Contribuições à teoria das álgebras não associativas

Henrique Guzzo Júnior

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Doutor
em
Matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa

São Paulo, maio de 1992

A minha esposa Deonilde

e aos meus filhos,

Alexandre

Fábio

Cristiane

Fernando

Abstract

In the first part of this monograph, we introduce the concept of join of baric algebras with an idempotent of weight 1 and the related concept of indecomposable (baric) algebra. A theorem of existence and unicity of decompositions for some baric algebras (those satisfying a.c.c. and d.c.c. conditions) is obtained. Some well known examples in genetics are analyzed concerning decomposability and some questions are stated in this subject. In the second part, we obtain a Peirce decomposition for some train algebras of rank n and, when $n = 4$, some additional results are stated.

Índice

Introdução	6
Capítulo 1 - Preliminares	8
1.1 - Álgebras básicas	8
1.2 - Train álgebras	9
1.3 - Álgebras de Bernstein	11
1.4 - Álgebras genéticas	12
1.5 - O exemplo de Abraham	15
1.6 - O processo de duplicação	16
1.7 - M-grupos	17
1.8 - Decomposição de Peirce	19
Capítulo 2 - Join de álgebras básicas	20
2.1 - Álgebras básicas com idempotentes	20
2.2 - Join de álgebras básicas com idempotentes	24
2.3 - Algumas classes fechadas	28
Capítulo 3 - Álgebras básicas indecomponíveis	36
3.1 - Álgebras básicas indecomponíveis	37
3.2 - Teorema de Krull-Schmidt	39
3.3 - Alguns exemplos e questões	42
Capítulo 4 - Train álgebras obtidas de nil-álgebras por homotetias	54
4.1 - As funções $[n, j; r]$ e $(n, j; r)$	54
4.2 - Train álgebras obtidas de nil-álgebras por homotetias	55

Capítulo 5 - Alguns resultados sobre train álgebras.....	63
5.1 - As funções $(f_1, \dots, f_n)$	63
5.2 - Train álgebras e funções multilineares simétricas.....	64
5.3 - Decomposição de Peirce para train álgebras comutativas de posto n	68
 Capítulo 6 - Alguns resultados sobre train álgebras	
de posto 4	75
6.1 - Construção de train álgebras de posto 4	76
6.2 - Train álgebras comutativas de posto 4 com idempotente de peso 1	80
6.3 - Train álgebras comutativas de posto 4 tal que $A_{\frac{1}{2}}(e) = 0$	86
6.4 - Estudo de uma classe de train álgebras de posto 4 com $A_{\frac{1}{2}}(e) \neq 0$ que é train especial	90
 Apêndice A	96
 Apêndice B	103
 Bibliografia	109

Introdução

Esta monografia divide-se em dois blocos: o primeiro trata de álgebras básicas com idempotentes de peso 1 (Capítulos 2 e 3) e o segundo é específico para train álgebras (Capítulos 4, 5 e 6). Consideremos a classe Ω das álgebras básicas sobre um corpo F , com idempotentes de peso 1.

No Capítulo 2 definimos em Ω a operação “join” e provamos que as subclasses das álgebras de Bernstein, das train álgebras verificando a mesma t-equação, das álgebras verificando a mesma identidade polinomial, das álgebras genéticas segundo Gonshor, das genéticas segundo Schafer e train especial (desde que possuam idempotentes), contêm a join de dois de seus membros.

No Capítulo 3 trabalhamos com subclasses fechadas de Ω , e dentro desta subclasse, introduzimos o conceito de álgebra básica indecomponível, utilizando o conceito de grupo (abeliano) com operadores. Seja Ω' uma subclasse fechada de Ω . Em Ω' consideremos as álgebras básicas em que os ideais bilaterais da álgebra, contidos no núcleo da função peso, satisfaçam a condição de cadeias descendentes (c.c.d.). Estas álgebras se decompõem em um número finito de membros indecomponíveis de Ω' . Admitindo também a condição de cadeias ascendentes (c.c.a.) provamos um teorema do tipo Krull-Schmidt, que garante a unicidade dessas decomposições. Com isto, para classificar os membros de Ω' que verificam (c.c.a.) e (c.c.d.), basta classificar as indecomponíveis. Isto se aplica a álgebras de Bernstein, train álgebras com a mesma t-equação, álgebras genéticas segundo Gonshor, Schafer, etc. Além disso, estudamos quanto à indecomponibilidade, algumas álgebras genéticas comutativas bem conhecidas.

