K_2, \dots, K_m$ os fechos de cada um destes intervalos.

Como $f \in K^\alpha([a, b], X)$, então $f \in K^\alpha(K_p, X)$, $\forall p = 1, 2, \dots, m$.

Portanto, dado $\varepsilon' > 0$, $\exists \delta'$ gauge de K_p , com $\delta'(\xi) \leq \delta(\xi)$ para cada $\xi \in K_p$, tal que $\forall D_p = (\xi_{p_i}, t_{p_i}) \in TD_{K_p}$ δ' -fina temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D_p|} [\alpha(t_{p_i}) - \alpha(t_{p_{i-1}})] f(\xi_{p_i}) - \int_{K_p} d\alpha(t) f(t) \right\| < \frac{\varepsilon'}{m}, \forall p.$$

Para cada j , $D'_j = \{(\eta_j, d_j)\} \in TD_{J_j}$ e é δ -fina.

Daí, $D = \left(\cup_{j=1}^k D'_j \right) \cup \left(\cup_{p=1}^m D_p \right) \in TD_{[a, b]}$ e é δ -fina.

Então,

$$\|s^\alpha(f, D) - \int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t)\| < \varepsilon$$

e

$$\begin{aligned} & \|s^\alpha(f, D) - \int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t)\| \geq \\ & \geq \left\| \sum_{j=1}^k \left\{ [\alpha(d_j) - \alpha(c_j)]f(\eta_j) - \int_{J_j}^{K_j} d\alpha(t)f(t) \right\} \right\| - \\ & - \left\| \sum_{p=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^{|D_p|} [\alpha(t_{p_i}) - \alpha(t_{p_{i-1}})]f(\xi_{p_i}) - \int_{K_p}^{K_j} d\alpha(t)f(t) \right\} \right\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^k \left\{ [\alpha(d_j) - \alpha(c_j)]f(\eta_j) - \int_{J_j}^{K_j} d\alpha(t)f(t) \right\} \right\| < \\ & < \varepsilon + \sum_{p=1}^m \left\| \sum_{i=1}^{|D_p|} [\alpha(t_{p_i}) - \alpha(t_{p_{i-1}})]f(\xi_{p_i}) - \int_{K_p}^{K_j} d\alpha(t)f(t) \right\| < \\ & < \varepsilon + m \cdot \frac{\varepsilon'}{m} = \varepsilon + \varepsilon', \quad \forall \varepsilon' > 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| \sum_{j=1}^k \left\{ [\alpha(d_j) - \alpha(c_j)]f(\eta_j) - \int_{c_j}^{K_j} d\alpha(t)f(t) \right\} \right\| \leq \varepsilon. \blacksquare$$

As funções Riemann-Stieltjes integráveis são o caso particular das integrais vetoriais de Kurzweil onde o gauge é constante.

Portanto,

Teorema 2.1.7 *Temos:*

(i) $R^\alpha([a, b], X) \subset K^\alpha([a, b], X)$ e, se $f \in R^\alpha([a, b], X)$, então

$$\int_a^b d\alpha(t)f(t) = \int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t);$$

(ii) $R^f([a, b], L(X, Y)) \subset K^f([a, b], L(X, Y))$ e, se $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$, então

$$\int_a^b \alpha(t) df(t) = \int_a^{K^b} \alpha(t) df(t).$$

Prova (basta vermos que, para $\delta > 0$, δ da definição das integrais de Riemann-Stieltjes, tomamos um gauge δ_0 de $[a, b]$ constantemente igual à $\frac{\delta}{2}$, e segue que $\forall D \in TD_{[a, b]}$ δ_0 -fina é tal que $\Delta D < \delta$).

Corolário 1 Temos:

(i) se $f \in R^\alpha([a, b], X)$, então

$$\int_a^b d\alpha(t)f(t) = \int_a^b \cdot d\alpha(t)f(t) = \int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t);$$

(ii) se $\alpha \in R^f([a, b], L(X, Y))$, então

$$\int_a^b \alpha(t) df(t) = \int_a^b \cdot \alpha(t) df(t) = \int_a^{K^b} \alpha(t) df(t).$$

Se entretanto não tivermos $f \in R^\alpha([a, b], X)$, por exemplo, então pode acontecer de termos $f \in K^\alpha([a, b], X) \cap I^\alpha([a, b], X)$, mas $\int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t) \neq \int_a^b \cdot d\alpha(t)f(t)$, conforme mostra o exemplo a seguir. E o mesmo pode ocorrer com a outra integral, se $\alpha \notin R^f([a, b], L(X, Y))$. Vejamos:

Exemplo 2 Sejam $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f = \alpha = \chi_{[a, b]}$.

Seja $D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$.

$$\text{Então, } [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i) = \begin{cases} 1; & i = 1 \text{ e } \xi_1 > a \\ 0; & i \neq 1 \text{ ou } i = 1 \text{ e } \xi_1 = a \end{cases}.$$

Portanto,

$$\nexists \int_a^b d\alpha(t)f(t), \text{ mas } \exists \int_a^b \cdot d\alpha(t)f(t) = 1.$$

Por outro lado, tomando um gauge δ de $[a, b]$ que seja a -especial temos:

$$\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]} \text{ } \delta\text{-fina é tal que } \xi_1 = a.$$

Logo,

$$\exists \int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t) = 0.$$

Pelo Teorema 2.1.7, não há confusão de notação se definirmos:

Definição 2.1.8 Temos:

(i) para $f \in K^\alpha([a, b], X)$, definimos a função $\tilde{f}_\alpha : [a, b] \rightarrow X$ por

$$\tilde{f}_\alpha(\xi) = \int_a^{K^\xi} d\alpha(t)f(t)$$

(se $\alpha(t) = t$, escrevemos $\tilde{f}_\alpha = \tilde{f}$);

(ii) para $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$, definimos a função $\tilde{\alpha}_f : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ por

$$\tilde{\alpha}_f(\xi) = \int_a^{K^\xi} \alpha(t)df(t).$$

Os teoremas que seguem dão propriedades das funções $\tilde{f}_\alpha$ e $\tilde{\alpha}_f$.

Teorema 2.1.9 Se $f \in G([a, b], X)$ e $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$, então $\tilde{\alpha}_f \in G([a, b], Y)$ com

$$\tilde{\alpha}_f(\xi+) - \tilde{\alpha}_f(\xi) = \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)], \forall \xi \in [a, b[$$

e

$$\tilde{\alpha}_f(\xi) - \tilde{\alpha}_f(\xi-) = \alpha(\xi)[f(\xi) - f(\xi-)], \forall \xi \in]a, b].$$

Prova

Por hipótese, $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})] - \int_a^{K^b} \alpha(t)df(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\xi \in [a, b[$ arbitrário.

Como $f \in G([a, b], X)$ então existe $f(\xi+)$.

Logo, $\exists \varepsilon' > 0$ tal que para $0 < h < \varepsilon'$ temos que $\|f(\xi + h) - f(\xi+)\| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|\alpha(\xi)\|} \right\}$.

Sejam $\delta(\xi) < \varepsilon'$ e $0 < h < \delta(\xi)$.

