**Aplicações Genéricas Especiais
de uma Variedade Fechada de
Dimensão $n+1$ no R^n**

Jorge Tadashi Hiratuka

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Diferencial**
Orientadora: **Profa. Dra. Vera Lúcia Carrara Zanetic**

–São Paulo, Maio de 1992–

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é o estudo de Aplicações Genéricas Especiais de uma variedade M diferenciável (C^∞), compacta, orientável, $(n + 1)$ -dimensional com imagem no $\mathbb{R}^n$. Verificaremos que M é o quociente de um fibrado de círculos localmente trivial M' de base W_f (fatorização de Stein de f), pela relação de equivalência que identifica os pontos de uma mesma fibra correspondente ao bordo de M' e, reciprocamente, considerando M' um fibrado de círculos diferenciável, orientável e ortogonal sobre W_f , o quociente M pela relação de equivalência acima, é uma variedade diferenciável que admite uma aplicação genérica especial. Mostraremos que os grupos fundamentais de M e W_f são isomorfos, e que W_f é uma variedade diferenciável n -dimensional com o bordo difeomorfo ao conjunto dos pontos singulares de f . Veremos também exemplos, para alguns valores de n , de variedades diferenciáveis orientáveis que admitem aplicações genéricas especiais com W_f compacta. Em particular, se W_f é um r -toro sólido, então M é homeomorfa à soma conexa de r cópias de $S^3 \times S^1$.

Abstract

The main purpose of this work is the study of Special Generic Maps from a closed, oriented, smooth ($\mathcal{C}^\infty$), $(n + 1)$ -dimensional manifold into $\mathbb{R}^n$. We obtain that M is the quotient of a locally trivial circle bundle M' by the equivalence relation which identifies points on the same fibre of $\partial M'$ and, conversely, if M' is a smooth, oriented, orthogonal, circle bundle over the Stein Factorization of f , call it W_f , the quotient M of the above equivalence relation, is a smooth manifold and the domain of a special generic map. We will show that the fundamental groups of M and W_f are isomorphic, and that W_f is a smooth n -dimensional manifold whose boundary is diffeomorphic to the set of singularities of f . We will also see examples, for certain values of n , of smooth oriented manifolds which are domains of special generic maps with W_f compact. In particular, we will show that if W_f is a solid r -torus, then M is homeomorphic to the connected sum of r copies of $S^3 \times S^1$.

Agradecimentos

Agradeço à Professora Vera Lúcia Carrara Zanetic pela orientação, paciência e dedicação, sem as quais não seria possível a conclusão deste trabalho; aos meus colegas Albo Carlos Cavalleiro, por ter me ensinado o uso do T_EX, pelos comentários feitos e demais apoios; Olga Satomi Yoshida, pela revisão do texto; Elisa Yoshiko Takada, pelo apoio nos momentos difíceis, Henrique Guzzo Junior, pela companhia nas horas gélidas da digitação; Alexandre Megiorin Roma, pelos incetivos, mesmo à distância; Edson de Faria, pela revisão do abstract; Lucio Marcos Gonçalves Prado e Roseli Fernandez pelo grande auxílio no final.

Agradeço também à todos os meus amigos, assim como os alunos da Escola Politécnica de Cubatão (89/90), pela torcida, e à todas as pessoas que de alguma forma contribuíram com o meu trabalho e, injustamente, não foram citadas aqui.

Não poderia deixar de agradecer à minha mãe, que dedicou toda sua vida para custear o estudo aos seus filhos, e ao CNPq e à CAPES, pela concessão de bolsas, sem as quais não teria iniciado o mestrado.

Às pessoas que, de alguma forma, interferiram no meu trabalho, apenas peço que sejam mais humanas, permitindo que outros mostrem do que são capazes e tenham oportunidade de crescimento.

*À minha mãe,
exemplo de dedicação
aos filhos.*

*Ao meu mestre da vida,
Dr. Daisaku Ikeda,
exemplo de dedicação
à Paz, Cultura e Educação.*

*“Quanto mais densa a escuridão,
mais próximo deve estar
o clarão do céu.”*

*“Somente um ser humano pode criar e
desenvolver um outro ser humano.
Somente uma pessoa de genuíno
humanismo pode desenvolver uma
pessoa de genuíno humanismo.”*

*“Fundamentalmente a causa da vitória
está na paciência e perseverança.
E o caminho para a vitória é aberto
através do desafio. Somente através
do avanço tenaz é que podemos construir
uma história de triunfo.”*

(Daisaku Ikeda)

“Embora a vitória seja importante, o essencial é construir um “eu” que não seja derrotado sob quaisquer circunstâncias”.

“O gênio não é aquele que é dotado de excelente capacidade, e sim, aquele cuja natureza o obriga a lutar”.

“Não se deve temer o desprezo dos outros e nem a crítica da sociedade. Uma vez que se levanta, adquira a habilidade e a convicção. Reuna os conhecimentos de uma centena de gerações passadas. Não procure ser conhecido na existência atual. Procure a responsabilidade que lhe é atribuída e cumpra-a”.

(Jossei Toda)

Conteúdo

INTRODUÇÃO	vii
CAPÍTULO I - CONCEITOS BÁSICOS	1
I.1 - Variedades Diferenciáveis	1
I.2 - Fibrados Diferenciáveis	6
I.3 - Isomorfismo de Fibrados	8
I.4 - Sequência Exata de Grupos de Homotopia Para Espaços Fibrados	14
CAPÍTULO II - RESULTADOS INICIAIS	18
II.1 - Aplicações Genéricas Especiais	18
II.2 - Caracterização de M e de W_f Para Aplicações Genéricas Especiais	20
CAPÍTULO III - RESULTADOS PRINCIPAIS	28
CAPÍTULO IV - EXEMPLOS	39
IV.1 - W_f Difeomorfo ao Disco D^n	40
IV.2 - Classificação das Variedades M^3 Fechadas que Admitem Aplicações Genéricas Especiais com Imagem em $\mathbb{R}^2$	44
IV.3 - Exemplos do Tipo $M^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$	50
IV.4 - Uma Recíproca Para a Proposição IV.1.1	54
BIBLIOGRAFIA	57

Introdução

O objetivo deste trabalho é fazer uma generalização de alguns dos resultados contidos no artigo “*Sur Certaines Applications Génériques d’une variété close a 3 dimensions dans le plan*” de Burlet & de Rham [2], para aplicações genéricas especiais (definição II.1.2) de uma variedade M orientável, compacta, $(n + 1)$ -dimensional com imagem no $\mathbb{R}^n$.

Existem alguns trabalhos, como os de Porto & Furuya ([7] e [15]), que generalizam tais resultados para aplicações genéricas do tipo $M^m \longrightarrow \mathbb{R}^2$, para $m \geq 4$. Nestes, as fibras têm dimensão $m - 2$ e a existência da classificação de superfícies compactas, auxiliam na determinação de todas as variedades m -dimensionais que admitem aplicações genéricas especiais $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tendo a sua fatorização de Stein W_f compacta, o que não acontece em nosso trabalho se n for maior do que 2.

No Capítulo I apresentaremos os principais resultados básicos sobre variedades diferenciáveis e topologia algébrica, e algumas convenções que serão utilizados no decorrer do texto.

No Capítulo II definiremos as aplicações genéricas $f: M^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e verificaremos que estas se decompõem como compostas de uma imersão $f': W_f \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com uma projeção $q: M \longrightarrow W_f$, onde W_f é uma variedade n -dimensional com bordo, e que M menos o conjunto S_0 , dos pontos singulares de f , é um fibrado de círculos sobre $W_f - \partial W_f$.

No Capítulo III apresentaremos as generalizações anteriormente citadas, ou seja, verificaremos que M é o quociente de um fibrado de círculos localmente trivial M' de base W_f , pela relação de equivalência que identifica

os pontos de uma mesma fibra correspondente ao bordo de M' e, reciprocamente, considerando M' um fibrado de círculos diferenciável, orientável e ortogonal sobre W_f , o quociente M pela relação de equivalência acima, é uma variedade diferenciável que admite uma aplicação genérica especial. Mostraremos também que os grupos fundamentais de M e W_f são isomorfos.

Finalmente, no Capítulo IV surgirá uma demonstração mais detalhada do Teorema IV do artigo acima o qual classifica as variedades tridimensionais fechadas que admitem aplicações genéricas especiais. Veremos também exemplos, para alguns valores de n , de variedades diferenciáveis orientáveis que admitem aplicações genéricas especiais com W_f compacta. Em particular, se W_f é um r -toro sólido, então M é homeomorfa à soma conexa de r cópias de $S^3 \times S^1$.

CAPÍTULO I

Conceitos Básicos

I.1 - VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Este capítulo trata de algumas definições da teoria sobre variedades e de topologia algébrica, bem como enunciados de resultados clássicos e suas demonstrações. Em nosso texto, variedades diferenciáveis e aplicações diferenciáveis significarão de classe C^∞ .

Definição I.1.1 - Uma variedade diferenciável m -dimensional M é *fechada* se for compacta e sem bordo. Denotaremos por (U, φ) um sistema de coordenadas locais da variedade. Se $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, diremos que $x_1, \dots, x_n$ são coordenadas locais para M .

Definição I.1.2 - Dada uma aplicação diferenciável $f: M^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \geq n$), da variedade M no $\mathbb{R}^n$, dizemos que um ponto $a \in M$ é *singular* (*ponto crítico*) de f se, dada uma carta (U, φ) em torno de a , o posto da aplicação linear $D_a f = D_a(f \circ \varphi^{-1})$ é menor do que n .

Definição I.1.3 - Dizemos que a aplicação $f: M \longrightarrow N$ é *própria* se a imagem inversa $f^{-1}(K)$, de todo compacto $K \subset N$, é um conjunto compacto.

Definição I.1.4 - A aplicação $f: M^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \geq n$) é uma *submersão* se a aplicação linear $D_a f$ for sobrejetora para qualquer ponto $a \in M$. A aplicação $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \leq n$) é uma *imersão* se a aplicação linear $D_a f$ for injetora para qualquer ponto $a \in M$, e é um *mergulho* se for uma imersão e um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \mathbb{R}^n$.

A definição abaixo será utilizada no capítulo IV, onde ilustraremos o nosso trabalho com exemplos mais concretos.

Definição I.1.5 - Sejam M_1 e M_2 variedades conexas n -dimensionais e orientadas (se forem orientáveis). Sejam :

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_1 \\ f_2: \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_2 \end{aligned}$$

mergulhos diferenciáveis, conservando a orientação se M_i for orientável. Então a variedade n -dimensional diferenciável que resulta da soma disjunta

$$[M_1 - f_1(\frac{1}{3}D^n)] + [M_2 - f_2(\frac{1}{3}D^n)]$$

identificando

$$f_1(tx) \text{ com } f_2((1-t)x)$$

para todo $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$, $x \in S^{n-1} = \partial D^n$, recebe o nome de *soma conexa* de M_1 e M_2 relativa aos mergulhos f_1 e f_2 e é designado por $M_1 \# M_2$. Em outras palavras, a soma conexa $M_1 \# M_2$ de duas variedades n -dimensionais é obtida removendo-se o interior de um disco D^n de cada uma delas e identificando uma vizinhança dos bordos resultantes da operação anterior.

Definição I.1.6 - Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é *transversal* à subvariedade $L \subset N$ se para todo $a \in M$ ou $f(a) \notin L$, ou se $f(a) \in L$, então

$$D_a f(D_a M) + D_{f(a)} L = D_{f(a)} N$$

Notação : $f \pitchfork L$.

Teorema I.1.7 - Sejam M e N variedades diferenciáveis, e L uma subvariedade de N . Seja ainda $f: M \rightarrow N$ diferenciável e assumamos que $f \pitchfork L$. Então $f^{-1}(L)$ é uma subvariedade de M . Também, $\text{codim } f^{-1}(L) = \text{codim}(L)$. Em particular, se $\dim M = \text{codim } L$, então $f^{-1}(L)$ consiste apenas de pontos isolados.

Demonstração : (veja [8], pag.52)

Definição I.1.8 - Dizemos que o ponto crítico de uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é *não degenerado*, se o determinante da matriz hessiana neste ponto for diferente de zero. E f é dita *de Morse* se seus pontos críticos pertencem a $M - \partial M$ e são não degenerados.

Definição I.1.9 - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Um campo de vetores X sobre M é um campo *pseudo-gradiente* para f se :

- (i) $X(f) > 0$ no complementar do conjunto dos pontos críticos de f , e
- (ii) para todo ponto crítico p de f , existem coordenadas $(x_1, \dots, x_{n+1})$, dadas por um sistema de coordenadas (U, φ) , em torno de p tais que

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n+1} x_i^2, \text{ para todo } x = (x_i) \in \varphi(U)$$

e X tem coordenadas $(-x_1, \dots, -x_{\lambda}, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ em U .

Observação : Se $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função de Morse sem pontos críticos, ou seja, se f for uma submersão, então um campo X em M é pseudo-gradiente para f se, e somente se, satisfaz apenas a condição (i) da definição I.1.9 ($X(f)(x) > 0, \forall x \in M$). Ainda mais, toda função de Morse, definida em uma variedade compacta, admite um campo pseudo-gradiente (veja [12], pag.20).

Proposição I.1.10 - Seja M uma variedade diferenciável compacta com $\partial M = V_0 \cup V_1$. Se M admitir uma função de Morse f sem pontos críticos, com $f^{-1}(0) = V_0$ e $f^{-1}(1) = V_1$, então M é difeomorfa ao produto $V_0 \times [0, 1]$.

Demonstração :

Sejam $f: M^{n+1} \longrightarrow [0, 1]$ uma função de Morse sem pontos críticos com $f^{-1}(0) = V_0$ e $f^{-1}(1) = V_1$ e X um campo pseudo-gradiente para f . Como $X(f)(x) > 0, \forall x \in M$, podemos normalizar o campo multiplicando X , em cada ponto x de M , pelo número real positivo $\frac{1}{X(f)(x)}$. Podemos então considerar $X(f) \equiv 1$ sobre M .

Considere (U_0, φ_0) um sistema de coordenadas em torno de um ponto $p \in \partial M$, com coordenadas locais $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ($x_{n+1} \geq 0$). A função $f \circ \varphi_0^{-1}: \varphi_0(U_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ se estende a uma função diferenciável g definida em um aberto U do $\mathbb{R}^{n+1}$. O campo X expresso nestas coordenadas também se estende a U . Logo o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias se aplica localmente a M .

Seja $\varphi: [a, b] \longrightarrow M$ uma curva integral qualquer para o campo de vetores X . Então

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi) = X(f) \equiv 1,$$

portanto

$$f(\varphi(t)) = t + c \quad (c = \text{constante}).$$

Fazendo uma mudança de parâmetro, $\psi(s) = \varphi(s - c)$, obtemos uma curva integral que satisfaz

$$f(\psi(s)) = s.$$

Cada curva integral pode ser estendida de modo único a um intervalo maximal, e este tem que ser $[0, 1]$, pois M é compacta. Então para cada $y \in M$ existe uma única curva integral maximal

$$\psi_y: [0, 1] \longrightarrow M,$$

que passa em y e satisfaz $f(\psi_y(s)) = s$. Mais ainda, $\psi_y(s)$ é diferenciável como função das variáveis y e s .