No Capítulo 4 tivemos como motivação os exemplos de Abraham, que aparecem em [1]. Consideramos F um corpo, (A, ω) uma F -álgebra bária com $\ker \omega$ nil à direita de nil-índice $s \geq 2$, $e \in A$ um idempotente de peso 1 e suponhamos existir $r \in F$, tal que $ea = ra = ae$ para todo $a \in \ker \omega$. Provamos que (A, ω) é train álgebra de posto $s + 1$ se $2r \neq 1$ e train álgebra de posto s se $\text{car} F \neq 2$ e $r = \frac{1}{2}$ e, em ambos os casos, exibimos as suas t-equações, em função de s e r . Algumas demonstrações deste capítulo, que envolvem muitos cálculos, foram colocadas no Apêndice A.

No Capítulo 5 tratamos de train álgebras de posto n em um corpo de característica zero. Apresentamos uma condição equivalente à existência de uma t-equação em uma álgebra bária. Para as train álgebras comutativas de posto n com idempotente de peso 1, quando $\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}$ forem distintos dois a dois, obtemos uma decomposição de Peirce para a álgebra, onde $1, r_1, \dots, r_{n-2}$ são as t-raízes destas train álgebras. Com estas hipóteses encontramos, também, uma tábua de multiplicação dos subespaços que aparecem nesta decomposição. No Apêndice B, aparecem algumas demonstrações deste capítulo, que também são cálculos longos porém fáceis.

No Capítulo 6 tratamos de train álgebras comutativas de posto 4 com idempotente de peso 1, em um corpo de característica diferente de 2. Como no Capítulo 5, obtemos uma decomposição de Peirce se $\frac{1}{2}, r, s$ forem dois a dois distintos, onde $1, r, s$ são as t-raízes dessa train álgebra. Além disso provamos várias relações de multiplicação entre os subespaços que aparecem na decomposição da álgebra. No caso em que $A_{\frac{1}{2}}(e) = 0$, encontramos uma descrição dessas álgebras em termos de espaços vetoriais e funções bilineares simétricas. Uma classe de álgebras em que $A_{\frac{1}{2}}(e) \neq 0$ foi também descrita em termos de espaços vetoriais e operadores nilpotentes de índice de nilpotência 3.

Agradeço ao Prof. Roberto Costa, pela sugestão do assunto, e pela dedicada orientação que dele recebi, desde o meu ingresso no curso de Pós-Graduação. Foi uma honra ter compartilhado, todo esse tempo, com tão brilhante pessoa, professor e pesquisador.

Henrique Guzzo Junior

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos da teoria das álgebras genéticas, bem como resultados já conhecidos que são necessários para que a leitura desta monografia seja o mais auto-contida possível. Em todo este capítulo F será um corpo e A uma F -álgebra não necessariamente associativa, comutativa ou de dimensão finita. Além disso simplificaremos expressões como “ F -álgebra” para “álgebra”, “ F -linear” para “linear”, etc., sempre que o contexto indicar claramente qual é o corpo F .

1.1 Álgebras báricas

Diremos que o par (A, ω) é uma álgebra bárica (sobre o corpo F) se A é uma álgebra e $\omega: A \rightarrow F$ é um homomorfismo de álgebras, não nulo. Tal função é chamada de função peso de (A, ω) . O escalar $\omega(x)$ diz-se o peso de x . Os elementos de peso 0 formam um ideal bilateral de codimensão 1 em A .

Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) álgebras báricas. Diremos que $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ é um homomorfismo bárico se φ é um homomorfismo de álgebras e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi} & A_2 \\ \omega_1 \searrow & & \swarrow \omega_2 \\ & F & \end{array}$$

é comutativo.

Se (A, ω) é uma álgebra bária, então para todo $c \in A$, com $\omega(c) = 1$, temos $A = Fc \oplus \ker \omega$. Para isso, observe que $x = \omega(x)c + (x - \omega(x)c)$, para todo $x \in A$. Se $B \subseteq A$, indicaremos por $\langle B \rangle$ o subespaço vetorial de A gerado por B . O ideal gerado por $\{x^2 - \omega(x)x : x \in A\}$ é chamado ideal de Etherington de (A, ω) .

Para álgebras não associativas, há muitas maneiras de definir potências de um elemento. Neste trabalho, usaremos 3 tipos de potências, definidas a seguir, por recorrência:

- a) $u^1 = u, \quad u^{k+1} = u^k u \quad$ (potências principais à direita);
- b) ${}^1u = u, \quad {}^{k+1}u = u({}^k u) \quad$ (potências principais à esquerda);
- c) $u^{[1]} = u, \quad u^{[k+1]} = u^{[k]}u^{[k]} \quad$ (potências plenas).

Se A é uma álgebra comutativa, as potências principais à direita e à esquerda coincidem.

Proposição 1 *Seja (A, ω) uma álgebra bária tal que, para cada elemento de $\ker \omega$, pelo menos uma de suas potências não associativas é nula. Então ω é o único homomorfismo não nulo de A em F .*

A demonstração basicamente é a mesma que aparece em [29, Lema 1].