Então, pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 2.1.6), temos que

$$\|\alpha(\xi)[f(\xi + h) - f(\xi)] - \int_{\xi}^{\xi+h} \alpha(t)df(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\hat{\alpha}_f(\xi + h) - \hat{\alpha}_f(\xi) - \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)]\| &= \left\| \int_{\xi}^{\xi+h} \alpha(t)df(t) - \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)] \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_{\xi}^{\xi+h} \alpha(t)df(t) - \alpha(\xi)[f(\xi + h) - f(\xi)] \right\| + \\ &+ \|\alpha(\xi)[f(\xi + h) - f(\xi)] - \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)]\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\alpha(\xi)\| \|f(\xi + h) - f(\xi+)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, existe $\hat{\alpha}_f(\xi+) = \hat{\alpha}_f(\xi) + \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)]$.

Analogamente, prova-se que existe $\hat{\alpha}_f(\xi-)$ satisfazendo a igualdade do enunciado. ■

Corolário 1 Se $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$ e $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$, então $\hat{\alpha}_f \in \mathcal{C}([a, b], Y)$.

Teorema 2.1.10 Se $\alpha \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$ e $f \in K^\alpha([a, b], X)$, então $\hat{f}_\alpha \in G([a, b], Y)$ com

$$\hat{f}_\alpha(\xi+) - \hat{f}_\alpha(\xi) = [\alpha(\xi+) - \alpha(\xi)]f(\xi), \quad \forall \xi \in [a, b[$$

e

$$\hat{f}_\alpha(\xi) - \hat{f}_\alpha(\xi-) = [\alpha(\xi) - \alpha(\xi-)]f(\xi), \quad \forall \xi \in]a, b].$$

Prova

Por hipótese, $f \in K^\alpha([a, b], X)$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] f(\xi_i) - \int_a^b d\alpha(t) f(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\xi \in [a, b[$ arbitrário.

Como $\alpha \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$ então existe $(\alpha \cdot x)(\xi+)$, $\forall x \in X$.

Em particular, $\exists \varepsilon' > 0$ tal que para $0 < h < \varepsilon'$ temos que $\|[\alpha(\xi + h) - \alpha(\xi +)]f(\xi)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sejam $\delta(\xi) < \varepsilon'$ e $0 < h < \delta(\xi)$.

Então, pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 2.1.6), temos que

$$\|[\alpha(\xi + h) - \alpha(\xi)]f(\xi) - \int_\xi^{\xi+h} d\alpha(t) f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_\alpha(\xi + h) - \hat{f}_\alpha(\xi) - [\alpha(\xi +) - \alpha(\xi)]f(\xi)\| &= \left\| \int_\xi^{\xi+h} d\alpha(t) f(t) - [\alpha(\xi +) - \alpha(\xi)]f(\xi) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_\xi^{\xi+h} d\alpha(t) f(t) - [\alpha(\xi + h) - \alpha(\xi)]f(\xi) \right\| + \\ &+ \|[\alpha(\xi + h) - \alpha(\xi)]f(\xi) - [\alpha(\xi +) - \alpha(\xi)]f(\xi)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, existe $\hat{f}_\alpha(\xi+) = \hat{f}_\alpha(\xi) + [\alpha(\xi +) - \alpha(\xi)]f(\xi)$.

Analogamente, prova-se que existe $\hat{f}_\alpha(\xi-)$ satisfazendo a igualdade do enunciado. ■

Corolário 1 Se $\alpha \in \mathcal{C}^\sigma([a, b], L(X, Y))$ e $f \in K^\alpha([a, b], X)$, então $\hat{f}_\alpha \in \mathcal{C}([a, b], Y)$.

Para $\hat{\alpha}_f$, com $f = \hat{h}_g$ e, para $\hat{f}_\alpha$, com $\alpha = \tilde{g}_\beta$ temos as seguintes propriedades que podem ser demonstrados através de procedimento análogo ao usado nas provas dos Teoremas 2.1.9 e 2.1.10:

Teorema 2.1.11 *Sejam $g : [a, b] \rightarrow W$, $h \in K^g([a, b], L(W, X))$, $f = \hat{h}_g : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$. Se $g \in G([a, b], W)$, então $\tilde{\alpha}_f \in G([a, b], Y)$ com*

$$\hat{\alpha}_f(\xi+) - \hat{\alpha}_f(\xi) = \alpha(\xi)h(\xi)[g(\xi+) - g(\xi)], \forall \xi \in [a, b[$$

e

$$\hat{\alpha}_f(\xi) - \hat{\alpha}_f(\xi-) = \alpha(\xi)h(\xi)[g(\xi) - g(\xi-)], \forall \xi \in]a, b].$$

Corolário 1 *Com as hipóteses do teorema, se $g \in \mathcal{C}([a, b], W)$, então $\tilde{\alpha}_f \in \mathcal{C}([a, b], Y)$.*

Teorema 2.1.12 *Sejam $\beta : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$, $g \in K^\beta([a, b], L(W, X))$, $\alpha = \tilde{g}_\beta : [a, b] \rightarrow L(W, Y)$ e $f \in K^\alpha([a, b], W)$. Se $\beta \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$, então $\tilde{f}_\alpha \in G([a, b], Y)$ com*

$$\hat{f}_\alpha(\xi+) - \hat{f}_\alpha(\xi) = [\beta(\xi+) - \beta(\xi)]g(\xi)f(\xi), \forall \xi \in [a, b[$$

e

$$\hat{f}_\alpha(\xi) - \hat{f}_\alpha(\xi-) = [\beta(\xi) - \beta(\xi-)]g(\xi)f(\xi), \forall \xi \in]a, b].$$

Corolário 1 *Com as hipóteses do teorema, se $\beta \in \mathcal{C}^\sigma([a, b], L(X, Y))$, então $\tilde{f}_\alpha \in \mathcal{C}([a, b], Y)$.*

Agora, mencionemos um resultado sobre a fórmula de integração por partes para a integral de Kurzweil.

Teorema 2.1.13 *Sejam $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$ e $f \in K([a, b], X)$. Então $\alpha \cdot f \in K([a, b], Y)$ e vale*

$$\int_a^b \alpha(t)f(t)dt = \int_a^b \alpha(t)d\tilde{f}(t) = \alpha(b)\tilde{f}(b) - \alpha(a)\tilde{f}(a) - \int_a^b d\alpha(t)\tilde{f}(t).$$

Prova (veja [6], 1.15).

A fórmula de substituição não é necessariamente verdadeira, mesmo quando as duas integrais estão definidas. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 3 *Sejam $Y = \mathbb{R}$ e $X = l_2([a, b])$.*

Seja $f : [a, b] \rightarrow X$ definida por $f(t) = e_t$, isto é, $e_t(s) = \begin{cases} 1, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}$

Seja, também, $\alpha : [a, b] \rightarrow X'$ dada por $\alpha(t) = \tilde{e}_t$, onde $\tilde{e}_t(x) = \langle e_t, x \rangle$, $\forall x \in X$.

Então, $\alpha(t)f(t) = \langle e_t, e_t \rangle = 1$ e, portanto,

$$\int_a^b \alpha(t)f(t)dt = \int_a^b dt = b - a.$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, com $\delta^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}}}$, tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ com $\Delta D < \delta$ temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - 0 \right\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{|D|} e_{\xi_i}(t_i - t_{i-1}) \right\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{|D|} |t_i - t_{i-1}|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

pela igualdade de Bessel.

Daí,

$$\left[\sum_{i=1}^{|D|} |t_i - t_{i-1}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{|D|} (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \right]^{\frac{1}{2}} < \delta^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{|D|} (t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{2}} = [\delta(b-a)]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

E vem que,

$$0 = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Então, $\tilde{f} = 0$ o que implica que $\int_a^b \alpha(t) d\tilde{f}(t) = 0$.