O difeomorfismo procurado,

$$h: V_0 \times [0, 1] \longrightarrow M,$$

é definido da seguinte forma :

$$h(y_0, s) = \psi_{y_0}(s),$$

cuja inversa é dada por :

$$h^{-1}(y) = (\psi_y(0), f(y)).$$

■

Corolário I.1.11 (Teorema da Vizinhança Colarinho) - Seja M uma variedade diferenciável com bordo não vazio. Então existe uma vizinhança de ∂M difeomorfa a $\partial M \times [0, 1]$.

Demonstração :

Seja $f: M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função diferenciável com $f^{-1}(0) = \partial M$ e $df \neq 0$ em uma vizinhança U de ∂M (veja [12],pg.9). Então f é uma função de Morse sobre $f^{-1}([0, \frac{\varepsilon}{2}])$, onde $\varepsilon > 0$ é o mínimo da função f sobre o compacto $M - U$. Pela Proposição I.1.10, existe um difeomorfismo entre $f^{-1}([0, \frac{\varepsilon}{2}])$ e $\partial M \times [0, 1]$.

■

I.2 - FIBRADOS DIFERENCIÁVEIS

Introduziremos nesta seção as definições sobre fibrados necessárias ao nosso trabalho, assim como o Teorema de Ehresmann que será de grande importância no desenvolvimento deste. Denotaremos por $p_1: A \times B \rightarrow A$ e $p_2: A \times B \rightarrow B$ as projeções canônicas sobre a primeira e segunda coordenadas, respectivamente.

Definição I.2.1 - Um *fibrado* (*localmente trivial*) é uma quádrupla (T, p, B, F) , onde T, B, F são espaços topológicos, $p: T \rightarrow B$ é uma aplicação contínua e sobrejetora, tal que para todo $b \in B$ existem uma vizinhança $U \subset B$ de b e um homeomorfismo $\phi_U: T|_U \rightarrow U \times F$, com $T|_U = \{p^{-1}(b), b \in U\}$, que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} T|_U & \xrightarrow{\phi_U} & U \times F \\ \downarrow p & \swarrow p_1 & \\ U & & \end{array}$$

O fibrado é chamado *diferenciável* se T, B e F forem variedades diferenciáveis, p uma aplicação diferenciável e ϕ_U um difeomorfismo. Se cada fibra possuir uma estrutura de espaço vetorial, tal que para cada $b \in B$, $\varphi_b: p^{-1}(b) \rightarrow F$, $\varphi_b = p_2 \circ \phi|_{p^{-1}(b)}$ é linear, (T, p, B, F) é chamado *fibrado vetorial*.

Estamos particularmente interessados em fibrados de círculos, isto é, com fibra difeomorfa a S^1 . Um fibrado (fibrado diferenciável) de círculos é chamado *ortogonal* (*fibrado diferenciável ortogonal*) quando, para cada par $(U, \phi = \phi_U)$, $(V, \psi = \psi_V)$, com $b \in U \cap V$, a composta $\phi_b \circ \psi_b^{-1}$ pertencer a $\mathcal{O}(2)$.

Teorema I.2.2 (de Ehresmann) [6] - Sejam M e N variedades diferenciáveis conexas sem bordo, e $f: M \longrightarrow N$ uma submersão própria sobre N . Então M é um fibrado diferenciável sobre N .

Demonstração :

Nós mostraremos que, para cada ponto $y_0 \in N$ existe uma vizinhança U de y_0 , uma variedade fechada F e um difeomorfismo $h: U \times F \longrightarrow f^{-1}(U)$ tal que $f(h(y, x)) = y$, para todo $y \in U$ e $x \in F$.

Temos que $f^{-1}(y_0)$ é fechada como uma subvariedade de M e também como uma variedade independente, para todo $y_0 \in N$. Seja $F = f^{-1}(y_0)$, como f é própria, temos que F é compacta. Escolha um mergulho j de M^n em $\mathbb{R}^q$ e uma aplicação $\tau: F \longrightarrow G(q, q-n)$, onde G é o Grassmanniano de τ , que associa a cada $x \in F$ o complementar ortogonal de $T_x j(T_x M)$ em $G(q, q-n)$. Considere $D_x \rho_x$ o disco fechado em $j(x) + \tau(x)$ de centro $j(x)$ e raio ρ_x . Como $f(F)$ é compacta, podemos escolher um $\rho \in \mathbb{R}$ conveniente de forma que $D_x \rho \cap D_{x'} \rho \neq \emptyset$, $\forall x, x' \in X$ e $\bigcup_{x \in X} D_x \rho$ forme uma vizinhança de $f(F)$ em $\mathbb{R}^q$ cujo interior denotamos por $Tub_\tau \rho$. Agora considere a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi: j^{-1}(Tub_\tau \rho) &\longrightarrow N \times F \\ x &\longmapsto (f(x), pr_\tau(j(x))). \end{aligned}$$

As seguintes propriedades de ϕ são imediatas: ϕ é de classe $\mathcal{C}^\infty$; $\phi(\partial(j^{-1}(Tub_\tau \rho))) \subset \partial(N \times F)$; ϕ é injetora sobre F ; e a diferencial $d_x \phi$ é não degenerada para todo $x \in F$.

Como F é compacta, concluímos que ϕ define um difeomorfismo de uma vizinhança de F sobre uma vizinhança de $\phi(F) = y_0 \times F$. Usando mais uma vez a compacidade de F , vemos que a última vizinhança contém um conjunto da forma $V \times F$, onde V é uma vizinhança de y_0 em N . Seja U uma vizinhança de y_0 , tal que $j(f^{-1}(U)) \subset Tub_\tau \rho$. Então $\phi^{-1}(U \times F)$ é igual a $f^{-1}(U)$, assim temos a aplicação procurada :

$$h = \phi^{-1} |_{U \times F}: U \times F \longrightarrow f^{-1}(U).$$

■

I.3 - ISOMORFISMO DE FIBRADOS

Definição I.3.1 - Sejam $\xi = (T, p, B, F)$ e $\xi' = (T', p', B', F')$ dois fibrados diferenciáveis. Chamaremos de *aplicação de fibrados* a um par (ϕ, φ) de aplicações $\phi: T \longrightarrow T'$ e $\varphi: B \longrightarrow B'$ diferenciáveis que faz o seguinte diagrama comutar :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\phi} & T' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\varphi} & B' \end{array}$$

Definição I.3.2 - Na definição anterior, quando B for igual a B' , $\varphi = id: B \longrightarrow B'$ e ϕ for um difeomorfismo diremos que os fibrados são *isomorfos* e que ϕ é um *isomorfismo de fibrados*.

Considere um fibrado $q: E \longrightarrow M \times I$, onde M e E são variedades diferenciáveis compactas, M sem bordo e I o intervalo $[0, 1]$. Veremos a seguir que E é isomorfo a um fibrado do tipo $W \times I$ sobre $M \times I$, onde $W = q^{-1}(M \times \{0\})$. Considere ainda a submersão $f = p_2 \circ q: E \longrightarrow I$. Observe que $\partial E = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$ e sendo $V = f^{-1}(0)$, por construção temos que $W = V$.

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \downarrow q & \searrow f & \\ M \times I & \xrightarrow{p_2} & I \end{array}$$

Nas hipóteses e notações acima, a Proposição I.1.10 equivale ao seguinte resultado :

Proposição I.3.3 - Se $X: E \longrightarrow TE$ é um campo pseudo-gradiente para f , então existe um difeomorfismo

$$\phi: V \times I \xrightarrow{\cong} E,$$

tal que $\phi^{-1}(y) = (\varphi_1(y), f(y))$, onde $\varphi_1(y)$ = interseção com $f^{-1}(0)$ da curva integral de X que passa por y .

Demonstração :

Temos que $f: E \longrightarrow I$ é uma função de Morse sem pontos críticos, pois é uma submersão, e pela Proposição I.1.10, existe um isomorfismo $\phi: V \times I \longrightarrow E$. Então $\phi(y, s) = \psi_y(s)$, onde $\psi_y: [0, 1] \longrightarrow M$ é a única curva integral maximal que passa em y satisfazendo $f(\psi_y(s)) = s$ e $\psi_y(0) \in V$.

O difeomorfismo $\phi: V \times I \longrightarrow E$ é definido da seguinte forma :

$$\phi(y_0, s) = \psi_{y_0}(s)$$

com inversa

$$\phi^{-1}(y) = (\psi_y(0), f(y)).$$

Seja $\varphi_1: E \longrightarrow V$

$$y \longmapsto \psi_y(0).$$

Portanto φ_1 está bem definida, pois para cada $y \in E$, existe uma única $\psi_y: [0, 1] \longrightarrow E$ tal que $\psi_y(0) \in V$, e é difeomorfismo, pois $\psi_y(0)$ também o é em relação a y . Então $\phi^{-1}(y) = (\varphi_y(0), f(y)) = (\varphi_1(y), f(y))$. ■

Mostraremos, através do resultado acima, que o fibrado $q: E \longrightarrow M \times I$ é isomorfo a um fibrado do tipo $W \times I$, ou seja :

Proposição I.3.4 - Nas hipóteses acima, existe um isomorfismo de fibrados ϕ , conforme o seguinte diagrama :

$$\begin{array}{ccc} W \times I & \xrightarrow{\phi} & E \\ & \searrow q|_W \times id \quad \swarrow q & \\ & M \times I & \end{array}$$

Demonstração :

Para cada $x \in M$ considere S_x a imagem inversa de $\{x\} \times I$ através de q . Temos que S_x também é dado por $(p_1 \circ q)^{-1}(x)$ e é uma subvariedade de E com bordo. Fixemos uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em E . Para cada $x \in M$, defina $f^x: S_x \rightarrow I$ como sendo a restrição de f à subvariedade S_x .

Definimos o campo

$$X: E \rightarrow TE$$

por

$$X(y) = \text{grad } f^x(y),$$

onde $p_1(q(y)) = x$ e o gradiente $\text{grad } f^x$ é tomado relativamente à métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em S_x induzida pela métrica riemanniana de M , para cada $x \in M$.

O campo X está bem definido (em E), pois para cada $y \in E$ existe um único $x \in M$ tal que $y \in S_x$ e, para $\nu \in T_y S_x$ temos :

$$\langle X(y), \nu \rangle = \langle \text{grad } f^x(y), \nu \rangle = (df^x)_y(\nu).$$

Isso prova ainda que para cada $x \in M$, a restrição de X a S_x é C^∞ . Mais que isso, X é C^∞ em E .

De fato, observe que, sendo $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow E$ uma curva em S_x com $\gamma(0) = y$, $\gamma'(0) = \nu$, temos que :

$$(df^x)_y(\nu) = \frac{d}{dt} f^x(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = df_y(\nu)$$

e

$$\langle \text{grad } f^x(y), \nu \rangle = \langle \text{grad } f(y), \nu \rangle$$

embora, para cada x , $\text{grad } f^x(y)$ só esteja definido em $T_y S_x$.

Dado $y_0 \in U$, considere sistemas de coordenadas locais (U, φ) , em E , onde $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m+(n-m)}$ e $\varphi = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n)$, considere também (V, ψ) em M , onde $\psi = (y_1, \dots, y_m)$ com $\psi(V) = U_1$, de forma que para cada $y \in U$ tenhamos $p_1(q(y)) \in V$, $\varphi(y_0) = (0, \dots, 0, \dots, 0)$, $\psi(p_1(q(y_0))) = (0, \dots, 0)$ e, relativamente aos quais $p_1 \circ q$ é dada localmente por :

$$(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m).$$

Então $\{\frac{\partial}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(y)\}$ é uma base de $T_y E$, para cada $y \in U$, $\{\frac{\partial}{\partial y_{m+1}}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(y)\}$ é uma base de $T_y S_x$ para cada $y \in U$ e $x = p_1(q(y))$.

Pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, obtemos n -campos $\mathcal{C}^\infty$ em $TE|_U$, $e_1, \dots, e_n$, tal que $\{e_1(y), \dots, e_n(y)\}$ é uma base ortonormal de $T_y E$, para cada $y \in U$ e $\{e_{m+1}(y), \dots, e_n(y)\}$ é uma base de $T_y S_x$, para cada $y \in U$ e $x = p_1(q(y))$.

Relativamente a essa base podemos escrever :

$$X(y) = \sum_{i=m+1}^n \langle \text{grad } f^x(y), e_i \rangle e_i = \sum_{i=m+1}^n \langle \text{grad } f(y), e_i \rangle e_i$$

e isto implica que X é $\mathcal{C}^\infty$ em U , e portanto em E .

Observe que $X(y)$ é a projeção ortogonal relativa a $\langle, \rangle$ de $Y(y) = \text{grad } f(y)$ sobre $T_y S_x$, para cada $y \in S_x$. Além disso, para cada $x \in M$,

$$X|_{S_x}: S_x \longrightarrow TS_x$$

é o campo gradiente de f^x , o que mostra que as curvas integrais de X estão contidas nas subvariedades S_x de E e que $X(f^x)(y) > 0$, para cada $y \in S_x$, e para cada $x \in M$.

Segue ainda que, para cada $x \in M$ e $y \in S_x$, $X(f)(y)$ só depende da restrição f^x , então:

$$X(f)(y) = X(f^x)(y)$$

para $y \in S_x$. Logo

$$X(f)(y) > 0, \text{ para todo } y \in M,$$

e X é um campo pseudo-gradiente de f em E .

Pela Proposição I.3.3, existe um difeomorfismo

$$\phi: V \times I \xrightarrow{\cong} E$$

tal que $\phi^{-1}(y) = (\varphi_1(y), f(y))$, onde $\varphi_1(y)$ = interseção com $f^{-1}(0)$ da curva integral de X que passa por y .

Consideremos o seguinte diagrama comutativo :

$$\begin{array}{ccc} V \times I & \xrightarrow{\phi} & E \\ & \searrow q \circ \phi & \swarrow q \\ & M \times I & \end{array}$$

Então $q \circ \phi: V \times I \longrightarrow M \times I$ é uma submersão. Como $V \times I$ é compacta segue que $q \circ \phi$ é própria e, pelo Teorema de Ehresmann, $V \times I$ é um fibrado sobre $M \times I$. Portanto ϕ é um isomorfismo de fibrados.

De fato, de acordo com o diagrama abaixo, temos que :

$$\begin{array}{ccccc} V \times I & \xrightarrow{\phi} & E & \xrightarrow{\varphi_1} & V \\ & \searrow q \circ \phi & \downarrow q & \searrow f & \\ M & \xleftarrow{p_1} & M \times I & \xrightarrow{p_2} & I \end{array}$$

se $y = \phi(u, t)$, então $(u, t) = \phi^{-1}(y) = (\varphi_1(y), f(y)) = (\varphi_1(y), p_2 \circ q(y))$ implica que $p_2 \circ q \circ \phi(u, t) = t$, ou seja, $p_2 \circ q \circ \phi: V \times I \longrightarrow I$ restrito ao intervalo I é a própria função identidade, e que $u = \varphi_1(y) \in S_x$ e $y \in S_x$, pois a curva integral que passa por y está contida em S_x . Identificando $p_1 \circ q$ com $q|_V: V \longrightarrow M \times \{0\} = M$, tem-se que $x = q(y)$, isto é, $q \circ \phi = q|_V \times id$. ■

O próximo teorema nos dá as condições para que o domínio de uma função de Morse seja homeomorfo à esfera S^n , este resultado também é conhecido como Teorema de Reeb e nele acrescentamos os casos onde o domínio é difeomorfo à esfera.

