A MÉTRICA DE BERGMAN NA BOLA EM $\mathbb{C}^n$

Marcelo Pereira de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Augusto Martins Rodrigues

– São Paulo, dezembro de 1992 –

Dedicado a
Alice Elias de Oliveira

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao prof. Dr. Alexandre A. M. Rodrigues por sua disposição gratuita em me orientar em todas as etapas de meu Mestrado, pela paciência e encorajamento que me transmitiu durante a elaboração deste trabalho e também, é claro, pela competentíssima orientação durante todo o processo.

Quero também agradecer ao pessoal do IME-Jr responsável pelo excelente serviço de digitação dessas páginas, ao apoio dos amigos, em particular ao José Carlos Simon de Miranda, Yamin Muiyá, Rosana Citronutti e Odilon Otávio Luciano e, em especial, a Izaura Cristina Araújo que tem me privilegiado com seu companheirismo construtivo.

MARCELO P. DE OLIVEIRA

Índice

Resumo	1
Abstract	2
1 A métrica e o Kernel de Bergman	3
2 Cálculo da métrica de Bergman na bola em $\mathbb{C}^n$	14
3 Isometrias	22
4 Curvatura Seccional	30
5 Subvariedades Totalmente Geodésicas	35

Resumo

O objetivo central deste trabalho é estudar a métrica de Bergman na bola $B^n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^n / \|z\| < 1\}$ em $\mathbb{C}^n$. A métrica de Bergman é uma métrica definível em cada domínio (aberto conexo) limitado de $\mathbb{C}^n$ que tem a propriedade de ser invariante pelos biholomorfismos entre esses domínios. Em outras palavras, os biholomorfismos tornam-se isometrias entre domínios limitados munidos de suas métricas de Bergman e assim podemos utilizar técnicas de Geometria Riemanniana em seu estudo. Isto é feito no presente trabalho para o caso particular da bola em $\mathbb{C}^n$, onde exibimos uma demonstração puramente geométrica do *Lema de Cartan* sobre os automorfismos analíticos de $B^n(\mathbb{C})$ que preservam a origem (ver (2.4)).

A métrica de Bergman é apresentada no capítulo 1. Das propriedades clássicas apresentadas sucintamente em (1.7), deduzimos algumas outras em (1.8). Os demais capítulos tratam do aspecto geométrico dessa métrica no caso particular de $B^n(\mathbb{C})$: seu cálculo, suas isometrias, curvatura seccional e subvariedades totalmente geodésicas.

Abstract

The main purpose of this work is to study the Bergman metric of the ball $B^n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^n / \|z\| < 1\}$ in $\mathbb{C}^n$. The Bergman metric is a metric that can be defined in every bounded domain (connected open set) in $\mathbb{C}^n$ and that has the property of being invariant by the biholomorphisms between these domains. In other words, the biholomorphisms turn out to be isometries between bounded domains with their Bergman metrics and therefore we can use in their study Riemannian Geometry techniques. This is done in the present work for the particular case of ball in $\mathbb{C}^n$, where we show a purely geometric proof of the *Cartan's Lemma* about the analytic automorphisms of $B^n(\mathbb{C})$ that preserve the origin (see (2.4))

The Bergman metric is presented in Chapter 1. From the classical properties briefly presented in (1.7), we shall deduce some others in (1.8). The remaining chapters deal with the geometric aspects of this metric in the particular case of $B^n(\mathbb{C})$: its calculus, its isometries, sectional curvature and totally geodesic submanifolds.

1 A métrica e o Kernel de Bergman

1.1

Um produto unitário num espaço vetorial complexo V , é uma aplicação

$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, $(u, v) \longrightarrow \langle\langle u, v \rangle\rangle$, satisfazendo

- i. $\langle\langle u, v \rangle\rangle = \overline{\langle\langle v, u \rangle\rangle}$ (= conjugado de $\langle\langle v, u \rangle\rangle$)
- ii. $\langle\langle \lambda u, v \rangle\rangle = \lambda \langle\langle u, v \rangle\rangle$
- iii. $\langle\langle u + v, w \rangle\rangle = \langle\langle u, w \rangle\rangle + \langle\langle v, w \rangle\rangle$
- iv. $\langle\langle u, u \rangle\rangle > 0$ se $u \neq 0$

para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.2

Seja V um espaço vetorial real. Uma forma $\mathbb{R}$ -bilinear a valores complexos (ou $\mathbb{R}$ -bilinear complexa em V) é uma função $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ -linear em cada variável. Escreveremos $\langle\langle u, v \rangle\rangle$ ao invés de $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle(u, v)$ para denotar a forma $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ aplicada ao par (u, v) de vetores de V . Um exemplo de tal forma poderia ser um produto unitário num espaço vetorial complexo munido de sua estrutura natural de espaço vetorial real.

Seja M uma variedade diferenciável. Um campo $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle^M$ de formas $\mathbb{R}$ -bilineares complexas em M é uma atribuição a cada $p \in M$ de uma forma $\mathbb{R}$ -bilinear complexa $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_p^M$ definida em $T_p M$. Denotaremos por

$\ll X, Y \gg^M$ o campo $\ll , \gg^M$ calculado nos campos de vetores X e Y de M .

Se $\ll , \gg$ é uma forma $\mathbb{R}$ -bilinear complexa em V , então $\ll , \gg = \langle , \rangle_1 + \langle , \rangle_2 i$, onde $\langle , \rangle_1$ e $\langle , \rangle_2$ indicam tensores covariantes de ordem 2 em V . Analogamente, se $\ll , \gg^M$ for um campo de formas $\mathbb{R}$ -bilineares complexas, então $\ll , \gg^M = \langle , \rangle^M_1 + \langle , \rangle^M_2 i$, onde $\langle , \rangle^M_1$ e $\langle , \rangle^M_2$ são dois campos tensoriais covariantes de ordem 2. Assim operações como produto tensorial, derivada de Lie, indução de formas, etc., podem naturalmente ser extendidas, por linearidade, a formas ou campos de formas $\mathbb{R}$ -bilineares a valores complexos.

Observemos ainda que todo o raciocínio desenvolvido até aqui vale para formas $\mathbb{R}$ -multilineares a valores complexos e seus campos.

Mais comumente encontrado na literatura são os conceitos de forma complexa definida no complexificado dum espaço vetorial e de campos de formas complexas definidos sobre o complexificado dos espaços tangentes a uma variedade. Sob este ponto de vista, as nossas formas e campos de formas nada mais são do que a restrição destas outras aos vetores reais da complexificação.

1.3

Uma estrutura complexa J num espaço vetorial real V é um autormorfismo linear de V tal que $J^2 = -I$, onde I é a identidade em V . Existe uma corres-

pondência biunívoca natural entre os espaços vetoriais munidos de estrutura complexa e os espaços vetoriais complexos. De fato, se V é um espaço vetorial real e J uma estrutura complexa em V , o próprio V pode ser considerado um espaço vetorial complexo, definindo-se o produto por números complexos por $(a + ib)v = av + bJv$, quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$. Por outro lado, se V for um espaço vetorial complexo, associamos a ele seu espaço vetorial real subjacente, munido da estrutura complexa $J: V \rightarrow V$, $Jv = iv$. Essas correspondências são inversas uma da outra e portanto são biunívocas. Observe que os espaços correspondentes estão definidos sobre um mesmo conjunto e assim vamos denotá-los por um mesmo símbolo, mencionando sua natureza quando necessário.

1.4

Dizemos que g é um produto interno Hermitiano num espaço vetorial real V com uma estrutura complexa J , se g for um produto interno em V tal que $g(Ju, Jv) = g(u, v)$, quaisquer $u, v \in V$. Há uma correspondência biunívoca natural entre os produtos internos Hermitianos dum espaço vetorial real V com estrutura complexa e os produtos unitários definidos em V como espaço vetorial complexo.

Realmente, se V é um espaço vetorial com estrutura complexa J , ao produto interno hermitiano g de V associamos o produto unitário h dado por $h(u, v) = g(u, v) + ig(u, Jv)$, quaisquer $u, v \in V$, em V como espaço

vetorial complexo. Reciprocamente, dado um produto unitário h no espaço complexo V , $g(u, v) = \operatorname{Re} h(u, v)$, $u, v \in V$, onde Re denota a parte real de um número complexo, define um produto interno Hermitiano em V como espaço vetorial real com estrutura complexa. Como antes, essas correspondências são inversas uma da outra e assim, biunívocas.

1.5

Seja M uma variedade complexa e seja J sua estrutura quase complexa. Por (1.3), o espaço tangente $T_p M$ num ponto $p \in M$ qualquer pode ser considerado um espaço vetorial complexo, com o produto de um número complexo por um vetor definido por :

$$(a + ib)v = av + bJv, \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall v \in T_p M.$$

Se, adicionalmente, estiver definido em M uma métrica Hermitiana $\langle, \rangle^M$, podemos, por (1.4), associar a cada ponto $p \in M$ o único produto unitário $\ll, \gg_p^M$ no espaço complexo $T_p M$ tal que $\langle, \rangle_p^M = \operatorname{Re} \ll, \gg_p^M$. Este campo é chamado de métrica unitária $\ll, \gg_p^M$ definida pela métrica hermitiana $\langle, \rangle^M$.

1.6

O espaço $\mathbb{C}^n$ é, obviamente, uma variedade complexa com a carta dada pela aplicação identidade de $\mathbb{C}^n$ em si mesmo.

Dado $p \in \mathbb{C}^n$, o plano tangente $T_p \mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^n$ em p pode ser identificado de maneira natural com o próprio $\mathbb{C}^n$ e escreveremos $T_p \mathbb{C}^n \approx \mathbb{C}^n$ para simbolizar tal identificação. Nessa identificação, a estrutura quase complexa J de $\mathbb{C}^n$ é dada simplesmente pela multiplicação de $v \in T_p \mathbb{C}^n \approx \mathbb{C}^n$ por i . Assim a estrutura de espaço vetorial complexo para $T_p \mathbb{C}^n$ definida em (1.3) coincide com a usual de $\mathbb{C}^n$.

Em $\mathbb{C}^n$, os símbolos dz_i e $d\bar{z}_i$, $i = 1 \dots n$, denotarão os campos de formas $\mathbb{R}$ -lineares a valores complexos dadas por $dz_i(z_1, \dots, z_n) = z_i$, $d\bar{z}_i(z_1, \dots, z_n) = \bar{z}_i, \forall (z_1, \dots, z_n) \in T_p \mathbb{C}^n, \forall p \in \mathbb{C}^n$. O símbolo $\langle\langle, \rangle\rangle$ denotará tanto o produto unitário usual em $\mathbb{C}^n$ $\langle\langle z, w \rangle\rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$ como a métrica unitária dada por $\langle\langle, \rangle\rangle = dz_1 \otimes d\bar{z}_1 + \dots + dz_n \otimes d\bar{z}_n$. Assim $\langle, \rangle = \text{Re} \langle\langle, \rangle\rangle$ poderá significar tanto o produto interno real de $\mathbb{C}^n$ como a métrica Riemanniana usual de $\mathbb{C}^n$, dependendo do contexto, o mesmo valendo para $\|u\| = \sqrt{\langle\langle u, u \rangle\rangle}$.

Da mesma forma, $e_1, \dots, e_n$ representarão os vetores da base canônica de $\mathbb{C}^n$ mas poderão ser também os campos constantes canônicos em $\mathbb{C}^n$ gerados por esses vetores.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um aberto e $\{\langle, \rangle\}$ uma métrica unitária em Ω . Se $z \in \Omega$ e $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_p \Omega \approx \mathbb{C}^n$, então $\{\langle u, v \rangle\}_z = \sum_{i,j} g_{ij}(z) u_i \bar{v}_j$, onde $g_{ij}(z) = \{\langle e_i, e_j \rangle\}_z = \overline{g_{ji}}(z)$. Logo $\{\langle, \rangle\}_z = g_{ij}(z) dz_i \otimes d\bar{z}_j$, qualquer $z \in \Omega$ e a métrica unitária é determinada pelas funções $g_{ij}(z), i, j = 1 \dots n$.

