**Equações diferenciais ordinárias
~~com segundo membro descontínuo~~
e algumas aplicações**

Maria Cristina Bonomi Baruffi

**Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Mestre
em
Matemática**

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Fernandes de Oliveira

São Paulo, dezembro de 1992

Agradecimentos

Agradeço:

em especial ao Prof. Dr. José Carlos Fernandes de Oliveira, orientador constante, que, com paciência e dedicação, possibilitou minha reintegração no Instituto e a realização deste trabalho.

à Professora Elza que, desde a minha primeira passagem pelo Instituto, me acompanhou e me apoiou.

a amigos, colegas, importantes e presentes, que me ajudaram nas horas difíceis e com os quais muito aprendi - Iole, Henrique Guzzo, Jorge Tadashi, Roseli, Gladys, Lúcio, Ângela, Cris Suzuki, Vera Helena, Luiz Gonzaga, Lucília, Heloísa.

São Paulo, primavera de 1992.

Resumo

Provamos um teorema de existência de solução local do problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias com segundo membro descontínuo; apresentamos condições para a unicidade de solução e aplicamos os resultados a um problema mecânico com atrito seco, a um problema de perseguição e a um procedimento voltado para planejamento em economia.

Abstract

We prove an existence theorem of local solution of the initial valued problem for ordinary differential equations with discontinuous right-hand side; we give conditions for uniqueness of solution and we apply the results to a mechanical problem with dry friction, a pursuit problem and a planning procedure in economics.

Índice

Introdução	5
Capítulo 1 - Preliminares	7
1.1 - Distância de Hausdorff	8
1.2 - Convexos de $\mathbb{R}^n$	9
1.3 - Teoremas de Peano e Picard	10
1.4 - Teoremas de Carathéodory	11
1.5 - Alguns resultados da Teoria de Funções	13
1.6 - Funções Polivalentes	14
1.7 - Inclusões Diferenciais	16
1.8 - Existência de solução local do Problema de Cauchy	16
Capítulo 2 - Equações diferenciais ordinárias com segundo membro descontínuo	18
2.1 - Existência de solução do Problema de Cauchy	22
2.2 - Unicidade de solução do Problema de Cauchy	24
2.3 - Estabilidade	27
Capítulo 3 - Um problema de perseguição: o galgo e a lebre	32
Capítulo 4 - Movimentos de um disco rígido sobre uma reta horizontal	38
4.1 - Movimento de puro rolamento	38
4.2 - Movimento com escorregamento	42
Capítulo 5 - Viabilidade de um planejamento em Economia	48
Bibliografia	52

Introdução

Neste trabalho apresentamos resultados básicos e algumas aplicações da teoria local das equações diferenciais ordinárias com segundo membro descontínuo,

$$\dot{x} = f(t, x),$$

nas quais o campo vetorial f é apenas mensurável e localmente limitado em todo ponto (t, x) do domínio, podendo ser descontínuo, não apenas com relação ao tempo t , mas também com relação à variável de fase x , não sendo portanto equações diferenciais de Peano (f contínua em (t, x)) nem de Carathéodory (f mensurável em t e contínua em x).

Tais equações aparecem em varios contextos e modelos: na síntese de controle ótimo, em problemas de perseguição, em problemas mecânicos com atrito seco, em problemas de existência de planejamento viável em economia, etc. Algumas destas aplicações foram desenvolvidas no texto.

As equações diferenciais, nos pontos de descontinuidade do campo vetorial f , são entendidas como equações diferenciais de inclusão, ou seja, inclusões diferenciais,

$$\dot{x} \in F(t, x),$$

onde o conjunto $F(t, x)$ é a envoltória convexa fechada do conjunto de todos os pontos-limite de $f(t, y)$ quando y tende para o ponto x .

No Capítulo 1 apresentamos resultados da Teoria Clássica, utilizados nos capítulos seguintes, e alguns pré-requisitos.

No Capítulo 2, baseados principalmente em [F], demonstramos um teorema de existência de solução local do problema de Cauchy, a unicidade de solução local e uma

extensão do teorema que constitui o Método Direto de Liapunov, para a estabilidade simples ou assintótica de um equilíbrio.

No Capítulo 3, tratamos de um problema de perseguição, que se traduz num sistema de equações diferenciais ordinárias, cujo campo de vetores é descontínuo apenas num ponto; caracterizamos as órbitas e seus equilíbrios.

No Capítulo 4, analisamos a questão do escorregamento de um disco sujeito a atrito, mostrando que, numa vizinhança de cada equilíbrio, a situação tende à do puro rolamento.

Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos uma aplicação que mostra a existência de um planejamento viável em economia, para um modelo de consumo de vários artigos numa comunidade com vários consumidores.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos fixar notações e mencionar algumas definições e resultados que serão utilizados a seguir; as demonstrações podem ser encontradas nas referências.

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ o espaço dos vetores coluna $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, onde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, munido do produto interno dado por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad \text{para todos } x, y \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

e da norma euclidiana,

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada x em $\mathbb{R}^n$, x não nulo, indicaremos por $\text{sgn } x$ o vetor $\frac{x}{|x|}$, denominado *senal de x* .

A notação x^ε será frequentemente utilizada para designar a bola fechada de centro no ponto x de $\mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$:

$$x^\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq \varepsilon\}$$

Denotaremos por B a bola de centro 0 e raio 1. Assim, $x^\varepsilon = x + \varepsilon B$, onde $\varepsilon B = \{\varepsilon y : y \in B\}$.

Definimos também, para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^n$,

$$A^\varepsilon = \bigcup_{x \in A} x^\varepsilon$$

Dado um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $\overline{A}$ o fecho do conjunto A e $|A| = \{|a| : a \in A\}$.

1.1 Distância de Hausdorff [F, A-C]

A *distância de Hausdorff* entre dois subconjuntos fechados, não vazios de $\mathbb{R}^n$, pode ser definida por

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$$

onde $\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \text{dist}(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \{|a - b|\}$.

Fig.1.1

$$\beta(A, B) = \rho(a, b); \beta(B, A) = \rho(c, d); \alpha(A, B) = \max\{\rho(a, b), \rho(c, d)\}$$

Se A e B são compactos, não vazios, estes números são finitos, e a classe dos subconjuntos fechados, não vazios de $\mathbb{R}^n$, é um espaço métrico com a distância α . Observemos que a desigualdade $\beta(A, B) \leq \varepsilon$ é equivalente ao fato de o conjunto A estar contido numa ε -vizinhança fechada do conjunto B , isto é, $A \subset B^\varepsilon$. De fato, $\beta(A, B) \leq \varepsilon$, se, e somente se, $\sup_{a \in A} \text{dist}(a, B) \leq \varepsilon$, se, e somente se, $\text{dist}(a, B) \leq \varepsilon$, para todo a em A , isto é, qualquer que seja a em A , a em B^ε e, portanto, $A \subset B^\varepsilon$.

1.2 Convexos de $\mathbb{R}^n$

Definição 1.2.1 *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que A é convexo se, e somente se, para quaisquer a e b de A , o segmento de reta de extremidades a e b está inteiramente contido em A , isto é,*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in [0, 1]\} \subset A.$$

O menor conjunto convexo (convexo fechado) que contém o conjunto A é denotado por coA ($\overline{coA}$) e é denominado *envoltória convexa (envoltória convexa fechada) de A* . Observemos que coA ($\overline{coA}$) é a intersecção de todos os conjuntos convexos (convexos fechados) que contêm A .

Definição 1.2.2 *Dados $x_1, \dots, x_k$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ números reais, tais que $\alpha_j \in [0, 1]$, $j = 1, 2, \dots, k$, e $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$, o vetor $\sum_{j=1}^k \alpha_j x_j$ denomina-se uma combinação linear convexa dos vetores $x_1, \dots, x_k$.*

Notemos que valem as seguintes propriedades [F]:

1) A envoltória convexa de um conjunto A (coA) é o conjunto de todas as combinações lineares convexas de elementos de A .

2) Se A é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, então coA é compacto, e se, além disso, A é convexo, então, $\overline{co}(A^\varepsilon) = A^\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

3) Um conjunto convexo A de $\mathbb{R}^n$ é a intersecção de todos os semi-espacos de $\mathbb{R}^n$ que contêm A .

4) Seja A , subconjunto de $\mathbb{R}^n$, um convexo fechado não vazio. Então, um elemento a de $\mathbb{R}^n$ pertence a A se, e somente se, para todo v em $\mathbb{R}^n$,

$$a.v \leq \sup_{y \in A} y.v.$$

A função ψ_A , definida em $\mathbb{R}^n$, a valores em $\mathbb{R}$, dada por $\psi_A(v) = \sup_{y \in A} y.v$, chama-se *suporte* do convexo A .

1.3 Teoremas de Peano e Picard

Seja D um aberto ou fechado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e consideremos uma função contínua f , definida em D , a valores em $\mathbb{R}^n$, e a equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(t, x)$.

Definição 1.3.1 *Uma solução da equação diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ é uma função x definida em I a valores em $\mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo, tal que:*

- i) $(t, x(t)) \in D$, para todo t em I ;
- ii) a função $t \mapsto x(t)$ é continuamente diferenciável em I ;
- iii) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, para todo t pertencente ao intervalo I .

Teorema 1.3.1 (Arzelà-Ascoli)[K-F] *Sejam F um espaço de Banach e E um espaço métrico compacto. Toda sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções contínuas, f_n definida em E , a valores em F , $n = 1, 2, \dots$, que for equicontínua e equilimitada, admite pelo menos uma subsequência uniformemente convergente sobre E para uma função contínua f , definida em E , a valores em F .*

Teorema 1.3.2 (Peano)[H]-Existência de solução local- *Dados $a > 0$ e $b > 0$, seja f contínua em $D = I_a \times x_0^b$, onde $I_a = t_0^a$. Suponhamos que existe $M > 0$, constante, tal que $|f(t, x)| \leq M$, para todo (t, x) em D . Existe então, pelo menos uma solução de $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$, definida no intervalo I_α , onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.*

Definição 1.3.2 *Seja f definida em um subconjunto D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, a valores em $\mathbb{R}^n$, e seja (t_0, x_0) um ponto de D . Dizemos que f é:*

- a) localmente lipschitziana com relação à segunda variável em (t_0, x_0) , se, e sòmente se, existe uma vizinhança V de (t_0, x_0) e uma constante L , dependendo de (t_0, x_0) , tais que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

para todos $(t, x), (t, y)$ em V .

b) localmente lipschitziana com relação à segunda variável em D , se, e somente se, f é localmente lipschitziana com relação à segunda variável em cada ponto de D .

c) globalmente lipschitziana, ou simplesmente lipschitziana em D , com relação à segunda variável, se, e somente se, existe L constante tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

para todos $(t, x), (t, y)$ no conjunto D .

O número $\text{Lip}(f) = \inf\{L > 0 : |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \text{ quaisquer que sejam } (t, x), (t, y) \text{ em } D\}$ denomina-se *constante de Lipschitz* de f em D .

Teorema 1.3.3 (Picard)[H]-Existência e unicidade de solução local- Seja f contínua e lipschitziana com relação à segunda variável em $D = I_a \times x_0^b$, onde $I_a = t_0^a$, com constante de Lipschitz $L > 0$. Se $|f| \leq M$ em D , existe uma e uma única solução de $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$, definida no intervalo I_α , onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$.

1.4 Teoremas de Carathéodory [F]

Definição 1.4.1 Uma função x , definida em I , a valores em $\mathbb{R}^n$, é denominada absolutamente contínua no intervalo compacto $[\alpha, \beta]$, subconjunto de I , se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para toda coleção finita de subintervalos disjuntos $[\alpha_k, \beta_k]$ de $[\alpha, \beta]$, $k = 1, 2, \dots, p$, tal que

$$\sum_{k=1}^p (\beta_k - \alpha_k) < \delta,$$

vale

$$\sum_{k=1}^p |x(\beta_k) - x(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

Uma função absolutamente contínua é uniformemente contínua, logo, contínua, e é de variação limitada, em todo intervalo compacto contido em seu domínio. Toda função

lipschitziana é absolutamente contínua. Uma função absolutamente contínua é derivável em quase todo ponto, a derivada é absolutamente integrável, isto é, somável, e

$$x(t) - x(s) = \int_s^t \frac{dx}{dt}(\tau) d\tau,$$

para todos t, s em I .