Teorema I.3.5 [4] - Seja M é uma variedade fechada n -dimensional que admite uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ com apenas dois pontos críticos. Então M é homeomorfa à esfera S^n . Além disso, se $n \leq 6$, homeomorfismo pode ser trocado por difeomorfismo.

Demonstração :

Sejam s_0 e s_1 os pontos críticos da função f com imagens $f(s_0) = t_0$ e $f(s_1) = t_1$, respectivamente. Pelo fato de M ser compacta, podemos assumir t_1 como sendo o ponto de máximo e t_0 como sendo o de mínimo de f . Pelo Lema de Morse (veja [4], pag.11), existe um sistema de coordenadas em uma vizinhança U_1 de s_1 no qual f pode ser escrito na forma :

$$f(x_1, \dots, x_n) = t_1 - x_1^2 - \dots - x_n^2.$$

Portanto existe um número $b < t_1$ tal que $D_+ = f^{-1}[b, t_1]$ é difeomorfo ao disco D^n , com $\partial D_+ = f^{-1}(b) \cong S^{n-1}$. Analogamente, existe um número $a > t_0$ tal que $D_- = f^{-1}[t_0, a] \cong D^n$ e $\partial D_- = f^{-1}(a) \cong S^{n-1}$.

Como $f|_{f^{-1}[a,b]}$ é uma função de Morse sem pontos críticos, pela Proposição I.3.3, temos que :

$$f^{-1}[a, b] \cong f^{-1}(a) \times [a, b] \cong S^{n-1} \times [a, b].$$

Disto decorre a seguinte decomposição de M através da função f :

$$\begin{aligned} M = f^{-1}[t_0, t_1] &= f^{-1}[t_0, a] \cup f^{-1}[a, b] \cup f^{-1}[b, t_1] \\ &\cong D^n \cup (S^{n-1} \times [a, b]) \cup D^n \\ &= D_0^n \cup (S^{n-1} \times [a, b]) \cup D_1^n \end{aligned}$$

Identificando os pontos de ∂D_0^n com os de $S^{n-1} \times \{a\}$, e os pontos de $S^{n-1} \times \{b\}$ com os de ∂D_1^n , temos que M é homeomorfo a S^n .

Conforme N.H.Kuiper no resumo introdutório do trabalho de Cerf [3], a unicidade da estrutura diferenciável numa variedade combinatória n -dimensional é válida para $n \leq 6$, portanto, nestas dimensões, a variedade M é difeomorfa a S^n . ■

I.4 - SEQUÊNCIA EXATA DE GRUPOS DE HOMOTOPIA PARA ESPAÇOS FIBRADOS

Descreveremos nesta seção algumas definições e um resultado de topologia algébrica. Este diz respeito à exatidão da sequência de grupos de homotopia para espaços fibrados, em particular, para fibrados diferenciáveis, e será utilizado na demonstração do Teorema III.3. Mais detalhes poderão ser visto em Dubrovin [5].

Sejam X, Y, K espaços topológicos e $f: X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que uma aplicação $\tilde{\varphi}: K \longrightarrow X$, de acordo com o diagrama abaixo, é um *levantamento* de $\varphi: K \longrightarrow Y$ se $f \circ \tilde{\varphi} = \varphi$. Dizemos também que $\tilde{\varphi}$ é um *recobrimento* de φ .

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \nearrow \tilde{\varphi} \quad \downarrow f & \\ K & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Definição I.4.1 - Dizemos que (X, f, Y) é um *espaço fibrado* com respeito ao espaço topológico K , se :

i) para qualquer homotopia

$$\phi = \{\varphi_t\}: K \times [0, 1] \longrightarrow Y \quad , \quad \varphi_0 = \varphi$$

existir uma homotopia

$$\tilde{\phi} = \{\tilde{\varphi}_t\}: K \times [0, 1] \longrightarrow X \quad , \quad \tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}$$

que é um levantamento de ϕ (isto é, $f \circ \tilde{\varphi}_t = \varphi_t$, $0 \leq t \leq 1$)

ii) qualquer $k \in K$ que é mantido constante por φ_t em algum segmento δ contido em $[0, 1]$ ($\varphi_t(k) = cte$, $\forall t \in \delta$), é também mantido constante por $\tilde{\varphi}_t$ para $t \in \delta$ ($\tilde{\varphi}_t(k) = cte$, $\forall t \in \delta$).

Tal homotopia $\tilde{\phi}$ é chamada uma homotopia de recobrimento para ϕ e dizemos também que a aplicação f tem a propriedade de levantamento de homotopia com respeito a K .

Seja (X, f, Y) um espaço fibrado, onde X e Y são espaços topológicos com fibras conexas. Sejam ainda, $F = f^{-1}(y_0)$ uma fibra sobre $y_0 \in Y$, $f_0 \in F$ um ponto da fibra e $\pi_i(X, F, f_0)$ o i -ésimo grupo de homotopia relativa do par (X, F) .

Cada aplicação $D^i \longrightarrow X$ que leva o bordo $\partial D^i = S^{i-1}$ no ponto f_0 , determina um elemento de $\pi_i(X, f_0)$ e também um elemento de $\pi_i(X, F, f_0)$. Mais ainda, como 2 elementos que pertencem à mesma classe de $\pi_i(X, f_0)$ também pertencem à mesma classe de $\pi_i(X, F, f_0)$, obtemos o homomorfismo :

$$j: \pi_i(X, f_0) \longrightarrow \pi_i(X, F, f_0).$$

Como um representante k de uma classe de $\pi_i(X, F, f_0)$ satisfaz :

$$\begin{aligned} k|_{\partial D^i}: S^{i-1} &\longrightarrow F \\ s_0 &\longmapsto f_0 \end{aligned},$$

de uma forma natural, temos que $k|_{\partial D^i} \in \pi_{i-1}(F, f_0)$.

E isto define um homomorfismo (de bordo) :

$$\partial: \pi_i(X, F, f_0) \longrightarrow \pi_{i-1}(F, f_0).$$

Desta forma, temos a seguinte sequência exata do par (X, F) :

$$\dots \longrightarrow \pi_i(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X, f_0) \xrightarrow{j} \pi_i(X, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F, f_0) \longrightarrow \dots$$

onde i_* é a aplicação induzida da inclusão $i: F \hookrightarrow X$.

Teorema I.4.2 - A aplicação induzida f_* é um isomorfismo (ou seja, $\pi_i(X, F, f_0) \cong \pi_i(Y, y_0)$). Então temos a seguinte sequência exata do fibrado (X, f, Y)

$$\dots \longrightarrow \pi_i(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X, f_0) \xrightarrow{f_* \circ j} \pi_i(Y, y_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F, f_0) \longrightarrow \dots$$

onde $\pi_i(X, F, f_0)$ está identificado com $\pi_i(Y, y_0)$.

Demonstração :

i) $\ker f_*$ é trivial.

Seja $\hat{\alpha} \in \pi_i(X, F, f_0)$ tal que $f_*(\hat{\alpha}) \in \pi_i(Y, y_0)$ é o elemento identidade.

$$\begin{aligned}\alpha \in \hat{\alpha} &\implies \alpha: D^i \longrightarrow X \\ \partial D^i &\longmapsto F \\ s_0 &\longmapsto f_0.\end{aligned}$$

Seja $\beta = f\alpha$, então β é um representante da classe $\hat{\beta} =$ identidade de $\pi_i(Y, y_0)$.

Então existe $\beta_t: D^i \longrightarrow Y$ homotopia tal que :

$$\begin{aligned}\beta_t(\partial D^i) &= y_0, \forall t \in [0, 1] \\ \beta_0 &= \beta \\ \beta_1(D^i) &= y_0.\end{aligned}$$

Pela propriedade de espaço fibrado, existe um recobrimento α_t de β_t tal que :

$$\begin{aligned}\alpha_t: D^i &\rightarrow X \\ \alpha_0 &= \alpha \\ \alpha_t(s_0) &= f_0, \forall t \in [0, 1].\end{aligned}$$

$$\text{Como } \begin{cases} \beta_t(\partial D^i) = y_0 \\ \beta_1(D^i) = y_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_t(\partial D^i) \subset F \\ \alpha_1(D^i) \subset F \end{cases}, \forall t \in [0, 1]$$

temos que α representa o elemento identidade de $\pi_i(X, F)$.

ii) f_* é sobrejetora

$$\begin{array}{lll}\text{Para cada } \beta: D^i \rightarrow Y & \text{construiremos uma} & \alpha: D^i \rightarrow X \\ \beta(\partial D^i) = y_0 & & \alpha(\partial D^i) \subset F \\ & & \alpha(s_0) = f_0\end{array}$$

tal que $\beta = f\alpha$.

Como o disco é contrátil existe $\beta_t: D^i \longrightarrow Y$ homotopia tal que :

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \beta \\ \beta_t(s_0) &= y_0, \quad \forall t \in [0, 1] \\ \beta_1(D^i) &= y_0\end{aligned}$$

Agora cobrimos a aplicação $\beta_1: D^i \longrightarrow y_0$ pela aplicação $\alpha_1: D^i \longrightarrow f_0$.

Pela propriedade de espaço fibrado, existe uma homotopia que recobre β_t , com $\beta_1 = f \alpha_1$.

$$\begin{aligned}\text{Como } \beta_t(s_0) = y_0 &\implies \alpha_t(s_0) = f_0, \quad \forall t \in [0, 1] \\ \beta_t(\partial D^i) = y_0 &\implies \alpha_t(\partial D^i) = f_0, \quad \forall t \in [0, 1]\end{aligned},$$

temos que ter $\alpha_0(\partial D^i) \subset F$ para $\alpha_0: D^i \longrightarrow X$.

$$\alpha_0(s_0) = f_0$$

Mas $\alpha = \alpha_0$ é um elemento de $\pi_i(X, F, f_0)$ tal que $f_*(\alpha) = \beta$, ou seja, f_* é sobrejetora.

CAPÍTULO II

Resultados Iniciais

II.1 - APLICAÇÕES GENÉRICAS ESPECIAIS

Dentre os vários resultados sobre aplicações diferenciáveis, o estudo local, em torno de um ponto singular, pode nos fornecer informações importantes a respeito das variedades em questão. Quando a aplicação é genérica, isto é, só possui singularidades genéricas, sua forma em coordenadas, em torno dos pontos singulares, é mais simples e estas podem ser encontradas, por exemplo, em Morin [14]. Em um caso particular temos a seguinte :

Definição II.1.1 - A aplicação diferenciável $f: M^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *genérica* se em torno de cada ponto singular $a \in M$ de f e de sua imagem $f(a) \in \mathbb{R}^n$, existirem vizinhanças abertas U, V e coordenadas $(x_1, \dots, x_{n+1})$, $(y_1, \dots, y_n)$ em U e V , respectivamente, com $(x_1(a), \dots, x_{n+1}(a)) = (0, \dots, 0)$ tais que f pode ser representado nestas vizinhanças por um dos seguintes sistemas :

$$(I) \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ y_n = x_n^2 + x_{n+1}^2 \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ y_n = x_n^2 - x_{n+1}^2 \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ y_n = \pm x_n^2 + \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_i x_{n+1}^i + x_{n+1}^{\lambda+1}, \quad 2 \leq \lambda \leq n. \end{cases}$$

Tais sistemas são chamados de *formas canônicas de f* no ponto a .

Definição II.1.2 - Uma aplicação $f: M^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável que apresentar apenas pontos singulares do tipo (I) será chamada *genérica especial* e as singularidades *pontos de dobra definida*. O conjunto destas singularidades será denotado por S_0 .

Nesse caso, verifica-se facilmente que S_0 é uma subvariedade sem bordo de M , uma vez que em uma vizinhança U como acima, em torno de um ponto singular $a \in S_0$, temos os pontos críticos de f em U dados em coordenadas por $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 0)$, com isso $\dim S_0 = n - 1$, portanto $\text{codim } S_0 = 2$. Além disso, quando M é compacta, S_0 é fechada.

Seja M uma variedade $(n + 1)$ -dimensional fechada. Dada uma aplicação genérica $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definimos sobre M uma relação de equivalência que identifica pontos de uma mesma componente conexa das fibras F_y de f , onde $F_y = \{x \in M : f(x) = y\}$, $y \in \text{Im } f$,

ou seja,

$$x \sim x' \iff \begin{cases} f(x) = f(x') = y \text{ e } x, x' \text{ pertencem a uma} \\ \text{mesma componente conexa de } F_y. \end{cases}$$

Esta relação define um espaço quociente W_f , e a aplicação quociente $q: M \longrightarrow W_f$ induz a aplicação $f': W_f \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que faz o seguinte diagrama comutar :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow q & \nearrow f' & \\ W_f & & \end{array}$$

Definição II.1.3 - A decomposição acima é chamada *fatorização de Stein* de f . Chamaremos W_f também de fatorização de Stein.

II.2 - CARACTERIZAÇÃO DE M E W_f PARA APLICAÇÕES GENÉRICAS ESPECIAIS

Restringiremos o nosso estudo à aplicações genéricas especiais de uma variedade fechada e orientável de dimensão $n + 1$ no $\mathbb{R}^n$, onde $n \geq 1$. Neste caso verificamos que W_f é uma variedade de dimensão n com bordo, f' é uma imersão e M é o quociente de um fibrado de círculos sobre W_f . Provaremos inicialmente que W_f é uma variedade n -dimensional com bordo ∂W_f difeomorfo a S_0 e que $f': W_f \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão.

Lema II.2.1 - Sejam $f: M^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação genérica especial e W_f a sua fatorização de Stein. Então, com a topologia quociente em W_f , $q: M \longrightarrow W_f$ é uma aplicação aberta.

Demonstração :

Seja $U \subset M$ um aberto. Para que $q(U)$ seja aberto em W_f , é suficiente que $q^{-1}(q(U))$ seja aberto em M . Para tanto, mostraremos que existe uma vizinhança aberta V em M em torno de um ponto $z_0 \in q^{-1}(q(U))$ dado, tal que $V \subset q^{-1}(q(U))$.

Suponhamos inicialmente que $z_0 \notin S_0$. Como S_0 é um subconjunto fechado de M e $g = f|_{M-S_0}$ é uma submersão, pelo Teorema da Forma Local das Submersões, existe um sistema de coordenadas (V, φ) em torno de z_0 , com $V \cap S_0 = \emptyset$, e um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(z_0) \in W$, $\varphi(V) = W \times J$, onde J é um intervalo aberto, e $f \circ \varphi^{-1}(y, t) = y$, para $y \in W$ e $t \in J$.

Como g é uma aplicação aberta, $g(U)$ é aberto, assim podemos escolher W contido em $g(U)$. Desta forma temos que $V \subset f^{-1}(f(U))$.

Se $z \in V$, com $\varphi(z) = (y, t)$, então $q^{-1}(q(z)) \cap V = \{\varphi^{-1}(y, t') : t' \in J\}$, logo $V \subset q^{-1}(q(U))$.

Se $z_0 \in S_0$, sejam (V, φ) um sistema de coordenadas em torno de z_0 , com $V = \{\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \in M : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < \varepsilon \text{ e } x_n^2 + x_{n+1}^2 < r\}$ e $(y_1, \dots, y_n)$ coordenadas em $\mathbb{R}^n$ tais que f seja dada localmente nessas coordenadas por :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ y_n = x_n^2 + x_{n+1}^2 \end{cases}$$

Como U é aberto, existem $\varepsilon > 0$ e $r > 0$ suficientemente pequenos de forma que $V \subset U$.