1.7

O Kernel de Bergman - Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um aberto conexo limitado. O espaço de Bergman em Ω , denotado por $A^2(\Omega)$, é o espaço vetorial formado pelas funções holomorfas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\int_{\Omega} |f(z)|^2 dV(z) < \infty,$$

onde dV representa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^{2n}$.

Seja agora $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função que satisfaça as seguintes propriedades :

- i. dado $\omega \in \Omega$, a aplicação $z \rightarrow A(z, \omega)$ pertence a $A^2(\Omega)$ (ou seja, $K(z, \omega)$ é um elemento de $A^2(\Omega)$ em z).
- ii. K é conjugado simétrico, isto é, $K(z, \omega) = \overline{K(\omega, z)}$ ($z, \omega \in \Omega$)
- iii. Para qualquer $f \in A^2(\Omega)$,

$$f(z) = \int_{\Omega} K(z, \omega) f(\omega) dV(\omega), z \in \Omega$$

Em [KRA] é demonstrada a existência e unicidade de uma função satisfazendo i, ii e iii. Ela é chamada Kernel de Bergman em Ω e será indicada por $K(z, \omega)$ ou $K_{\Omega}(z, \omega)$. O Kernel de Bergman goza ainda das seguintes propriedades :

- iv. $K(z, z) > 0$, qualquer $z \in \Omega$

v. Se $g_{ij}(z) = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log K(z, z)$, $z \in \Omega$, então $\sum_{i,j} g_{ij}(z) \omega_i \bar{\omega}_j > 0$ para cada vetor tangente $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \neq 0$ a Ω em z . Isso significa que $\langle\langle, \rangle\rangle_z^\Omega = \sum_{i,j} g_{ij}(z) dz_i \otimes d\bar{z}_j$ é um produto unitário em $T_z\Omega$ para cada $z \in \Omega$. Denotaremos por $\langle\langle, \rangle\rangle^\Omega$ o campo de produtos unitários (a métrica unitária) em Ω definido por $\langle\langle, \rangle\rangle_z^\Omega$ e dados $u, v \in T_z\Omega$ escreveremos $\langle\langle u, v \rangle\rangle_z^\Omega$ o $\langle\langle, \rangle\rangle_z^\Omega$ -produto de u e v .

vi. *A métrica de Bergman* : Por (1.4), $\langle, \rangle_z^\Omega = \text{Re} \langle\langle, \rangle\rangle_z^\Omega$ é um produto interno hermitiano em $T_z\Omega$, $z \in \Omega$. Seja $\langle, \rangle^\Omega$ a métrica hermitiana em Ω dada por $\langle, \rangle_z^\Omega$ em cada $z \in \Omega$. A métrica $\langle, \rangle^\Omega$ é chamada métrica de Bergman em Ω . Pode ser mostrado que essa métrica é Kaehleriana com respeito a estrutura complexa usual de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (ver referências logo abaixo) ou seja, que $\nabla^\Omega J = 0$, onde ∇^Ω é conexão determinada por $\langle, \rangle^\Omega$ e J é a estrutura complexa de Ω

Observe que a métrica de Bergman é uma métrica natural dos abertos conexos limitados de $\mathbb{C}^n$, o que os torna variedades Riemannianas e ela tem a seguinte propriedade notável: se Ω_1 e Ω_2 são dois destes abertos munidos de suas métricas de Bergman, então os biholomorfismos de Ω_1 em Ω_2 (isto é, as aplicações holomorfas de Ω_1 em Ω_2 com inversa holomorfa) são isometrias de Ω_1 em Ω_2 . Dito de outro modo, se $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ é um biholomorfismo, então

$$\langle u, v \rangle_z^{\Omega_1} = \langle Df(z)(u), Df(z)(v) \rangle_{f(z)}^{\Omega_2}$$

para qualquer $z \in \Omega_1$ e quaisquer $u, v \in T_z\Omega_1$ ($Df(z)(u)$ denota a diferencial de f em z calculada no vetor $u \in T_z\Omega_1$). Esse é um fato muito interessante pois permite, por exemplo, estudar biholomorfismos entre abertos conexos limitados de $\mathbb{C}^n$, usando técnicas de Geometria Riemanniana.

Para obter demonstrações dos fatos acima citados bem como outras propriedades, caracterizações e referências adicionais a respeito do Kernel de Bergman recomendamos os textos [KRA],[HEL] e [KON].

1.8

Vamos expor aqui algumas conseqüências das propriedades do Kernel e da métrica de Bergman enunciados no item anterior.

Seja Ω um aberto conexo limitado de $\mathbb{C}^n$.

- i. O fato da métrica de Bergman $\langle, \rangle^\Omega$ ser Kahleriana significa que $\nabla_Y^\Omega iX = i\nabla_Y^\Omega X$ para quaisquer campos X, Y de vetores em Ω , ou seja $\nabla_Y^\Omega X$ é $\mathbb{C}$ -linear em X .
- ii. Desde que $\langle u, v \rangle_z^\Omega = \text{Re} \ll u, v \gg_z^\Omega$, então, por (1.4), $\ll u, v \gg_z^\Omega = \langle u, v \rangle_z^\Omega + i \langle u, Jv \rangle_z^\Omega = \langle u, v \rangle_z^\Omega + i \langle u, iv \rangle_z^\Omega$, $z \in \Omega$ e $u, v \in T_z\Omega$. Se $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ é um biholomorfismo entre os abertos conexos limitados Ω_1 e Ω_2 , então

$$\begin{aligned} \ll Df(z)(u), Df(z)(v) \gg_{f(z)}^{\Omega_2} &= \\ = \langle Df(z)(u), Df(z)(v) \rangle_{f(z)}^{\Omega_2} + i \langle Df(z)(u), iDf(z)(v) \rangle_{f(z)}^{\Omega_2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle Df(z)(u), Df(z)(v) \rangle_{f(z)}^{\Omega_2} = \langle Df(z)(u), Df(iz)(v) \rangle_{f(z)}^{\Omega_2} = \\
&= \langle u, v \rangle_z^{\Omega_1} + i \langle u, iv \rangle_z^{\Omega_1} = \langle\langle u, v \rangle\rangle_z^{\Omega_1}
\end{aligned}$$

para todo $z \in \Omega_1$ e $u, v \in T_z \Omega_1$.

Portanto os biholomorfismos entre Ω_1 e Ω_2 preservam suas métricas unitárias.

iii. Seja $A \subset \mathbb{C}^n$. O conjugado de A é o conjunto $\bar{A} = \{z \in \mathbb{C}^n / \bar{z} \in A\}$. Temos que $\overline{\bar{A}} = A$ e se A é um aberto conexo limitado, $\bar{A}$ também é. A aplicação de conjugação $c_A : A \rightarrow \bar{A}$ dada por $c_A(z) = \bar{z}, z \in A$, é um difeomorfismo de A em $\bar{A}$.

iv. Vale a igualdade $K_{\bar{\Omega}}(z, w) = \overline{K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{w})}, z, w \in \bar{\Omega}$. De fato, $H(z, w) = \overline{K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{w})}$ pertence a $A^2(\bar{\Omega})$ em z , $\overline{H(w, z)} = \overline{K_{\Omega}(\bar{w}, \bar{z})} = \overline{K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{w})} = H(z, w)$ e para $f \in A^2(\bar{\Omega})$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\bar{\Omega}} H(z, w) f(w) dV(w) = \int_{\bar{\Omega}} \overline{K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{w})} f(w) dV(w) = \\
&= \int_{\Omega} \overline{K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{\xi})} f(\bar{\xi}) dV(\xi) = \overline{\int_{\Omega} K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{\xi}) \bar{f}(\bar{\xi}) dV(\xi)} = \bar{\bar{f}}(\bar{z}) = f(z),
\end{aligned}$$

já que $\bar{f}(\bar{\xi}) \in A^2(\Omega)$. Logo, pela unicidade do Kernel de Bergman, (ver (1.7))

$$H(z, w) = K_{\bar{\Omega}}(z, w) = \overline{K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{w})}, z, w \in \bar{\Omega}.$$

v. Nós temos que $\langle\langle u, v \rangle\rangle_z^{\bar{\Omega}} = \overline{\langle\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle\rangle_{\bar{z}}^{\Omega}}, \forall z \in \bar{\Omega}, u, v \in T_z \bar{\Omega}$. Real-

mente, por iv, $K_{\bar{\Omega}}(z, z) = \overline{K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{z})} = K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{z})$, $z \in \bar{\Omega}$, e assim

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\bar{\Omega}}(z) &= \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \log K_{\bar{\Omega}}(z, z) = \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \log K_{\Omega}(\bar{z}, \bar{z}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}_i} \frac{\partial}{\partial w_j} \log K_{\Omega}(w, w)|_{w=\bar{z}} = \overline{\frac{\partial}{\partial w_i} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} \log K_{\Omega}(w, w)|_{w=\bar{z}}} = \overline{g_{ij}^{\Omega}(\bar{z})}. \end{aligned}$$

Portanto, se $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in T_z \bar{\Omega} \approx \mathbb{C}^n$:

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_z^{\bar{\Omega}} = \sum_{i,j} g_{ij}^{\bar{\Omega}}(z) u_i \bar{v}_j = \overline{\sum_{i,j} g_{ij}^{\Omega}(\bar{z}) \bar{u}_i v_j} = \overline{\langle\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle\rangle_{\bar{z}}^{\Omega}}$$

onde $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n), v = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \in \mathbb{C}^n \approx T_{\bar{z}} \Omega$

1.9

Seja $f : M \longrightarrow N$ um difeomorfismo entre as variedades M e N , e $\{\langle, \rangle\}^M$ um campo em M de formas $\mathbb{R}$ -bilineares a valores em $\mathbb{C}$. Denotaremos por $f * \{\langle, \rangle\}^M$ o campo de formas em N induzido por $\{\langle, \rangle\}^M$ e f .

Nesta notação, se $f : \Omega' \longrightarrow \Omega$ for um biholomorfismo entre os domínios limitados Ω' e Ω de $\mathbb{C}^n$ então, por (1.8), $f * \langle\langle, \rangle\rangle^{\Omega'} = \langle\langle, \rangle\rangle^{\Omega}$. Se $c_{\Omega} : \Omega \longrightarrow \bar{\Omega}$ é a conjugação $c_{\Omega}(z) = \bar{z}$ em Ω então, por (1.8), $c_{\Omega} * \langle\langle, \rangle\rangle^{\Omega} = \overline{\langle\langle, \rangle\rangle^{\bar{\Omega}}}$. Conseqüentemente, se $h : \Omega' \longrightarrow \Omega$ for um bi-antiholomorfismo (isto é, se $c_{\Omega} \circ h$ for um biholomorfismo de Ω' em $\bar{\Omega}$), temos que

$$\begin{aligned} h * \langle\langle, \rangle\rangle^{\Omega'} &= (c_{\bar{\Omega}} \circ c_{\Omega} \circ h) * \langle\langle, \rangle\rangle^{\Omega'} = \\ &= c_{\bar{\Omega}} * (c_{\Omega} \circ h) * \langle\langle, \rangle\rangle^{\Omega'} = c_{\bar{\Omega}} \langle\langle, \rangle\rangle^{\bar{\Omega}} = \overline{\langle\langle, \rangle\rangle^{\bar{\Omega}}}. \end{aligned}$$

Em particular, $h * \langle , \rangle^{\Omega'} = h * \operatorname{Re} \langle\langle , \rangle\rangle^{\Omega'} = \operatorname{Re} h * \langle\langle , \rangle\rangle^{\Omega'} = \overline{\operatorname{Re} \langle\langle , \rangle\rangle^{\Omega}} = \langle , \rangle^{\Omega}$ e assim um bi-antiholomorfismo entre dois domínios limitados de $\mathbb{C}^n$ também é uma isometria entre esses domínios munidos de suas métricas de Bergman.

1.10

Nos próximos capítulos, estudaremos a geometria da métrica de Bergman na bola $B^n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^n / \|z\| < 1\}$. Para determinar essa métrica não faremos uso de sua expressão em função do Kernel de Bergman mas sim de suas propriedades, as quais nos permitirão calculá-la, a menos de uma constante multiplicativa, em $B^n(\mathbb{C})$ (ver (2.2)).