Definição 1.4.2 *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, e seja f uma função definida em D a valores em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory em D , se, e somente se,*

- i) a função f é definida e contínua em x para quase todo t ;*
- ii) a função f é mensurável em t para cada x ;*
- iii) $|f(t, x)| \leq m(t)$, para quase todo t e para todo x tal que (t, x) pertence a D , sendo m uma função somável (em cada subintervalo finito se t não é limitado em D).*

Definição 1.4.3 *Uma equação $\dot{x} = f(t, x)$, onde f satisfaz i, ii e iii, é chamada uma equação de Carathéodory.*

Definição 1.4.4 *Uma função x definida num intervalo I é uma solução da equação de Carathéodory $\dot{x} = f(t, x)$ se, e somente se, x é absolutamente contínua em cada subintervalo compacto de I , e $\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$ para quase todo t em I , isto é, $x(t) - x(s) = \int_s^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$, quaisquer que sejam t e s em I .*

Teorema 1.4.1 *(Carathéodory)-Existência de solução local- Dados $a > 0$ e $b > 0$, suponhamos que f satisfaça às condições de Carathéodory em $D = I_a \times x_0^b$. Então, existe $\alpha > 0$ e uma função x , absolutamente contínua, definida em $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, a valores em $\mathbb{R}^n$, que é solução do problema de Cauchy $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$. O número α pode ser escolhido arbitrariamente, tal que $0 < \alpha \leq a$, $\int_{t_0}^{t_0+\alpha} m(s) ds \leq b$ e $\int_{t_0-\alpha}^{t_0} m(s) ds \leq b$.*

Teorema 1.4.2 *(Carathéodory) Se, além das hipóteses do teorema acima, existir uma função somável $L(t)$, tal que, para quaisquer pontos (t, x) e (t, y) no domínio D ,*

$$|(x - y)(f(t, x) - f(t, y))| \leq L(t)|x - y|^2,$$

então, no domínio D , existe uma única solução do problema de Cauchy, definida no intervalo I_α , onde $\alpha > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente, de modo que $0 < \alpha \leq a$, $\int_{t_0}^{t_0+\alpha} m(s)ds \leq b$, $\int_{t_0-\alpha}^{t_0} m(s)ds \leq b$, $\int_{t_0}^{t_0+\alpha} L(s)ds < 1$ e $\int_{t_0-\alpha}^{t_0} L(s)ds < 1$.

1.5 Alguns resultados da Teoria de Funções [N]

No que segue, denotaremos por μ a medida de Lebesgue. Diremos que uma função é *somável num conjunto*, se for integrável nesse conjunto, e se a integral for finita.

Teorema 1.5.1 *Seja f uma função somável, a valores em $\mathbb{R}^m$, definida num subconjunto mensurável D de $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$\frac{1}{\mu(D)} \int_D f(z)dz \in \overline{\text{co}}[f(D)].$$

Definição 1.5.1 *Seja E um conjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, e seja x um ponto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que x é ponto de densidade de E , se, e somente se, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu(E \cap x^\delta)}{\mu(x^\delta)} = 1$.*

Teorema 1.5.2 *Quase todos os pontos de um conjunto mensurável E são pontos de densidade de E .*

→ **Definição 1.5.2** *Seja f definida em $\mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^m$, e x_0 um ponto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f é aproximadamente contínua em x_0 , se, e somente se, existe um subconjunto mensurável E de $\mathbb{R}^n$, contendo x_0 , tal que*

- i) x_0 é ponto de densidade de E ,
- ii) $f|_E$ é contínua em x_0 .

Teorema 1.5.3 *Uma função mensurável f , definida em $\mathbb{R}^n$, assumindo valores em $\mathbb{R}^n$ é aproximadamente contínua em quase todos os pontos de seu domínio.*

1.6 Funções Polivalentes [F, A-C]

Definição 1.6.1 *Sejam A e B conjuntos. Uma relação de domínio A a valores em B , denotada por $R : A \rightarrow B$, é um subconjunto de $A \times B$, tal que, para todo x em A , existe y em B tal que (x, y) pertence a R .*

Uma relação é uma função (unívoca) de A em B se, e só se, para cada x em A , existe um único y em B , tal que (x, y) pertence a R .

Dada uma relação R , definida em A a valores em B , consideremos a aplicação cujos valores são subconjuntos de B ,

$$F : A \longrightarrow \mathcal{P}(B),$$

definida por $F(x) = \{y \in B : (x, y) \in R\}$, para todo $x \in A$. Podemos também considerar F como uma função polivalente (ou multivalente ou multívoca) de A em B .

No que segue, consideraremos aplicações F , definidas em D , aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, a valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tais que, para todo (t, x) em D , $F(t, x)$ é não vazio. O gráfico de uma tal aplicação é o conjunto

$$\text{Graf}(F) = \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (t, x) \in D; y \in F(t, x)\}$$

Se K é um subconjunto de D , $F(K)$ denota o conjunto $\bigcup_{x \in K} F(x)$.

Definição 1.6.2 *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Uma aplicação F , definida em D , a valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, é:*

- a) contínua, com relação à inclusão, no ponto (t_0, x_0) de D , se, e somente se, $\alpha(F(t, x), F(t_0, x_0)) \rightarrow 0$, quando $(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)$, qualquer que seja (t, x) em D .*
- b) semicontínua superiormente (semicontínua inferiormente), com relação à inclusão, no ponto (t_0, x_0) de D , se, e somente se, $\beta(F(t, x), F(t_0, x_0)) \rightarrow 0$, quando $(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)$, (respectivamente $\beta(F(t_0, x_0), F(t, x)) \rightarrow 0$, quando $(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)$).*
- c) F diz-se contínua ou semicontínua superiormente (inferiormente) em D , se, e somente se, é contínua ou semicontínua superiormente (inferiormente) em cada ponto de D .*

Observemos que F , definida em D , a valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, é semicontínua superiormente em (t_0, x_0) pertencente a D , se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t_0, x_0, \varepsilon) > 0$, tal que, para todo (t, x) em $(t_0, x_0)^\delta$, temos que $F(t, x)$ é um subconjunto de $F(t_0, x_0)^\varepsilon$, isto é, $\beta(F(t, x), F(t_0, x_0)) \leq \varepsilon$; F é semicontínua inferiormente em (t_0, x_0) pertencente a D se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t_0, x_0, \varepsilon) > 0$, tal que, para todo (t, x) em $(t_0, x_0)^\delta$, temos que $F(t_0, x_0)$ é um subconjunto de $F(t, x)^\varepsilon$, isto é, $\beta(F(t_0, x_0), F(t, x)) \leq \varepsilon$.

Exemplo 1.6.1 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida por $F(0) = \{(v_1, v_2) : (v_1 + L)^2 + (v_2)^2 \leq G^2\}$, $F(\vec{r}) = \{-G \operatorname{sgn} \vec{r} - L\vec{i}\}$, se $\vec{r} \neq \vec{0}$, conforme Capítulo 3, é semicontínua superiormente.

Mencionemos algumas propriedades das funções polivalentes semicontínuas, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências [F] e [A-C].

Proposição 1.6.1 *Consideremos uma aplicação polivalente F , definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^m$, a valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Suponhamos A um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^m$ e F uma aplicação limitada numa vizinhança de cada ponto p de A . Então, F é semicontínua superiormente em A , se, e somente se, o gráfico de F é fechado em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Convém observar que, dada F , definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, a valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tal que $F(x)$ é não vazio, para todo x em A , o *Axioma da Escolha* permite escolher um elemento $f(x)$ em $F(x)$ e assim constituir uma função unívoca f , definida em A , a valores em $\mathbb{R}^n$. Uma tal função é chamada uma *seleção* da função polivalente F . Supondo ainda que, para todo x , $F(x)$ seja compacto e convexo, podemos escolher uma seleção, denotada por $m(F(x))$, e denominada *seleção mínima*, que é obtida da seguinte maneira: para todo x em A , seja $m(F(x))$ o elemento de $F(x)$ que está mais próximo da origem, isto é,

$$|m(F(x))| = \min\{|y| : y \in F(x)\}.$$

Os seguintes resultados estabelecem a existência de seleções contínuas.

Proposição 1.6.2 *Seja F , definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, a valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tal que, para todo x em A , $F(x)$ é não vazio, compacto e convexo. Se F é contínua, a seleção mínima $x \mapsto m(F(x))$ é contínua.*

Proposição 1.6.3 *Seja F , definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ a valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tal que, para todo x em A , $F(x)$ é não vazio, compacto e convexo. Se F é semicontínua inferiormente, existe uma seleção f , definida em A , a valores em $\mathbb{R}^n$, que é contínua.*

1.7 Inclusões Diferenciais [F, A-C]

Definição 1.7.1 *Dada F , definida em D , subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, a valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, diremos que uma função x , definida num intervalo I , a valores em $\mathbb{R}^n$, é uma solução da inclusão diferencial $\dot{x} \in F(t, x)$, se, e somente se,*

- i) x é absolutamente contínua em todo intervalo compacto contido em I ;*
- ii) Para quase todo t em I , $\frac{dx}{dt}(t) \in F(t, x(t))$.*

Definição 1.7.2 *Dado $\delta > 0$, diremos que y , definida em I a valores em $\mathbb{R}^n$, é uma δ -solução (ou solução aproximada com aproximação $\leq \delta$) da inclusão diferencial $\dot{x} \in F(t, x)$ se, e somente se,*

- i) y é absolutamente contínua em todo subintervalo compacto de I ,*
- ii) $\frac{dx}{dt}(t) \in F_\delta(t, y(t))$ para quase todo t pertencente a I , onde $F_\delta(t, y(t)) = [coF(t^\delta, y^\delta(t))]^\delta$.*

O problema de Cauchy para a inclusão diferencial,

$$\dot{x} \in F(t, x),$$

consiste em, dado (t_0, x_0) em D , achar uma solução definida numa vizinhança de t_0 que satisfaz $x(t_0) = x_0$.

1.8 Existência de solução local do Problema de Cauchy [F, A-C]

Consideremos a inclusão diferencial $\dot{x} \in F(t, x)$, onde F é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, assumindo valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, e $F(t, x)$ é não vazio, compacto e convexo, para todo (t, x) pertencente a D .

Para F contínua, a existência de solução local fica evidente aplicando o Teorema de Carathéodory à equação $\dot{x}(t) = m(F(t, x(t)))$; se F é semicontínua inferiormente, a Proposição 1.6.3 nos garante a existência de uma seleção contínua de F e novamente o Teorema de Carathéodory se aplica. Para F semicontínua superiormente, temos os seguintes resultados cujas demonstrações são análogas às apresentadas no próximo capítulo.

Lema: *Seja δ_k , $k = 1, 2, \dots$, uma sequência de números reais positivos, tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = 0$. Para cada $k = 1, 2, \dots$, consideremos x_k , definida em $[a, b]$, a valores em $\mathbb{R}^n$, uma δ_k -solução da inclusão diferencial $\dot{x} \in F(t, x)$, e suponhamos que a sequência $(x_k)_k$ converge uniformemente para uma função x , definida em $[a, b]$ a valores em $\mathbb{R}^n$. Então, x é absolutamente contínua em $[a, b]$, e x é uma solução da inclusão diferencial $\dot{x} \in F(t, x)$ em $[a, b]$.*

Teorema 1.8.1 *Suponhamos F semicontínua superiormente em D , (t_0, x_0) um ponto de D , e sejam $a > 0, b > 0$, tais que o cilindro $Z = [t_0 - a, t_0 + a] \times x_0^b$ esteja contido em D . Seja $m = \sup_{(t,x) \in Z} |F(t, x)|$ e seja $d = \min\{a, \frac{b}{m}\}$. Então existe solução da inclusão diferencial $\dot{x} \in F(t, x)$, definida em $[t_0 - d, t_0 + d]$.*

Capítulo 2

Equações diferenciais ordinárias com segundo membro descontínuo

Examinaremos uma classe de equações diferenciais ordinárias com descontinuidades no campo vetorial, que estende a classe de equações consideradas por Peano e Carathéodory. Estamos nos referindo a equações do tipo

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

em que D é um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, f definida em D a valores em $\mathbb{R}^n$, é uma aplicação mensurável em D . Exemplos importantes são dados por campos mensuráveis cujo conjunto de descontinuidades tem medida nula, ou por campos vetoriais contínuos por partes.

Vamos considerar o problema de valor inicial para a equação (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Como só consideraremos soluções locais, escolheremos, daqui por diante, D como $t_0^a \times x_0^b$, com a e b positivos, sendo $t_0^a = \{t \in \mathbb{R} : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a\}$ e $x_0^b = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}$.

Suponhamos que existe uma função integrável m , definida em t_0^a assumindo valores em $[0, \infty]$, tal que

$$|f(t, x)| \leq m(t),$$

para quase todo ponto (t, x) no domínio de f .