Nesse caso, se $z \in V \cap S_0$, então $z = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 0)$ e $q^{-1}(q(z)) = z$, e se $z \in V - S_0$, com $f(z)$ representado por $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, s)$ então $0 < s < r$ e

$$q^{-1}(q(z)) = \{\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in M : x_n^2 + x_{n+1}^2 = s\},$$

$$\text{logo } q^{-1}(q(V)) = V.$$

$$\text{Portanto } V = q^{-1}(q(V)) \subset q^{-1}(q(U)).$$

■

Proposição II.2.2 - W_f é uma variedade n -dimensional com bordo e ∂W_f é difeomorfo a S_0 .

Demonstração :

Verificaremos primeiro que $f'|_{W_f - q(S_0)}$ é homeomorfismo local.

Novamente, como $f|_{M-S_0}: M-S_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma submersão, dado um ponto $a \in M-S_0$, existem sistemas de coordenadas locais (U, φ) e (V, ψ) em torno de a e $f(a)$, respectivamente, com $\varphi(U) = V \times J$, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, e $f \circ \varphi^{-1}(y, t) = y$ em $V \times J$.

Considere o seguinte diagrama comutativo :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|_U} & V \\ \downarrow q|_U & \nearrow f'|_{q(U)} & \\ q(U) & & \end{array}$$

Como q e $f|_U$ são aplicações abertas e f' é contínua, temos que $q(U)$ é um aberto em torno de $q(a)$ e $f'|_{q(U)}$ é uma aplicação aberta e contínua. E ainda, $f|_U(U) = V$ logo $f'|_{q(U)}(q(U)) = V$ e $f'|_{q(U)}: q(U) \rightarrow V$ é sobrejetora. Se $y \in V$, então $(f|_U)^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y, t)$, para $t \in J$, que é conexo; pela definição de q , $q|_U(\{y\} \times J) = (f'|_{q(U)})^{-1}(y)$ é um único ponto. Assim temos que $f'|_{q(U)}$ é uma bijeção contínua e aberta, portanto, um homeomorfismo sobre V .

Para cada $b \in W_f - q(S_0)$ podemos considerar um ponto $a \in q^{-1}(b)$ e, repetindo o processo acima, determinar uma vizinhança aberta W de b em $q(M-S_0)$ para a qual $f'|_W$ é um homeomorfismo, isto mostra que $f'|_{W_f - q(S_0)}$ é um homeomorfismo local.

Sejam $b_0 \in q(S_0)$ e $a_0 \in S_0$ tal que $q(a_0) = b_0$. Considere U e V vizinhanças abertas de a_0 em M e de $f(a_0)$ em $\mathbb{R}^n$, respectivamente, e $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ coordenadas locais nas quais f é representado por :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ y_n = x_n^2 + x_{n+1}^2 \end{cases}$$

Podemos supor que, aos pontos de U correspondem pontos da forma $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ com $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < \varepsilon$ e $x_n^2 + x_{n+1}^2 < r$, e que aos de V , correspondem pontos $y = (y_1, \dots, y_n)$ com $y_1^2 + \dots + y_n^2 < \varepsilon$ e $|y_n| < r$, com $\varepsilon > 0$ e $r > 0$. Os pontos de U que têm a mesma imagem em $f(U)$ são da forma $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = s < r$, logo $f' |_{q(U)}: q(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetora.

Como q é uma aplicação aberta, $q(U)$ é uma vizinhança aberta de b_0 em W_f , então $f'(q(U)) = f(U) = V \cap \mathbb{R}_+^n$ é um aberto de $\mathbb{R}_+^n$. Assim $f' |_{q(U)}: q(U) \rightarrow V \cap \mathbb{R}_+^n$ é uma bijeção contínua e aberta, logo um homeomorfismo sobre $V \cap \mathbb{R}_+^n$.

Para cada aberto $U \subset M$, nos dois casos acima, consideremos em $q(U)$ as coordenadas $(y_1, \dots, y_n)$ de $V \subset \mathbb{R}^n$, através do homeomorfismo $f' |_{q(U)}: q(U) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, se $U \cap S_0 = \emptyset$; caso contrário, consideremos as coordenadas $(y_1, \dots, y_n)$ de $V \cap \mathbb{R}_+^n$, através do homeomorfismo $f' |_{q(U)}: q(U) \rightarrow V \cap \mathbb{R}_+^n$. Desta forma, obtemos uma estrutura diferenciável em W_f induzida, de modo natural, através do homeomorfismo local f' , já que as mudanças de coordenadas são dadas pela identidade. Com essa estrutura $q: M \rightarrow W_f$ é diferenciável e W_f é uma variedade n -dimensional com bordo. Pelas formas locais acima descritas, verificamos que os pontos de ∂W_f correspondem aos de coordenadas locais com $y_n = 0$, e estes, por sua vez, correspondem aos pontos de S_0 e a restrição de q a S_0 é dada localmente por :

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

Portanto ∂W_f é difeomorfo a S_0 . ■

Corolário II.2.3 - $f': W_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão.

Demonstração :

Da Proposição II.2.2 temos que W_f é uma variedade diferenciável. A estrutura diferenciável introduzida em W_f torna $f': W_f \rightarrow f'(W_f)$ um difeomorfismo local, conseqüentemente, f' é uma imersão no $\mathbb{R}^n$. ■

Observe ainda que W_f é orientável, pois imerge no $\mathbb{R}^n$.

Provaremos a seguir que, se considerarmos W_0 , uma componente conexa de $W_f - q(S_0)$, então $q^{-1}(W_0)$ é um fibrado sobre W_0 , com projeção $q_0 = q|_{q^{-1}(W_0)}$ tal que as fibras são difeomorfas a S^1 . Como $\text{codim} S_0 = 2$ em M , a cada componente conexa $\bar{M}_0$ de $M - S_0$ corresponde uma componente conexa W_0 de W_f menos as componentes conexas de $\partial W_f = q(S_0)$ contidas em W_0 .

Em [2] Burlet & de Rham demonstraram que, dada uma submersão $g: N^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com fibras compactas, as componentes conexas das fibras de f são as fibras de um fibrado localmente trivial N de base A e projeção $q': N \rightarrow A$, que identifica os pontos de uma mesma componente conexa de uma fibra de f . Aplicando em nosso caso, $f: M^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ genérica especial, com $N = M - S_0$, $A = W_f - q(S_0)$ e $q' = q|_N$, obteríamos o resultado acima. Este será provado a seguir com o auxílio do Teorema de Ehresmann.

Proposição II.2.4 - Seja $W = W_f - q(S_0)$. Então $M - S_0$ é um fibrado de círculos sobre W .

Demonstração :

A submersão $q|_{M-S_0}: M - S_0 \rightarrow W_f - \partial W_f$ é própria, pois é restrição de uma aplicação própria tal que $\left(q|_{M-S_0}\right)^{-1}(b) = q^{-1}(b)$, para cada $b \in W_f - \partial W_f$. Como $M - S_0$ e $W_f - \partial W_f$ não têm bordo, o Teorema de Ehresmann implica que $M - S_0$ é um fibrado sobre $W = W_f - \partial W_f$.

Se W_0 for uma componente conexa de W_f , basta verificarmos o tipo da fibra em uma vizinhança de um ponto de $q^{-1}(W_0) \cap S_0$.

Seja $p \in q^{-1}(W_0) \cap S_0$ e considere U, V abertos em torno de p e $f(p)$, respectivamente, onde f é representada por :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ y_n = x_n^2 + x_{n+1}^2 \end{cases}$$

Se $z \in q(U) - \partial W_f$, então $f^{-1}(f'(z)) \cap U = \{\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \in M : x_i = y_i, i=1, \dots, n-1 \text{ e } x_n^2 + x_{n+1}^2 = y_n\}$. Observe que ao ponto z acima, correspondem pontos $(y_1, \dots, y_n)$ com $y_n \neq 0$, senão z pertenceria a $q(S_0)$, ou seja, seria imagem de um ponto crítico da f através de q (veja Prop.II.2.2).

Segue que $q^{-1}(z)$ é difeomorfo a S^1 , e portanto, $M - S_0$ é um fibrado de círculos sobre $W_f - \partial W_f$ com projeção $q|_{M-S_0}$.

■

Até este momento concluímos que :

- q é uma aplicação aberta;
- f' é uma imersão;
- W_f é uma variedade n -dimensional com bordo;
- $M - S_0$ é um fibrado de círculos sobre $W_f - \partial W_f$.

O próximo resultado mostrará o comportamento do fibrado $M - S_0$ sobre $W_f - \partial W_f$ em uma vizinhança de S_0 . Para tanto, consideremos W_f a fatorização de Stein de $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ com projeção $q: M \rightarrow W_f$ e uma vizinhança colarinho de ∂W_f dada pelo mergulho $c: \partial W_f \times [0, 1] \rightarrow W_f$, onde $c(z, 0) = z$. Então $Q = q^{-1}(c(\partial W_f \times [0, 1])) \subset M$ é uma subvariedade com bordo igual a $\partial Q = q^{-1}(c(\partial W_f \times \{1\}))$. Considere os fibrados $Q - \partial Q$ e $\partial Q \times]0, 1]$ sobre $c(\partial W_f \times]0, 1])$ com projeções $q|_{Q-\partial Q}$ e $c \circ (c^{-1}(q|_{\partial Q}) \times id)$, respectivamente, onde identificamos $c^{-1} \circ q|_{\partial Q}: \partial Q \rightarrow \partial W_f \times \{1\} \equiv \partial W_f$.

Proposição II.2.5 - Nas hipóteses acima, os fibrados $\partial Q \times]0, 1]$ e $q^{-1}(c(\partial W_f \times]0, 1]))$ sobre $c(\partial W_f \times]0, 1])$ são isomorfos.

Demonstração :

Seja B_z a imagem inversa de $c(\{z\} \times [0, 1])$ através de q , para $z \in \partial W_f$. Note que B_z é a imagem inversa do valor regular z da submersão

$$g = p_1 \circ (c^{-1}) \circ q: Q \rightarrow \partial W_f,$$

portanto, é uma subvariedade de dimensão 2, com bordo $\partial B_z = q^{-1}(c(z, 1))$.

Dada $h: Q \longrightarrow [0, 1]$, seja $h_z = h|_{B_z}$, então

$$x \longmapsto p_2((c^{-1})(q(x)))$$

$h_z: B_z \longrightarrow J$ é uma função de Morse, com o único ponto crítico $q^{-1}(z)$, que é um mínimo, pois este corresponde ao ponto $h_z^{-1}(0) = q^{-1}(c(z \times \{0\}))$.

Fixemos em M uma métrica riemanniana $<, >$.

Seja X um campo C^∞ em Q , dado por $X(x) =$ projeção ortogonal relativo a $<, >$ do campo $Y(x) = \text{grad } h(x)$ sobre $T_x B_z$, para $x \in B_z$.

De forma análoga à Proposição I.3.4, podemos considerar sistemas de coordenadas locais (U, φ) em Q , e (U_1, φ_1) em B_{z_0} com $\varphi(U) = \varphi_1(U_1) \times U_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$, de forma a obter uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de $T_x Q$ com $\{e_1, e_2\}$ base de $T_x B_z$, na qual $X(x)$ pode ser escrito sob a forma:

$$X(x) = \langle \text{grad } h(x), e_1 \rangle e_1 + \langle \text{grad } h(x), e_2 \rangle e_2$$

Claramente, $X(x) = \text{grad } h_z(x)$, para $x \in B_z$.

Observe que as curvas integrais de X estão contidas nas subvariedades B_z , $z \in \partial W_f$, e que as singularidades de X são os pontos de S_0 .

Assim, para cada $x \in Q - S_0$, $x \in B_z$, as derivadas direcionais $X(h)(x)$ só dependem de h_z , isto é,

$$X(h)(x) = X(h_z)(x),$$

e como $X|_{B_z}$ é o campo gradiente de h_z , então $X(h)(x) > 0$, para todo $x \in Q - S_0$. Além disso, obviamente $X(h)(x) = 0$, para $x \in S_0$.

Normalizando o campo X obtemos o campo $Y: Q - S_0 \longrightarrow T(Q - S_0)$,

$$Y(x) = \frac{X(x)}{X(h)(x)}$$

Então, se $\gamma: [a, b] \longrightarrow Q - S_0$ é uma curva integral de Y , temos:

$$\frac{d}{dt}(h \circ \gamma) = Y(h) \equiv 1,$$

logo $h \circ \gamma(t) = t + c$. Reparametrizando $\delta(s) = \gamma(s - c)$ temos $h \circ \delta(s) = s$, onde $\delta(s)$ é uma curva integral de Y .

Sejam z e t com $\delta(t) \in B_z$. Então z é o único ponto crítico de h_z e é um mínimo, e $h \circ \delta(t) = t$. Então o intervalo maximal de δ é $]0, 1]$, com $\delta(1) \in \partial Q$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} \delta(t) = z$.

Para qualquer $0 < \varepsilon < 1$, $W_\varepsilon = h^{-1}[\varepsilon, 1] \subset Q$ é uma variedade compacta. Portanto, para cada $x \in W_\varepsilon$ existe uma única curva integral maximal $\delta_x: [\varepsilon, 1] \rightarrow W_\varepsilon$ que passa por x e satisfaz $\delta_x(s) = s$.

Além disso, a função $\psi_\varepsilon: W_\varepsilon \times [\varepsilon, 1] \rightarrow W_\varepsilon$ é C^∞ .

$$(x, s) \mapsto \delta_x(s)$$

Claramente, podemos estender tais curvas integrais a $Q - S_0$.

$$\delta_x:]0, 1] \rightarrow Q - S_0$$

para cada $x \in Q - S_0$, e as funções ψ_ε à função C^∞

$$\psi: (Q - S_0) \times]0, 1] \rightarrow Q - S_0$$

$$(x, s) \mapsto \psi_\varepsilon(x, s)$$

se $x \in W_\varepsilon$.

Assim a função $\phi: \partial Q \times]0, 1] \rightarrow Q - S_0$, onde $\delta(1) = u$, é um difeo-

$$(u, t) \mapsto \delta(t)$$

morfismo e sua inversa é dada por $\phi^{-1}: Q - S_0 \rightarrow \partial Q \times]0, 1]$.

$$x \mapsto (\delta_x(1), h(x))$$

Obtemos então, como na Proposição I.3.4, o isomorfismo de fibrados sobre $c(\partial W_f \times]0, 1])$:

$$\begin{array}{ccc} \partial Q \times]0, 1] & \xrightarrow{\phi (\cong)} & q^{-1}(c(\partial W_f \times]0, 1])) \\ \searrow (q|_{\partial Q}) \times id & & \swarrow q|_{(Q-S_0)} \\ & c(\partial W_f \times]0, 1]) & \\ & \cap & \\ & W_f - \partial W_f & \end{array}$$

CAPÍTULO III

Resultados Principais

Os teoremas principais deste trabalho, Teoremas III.1 e III.2, generalizam os resultados, com $n = 2$, de Burlet & de Rham [2].