No que se segue, todas as variedades serão consideradas conexas.

2 Cálculo da métrica de Bergman na Bola em $\mathbb{C}^n$

2.1

Dado n inteiro positivo, seja $B^n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^n / \|z\| < 1\}$ a *Bola Aberta unitária* em $\mathbb{C}^n$, ou simplesmente a *bola*. $B^n(\mathbb{C})$ é um aberto conexo e limitado em $\mathbb{C}^n$ e assim admite, por (1-7), uma métrica hermitiana em sua estrutura de variedade diferenciável tal que seus automorfismos holomorfos tornam-se isometrias.

As aplicações unitárias de $\mathbb{C}^n$, que formam o conjunto $U(n) = \{A \in GL(\mathbb{C}^n) / \langle\langle A(x), A(y) \rangle\rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle, \forall x, y \in \mathbb{C}^n\}$, são automorfismos holomorfos de $\mathbb{C}^n$ que levam $B^n(\mathbb{C})$ em si mesma. Por isso quando restritas, em seu domínio e contradomínio, à bola, elas constituem automorfismos holomorfos desta última. Como o conjunto de tais restrições está em correspondência biunívoca natural com o conjunto das unitárias em $\mathbb{C}^n$, denotaremos ambos pelo símbolo $U(n)$.

Observe que os elementos de $U(n)$ preservam a origem. Vamos construir agora automorfismos holomorfos da bola que levam a origem num ponto da forma $(\alpha, 0, 0, \dots, 0)$, $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| < 1$. Se $n = 1$, então a função $\varphi_\alpha : B^1(\mathbb{C}) \rightarrow B^1(\mathbb{C})$ dada por $\varphi_\alpha(z) = \frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$ leva $z = 0$ em $\varphi_\alpha(0) = \alpha$ e é biholomorfa e, em particular, bijetora.

Se $n \geq 2$, consideremos as aplicações $f : B^n(\mathbb{C}) \rightarrow B^n(\mathbb{C})$ da

forma :

$$f(z) = (\varphi_\alpha(z_1), \omega_2(z), \dots, \omega_n(z)), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in B^n(\mathbb{C})$$

tal que φ_α é dada como acima e $(\omega_2(z), \dots, \omega_n(z)) = \psi_{z_1}(z_2, \dots, z_n)$,

onde $\psi_{z_1} : B_{r_1(z_1)}^{n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow B_{r_2(z_1)}^{n-1}(\mathbb{C})$ é uma bijeção qualquer entre bolas abertas $B_{r_1(z)}^{n-1}(\mathbb{C})$ e $B_{r_2(z)}^{n-1}$ em $\mathbb{C}^{n-1}$ de centro na origem e raios $r_1(z_1) = \sqrt{1 - |z_1|^2}$ e $r_2(z_1) = \sqrt{1 - |\varphi_\alpha(z_1)|^2}$ respectivamente.

Então qualquer $f : B^n(\mathbb{C}) \longrightarrow B^n(\mathbb{C})$ deste tipo é também uma bijeção. Um dos tipos mais simples de bijeções entre $B_{r_1(z)}^{n-1}(\mathbb{C})$ e $B_{r_2(z)}^{n-1}(\mathbb{C})$, que se possa imaginar é a homotetia de razão $\frac{r_2(z)}{r_1(z)}$, ou seja, a multiplicação dos pontos de $B_{r_1(z)}^{n-1}(\mathbb{C})$ por $\frac{r_2(z)}{r_1(z)}$. Adotando esta forma de aplicação para ψ_{z_1} , obtemos

$$\psi_{z_1}(z_2, \dots, z_n) = \frac{\sqrt{1 - |\varphi_\alpha(z_1)|^2}}{\sqrt{1 - |z_1|^2}}(z_2, \dots, z_n)$$

$$\text{Mas } \frac{\sqrt{1 - |\varphi_\alpha(z_1)|^2}}{\sqrt{1 - |z_1|^2}} = \sqrt{\frac{|\bar{\alpha}z_1 + 1|^2 - |z_1 + \alpha|^2}{(1 - |z_1|^2)|\bar{\alpha}z_1 + 1|^2}} = \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}{|\bar{\alpha}z_1 + 1|}$$

e assim

$$f(z) = \left(\frac{z_1 + \alpha}{\bar{\alpha}z_1 + 1}, \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}{|\bar{\alpha}z_1 + 1|} z_2, \dots, \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}{|\bar{\alpha}z_1 + 1|} z_n \right)$$

Para tornar f holomorfa, vamos corrigir nossa escolha de ψ_{z_1} , tomando agora a homotetia de razão $\frac{r_2(z)}{r_1(z)}$ composta com a rotação $e^{-i \arg(\bar{\alpha}z_1 + 1)}$ em $B_{r_2(z)}^{n-1}(\mathbb{C})$. Essa nova escolha tem o efeito dividir as $(n - 1)$ últimas coordenadas por $e^{i \arg(\bar{\alpha}z_1 + 1)}$, resultando em :

$$f_\alpha(z) = \left(\frac{z_1 + \alpha}{\bar{\alpha}z_1 + 1}, \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{\bar{\alpha}z_1 + 1} z_2, \dots, \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{\bar{\alpha}z_1 + 1} z_n \right)$$

f_α é um automorfismo holomorfo de $B^n(\mathbb{C})$ cuja inversa é dada por $f_{-\alpha}$, como pode facilmente ser verificado por substituição direta.

Para obter um biholomorfismo de $B^n(\mathbb{C})$ que leva a origem num ponto $c \in B^n(\mathbb{C})$ basta considerar, por exemplo, a aplicação $a \circ f_{|c|}$ onde $a \in U(n)$ é tal que $a(|c|, 0, \dots, 0) = c$.

2.2

Vamos agora calcular a expressão da métrica $\langle, \rangle^B$ de Bergman na bola em $\mathbb{C}^n$. Sendo hermitiana, podemos escrevê-la $\langle, \rangle_z^B = \text{Re} \ll, \gg_z^B$, onde

$$\ll, \gg_z^B = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(z) dz_i \otimes d\bar{z}_j, a_{ij} : B^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

é a métrica unitária associada à métrica de Bergman (ver (1.7)), com valores em $\mathbb{C}$. Observe que, por (1.8), temos que os automorfismos holomorfos de $B^n(\mathbb{C})$ preservam este produto complexo. Seja u um vetor em $T_0 B^n(\mathbb{C})$, com $\|u\| = 1$. Se v é qualquer vetor em $T_0 B^n(\mathbb{C})$, com $v \neq 0$, como existe $a \in U(n)$ tal que $a\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = u$, temos

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\|_0^B = \|u\|_0^B \text{ e assim } \|v\|_0^B = \|u\|_0^B \|v\|$$

o que vale também para $v = 0$ ou seja, para $\forall v \in T_0 B^n(\mathbb{C})$. Assim, como a

norma determina o produto unitário, segue que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_0^B = k \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ em $T_0 B^n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^n$ com $k = (\|u\|_0^B)^2$.

Por outro lado, se

$$f_\alpha(z) = \left(\frac{z_1 + \alpha}{\bar{\alpha}z_1 + 1}, \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{\bar{\alpha}z_1 + 1} z_2, \dots, \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{\bar{\alpha}z_1 + 1} z_n \right)$$

então

$$Df_\alpha(z) = \left[\begin{array}{c|ccc} \frac{1-|\alpha|^2}{(\bar{\alpha}z_1+1)^2} & & & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{(\bar{\alpha}z_1+1)^2} \bar{\alpha} z_2 & \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{\bar{\alpha}z_1+1} & - & - \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{(\bar{\alpha}z_1+1)^2} \bar{\alpha} z_n & 0 & & \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{\bar{\alpha}z_1+1} \end{array} \right]$$

e

$$Df_\alpha(0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1-|\alpha|^2 & & & 0 \\ & \sqrt{1-|\alpha|^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{1-|\alpha|^2} \end{array} \right]$$

onde $Df_\alpha(z)$ indica a matriz da diferencial complexa de f_α no ponto z , em relação à base canônica de $\mathbb{C}^n$.

Essa aplicação preserva o produto $\ll , \gg$ e assim

$$\ll Df_\alpha(0)(e_i), Df_\alpha(0)(e_j) \gg_{f(0)}^B = \ll e_i, e_j \gg_0^B, i, j = 1 \dots n$$

ou seja

$$g_{ij}(f_\alpha(0)) = 0 \text{ se } i \neq j, i, j = 1 \dots n$$

$$g_{11}(f_\alpha(0)) = \frac{k}{(1-|\alpha|^2)^2}$$

$$g_{ii}(f_\alpha(0)) = \frac{k}{1-|\alpha|^2}, i = 2, \dots, n$$

Portanto podemos escrever

$$\ll u, v \gg_{f_\alpha(0)}^B = \frac{k}{1 - \|f_\alpha(0)\|^2} \left(\frac{\ll u_r, v_r \gg}{1 - \|f_\alpha(0)\|^2} + \ll u^\perp, v^\perp \gg \right),$$

$$u, v \in T_{f_\alpha(0)} B^n(\mathbb{C})$$

onde u_r e v_r são as componentes de u e v na direção complexa dada por $f(0)$ e $u^\perp$ e $v^\perp$ as respectivas componentes na direção $\ll , \gg$ -ortogonal a $f(0)$.

Seja agora qualquer $z \in B^n(\mathbb{C})$. O espaço tangente $T_z B^n(\mathbb{C})$ em z se decompõe em soma direta ortogonal da reta complexa $[[z]]$ gerada por $z \in T_z B^n(\mathbb{C})$ com $[[z]]^\perp$, o subespaço de $T_z B^n(\mathbb{C})$ $\ll , \gg$ -ortogonal a z . Sejam $\alpha = \|z\|$, f_α dada como acima e $a \in U(n)$ tal que $a(z) = (\alpha, 0, \dots, 0)$. Da $a(z) \equiv a$ leva $[[z]]$ em $[[f_\alpha(0)]] = [(\alpha, 0, \dots, 0)]$ e $[[z]]^\perp$ em $[[f(0)]]^\perp$.

Assim para $\forall u, v \in T_z B^n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \ll u, v \gg_z^B &= \ll a(u), a(v) \gg_{f_\alpha(0)}^B = \\ &= \frac{k}{1 - \|f_\alpha(0)\|^2} \left(\frac{\ll a(u_r), a(v_r) \gg}{1 - \|f_\alpha(0)\|^2} + \ll a(u^\perp), a(v^\perp) \gg \right) \end{aligned}$$

com $u = u_r + u^\perp, v = v_r + v^\perp, u_r, v_r \in [[z]], u^\perp, v^\perp \in [[z]]^\perp$

ou seja

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_z^B = \frac{k}{1 - \|z\|^2} \left(\frac{\langle\langle u_r, v_r \rangle\rangle}{1 - \|z\|^2} + \langle\langle u^\perp, v^\perp \rangle\rangle \right)$$

A essa altura, podemos supor $k = 1$, já que isto corresponde apenas a uma possível “mudança de escala” na métrica de Bergman, e não muda o grupo de isometrias ou a conexão afim associadas a ela.