Logo, para $b > a$ temos

$$0 < b - a = \int_a^b \alpha(t) f(t) dt \neq \int_a^b \alpha(t) d\tilde{f}(t) = 0.$$

Agora, provemos que $\alpha \notin SV([a, b], L(X, Y))$.

Seja $d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Então,

$$\left\| \sum_{i=1}^n [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot e_{t_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \langle e_{t_i} - e_{t_{i-1}}, e_{t_i} \rangle \right\| = n.$$

Logo, $SV(\alpha) = \infty$, porém $\|\alpha\| \leq 1$, ou seja, α é limitada mas não é de $SV([a, b], L(X, Y))$.

Mais geralmente temos o seguinte teorema para a fórmula de substituição:

Teorema 2.1.14 *Sejam $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$, $g : [a, b] \rightarrow W$, $f \in K^g([a, b], L(W, X))$, e $\beta : [a, b] \rightarrow X$ dada por $\beta = \tilde{f}_g$. Então $\alpha \in K^\beta([a, b], L(X, Y))$ se e somente se $\alpha \cdot f \in K^g([a, b], Y)$. Neste caso,*

$$\int_a^b \alpha(t) f(t) dg(t) = \int_a^b \alpha(t) d\beta(t).$$

Prova

Por hipótese, $f \in K^g([a, b], L(W, X))$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dg(t) \right\} \right\| < \varepsilon.$$

Tomando somas aproximadas de $\int_a^b \alpha(t) f(t) dg(t)$ e de $\int_a^b \alpha(t) d\beta(t)$ vem:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i) f(\xi_i) [g(t_i) - g(t_{i-1})] - \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i) [f(t_i) - f(t_{i-1})] \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i) \left\{ f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dg(t) \right\} \right\| = I.$$

Se $\alpha_i \in L(X, Y)$ e $x_i \in X$, então temos que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \left(\sum_{i=j}^n x_i \right) + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Fazendo $\alpha_i = \alpha(\xi_i)$, $\alpha_0 = \alpha(a)$ e $x_i = f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dg(t)$ temos, pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 2.1.6), que

$$\left\| \sum_{i=j}^{|D|} x_i \right\| < \varepsilon, \quad \forall j.$$

Daí,

$$I = \left\| \sum_{j=1}^{|D|} [\alpha(\xi_j) - \alpha(\xi_{j-1})] \left(\sum_{i=j}^{|D|} x_i \right) + \alpha(a) \sum_{i=1}^{|D|} x_i \right\| \leq SV(\alpha) \cdot \varepsilon + \|\alpha(a)\| \cdot \varepsilon,$$

e segue a tese. ■

Corolário 1 *Sejam $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$, $g \in \mathcal{C}([a, b], W)$, $f \in K^g([a, b], L(W, X))$ e $\beta = \hat{f}_g : [a, b] \rightarrow X$. Então $\alpha \in R^\beta([a, b], L(X, Y))$, $\alpha \cdot f \in K^g([a, b], L(W, Y))$ e*

$$\int_a^b \alpha(t)f(t)dg(t) = \int_a^b \alpha(t)d\beta(t).$$

Prova (β é contínua pelo corolário do Teorema 2.1.9 e daí, aplica-se o corolário do Teorema 1.4.1 item (ii)).

Outro resultado para a fórmula de integração por partes para integrais de Kurzweil é o seguinte:

Teorema 2.1.15 *Sejam $\alpha \in K([a, b], L(X, Y))$ e $f \in BV([a, b], X)$. Então $\alpha \cdot f \in K([a, b], Y)$ e vale*

$$\int_a^b \alpha(t)f(t) = \int_a^b d\tilde{\alpha}(t)f(t) = \tilde{\alpha}(b)f(b) - \tilde{\alpha}(a)f(a) - \int_a^b \tilde{\alpha}(t)df(t).$$

Prova

Por hipótese, $\alpha \in K([a, b], L(X, Y))$, então $\tilde{\alpha}$ é contínua (corolário do Teorema 2.1.9).

Além disso, $f \in BV([a, b], X)$.

Portanto $f \in R^{\tilde{\alpha}}([a, b], X)$ pelo corolário do Teorema 1.4.1.

Então, como $\alpha \in K([a, b], L(X, Y))$ e $f \in R^{\tilde{\alpha}}([a, b], X)$ temos que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ \alpha(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_i}^{t_{i-1}} \alpha(t)dt \right\} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\tilde{\alpha}(t_i) - \tilde{\alpha}(t_{i-1})]f(\xi_i) - \int_a^b d\tilde{\alpha}(t)f(t) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b d\tilde{\alpha}(t)f(t) \right\| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \alpha(\xi_i)f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{|D|} [\tilde{\alpha}(t_i) - \tilde{\alpha}(t_{i-1})]f(\xi_i) \right\| + \\ & \quad + \left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\tilde{\alpha}(t_i) - \tilde{\alpha}(t_{i-1})]f(\xi_i) - \int_a^b d\tilde{\alpha}(t)f(t) \right\| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ \alpha(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_i}^{t_{i-1}} \alpha(t)dt \right\} f(\xi_i) \right\| + \frac{\varepsilon}{2} = I. \end{aligned}$$

Para $\alpha_i \in L(X, Y)$ e $x_i \in X$ temos que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) x_0 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n \alpha_j \right) (x_j - x_{j-1}).$$

Então, fazendo $x_i = f(\xi_i)$, $x_0 = f(a)$ e $\alpha_i = \alpha(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t)dt$ temos que

$$\left\| \sum_{i=j}^{|D|} \alpha_i \right\| \leq \varepsilon, \quad \forall j,$$

pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 2.1.6).

E segue que

$$\begin{aligned} I &\leq \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ \alpha(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t)dt \right\} \right\| \|f(a)\| + \\ &+ \sum_{j=1}^{|D|} \left\| \sum_{i=j}^{|D|} \left\{ \alpha(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t)dt \right\} \right\| \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|f(a)\| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot V(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Daí, de modo mais geral vem o teorema abaixo sobre a fórmula de substituição:

Teorema 2.1.16 *Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$, $\alpha \in K^\alpha([a, b], L(W, X))$ e sejam também $\beta = \hat{\alpha}_\alpha : [a, b] \rightarrow L(W, Y)$ e $f \in BV([a, b], W)$. Então $\alpha \cdot f \in K^\alpha([a, b], X)$ se e só se $f \in K^\beta([a, b], W)$. Neste caso,*

$$\int_a^b d\alpha(t)\alpha(t)f(t) = \int_a^b d\beta(t)f(t).$$

Prova

Por hipótese, $\alpha \in K^\alpha([a, b], L(W, X))$.