Observemos que, se $E = \{t \in t_0^a : m(t) < \infty \text{ e a aplicação } f(t, \cdot) \text{ é mensurável}\}$ não for vazio, então, para todo t em E , a função $f(t, \cdot)$ é aproximadamente contínua em quase todo ponto de x_0^b , isto é, existe um subconjunto de medida nula, $N_0(t)$, de x_0^b , tal que $f(t, \cdot)$ é aproximadamente contínua em todo ponto de $x_0^b \setminus N_0(t)$. Daqui em diante, tomaremos $N_0(t)$ como o conjunto maximal com a propriedade acima.

Consideremos a função multívoca F , definida em D , assumindo valores em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$,

$$F(t, x) = \begin{cases} \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}[f(t, x^\delta \setminus N_0(t))], & \text{se } (t, x) \text{ pertence a } E \times x_0^b \\ \{0\}, & \text{se } (t, x) \text{ pertence a } t_0^a \setminus E \times x_0^b \end{cases}$$

que é denominado o conjunto das velocidades possíveis no ponto (t, x) . (2)

Convém observar que, se $(\delta_k)_k$ é uma sequência de números positivos, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$, então $F(t, x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\text{co}}[f(t, x^{\delta_k} \setminus N_0(t))]$.

Observemos também que, se t pertence a E , e se $f(t, \cdot)$ é aproximadamente contínua em x , então $f(t, x)$ pertence a $F(t, x)$, pois x pertence a $x^\delta \setminus N_0(t)$ para todo $\delta > 0$ e, portanto, $f(t, x)$ está em $f(t, x^\delta \setminus N_0(t))$ para todo $\delta > 0$, donde $f(t, x)$ pertence a $\bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}[f(t, x^\delta \setminus N_0(t))]$.

Notemos ainda que, se t pertence a E e $f(t, \cdot)$ é contínua em x , então $F(t, x) = \{f(t, x)\}$, pois, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(t, x^\delta)$ é um subconjunto de $(f(t, x))^\varepsilon$, e, conseqüentemente, $f(t, x^\delta \setminus N_0(t))$ é um subconjunto de $(f(t, x))^\varepsilon$, para todo ε , e, portanto, $\overline{\text{co}}[f(t, x^\delta \setminus N_0(t))]$ é subconjunto de $(f(t, x))^\varepsilon$, uma vez que $(f(t, x))^\varepsilon$ é convexo e fechado. Então $F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}[f(t, x^\delta \setminus N_0(t))]$ está contido em $(f(t, x))^\varepsilon$, e, como ε é arbitrário, $F(t, x)$ é subconjunto de $\bigcap_{\varepsilon > 0} (f(t, x))^\varepsilon = \{f(t, x)\}$. A outra inclusão é imediata.

Proposição 2.0.1 *Seja f , definida em D , a valores em $\mathbb{R}^n$, mensurável em D , satisfazendo $|f(t, x)| \leq m(t)$ para quase todo $(t, x) \in D$. Então, para todo t em E , $F(t, \cdot)$, definida em (2), é semicontínua superiormente.*

Demonstração: Pela Proposição 1.6.1, basta provar que o gráfico de $F(t, \cdot)$ é fechado. Seja t em E e $\bar{x}$ em x_0^b , e consideremos uma sequência $(x_n)_n$, $n = 1, 2, \dots$, de pontos de x_0^b , convergente para $\bar{x}$. Consideremos uma sequência $(y_n)_n$, $n = 1, 2, \dots$, convergente para $\bar{y}$, onde, para cada $n = 1, 2, \dots$, y_n pertence a $F(t, x_n)$; provemos que $\bar{y}$ pertence a $F(t, \bar{x})$. Seja $N_0(t)$, como antes, o conjunto dos pontos de x_0^b nos quais $f(t, \cdot)$ não é aproximadamente contínua.

Seja $\varepsilon_n = |x_n - \bar{x}|$, para todo $n = 1, 2, \dots$, e observemos que, para todos m e n , $x_m^{\varepsilon_n}$ é um subconjunto de $\bar{x}^{\varepsilon_m + \varepsilon_n}$. Então, $x_m^{\varepsilon_n} \setminus N_0(t)$ está contido em $\bar{x}^{\varepsilon_m + \varepsilon_n} \setminus N_0(t)$ e, portanto, $\overline{co}f(t, x_m^{\varepsilon_n} \setminus N_0(t))$ é um subconjunto de $\overline{co}f(t, \bar{x}^{\varepsilon_m + \varepsilon_n} \setminus N_0(t))$.

Logo, y_m pertence a $F(t, x_m) = \bigcap_n \overline{co} f(t, x_m^{\varepsilon_n} \setminus N_0(t))$, que está contido em $\bigcap_n \overline{co}f(t, \bar{x}^{\varepsilon_m + \varepsilon_n} \setminus N_0(t))$, e, portanto, passando ao limite, quando $m \rightarrow \infty$, temos que $\bar{y} = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$ pertence a $\bigcap_m \bigcap_n \overline{co}f(t, \bar{x}^{\varepsilon_m + \varepsilon_n} \setminus N_0(t)) = F(t, \bar{x})$. $\square$

Os campos vetoriais descontínuos mais importantes são os campos seccionalmente contínuos, que são de classe C^1 por partes. Na definição abaixo, consideraremos campos vetoriais autônomos, isto é, independentes de t .

Definição 2.0.1 *Seja G um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$, e seja f definida em G , a valores em $\mathbb{R}^m$.*

a) *No caso de G ser limitado, dizemos que f é contínua por partes em G , se, e somente se, existem abertos conexos $G_1, G_2, \dots, G_k$ (em número finito), tais que*

$$i) \ G = \bigcup_{i=1}^k G_i;$$

ii) $\overline{G_i} \cap \overline{G_j}$ está contido em $\partial G_i \cap \partial G_j$, para todos $i, j = 1, 2, \dots, k$.

iii) $f|_{G_i}$ é contínua e admite extensão contínua a $\overline{G_i}$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

b) *Se G for ilimitado, permitimos na definição a) a existência de um número infinito de*

G_i 's, mas exigimos que cada parte limitada de G intercepte apenas um número finito de subconjuntos G_i .

c) Dizemos ainda que f é de classe C^1 por partes em G , se f é contínua por partes em G , $f|_{G_i}$ é de classe C^1 e se a derivada, $Df|_{G_i}$, definida em G_i , assumindo valores em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, admite extensão contínua a $\overline{G_i}$.

Exemplo 2.0.1: Consideremos uma hipersuperfície $\mathcal{D}$ em $\mathbb{R}^n$, definida pela equação $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, onde g é uma aplicação definida em $\mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}$, de classe C^k $k \geq 2$, 0 é um valor regular, e sejam $G^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ e $G^- = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\}$. Sejam dados f^+ e f^- , campos de classe C^1 , definidos em $\mathbb{R}^n$, assumindo valores em $\mathbb{R}^n$, e consideremos a aplicação f , também definida em $\mathbb{R}^n$, a valores em $\mathbb{R}^n$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} f^+(x) & \text{se } x \in G^+ \\ f^-(x) & \text{se } x \in G^- \end{cases}$$

Neste caso, o conjunto das descontinuidades do campo vetorial f é a hipersuperfície $\mathcal{D}$, e a função multívoca F , de domínio $\mathbb{R}^n$, assumindo valores em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, definida em (2), é dada por

$$F(x) = \begin{cases} \{f^+(x)\} & \text{se } x \in G^+ \\ \{f^-(x)\} & \text{se } x \in G^- \\ \{\lambda f^+(x) + (1 - \lambda)f^-(x), \lambda \in [0, 1]\} & \text{se } x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

isto é, se x pertence a $\mathcal{D}$, $F(x)$ é o segmento de reta que une as extremidades dos vetores $f^+(x)$ e $f^-(x)$.

Convém observar que, no caso geral em que f é contínua por partes, $F(x)$ é o poliedro convexo que contém todos os pontos-limite $f(y)$, quando y tende a x .

⇒ **Definição 2.0.2** Uma solução de (1) é definida como sendo uma solução da inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad (3)$$

onde F é dada por (2).

2.1 Existência de solução do Problema de Cauchy

O Teorema a seguir estende os Teoremas de Peano e Carathéodory (Teorema 1.3.2 e Teorema 1.4.1 do Capítulo 1).

Teorema 2.1.1 (Filippov-Carathéodory)[F] *Seja f , definida em $D = t_0^a \times x_0^b$ a valores em $\mathbb{R}^n$, e suponhamos que f é mensurável, e que $|f(t, x)| \leq m(t)$ para quase todo (t, x) em D , sendo m integrável em t_0^a . Dados t_0 em $\mathbb{R}$, x_0 em D , existe pelo menos uma solução local de*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

passando pelo ponto (t_0, x_0) , definida no intervalo $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente, satisfazendo $\alpha < \min\{a, \frac{b}{M}\}$, sendo $M = \sup\{|f(t, x)| : t \in E, x \in x_0^b\}$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos que $t_0 = 0$. Para cada $k = 1, 2, \dots$, tal que $\frac{1}{k} < b$, consideremos a função $f_k(t, \cdot)$, definida em $x_0 + (b - \frac{1}{k})B$, a valores em $\mathbb{R}^n$, dada por

$$f_k(t, x) = \frac{1}{\text{vol}B} \int_B f(t, x + \frac{1}{k}y) dy,$$

para todo x em $x_0 + (b - \frac{1}{k})B$.

É fácil ver que $|f_k(t, x)| \leq M$, para todo x em $x_0 + (b - \frac{1}{k})B$, e que $f_k(t, \cdot)$ é contínua em seu domínio. Pelo Teorema de Carathéodory, a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f_k(t, x(t))$$

admite solução absolutamente contínua x_k , definida em $[-\frac{b-\frac{1}{k}}{M}, \frac{b-\frac{1}{k}}{M}]$, a valores em $x_0^{b-\frac{1}{k}}$, $k = 1, 2, \dots$

Consideremos a sequência de funções $(x_k)_k$, definida para k suficientemente grande, de modo que $\frac{b-\frac{1}{k}}{M} > \alpha$, a fim de que todas as funções estejam definidas no mesmo intervalo $[-\alpha, \alpha]$, e obviamente, $\alpha < a$.

É fácil verificar que esta sequência é equicontínua e equilimitada. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência uniformemente convergente para uma função contínua x^* , definida em $[-\alpha, \alpha]$, assumindo valores em x_0^b . Denotaremos a subsequência também por $(x_k)_k$.

Vamos provar que x^* é absolutamente contínua em $[-\alpha, \alpha]$. Dado $\varepsilon > 0$ e uma sequência finita de pontos $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 < \dots \leq s_p < t_p$ em $[-\alpha, \alpha]$, temos, para todo k suficientemente grande, $\sum_{i=1}^p |x_k(t_i) - x_k(s_i)| = \sum_{i=1}^p \left| \int_{s_i}^{t_i} \dot{x}_k(\tau) d\tau \right| \leq \sum_{i=1}^p M |t_i - s_i|$ e, portanto, independentemente de k , $\sum_{i=1}^p |x_k(t_i) - x_k(s_i)| < \varepsilon$, se $\sum_{i=1}^p |t_i - s_i| < \frac{\varepsilon}{M}$. Passando ao limite, quando $k \rightarrow \infty$, vemos que $\sum_{i=1}^p |x^*(t_i) - x^*(s_i)| \leq \varepsilon$, se $\sum_{i=1}^p |t_i - s_i| < \frac{\varepsilon}{M}$, o que mostra que x^* é absolutamente contínua em $[-\alpha, \alpha]$.

Vamos provar agora que x^* é solução da inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}} f(t, x(t)^\delta \setminus N_0(t)) = F(t, x(t)),$$

quase sempre em $[-\alpha, \alpha]$.

Notemos inicialmente que, como $N_0(t)$ tem medida nula, e como

$$f_k(t, x) = \frac{1}{\mu(x + \frac{1}{k}B)} \int_{x + \frac{1}{k}B \setminus N_0(t)} f(t, y) dy,$$

podemos escrever, usando o Teorema 1.5.1, para quase todo $t \in [-\alpha, \alpha]$,

$$\dot{x}_k(t) = f_k(t, x_k(t)) \in \overline{\text{co}} \left\{ f(t, y) : y \in x_k(t) + \frac{1}{k}B, y \notin N_0(t) \right\},$$

para todo k suficientemente grande.

Como $f(t, \cdot)$ é aproximadamente contínua em $x_k(t) + \frac{1}{k}B \setminus N_0(t)$, para todo t em E , necessariamente $f(t, y)$ pertence a $F(t, y)$, para todo y em $x_k(t) + \frac{1}{k}B \setminus N_0(t)$, e, conseqüentemente, $\dot{x}_k(t)$ pertence a $\overline{\text{co}} F(t, x_k(t) + \frac{1}{k}B \setminus N_0(t))$, para quase todo t em $[-\alpha, \alpha]$.