Em relação à base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{C}^n \approx T_z B^n(\mathbb{C})$ temos:

$$(e_k)_r = \langle\langle e_k, \frac{z}{\|z\|} \rangle\rangle \cdot \frac{z}{\|z\|} = \frac{\overline{z_k}}{\|z\|^2} \cdot z$$

$$(e_k)^\perp = e_k - \frac{\overline{z_k}}{\|z\|} \cdot z, \quad \forall k = 1 \dots n$$

Portanto:

$$\langle\langle e_i, e_j \rangle\rangle_z^B = \frac{\overline{z_i} z_j}{(1 - \|z\|^2)^2 \|z\|^2} + \frac{1}{1 - \|z\|^2} \langle\langle e_i - \frac{\overline{z_i} z}{\|z\|^2}, e_j - \frac{\overline{z_j} z}{\|z\|^2} \rangle\rangle =$$

$$= \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^2} \left(\frac{\overline{z_i} z_j}{\|z\|^2} + (1 - \|z\|^2) (\delta_{ij} - \frac{z_j \overline{z_i}}{\|z\|^2} - \frac{z_j \overline{z_i}}{\|z\|^2} + \frac{z_j \overline{z_i}}{\|z\|^2}) \right) =$$

$$= \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^2} \left(\frac{\overline{z_i} z_j}{\|z\|^2} + (1 - \|z\|^2) (\delta_{ij} - \frac{\overline{z_i} z_j}{\|z\|^2}) \right) =$$

$$= \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^2} (\delta_{ij} (1 - \|z\|^2) + \overline{z_i} z_j)$$

onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, ou seja,

$$g_{ij}(z) = \frac{1}{(1-\|z\|^2)^2} (\delta_{ij}(1-\|z\|^2) + \bar{z}_i z_j), \forall i, j \in 1, 2, \dots, n, \forall z \in B^n(\mathbb{C}),$$

o que nos dá a forma explícita da métrica. Observe que para $n = 1$, a expressão acima torna-se

$$g_{11}(z) = \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \text{ e } \langle \cdot, \cdot \rangle_z^B = \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_z^B = \text{Re} \frac{1}{(1-|z|^2)^2} dz \otimes d\bar{z}$$

que é a métrica de Poincaré no disco $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ em $\mathbb{C}$.

2.3

Observe que na construção da métrica de Bergman feita em 2.2 somente usamos os fatos de que ela é hermitiana e invariante pelos automorfismos analíticos de $B^n(\mathbb{C})$. Na verdade, a condição de ser hermitiana é redundante perante a segunda condição, desde que a aplicação $\varphi(z) = iz$ é uma isometria e que os automorfismos da bola agem transitivamente nesse domínio. Portanto concluímos que, a menos de constantes multiplicativas, é única a métrica na bola invariante pelos seus automorfismos analíticos.

2.4

A métrica de Bergman fornece uma maneira simples de mostrar que os únicos biholomorfismos da bola que preservam a origem são aplicações unitárias, o que é conhecido como *Lema de Cartan* na Teoria das Funções de Variáveis Complexas. De fato, se φ é um automorfismo que preserva a origem, então $D\varphi(0)$ é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear em $\mathbb{C}^n$ que preserva o produto unitário

$\langle\langle, \rangle\rangle_0^B = \langle\langle, \rangle\rangle$. Portanto $D\varphi(0) \in U(n)$ e $D\varphi(0)$, como aplicação em $B^n(\mathbb{C})$, é ela mesma uma isometria da bola. Como duas isometrias com a mesma diferencial num ponto tem de coincidir, segue que $\varphi = D\varphi(0)$ e $\varphi \in U(n)$.

É ainda interessante salientar que, usando o Lema de Cartan, poderíamos ter construído a métrica de Bergman na bola, sem auxílio do Kernel de Bergman e de suas propriedades, associando a cada $z \in B^n(\mathbb{C})$ o produto unitário $Df(0) * \langle\langle, \rangle\rangle$ onde f é um automorfismo qualquer da bola com $f(0) = z$ e $\langle\langle, \rangle\rangle$ é o produto unitário usual em $\mathbb{C}^n \approx T_0 B^n(\mathbb{C})$. Pelo Lema de Cartan tal associação está bem definida, ou seja, independe da f escolhida.

Uma repetição dos cálculos feitos em 2.2 nos mostra que tal associação tem as mesmas expressões obtidas naquele item para $\langle\langle, \rangle\rangle^B$; em particular essa associação é de classe $\mathbb{C}^\infty$ e sendo assim, constitui, de facto, uma métrica unitária na bola. Sua parte real é, por construção uma métrica hermitiana invariante pelos automorfismos analíticos de $B^n(\mathbb{C})$. Finalmente, para ver que essa métrica é Kaehleriana, observe que todo ponto $p \in B^n(\mathbb{C})$ admite um automorfismo s_p da bola tal que $s_p(p) = p$ e $Ds_p(p) = -I_p$, onde I_p é a identidade em $T_p B^n(\mathbb{C})$. Assim, se ∇ denota a conexão da métrica, ∇J é um tensor de ordem ímpar invariante por essas transformações, donde concluímos que $\nabla J = 0$.

3 Isometrias

3.1

Denotaremos por $\underline{Aut B^n(\mathbb{C})}$ o grupo dos automorfismos analíticos (ou seja, holomorfos) em $B^n(\mathbb{C})$ e por $\overline{Aut B^n(\mathbb{C})}$ o conjunto $\{\overline{\varphi} / \varphi \in Aut B^n(\mathbb{C})\}$. Da mesma forma, $\overline{U(n)}$ representará o conjunto $\{\overline{u} / u \in U(n)\}$ dos conjugados das aplicações unitárias.

3.2

Seja $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n / z_2 = \dots = z_n = 0\}$ o disco unitário em $B^n(\mathbb{C})$. Seja $\gamma[0, 1] \rightarrow B^n(\mathbb{C})$ uma geodésica tal que $\gamma(0) \in \mathcal{D}$ e $\frac{d\gamma}{dt}(0) = \lambda e_1, \lambda \in \mathbb{C}$. A curva $\gamma^* : [0, 1] \rightarrow B^n(\mathbb{C}), \gamma^* = \varphi \circ \gamma$, onde γ é a isometria $\varphi(z_1, \dots, z_n) = (z_1, -z_2, \dots, -z_n)$, também é uma geodésica com $\gamma^*(0) = \gamma(0)$ e $\frac{d\gamma^*}{dt}(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$.

Assim, pela unicidade da geodésica com determinada velocidade e posição inicial num dado instante, concluímos que $\gamma = \gamma^*$ e que $\mathcal{D}$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $B^n(\mathbb{C})$.

Analogamente, sejam $\mathcal{L} = \{z \in \mathcal{D} / z_1 \in \mathbb{R}\}$ o segmento $(-1, 1)$ em $\mathcal{D}$ e γ é uma geodésica de $B^n(\mathbb{C})$ com $\gamma(0) \in \mathcal{L}$ e $\frac{d\gamma}{dt}(0) = x e_1, x \in \mathbb{R}$. Pelo raciocínio acima, γ é uma curva em $\mathcal{D}$. Seja agora $\overline{\gamma} : [0, 1] \rightarrow B^n(\mathbb{C})$ a curva dada por $\overline{\gamma}(t) = \overline{\gamma(t)}, \forall t \in [0, 1]$; desde que a conjugação é uma isometria em $B^n(\mathbb{C})$, $\overline{\gamma}$ é uma geodésica. De $\overline{\gamma}(0) = \gamma(0)$ e $\frac{d\overline{\gamma}}{dt}(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$ segue que $\gamma = \overline{\gamma}$ e assim γ é uma curva em $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}$ é uma subvariedade

totalmente geodésica de dimensão um de $B^n(\mathbb{C})$.

A curva $\tilde{c} : (-1, 1) \longrightarrow B^n(\mathbb{C})$, $\tilde{c}(t) = te_1$, é uma parametrização de $\mathcal{L}$. Não é difícil ver que a reparametrização de $\tilde{c}$ por comprimento de arco fornece uma geodésica de $B^n(\mathbb{C})$. Desta forma :

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\tilde{c}}{dt}(x) \right\|_{\tilde{c}(x)}^B dx = \int_0^t \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}$$

$t(s) = \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1}$ e assim $c(s) = \tilde{c}(t(s)) = \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1}e_1$, $-\infty < s < \infty$ é uma geodésica tal que $c(0) = 0$ e $\dot{c}(0) = e_1$. Por fim, sendo as aplicações unitárias isometrias na bola, temos que $c_u : \mathbb{R} \longrightarrow B^n(\mathbb{C})$, $c_u(s) = \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1}u$, $u \in T_0 B^n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^n$, $\|u\| (= \|u\|_0^B) = 1$ são geodésicas de $B^n(\mathbb{C})$ tais que $c_u(0) = 0$ e $\dot{c}_u(0) = u$. Essas são, evidentemente, todas as geodésicas maximais partindo da origem com velocidade unitária e suas imagens são segmentos de reta diametraes.

3.3

Designemos por $I(B^n(\mathbb{C}))$ ou simplesmente por I o grupo das isometrias de $\langle, \rangle^B$ e por $H(B^n(\mathbb{C}))$ ou simplesmente por H o subgrupo de I que preserva a origem de $B^n(\mathbb{C})$, ou seja, o conjunto $\{\varphi \in I / \varphi(0) = 0\}$. Provemos agora o seguinte fato: As isometrias de $\langle, \rangle^B$ que preservam a origem são precisamente as aplicações lineares unitárias e suas conjugadas.

Para isso, observemos primeiramente que essas aplicações são de fato isometrias de H o que pode ser verificado através das propriedades da métrica de Bergman ou por inspeção direta.

Reciprocamente, seja $\varphi \in H$ e $p \in B$. Então existe $s_0 \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{C}^n$, $\|u\| = 1$, com $p = c_u(s_0) = \frac{e^{2s_0}-1}{e^{2s_0}+1} u$

Sendo φ uma isometria e $c_u(s)$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco, temos que $d(s) = \varphi \circ c_u(s)$ é uma geodésica de velocidade unitária partindo de $d(0) = \varphi \circ c_u(0) = 0$ em $s = 0$. Por outro lado, podemos escrever, por (3.2), que $d(s) = \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1} \cdot v$, onde $v \in \mathbb{C}^n \approx T_0 B^n(\mathbb{C})$ é a velocidade de $d(s)$ em $s = 0$ e assim igual a $D\varphi(0)(u)$. Logo

$$\varphi_0 c_u(s) = \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1} D\varphi(0)(u) = D\varphi(0)(c_u(s))$$

Fazendo $s = s_0$, vem $\varphi(p) = D\varphi(0)(p)$, ou seja, como p é qualquer, φ coincide com sua derivada na origem e é portanto linear. Notemos também que essa aplicação é ortogonal e isso decorre de $D\varphi(0)$ preservar o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0^B = \operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostremos agora que $\varphi(iz) = i\varphi(z)$, $\forall z \in B^n(\mathbb{C})$ ou que $\varphi(iz) = -i\varphi(z)$, $\forall z \in B^n(\mathbb{C})$. Suponhamos $\varphi(e_1) = e_1$. Então pela linearidade de φ temos que $\varphi(xe_1) = x\varphi(e_1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Isso mostra que φ fixa o eixo real definido por e_1 . Seja agora $\varphi(ie_1) = v = \sum_{i=2}^n v_i e_i \in \mathbb{C}^n$. Temos

$$\langle ie_1, ie_1 \rangle_{x \cdot e_1}^B = \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

e

$$\begin{aligned} & \langle D\varphi(xe_1)(ie_1), D\varphi(xe_1)(ie_1) \rangle_{T(xe_1)}^B = \langle \varphi(ie_1), \varphi(ie_1) \rangle_{x e_1}^B = \\ & = \frac{1}{(1-x^2)^2} \left[|v_1|^2 + (1-x^2) \left(\sum_{i=2}^n |v_i|^2 \right) \right], \forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 \end{aligned}$$

pois $D\varphi(p) = \varphi$, $\forall p \in B^n(\mathbb{C})$. Da igualdade dessas expressões, vem :

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{(1-x^2)^2} \left[|v_1|^2 + (1-x^2) \left(\sum_{i=2}^n |v_i|^2 \right) \right]$$

ou seja

$$1 = |v_1|^2 + (1-x^2) \left(\sum_{i=2}^n |v_i|^2 \right)$$

Como essa igualdade vale para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < x < 1$, concluimos que $|v_1| = 1$ e $|v_i| = 0, \forall i = 2..n$. Assim $\varphi(ie_1) = e^{i\theta}e_1, \theta \in \mathbb{R}$ e da ortogonalidade de φ segue que $\varphi(ie_1) = \pm ie_1$ (o que significa que $\varphi(ie_1) = ie_1$ ou que $\varphi(ie_1) = -ie_1$).