Então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ um gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ temos que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t)\alpha(t) \right\} \right\| < \varepsilon.$$

Tomando somas aproximadas para as integrais $\int_a^{K^b} d\alpha(t)\alpha(t)f(t)$ e $\int_a^{K^b} d\beta(t)f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|D|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \alpha(\xi_i) f(\xi_i) - \sum_{i=1}^{|D|} [\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})] f(\xi_i) \right\| = \\ & = \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\alpha(t) \alpha(t) \right\} f(\xi_i) \right\|. \end{aligned}$$

Se $\alpha_i \in L(W, Y)$ e $x_i \in W$, temos:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) x_0 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n \alpha_j \right) (x_j - x_{j-1}).$$

Seja

$$I = \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\alpha(t) \alpha(t) \right\} f(\xi_i) \right\|.$$

Então, fazendo $x_i = f(\xi_i)$, $x_0 = f(a)$ e $\alpha_i = [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\alpha(t) \alpha(t)$, temos:

$$\left\| \sum_{i=j}^{|D|} \alpha_i \right\| \leq \varepsilon, \quad \forall j,$$

pelo LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 2.1.6).

Daí,

$$\begin{aligned} I & \leq \left\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\alpha(t) \alpha(t) \right\} \right\| \|f(a)\| + \\ & + \sum_{j=1}^{|D|} \left\| \sum_{i=j}^{|D|} \left\{ [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\alpha(t) \alpha(t) \right\} \right\| \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\| < \\ & < \varepsilon \cdot \|f(a)\| + \varepsilon \cdot V(f), \end{aligned}$$

e segue a tese. ■

Com um exemplo análogo ao Exemplo 3 anterior, podemos mostrar que a fórmula de substituição do teorema anterior pode não ser verdadeira se não fizermos a exigência de que f seja de variação limitada.

Corolário 1 *Sejam $\gamma \in \mathcal{C}([a, b], L(X, Y))$, $\alpha \in K^\gamma([a, b], L(W, X))$, $\beta = \tilde{\alpha}_\gamma : [a, b] \rightarrow L(W, Y)$ e $f \in BV([a, b], W)$. Então $g \in R^\beta([a, b], W)$, $\alpha \cdot f \in K^\gamma([a, b], X)$ e*

$$\int_a^b d\gamma(t) \alpha(t) f(t) = \int_a^b d\beta(t) f(t).$$

2.2 A Integral vetorial de Henstock

Sejam $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$.

Definição 2.2.1 Dizemos que:

(i) f é **Henstock integrável em relação à α** , e escrevemos $f \in H^\alpha([a, b], X)$, se existe uma função $F_\alpha : [a, b] \rightarrow Y$ satisfazendo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ gauge de } [a, b] \text{ tal que } \forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]} \delta\text{-fina temos que} \\ \sum_{i=1}^{|D|} \|F_\alpha(t_i) - F_\alpha(t_{i-1}) - [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i)\| < \varepsilon.$$

Neste caso, dizemos que F_α é associada à f (quando $\alpha(t) = t$, escrevemos $H([a, b], X)$).

(ii) α é **Henstock integrável em relação à f** , e escrevemos $f \in H^f([a, b], L(X, Y))$, se existe uma função $A_f : [a, b] \rightarrow Y$ satisfazendo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ gauge de } [a, b] \text{ tal que } \forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]} \delta\text{-fina temos que} \\ \sum_{i=1}^{|D|} \|A_f(t_i) - A_f(t_{i-1}) - \alpha(\xi_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})]\| < \varepsilon.$$

Neste caso, dizemos que A_f é associada à α .

Com a notação da definição acima, vemos que $f \in K^\alpha([t_{i-1}, t_i], X)$ e $\int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t)f(t) = F_\alpha(t_i) - F_\alpha(t_{i-1})$, $\forall i$. Então, $f \in K^\alpha([a, b], X)$ e $\int_a^b d\alpha(t)f(t) = F_\alpha(b) - F_\alpha(a)$. Do mesmo modo, $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$ e $\int_a^b \alpha(t)df(t) = A_f(b) - A_f(a)$.

Assim, podemos enunciar o

Teorema 2.2.2 *Temos:*

(i) $H^\alpha([a, b], X) \subset K^\alpha([a, b], X)$ e, se $f \in H^\alpha([a, b], X)$ com F_α associada à f , então $\int_a^b d\alpha(t)f(t) = F_\alpha(b) - F_\alpha(a)$.

(ii) $H^f([a, b], L(X, Y)) \subset K^f([a, b], L(X, Y))$ e, se $\alpha \in H^f([a, b], L(X, Y))$ com A_f associada à α , então $\int_a^b \alpha(t)df(t) = A_f(b) - A_f(a)$.

Podemos ter $R([a, b], X) \not\subset H([a, b], X)$. De fato,

Exemplo 4 *Sejam $X = l_2([a, b])$ e $f : [a, b] \rightarrow X$ definida por $f(t) = e_t$.*

Já vimos que $f \in R([a, b], X)$ com $\tilde{f}(\xi) = 0$, $\forall \xi \in [a, b]$.

Sejam $x_0, x \in [a, b]$, com $x_0 \leq x$.

Suponhamos, por absurdo, que $f \in H([a, b], X)$ e seja F associada à f .

Então $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) = 0$, $\forall [x_0, x] \subset [a, b]$.

Portanto F é constante.

Logo, $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ temos que

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|F(t_i) - F(t_{i-1}) - f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{|D|} \|e_{\xi_i}(t_i - t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{|D|} |t_i - t_{i-1}| = b - a,$$

uma contradição.

Assim, $f \notin H([a, b], X)$.

Mais geralmente, quando a dimensão de X é infinita podemos ter $R^\alpha([a, b], X) \not\subset H^\alpha([a, b], X)$, $R^f([a, b], L(X, Y)) \not\subset H^f([a, b], L(X, Y))$, $K^\alpha([a, b], X) \not\subset H^\alpha([a, b], X)$ e $K^f([a, b], L(X, Y)) \not\subset H^f([a, b], L(X, Y))$.

Nos espaços $H^\alpha([a, b], X)$ e $H^f([a, b], L(X, Y))$ valem as seguintes propriedades:

(1) bilinearidade da integral;

(2) integrabilidade num intervalo implica integrabilidade nos subintervalos e vice-versa.

Lema 2.2.3 (LEMA DE SACKS-HENSTOCK)

(i) Seja $f \in H^\alpha([a, b], X)$.

Se para $\varepsilon > 0$, o gauge δ de $[a, b]$ é tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos

$$\sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t)f(t) - [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i) \right\| < \varepsilon,$$

então, para $a \leq c_1 \leq \eta_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq \eta_2 \leq d_2 \leq \dots \leq c_k \leq \eta_k \leq d_k \leq b$ com $\eta_j \in [c_j, d_j] \subset B_{\delta(\eta_j)}(\eta_j)$ para cada j , temos que

$$\sum_{j=1}^k \left\| \int_{c_j}^{d_j} d\alpha(t)f(t) - [\alpha(d_j) - \alpha(c_j)]f(\eta_j) \right\| < \varepsilon;$$

(ii) Seja $\alpha \in H^f([a, b], L(X, Y))$.