Usando a semicontinuidade superior de $F(t, \cdot)$, dado $\varepsilon > 0$, existe k_0 , tal que, para $k \geq k_0$, $\dot{x}_k(t) \in [F(t, x^*(t))]^\varepsilon$ para quase todo $t \in [-\alpha, \alpha]$.

Logo, para todo v em $\mathbb{R}^n$, usando a propriedade 4 da seção 1.2, Capítulo 1, temos $\dot{x}_k(t).v \leq \sup_{y \in F(t, x^*(t))^\varepsilon} y.v$ e, portanto, $\sup_{j \geq k} \dot{x}_j(t).v \leq \sup_{y \in F(x^*(t))^\varepsilon} y.v$ e, finalmente, para quase todo t em $[-\alpha, \alpha]$, temos

$$\varphi_v(t) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} \dot{x}_j(t).v \leq \sup_{y \in F(x^*(t))^\varepsilon} y.v. \quad (4)$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\varphi_v(t) \leq \sup_{y \in F(x^*(t))} y.v$, para todo v em $\mathbb{R}^n$.

Por outro lado, para todos t e s , no intervalo $[-\alpha, \alpha]$, $t > s$, podemos escrever

$$(x_k(t) - x_k(s)).v = \int_s^t v.\dot{x}_k(\tau) d\tau \leq \int_s^t \sup_{j \geq k} v.\dot{x}_j(\tau) d\tau,$$

e, portanto, passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, temos:

$$(x^*(t) - x^*(s)).v \leq \int_s^t \varphi_v(\tau) d\tau$$

ou ainda, $\int_s^t v.\dot{x}^*(\tau) d\tau \leq \int_s^t \varphi_v(\tau) d\tau$, e, como t e s são arbitrários, concluímos que

$$\dot{x}^*(t).v \leq \varphi_v(t), \quad (5)$$

para quase todo t em $[-\alpha, \alpha]$.

Reunindo (4) e (5), para todo v em $\mathbb{R}^n$ e para quase todo t no intervalo $[-\alpha, \alpha]$,

$$v.\dot{x}^*(t) \leq \sup_{y \in F(x^*(t))} y.v$$

e, portanto, $\dot{x}^*(t) \in F(x^*(t))$, para quase todo t em $[-\alpha, \alpha]$. $\square$

2.2 Unicidade de solução do Problema de Cauchy

Apresentamos aqui, condições suficientes, sob as quais uma solução, que, num determinado instante, esteja na superfície de descontinuidade do campo vetorial f , dado no segundo membro da equação diferencial (1), é univocamente determinada no futuro, isto é, conforme t cresce.

Dizemos que *existe unicidade à direita no domínio D , para a equação (1)*, se, para cada ponto $(t_0, x_0) \in D$, quaisquer duas soluções x e y , satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = x_0$, coincidem em todo intervalo $[t_0, t_1]$, onde ambas estão definidas.

A unicidade à esquerda pode ser definida de modo análogo.

O teorema a seguir estende os Teoremas de Picard e Carathéodory (Teorema 1.3.3 e Teorema 1.4.2 do Capítulo 1).

Teorema 2.2.1 *Seja f mensurável, definida em $D = t_0^a \times x_0^b$, descontínua num conjunto $\mathcal{D}$ de medida nula contido em D . Suponhamos que existe uma função somável $l(t)$ tal que, para quase todos os pontos (t, x) e (t, y) em D , temos $|f(t, x)| \leq l(t)$, $|f(t, y)| \leq l(t)$ e $(x - y)(f(t, x) - f(t, y)) \leq l(t)|x - y|^2$. Então, o problema de Cauchy $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$, admite uma única solução em D , para $t > t_0$.*

Demonstração: Suponhamos que x e y , definidas em $[t_0, t_0 + \alpha]$, a valores em $\mathbb{R}^n$, sejam soluções de (1), satisfazendo à condição inicial $x(t_0) = x_0, y(t_0) = x_0$. Para quase todo t no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$, temos

$$\dot{x}(t) - \dot{y}(t) \in F(t, x(t)) - F(t, y(t)),$$

que, multiplicada escalarmente por $(x(t) - y(t))$, resulta $(x(t) - y(t))(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) \in (x(t) - y(t))(F(t, x(t)) - F(t, y(t)))$, isto é, $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x(t) - y(t))^2 \in (x(t) - y(t))(F(t, x(t)) - F(t, y(t)))$. Notemos que $(x(t) - y(t))(F(t, x(t)) - F(t, y(t))) \leq l(t)|x(t) - y(t)|^2$, donde $\frac{d}{dt} |x(t) - y(t)|^2 \leq 2l(t)|x(t) - y(t)|^2$, para quase todo t no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [|x(t) - y(t)|^2 e^{-2 \int_{t_0}^t l(s) ds}] &= \frac{d}{dt} |x(t) - y(t)|^2 e^{-2 \int_{t_0}^t l(s) ds} - |x(t) - y(t)|^2 2l(t) e^{-2 \int_{t_0}^t l(s) ds} = \\ &= e^{-2 \int_{t_0}^t l(s) ds} \left[\frac{d}{dt} |x(t) - y(t)|^2 - 2l(t)|x(t) - y(t)|^2 \right] \leq 0, \text{ e, portanto,} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} [|x(t) - y(t)|^2 e^{-2 \int_{t_0}^t l(s) ds}] \leq 0,$$

donde concluímos que $g(t) = |x(t) - y(t)|^2 e^{-2 \int_{t_0}^t l(s) ds}$ é uma função decrescente de t . Como $g(t_0) = 0$, temos

$$|x(t) - y(t)|^2 e^{-2 \int_{t_0}^t l(s) ds} \leq 0,$$

donde $|x(t) - y(t)|^2 \leq 0$ e, portanto, $x(t) = y(t)$, para todo t no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$. $\square$

Em [F] há referências para o caso geral.

Para o importante Exemplo 2.0.1, temos um teorema de unicidade mais específico. Observemos inicialmente que em G^+ e em G^- vale a unicidade garantida pelo Teorema de Picard do Capítulo 1, pois, neste caso, o campo vetorial é C^1 em G^+ e em G^- . Para soluções começando em $\mathcal{D}$, no instante t_0 , temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.2 *Seja n o vetor normal a $\mathcal{D}$, apontando de G^- para G^+ . Então:*

i) *Na região $\mathcal{D}_1 = \{x_0 \in \mathcal{D} : f^-(x_0) \cdot n > 0 \text{ e } f^+(x_0) \cdot n > 0\}$ (respectivamente, $\mathcal{D}_2 = \{x_0 \in \mathcal{D} : f^-(x_0) \cdot n < 0 \text{ e } f^+(x_0) \cdot n < 0\}$), existe $\alpha > 0$, tal que vale a unicidade de solução em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, satisfazendo a $x(t_0) = x_0$, com $x_0 \in \mathcal{D}_1$ (respectivamente $x_0 \in \mathcal{D}_2$). Neste caso, a solução $x(t)$, quando t cresce de $t_0 - \alpha$ a $t_0 + \alpha$, atravessa $\mathcal{D}$, indo de G^- para G^+ (respectivamente de G^+ para G^-). (Fig.2.2.1 e Fig.2.2.2)*

Fig.2.2.1

Fig.2.2.2

ii) *Na região $\mathcal{D}_3 = \{x_0 \in \mathcal{D} : f^-(x_0) \cdot n > 0 \text{ e } f^+(x_0) \cdot n < 0\}$ (respectivamente, $\mathcal{D}_4 = \{x_0 \in \mathcal{D} : f^-(x_0) \cdot n < 0 \text{ e } f^+(x_0) \cdot n > 0\}$), existe $\alpha > 0$, tal que vale a unicidade de solução em $[t_0, t_0 + \alpha]$ (respectivamente $[t_0 - \alpha, t_0]$), satisfazendo a $x(t_0) = x_0$ com $x_0 \in \mathcal{D}_3$ (respectivamente $x_0 \in \mathcal{D}_4$). Neste caso, a solução $x(t)$, quando $t > t_0$ cresce (respectivamente, quando $t < t_0$ decresce), permanece em $\mathcal{D}$, e não vale a unicidade em $[t_0 - \alpha, t_0]$ (respectivamente em $[t_0, t_0 + \alpha]$). (Fig.2.2.3 e Fig.2.2.4)*

Fig.2.2.3

Fig.2.2.4

Demonstração:

i) Observemos que, para $t > t_0$, t próximo de t_0 , sendo $x(t_0) = x_0$, x_0 pertencente a $\mathcal{D}_1$, $x(t) - x(t_0) \in \int_{t_0}^t F(x(s))ds$, e, conseqüentemente, $[x(t) - x(t_0)].n > 0$.

Analogamente, para $t < t_0$, t próximo de t_0 , concluímos que $[x(t) - x(t_0)].n < 0$, de onde segue a afirmação.

Com um raciocínio semelhante, verificamos o caso em que $x_0 \in \mathcal{D}_2$.

ii) Notemos que, novamente, para t próximo de t_0 , $t > t_0$, se $x(t)$ estivesse em G^+ , então $[x(t) - x_0].n$ seria positivo, enquanto que $(t - t_0)f^+(x(t)).n$ seria negativo, o que é absurdo. Logo $x(t)$ não pertence a G^+ . Com um raciocínio análogo, concluímos que $x(t)$ não pertence a G^- . Conseqüentemente, para $t > t_0$, t próximo de t_0 , devemos ter $x(t)$ em $\mathcal{D}$, e, portanto, $\dot{x}(t) = \lambda f^+(x(t)) + (1 - \lambda)f^-(x(t))$, sendo $0 \leq \lambda \leq 1$. Multiplicando escalarmente por n , temos $\lambda f^+(x(t)).n + (1 - \lambda)f^-(x(t)).n = 0$, ou seja, $\lambda(t) = \frac{f^-(x(t)).n}{[f^-(x(t)) - f^+(x(t))].n}$, que é positivo, menor do que 1. Assim, a solução satisfaz: $\dot{x}(t) = \frac{(f^-(x(t)).n)f^+(x(t)) - (f^+(x(t)).n)f^-(x(t))}{(f^-(x(t)) - f^+(x(t))).n}$, que, pelo Teorema de Picard admite solução única. Se x_0 pertence a $\mathcal{D}_4$, de modo análogo, concluímos a unicidade de solução, quando $t < t_0$ decresce. $\square$

2.3 Estabilidade

➔ **Definição 2.3.1** Um equilíbrio de (1) é uma solução constante de (1), ou seja, $0 \in F(t, c)$, onde c é uma constante real e t pertence ao intervalo $(-\infty, \infty)$.

Definição 2.3.2 Uma solução $x = \varphi(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$), da equação diferencial (1), é dita estável, se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $\bar{x}_0$, tal que $|\bar{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, toda solução $\bar{x}(t)$, satisfazendo $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, está definida no intervalo $[t_0, +\infty)$, e satisfaz a desigualdade $|\bar{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, para $t_0 \leq t < \infty$. Se, além disso, existir $\eta > 0$, tal que $|\bar{x}_0 - \varphi(t_0)| < \eta$ implica $\bar{x}(t) - \varphi(t) \rightarrow 0$, conforme $t \rightarrow \infty$, para toda solução satisfazendo $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, a solução $\varphi(t)$ é dita assintoticamente estável. Dizemos que uma solução é instável, quando não é estável.

Exemplo 2.3.1 $\dot{x} = -|x|^\alpha \text{sgn} x$ ($-\infty < x < \infty$, α constante não negativa). O zero é um equilíbrio assintoticamente estável. Para $0 \leq \alpha < 1$, nenhuma outra solução atinge o equilíbrio $x = 0$ em tempo finito, e, para $\alpha > 1$, em tempo infinito.

Exemplo 2.3.2 Consideremos a inclusão diferencial $\dot{x} \in F(x)$, onde $F(x)$ é o segmento de extremidades kx, mx , com $k \leq m$. O zero é um equilíbrio. Para outras soluções, temos $k \leq \frac{\dot{x}}{x} \leq m$, $e^{kt} \leq \frac{x(t)}{x(0)} \leq e^{mt}$, para $0 \leq t < \infty$.

Para $k \leq m < 0$, o equilíbrio $x(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável; para $k \leq m = 0$, é estável e, para $0 < k \leq m$, é instável.

Sem perda de generalidade, um equilíbrio c pode sempre ser tomado como igual a zero.

Definição 2.3.3 Para a função $V(x)$ de classe C^1 , a derivada superior relativa à inclusão diferencial $\dot{x} \in F(x)$ é definida por $\dot{V}^*(x) = \sup_{y \in F(x)} \nabla V(x) \cdot y$. onde $\nabla V(x)$ é o gradiente de V no ponto x .