Suponhamos agora que φ não fixa necessariamente o vetor e_1 e seja $h \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|h\| = 1$. Observemos que, sendo φ ortogonal, $\|\varphi(h)\| = 1$ e sejam u_1 e $u_2 \in U(n)$ tais que $u_1(e_1) = h$ e $u_2(\varphi(h)) = e_1$. A aplicação $u_2 \circ \varphi \circ u_1$ é uma isometria de H com $u_2 \circ \varphi \circ u_1(e_1) = e_1$ e assim

$$u_2 \circ \varphi \circ u_1(ie_1) = \pm ie_1$$

donde

$$\varphi(ih) = \varphi(iu_1(e_1)) = \varphi(u_1(ie_1)) = u_2^{-1}(\pm ie_1) = \pm iu_2^{-1}(e_1) = \pm i\varphi(h)$$

ou seja

$$\varphi(ih) = \sigma_\varphi(h)\varphi(h)$$

onde $\sigma_\varphi(h) = \pm i$.

Porém $\sigma_\varphi(h)$ é uma função contínua em $S^{2n-2} = \{h \in \mathbb{C}^n / \|h\| = 1\}$ e assim constante e, pela linearidade de φ , podemos finalmente escrever

$$\varphi(iz) = \sigma_\varphi \varphi(z), \forall z \in \mathbb{C}^n$$

com $\sigma_\varphi = \pm i$ independente de z . Se $\sigma_\varphi = i$, então φ é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear; se $\sigma_\varphi = -i$, então $\bar{\varphi}$ é $\mathbb{C}$ -linear. Desde que uma aplicação em $\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}$ -linear ortogonal é unitária, φ ou $\bar{\varphi} \in U(n)$, como queríamos mostrar.

3.4

A operação de conjugação $c_B : B^n(\mathbb{C}) \longrightarrow B^n(\mathbb{C}), c_B(z) = \bar{z}$ juntamente com os automorfismos analíticos da bola são isometrias que geram o grupo $\overline{Aut B^n(\mathbb{C})} \cup Aut B^n(\mathbb{C})$, subgrupo de $I(B^n(\mathbb{C}))$. Porém, como $Aut B^n(\mathbb{C})$ é um grupo transitivo na bola e as isometrias que deixam fixa a origem estão em $\overline{Aut B^n(\mathbb{C})} \cup Aut B^n(\mathbb{C})$, os dois grupos são realmente iguais, ou seja, *o grupo de isometrias de $B^n(\mathbb{C})$ com a métrica de Bergman é igual ao grupo constituído pelos automorfismos analíticos da bola e seus conjugados.*

3.5

O grupo I das isometrias de uma variedade Riemanniana forma, como é sabido, um grupo de Lie de transformações sobre a variedade, com a topologia compacto-aberta. No presente caso, $I = \overline{Aut B^n(\mathbb{C})} \cup Aut B^n(\mathbb{C})$, como visto em (3.4). Afirmamos que a componente conexa da identidade I_0 é dada por

$Aut B^n(\mathbb{C})$. Para ver isso, suponhamos $\psi \in Aut B^n(\mathbb{C})$, com $\psi(0) = a \in B^n(\mathbb{C})$. Sabemos por (2.1) que $\varphi_{\|a\|}$ dada por :

$$\varphi_{\|a\|}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1 + \|a\|}{\|a\|z_1 + 1}, \frac{\sqrt{1 - \|a\|^2}}{\|a\|z_1 + 1} z_2, \dots, \frac{\sqrt{1 - \|a\|^2}}{\|a\|z_1 + 1} z_n \right)$$

é um automorfismo analítico da bola que leva $0 \in B^n(\mathbb{C})$ em $\varphi(0) = (\|a\|, 0, \dots, 0)$.

Assim, $\|\varphi(0)\| = \|a\|$ e existe $u_1 \in U(n)$ tal que $u_1(\varphi_{\|a\|}(0)) = a$. Portanto a aplicação

$$(u_1 \circ \varphi_{\|a\|})^{-1} \circ \psi$$

é um automorfismo que preserva a origem e, por (3.3)

$$(u_1 \circ \varphi_{\|a\|})^{-1} \circ \psi = u_2 \in U(n),$$

ou seja,

$$\psi = u_1 \circ \varphi_{\|a\|} \circ u_2, \text{ com } u_1 \text{ e } u_2 \in U(n)$$

Mas $\varphi_{\|a\|}$, bem como qualquer $u \in U(n)$ pertencem a componente conexa da identidade, já que

$$\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow I, \text{ dadas por}$$

$$\gamma_1(t)(z) = \left(\frac{z_1 + t\|a\|}{t\|a\|z_1 + 1} \frac{\sqrt{1 - t^2\|a\|^2}}{t\|a\|z_1 + 1} z_2, \dots, \frac{\sqrt{1 - t^2\|a\|^2}}{t\|a\|z_1 + 1} z_n \right)$$

e

$$\gamma_2(t)(z) = \tilde{U} \cdot \begin{pmatrix} e^{it\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{it\theta_n} \end{pmatrix} \cdot \tilde{U}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, z \in B^n(\mathbb{C}),$$

onde

$$\tilde{U} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \cdot \tilde{U}^{-1}$$

é uma decomposição espectral da matriz de u em relação a base canônica de $\mathbb{C}^n$, são curvas em I , com a topologia compacto-aberta (pois para z fixo, $\gamma_1(t)(z)$ e $\gamma_2(t)(z)$ são curvas na bola) que ligam a identidade a $\varphi_{\|u\|}$ e a u respectivamente. Assim, existe uma curva ligando $\psi = u_1 \circ \varphi_{\|u\|} \circ u_2$ à identidade, donde concluímos que $\text{Aut } B^n(\mathbb{C})$ e $\text{Aut } B^n(\mathbb{C})$ são dois subconjuntos conexos de I . Observe também que a imagem da curva γ_2 está, na verdade, contida em $U(n)$, o que mostra a conexidade desse subconjunto também.

Por outro lado, seja $\sigma : I \longrightarrow \{i, -i\}$ o “ valor de i quando este é sacado de dentro da diferencial de $\psi \in I$ ”, ou seja, a função dada por

$$\sigma(\psi) = \frac{\langle\langle D\psi(p_0)(iv_0), D\psi(p_0)(v_0) \rangle\rangle}{\|D\psi(p_0)(v_0)\|^2}$$

que está bem definida, independentemente de $p_0 \in B^n(\mathbb{C})$ e $v_0 \in T_{p_0} B^n(\mathbb{C})$, $v_0 \neq 0$ escolhidos. Essa função é contínua em I e assim não é possível existir uma curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow I$ com $\gamma(0) = \text{identidade em } I$ e $\gamma(1) \in \text{Aut } B^n(\mathbb{C})$ já que, neste caso, $F = \sigma \circ \gamma$ seria uma função contínua a valores discretos com $F(0) = i$ e $F(1) = -i$. Daí concluímos finalmente que I tem exatamente

duas componentes conexas : $I_0 = \text{Aut } B^n(\mathbb{C})$, que é a componente conexa da identidade e $\overline{\text{Aut } B^n(\mathbb{C})}$.

3.6

Decorre da teoria geral dos grupos de transformações que H , o grupo das isometrias que fixam a origem, é um subgrupo de Lie topológico de I e é fechado como subconjunto; no nosso caso, $H = U(n) \cup \overline{U(n)}$. Em (3.5) foi construído um caminho unindo a identidade a um elemento genérico de $U(n)$, com imagem contida nesse subgrupo, o que mostra a conexidade de $U(n)$ e de $\overline{U(n)}$. Como também em (3.5) foi visto que não existe caminho algum ligando um automorfismo a um conjugado de automorfismo, deduzimos então que $U(n)$ e $\overline{U(n)}$ são as componentes conexas de H .

4 Curvatura Seccional

4.1

Seja $R^B(X, Y, Z, W)$ o tensor de curvatura da métrica de Bergman na bola, P o plano $\{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n / z_2 = \dots = z_n = 0\}$ e $\mathcal{D}$ o disco $P \cap B^n(\mathbb{C})$. Desde que o disco $\mathcal{D}$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $B^n(\mathbb{C})$, a curvatura seccional de $B^n(\mathbb{C})$ por P num ponto x de $\mathcal{D}$, $K_x(P)$, coincide com a curvatura de $\mathcal{D}$ com a métrica de Bergman induzida, no mesmo ponto.

Mas a métrica induzida em $\mathcal{D}$ vale $\text{Re} \frac{1}{1-|z_1|^2} dz_1 \otimes d\bar{z}_1$, que é simplesmente a métrica de Poincaré de curvatura constante $c = -4$, donde $K_x(P) = c$. Como P é um plano complexo (ou seja, J-invariante) e os automorfismos holomorfos de $B^n(\mathbb{C})$ formam um grupo transitivo, que contém as aplicações unitárias, segue que a curvatura seccional por qualquer plano complexo, em qualquer ponto da bola, é constante e vale c . Dada uma variedade Kaehleriana, se P é um plano complexo (J-invariante) pertencente ao espaço tangente a variedade em algum ponto desta, a curvatura seccional por P , $K(P)$, é freqüentemente chamada de curvatura seccional holomorfa (por P). Se X é qualquer vetor unitário em P , então vale $K(P) = R(X, JX, X, JX)$ onde R é o tensor de curvatura da variedade. Dito de outra maneira, nós temos mostrado, logo acima, que $B^n(\mathbb{C})$ tem curvatura seccional holomorfa constante igual a c .

4.2

Expressão da Curvatura - O tensor de curvatura $R(X, Y, Z, W)$ associado a uma métrica Riemanniana, numa variedade M , é, em cada ponto, uma função quadrilinear que satisfaz às seguintes propriedades :

- a) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$
- b) $R(X, Y, Z, W) + R(X, W, Y, Z) + R(X, Z, W, Y) = 0$
- c) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

Adicionalmente, se a métrica for Kähleriana então vale ainda :

- d) $R(JX, JY, Z, W) = R(X, Y, JZ, JW) = R(X, Y, Z, W)$

$$\forall X, Y, Z, W \in T_p M, \forall p \in M,$$

cujas demonstrações são imediatas.

S. Kobayashi e K. Nomizu, em seu “Foundations of Differential Geometry” demonstram que se R' e R'' são duas funções quadrilineares num espaço vetorial V com estrutura complexa J que satisfazem a), b), c) e d) e

$$R'(X, JX, X, JX) = R''(X, JX, X, JX) \quad \forall X \in V,$$

então $R' = R''$. Daí decorre imediatamente o seguinte resultado : o tensor de curvatura de uma variedade Kähleriana está completamente determinado pela sua curvatura seccional holomorfa. Vamos demonstrar tal resultado usando uma variante do raciocínio empregado no referido texto, escrevendo a curvatura seccional explicitamente em função da curvatura seccional holomorfa, o que nos permitirá calcular diretamente a curvatura de $B^n(\mathbb{C})$.

Fixado $p \in M$, observemos primeiramente que, por a), c) e d), a função quadrilinear $(X, Y, Z, W) \mapsto R(JX, Y, JZ, W)$, $X, Y, Z, W \in T_p M$, é simétrica nas duas primeiras variáveis e nas duas últimas e também satisfaz à propriedade c). Daí, segue que a função quadrilinear T dada por

$$T(X, Y, Z, W) = R(X, JY, Z, JW) + R(X, JW, Y, JZ) + R(X, JZ, W, JY),$$

$X, Y, Z, W \in T_p M$ é simétrica nas quatro variáveis.