Teorema III.1 - Sejam M uma variedade diferenciável $(n + 1)$ -dimensional, $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genérica especial, e W_f a fatorização de Stein de f . Então M é o quociente de um fibrado de círculos localmente trivial M' , de base W_f , pela relação de equivalência que identifica os pontos de uma mesma fibra correspondente ao bordo de M' , sendo q' a projeção de M' sobre M , temos que $p = q \circ q'$ é a projeção de M' sobre W_f .

Demonstração :

Utilizando a notação da Proposição II.2.5, exibiremos uma variedade M' que é um fibrado de círculos sobre W_f cujo quociente é M . Esta proposição garante a existência de um isomorfismo de fibrados ϕ entre $\partial Q \times]0, 1]$ e $q^{-1}(c(\partial W_f \times]0, 1]))$. Considere $\mathcal{M}$ a união disjunta de $\partial Q \times [0, 1]$ com $M - S_0$. Definamos M' como sendo $\frac{\mathcal{M}}{\sim}$, onde $\sim$ é a seguinte relação de equivalência :

$$x \sim y \iff y = \phi(x).$$

Seja $j: \mathcal{M} \longrightarrow M' = \frac{\mathcal{M}}{\sim}$ a aplicação quociente. Então, dado $x' \in M'$

$$x' = j(x) = j(u, t) \iff \begin{cases} x \in q^{-1}(c(\partial W_f \times]0, 1])) \subset M - S_0 \\ (u, t) \in \partial Q \times]0, 1] \\ \text{e } x = \phi(u, t) \end{cases}$$

Considerando a topologia quociente, temos que M' tem uma estrutura natural de variedade com bordo $\partial M' = j(\partial Q \times \{0\})$, tal que j seja diferenciável. De fato, para cada ponto $(u, 0) \in \partial Q \times \{0\}$ consideramos sistema de coordenadas (U, φ) em $\partial Q \times [0, 1[$ em torno de $(u, 0)$ e para cada ponto $x \in M - S_0$ consideramos sistema de coordenadas (U, φ) em $M - S_0$ em torno de x e tomamos $(j(U), \varphi \circ j^{-1})$, onde $j^{-1}: j(U) \longrightarrow U$, em ambos os casos, como sendo sistema de coordenadas em torno de $j(u, 0)$ ou de $j(x)$.

Sejam $(j(U_1), \psi_1 = \varphi_1 \circ j^{-1})$, $(j(U_2), \psi_2 = \varphi_2 \circ j^{-1})$ sistema de coordenadas em M' , então as mudanças de coordenadas são das seguintes formas:

- a) $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, se U_1 e U_2 estiverem contidos em $\partial Q \times [0, 1[$ ou em $M - S_0$;
- b) $\varphi_2 \circ \phi \circ \varphi_1^{-1}$ ou $\varphi_1 \circ \phi^{-1} \circ \varphi_2^{-1}$, se $U_1 \subset \partial Q \times [0, 1[$ e $U_2 \subset M - S_0$, ou vice-versa.

Então j é diferenciável, bem como suas inversas :

$$j^{-1}: j(\partial Q \times [0, 1[) \longrightarrow \partial Q \times [0, 1[\text{ e } j^{-1}: j(M - S_0) \longrightarrow M - S_0.$$

Temos que M' é uma variedade $(n + 1)$ -dimensional compacta cujo bordo corresponde aos pontos de $\partial Q \times \{0\}$ e $\tilde{p}: M' - \partial M' \longrightarrow W_f - \partial W_f$, com $\tilde{p}(x') = q(x)$ para $x' = j(x)$, é um fibrado de círculos de forma natural isomorfo a $M - S_0 \xrightarrow{q|_{M-S_0}} W_f - \partial W_f$. Ou seja, em particular, $M' - \partial M'$ e $M - S_0$ são difeomorfas como variedades.

Observe que, a cada ponto $z \in \partial W_f$ corresponde um único ponto $q^{-1}(c(z \times \{0\}))$ pertencente a $S_0 \subset M$ e um único ponto $c(z \times \{1\})$ pertencente a W_f tal que $q^{-1}(c(z \times \{1\})) = \partial B_z \subset \partial Q$. Ou seja, se $(u, 0)$ pertence a $\partial Q \times \{0\}$, então existe um único $z \in \partial W_f$ tal que $\phi(u, 1)$ pertence ao bordo de B_z .

Então estendendo naturalmente o fibrado $\partial Q \times]0, 1] \longrightarrow c(\partial W_f \times]0, 1])$ a $\partial Q \times [0, 1] \xrightarrow{p'} c(\partial W_f \times [0, 1])$, onde $p' = c \circ (c^{-1}(q|_{\partial Q} \times id))$ temos que $p'(u, 0) = z$ para $\phi(u, 1) \in q^{-1}(c(z \times \{1\}))$.

Considere a extensão $p: M' \longrightarrow W_f$ de $\tilde{p}$ da seguinte forma :

$$p(x') = \begin{cases} q(x), & \text{se } x' = j(x) \text{ para } x \in M - S_0 \\ z, & \text{se } z = p'(u, 0), \text{ com } x' = j(u, 0) \end{cases}$$

Segue que M' é um fibrado de círculos sobre W_f com projeção $p: M' \longrightarrow W_f$.

Verificaremos que, ao identificarmos em M' , os pontos correspondentes ao bordo de W_f , obtemos M .

De fato, considere a aplicação $q': M' \longrightarrow M$ definida assim :

$$q'(x') = \begin{cases} x, & \text{se } x' = j(x) \text{ para } x \in M - S_0 \\ q^{-1}(z), & \text{se } q^{-1}(z) = q^{-1}(p'(u, 0)), \text{ com } x' = j(u, 0) \end{cases}$$

Claramente q' é sobrejetora e

$$\begin{aligned} q \circ q'(x') &= \begin{cases} q(x), & \text{se } x' = j(x) \text{ para } x \in M - S_0 \\ z, & \text{se } z = p'(u, 0), \text{ com } x' = j(u, 0) \end{cases} \\ &= p(x') \end{aligned}$$

ou seja, $p = q \circ q'$.

Então $q'(M') = M$, e além disso, $U \subset M$ é aberto se, e somente se, $q'^{-1}(U) \subset M'$ é aberto.

De fato, seja $U \subset M$ um aberto em M , então podemos considerar U como sendo a reunião dos abertos U_1 e U_2 , onde :

$$U_1 = U \cap q^{-1}(c(\partial W_f \times [0, 1])),$$

$$U_2 = U \cap (M - q^{-1}(c(\partial W_f \times [0, \frac{1}{2}])).$$

Como U_2 está contido em $M - S_0$, considerando a topologia quociente em M' , temos que U_2 é aberto em M se, e somente se, $q'^{-1}(U_2) = j(U_2)$ é aberto em M' .

Para mostrarmos que $q'^{-1}(U_1)$ é um aberto em M' podemos supor, sem perda de generalidade, que U_1 é homeomorfo a $q^{-1}(c(L \times [0, 1]))$, onde L é um subconjunto aberto de ∂W_f . Então $U_1 - U_0$ é homeomorfo a $V = q^{-1}(c(L \times]0, 1[))$, onde $U_0 = \{x \in U : x \in S_0\}$. Se $z \in U_0$, então $h_z(q^{-1}(z)) = 0$ e $h_z^{-1}(0) = q^{-1}(c(z \times \{0\}))$, ou seja, $j^{-1}(q'^{-1}(U_1)) = V \cup V_0$, onde $V_0 = \{\partial B_z \times \{0\} : z \in U_0\}$ e $V \cup V_0$ é um aberto de $\partial Q \times [0, 1]$. Novamente, considerando a topologia quociente em M' , temos que $q'^{-1}(U_1)$ é aberto em M' se, e somente se, $V \cap V_0$ é aberto em $\partial Q \times [0, 1]$. Assim M é o espaço quociente através de q' .

■

O Teorema III.2 abaixo, que fornece uma recíproca do teorema anterior, também generaliza o resultado correspondente para fibrados orientáveis, no caso $n = 2$, onde W_f é uma superfície com o bordo (∂W_f) difeomorfo a uma reunião de círculos. Nesse caso ($n=2$), para cada componente conexa C de ∂W_f , temos um fibrado de círculos sobre C , o qual é equivalente ao fibrado produto $S^1 \times S^1$.

Teorema III.2 - Seja $p: M' \longrightarrow W_f$ um fibrado de círculos diferenciável e orientável, sobre uma variedade W_f diferenciável n -dimensional, compacta e com bordo, cuja restrição a cada componente conexa de ∂W_f é ortogonal. Sejam ainda $f': W_f \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão e M o espaço quociente de M' pela relação de equivalência que identifica os pontos sobre uma mesma fibra correspondente ao bordo de W_f . Então existe uma estrutura diferenciável em M tal que a aplicação quociente $q: M \longrightarrow W_f$ é diferenciável e $f = f' \circ q: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é genérica especial.

Demonstração :

Considere M o quociente obtido de M' , identificando os pontos de uma mesma fibra relativa ao bordo de W_f dada pela projeção $q': M' \longrightarrow M$.

Se $q: M \longrightarrow W_f$ for a projeção que identifica os pontos de uma mesma fibra de $q'(M' - \partial M')$, temos que:

$$p = q \circ q'.$$

A cada componente conexa C do bordo de W_f corresponde uma componente $p^{-1}(C)$ do bordo de M' , e uma variedade $(n - 1)$ -dimensional $\Gamma = q^{-1}(C) = q'(p^{-1}(C))$ em M homeomorfa a C . Seja S a reunião de todos os Γ . A restrição de q' ao interior de M' é um homeomorfismo sobre $M - S$, pois a identificação se restringe ao bordo de M' .

Com isto temos definida em $M - S$ uma estrutura diferenciável de modo natural.

De fato, sejam, U e V dois subconjuntos de $M - S$ homeomorfos a W e Z , abertos de $M' - \partial M'$, tais que $U \cap V \neq \emptyset$. Como M' é uma variedade diferenciável, existem A e B abertos de $\mathbb{R}^{n+1}$ e homeomorfismos

$$\varphi_A: W \longrightarrow A \quad \text{e} \quad \varphi_B: Z \longrightarrow B$$

tais que $\varphi_B \circ \varphi_A^{-1}$ é diferenciável.

Portanto,

$$\varphi_A \circ q'^{-1}: U \longrightarrow A \quad \text{e} \quad \varphi_B \circ q'^{-1}: V \longrightarrow B$$

são homeomorfismos e $(\varphi_B \circ q'^{-1}) \circ (\varphi_A \circ q'^{-1})^{-1}$ é diferenciável, pois

$$(\varphi_B \circ q'^{-1}) \circ (\varphi_A \circ q'^{-1})^{-1} = \varphi_B \circ (q'^{-1} \circ q') \circ \varphi_A^{-1} = \varphi_B \circ \varphi_A^{-1}.$$

A estrutura diferenciável de $M - S$ induzida de M' faz com que $q|_{M-S}: M-S \longrightarrow \text{int}(W_f)$ seja uma submersão, então $f = f' \circ q$ não tem pontos críticos em $M - S$.

Para mostrar que M é uma variedade diferenciável, basta estender esta estrutura aos pontos de S . Considere $a \in \Gamma$, para algum $\Gamma \subset S$, e o ponto $q(a) \in \partial W_f$.

Considere em W_f coordenadas locais $y_1, \dots, y_n$ nulas em $q(a)$, tal que $\{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 < 1, 0 \leq y_n < 1\}$ define uma vizinhança de $q(a)$ em W_f , e $\{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 < 1, y_n = 0\}$ corresponde a imagem $q(L) \subset \partial W_f$ de um aberto conexo L de Γ .

Podemos identificar esta vizinhança de $q(a)$ ao produto $q(L) \times [0, 1[$. Como o fibrado M' é localmente trivial, a imagem inversa desta vizinhança em M' pode ser representada, através de um difeomorfismo, por $W = q(L) \times [0, 1[\times S^1$, e sua imagem $V = q'(W)$, através de q' , é uma vizinhança de a em M .

Considere a aplicação da coroa $[0, 1[\times S^1$ sobre o disco bidimensional aberto $D^2 = \{(z_1, z_2) : z_1^2 + z_2^2 < 1\}$, definida por :

$$\begin{aligned} [0, 1[\times S^1 &\longrightarrow D^2 \\ (y_n, e^{i\theta}) &\longmapsto \sqrt{y_n} \cdot e^{i\theta} = z \end{aligned}$$

e a aplicação

$$\mu: W = q(L) \times [0, 1[\times S^1 \longrightarrow q(L) \times D^2$$

dada em coordenadas para $q(L)$ por :

$$(w, y_n, e^{i\theta}) \longmapsto (w, \sqrt{y_n} \cdot e^{i\theta}) = (w, z),$$

onde $w = (y_1, \dots, y_{n-1})$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Toda fibra $w \times \{0\} \times S^1$ de W (do bordo de M') se reduz ao ponto $(w, 0)$ através de μ e esta é injetora fora do bordo. A menos de um homeomorfismo, μ é a própria projeção q' , ou seja, existe $\psi: q(L) \times D^2 \longrightarrow V = q'(W)$ um homeomorfismo entre $q(L) \times D^2$ e V de forma que $q' \mid_W = \psi \circ \mu: W \longrightarrow V$. Observe que $\psi(w, \sqrt{y_n}.e^{i\theta}) = q'(w, y_n, e^{i\theta})$.

Sejam $V_0 = q'(q(L_0) \times [0, 1] \times S^1)$ e $V_1 = q'(q(L_1) \times [0, 1] \times S^1)$ dois abertos em torno de pontos de $S \subset M$. Se $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$, considere $\psi_0: q(L_0) \times D^2 \longrightarrow V_0$ e $\psi_1: q(L_1) \times D^2 \longrightarrow V_1$ homeomorfismos, então a aplicação $(\psi_1^{-1}) \circ (\psi_0) \mid_{(q(L_0) \times D^2) \cap (q(L_1) \times D^2)} = (\psi_1^{-1}) \circ (\psi_0) \mid_{(q(L_0) \cap q(L_1)) \times D^2}$ é dada por :

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1}(\psi_0(w, \sqrt{y_n}.e^{i\theta_0})) &= \psi_1^{-1}(q'(w, y_n, e^{i\theta_0})) \\ &= \psi_1^{-1}(q'(w, y_n.e^{i\theta_1})) \\ &= (w, \sqrt{y_n}.e^{i\theta_1}) \end{aligned}$$

Mas pela Proposição I.3.4, se $c: \partial W_f \times [0, 1] \longrightarrow W_f$ é uma vizinhança colarinho do bordo, então os fibrados $p^{-1}(c(\partial W_f \times [0, 1]))$ e $\partial M' \times [0, 1]$ sobre $c(\partial W_f \times [0, 1])$ com projeções p e $c \circ (c^{-1}(p \mid_{\partial M'}) \times id)$, respectivamente, são isomorfos, logo como $p \mid_{\partial M'}$ é um fibrado ortogonal então $p^{-1}(c(\partial W_f \times [0, 1])) \xrightarrow{p} c(\partial W_f \times [0, 1])$ é ortogonal e mais, via isomorfismo acima, podemos assumir que $\theta_0 \longrightarrow \theta_1$, dada por $(w, \sqrt{y_n}.e^{i\theta_0}) \longmapsto (w, \sqrt{y_n}.e^{i\theta_1})$ também não depende de y_n . Isso significa que as funções de transição

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow S^1 \\ e^{i\theta_0} &\longmapsto e^{i\theta_1} \end{aligned}$$

são restrições de aplicações lineares,

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ r.e^{i\theta_0} &\longmapsto r.e^{i\theta_1} \end{aligned}$$

e portanto diferenciáveis (C^∞). Assim $\psi_1^{-1} \circ \psi_0$ é diferenciável.