Se para $\varepsilon > 0$, o gauge δ de $[a, b]$ é tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos

$$\sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t)df(t) - \alpha(\xi_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon,$$

então, para $a \leq c_1 \leq \eta_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq \eta_2 \leq d_2 \leq \dots \leq c_k \leq \eta_k \leq d_k \leq b$ com $\eta_j \in [c_j, d_j] \subset B_{\delta(\eta_j)}(\eta_j)$ para cada j , temos que

$$\sum_{j=1}^k \left\| \int_{c_j}^{d_j} \alpha(t)df(t) - \alpha(\eta_j)[f(d_j) - f(c_j)] \right\| < \varepsilon.$$

Se $f \in H^\alpha([a, b], X)$, então $f \in K^\alpha([a, b], X)$ pelo Teorema 2.2.2. Daí, segue que existe $\tilde{f}_\alpha : [a, b] \rightarrow Y$ definida por $\tilde{f}_\alpha(\xi) = \int_a^\xi d\alpha(t)f(t)$ e, sendo F_α associada à f , temos que $\tilde{f}_\alpha(\xi) = F_\alpha(\xi) - F_\alpha(a)$, $\forall \xi \in [a, b]$, também pelo Teorema 2.2.2. Analogamente, temos que $\tilde{\alpha}_f(\xi) = A_f(\xi) - A_f(a)$, $\forall \xi \in [a, b]$ para $\alpha \in H^f([a, b], L(X, Y))$ com A_f associada à α .

Daí, pelos Teoremas 2.1.9 e 2.1.10 seguem, respectivamente, os Teoremas 2.2.4 e 2.2.5.

Teorema 2.2.4 *Sejam $f \in G([a, b], X)$, $\alpha \in H^f([a, b], L(X, Y))$ e A_f associada à α . Então $A_f \in G([a, b], Y)$ com*

$$A_f(\xi+) - A_f(\xi) = \alpha(\xi)[f(\xi+) - f(\xi)], \forall \xi \in [a, b[$$

e

$$A_f(\xi) - A_f(\xi-) = \alpha(\xi)[f(\xi) - f(\xi-)], \forall \xi \in]a, b].$$

Corolário 1 *Se $f \in \mathcal{C}([a, b], X)$ e $\alpha \in H^f([a, b], L(X, Y))$, então A_f associada à α é tal que $A_f \in \mathcal{C}([a, b], Y)$.*

Teorema 2.2.5 *Sejam $\alpha \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$ e $f \in H^\alpha([a, b], X)$ com F_α associada à f . Então $F_\alpha \in G([a, b], Y)$ com*

$$F_\alpha(\xi+) - F_\alpha(\xi) = [\alpha(\xi+) - \alpha(\xi)]f(\xi), \forall \xi \in [a, b[$$

e

$$F_\alpha(\xi) - F_\alpha(\xi-) = [\alpha(\xi) - \alpha(\xi-)]f(\xi), \forall \xi \in]a, b].$$

Corolário 1 *Se $\alpha \in \mathcal{C}^\sigma([a, b], L(X, Y))$ e $f \in H^\alpha([a, b], X)$, então F_α associada à f é tal que $F_\alpha \in \mathcal{C}([a, b], Y)$.*

O teorema seguinte dá um resultado sobre a fórmula de integração por partes para a integral de Henstock.

Teorema 2.2.6 *Se $\alpha \in BV([a, b], L(X, Y))$ e $f \in H([a, b], X)$, então $\alpha \cdot f \in H([a, b], Y)$ e*

$$\int_a^b \alpha(t)f(t)dt = \int_a^b \alpha(t)d\hat{f}(t) = \alpha(b)\hat{f}(b) - \alpha(a)\hat{f}(a) - \int_a^b d\alpha(t)\hat{f}(t).$$

Prova

Por hipótese, $f \in H([a, b], X)$.

Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ um gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ temos que

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt\| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i)f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t)f(t)dt\| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i) \left\{ f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt \right\}\| + \sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\alpha(t) - \alpha(\xi_i)]f(t)dt \right\| < \\ & < \|\alpha\| \cdot \varepsilon + \sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\alpha(t) - \alpha(\xi_i)]f(t)dt \right\|. \end{aligned}$$

Mas, pelos Teoremas 2.2.2 e 2.1.13, temos que $\alpha \cdot f \in K([a, b], X)$ e

$$\int_a^b \alpha(t)f(t)dt = \int_a^b \alpha(t)d\tilde{f}(t) = \alpha(b)\tilde{f}(b) - \alpha(a)\tilde{f}(a) - \int_a^b d\alpha(t)\tilde{f}(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\alpha(t) - \alpha(\xi_i)]f(t)dt \right\| = \\ & = \sum_{i=1}^{|D|} \left\| [\alpha(t_i) - \alpha(\xi_i)]\tilde{f}(t_i) - [\alpha(t_{i-1}) - \alpha(\xi_i)]\tilde{f}(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha(t)\tilde{f}(t) \right\| = \\ & = \sum_{i=1}^{|D|} \left\| [\alpha(t_i) - \alpha(\xi_i)]\tilde{f}(t_i) - \int_{\xi_i}^{t_i} d\alpha(t)\tilde{f}(t) + [\alpha(\xi_i) - \alpha(t_{i-1})]\tilde{f}(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{\xi_i} d\alpha(t)\tilde{f}(t) \right\| = \\ & = \sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{\xi_i}^{t_i} d\alpha(t)[\tilde{f}(t_i) - \tilde{f}(t)] + \int_{t_{i-1}}^{\xi_i} d\alpha(t)[\tilde{f}(t_{i-1}) - \tilde{f}(t)] \right\| \leq V(\alpha) \cdot \omega(\tilde{f}). \end{aligned}$$

E, pelo corolário do Teorema 2.2.5, temos que $\tilde{f} \in \mathcal{C}([a, b], X)$ e segue a tese. ■

Mais geralmente temos o seguinte teorema para a fórmula de substituição:

Teorema 2.2.7 *Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ limitada, $g : [a, b] \rightarrow W$, $f \in H^g([a, b], L(W, X))$ e $\beta = \hat{f}_g : [a, b] \rightarrow X$. Então, $\alpha \in H^\beta([a, b], L(X, Y))$ se e só se $\alpha \cdot f \in H^g([a, b], Y)$. Neste caso,*

$$\int_a^b \alpha(t) f(t) dg(t) = \int_a^b \alpha(t) d\beta(t).$$

Prova

($\implies$) Por hipótese, $f \in H^g([a, b], L(W, X))$ e $\alpha \in H^\beta([a, b], L(X, Y))$ com α limitada.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos que:

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dg(t)\| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|\alpha\|}$$

e

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i)[\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t) d\beta(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i) f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t) d\beta(t)\| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i) f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \alpha(\xi_i)[\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})]\| + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i)[\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t) d\beta(t)\| \leq \\ & \leq \|\alpha\| \sum_{i=1}^{|D|} \|f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dg(t)\| + \frac{\varepsilon}{2} < \|\alpha\| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|\alpha\|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

($\impliedby$) Por hipótese, $f \in H^g([a, b], L(W, X))$ e $\alpha \cdot f \in H^g([a, b], Y)$ com α limitada.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina temos que:

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} f(t)dg(t)\| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|\alpha\|}$$

e

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i)f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} \alpha(t)f(t)dg(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i)[\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} \alpha(t)f(t)dg(t)\| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i)[\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})] - \alpha(\xi_i)f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]\| + \\ & + \sum_{i=1}^{|D|} \|\alpha(\xi_i)f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} \alpha(t)f(t)dg(t)\| \leq \\ & \leq \|\alpha\| \sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} f(t)dg(t) - f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] \right\| + \frac{\varepsilon}{2} < \|\alpha\| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|\alpha\|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Como caso particular temos o

Corolário 1 *Sejam $f \in H([a, b], X)$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ limitada. Então temos que $\alpha \in H^f([a, b], L(X, Y))$ se e só se $\alpha \cdot f \in H([a, b], Y)$ e*

$$\int_a^{K^b} \alpha(t)f(t)dt = \int_a^{K^b} \alpha(t)d\tilde{f}(t).$$

Segue agora outro resultado para a fórmula de integração por partes para as integrais de Henstock.