Para $Z = X$ e $W = Y$, temos :

$$T(X, Y, X, Y) = 2R(X, JY, X, JY) + R(X, JX, Y, JY)$$

e por b), a) e d)

$$\begin{aligned} R(X, JX, Y, JY) &= -R(X, JY, JX, Y) - R(X, Y, JY, JX) = \\ &= R(X, JY, X, JY) + R(X, Y, X, Y) \end{aligned}$$

Substituindo na equação acima, vem que :

$$T(X, Y, X, Y) = 3R(X, JY, X, JY) + R(X, Y, X, Y)$$

e substituindo Y por JY

$$T(X, JY, X, JY) = R(X, JY, X, JY) + 3R(X, Y, X, Y)$$

Das duas últimas equações resulta :

$$R(X, Y, X, Y) = \frac{1}{8}(3T(X, JY, X, JY) - T(X, Y, X, Y)) \quad (I)$$

Por outro lado, se x, y, z, w são variáveis numéricas, vale a seguinte identidade

$$12x^2y^2 = (x + y)^4 + (x - y)^4 - 2x^4 - 2y^4$$

Da mesma forma, sendo T simétrico, podemos escrever

$$12T(X, Y, X, Y) = T(X + Y, X + Y, X + Y, X + Y) +$$

$$+T(X-Y, X-Y, X-Y, X-Y) - 2T(X, X, X, X) - 2T(Y, Y, Y, Y)$$

ou

$$\begin{aligned} 12T(X, Y, X, Y) &= 3[R(X+Y, J(X+Y), X+Y, J(X+Y)) + \\ &+ R(X-Y, J(X-Y), X-Y, J(X-Y)) + \\ &- 2R(X, JX, X, JX) - 2T(Y, JY, Y, JY)] \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} T(X, Y, X, Y) &= \frac{1}{4}[K(X+Y)\|(X+Y) \wedge J(X+Y)\|^2 + \\ &+ K(X-Y)\|(X-Y) \wedge J(X-Y)\|^2 - 2K(X)\|X \wedge JX\|^2 + \\ &- 2K(Y)\|Y \wedge JY\|^2] \end{aligned} \quad (\text{II})$$

onde $K(Z)$ é a curvatura holomorfa pelo plano complexo gerado pelo vetor Z e $\|Z \wedge W\|$ é a área do paralelogramo determinado por Z e W pertencentes a $T_p M$. Essa expressão mostra que $T(X, Y, X, Y)$ (e assim $T(X, JY, X, JY)$) é determinado pelas curvaturas seccionais holomorfas por certos planos e mostra também como calcular $T(X, Y, X, Y)$ conhecidas tais curvaturas. Por (I) calcula-se então $R(X, Y, X, Y)$ e portanto a curvatura seccional pelo plano de X e Y . Em particular, se $M = B^n(\mathbb{C})$, as curvaturas seccionais holomorfas são todas iguais a c e se X e Y são vetores tangentes a $B^n(\mathbb{C})$ por um mesmo ponto e formam uma base ortonormal do plano gerado por eles, as fórmulas (I) e (II) fornecem :

$$\begin{aligned} T^B(X, Y, X, Y) &= c, \quad T^B(X, JY, X, JY) = c(1 + 2(\langle X, JY \rangle^B)^2) \text{ e} \\ R^B(X, Y, X, Y) &= \frac{c}{4}(1 + 3(\langle X, JY \rangle^B)^2) \end{aligned} \quad (\text{III})$$

onde T^B e R^B são os tensores T (definido acima) e de curvatura associados

à métrica de Bergman $\langle , \rangle^B$. Uma outra demonstração de (III) pode ser encontrada também no texto citado acima.

5 Subvariedades Totalmente Geodésicas

5.1

Vamos agora repetir a técnica usada em 3.2 para encontrar novas subvariedades totalmente geodésicas .

Sejam $[e_1, \dots, e_j]$ e $[[e_1, \dots, e_j]]$, $1 \leq j \leq n$, as intersecções de $B^n(\mathbb{C})$ com os espaços real e complexo gerados por $e_1, \dots, e_j$, respectivamente. Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B^n(\mathbb{C})$ é uma geodésica com $\gamma(0) \in [[e_1, \dots, e_j]]$ e $\frac{d\gamma}{dt}(0) = \sum_{i \leq j} \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, então $\gamma^* : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B^n(\mathbb{C})$, dada por $\gamma^* = \varphi \circ \gamma$ onde φ é a isometria $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_j, -z_{j+1}, \dots, -z_n)$ é também uma geodésica com $\gamma^*(0) = \gamma(0)$ e $\frac{d\gamma^*}{dt}(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$

Logo $\gamma = \gamma^*$, $\gamma(t) \in [[e_1, \dots, e_j]]$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e assim $[[e_1, \dots, e_j]]$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $B^n(\mathbb{C})$.

Da mesma forma, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B^n(\mathbb{C})$ uma geodésica tal que $\gamma(0) \in [e_1, \dots, e_j]$ e $\frac{d\gamma}{dt}(0) = \sum_{i \leq j} x_i e_i$, $x_i \in \mathbb{R}$. Então pelo visto acima, $\gamma(t) \in [[e_1, \dots, e_j]]$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Se $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B^n(\mathbb{C})$ é a curva dada por $\bar{\gamma} = c_B \circ \gamma$, onde c_B é a conjugação em $B^n(\mathbb{C})$, $c_B(z_1, \dots, z_n) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, então $\bar{\gamma}$ é uma geodésica (já que a conjugação é uma isometria). De $\bar{\gamma}(0) = \gamma(0)$ e $\frac{d\bar{\gamma}}{dt}(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$ resulta que $\gamma = \bar{\gamma}$ e assim a imagem de γ está inteiramente contida em $[e_1, \dots, e_j]$. Logo a subvariedade $[e_1, \dots, e_j]$ é totalmente geodésica, também

5.2

Diremos que um subespaço real P de $\mathbb{C}^n$ é *J-ortogonal*, se $iP = \{iv \in \mathbb{C}^n / v \in P\}$ for ortogonal a P em relação a $\langle, \rangle$, produto interno real canônico de $\mathbb{C}^n$.

Dado $j \in N$, $1 \leq j \leq n$, o subespaço real gerado por $e_1, \dots, e_j$ é um exemplo de subespaço J-ortogonal, e portanto $[e_1, \dots, e_j]$ é a intersecção de um subespaço real J-ortogonal com $B^n(\mathbb{C})$.

A imagem de um subespaço J-ortogonal por uma aplicação unitária é ainda J-ortogonal, assim como a imagem de um subespaço complexo por uma tal aplicação ainda é um subespaço complexo.

Por outro lado, qualquer subespaço J-ortogonal P é a imagem do espaço real gerado por $e_1, \dots, e_k$, onde $k = \dim_{\mathbb{R}} P$, por uma aplicação unitária.

Da mesma forma, se P' é um subespaço complexo, então existe uma aplicação unitária tal que a imagem, por essa aplicação, do espaço complexo gerado por $e_1, \dots, e_{k'}$, onde $k' = \dim_{\mathbb{C}} P'$, é precisamente P' .

Desde que as aplicações unitárias são isometrias da bola, por (5.1) concluímos que *as intersecções de $B^n(\mathbb{C})$ com subespaços complexos e J-ortogonais são subvariedades totalmente geodésicas de $B^n(\mathbb{C})$ passando pela origem.*

5.3

Pelo item anterior, ou por (3.2), temos que os segmentos abertos de reta que passam pela origem são subvariedades totalmente geodésicas de $B^n(\mathbb{C})$; por (3.2) eles são ainda a imagem das geodésicas passando por este ponto. Vejamos agora como é o deslocamento paralelo de vetores ao longo destas linhas radiais.

Lema : Seja $v \in T_0 B^n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^n$ um vetor tangente a bola na origem, $c : (-1, 1) \rightarrow B^n(\mathbb{C})$ a curva radial dada por $c(x) = xu$, onde $u \in \mathbb{C}^n$, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = 1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indicando, como sempre, o produto unitário usual de $\mathbb{C}^n$, e $\tau_x v$ o transporte paralelo de v de 0 até $c(x)$, ao longo de c . Então :

i) Se u e v são $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -perpendiculares, temos

$$\tau_x v = \sqrt{1 - x^2} v$$

ii) Se u e v são $\mathbb{C}$ -paralelos ($v = \lambda u$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$), temos

$$\tau_x v = (1 - x^2) v$$

Assim, em ambos os casos, $\tau_x v$ é um múltiplo positivo de v , embora o seja com fatores diferentes.

Demonstração :

Seja $c' : (-1, 1) \rightarrow B^n(\mathbb{C})$ a curva dada por $c'(x) = x e_1 = (x, 0, \dots, 0)$

Dado $v' \in T_0 B^n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^n$, denotaremos por $\tau'_x v'$ o transporte paralelo de v' ao longo de c' , de $c'(0) = 0$ até $c'(x)$. Se $v = 0$, então o

resultado é imediato. Suponhamos $v \neq 0$. Se $\langle\langle u, v \rangle\rangle = 0$, seja $v' = \|v\| \cdot e_2 = (0, \|v\|, 0, \dots, 0)$. Existe uma aplicação unitária $a \in U(n)$ tal que $a(e_1) = u$ e $a(v') = v$. Temos então $c = a \circ c'$ e segue do fato de a ser uma isometria que $\tau_x v = Da(c(x))(\tau'_x v') = a(\tau'_x v')$. (I)

Mas o plano real gerado por e_1 e e_2 é uma subvariedade totalmente geodésica de $B^n(\mathbb{C})$ e dessa forma podemos escrever $\tau'_x v'_x = \lambda_1(x)e_1 + \lambda_2(x)e_2$, $\lambda_i : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Por outro lado, desde que a intersecção da bola com o “eixo x_1 ” $= \{z \in \mathbb{C}^n / \exists \lambda \in \mathbb{R}, z = \lambda e_1\}$ também é uma subvariedade totalmente geodésica, temos que $\tau'_x e_1 = \lambda_3(x)e_1$, sendo $\lambda_3 : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real positiva.

De $\langle \tau'_x v', \tau'_x e_1 \rangle_{c'(x)}^B = \langle v', e_1 \rangle_0^B = 0$, $\forall x \in (-1, 1)$ e da expressão da métrica de Bergman, segue que $\lambda_1(x) = 0, \forall x \in (-1, 1)$, ou seja, $\tau'_x v' = \lambda_2(x)e_2$.

De $\langle \tau'_x v', \tau'_x v' \rangle_{c'(x)}^B = \langle v', v' \rangle_0^B = \|v\|^2$ vem que $\frac{\lambda_2^2(x)}{(1-x^2)} = \|v\|^2$. Como $\lambda_2(0) > 0$ e λ_2 não pode se anular, então $\lambda_2(x) = \sqrt{1-x^2}\|v\|$ e $\tau'_x v' = \sqrt{1-x^2}v'$, ou seja $\tau_x v = \sqrt{1-x^2}v$, por (I).

Suponhamos agora que u e v são $\mathbb{C}$ -paralelos, com $v = (a + bi)u$, $a, b \in \mathbb{R}$. Como antes $\tau'_x e_1 = \lambda_3(x)e_1$ onde λ_3 é uma função real positiva.

De $\langle \tau'_x e_1, \tau'_x e_1 \rangle_{c'(x)}^B = \langle e_1, e_1 \rangle_0^B = 1$ vem que $\frac{\lambda_3^2(x)}{(1-x^2)^2} = 1$. Desde que $\lambda_3(0) > 0$ e λ_3 nunca se anula, temos $\lambda_3(x) = 1 - x^2$, ou seja, $\tau'_x e_1 = (1 - x^2)e_1$ e, como a métrica é Kaehleriana, segue que $\tau'_x i e_1 = i \tau'_x e_1 = (1 - x^2)i e_1$.

Assim , para $v' = (a + bi)e_1$, $\tau'_x v' = (1 - x^2)v'$ e como existe $a \in U(n)$ com $a(v') = v$ e $a(e_1) = u$,então, de novo, $c = a \circ c'$ e $\tau_x v = a(\tau'_x v')$, donde $\tau_x v = (1 - x^2)v$.

5.4

Seja S uma subvariedade totalmente geodésica de $B^n(\mathbb{C})$ passando pela origem e $T_0 S$ o espaço tangente a S neste ponto.

Existem vizinhanças abertas U e V de zero em $T_0 S$ e S , respectivamente, tal que a aplicação exponencial $\exp_0 : U \longrightarrow V$ em zero está bem definida e é um difeomorfismo. Por outro lado, a imagem das geodésicas que passam pela origem são segmentos de reta e assim $V = \exp(U)$ está contido em $T_0 S$ agora como um subespaço real P de $\mathbb{C}^n$. Desde que P é uma variedade regular de $\mathbb{C}^n$, a aplicação $\exp : U \longrightarrow P$ é uma imersão injetora, e V , com esta estrutura, uma subvariedade de P . Mas como $\dim V = \dim S = \dim T_0 S = \dim P$, V é um subvariedade aberta de P . Portanto mostramos que, localmente na origem, S é um aberto de $P \approx T_0 S$.