Portanto os homeomorfismos $\psi: q(L) \times D^2 \longrightarrow V$ induzem uma estrutura diferenciável em torno dos pontos de S .

Sejam agora V_0 e V_1 dois abertos de M ($V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$) tal que $V_0 \cap S \neq \emptyset$ e $V_1 \cap S = \emptyset$. Temos que existem um homeomorfismo ψ entre $q(L_0) \times D^2$ e

V_0 e um homeomorfismo $\varphi = q' |_U$ entre V_1 e um aberto U de M' . Vamos verificar se as parametrizações são compatíveis. Seja $x \in V_0 \cap V_1$. Pelo fato de x pertencer a V_1 , $\varphi^{-1}(x)$ pode ser representado em coordenadas locais por $(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n, e^{i\theta})$ com $y_n \neq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por x pertencer a V_0 , $\psi^{-1}(x)$ pode ser representado por $(y_1, \dots, y_{n-1}, \sqrt{y_n} \cdot e^{i\theta})$, $y_n \neq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Portanto, μ e μ^{-1} são as próprias funções de transição, que são diferenciáveis, e assim temos o prolongamento desejado.

Definimos as coordenadas locais $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, na vizinhança V , do ponto a , através de ψ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_j &= y_j, \quad j=1, \dots, n-1 \\ x_n &= \operatorname{Re} z \\ x_{n+1} &= \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

E na vizinhança de $f(a) = f' \circ q(a)$ no $\mathbb{R}^n$, as coordenadas locais $y_1, \dots, y_n$, definidas através de α . Então f está definida em uma vizinhança de a por :

$$\begin{cases} y_j = x_j, & j=1, \dots, n-1 \\ y_n = x_n^2 + x_{n+1}^2 \end{cases}$$

(De fato, $y_n = x_n^2 + x_{n+1}^2$, pois $x_n^2 + x_{n+1}^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2 = |\sqrt{y_n} \cdot e^{i\theta}|^2 = |\sqrt{y_n}|^2 \cdot |e^{i\theta}|^2 = |\sqrt{y_n}|^2 \cdot 1 = y_n$).

Então cada ponto de S é um ponto singular do tipo (I) de f e, portanto, f é uma aplicação genérica especial de M em $\mathbb{R}^n$, sendo S o conjunto de seus pontos singulares. ■

O nosso objetivo, no próximo capítulo, consiste em fixar certas variedades n -dimensionais e compactas W_f , e verificar quais variedades M^{n+1} admitem aplicações genéricas especiais com imagem no $\mathbb{R}^n$, tendo W_f como a sua fatorização de Stein. A existência de tal fatorização nos dará informações importantes para podermos identificar o domínio da f em alguns casos. O Teorema III.3 abaixo mostra, particularmente, que quando W_f é simplesmente conexa, M também deve ser simplesmente conexa.

Teorema III.3 - Seja $f: M^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação genérica especial, com M conexa. Então $\pi_1(M) \cong \pi_1(W_f)$

Demonstração :

Considere a fatorização de Stein de f abaixo :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow q & \nearrow f' & \\ W_f & & \end{array}$$

Seja $a_0 \in M - S_0$ um ponto base de forma que a fibra $F = q^{-1}(b)$ passando por a_0 esteja contida em uma bola de M . Isto sempre é possível se considerarmos a_0 próximo de S_0 .

Seja $b_0 = q(a_0)$, como F é conexa, temos que $\pi_0(F, a_0) = 0$. Da seguinte sequência exata para fibrados diferenciáveis (Teorema I.4.2), onde $\pi_1(W_f - \partial W_f, b_0) \longrightarrow \pi_1(W_f, b_0)$ é um isomorfismo.

$$\dots \longrightarrow \pi_1(F, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M - S_0, a_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1(W_f, b_0) \longrightarrow 0$$

e pelo teorema do homomorfismo de grupos, concluímos que :

$$\frac{\pi_1(M - S_0, a_0)}{\text{Ker } q_*} \cong \text{Im } q_* \cong \pi_1(W_f, b_0) \quad (q_* \text{ é sobrejetora})$$

$$\text{Ker } q_* = \text{Im } i_* \implies \frac{\pi_1(M - S_0, a_0)}{\text{Im } i_*} \cong \pi_1(W_f, b_0)$$

Como toda curva fechada em M é homotópica a uma curva contida em $M - S_0$, a inclusão $j: M - S_0 \longrightarrow M$ induz um homomorfismo sobrejetor :

$$j_*: \pi_1(M - S_0, a_0) \longrightarrow \pi_1(M, a_0).$$

Novamente, pelo teorema do homomorfismo aplicado em j_* , temos :

$$\frac{\pi_1(M - S_0, a_0)}{\text{Ker } j_*} \cong \text{Im } j_* \cong \pi_1(M, a_0)$$

$$\frac{\pi_1(M - S_0, a_0)}{\text{Ker } j_*} \cong \pi_1(M, a_0)$$

Agora basta mostrar que $\text{Im } i_* = \text{Ker } j_*$, para concluir que $\pi_1(M, a_0)$ é isomorfo a $\pi_1(W_f, b_0)$.

i) $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_*$

Seja $\alpha \in \text{Im } i_*$, então $\alpha \in \pi_1(M - S_0, a_0)$,

$$\alpha: S^1 \longrightarrow M - S_0$$

$$s_0 \longmapsto a_0$$

e existe $\beta \in \pi_1(F, a_0)$ tal que $i_*(\beta) = \alpha$ e

$$\beta: S^1 \longrightarrow F$$

$$s_0 \longmapsto a_0$$

Portanto $i_*(\beta) \subset F$, $j_*(i_*(\beta)) \subset F$ e como $i_*(\beta) = \alpha$, $j_*(\alpha) \subset F$. Mas F está contida em uma bola de M , ou seja, $j_*(\alpha)$ é homotópico à zero em M .

Portanto $\alpha \in \text{Ker } j_*$.

ii) $\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_*$

Seja $\alpha \in \text{Ker } j_*$, ou seja,

$$j_*(\alpha): S^1 \longrightarrow M$$

$$s_0 \longmapsto a_0$$

é homotópico a zero em M , então α é homotópica a zero em M , e isso implica que existe uma $\tilde{\alpha}: D^2 \longrightarrow M$, extensão de α . Podemos supor $\tilde{\alpha}$ transversal a S_0 . Pelo Teorema I.1.7, $\tilde{\alpha}^{-1}(S_0)$ é uma coleção $P_1, \dots, P_k$ de pontos isolados.

Eventualmente modificando $\tilde{\alpha}$ nas vizinhanças dos pontos $P_1, \dots, P_k$, podemos supor que existem discos D_i de centro P_i , raio ε , contidos em D^2 e disjuntos 2 a 2, de forma que $\tilde{\alpha}(D_i)$ seja transversal a S_0 e definidos, através de um sistema de coordenadas (U, φ) como nas formas canônicas de f , por $x_1, \dots, x_{n-1} = 0$ e $x_n^2 + x_{n+1}^2 \leq \varepsilon$ de modo que $\tilde{\alpha}(\partial D_i) = \{\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \in M : x_1 = \dots = x_{n-1} = 0 \text{ e } x_n^2 + x_{n+1}^2 = \varepsilon\}$. Desta maneira temos $q(\tilde{\alpha}(\partial D_i)) = \text{cte}$.

Considere a aplicação $\bar{\alpha}: D^2 \longrightarrow W_f$ definida da seguinte forma :

$$\bar{\alpha}(x) = \begin{cases} q(\tilde{\alpha}(x)) & , \text{ se } x \notin D_i, \quad i=1,\dots,k \\ \text{cte} = q(\tilde{\alpha}(\partial D_i)) & , \text{ se } x \in D_i, \quad i=1,\dots,k \end{cases}$$

A função $\bar{\alpha}$ é contínua e estende $q \circ \alpha: S^1 \longrightarrow W_f$ ao interior de S^1 , portanto $q(\alpha)$ é homotópico a zero em W_f e $\alpha \in Ker q_*$. Mas $Ker q_* = Im i_*$ implica que $\alpha \in Im i_*$.

Então

$$\begin{aligned} Ker j_* = Im i_* &\implies \pi_1(W_f, a_0) \cong \frac{\pi_1(M-S_0, a_0)}{Im i_*} \\ &\cong \frac{\pi_1(M-S_0, a_0)}{Ker j_*} \\ &\cong \pi_1(M, a_0). \end{aligned}$$

Portanto $\pi_1(W_f, a_0) \cong \pi_1(M, a_0)$

■

CAPÍTULO IV

Exemplos

As aplicações genéricas estudadas por Burlet & de Rhan [2] são da forma $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Neste caso temos que W_f é uma variedade compacta com bordo, de dimensão 2, orientável. Quando M é conexa, W_f é conexa, portanto o posto do grupo fundamental de W_f pode ser escrito na forma $2g + b - 1$, onde g é o genus e b é o número de componentes do bordo de W_f . Uma vez que $\pi_1(M) = \pi_1(W_f)$, podemos, nesta dimensão, classificar as variedades diferenciáveis que admitem aplicações genéricas especiais com imagem no plano, pois considerando $\text{posto}(\pi_1(W_f)) = 2g + b - 1$, como veremos a seguir, quando for orientável, M só pode ser difeomorfa a uma esfera S^3 quando o posto for igual a 0, e difeomorfa a uma soma conexa de r cópias de $S^1 \times S^2$ quando o posto for igual a $r \geq 1$.

Porto & Furuya [15] generalizam tais resultados para aplicações genéricas especiais $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$, mas com W_f ainda de dimensão 2, onde os argumentos acima também se aplicam.

No nosso estudo, $f: M^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genérica especial, W_f é uma variedade com bordo, de dimensão n . Para $n=2$, temos os resultados de Burlet & de Rham. Para $n \geq 3$, a procura de uma classificação das variedades M

que admitem aplicações genéricas especiais $f: M^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é tarefa mais difícil.

Neste capítulo descreveremos alguns resultados de Burlet & de Rham, $n=2$, e daremos exemplos para outros valores de n .

IV.1 - W_f DIFEOMORFO AO DISCO D^n

Podemos observar inicialmente que, se M^n for fechada e conexa com n igual a 1, a variedade W_f é difeomorfa ao disco D^1 e M será difeomorfa à esfera S^2 , pois como $\pi_1(W_f) = 0$, temos $\pi_1(M) = 0$ e M só pode ser S^2 , ou senão se considerarmos um fibrado de círculos sobre W_f ($\cong D^1$), temos um cilindro e, ao identificarmos os pontos das fibras correspondentes ao bordo de W_f , obtemos a esfera S^2 . Quando W_f for difeomorfa ao disco D^n , $n \geq 2$, temos $\pi_1(M^{n+1}) = 0$, mas isto não implica necessariamente que M^{n+1} seja difeomorfa a S^{n+1} . Para um valor qualquer de n temos o seguinte resultado:

Proposição IV.1.1 - Sejam M uma variedade $(n+1)$ -dimensional fechada e $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação genérica especial. Se W_f , a fatorização de Stein de f , for difeomorfa ao disco unitário D^n , então M é homeomorfo a S^{n+1} . Quando $n \leq 5$, M é difeomorfa a S^{n+1} .

Demonstração :

Para estabelecer este resultado, definiremos uma função $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$, verificaremos que é de Morse e estudaremos suas singularidades.

Seja $\mathcal{F} = \{(U, \varphi)\}$ um atlas diferenciável sobre M .

Sejam $q: M^{n+1} \longrightarrow W_f$, a fatorização de Stein de f

$d: W_f \longrightarrow D^n$, um difeomorfismo e

$h: D^n \longrightarrow \mathbb{R}$, a função altura, isto é, a restrição à D^n da projeção $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Observe que, se $a_0 \in M$ é uma singularidade da função composta $k = h \circ d \circ q: M \longrightarrow \mathbb{R}$, então a_0 tem que ser um ponto de S_0 , pois para um aberto U qualquer contido em $M - S_0$, q restrito a U é da forma $(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 0)$, ou seja, é localmente uma submersão que tem posto máximo. A função $d: W_f \longrightarrow D^n$ é um difeomorfismo, portanto qualquer restrição de d terá posto máximo e, finalmente, h é a função altura que também tem posto máximo restrito a qualquer aberto contido no interior de D^n . Em resumo, a aplicação k tem posto máximo em $M - S_0$, ou seja, as singularidades de k estão contidas no conjunto S_0 . Portanto, basta considerarmos apenas as vizinhanças dos pontos singulares da aplicação f .

Sejam $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas em torno de um ponto singular x e de $q(x)$, respectivamente

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(U) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & U \subset M & \xrightarrow{f|_U} & \mathbb{R}^n \\ \psi \circ q \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)} \downarrow & & \downarrow q|_U & \nearrow f'|_{q(U)} & \\ \psi(V) & \xrightarrow{\psi^{-1}} & V \subset W_f & \xrightarrow{d|_{q(U)}} & D^n \xrightarrow{h} \mathbb{R} \end{array}$$

e coordenadas $(x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_n)$ tais que as funções fiquem definidas localmente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \psi \circ q \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow \psi(V) \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_n^2 + x_{n+1}^2) \\ \bar{d} &= d \circ \psi^{-1}: \psi(V) \longrightarrow d(V) \subset D^n \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \longmapsto (d_1(y), d_2(y), \dots, d_n(y)) \\ h: D^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, z_2, \dots, z_n) &\longmapsto z_n \end{aligned}$$

Considere a função composta :

$$k = h \circ d \circ q: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada em coordenadas por :

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \longmapsto d_n(x_1, x_2, \dots, x_n^2 + x_{n+1}^2)$$

A matriz da derivada será :

$$D(k \circ \varphi^{-1})_x = \left[\frac{\partial d_n}{\partial y_1}(x) \ \dots \ \frac{\partial d_n}{\partial y_{n-1}}(x) \ \frac{\partial d_n}{\partial y_n}(x)2x_n \ \frac{\partial d_n}{\partial y_n}(x)2x_{n+1} \right]$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$

O ponto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ é um ponto crítico de k se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{\partial d_n}{\partial y_1}(x) = \frac{\partial d_n}{\partial y_2}(x) = \dots = \frac{\partial d_n}{\partial y_{n-1}}(x) = \frac{\partial d_n}{\partial y_n}(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial d_n}{\partial y_1}(x) = \frac{\partial d_n}{\partial y_2}(x) = \dots = \frac{\partial d_n}{\partial y_{n-1}}(x) = x_n = x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Mas, se $\frac{\partial d_n}{\partial y_i}(x) = 0$, ($i=1, \dots, n$), d não seria um difeomorfismo.

Portanto, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ é um ponto crítico de $k \iff \iff \frac{\partial d_n}{\partial y_i}(x) = x_n = x_{n+1} = 0$, $i=1, \dots, n-1$.

Seja $\Gamma = \{\varphi^{-1}(x) \in M : \frac{\partial d_n}{\partial y_i}(x) = x_n = x_{n+1} = 0, i=1, \dots, n-1\}$. Novamente temos que $\Gamma \subset S_0$, os pontos singulares de k correspondem aos pontos de S_0 .