Teorema 2.2.8 *Se $\alpha \in H([a, b], L(X, Y))$ e $f \in BV([a, b], X)$, então $\alpha \cdot f \in H([a, b], Y)$ e*

$$\int_a^{K^b} \alpha(t)f(t)dt = \int_a^b d\tilde{\alpha}(t)f(t) = \tilde{\alpha}(b)f(b) - \tilde{\alpha}(a)f(a) - \int_a^b \tilde{\alpha}(t)df(t).$$

Prova (análoga à demonstração do Teorema 2.2.6).

E, de modo mais geral, temos o seguinte resultado para a fórmula de substituição:

Teorema 2.2.9 *Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$, $\alpha \in H^\gamma([a, b], L(W, X))$ e sejam também $\beta = \tilde{\alpha}_\gamma : [a, b] \rightarrow L(W, Y)$ e $f : [a, b] \rightarrow W$ limitada. Então, $f \in H^\beta([a, b], W)$ se e só se $\alpha \cdot f \in H^\gamma([a, b], X)$. Neste caso,*

$$\int_a^{K^b} d\gamma(t)\alpha(t)f(t) = \int_a^{K^b} d\beta(t)f(t).$$

Prova

($\implies$) Por hipótese, $\alpha \in H^\gamma([a, b], L(W, X))$ e $f \in H^\beta([a, b], W)$.

Logo, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos que:

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|\alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\gamma(t)\alpha(t)\| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}$$

e

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})\|f(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\beta(t)f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|D|} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|\alpha(\xi_i)f(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\beta(t)f(t)\| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{|D|} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|\alpha(\xi_i)f(\xi_i) - [\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})]f(\xi_i)\| + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{|D|} \|\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})\|f(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\beta(t)f(t)\| < \\ & < \sum_{i=1}^{|D|} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|\alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\gamma(t)\alpha(t)\| \|f(\xi_i)\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Por hipótese, $\alpha \in H^\gamma([a, b], L(W, X))$ e $\alpha \cdot f \in H^\gamma([a, b], Y)$.

Logo, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ gauge de $[a, b]$ tal que $\forall D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a, b]}$ δ -fina temos que:

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|[\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})]\alpha(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} d\gamma(t)\alpha(t)\| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}$$

e

$$\sum_{i=1}^{|D|} \|[\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})]\alpha(\xi_i)f(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} d\gamma(t)\alpha(t)f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|D|} \|[\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})]f(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} d\gamma(t)\alpha(t)f(t)\| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{|D|} \left\| \left(\int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} d\gamma(t)\alpha(t) \right) f(\xi_i) - [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})]\alpha(\xi_i)f(\xi_i) \right\| + \\ & + \sum_{i=1}^{|D|} \|[\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})]\alpha(\xi_i)f(\xi_i) - \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} d\gamma(t)\alpha(t)f(t)\| < \\ & < \sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{K^i t_i} d\gamma(t)\alpha(t) - [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})]\alpha(\xi_i) \right\| \|f(\xi_i)\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Em particular vem o

Corolário 1 *Sejam $\alpha \in H([a, b], L(X, Y))$ e $f : [a, b] \rightarrow X$ limitada. Então temos que $f \in H^\delta([a, b], X)$ se e só se $\alpha \cdot f \in H([a, b], Y)$ e*

$$\int_a^b \alpha(t)f(t)dt = \int_a^b d\tilde{\alpha}(t)f(t).$$

2.3 Integrais Vetoriais Impróprias

Sejam $f : [a, b] \rightarrow X$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$.

Teorema 2.3.1 *Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ fracamente contínua em a e $f \in K^\alpha([c, b], X)$, $\forall c \in]a, b]$. Então $f \in K^\alpha([a, b], X)$ se e só se $\exists \lim_{c \downarrow a} \int_c^{Kb} d\alpha(t)f(t)$. Neste caso,*

$$\int_a^{Kb} d\alpha(t)f(t) = \lim_{c \downarrow a} \int_c^{Kb} d\alpha(t)f(t).$$

Prova

($\Rightarrow$) Pelo Teorema 2.1.10 e corolário vem que $\exists \tilde{f}_\alpha(a+) = \tilde{f}_\alpha(a)$ e acabou.

($\Leftarrow$) Seja $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $[a, b]$ tal que $c_0 = b$, $c_n > c_{n+1}$ e $c_n \rightarrow a$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Portanto, para cada $n > 0$, $\exists \delta_n$ gauge de $[c_n, c_{n-1}]$ que é especial relativamente à c_n e c_{n-1} tal que $\forall D_n = (\xi_{i_n}, t_{i_n}) \in TD_{[c_n, c_{n-1}]}$ δ_n -fina temos que

$$\left\| \sum_{i_n=1}^{|D_n|} [\alpha(t_{i_n}) - \alpha(t_{i_n-1})]f(\xi_{i_n}) - \int_{c_n}^{Kc_{n-1}} d\alpha(t)f(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Mas, α é fracamente contínua em a e $\exists \lim_{c \downarrow a} \int_c^{Kb} d\alpha(t)f(t) = A$.

Logo, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $a < c \leq c_{n_0}$ temos que

$$\|[\alpha(c) - \alpha(a)]f(a)\| < \varepsilon \text{ e } \left\| \int_c^{Kb} d\alpha(t)f(t) - A \right\| < \varepsilon.$$

Tomemos um gauge δ de $[a, b]$ tal que $\delta(a) < c_{n_0} - a$, $\delta(\xi) \leq \delta_n(\xi)$, se $\xi \in [c_n, c_{n-1}]$ e tal que δ é especial relativamente à a .

Seja $D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina.

Para cada $n > 0$, seja $D_n = \{(\xi_i, t_i); [t_{i-1}, t_i] \subset [c_n, c_{n-1}]\} \subset D$ e seja também $J_n = \{[t_{i-1}, t_i]; [t_{i-1}, t_i] \subset [c_n, c_{n-1}]\}$.

Então $D_n \in TD_{J_n}$ e é δ_n -fina, para cada $n > 0$.

Seja $D_n = (\xi_{i_n}, t_{i_n})$, para cada $n > 0$.

Então o LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 2.1.6) implica que

$$\left\| \sum_{i_n=1}^{|D_{J_n}|} [\alpha(t_{i_n}) - \alpha(t_{i_n-1})] f(\xi_{i_n}) - \int_{J_n} d\alpha(t) f(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \forall n > 0,$$

pois $J_n \subset [c_n, c_{n-1}]$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \|s^\alpha(f, D) - A\| &\leq \|[\alpha(t_1) - \alpha(a)]f(a)\| + \\ &+ \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i_n=1}^{|D_n|} [\alpha(t_{i_n}) - \alpha(t_{i_n-1})] f(\xi_{i_n}) - \int_{J_n} d\alpha(t) f(t) \right\} \right\| + \left\| \int_{t_1}^{K^b} d\alpha(t) f(t) - A \right\| < \\ &< \varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

E segue que $A = \int_a^{K^b} d\alpha(t) f(t)$. ■

Corolário 1 Se $f \in K([c, b], X)$, $\forall c \in]a, b]$ então $f \in K([a, b], X)$ se e só se $\exists \lim_{c \downarrow a} \int_c^{K^b} f(t) dt$.