Observemos que $\dot{V}(x(t)) \leq \dot{V}^*(x(t))$, para todo t , e que, se $x(t)$ é uma solução de (1),

$$\dot{V}(x(t)) \equiv \frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

Teorema 2.3.1 Suponhamos que, em um domínio fechado $D = t_0^a \times x_0^b$, a função $f(t, x)$ satisfaz às seguintes condições: f é mensurável em (t, x) e existe m , definida em D , a valores em $\mathbb{R}$, somável, tal que $|f(t, x)| \leq m(t)$, para quase todo t pertencente a t_0^a . Suponhamos ainda que $0 \in F(t, 0)$, isto é, 0 é um equilíbrio, e que existam funções V de classe C^1 e V_0 contínua, definidas para todo x em x_0^b , tais que $V(0) = 0$, $V(x) \geq V_0(x) > 0$, para $0 < |x| < b$. Então:

- i) se $\dot{V}^* \leq 0$ em D , o equilíbrio $x(t) \equiv 0$ da equação (1) é estável;
- ii) se, além disso, existem funções contínuas V_1 e W , definidas para $|x| \leq b$ e tais que $0 < V_0(x) \leq V(x) \leq V_1(x)$, $\dot{V}^*(x) \leq -W(x) < 0$, para todo x , tal que $0 < |x| < b$, $V_1(0) = 0$, então a solução $x(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável.

No caso i, dizemos que V é uma função de Liapunov para a estabilidade, e, no caso ii, para a estabilidade assintótica.

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$.

i) Tomemos $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < b$, e procuremos $\delta > 0$, tal que, se $|x_0| \leq \delta$, então $|x(t)| \leq \varepsilon$, para todo t no intervalo $[0, \infty)$. Como $\dot{V}(x(t)) \leq \dot{V}^*(x(t)) \leq 0$, segue que $V(x(t))$ é decrescente para $t > 0$, e, portanto,

$$V(x(t)) \leq V(x_0) \quad (6).$$

Consideremos a função $m(\varepsilon)$, definida como o mínimo de $V_0(x)$ na região $\varepsilon \leq |x| \leq b$. Da hipótese sobre V_0 , concluímos que $m(\varepsilon) > 0$ e que $m(\varepsilon)$ decresce quando ε decresce. Notemos que, se $V_0(x) < m(\varepsilon)$, para $|x| \leq b$, então $|x| \leq \varepsilon$.

Da continuidade de V e da hipótese de que $V(0) = 0$, podemos encontrar $\delta > 0$, tal que $V(x_0) \leq m(\varepsilon)$, para todo x_0 , tal que $|x_0| \leq \delta$.

Dado x_0 , $|x_0| \leq \delta$, seja $x(\cdot)$ uma solução de (1), tal que $x(0) = x_0$ e seja $t_1 = \sup\{t > 0 : |x(s)| \leq b, \text{ para todo } s \in [0, t]\}$. Da desigualdade (6) e da hipótese $V(x) \geq V_0(x)$ para $|x| \leq b$, podemos concluir que, para $t \in [0, t_1)$, $V_0(x(t)) < m(\varepsilon)$ e, portanto, $|x(t)| < \varepsilon$. Se, por absurdo, t_1 é finito, então existe o limite $\lim_{t \rightarrow t_1^-} x(t) = x_1$ com $|x_1| \leq b$, e podemos prolongar propriamente a solução além de t_1 , permanecendo ainda na bola de raio b , o que contraria a definição de t_1 . Logo, $t_1 = +\infty$, e o equilíbrio 0 é estável.

ii) Vamos mostrar que existe $\eta > 0$, tal que, se $|x_0| \leq \eta$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, onde $x(t)$ é uma solução de (1), tal que $x(0) = x_0$.

Escolhemos $\eta > 0$, de tal modo que as soluções começando na bola de raio η estão definidas em $[0, +\infty)$ e satisfazem $|x(t)| \leq b$, $t \in [0, \infty)$.

Como $\dot{V}(x(t)) \leq \dot{V}^*(x(t)) \leq -W(x(t)) < 0$, teremos que, se $t > 0$, $V(x(t)) \leq V(x_0) - \int_0^t W(x(s))ds$ e, portanto,

$$V_0(x(t)) \leq V(x(t)) \leq V_1(x_0).$$

Como a função $V(x(t))$ é decrescente, quando t cresce de 0 a $+\infty$, e é limitada inferiormente por 0, então existe o limite $L = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$. Vamos mostrar que $L = 0$.

Dado que V_1 é contínua e $V_1(0) = 0$, se fosse $L > 0$, existiria $\eta > 0$, tal que $|x_0| \leq \eta$ implicaria $V_1(x_0) < \frac{L}{2}$, e a desigualdade acima implicaria $L \leq V(x(t)) < \frac{L}{2}$, uma contradição.

Logo $V(x(t)) \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $x(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$, e assim 0 é assintoticamente estável. $\square$

Exemplo 2.3.3 Sejam $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ funções escalares contínuas, definidas em $\mathbb{R}^n$, e seja A a matriz $(a_{ij})_{i,j=1}^n$. Consideremos o sistema

$$\dot{x}_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \operatorname{sgn} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Então, $0 \in \mathbb{R}^n$ é um equilíbrio assintoticamente estável de (7), e $V(x) = |x_1| + \dots + |x_n|$ é uma função de Liapunov para a estabilidade assintótica, se a forma quadrática em $\mathbb{R}^n$, dada por

$$W(p) = p^T \cdot A(x) \cdot p,$$

for definida positiva.

De fato, existe $a > 0$, tal que $W(p) \geq a|p|^2$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, e como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}_1 \operatorname{sgn} x_1 + \dots + \dot{x}_n \operatorname{sgn} x_n = \\ &= -(\operatorname{sgn} x_1 \dots \operatorname{sgn} x_n) A(x) \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} x_1 \\ \vdots \\ \operatorname{sgn} x_n \end{pmatrix} = \\ &= -W(\operatorname{sgn} x_1, \dots, \operatorname{sgn} x_n) \leq -an^2 < 0, \end{aligned}$$

e o resultado segue do Teorema anterior.

Exemplo 2.3.4 A origem $0 \in \mathbb{R}^3$ é um equilíbrio assintoticamente estável do sistema:

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = 2 \operatorname{sgn} x - 6 \operatorname{sgn} y - 2 \operatorname{sgn} z \\ \dot{y} = 6 \operatorname{sgn} x - 4 \operatorname{sgn} z \\ \dot{z} = 12 \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y - 9 \operatorname{sgn} z \end{cases}$$

De fato, consideremos a função de Liapunov

$$V(x, y, z) = |x| + 2|y| + 10|z - 2y|.$$

Temos $\dot{V}(x, y, z) = \dot{x} \operatorname{sgn} x + 2\dot{y} \operatorname{sgn} y + 10(\dot{z} - 2\dot{y}) \operatorname{sgn}(z - 2y)$, ou ainda,

$$\dot{V}(x, y, z) = 2 + 6 \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y - 2 \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} z - 8 \operatorname{sgn} y \operatorname{sgn} z + 10(\operatorname{sgn} y - \operatorname{sgn} z) \operatorname{sgn}(z - 2y).$$

Analisando $\dot{V}$ nos diferentes octantes, obtemos: para $x > 0, y > 0, z > 0, \dot{V} = -2$;
para $x > 0, y > 0, z < 0, \dot{V} = -42$; para $x > 0, y < 0, z > 0, \dot{V} = -58$; para $x > 0, y < 0, z < 0, \dot{V} = -10$; para $x < 0, y > 0, z > 0, \dot{V} = -10$; para $x < 0, y > 0, z < 0, \dot{V} = -58$;
para $x < 0, y < 0, z > 0, \dot{V} = -42$; para $x < 0, y < 0, z < 0, \dot{V} = -2$, e, portanto, o Teorema anterior se aplica.

Capítulo 3

Um problema de perseguição: o galgo e a lebre

Suponhamos um galgo caçando uma lebre. Esta corre em linha reta (ao longo do eixo x), com velocidade constante L . O galgo corre com velocidade de módulo constante G , e, de maneira tal que o vetor velocidade aponta sempre em direção à lebre.

Sejam $(x_l(t), y_l(t))$ e $(x_g(t), y_g(t))$ as coordenadas que dão, em cada instante t , as posições da lebre e do galgo, respectivamente.

Temos pois, que a velocidade da lebre é dada por $\dot{x}_l = L$ e $\dot{y}_l = y_l = 0$. No caso do galgo, o vetor velocidade é $(\dot{x}_g, \dot{y}_g)$ e, por hipótese,

$$\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 = G^2. \quad (1)$$

Por hipótese, temos ainda que o vetor $(\dot{x}_g, \dot{y}_g)$ aponta para a lebre, isto é, conforme a Figura 3.2, temos

$$\frac{x_l - x_g}{\dot{x}_g} = \frac{y_g}{-\dot{y}_g} = \frac{\sqrt{(x_l - x_g)^2 + y_g^2}}{G},$$

donde,

$$\begin{cases} \dot{x}_g = \frac{G(x_l - x_g)}{\sqrt{(x_l - x_g)^2 + y_g^2}} \\ \dot{y}_g = \frac{-Gy_g}{\sqrt{(x_l - x_g)^2 + y_g^2}} \end{cases}$$

Fig.3.1

Fig.3.2

Colocando $x = x_g - x_l$ e $y = y_g$, como novas coordenadas, e derivando, obtemos

$$\dot{x} = \dot{x}_g - L \text{ e } \dot{y} = \dot{y}_g.$$

Assim, o sistema que descreve o movimento é:

$$S \begin{cases} \dot{x} = \frac{-Gx}{\sqrt{x^2 + y^2}} - L \\ \dot{y} = \frac{-Gy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

que está bem definido, exceto na origem.

Em notação vetorial, colocando $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, temos que, se $\vec{r} \neq \vec{0}$, $\vec{r} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \frac{-xG}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} - L\vec{i} - \frac{yG}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j}$,

donde,

$$\vec{r} = \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|} G - L\vec{i},$$

ou ainda,

$$\vec{r} = f(\vec{r}), \text{ onde } f(\vec{r}) = -G \operatorname{sgn} \vec{r} - L\vec{i}, \quad (2)$$

que é a equação vetorial que descreve o movimento.

Esta equação é entendida como a inclusão diferencial

$$\vec{r} \in F(\vec{r})$$

onde

$$F(\vec{r}) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{f(\vec{r}^\delta - \{\vec{0}\})}.$$

Proposição 3.0.1 *Com as notações acima,*

$$F(\vec{r}) = \{f(\vec{r})\}, \text{ se } \vec{r} \neq \vec{0}$$

$F(\vec{0}) = \{v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} : (v_1 + L)^2 + v_2^2 \leq G^2\}$, ou seja, $F(\vec{0})$ é o disco fechado de centro $(-L, 0)$ e raio G .

Demonstração: Já sabemos que f é contínua nos pontos onde $\vec{r} \neq \vec{0}$; logo $F(\vec{r}) = \{f(\vec{r})\}$, se $\vec{r} \neq \vec{0}$.

Vamos agora descrever $F(\vec{0})$. Temos:

$$f(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\vec{i} + m\vec{j}}{\sqrt{1+m^2}}G \operatorname{sgn} x - L\vec{i}, & \text{se } y = mx, x \neq 0, m \in (-\infty, \infty) \\ -G\vec{j} \operatorname{sgn} y - L\vec{i}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$$

Portanto, para todo $\delta > 0$ e para todo $m \in (-\infty, \infty)$, os vetores

$$\begin{aligned} f_m^+ &= -\frac{\vec{i} + m\vec{j}}{\sqrt{1+m^2}}G - L\vec{i}; & f_m^- &= +\frac{\vec{i} + m\vec{j}}{\sqrt{1+m^2}}G - L\vec{i} \\ f_\infty^+ &= -G\vec{j} - L\vec{i}; & f_\infty^- &= +G\vec{j} - L\vec{i} \end{aligned}$$

pertencem a $f(\vec{0}^\delta - \{\vec{0}\})$ e, portanto, a $F(\vec{0})$. Como estes vetores, à medida que m varia em $(-\infty, \infty)$, descrevem a circunferência de centro $(-L, 0)$ e raio G , e como $F(\vec{0})$ é o menor convexo fechado que contém estes vetores, concluímos que $F(\vec{0})$ é o disco fechado de centro $(-L, 0)$ e raio G . $\square$

Procuremos os equilíbrios do sistema (2).

Proposição 3.0.2 *Dada a equação (2), temos:*

- i) Se $G < L$, não há equilíbrio.
- ii) Se $G > L$, $(0, 0)$ é o único equilíbrio.
- iii) Se $G = L$, os pontos $(x, 0)$, com $x \leq 0$, são todos os equilíbrios.