Se x é como acima, a imagem através do difeomorfismo d , do espaço tangente a ∂W_f em y , é dada por :

$$D(d \circ \psi^{-1})_y(h_1, \dots, h_{n-1}, 0) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ contido em $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Essa imagem é o espaço tangente à ∂D^n em $\bar{d}(y)$. Concluimos então que os pontos críticos de k só podem corresponder aos pólos de ∂D^n e são no máximo dois. Por outro lado, pelo fato de M ser compacta, sabemos que k possui pelo menos dois pontos críticos. Portanto k tem exatamente duas singularidades.

Vamos mostrar agora que $k: M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse. Para isto verificaremos que os pontos críticos de k são não degenerados.

Dada a aplicação composta:

$$k = h \circ d \circ q: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \longmapsto d_n(x_1, x_2, \dots, x_n^2 + x_{n+1}^2)$$

a matriz hessiana de $k \circ \varphi^{-1}$ no ponto $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0)$ fica caracterizada da seguinte forma :

$$H(k \circ \varphi^{-1})_{(x)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 d_n}{\partial y_i \partial y_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial d_n}{\partial y_n}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial d_n}{\partial y_n}(x) \end{pmatrix}$$

Então $\det(H(k \circ \varphi^{-1})_{(x)}) \neq 0 \iff \det \left(\frac{\partial^2 d_n}{\partial y_i \partial y_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0$,
pois $\frac{\partial d_n}{\partial y_n}(x) \neq 0$

Mas, considerando a restrição:

$$k|_{S_0}: S_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

e usando o fato de que

$$S_0 \stackrel{difeo}{\cong}_q \partial W_f, \quad \partial W_f \stackrel{difeo}{\cong}_d S^{n-1} \implies S_0 \stackrel{difeo}{\cong}_{d \circ q} S^{n-1},$$

e $S^{n-1} \xrightarrow{h|_{S^{n-1}}} \mathbb{R}$ é a função altura, que é de Morse, temos que $k|_{S_0}$ é uma função de Morse.

Ou seja, $\left(\frac{\partial^2 d_n}{\partial y_i \partial y_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}$ tem determinante diferente de zero.

Portanto k é uma função de Morse. Pelo Teorema I.3.5, temos que M^{n+1} é homeomorfo a S^{n+1} , além disso, é difeomorfo a S^{n+1} para $n \leq 5$. ■

IV.2 - CLASSIFICAÇÃO DAS VARIEDADES M^3 FECHADAS QUE ADMITEM APLICAÇÕES GENÉRICAS ESPECIAIS COM IMAGEM EM $\mathbb{R}^2$

Considere as seguintes notações:

$$V_0 = S^3$$

$$V_1 = S^2 \times S^1$$

$$V_r = V_1 \# V_1 \# \dots \# V_1 = \text{soma conexa de } r \text{ somandos iguais a } V_1 = S^2 \times S^1$$

$$V_1^* = \text{o quociente não orientável de } S^2 \times S^1 \text{ pelo grupo de ordem 2 gerado por uma transformação resultante de uma simetria de } S^2 \text{ relativamente a um plano diametral combinada com uma simetria de } S^1 \text{ relativamente ao centro.}$$

$$V_r^* = V_{r-1} \# V_1^*, \text{ se } r \geq 2.$$

De acordo com as notações acima estabeleceremos o resultado do Teorema IV de Burlet & de Rhan [2], seguindo os mesmos passos de Porto & Furuya [15]. Este resultado diz que as únicas variedades tridimensionais compactas que admitem aplicações genéricas especiais são difeomorfas a V_r ($r = 0, 1, 2, \dots$) e V_r^* ($r = 1, 2, 3, \dots$). Estas são as únicas variedades tridimensionais conhecidas cujo grupo fundamental é livre e de posto r . Admitindo a conjectura de Poincaré, elas são únicas com essa propriedade.

O caso $r = 0$ é a própria Proposição IV.1.1 acima onde $n = 2$. Temos portanto este resultado generalizado para quaisquer aplicações do tipo $M^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

A seguir estudaremos os casos onde $r \geq 1$.

Proposição IV.2.1 - Seja M uma variedade diferenciável tridimensional e compacta cujo posto do grupo fundamental é $r = 1$. Se existir uma aplicação genérica especial $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^2$, então M é difeomorfo a V_1 se for orientável, e difeomorfo a V_1^* se não o for.

Demonstração :

Seja W_f a fatorização de Stein de f cuja projeção é $q: M \longrightarrow W_f$.

Se $\text{posto}(\pi_1(M)) = 1$, então, pelo Teorema III.3, $\text{posto}(\pi_1(W_f)) = 1$. Como W_f é uma variedade com bordo de bidimensional 2 e orientável, $\text{posto}(\pi_1(W_f)) = 2g + b - 1 \Rightarrow b = 2$ e $g = 0$, ou seja, W_f é uma coroa do tipo $[0, 1] \times C$, com $C \cong S^1$, cujo bordo corresponde a $\{0\} \times C$ e $\{1\} \times C$.

Seja M' um fibrado de círculos sobre W_f , com projeção $p: M' \longrightarrow W_f$. Pelo Teorema I.3.1, sabemos que M é o quociente de M' pela aplicação $q': M' \longrightarrow M$ que identifica os pontos de uma mesma fibra correspondente ao bordo de W_f . Para todo $t \in I$, $I = [0, 1]$, $(q')^{-1}(\{t\} \times C)$ é um fibrado de círculos de base C , que é um toro T no caso orientável, e uma garrafa de Klein no caso não orientável, então $M' \approx T \times I$ ou $M' \approx K \times I$.

Por outro lado, para todo $\{u\} \in C$, $p^{-1}(I \times \{u\})$ é um fibrado de círculos sobre I , $p^{-1}(I \times \{u\}) \approx I \times S^1 \Rightarrow q'(p^{-1}(I \times \{u\})) \cong S^2$, pois cada fibra correspondente aos extremos de I se reduz a um único ponto.

Portanto, como $M = q'(p^{-1}(I \times C))$, M é um fibrado de esferas de base C . Quando $M' \approx I \times T$, M é orientável, o fibrado de círculos é trivial e $M \approx S^2 \times C \cong S^2 \times S^1 = V_1$. Se $M' \approx I \times K$, M e M' não são orientáveis, o recobrimento duplo orientável de K é o toro T , o de $I \times K$ é $I \times T$ e o de M é V_1 , portanto M é o quociente não orientável V_1^* de V_1 .

Pela unicidade da estrutura diferenciável, nesta dimensão [3], temos que M é difeomorfo à V_1 ou à V_1^* .

■

Observação: Sejam W_0 uma variedade diferenciável bidimensional com bordo e L uma curva. “Atar uma alça” à W_0 significa identificar os lados $\{0\} \times L$ e $\{1\} \times L$ de $B = I \times L$ com duas curvas L_0 e L_1 (arcos de adjunção) contidas no bordo de W_0 respectivamente (L_0 e L_1 podem estar contidas em componentes conexas diferentes do bordo de W_0), temos então que $W_0 \cup B = W$.

Seja W uma variedade diferenciável bidimensional compacta, com posto do grupo fundamental igual a r . Como W pode ser obtida atando r alças a um disco D^2 , podemos obter uma variedade orientável homeomorfa a W atando uma alça a uma variedade W_0 compacta com o posto do grupo fundamental igual a $r - 1$.

Proposição IV.2.2 - Seja M uma variedade tridimensional, compacta e orientável cujo posto do grupo fundamental é $r > 1$. Se existir uma aplicação genérica especial $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^2$, então $M \stackrel{difeo}{\cong} V_r$.

Demonstração :

Vamos mostrar esta afirmação por indução sobre n . Já verificamos, na proposição anterior, que para $n = 1$ a implicação é verdadeira. Suponha então que valha para $r - 1$.

Seja M^3 uma variedade diferenciável e compacta, cujo posto do grupo fundamental é r ($\text{posto}(\pi_1(W_f)) = r$).

Considere W_0 uma variedade bidimensional tal que W_f , a fatorização de Stein de f , possa ser obtida através de W_0 atando uma alça B , ou seja $W_f = W_0 \cup B$ (fig.2).

Todo fibrado $p: M' \longrightarrow W_f$ de círculos sobre W_f contém dois subfibrados, $M'_0 = p^{-1}(W_0)$ de base W_0 e $B' = p^{-1}(B)$ de base B .

A aplicação quociente q'_0 , que identifica a um ponto cada fibra de ∂W_0 , induz em $M_0 = q'_0(M'_0)$ uma estrutura de variedade diferenciável tal que M_0 admite uma aplicação genérica especial $f_0: M_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Seja $q_0: M_0 \longrightarrow W_0$ a aplicação quociente da fatorização de Stein de f_0 . Pela hipótese de indução, M_0 é homeomorfo à soma conexa de $r - 1$ cópias de $S^2 \times S^1$. Mostraremos primeiramente que M pode ser obtido através de M_0 e de $S^2 \times I$ removendo de M_0 o interior de dois discos tridimensionais e identificando as duas esferas do bordo resultante com as duas esferas do bordo de

$S^2 \times I$. Feito isto será fácil mostrar que M é a soma conexa de M_0 com $S^2 \times S^1$.

Observe que L_0 e L_1 , sendo os arcos de adjunção de W_0 e B , $q^{-1}(L_0)$ e $q^{-1}(L_1)$ são duas esferas que bordam $q^{-1}(W_0)$ e $q^{-1}(B)$.

Considere γ_0 e γ_1 dois arcos em W_0 que unidos com as extremidades de L_0 e L_1 , respectivamente, delimite duas regiões disjuntas D_0 e D_1 homeomorfas ao disco D^2 (fig.3).

(fig.3)

Seja W_{00} o fecho de $W_0 - (D_0 \cup D_1)$, então $q^{-1}(W_{00})$ é obtido através de $q_0^{-1}(W_0)$ tirando-se o interior de dois discos $q_0^{-1}(D_0)$ e $q_0^{-1}(D_1)$ (fig.4). O homeomorfismo entre W_0 e W_{00} , que é igual à identidade fora de uma vizinhança de D_0 e D_1 , induz um homeomorfismo entre $q^{-1}(W_0)$ e $q^{-1}(W_{00})$. Portanto, $q^{-1}(W_0)$ é homeomorfo a M_0 menos o interior de dois discos. É fácil ver que $q^{-1}(B)$ é homeomorfo a $I \times S^2$, pois como $p^{-1}(B)$ é homeomorfo a $I \times [0, 1] \times S^1$, a aplicação quociente q' identifica a um ponto apenas as fibras correspondentes às extremidades de $[0, 1]$, desta forma $[0, 1] \times S^1$ se reduz à esfera S^2 .

(fig.4)

Portanto, em $M = q^{-1}(W_0 \cup B) = q^{-1}(W_0) \cup q^{-1}(B)$ a identificação se faz exatamente nas esferas $q^{-1}(L_0)$ e $q^{-1}(L_1)$.

Mostraremos agora que $M = M_0 \# V_1$. Para tanto exibiremos um disco

D^3 que será removido de M_0 e outro de $S^2 \times S^1$ para que possa ser efetuada a soma conexa.

Considere uma curva γ em M_0 unindo os bordos de $q_0^{-1}(D_0)$ e $q_0^{-1}(D_1)$, e uma vizinhança tubular T de γ em M_0 . Com isso obtemos um halteres $q_0^{-1}(D_0) \cup T \cup q_0^{-1}(D_1)$ (fig.5) homeomorfo ao disco D^3 que está contido em M_0 e este é o primeiro disco procurado.

Lembramos que, para obter M devemos desconsiderar $q_0^{-1}(D_0)$ e $q_0^{-1}(D_1)$. Vamos analisar a união de T com $S^2 \times I$ parametrizando T por $D^2 \times [0, 1]$ e $S^2 \times I = q^{-1}(B)$ por $S^2 \times [1, 2]$. Se considerarmos $D^2 \times \{i\}$ ($i=0,1$) imerso em $S^2 \times \{i\}$, onde $S^2 \times \{i\}$ corresponde ao bordo de $q_0^{-1}(D_i)$, temos que T está imerso em $S^2 \times [0, 1]$. Ao identificarmos as extremidades 0, 1 de $[0, 1]$ com 2, 1 de $[1, 2]$ respectivamente, e as esferas em questão de modo orientável, obtemos $S^2 \times S^1$. Mas para obtermos M podemos apenas levar em consideração a união de T com $S^2 \times I$, ou seja, $T \cup (S^2 \times I) = (S^2 \times S^1) - ((S^2 - D^2) \times]0, 1[)$ e $(S^2 - D^2) \times]0, 1[$ é o outro disco que procurávamos (fig.6).

Em resumo,

$$\begin{aligned}
 M &= q^{-1}(W_0 \cup B) \\
 &\approx q^{-1}(W_0) \cup q^{-1}(B) \\
 &\approx (M_0 - \text{int}(q_0^{-1}(D_0) \cup q_0^{-1}(D_1))) \cup q^{-1}(B) \\
 &= (M_0 - \text{int}(\underbrace{q_0^{-1}(D_0) \cup T \cup q_0^{-1}(D_1)}_{\approx D^3})) \cup (q^{-1}(B) \cup \text{int}(T)) \\
 &\approx M_0 - \text{int}(D^3) \cup (S^2 \times S^1) - \text{int}(D^3)
 \end{aligned}$$

$$\text{Ou seja, } M \approx M_0 \# (S^2 \times S^1) \implies M \approx \underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{r \text{ vezes}}.$$

Pela unicidade da estrutura diferenciável, as variedades acima são difeomorfos. ■

Observação: Se M não for orientável, os argumentos acima são válidos a menos das identificações dos fibrados $q^{-1}(W_0)$ e de $q^{-1}(B)$. Ou seja, se M_0 não for orientável, então $M_0 \approx V_{r-1}^*$ e, seguindo os passos da Proposição IV.2.2 obtem-se $M_0 \cup B' \cong (V_{r-1}^* \# V_1) = (V_{r-1} \# V_1^*)$ e se M_0 for orientável, então não existirá uma identificação de M_0 e B' coerente, pois B' é orientável, em outras palavras, $M_0 \cup B' \cong V_{r-1} \# V_1^*$, senão M seria orientável.

IV.3 - EXEMPLOS DO TIPO $M^4 \longrightarrow R^3$

Proposição IV.3.1 - Se W_f for homeomorfo a um r -toro sólido, então as únicas variedades orientáveis, fechadas e conexas de dimensão 4 que admitem aplicações genéricas especiais são do tipo U_r , onde U_r é uma soma conexa de r cópias de $S^3 \times S^1$.

Demonstração :

Note que, se considerarmos 0-toro como sendo o disco D^3 , então a variedade M será difeomorfa à S^4 , conforme visto na Proposição IV.1.1.

Se W_f for homeomorfo a um toro sólido, poderemos considerá-lo como sendo o produto cartesiano da coroa $(C \times I)$ por um intervalo fechado I , onde C é uma curva fechada plana homeomorfa a S^1 .

Para todo $u \in C$, $p^{-1}(\{u\} \times I \times I)$ é um fibrado de círculos trivial sobre $I \times I$, pois este é contrátil. Então $p^{-1}(\{u\} \times I \times I) \approx I \times I \times S^1 \implies q'(p^{-1}(\{u\} \times I \times I)) \approx S^3$. De fato, ao identificarmos cada componente do bordo de $I \times S^1$ obtemos S^2 , e ao identificarmos cada componente do bordo de $I \times S^2$ obtemos S^3 .