5.5

Vamos agora mostrar que *não existe subvariedade totalmente geodésica passando pela origem cujo espaço tangente nesse ponto não é complexo nem J -ortogonal*. De fato, suponha S uma tal subvariedade, P o subespaço de $\mathbb{C}^n$, identificado com $T_0 S$ e V um aberto de P e de S , contendo a origem, cuja existência é demonstrada em (5.4).

Como P não é complexo nem J-ortogonal, existe $u \in P$ tal que iu não pertence a P , nem é ortogonal a esse subespaço. Seja então v a projeção ortogonal não nula de iu em P , considerando a métrica usual $\langle, \rangle$ de $\mathbb{C}^n$. Como $\langle u, v \rangle = \langle u, iu + v - iu \rangle = \langle u, iu \rangle + \langle u, v - iu \rangle = 0$, então u e v são $\langle, \rangle$ -ortogonais. O espaço $\mathbb{C}^n$ decompõe-se como soma direta do subespaço complexo gerado por u e do subespaço $\ll, \gg$ -ortogonal a esse vetor; dessa maneira existem vetores $u_{\parallel}$ e $u^{\perp}$, tais que $v = u_{\parallel} + u^{\perp}$, sendo $u_{\parallel}$ um múltiplo complexo de u e $\ll u^{\perp}, u \gg = 0$.

Do fato de v e u serem $\langle, \rangle$ -ortogonais, deduzimos que $u_{\parallel} = iku$, com $k \in \mathbb{R}$. Como iu não é $\langle, \rangle$ -ortogonal a P , então v e iu não são $\langle, \rangle$ -ortogonais, donde $k \neq 0$ e assim $u_{\parallel} \neq 0$. Por outro lado, $u^{\perp} \neq 0$, já que se $u^{\perp} = 0$ então $iu = \frac{1}{k}u_{\parallel} = \frac{1}{k}v$ e assim iu pertenceria a P , contrariamente às nossas hipóteses. Portanto as componentes $u_{\parallel}$ e $u^{\perp}$ de v são ambas não nulas.

Seja agora $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ a curva dada por $\gamma(t) = tu$, onde $\varepsilon > 0$ é um valor suficientemente pequeno de modo a garantir que γ esteja bem definida e seja $\tau_t v$ a translação de v ao longo de γ , da origem até $\gamma(t)$. Desde que v pertence ao plano tangente a V na origem e V é um aberto de uma subvariedade totalmente geodésica, então $\tau_t v$ pertence a $T_{\gamma(t)}V$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Mas sendo V também um aberto de P , então $T_{\gamma(t)}V \approx P$ e assim $\tau_t v$ é sempre um vetor em P .

Do Lema em (5.3) temos $\tau_t(v) = \tau_t(u_{\parallel} + u^{\perp}) = (1-t^2)u_{\parallel} + \sqrt{1-t^2}u^{\perp}$,

$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, donde concluimos que $u^\perp$, $u_\parallel$ e $iu = \frac{1}{k}u_\parallel$ pertenecen a P , o que contradiz as hipóteses sobre u . Isso encerra a demonstração.

5.6

Seja M uma variedade Riemanniana qualquer e S e S' duas subvariedades totalmente geodésicas de mesma dimensão passando por um mesmo ponto $p \in M$ e tangentes entre si nesse ponto, isto é, tal que $T_p S = T_p S'$. Suponhamos que S seja regular e que seja um subconjunto fechado de M . Então S' é uma subvariedade aberta de S . Para mostrar isso, observemos primeiramente que, dada uma subvariedade totalmente geodésica R de M e $q \in R$, a aplicação exponencial relativa a R em q é simplesmente a restrição da exponencial de M em q a uma vizinhança aberta de 0 em $T_q R$. Assim, denotaremos ambas as aplicações pelo mesmo símbolo $\exp_q$. Seja agora A o conjunto dos pontos de $S \cap S'$ nos quais S e S' se tangenciam. Se $q \in A$, existem vizinhanças abertas U e U' de zero em $T_q S = T_q S'$ e V e V' de q em S e S' , respectivamente, tais que as aplicações $\exp_q : U \rightarrow V$ e $\exp_q : U' \rightarrow V'$ são difeomorfismos. Então $\exp_q(U \cap U')$ é uma vizinhança aberta de q tanto em S como em S' e assim está contido em $S \cap S'$; como para qualquer $\bar{q} \in \exp_q(U \cap U')$, temos $T_{\bar{q}} S = T_{\bar{q}} S' = D\exp_q(\bar{u})(T_{\bar{u}}(U \cap U'))$, onde $\bar{u} \in U \cap U'$ é tal que $\exp_q(\bar{u}) = \bar{q}$, segue que $\exp_q(U \cap U')$ está contido em A e que portanto A é um aberto de S e de S' .

Suponhamos agora $q \in S' \setminus A$. Se q pertence a S' mas não a S , $S' \setminus S$

é uma vizinhança aberta de q em S' que está contida em $S' \setminus A$. Por outro lado, se $q \in S \cap S'$, sejam U e V vizinhanças abertas de zero em $T_q M$ e de q em M respectivamente, tais que a aplicação exponencial $\exp_q : U \longrightarrow V$ seja um difeomorfismo. Se $U' = T_q S' \cap U$ e $\bar{U} = T_q S \cap U$, $V' = \exp_q(U')$ e $\bar{V} = \exp_q(\bar{U})$, então podemos supor, restringindo U se necessário, que V' e $\bar{V}$ são vizinhanças abertas de q em S' e S respectivamente e que $\exp_q : U' \longrightarrow V'$ e $\exp_q : \bar{U} \longrightarrow \bar{V}$ são difeomorfismos. Podemos supor ainda que $\bar{V} = V \cap S$ desde que S é uma subvariedade regular de M . Nessas condições temos $V' \subset S' \setminus A$. Com efeito, $V' = (V' \setminus \bar{V}) \cup (V' \cap \bar{V})$, $V' \setminus \bar{V} \subset S' \setminus S \subset S' \setminus A$ e se $x \in V' \cap \bar{V}$, com $x = \exp_q(u)$, $u \in U' \cap \bar{U}$, então $T_x S = D\exp_q(u)(T_u \bar{U}) = D\exp_q(u)(T_q S) \neq D\exp_q(u)(T_q S') = D\exp_q(u)(T_u U') = T_x S'$, pois $T_q S' \neq T_q S$, donde $x \in S' \setminus A$ e $V' \cap \bar{V} \subset S' \setminus A$. Logo V' é uma vizinhança aberta de q em S' , contida em $S' \setminus A$. Portanto, de qualquer modo, seja $q \in S' \setminus S$ ou $q \in S \cap S'$, q é um ponto interior a $S' \setminus A$ em S' , o que mostra que $S' \setminus A$ é um aberto em S' . Como A também é aberto em S' e $p \in A$, decorre da conexidade de S' que $S' = A$ e que $S' \subset S$. Por fim, desde que S é regular e $\dim S = \dim S'$, segue que S' é uma subvariedade aberta de S .

5.7

No item (5.2) foi provado que a intersecção de subespaços complexos e J-ortogonais de $\mathbb{C}^n$ com $B^n(\mathbb{C})$ eram subvariedades totalmente geodésicas da bola. De (5.5) resulta que qualquer outra subvariedade passando pela

origem necessariamente é tangente a uma delas por este ponto. Como a intersecção de um subespaço com a bola é uma subvariedade regular fechada de $B^n(\mathbb{C})$, concluimos por (5.6), que tal outra subvariedade é, na verdade, uma subvariedade aberta de alguma das descritas acima. Portanto *as únicas subvariedades totalmente geodésicas de $B^n(\mathbb{C})$ que passam pela origem são as intersecções de subespaços complexos e subespaços J -ortogonais de $\mathbb{C}^n$ com a bola e, naturalmente, suas subvariedades abertas passando por zero.*

5.8

Subvariedades totalmente geodésicas que não passam necessariamente pela origem e de dimensão ≥ 2 - Desde que as aplicações biholomorfas são isometrias que agem transitivamente em $B^n(\mathbb{C})$, qualquer subvariedade totalmente geodésica é a imagem de uma delas passando pela origem por um biholomorfismo da bola.

Seja $\alpha \in B^n(\mathbb{C})$ e $f_\alpha : B^n(\mathbb{C}) \rightarrow B^n(\mathbb{C})$, dada por

$$f_\alpha(z_1, z_2, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1 + \alpha}{\bar{\alpha}z_1 + 1}, \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}{\bar{\alpha}z_1 + 1} z_2, \dots, \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}{\bar{\alpha}z_1 + 1} z_n \right).$$

Por 2.1 sabemos que f_α é um biholomorfismo da bola. Seja agora Q um plano afim complexo de dimensão $2r$, $r > 1$, em $\mathbb{C}^n$; então, por definição, existem um ponto $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ e um subespaço complexo $2r$ -dimensional H de $\mathbb{C}^n$ tais que $Q = p + H = \{z \in \mathbb{C}^n / \exists h \in H \text{ com } z = p + h\}$.

Vamos examinar a imagem de $Q \cap B^n(\mathbb{C})$ por f_α . Seja $p+h \in B^n(\mathbb{C})$, com $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in H$. Um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned} f_\alpha(p+h) - f_\alpha(p) &= \\ &= k(p, h)(\sqrt{1 - |\alpha|^2}h_1, \bar{\alpha}p_1h_2 - \bar{\alpha}p_2h_1 + h_2, \dots, \bar{\alpha}p_1h_n - \bar{\alpha}p_nh_1 + h_n). \end{aligned}$$

onde $k(p, h) = \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}{(\bar{\alpha}(p_1+h_1)+1)(\bar{\alpha}p_1+1)}$. Como a aplicação de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$, dada por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\sqrt{1 - |\alpha|^2}x_1, \bar{\alpha}p_1x_2 - \bar{\alpha}p_2x_1 + x_2, \dots, \bar{\alpha}p_1x_n - \bar{\alpha}p_nx_1 + x_n)$$

é linear, concluímos que existe um plano afim complexo $2r$ -dimensional $\overline{Q}$ tal que $f_\alpha(Q \cap B^n(\mathbb{C})) \subset \overline{Q} \cap B^n(\mathbb{C})$. Sendo $f_{-\alpha}$ a inversa de f_α , pela mesma razão existe um plano complexo $2r$ -dimensional $\overline{\overline{Q}}$ com $f_\alpha^{-1}(\overline{Q} \cap B^n(\mathbb{C})) = f_{-\alpha}(\overline{Q} \cap B^n(\mathbb{C})) \subset \overline{\overline{Q}} \cap B^n(\mathbb{C})$. Desde que $Q \cap B^n(\mathbb{C}) \subset \overline{\overline{Q}} \cap B^n(\mathbb{C})$, segue que $\overline{\overline{Q}} = Q$, donde $f_\alpha(Q \cap B^n(\mathbb{C})) = \overline{Q} \cap B^n(\mathbb{C})$. Por outro lado, se a é uma aplicação unitária então $a(Q \cap B^n(\mathbb{C})) = a(Q) \cap B^n(\mathbb{C})$. Podemos concluir portanto que *dado um biholomorfismo φ da bola e um plano complexo Q de $\mathbb{C}^n$, existe um plano complexo Q' de mesma dimensão de Q tal que $\varphi(Q \cap B^n(\mathbb{C})) = Q' \cap B^n(\mathbb{C})$* , já que um tal biholomorfismo é necessariamente a composição de aplicações unitárias com aplicações do tipo f_α , $\alpha \in B^n(\mathbb{C})$ (ver (3.5)).