Demonstração:

- i) Se $G < L$, a equação $\operatorname{sgn} x = \frac{-L}{G}$ não tem solução, logo não há equilíbrios.
- ii) Se $G > L$, a equação $\operatorname{sgn} x = \frac{-L}{G}$ não tem solução e, portanto, fora da origem não há equilíbrio. Entretanto, $\vec{0} = (0, 0)$ é equilíbrio, pois, nesse caso, $F(\vec{0})$ contém $\vec{0}$ em seu interior.
- iii) Se $G = L$, a equação $\operatorname{sgn} x = \frac{-L}{G}$ é satisfeita, para todo $x < 0$. Logo, $(x, 0)$, com $x < 0$, é equilíbrio. Também $\vec{0} = (0, 0)$ é equilíbrio, pois, neste caso, $\vec{0} \in \partial F(\vec{0})$. $\square$

Finalmente, analisemos a questão da estabilidade.

Consideremos a função definida em $\mathbb{R}^2$, por $V(x, y) = x^2 + y^2$.

Em todo ponto $(x, y) \neq (0, 0)$, a derivada ao longo das soluções de (2) é dada por:

$$\dot{V}(x, y) = 2x\left[\frac{-Gx}{\sqrt{x^2 + y^2}} - L\right] + 2y\left[\frac{-Gy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right] = -2G\sqrt{x^2 + y^2} - 2Lx.$$

Se $G > L$, então $\dot{V}(x, y) < 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

De fato, se $x = 0$ e $y \neq 0$, $\dot{V}(0, y) = -2G|y| < 0$, e, se $x \neq 0$, $\dot{V}(x, y) \leq -2(G-L)|x| < 0$, para todo y . Portanto, V é uma função de Liapunov para a estabilidade assintótica de $(0, 0)$.

Se $G = L$, então $\dot{V}(x, y) \leq 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ e, portanto, $(0, 0)$ é um equilíbrio estável.

Resta analisar a estabilidade dos equilíbrios $(\bar{x}, 0)$, com $\bar{x} < 0$, ainda sob a hipótese $G = L$. Para isto, consideremos a função $V = (x - \bar{x})^2 + y^2$, cuja derivada ao longo das soluções é dada por $\dot{V}(x, y) = -2G\sqrt{x^2 + y^2} - 2G(x - \bar{x}) + \frac{2Gx\bar{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, para todo ponto (x, y) suficientemente próximo de $(\bar{x}, 0)$. É fácil ver que $\dot{V}(x, y) \leq -2G[x + \sqrt{x^2 + y^2}] \leq 0$, se (x, y) está próximo de $(\bar{x}, 0)$, o que nos mostra que $(\bar{x}, 0)$ é estável.

Pelo que vimos, podemos concluir o seguinte:

Teorema 3.0.1 *Se $G > L$, o sistema (2) admite um único equilíbrio, a saber $(0, 0)$, que é assintoticamente estável. Se $G = L$, o sistema (2) admite como equilíbrios os pontos da forma $(\bar{x}, 0)$, $\bar{x} \leq 0$, que são todos estáveis.*

Vamos determinar as órbitas do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-xG}{\sqrt{x^2 + y^2}} - L \\ \dot{y} = \frac{-yG}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

onde, como $x = x_g - x_l$ e $y = y_g$, temos $x < 0$ e $y > 0$.

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos a equação diferencial homogênea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-yG}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\frac{-xG}{\sqrt{x^2 + y^2}} - L} = \frac{yG}{xG + L\sqrt{x^2 + y^2}},$$

donde, integrando esta equação, obtemos:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - x)^{\frac{G}{L}} = Cy^{\frac{G}{L}-1} \quad (3)$$

onde C é uma constante positiva arbitrária.

Fig.3.3 Órbitas de S , no caso $G = L$

Fig.3.4 Órbitas de S , no caso $G = 2L$

No caso $G = L$, isto é, a velocidade do galgo é igual à da lebre, temos

$$y^2 = C^2 + 2Cx, \text{ isto é, } x = \frac{y^2}{2C} - \frac{C}{2}.$$

No caso $G > L$, a relação (3) nos dá as órbitas do sistema na forma implícita.

Capítulo 4

Movimentos de um disco rígido sobre uma reta horizontal

Neste capítulo vamos estudar os movimentos de um disco rígido sobre uma reta horizontal, supondo que a única força externa atuante é a força peso. Vamos considerar o caso de rolamento puro, e o caso de escorregamento sob a influência de uma força de atrito seco.

Fig.4.1.1

4.1 Movimento de puro rolamento

Consideremos um disco de massa m , raio r e centro geométrico P , que rola, sem escorregar, apoiado numa reta horizontal. Tomemos um sistema ortogonal de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

sendo O um ponto da reta de apoio, $\vec{i}$ paralelo à mesma reta e $\vec{j}$ no plano do disco, de tal forma que $-mg\vec{j}$ seja o peso do disco, e, finalmente, $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$. Seja G o centro de massa do disco e seja $h = PG$, isto é, a distância entre o centro geométrico e o centro de massa. Vamos supor que o centro de massa pertence ao interior do disco e, portanto, $0 < h < r$.

Seja ainda, J o momento de inércia do disco com relação à normal ao plano $\vec{i}, \vec{j}$, passando por G .

Escolhamos φ, ω, v para variáveis de fase, sendo φ o ângulo entre os vetores $-\vec{j}$ e PG ; $\omega = \dot{\varphi}$ é a velocidade angular do disco, $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, e v é a velocidade escalar do centro P , isto é, $\vec{v}_P = v\vec{i}$.

Temos $P = (x_P, r)$; $E = (x_P, 0)$; $G = (x_P + h \sin\varphi, r - h \cos\varphi)$.

Vamos escrever as equações diferenciais do movimento.

Pela Lei de Newton,

$$m\vec{a}_G = -mg\vec{j} + \vec{R}_r \quad (1)$$

onde $\vec{a}_G$ é a aceleração de G , g é a aceleração da gravidade e $\vec{R}_r$ é a reação resultante exercida pela reta no disco, no ponto de contato E , $\vec{R}_r = S_r\vec{i} + N_r\vec{j}$.

Pela fórmula de Poisson, $\vec{v}_E = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (E - G)$; no rolamento puro, $\vec{v}_E \equiv \vec{0}$, logo, $\vec{v}_G = -\vec{\omega} \wedge (E - G)$, ou seja, $\vec{v}_G = \omega(-(r - h \cos\varphi)\vec{i} + h \sin\varphi\vec{j})$, donde,

$$\vec{a}_G = \dot{\omega}[-(r - h \cos\varphi)\vec{i} + h \sin\varphi\vec{j}] + \omega^2[-h \sin\varphi\vec{i} + h \cos\varphi\vec{j}].$$

Substituindo em (1),

$$\dot{\omega}[-(r - h \cos\varphi)\vec{i} + h \sin\varphi\vec{j}] + \omega^2[-h \sin\varphi\vec{i} + h \cos\varphi\vec{j}] = -g\vec{j} + \frac{S_r}{m}\vec{i} + \frac{N_r}{m}\vec{j}$$

consequentemente, $S_r = m[-\dot{\omega}(r - h \cos\varphi) - \omega^2 h \sin\varphi]$ e $N_r = m[g + \dot{\omega} h \sin\varphi + \omega^2 h \cos\varphi]$.

Pelo Teorema do Momento Angular do disco com relação a G ,

$$\dot{\vec{K}}_G = (E - G) \wedge \vec{R}_r$$

onde $\vec{K}_G = J\omega\vec{k}$ é o momento angular do disco com relação a G , e, portanto, $J\dot{\omega} = (E - G) \wedge (S_r\vec{i} + N_r\vec{j})\vec{k}$, ou seja,

$$J\dot{\omega} = -N_r h \sin\varphi + S_r(r - h \cos\varphi).$$

Logo,

$$J\dot{\omega} = -mh \operatorname{sen}\varphi [g + \dot{\omega}h \operatorname{sen}\varphi + \omega^2 h \cos\varphi] + m(r - h \cos\varphi)[- \dot{\omega}(r - h \cos\varphi) - \omega^2 h \operatorname{sen}\varphi].$$

Assim,

$$\dot{\omega} = \frac{-mh \operatorname{sen}\varphi (g + r\omega^2)}{J + mh^2 + mr^2 - 2mrh \cos\varphi},$$

e o sistema que descreve o movimento no caso de puro rolamento é

$$\sum_r \begin{cases} \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{-mh \operatorname{sen}\varphi (g + r\omega^2)}{J + mh^2 + mr^2 - 2mrh \cos\varphi} \\ \dot{v} = -r\dot{\omega}, \quad v = -r\omega \end{cases}$$

Vamos nos restringir ao subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{C}_r = \{(\varphi, \omega, v) \in \mathbb{R}^3 : N_r(\varphi, \omega, v) > 0\}$$

onde $N_r = m[g + \dot{\omega}h \operatorname{sen}\varphi + \omega^2 h \cos\varphi]$, de modo a garantir que o disco nunca abandone a reta horizontal durante o movimento.

Observemos que o sistema $\sum_r$ é conservativo. Com efeito, a energia total do sistema é dada por

$$V(\varphi, \omega, v) = \frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh(1 - \cos\varphi),$$

isto é,

$$V(\varphi, \omega, v) = m \left[\frac{1}{2}[(v + h\omega \cos\varphi)^2 + h^2\omega^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \frac{J}{m}\omega^2] + gh(1 - \cos\varphi) \right].$$

Temos

$$\dot{V}(\varphi, \omega, v) = m[(v + h\omega \cos\varphi)(\dot{v} + h\dot{\omega} \cos\varphi - h\omega^2 \operatorname{sen}\varphi) + h^2\omega\dot{\omega} \operatorname{sen}^2\varphi + h^2\omega^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \omega\dot{\omega} \frac{J}{m} + gh\omega \operatorname{sen}\varphi], \text{ ou seja,}$$

$$\dot{V}(\varphi, \omega, v) = m[v\dot{v} + v h\dot{\omega} \cos\varphi - v h\omega^2 \operatorname{sen}\varphi + \dot{v} h\omega \cos\varphi + h^2\omega\dot{\omega} + \omega\dot{\omega} \frac{J}{m} + gh\omega \operatorname{sen}\varphi], \text{ donde,}$$

$$\dot{V}(\varphi, \omega, v) = \dot{V}(\varphi, \omega) = m[\omega\dot{\omega}(r^2 + h^2 + \frac{J}{m} - 2rh \cos\varphi) + h\omega \operatorname{sen}\varphi(r\omega^2 + g)] = 0,$$

ao longo das soluções de $\sum_r$.

Sendo o campo de vetores em $\sum_r$ contínuo, os equilíbrios são os pontos tais que o campo de vetores calculado neles é nulo. Consequentemente, devemos ter $\omega = 0$ e $\frac{-mh \operatorname{sen}\varphi(g + \omega^2 r)}{J + mh^2 + mr^2 - 2mrh \cos\varphi} = 0$ e, portanto, $\operatorname{sen}\varphi = 0$, ou seja, $\varphi = k\pi, k$ inteiro. Assim, os equilíbrios de $\sum_r$ são os pontos da forma $(k\pi, 0, 0)$, k inteiro.

Para finalizar, achemos as órbitas de $\sum_r$.

Da primeira e segunda equações,

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-h \operatorname{sen}\varphi(g + r\omega^2)}{\omega(\frac{J}{m} + h^2 + r^2 - 2rh \cos\varphi)},$$

donde, separando as variáveis,

$$\frac{\omega}{g + r\omega^2} d\omega = \frac{-h \operatorname{sen}\varphi}{\frac{J}{m} + (r - h \cos\varphi)^2 + h^2 \operatorname{sen}^2\varphi} d\varphi$$

Assim, por integração, obtemos

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{C + 2gh \cos\varphi}{\frac{J}{m} + h^2 + r^2 - 2rh \cos\varphi}}$$

onde C é constante real.

Fig.4.1.2

Observemos que o denominador é estritamente positivo para todo $\varphi \in \mathbb{R}$, e que, para cada $C \geq -2gh$, a curva $\gamma_C = \{(\varphi, \omega) : \omega^2 = \frac{C + 2gh \cos \varphi}{\frac{J}{m} + h^2 + r^2 - 2rh \cos \varphi}\}$ é uma curva simétrica em relação ao eixo φ e que é 2π -periódica. Na Fig.4.1.2, vemos claramente que os equilíbrios $(2k\pi, 0)$ são estáveis e que os equilíbrios $((2k+1)\pi, 0)$ são instáveis, para todo inteiro k .