Portanto, $M \approx q'(p^{-1}(C \times I \times I))$ é um fibrado de esferas S^3 sobre C . Mas, M é orientável, então $M \approx S^3 \times S^1$.

Considere agora, W_f uma variedade tridimensional homeomorfa a $A_r \times I$, onde $A_r = D^1 - \{r \text{ } \varepsilon\text{-discos abertos disjuntos}\}$. Podemos obter um r -toro sólido atando uma alça B ao bordo de A_{r-1} e considerar o seu produto cartesiano pelo intervalo I . Chamaremos de L_0 e L_1 os arcos de adjunção de A_{r-1} com B . Neste caso, ∂W_f tem uma única componente conexa, portanto para obter $A_r \times I = (A_{r-1} \times I) \cup (B \times I)$, basta considerar L_0 e L_1 na mesma componente conexa do bordo de A_{r-1} .

Sejam M_0 e $q_0: M_0 \longrightarrow W_0 \times I$, como na proposição anterior, trocando A_{r-1} por W_0 . Novamente aplicaremos indução sobre r . Seja M_0 homeomorfo à soma conexa de $r-1$ cópias de $S^3 \times S^1$. Seguindo os passos da demonstração acima, primeiramente veremos que M pode ser obtida através de M_0 menos o interior de dois discos D^4 e identificando os pontos das duas esferas do bordo resultante com as esferas do bordo de $S^3 \times I$.

Considere duas curvas γ_0 e γ_1 que unidas aos extremos de L_0 e L_1 , respectivamente, delimitem dois discos D_0 e D_1 disjuntos homeomorfos a D^2 contidos em A_{r-1} . Temos que $q_0^{-1}(D_i \times I)$ está contido em M_0 e, pelas formas canônicas, é homeomorfo ao disco D^4 (fig.7).

Seja W_{00} o fecho de $A_{r-1} - (D_0 \cup D_1)$ (fig.8). Como na proposição anterior, $q^{-1}(W_{00} \times I)$ é homeomorfo a $q^{-1}(A_{r-1} \times I)$, mas $q^{-1}(W_{00} \times I)$ é homeomorfo a M_0 menos o interior de dois discos de dimensão 4, $q_0^{-1}(D_0 \times I)$ e $q_0^{-1}(D_1 \times I)$.

Por outro lado, $q^{-1}(B \times I) \approx (S^3 \times I)$ e $M \approx q^{-1}((A_{r-1} \cup B) \times I) \approx q^{-1}(A_{r-1} \times I) \cup q^{-1}(B \times I)$, observe ainda que $q^{-1}(L_0 \times I)$ e $q^{-1}(L_1 \times I)$ são homeomorfos às duas esferas S^3 e bordam $q^{-1}(A_{r-1} \times I)$ e $q^{-1}(B \times I)$; como podemos ver na figura abaixo, os pontos de $L_i \times I$ ($i=0,1$) que pertencem ao bordo de A_{r-1} correspondem aos do seu bordo.

(fig.9)

(ao identificarmos os pontos das esferas correspondentes às extremidades de L_i obtemos uma esfera $S^3 \Rightarrow q^{-1}(L_i \times I) \approx S^3$)

Portanto M é homeomorfo à M_0 menos o interior de dois discos de dimensão 4, unido com $q^{-1}(B \times I)$ identificando os pontos de seus bordos.

Agora basta exibirmos dois discos D^4 , cujos interiores serão removidos de M_0 e de $S^3 \times S^1$, para mostrarmos que $M \approx M_0 \# S^3 \times S^1$.

O primeiro, que será removido de M_0 , é o halteres formado pela união de $q_0^{-1}(D_0 \times I)$ e $q_0^{-1}(D_1 \times I)$ com uma vizinhança tubular T em M_0 (fig.10), de uma curva γ ligando os bordos destes.

O segundo obtemos da seguinte forma :

A vizinhança T é homeomorfa a $D^3 \times [0, 1]$; se considerarmos $D^3 \times \{0\}$ e $D^3 \times \{1\}$ mergulhado em $q_0^{-1}(D_0 \times I)$ e $q_0^{-1}(D_1 \times I)$, respectivamente, temos que T está mergulhado em $S^3 \times [0, 1]$, onde S^3 é o bordo de $q^{-1}(D_i \times I)$. Paratrizaremos $q^{-1}(B \times I)$ por $S^3 \times [1, 2]$. Ao identificarmos as extremidades 0, 1 de $[0, 1]$ com 2, 1 de $[1, 2]$, respectivamente, e as fibras $S^3 \times \{0\}$ e $S^3 \times \{1\}$ com $S^3 \times \{2\}$ e $S^3 \times \{1\}$ (existe uma identificação onde as orientações são coerentes, pois o fibrado sobre A_r é orientável), obtemos um fibrado orientável de esferas S^3 sobre S^1 , logo $S^3 \times S^1$. Na operação anterior, para obtermos $S^3 \times S^1$, incluímos $(S^3 - D^3) \times [0, 1]$ na união, mas devemos considerar apenas $T \cup (S^3 \times I)$. Então M é homeomorfo a $q^{-1}(A_{r-1}) \cup q^{-1}(B \times I) \approx M_0 - ((q^{-1}(D_0 \times I) \cup q_0^{-1}(D_1 \times I))) \cup q^{-1}(B \times I)$ e ao considerarmos T unido com $q^{-1}(B \times I)$ temos que $T \cup q^{-1}(B \times I) \approx (S^3 \times S^1) - ((S^3 - D^3) \times]0, 1[)$ e, novamente, $(S^3 - D^3) \times]0, 1[$ era o outro disco que procurávamos (fig.11).

(fig.11)

Portanto, $M \approx M_0 \# (S^3 \times S^1) \implies M \approx \underbrace{(S^3 \times S^1) \# \dots \# (S^3 \times S^1)}_{r \text{ vezes}}.$

O exemplo acima pode ser generalizado da seguinte forma :

Seja A_r uma superfície com bordo não vazio com o posto do grupo fundamental igual a r ($r = 1, 2, \dots$). Então, como vimos em IV.2, $A_r = A_{r-1} \cup B$, onde B é uma alça atada a A_{r-1} . Seja W uma variedade de dimensão 3 com bordo não vazio homeomorfa a $A_r \times I$. Então W é homeomorfa a $(A_{r-1} \times I) \cup (B \times I)$. Repetindo passo a passo a demonstração da Proposição IV.3.1, temos que se $W_f = W$, então M é difeomorfa a U_r , ou seja, à soma conexa de r cópias de $S^3 \times S^1$.

IV.4 - UMA RECÍPROCA PARA A PROPOSIÇÃO IV.1.1

Considerando, novamente, a sequência exata de fibração

$$\dots \longrightarrow \pi_n(S^1, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(M - S_0, a_0) \xrightarrow{q_*} \pi_n(W_f, b_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(S^1, a_0) \longrightarrow \dots$$

O diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} M - S_0 & \xrightarrow{j} & M \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ W_f - \partial W_f & \xrightarrow{j} & W_f \end{array}$$

induz o seguinte diagrama comutativo :

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(M - S_0, a_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(M, a_0) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ \pi_n(W_f - \partial W_f, b_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(W_f, b_0) \end{array}$$

onde $j_*: \pi_n(W_f - \partial W_f) \longrightarrow \pi_n(W_f)$ é um isomorfismo. Se $n \geq 3$, temos $\pi_{n-1}(S^1, a_0) = \pi_n(S^1, a_0) = 0$, então $q_*: \pi_n(M - S_0, a_0) \longrightarrow \pi_n(W_f, b_0)$ é um isomorfismo. Logo $q_*: \pi_n(M, a_0) \longrightarrow \pi_n(W_f, b_0)$ é sobrejetora.

Seja $M = S^{n+1}$ e suponhamos que S_0 é a imagem de um mergulho $S^{n-1} \longrightarrow S^{n+1}$. Se o mergulho é trivial, temos que $\pi_1(M - S_0, a_0) = \pi_1(S^{n+1} - S^{n-1}, a_0) \cong \mathbb{Z}$. A recíproca nem sempre é verdadeira, em Rolfsen ([16], pg.185), encontramos um contra-exemplo na demonstração do seguinte teorema : Se $n \geq 3$, existem nós não triviais K^n em S^{n+2} com $\pi_1(S^{n+2} - K^n) \cong \mathbb{Z}$.

De qualquer modo temos :

Proposição IV.4.1 - Seja $f: S^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação genérica especial tal que $\pi_1(S^{n+1} - S_0, a_0) \cong \mathbb{Z}$, onde o conjunto S_0 , dos pontos singulares da aplicação f , é uma $(n-1)$ -esfera mergulhada em S^{n+1} . Então, para $n \geq 5$ W_f é difeomorfo ao disco D^n .

Demonstração :

Seja $n = \dim W_f \geq 5$. Primeiramente vamos mostrar que $\pi_m(W_f) = 0$ para todo $m \leq n$. Pelo Teorema III.3, temos que $\pi_1(W_f) \cong \pi_1(S^{n+1}) = 0$ e como $q_*: \pi_m(S^{n+1}, a_0) \longrightarrow \pi_m(W_f, b_0)$ é sobrejetora para $m \geq 3$ e $\pi_m(S^{n+1}, a_0) = 0$ para $m \leq n$, então $\pi_m(W_f, b_0) = 0$ para $3 \leq m \leq n$.

Para concluir que $\pi_2(W_f) = 0$, observando a sequência

$$\dots \longrightarrow \pi_1(S^1, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^{n+1} - S_0, a_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1(W_f, b_0) = 0$$

concluimos que $i_*: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é um homomorfismo sobrejetor, portanto, um isomorfismo. E analisando a sequência

$$\dots \longrightarrow 0 = \pi_2(S^1, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_2(S^{n+1} - S_0, a_0) \xrightarrow{q_*} \pi_2(W_f, b_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(S^1, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^{n+1} - S_0, a_0) \longrightarrow \dots$$

temos claramente que q_* é injetora, pois $\pi_2(S^1, a_0) = 0$, e é sobrejetora, pois sendo $i_*: \pi_1(S^1, a_0) \longrightarrow \pi_1(S^{n+1} - S_0, a_0)$ um isomorfismo, temos que $\text{Im } \partial_* = \ker i_* = 0$ e $\text{Im } q_* = \text{Ker } \partial_* = \pi_2(W_f, b_0)$.

Portanto, $q_*: \pi_2(S^{n+1} - S_0, a_0) \longrightarrow \pi_2(W_f, b_0)$, também é um isomorfismo e $q_*: \pi_2(S^{n+1}, a_0) \longrightarrow \pi_2(W_f, b_0)$ é sobrejetor. Mas $\pi_2(S^{n+1}, a_0) = 0$, logo $\pi_2(W_f, b_0) = 0$.

Concluimos então que $\pi_m(W_f, b_0) = 0$ para $m \leq n$, mas pelo Teorema do isomorfismo de Hurewicz, temos que $H_m(W_f, \mathbb{Z}) = 0$ para todo $m \leq n$. Mas para $m > n$ também temos $H_m(W_f, \mathbb{Z}) = 0$. Logo W_f tem a mesma homologia de um ponto. Portanto, conforme Milnor ([12], pg.108 à 111), W_f é um n -disco para todo $n \geq 5$.

■

Para $n = 2$, temos o seguinte resultado de Burlet & de Rham :

Proposição IV.4.2 - Se f é uma aplicação genérica especial, de S^3 em $\mathbb{R}^2$, então S_0 é um círculo sem nó.

Demonstração :

Seja W_f a fatorização de Stein de f , com projeção $q: S^3 \rightarrow W_f$. Novamente, pelo Teorema III.3 temos que $\pi_1(W_f) \cong \pi_1(S^3) = 0$, ou seja, W_f é homeomorfo ao disco D^2 , consequentemente, S_0 é homeomorfo ao círculo ∂W_f . Portanto, basta mostrarmos que $\pi_1(S^3 - S_0)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$, pois pelo lema de Dehn-Papakyriakopoulos, S_0 será um círculo sem nó.

Considere a seguinte sequência exata para o fibrado $q|_{S^3-S_0}: S^3-S_0 \rightarrow W_f - \partial W_f$.

$$\dots \rightarrow \pi_2(W_f - \partial W_f, b_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(F, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^3 - S_0, a_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1(W_f - \partial W_f, b_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(F, a_0) \rightarrow \dots$$

onde $a_0 \in S^3 - S_0$, $b_0 = q(a_0)$ e $F = q^{-1}(b_0)$.

Como F é homeomorfa à S^1 e $W_f - \partial W_f$ é uma superfície aberta, temos que $\pi_0(F, a_0) = 0$, $\pi_1(F, a_0) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_2(W_f - \partial W_f, b_0) = 0$. Assim a sequência se reduz a :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^3 - S_0, a_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1(W_f - \partial W_f, b_0) \rightarrow 0$$

Mas como $W_f \approx D^2$, temos que $W_f - \partial W_f$ é homeomorfo ao interior do disco D^2 e $\pi_1(W_f) = \pi_1(W_f - \partial W_f) = 0$. Portanto i_* é um isomorfismo. ■

Bibliografia

- [1] Bröcker, T. e Jänich, K., *"Introducción a la Topología Diferencial"*, Editorial AC, Madrid, 1977.
- [2] Burlet, O. et de Rham, G., *"Sur Certaines Applications Génériques d'une Variété Close a 3 Dimensions dans le Plan"*, L'enseignement Mathématique, II^a série, tome XX, fascicule 3-4, pg. 275-292, 1974.
- [3] Cerf, P., *"Sur les Difféomorphismes de la Sphère de Dimension Trois ($\Gamma_4 = 0$)"*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, vol. 53, 1968.
- [4] Cohen, R.L., *"Topics in Morse Theory"*, Lectures Notes
- [5] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T. and Novikov, S.P., *"Modern Geometry - Methods and Applications"*, Springer-Verlag, 1985.
- [6] Fuks, D.B. and Rokhlin, V.A., *"Beginner's Course in Topology"*, Springer-Verlag, 1984.
- [7] Furuya, Y.K.S., *"Sobre Aplicações Genéricas $M^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ "*, Tese de Doutoramento, ICMSC-USP, 1986.
- [8] Golubitsky, M. and Guillemin, V., *"Stable Mappings and their Singularities"*, Springer-Verlag, 1973.
- [9] Guillemin, V. and Pollack, A., *"Differential Topology"*, Prentice-Hall, 1974.
- [10] Kushner, L., Levine, H. and Porto, P., *"Mapping three-Manifolds into the Plane I"*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, vol. 29, No. 1, 1984.
- [11] Milnor, J., *"A Unique Decomposition Theorem for 3-Manifolds"*, American Journal Mathematics, 84, 1942.

- [12] Milnor, J., "*Lectures on the h-Cobordism Theorem*", notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, 1965.
- [13] Milnor, J., "*Morse Theory*", Princeton University Press, 1968.
- [14] Morin, B., "*Formes Canoniques des Singularités d'une Application Différentiable*", C.R.Acad.Sc. Paris, t. 260, 1965.
- [15] Porto, P. and Furuya, Y.K.S., "*On Special Generic Maps from a Closed Manifold into the Plane*", *Topology and its Applications*, 35, (1990), 41-42, North-Holland.
- [16] Rolfsen, D., "*Knots and Links*", Publish or Perish, Inc., 1976.