Neste caso,

$$\int_a^{K^b} f(t) dt = \lim_{c \downarrow a} \int_c^{K^b} f(t) dt.$$

De modo análogo pode-se mostrar o

Teorema 2.3.2 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow X$ contínua em a e $\alpha \in K^f([c, b], L(X, Y))$, $\forall c \in]a, b]$. Então $\alpha \in K^f([a, b], L(X, Y))$ se e só se $\exists \lim_{c \downarrow a} \int_c^{K^b} \alpha(t) df(t)$. Neste caso,*

$$\int_a^{K^b} \alpha(t) df(t) = \lim_{c \downarrow a} \int_c^{K^b} \alpha(t) df(t).$$

Também pode-se mostrar resultados análogos aos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2 para a impropriedade à direita.

Daí, segue que as integrais vetoriais de Kurzweil contém as integrais vetoriais impróprias.

Com relação ao espaço das funções Henstock integráveis, podemos, de igual modo, mostrar que ele contém as integrais impróprias. Vamos demonstrar este resultado para impropriedades à esquerda. À direita, um resultado análogo pode ser provado. Então vejamos:

Teorema 2.3.3 *Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ fracamente contínua em a e $f \in H^\alpha([c, b], X)$, $\forall c \in]a, b]$. Então $f \in H^\alpha([a, b], X)$ se e só se $\exists \lim_{c \downarrow a} \int_c^{K^b} d\alpha(t)f(t)$. Neste caso,*

$$\int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t) = \lim_{c \downarrow a} \int_c^{K^b} d\alpha(t)f(t).$$

Prova

($\Leftarrow$) Pelo Teorema 2.1.10 e corolário vem que $\exists \hat{f}_\alpha(a+) = \hat{f}_\alpha(a)$ e acabou.

($\Rightarrow$) Seja $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $[a, b]$ tal que $c_0 = b$, $c_n > c_{n+1}$ e $c_n \rightarrow a$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Portanto, para cada $n > 0$, $\exists \delta_n$ gauge de $[c_n, c_{n-1}]$ que é especial relativamente à c_n e c_{n-1} tal que $\forall D_n = (\xi_{i_n}, t_{i_n}) \in TD_{[c_n, c_{n-1}]}$ δ_n -fina temos que

$$\sum_{i_n=1}^{|D_n|} \|[\alpha(t_{i_n}) - \alpha(t_{i_{n-1}})]f(\xi_{i_n}) - \int_{t_{i_{n-1}}}^{K^{t_{i_n}}} d\alpha(t)f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Mas, α é fracamente contínua em a e $\exists \lim_{c \downarrow a} \int_c^{K^b} d\alpha(t)f(t) = \int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t)$, pelo Teorema 2.3.1.

Logo, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $a < c \leq c_{n_0}$ temos que

$$\|[\alpha(c) - \alpha(a)]f(a)\| < \varepsilon$$

e

$$\left\| \int_a^{K^c} d\alpha(t)f(t) \right\| = \left\| \int_a^{K^b} d\alpha(t)f(t) - \int_c^{K^b} d\alpha(t)f(t) \right\| < \varepsilon.$$

Tomemos um gauge δ de $[a, b]$ tal que $\delta(a) < c_{n_0} - a$, $\delta(\xi) \leq \delta_n(\xi)$, se $\xi \in [c_n, c_{n-1}]$ e δ é especial relativamente à a .

Seja $D = (\xi_i, t_i) \in TD_{[a,b]}$ δ -fina.

Para cada $n > 0$, seja $D_n = \{(\xi_i, t_i); [t_{i-1}, t_i] \subset [c_n, c_{n-1}]\} \subset D$ e seja também $J_n = \{[t_{i-1}, t_i]; [t_{i-1}, t_i] \subset [c_n, c_{n-1}]\}$.

Então $D_n \in TD_{J_n}$ e é δ_n -fina, para cada $n > 0$.

Seja $D_n = (\xi_{i_n}, t_{i_n})$, para cada $n > 0$.

Então o LEMA DE SACKS-HENSTOCK (Lema 2.2.3) implica que

$$\sum_{i_n=1}^{|D_{J_n}|} \|[\alpha(t_{i_n}) - \alpha(t_{i_n-1})]f(\xi_{i_n}) - \int_{t_{i_n-1}}^{K^{t_{i_n}}} d\alpha(t)f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\alpha(t)f(t) - [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i) \right\| \leq \\ & \leq \left\| \int_a^{K^{t_1}} d\alpha(t)f(t) \right\| + \|[\alpha(t_1) - \alpha(a)]f(a)\| + \sum_{i=2}^{|D|} \left\| \int_{t_{i-1}}^{K^{t_i}} d\alpha(t)f(t) - [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]f(\xi_i) \right\| < \\ & < \varepsilon + \varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i_n=1}^{|D_n|} \left\| \int_{t_{i_n-1}}^{K^{t_{i_n}}} d\alpha(t)f(t) - [\alpha(t_{i_n}) - \alpha(t_{i_n-1})]f(\xi_{i_n}) \right\| \right) < \\ & < 2\varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < 3\varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário 1 Se $f \in H([c, b], X)$, $\forall c \in]a, b]$ então $f \in H([a, b], X)$ se e só se $\exists \lim_{c \downarrow a} \int_c^{Kb} f(t) dt$.

Neste caso,

$$\int_a^{Kb} f(t) dt = \lim_{c \downarrow a} \int_c^{Kb} f(t) dt.$$

Da mesma forma pode-se provar o

Teorema 2.3.4 Sejam $f : [a, b] \rightarrow X$ contínua em a e $\alpha \in H^f([c, b], L(X, Y))$, $\forall c \in]a, b]$.

Então $\alpha \in H^f([a, b], L(X, Y))$ se e só se $\exists \lim_{c \downarrow a} \int_c^{Kb} \alpha(t) df(t)$. Neste caso,

$$\int_a^{Kb} \alpha(t) df(t) = \lim_{c \downarrow a} \int_c^{Kb} \alpha(t) df(t).$$

REFERÊNCIAS

- [1] R. Henstock, *A Riemann-type integral of Lebesgue power*, Canad. J. Math., vol. 20 (1968), p. 79-87.
-
- [2] C. S. Hönic, *The abstract Riemann-Stieltjes integral and its applications to Linear Differential Equations with generalized boundary conditions*, Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Série Matemática n^o 1, 1973.
- [3] C. S. Hönic, *The Dirichlet and substitution formulas for Riemann-Stieltjes integrals in Banach spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol 18, Marcel Dekker Inc., 1975, p. 136-189.
- [4] C. S. Hönic, *Volterra-Stieltjes integral equations*, North Holland Mathematics studies, vol. 16, 1975.
- [5] C. S. Hönic, *Aplicações da topologia à análise*, Projeto Euclides, IMPA-CNPq, 1976.
- [6] C. S. Hönic, *There is no natural Banach space norm on the space of Kurzweil-Henstock-Denjoy-Perron integrable functions*, 30^o Seminário Brasileiro de Análise, 1989, p. 387-397.
- [7] C. S. Hönic, *A riemannian characterization of the Bochner-Lebesgue integral*, 35^o Seminário Brasileiro de Análise, 1992, p. 351-358.

[8] R. M. McLeod, *The generalized Riemann integral*, The Carus Math. Monographs, n^o 20, 1980.