Temos, portanto, verificado o seguinte

Teorema 4.1.1 *O sistema $\sum_r$ é conservativo, e seus equilíbrios são os pontos da forma $(k\pi, 0, 0)$, sendo estáveis se k é um número inteiro par, e instáveis, se k é um número inteiro ímpar.*

4.2 Movimento com escorregamento

Consideremos um disco em movimento, com as mesmas características daquele dado em 4.1, salvo o fato de, neste caso, não termos mais $\vec{v}_E \equiv \vec{0}$. Suponhamos que a componente tangencial da reação $\vec{R}_s$ seja do tipo “atrito seco”, isto é, pela lei de Coulomb,

$$\Phi_s \vec{i} = -\mu N_s \operatorname{sgn} v_E \vec{i} = -\mu N_s \frac{\vec{v}_E}{|\vec{v}_E|} \quad (1)$$

As equações do movimento são obtidas como segue. Como antes, pela lei de Newton,

$$m\vec{a}_G = -mg\vec{j} + \vec{R}_s \quad (2)$$

Decompondo $\vec{R}_s$ nas direções $\vec{i}$ e $\vec{j}$, $\vec{R}_s = \Phi_s \vec{i} + N_s \vec{j}$.

Novamente, pela fórmula de Poisson, $\vec{v}_G = \vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge (G - P)$, onde $\vec{v}_P = v\vec{i}$ e $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, donde $\vec{v}_G = (v + h\omega \cos \varphi)\vec{i} + h\omega \sin \varphi \vec{j}$.

Derivando, e, como por hipótese, $\dot{\varphi} = \omega$,

$$\vec{a}_G = (\dot{v} + h\dot{\omega} \cos \varphi - h\omega^2 \sin \varphi)\vec{i} + (h\dot{\omega} \sin \varphi + h\omega^2 \cos \varphi)\vec{j} \quad (3)$$

De (2), multiplicando escalarmente por $\vec{j}$, obtemos

$$N_s = m(g + h\omega^2 \cos \varphi + h\dot{\omega} \sin \varphi) \quad (4)$$

Ainda pela fórmula de Poisson, a velocidade $\vec{v}_E$ do ponto de contato é dada por $\vec{v}_E = \vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge (E - P)$, e, portanto, $\vec{v}_E = (v + \omega r)\vec{i}$.

Substituindo (3) e (1) em (2), temos

$$m[(\dot{v} + h\omega \cos\varphi - h\omega^2 \sin\varphi)\vec{i} + (h\dot{\omega} \sin\varphi + h\omega^2 \cos\varphi)\vec{j}] = -mg\vec{j} - \mu N_s \operatorname{sgn} v_E \vec{i} + N_s \vec{j}.$$

Identificando as componentes na direção do vetor $\vec{i}$, $m(\dot{v} + h\dot{\omega} \cos\varphi - h\omega^2 \sin\varphi) = -\mu N_s \operatorname{sgn} v_E$, donde, como $\operatorname{sgn} v_E = \operatorname{sgn}(v + r\omega)$,

$$\dot{v} + h\dot{\omega} \cos\varphi - h\omega^2 \sin\varphi = -\mu(g + h\omega^2 \cos\varphi + h\dot{\omega} \sin\varphi) \operatorname{sgn}(v + r\omega) \quad (5)$$

Pelo Teorema do Momento Angular do disco com relação a G , temos novamente, $\dot{\vec{K}}_G = (E - G) \wedge \vec{R}_s$, onde $\vec{K}_G = J\omega\vec{k}$, e de (1), $\vec{R}_s = m\vec{a}_G + mg\vec{j}$, e, conseqüentemente, $\vec{R}_s = m[(\dot{v} + h\dot{\omega} \cos\varphi - h\omega^2 \sin\varphi)\vec{i} + (h\dot{\omega} \sin\varphi + h\omega^2 \cos\varphi)\vec{j}] + mg\vec{j}$.

Logo, $\dot{\vec{K}}_G = m[-gh \sin\varphi - h^2\dot{\omega} + (r - h \cos\varphi)\dot{v} + rh\dot{\omega} \cos\varphi - rh\omega^2 \sin\varphi]\vec{k}$.

Como $\dot{\vec{K}}_G = J\dot{\omega}\vec{k}$, obtemos

$$\frac{J}{m}\dot{\omega} = -(g + r\omega^2)h \sin\varphi + h\dot{\omega}(r \cos\varphi - h) + (r - h \cos\varphi)\dot{v} \quad (6)$$

As equações (5) e (6) descrevem o movimento com escorregamento. Fazendo $a = g + h\omega^2 \cos\varphi$, $b = h \sin\varphi$ e $c = r - h \cos\varphi$, obtemos de (5) e (6),

$$\frac{J}{m}\dot{\omega} = -gb - rb\omega^2 + r(r - c)\dot{\omega} - h^2\dot{\omega} + c[-\mu a \operatorname{sgn}(v + r\omega) - \mu b\dot{\omega} \operatorname{sgn}(v + r\omega) - \dot{\omega}(r - c) + b\omega^2].$$

Finalmente, obtemos

$$\dot{\omega} = \frac{-a[b + \mu c \operatorname{sgn}(v + r\omega)]}{\frac{J}{m} + b^2 + \mu bc \operatorname{sgn}(v + r\omega)}.$$

$$\dot{v} = b\omega^2 - \mu a \operatorname{sgn}(v + r\omega) + [r - c + \mu b \operatorname{sgn}(v + r\omega)] \frac{a[b + \mu c \operatorname{sgn}(v + r\omega)]}{\frac{J}{m} + b^2 + \mu bc \operatorname{sgn}(v + r\omega)}.$$

Assim, obtemos o sistema $\sum_s$ que descreve o movimento no caso em que há escorregamento:

$$\sum_s \begin{cases} \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = p(\varphi, \omega, v) \\ \dot{v} = q(\varphi, \omega, v) \end{cases}$$

onde

$$p(\varphi, \omega, v) = \frac{-a[b + \mu c \operatorname{sgn}(v + r\omega)]}{\frac{J}{m} + b^2 + \mu bc \operatorname{sgn}(v + r\omega)} \quad \text{e}$$

$$q(\varphi, \omega, v) = b\omega^2 - \mu a \operatorname{sgn}(v + r\omega) + [r - c + \mu b \operatorname{sgn}(v + r\omega)] \frac{a[b + \mu c \operatorname{sgn}(v + r\omega)]}{\frac{J}{m} + b^2 + \mu bc \operatorname{sgn}(v + r\omega)}.$$

No sistema $\sum_s$ o campo de vetores $f(\omega, p, q)$ é contínuo por partes; a superfície de descontinuidade $\mathcal{D}$, é o plano dado pela equação $v + r\omega = 0$, que separa o espaço tridimensional em dois subespaços, $G^+ = \{(\varphi, \omega, v) : v + r\omega > 0\}$ e $G^- = \{(\varphi, \omega, v) : v + r\omega < 0\}$.

Para um ponto $(\varphi, \omega, v) \in \mathcal{D}$ temos $f^+ = (\omega, p^+, q^+)$ e $f^- = (\omega, p^-, q^-)$, onde

$$p^+ = \frac{-a(b + \mu c)}{\frac{J}{m} + b(b + \mu c)}, \quad p^- = \frac{-a(b - \mu c)}{\frac{J}{m} + b(b - \mu c)}, \quad q^+ = b\omega^2 - \mu a + \frac{a(b + \mu c)(r - c + \mu b)}{\frac{J}{m} + b(b + \mu c)} \quad \text{e}$$

$$q^- = b\omega^2 + \mu a + \frac{a(b - \mu c)(r - c - \mu b)}{\frac{J}{m} + b(b - \mu c)}.$$

Observemos que as soluções de $\sum_s$ foram definidas no Capítulo 2, Exemplo 2.0.1: uma solução partindo de $(\varphi_o, \omega_o, v_o) \in \mathcal{D}$ deve satisfazer

$(\dot{\varphi}(t), \dot{\omega}(t), \dot{v}(t)) \in F(\varphi(t), \omega(t), v(t))$, onde $F(\varphi(t), \omega(t), v(t))$ é o segmento de reta $[f^-(\varphi(t), \omega(t), v(t)), f^+(\varphi(t), \omega(t), v(t))]$.

Como antes, vamos considerar o sistema $\sum_s$ definido na região $\mathcal{C}_s = \{(\varphi, \omega, v) \in \mathbb{R}^3 : N_s(\varphi, \omega, v) > 0\}$, o que garante que o disco, em seu movimento, não abandona a reta na qual se apóia.

Observemos que o sistema $\sum_s$ é dissipativo. De fato, a energia total do sistema, que é dada por $V(\varphi, \omega, v) = \frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh(1 - \cos\varphi)$, decresce ao longo das soluções de $\sum_s$.

Com efeito, temos $\dot{V}(\varphi, \omega, v) = m\vec{v}_G \cdot \vec{a}_G + J\omega\dot{\omega} + mgh\omega \operatorname{sen}\varphi$. Como $\vec{v}_G = (v + h\omega \cos\varphi)\vec{i} + h\omega \operatorname{sen}\varphi\vec{j}$, e $m\vec{a}_G = -mg\vec{j} + \vec{R}_s = -mg\vec{j} + N_s\vec{j} + \Phi_s\vec{i}$, onde $\Phi_s = -\mu N_s \operatorname{sgn}v_E$ e $\vec{R}_G = (E - G) \wedge \vec{R}_s = J\dot{\omega}\vec{k}$, de onde obtemos $\dot{\omega} = \frac{1}{J}[-hN_s \operatorname{sen}\varphi + \Phi_s(r - h \cos\varphi)]$, e, portanto, se $\vec{v}_E \neq \vec{0}$, temos

$$\dot{V}(\varphi, \omega, v) = [(v + h\omega \cos\varphi)\vec{i} + (h\omega \operatorname{sen}\varphi)\vec{j}] \cdot [-\mu N_s \operatorname{sgn}v_E\vec{i} + (N_s - mg)\vec{j}] + \omega[-hN_s \operatorname{sen}\varphi - \mu N_s \operatorname{sgn}v_E(r - h \cos\varphi) + mgh\omega \operatorname{sen}\varphi].$$

Assim, $\dot{V}(\varphi, \omega, v) = -\mu N_s(v + r\omega) \operatorname{sgn} v_E = -\mu N_s v_E \operatorname{sgn} v_E$, ou seja $\dot{V}(\varphi, \omega, v) = -\mu N_s |\vec{v}_E| < 0$, sempre que $|\vec{v}_E| \neq 0$. Portanto, $\dot{V}^*(\varphi, \omega, v) = \dot{V}(\varphi, \omega, v) < 0$ se $|\vec{v}_E| \neq 0$.

Para os pontos de $\mathcal{D}$, isto é, onde $v = -r\omega$, temos, ao longo de uma solução:

$$\dot{V}(\varphi, \omega, v) = m\vec{v}_G \cdot \vec{\dot{v}}_G + J\omega\dot{\omega} + mgh\omega \sin\varphi.$$

Para todo λ em $[0, 1]$, temos

$$m\vec{v}_G \cdot [-g\vec{j} + \lambda \frac{N_s^+}{m}(\vec{j} - \mu\vec{i}) + (1 - \lambda) \frac{N_s^-}{m}(\vec{j} + \mu\vec{i})] + \omega[\lambda N_s^+(E - G) \wedge (\vec{j} - \mu\vec{i}) \cdot \vec{k} + (1 - \lambda) N_s^-(E - G) \wedge (\vec{j} + \mu\vec{i}) \cdot \vec{k}] + mgh\omega \sin\varphi = \{0\}. \text{ Portanto, } \dot{V}^*(\varphi, \omega, v) = 0 \text{ se } |\vec{v}_E| = 0.$$

Consequentemente, $\dot{V}^*(\varphi, \omega, v) \leq 0$, e, como $\dot{V}(\varphi, \omega, v) \leq \dot{V}^*(\varphi, \omega, v)$, concluímos que $\dot{V}(\varphi, \omega, v) \leq 0$ e, assim $\sum_s$ é dissipativo em C_s .

Vamos provar que os equilíbrios de $\sum_s$ coincidem com os equilíbrios de $\sum_r$.

De fato, vejamos inicialmente que todo equilíbrio $(\varphi_0, \omega_0, v_0)$ de $\sum_s$ deve estar em $\mathcal{D}$ e, portanto, $v_0 = -r\omega_0$.