Decorre daí e de (5.7) que as intersecções da bola com planos complexos são subvariedades totalmente geodésicas de $B^n(\mathbb{C})$. Essas subvariedades são imagens, por biholomorfismos, das intersecções da bola com os subespaços complexos de $\mathbb{C}^n$. No entanto, a imagem, por essas aplicações, das secções da bola por subespaços J -ortogonais não precisam ser secções planas da bola. O estudo dessas subvariedades totalmente geodésicas, incluindo alguma caracterização geométrica mais explícita, é deixado como sugestão para trabalhos posteriores.

Linhas Geodésicas - Vimos em (3.2) que para qualquer $u \in \mathbb{C}^n$ com $\|u\| = 1$ a curva $c_u : \mathbb{R} \rightarrow B^n(\mathbb{C})$ dada por $c_u(s) = \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1}u$ é uma geodésica que passa pela origem em $s = 0$ com velocidade $\dot{c}_u(0) = u$. Isso mostra em particular que a aplicação exponencial na origem está definida para todo vetor de $T_0 B^n(\mathbb{C})$. Sendo o grupo de isometrias transitivo na bola, temos que a aplicação exponencial num ponto qualquer está definida em todo o espaço tangente nesse ponto. Dito de outro modo:

1. Qualquer geodésica de $B^n(\mathbb{C})$ pode ser estendida a uma geodésica definida em $\mathbb{R}$.

Decorre de (5.7) que as subvariedades totalmente geodésicas de dimensão um que contém a origem são precisamente os segmentos abertos de reta passando por este ponto.

A partir dos fatos relatados até aqui neste item, segue-se, sem dificuldade, que na bola:

2. Todas as subvariedades totalmente geodésicas de dimensão 1 são subvariedades regulares.

Observe que qualquer geodésica da bola é uma imersão injetora e assim induz uma estrutura de subvariedade de $B^n(\mathbb{C})$ em sua imagem. Daqui em diante, tal subvariedade será simplesmente chamada de *imagem* da referida geodésica.

3. Qualquer subvariedade totalmente geodésica de dimensão 1 é imagem de alguma geodésica.
4. Reciprocamente, a imagem de toda geodésica é uma subvariedade totalmente geodésica de dimensão 1.

Dada uma variedade Riemanniana M , diremos que uma subvariedade totalmente geodésica S de M é *maximal* se, qualquer outra subvariedade totalmente geodésica S' de M , de mesma dimensão e tangente a S em algum ponto, é uma subvariedade aberta de S . As subvariedades totalmente geodésicas maximais de dimensão um serão chamadas de *linhas geodésicas*. No caso de $B^n(\mathbb{C})$ com a métrica de Bergman, deduz-se de (5.7) que suas linhas geodésicas são as imagens, pelas isometrias, das intersecções da bola com as retas que passam pela origem.

Ainda com relação à bola :

5. Toda linha geodésica é a imagem de alguma geodésica definida em todo $\mathbb{R}$.
6. Reciprocamente, a imagem de qualquer geodésica definida em $\mathbb{R}$ é uma linha geodésica
7. Dado um ponto $p \in B^n(\mathbb{C})$ e um vetor $v \in T_p B^n(\mathbb{C})$, existe uma e uma só linha geodésica por p que é tangente a v , isto é, tal que v pertence ao fibrado tangente da linha geodésica.

8. Não existe nenhuma subvariedade totalmente geodésica de dimensão 1 que contenha propriamente como subvariedade uma linha geodésica.
9. Dados dois pontos distintos de $B^n(\mathbb{C})$, existe uma e uma só linha geodésica que passa pelos dois pontos.

Pelas propriedades das linhas geodésicas da bola citadas acima, vemos que elas têm um papel muito semelhante ao das retas na Geometria Euclídeana e só isso já justifica o seu estudo¹. Vamos descrevê-las de um modo intrínseco e mais geométrico.

Diremos que um plano em $\mathbb{C}^n$ é *complexo bidimensional* se seu subespaço vetorial associado for complexo (ou seja, J-invariante) e de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$.

Seja S uma *secção plana complexa bidimensional* de $B^n(\mathbb{C})$, isto é, $S = H \cap B^n(\mathbb{C})$, onde H é um plano complexo bidimensional que tem intersecção não nula com a bola. Observe que S é um círculo aberto em H e que é uma subvariedade complexa totalmente geodésica de $B^n(\mathbb{C})$. Denotaremos por $\partial\overline{S}$ a circunferência que delimita S .

¹As propriedades das linhas geodésicas, geodésicas e subvariedades totalmente geodésicas de dimensão 1 numeradas neste item podem ser reproduzidas literalmente no contexto mais geral das variedades Riemannianas de curvatura seccional menor ou igual a zero, geodesicamente completas (isto é, tal que a aplicação exponencial num ponto qualquer esteja definida para todo o espaço tangente a variedade neste ponto) e simplesmente conexas. Para mostrar isso, nós poderíamos usar o Teorema de Hadamard (ver, por exemplo, [dCA]) que afirma que numa tal variedade, a aplicação exponencial num ponto qualquer é um difeomorfismo do espaço tangente nesse ponto sobre a variedade, juntamente com o fato de que qualquer variedade de dimensão 1 é difeomorfa ou ao círculo S^1 ou ao intervalo $(0,1)$ de $\mathbb{R}$ (ver [MIL], por exemplo).

Vejamos como são as linhas geodésicas contidas em S . Sejam H_0 e $\mathcal{D}$ dados por $H_0 = \{(z \in \mathbb{C}^n / z_2 = \dots = z_n = 0\}$ e $\mathcal{D} = H_0 \cap B^n(\mathbb{C})$; indicaremos por D o disco unitário em $\mathbb{C}$. Consideremos as aplicações $i : \mathbb{C} \rightarrow H_0$ dadas por $i(z) = (z, 0, \dots, 0) \in H_0, \forall z \in \mathbb{C}$, $i' : D \rightarrow \mathcal{D}$ a restrição de i a D no domínio, e a $\mathcal{D}$ no contradomínio; $\psi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma composição de translações, aplicações unitárias e homotetias tal que $\psi(H) = H_0$ e $\psi(S) = \mathcal{D}$, e $\psi' : H \rightarrow H_0$ e $\psi'' : S \rightarrow \mathcal{D}$ as correspondentes restrições de ψ às subvariedades H e H_0 , e a S e $\mathcal{D}$ respectivamente.

Seja agora $p \in S$. Pelo que já foi visto, segue imediatamente que existe um automorfismo $\tilde{\varphi}_p$ da bola tal que $\tilde{\varphi}_p(\mathcal{D}) = S$; seja $\varphi_p : \mathcal{D} \rightarrow S$ a restrição de $\tilde{\varphi}_p$ a $\mathcal{D}$ e a S . Observemos que φ_p é uma isometria entre essas duas subvariedades totalmente geodésicas de $B^n(\mathbb{C})$.

As aplicações definidas acima podem ser esquematizadas no seguinte diagrama comutativo :

onde as aplicações indicadas por $\hookrightarrow$ são inclusões e $f = (i')^{-1} \circ \psi'' \circ \varphi_p \circ i'$.

Observe que todas as aplicações do diagrama são complexas.

Denotemos ainda por $C^\perp$ o conjunto das retas e circunferências de H que são ortogonais a $\partial\overline{S}$, e por $C_p^\perp$ o subconjunto de $C^\perp$ cujos elementos contém p .

Suponhamos que g seja uma linha geodésica de $B^n(\mathbb{C})$ contida em S e passando por p . Desde que $\tilde{\varphi}_p$ é uma isometria, $g = \tilde{\varphi}_p(l) = \varphi_p(l)$ onde l é uma linha geodésica por zero, contida em $\mathcal{D}$. Assim l é a intersecção de uma reta de H_0 , passando pela origem, com $\mathcal{D}$, ou seja, $l = i'(\delta)$ onde δ é um segmento diametral de D .

Por outro lado, f é um automorfismo analítico de D ; por (3.3), segue que $f = f_\alpha \circ \alpha_{\theta_1}$, onde f_α e α_{θ_1} são automorfismos da forma $\alpha_{\theta_1}(z) = e^{i\theta_1}z$, $f_\alpha(z) = \frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$ para algum $\alpha \in D$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$. Assim, não é difícil ver que $f(\delta) = \delta' \cap D$, onde δ' é uma circunferência ou uma reta em $\mathbb{C}$ ortogonal a $S^1 = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 1\}$.

Se $\eta = (\psi')^{-1} \circ i \circ j$, pela comutatividade do diagrama, nós temos que $S = \eta(D)$ e $g = \eta(\delta' \cap D) = \eta(\delta') \cap S$; é fácil ver também que $\eta(S^1) = \partial \bar{S}$ e que $\gamma = \eta(\delta')$ é um elemento de C_p^1 . Portanto $g = \gamma \cap S$, onde $\gamma \in C_p^\perp$.

Reciprocamente, seja $g = \gamma \cap S$, onde $\gamma \in C_p^\perp$. Desde que em $\mathcal{D}$ existem linhas geodésicas passando por zero e tangentes a todas as direções de $T_0\mathcal{D}$ partindo da origem, o mesmo vale para S com relação a p .

Assim, a linha geodésica $\tilde{g}$ que passa por p e é tangente a g nesse ponto está contida em S , e pelo parágrafo anterior, $\tilde{g} = \tilde{\gamma} \cap S$ para algum $\tilde{\gamma} \in C_p^\perp$. Por geometria elementar, é fácil ver que dois elementos de $C_p^\perp$ tangentes em p são iguais e que portanto $\gamma = \tilde{\gamma}$, $g = \tilde{g}$ e g é uma linha geodésica de S . Do visto acima, concluímos que as linhas geodésicas em S que passam por p são da forma $S \cap \gamma$, onde $\gamma \in C_p^\perp$ e, desde p é genérico, as que estão em S (não passando necessariamente por p) são precisamente as subvariedades dadas por $S \cap \gamma$, com $\gamma \in C^\perp$. Note ainda que qualquer linha geodésica de $B^n(\mathbb{C})$ está contida numa secção plana complexa bidimensional da bola, já que isto vale para as linhas geodésicas que passam pela origem e que pelo visto acima, o conjunto de tais secções é invariante por $\text{Aut } B^n(\mathbb{C})$.

Vamos adaptar esse resultado para mostrar como construir a linha geodésica que passa por dois pontos dados ou a que passa por um ponto e é tangente a um vetor neste ponto.

Dados dois pontos distintos de $B^n(\mathbb{C})$, tomemos o (único) plano bidimensional complexo H de $\mathbb{C}^n$ que passa por esses pontos e seja S a intersecção de H com a bola e $\partial\bar{S}$ a circunferência em H que delimita S . Tracemos agora a (única) circunferência ou reta γ que passa pelos pontos dados e que seja ortogonal a $\partial\bar{S}$. A intersecção de γ com S é a linha geodésica que passa pelos pontos dados.

Analogamente, dado um ponto em $B^n(\mathbb{C})$ e um vetor tangente a $B^n(\mathbb{C})$ por este ponto, seja H o (único) plano bidimensional complexo de $\mathbb{C}^n$ que passa pelo ponto e é tangente a esse vetor. Seja S a intersecção de H com a bola e $\partial\bar{S}$ a circunferência que delimita S . Tracemos então a (única) circunferência ou reta γ passando pelo ponto, tangente nesse ponto ao vetor dado e ortogonal a $\partial\bar{S}$. A intersecção de γ com S é a linha geodésica da bola que passa pelo ponto e é tangente ao vetor dado.

Naturalmente, qualquer linha geodésica provém de qualquer um dos procedimentos citados acima.

Bibliografia

- [dCa] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988, 2.ed.
- [HEL] Helgason, S. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, 1962.
- [KON] Kobayashi, S.; Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. I e II, Interscience, New York, 1969.
- [KRA] Krantz, S. *Function Theory of Several Complex Variables*. John Wiley and Son, New York, 1982.
- [MIL] Milnor, J.W. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Univ. Virginia Press, Charlottesville, 1965.
- [MOK] Mok, N. *Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Manifolds*. Columbia Univeristy, New York.
- [NAR] Narasimhan, R. *Several Complex Variables. Chicago Lectures in Mathematics*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1977.
- [SPI] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. 1-5, 2.ed. , Publish or Perish, Wilmington, Delaware, 1979.