[9] E. J. McShane, *A unified theory of integration*, American Math. Monthly, vol. 80 (1973), p. 349-359.

[10] G. C. da Rocha F^o, *A integral de Riemann vetorial e a geometria de espaços de Banach*, Tese de Doutorado, IME-USP, 1979.

[11] H. L. Royden, *Real analysis*, Third Edition, Macmillan Comp., 1988.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

$AC([a, b], X), AC([a, b])$	5	$D_1 \preceq D_2$	12
A_f	44	$D, D^\bullet$	12
$\alpha(\xi \dot{+}), \alpha(\xi \dot{-})$	4	$ d $	i
$\tilde{\alpha}_f$	17, 33	$ D $	12
$B_\delta(\xi)$	ii	Δd	i
$BV([a, b], X), BV([a, b])$	2	ΔD	12
$BW([a, b], X)$	9	$E([a, b], X)$	ii
$\mathcal{C}([a, b], X)$	i	$f(t+), f(t-)$	ii
$\mathcal{C}^\sigma([a, b], L(X, Y))$	ii	$\tilde{f}_\alpha$	17, 33
$\mathcal{C}_{sing}([a, b])$	6	F_α	44
$D_{[a, b]}$	i	$G([a, b], X)$	4
D_f	i	$G^\sigma([a, b], L(X, Y))$	4
$d_1 \preceq d_2$	i	$H([a, b], X), H^\alpha([a, b], X)$	44

$H^f([a, b], L(X, Y))$	44	qs	ii
$I^\alpha([a, b], X)$	13	$R([a, b], X), R^\alpha([a, b], X)$	13
$I^f([a, b], L(X, Y))$	13	$R^f([a, b], L(X, Y))$	13
$\int_a^b, \int_a^b \cdot$	13	$s^\alpha(f, D), s^f(\alpha, D)$	12
K_a^b	28	$SV(\alpha), SV_{[a,b]}(\alpha), SV_d(\alpha)$	9
$K([a, b], X), K^\alpha([a, b], X)$	28	$SV([a, b], L(X, Y))$	9
$K^f([a, b], L(X, Y))$	29	$TD_{[a,b]}, TD_{[a,b]}^\bullet$	12
$l_p([a, b]), L_p([a, b])$	iii	$V(f), V_{[a,b]}(f), V_d(f)$	2
$L(X, Y)$	i	$W(\alpha), W_{[a,b]}(\alpha), W_d(\alpha)$	9
$\mathcal{L}_1(M)$	ii	$\omega_d(f), \omega_\delta(f), \omega_i(f)$	i
L_M^L	ii	X'	i
$m(M)$	ii	χ_A	ii
$\ \quad \ $	i	(ξ_i, t_i)	11
$\ \quad \ _p$	iii	$< x, y >$	i
$ I $	ii		

ÍNDICE ALFABÉTICO

divisão interior marcada	12	de semivariação limitada	9
divisão marcada	12	de variação fraca limitada	9
δ -oscilação	i	de variação limitada	2
δ -fina	26	em escada	ii
δ -oscilação	i	fracamente contínua	ii
fórmula		fracamente regrada	4
de integração por partes	22, 37, 47	integral	17, 33
de substituição	22, 38, 49	regrada	4
função		singular	6
absolutamente contínua	5	gauge	26
associada	44	gauge c-especial	26
característica	ii	integral	
de salto	7	de Bochner-Lebesgue	v

de Riemann-Stieltjes	13	oscilação	i
imprópria	53	quase sempre	ii
interior	13	semivariação	9
vetorial de Henstock	44	Teorema de Lebesgue	5
vetorial de Kurzweil	28	variação	2
vetorial de McShane	iv	variação fraca	9
vetorial de McShane-Henstock	v		
lema			
de Cousin	28		
de Sacks-Henstock	29, 46		

<u>Página</u>	<u>Linha</u>	<u>Onde se lê</u>	<u>Leia-se</u>
7	14	$x_j = 0$	$x_j = \text{constante}$
10	-14	imersão e	imersão injetiva e
10	-8	sobrejetiva ou injetiva	sobrejetiva
28	4	são semelhantes	têm mesmo determinante
36	4	$W \setminus U$	$W \setminus U_0$
36	5	W	$W \setminus \bar{U}$
36	9	vetores cujas	vetores ξ_0 cujas
36	11	$\partial \setminus \partial x_i$	ξ_i
37	-2	W	W' (variedade fechada que contém W mergulhada com mesma mensão).
37	-1	ξ	ξ' (extensão de ξ a W').
40	7 a 10	eliminar: dadas... estende h_0	
47	-1	$\lambda(0)=0 \quad * \quad t \neq 0$	$\lambda(t)=0 \quad \text{p/} \quad t \leq 0 \quad * \quad t > 0$
51	-3	$\delta' \delta^{-1}$	$\gamma' \gamma^{-1}$
90	-10	$\text{graf}(R_f)) \Rightarrow$	$\text{graf}(R_f)) \quad \text{e}$ $x \in p^2(F \times M \cap \text{graf}(R_f)) \Rightarrow$
93	10	acrescentar: Se $f(\phi_t(b))$ assume valor crítico ver 3) abaixo	
110	5	$f^{-1}(c_i + \varepsilon_i^2)$	$f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2)$
110	7	$g^{-1}(c_i + \varepsilon_i^2)$	$g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2)$
112		substituir por: os difeomorfismos h_j podem ser tomados de modo que existam difeomorfismo $\alpha_{i,i+1}: B_{i,i+1} \rightarrow B'_{i,i+1}$ com $g \circ \alpha_{i,i+1} = f$ e tais que $\alpha_{i,i+1} _{A_i \cap B_{i,i+1}} = h_i$ e $\alpha_{i,i+1} _{B_{i,i+1} \cap A_{i+1}} = h_{i+1}$.	

De fato, basta considerar campos pseudo-gradientes ξ e ζ para f e g respectivamente, tais que $\xi(f) = \zeta(g) = 1$ fora de uma vizinhança dos pontos críticos. Os h_j são obtidos por recorrência: dado h_i , obtém-se h_{i+1} no teorema 0.4.7 a partir do difeomorfismo $\psi_t \eta \phi_{-t}: f^{-1}(c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2) \rightarrow g^{-1}(c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2)$ donde $t = c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2 - c_i - 2\varepsilon_i^2$ e $\eta: f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \rightarrow g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2)$ é um difeomorfismo isotópico com $h_i|_{f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2)}$ e tal que se θ_1 e θ_2 são os mergulhos característicos no nível $c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2$ tem-se $\eta \phi_{-t} \theta_1 = \psi_{-t} \theta_2$.

Definimos $\alpha_{i,i+1} = \psi^{-1} \alpha \phi$ onde, sendo $I = [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2]$, $\alpha: f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times I \rightarrow g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times I$ é uma isotopia entre $h_i|_{f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2)}$ e $h_{i+1}|_{g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2)}$ tal que

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} (h_i(x), t) & \text{para } t \leq c_i + 3\varepsilon_i^2 \\ (\eta(x), t) & \text{para } t \geq c_{i+1} - 3\varepsilon_{i+1}^2 \end{cases}$$

O lema 0.4.6 mostra que $\alpha_{i,i+1}|_{A_i \cap B_{i,i+1}} = h_i$ e

$$\alpha_{i,i+1}|_{B_{i,i+1} \cap A_{i+1}} = h_{i+1}.$$