Como $(0, 0, 0)$ deve pertencer a $F(\varphi_0, \omega_0, v_0)$, e como todo elemento de $F(\varphi_0, \omega_0, v_0)$ tem primeira componente igual a ω_0 , necessariamente $\omega_0 = 0$. Se, por absurdo, $v_0 \neq 0$, sendo p e q funções contínuas em $(\varphi_0, 0, v_0)$, necessariamente $F(\varphi_0, 0, v_0)$ reduz-se ao conjunto unitário $\{(0, p(\varphi_0, 0, v_0), q(\varphi_0, 0, v_0))\}$, e, então, teríamos $p(\varphi_0, 0, v_0) = 0$ e $q(\varphi_0, 0, v_0) = 0$. Isto contradiz o fato de que $q(\varphi_0, 0, v_0) = -\mu g \operatorname{sgn} v_0 \neq 0$. Portanto, $v_0 = 0$, e todo equilíbrio é da forma $(\varphi_0, 0, 0)$ e pertence a $\mathcal{D}$.

Temos, neste caso, $F(\varphi_0, 0, 0) = \{(0, \lambda p^+ + (1 - \lambda)p^-, \lambda q^+ + (1 - \lambda)q^-) : \lambda \in [0, 1]\}$, onde

$$p^+ = \frac{-g[h \sin\varphi_0 + \mu(r - h \cos\varphi_0)]}{\frac{J}{m} + h^2 \sin^2\varphi_0 + \mu h \sin\varphi_0(r - h \cos\varphi_0)};$$

$$p^- = \frac{-g[h \sin\varphi_0 - \mu(r - h \cos\varphi_0)]}{\frac{J}{m} + h^2 \sin^2\varphi_0 - \mu h \sin\varphi_0(r - h \cos\varphi_0)};$$

$$q^+ = -\mu g - p^+(h \cos\varphi_0 + \mu h \sin\varphi_0); \quad q^- = -\mu g - p^-(h \cos\varphi_0 - \mu h \sin\varphi_0).$$

Para termos um equilíbrio é necessário e suficiente que

$$\lambda p^+ + (1 - \lambda)p^- = 0 \text{ e } \lambda q^+ + (1 - \lambda)q^- = 0.$$

Daí segue que $(1 - 2\lambda)\mu g - (\cos\varphi_0 + \mu h \sin\varphi_0)(\lambda p^+ + (1 - \lambda)p^-) = 0$, e, portanto, $\lambda = \frac{1}{2}$, de onde segue $p^+ + p^- = 0$, donde concluímos que $\sin\varphi_0 = 0$ e $\varphi_0 = k\pi$, k inteiro.

Reunindo os resultados acima, temos o seguinte:

Teorema 4.2.1 *O sistema $\sum_s$ é dissipativo, seus equilíbrios pertencem a $\mathcal{D}$ e são da forma $(k\pi, 0, 0)$, com k inteiro.*

Surge agora a seguinte questão: uma solução de $\sum_s$, que encontra $\mathcal{D}$, permanece em $\mathcal{D}$?

Teorema 4.2.2 *O sistema $\sum_s$ coincide com o sistema $\sum_r$ numa vizinhança de cada equilíbrio $(k\pi, 0, 0)$, k inteiro.*

Demonstração: Observemos que, numa vizinhança conveniente de cada equilíbrio, $\vec{n} \cdot f^+ = -\mu g[1 + \frac{m}{J}(r \pm h)^2] < 0$ e $\vec{n} \cdot f^- = \mu g[1 + \frac{m}{J}(r \pm h)^2] > 0$, e, então, pelo Teorema 2.2.2 ii) do Capítulo 2, segue que $\mathcal{D}$ é positivamente invariante, isto é, uma solução que, num determinado instante encontra $\mathcal{D}$, permanece em $\mathcal{D}$ no futuro. (Fig.2.2.3)

Agora, para $\mathcal{D}$ ser invariante pelo fluxo, a seguinte condição necessária e suficiente tem que se verificar:

$$[\lambda f^+ + (1 - \lambda)f^-] \cdot \vec{n} = 0,$$

onde $\vec{n} = (0, r, 1)$ é o vetor normal a $\mathcal{D}$. Portanto, a condição acima torna-se:

$$r[\lambda p^+ + (1 - \lambda)p^-] + \lambda q^+ + (1 - \lambda)q^- = 0$$

e, portanto, devemos ter

$$\lambda = \frac{rp^- + q^-}{(rp^- + q^-) - (rp^+ + q^+)}.$$

Colocando $z = v + r\omega$ e, portanto, $\dot{z} = \dot{v} + r\dot{\omega}$, o sistema $\sum_s$ pode ser escrito na forma

$$\sum_s \begin{cases} \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = p \\ \dot{z} = q + rp \end{cases}$$

Observemos que, em $\mathcal{D}$, $\sum_s$ reduz-se a

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = \lambda p^+ + (1 - \lambda)p^- \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Substituindo o valor de $\lambda = \frac{rp^- + q^-}{(rp^- + q^-) - (rp^+ + q^+)}$, na segunda equação, obtemos $\dot{\omega} = \frac{-mh \operatorname{sen}\varphi(g + r\omega^2)}{J + mh^2 + mr^2 - 2mrh \cos\varphi}$, que é, precisamente a expressão encontrada em $\sum_r$, como queríamos demonstrar. $\square$

Capítulo 5

Viabilidade de um planejamento em Economia

Na área econômica são considerados, frequentemente, sistemas de equações diferenciais ordinárias, nos quais o campo vetorial envolvido é contínuo por partes, situação essa em que os teoremas da teoria clássica (Peano, Picard) não se aplicam.

Além disso, procuram-se, muitas vezes, soluções cujos valores devem estar restritos a um conjunto previamente fixado, denominado *conjunto viável*, que deve ser positivamente invariante pelo fluxo do sistema. Neste Capítulo, vamos apresentar um resultado de existência de solução viável, para um modelo de consumo de vários artigos numa economia com vários consumidores, sendo $\mathbb{R}^n_+ = [0, \infty)^n$, subconjunto do espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$, o conjunto viável.

Esse resultado aparece nas referências [A-C] e [C.H] com o nome “planning procedure” ou “tâtonnement proces”.

Admitamos uma situação com m consumidores, n artigos públicos e um artigo privado, no caso, o capital disponível. A i -ésima componente de um vetor x em $\mathbb{R}^n_+$ representa a quantidade total do artigo público i , $i = 1, 2, \dots, n$, disponível para consumo. Seja $C = C(x)$ o capital máximo disponível para consumo, $C = y^1 + y^2 + \dots + y^m$, sendo y^j a parte relativa ao consumidor j , $j = 1, 2, \dots, m$.

Consideremos as seguintes hipóteses:

H1) A função y^j , definida em $\mathbb{R}_+^n$, a valores em $\mathbb{R}$, é continuamente diferenciável em (um aberto contendo) $\mathbb{R}_+^n$, para todo $j = 1, 2, \dots, m$. Seja ϕ_i , definida em $\mathbb{R}_+^n$, a valores em $\mathbb{R}^m$, $\phi_i(x) = -\frac{\partial C}{\partial x_i}(x)$. Portanto, para todo $i, i = 1, \dots, n$, ϕ_i é contínua em seu domínio.

H2) Cada consumidor $j, j = 1, 2, \dots, m$, tem uma função de utilidade U^j , definida em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, a valores em $\mathbb{R}$, que depende de x e y^j e que é continuamente diferenciável em (um aberto contendo) $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

H3) Para todo $j, j = 1, 2, \dots, m$ e para todo (x, y^j) em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, temos $\frac{\partial U^j}{\partial y^j}(x, y^j) > 0$. Seja π_i^j a função contínua, definida em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, a valores em $\mathbb{R}$, dada por $\pi_i^j(x, y^j) = \frac{\frac{\partial U^j}{\partial x_i}(x, y^j)}{\frac{\partial U^j}{\partial y^j}(x, y^j)}$, para todo $i, i = 1, \dots, n$, e para todo $j, j = 1, \dots, m$, denominada taxa marginal de substituição.

H4) $\pi_i^j(x, 0) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, para todo $j = 1, \dots, m$ e para todo x em $\mathbb{R}_+^n$.

Segundo Malinvaud, as quantidades x_i e y^j variam no tempo, de acordo com o seguinte sistema [C.H]:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, y) \\ \dot{y} = \varphi(x, y) \cdot g(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y^1, \dots, y^m)^T$, g é a aplicação definida em $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ a valores em $\mathbb{R}^n$, dada por $g = (g_1, \dots, g_n)^T$, sendo

$$g_i(x, y) = \begin{cases} f_i(x, y) & \text{se } x_i > 0 \\ \max \{f_i(x, y), 0\} & \text{se } x_i = 0, \end{cases}$$

$f_i = b \left(\sum_{j=1}^m \pi_i^j - \phi_i \right)$, b constante positiva, $i = 1, 2, \dots, n$, φ é a matriz $m \times n$ dada por

$$\varphi = \begin{bmatrix} -\pi_1^1 + e^1 \frac{f_1}{b} & -\pi_2^1 + e^1 \frac{f_2}{b} & \dots & -\pi_n^1 + e^1 \frac{f_n}{b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\pi_1^m + e^m \frac{f_1}{b} & -\pi_2^m + e^m \frac{f_2}{b} & \dots & -\pi_n^m + e^m \frac{f_n}{b} \end{bmatrix}$$

e $e^1, e^2, \dots, e^m$ são constantes não negativas, tais que $\sum_{j=1}^m e^j = 1$.

Vamos estender as funções g e φ a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, colocando $g(x, y) = g(\bar{x}, \bar{y})$ e $\varphi(x, y) = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, onde $\bar{x} \doteq (\max \{x_1, 0\}, \dots, \max \{x_n, 0\})^T$ e $\bar{y} \doteq (\max \{y^1, 0\}, \dots, \max \{y^m, 0\})^T$.

Seja $\hat{g}(x, y, \delta)$ o fecho convexo de $g((x, y)^\delta)$, para cada $\delta > 0$, e definamos as funções multívocas

$$G(x, y) = \bigcap_{\delta > 0} \hat{g}(x, y, \delta)$$

e

$$\Gamma(x, y) = \{(z, \varphi(x, y) \cdot z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : z \in G(x, y)\}.$$

Uma solução do sistema (1) é uma solução da inclusão diferencial

$$\frac{d}{dt}(x, y)^T \in \Gamma(x(t), y(t)).$$

O Teorema 2.1 se aplica e fornece uma solução absolutamente contínua $(x(t), y(t))^T$, definida num intervalo $[0, T]$, que satisfaz à condição inicial $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, com $(x_0, y_0)^T$ dado em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Vamos demonstrar que $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ é positivamente invariante pelo fluxo do sistema (1), isto é, se x_0 pertence a $\mathbb{R}_+^n$ e y_0 pertence a $\mathbb{R}_+^m$, então $(x(t), y(t))^T$ pertence a $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$, para todo $t > 0$. De fato, se num instante t_1 , alguma componente x_i se anular, isto é, $x_i(t_1) = 0$, pela definição de g_i , temos $\frac{dx_i}{dt} = g_i(x, y) \geq 0$, para todo (x, y) , e portanto x_i é não decrescente após esse instante. Consequentemente, a componente $x(t)$ não abandona $\mathbb{R}_+^n$ para $t > 0$.

Para a componente $y(t)$, temos: se $y^j(t_1) = 0$, para algum j e algum $t_1 > 0$, então, usando a hipótese $\pi_i^j(x, 0) = 0$, temos:

$$\dot{y}^j = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(-\pi_i^j + e^j(\sum_{k=1}^m \pi_i^k - \phi_i)) = e^j \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(\sum_{k=1}^m \pi_i^k - \phi_i) = e^j \sum_{i=1}^n b(\sum_{k=1}^m \pi_i^k - \phi_i)^2 \geq 0,$$

para todo t em $[0, T]$. Daí,

$$y^j(t) = y^j(t_1) + \int_{t_1}^t \dot{y}^j(s) ds \geq 0, \text{ para quase todo } t \geq t_1.$$

Fica assim demonstrado que cada solução do sistema (1) fornece um “planning procedure” apropriado.

Bibliografia

- [A-C] J.P. Aubin & A. Cellina. *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, 1984.
- [C.H] C. Henry. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side for Planning Procedures*. Journal of Economic Theory, 4, (541-551) 1972.
- [C-L] E.A. Coddington & N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York, McGraw Hill, 1955.
- [F] A.S. Filippov. *Differential Equations with discontinuous right-hand side*. Kluver Academic Publishers, 1988.
- [F-O] L.N.F. França and J.C.F. de Oliveira. *Stability of some mechanical systems with dry friction*. Dynamics and Stability of Systems vol.5 num 3 1990, Oxford University Press, 1990.
- [H] Jack K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. Malabar, Robert E. Krieger, 1980.
- [K-F] A.N. Kolmogorov & S.V. Fomin. *Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional*. Editora MIR, 1978.
- [L] D.G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. John Wiley & Sons, 1979.
- [N] I.P. Natanson. *The Function Theory of the Real Variable*. Gostekhizdat, Moscow, 1957.
- [P] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Inter-science Publishers, 1965.