Referências sobre o assunto: [12], [51], [55] e [56].

1.2 Train álgebras

Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}$ elementos arbitrários de F tais que $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{s-1} = 0$. A expressão formal

$$f(x) = x^s + \gamma_1 \omega(x)x^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} \omega(x)^{s-1}x$$

é chamada de train ou t-polinômio à direita com coeficientes $\gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}$ e de grau s . Similarmente $g(x) = {}^s x + \gamma_1 \omega(x)({}^{s-1}x) + \dots + \gamma_{s-1} \omega(x)^{s-1}x$ é chamada train ou t-polinômio à esquerda, com coeficientes $\gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}$ e de grau s .

Diremos que uma álgebra bária (A, ω) é uma train álgebra à direita se satisfaz $f(a) = 0$ para todo $a \in A$, para algum train polinômio à direita f . O menor grau de

um train polinômio f à direita satisfeito por A é chamado de posto à direita de A e a identidade $f(x) = 0$ é chamada de train ou t-equação à direita de A . De maneira óbvia, definimos os mesmos conceitos “à esquerda”. Quando A é uma álgebra comutativa, diremos simplesmente que A é uma train álgebra.

Quando A é uma train álgebra à direita ou esquerda, os elementos x de peso 0 satisfazem $x^s = 0$ ou ${}^s x = 0$ e portanto pela Prop.1, A possui uma única função peso.

Seja (A, ω) uma train álgebra à direita de posto s satisfazendo a train equação à direita $x^s + \gamma_1 \omega(x) x^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} \omega(x) x = 0$. Consideremos agora o polinômio (no sentido usual) $p(X) = X^s + \gamma_1 X^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} X \in F[X]$. Sendo L um corpo de raízes de $p(X)$, teremos a fatoração

$$p(X) = X(X - 1)(X - t_1) \dots (X - t_{s-2})$$

onde $t_1, \dots, t_{s-2} \in L$, já que 0 e 1 são raízes óbvias de $p(X)$. Os escalares $t_0 = 1, t_1, \dots, t_{s-2}$ são chamados de train ou t-raízes principais à direita de A . De maneira semelhante, definimos as train ou t-raízes principais à esquerda.

Diremos que uma álgebra B é nil à direita (resp. esquerda) se para cada $x \in B$ existe um número natural $k \geq 1$ (dependendo de x) tal que $x^k = 0$ (resp. ${}^k x = 0$). Se existir k tal que $x^k = 0$ para todo $x \in B$ então o menor desses expoentes é chamado de nil-índice à direita de B . Observemos que se (A, ω) é uma train álgebra à direita de posto s , então $\ker \omega$ é nil à direita de nil-índice à direita $\leq s$. Analogamente definimos o nil-índice à esquerda.

Sejam B uma álgebra e $\tau: B \rightarrow B$ um operador linear. No espaço vetorial $F \oplus B$ definimos uma multiplicação e uma função peso por:

$$(\alpha, a)(\alpha', a') = (\alpha\alpha', aa' + \tau(\alpha a' + \alpha' a)), \quad \omega(\alpha, a) = \alpha$$

onde $\alpha, \alpha' \in F$ e $a, a' \in B$. Claramente ω é um homomorfismo não nulo de álgebras. Indicaremos esta álgebra por $[B, \tau]$. De [7] temos a seguinte proposição:

Proposição 2 *Se $\text{car} F \neq 2$ e $a^3 = 0$ para todo $a \in B$, então $[B, \tau]$ verifica a seguinte equação à direita $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$ se e somente se as seguintes condições estiverem verificadas:*

- a) $2\tau(a)a + \tau(a^2) = (1 + \gamma)a^2; \quad a \in B$
- b) $2\tau^2 - (1 + 2\gamma)\tau + \gamma\text{id}_B = 0$

Referências sobre o assunto: [1], [7], [8], [9], [13], [31], [32], [33], [45], [54] e [55].

1.3 Álgebras de Bernstein

As álgebras de Bernstein foram introduzidas por Holgate [30], depois que Ljubič [38] investigou os problemas propostos por Bernstein em [2], [3] e [4]. Suporemos neste parágrafo que $\text{car} F \neq 2$. Uma álgebra básica comutativa (A, ω) é uma álgebra de Bernstein se para todo $x \in A$ temos $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$.

Observemos que, pela Prop.1, toda álgebra de Bernstein possui uma única função peso. Se $c \in A$ e $\omega(c) \neq 0$, então para $e = \frac{1}{\omega(c)^2}c^2$ temos, $e^2 = e$ e $\omega(e) = 1$, isto é, e é um idempotente de peso 1. Reciprocamente o quadrado de qualquer elemento de peso 1 é um idempotente. O elemento idempotente e age sobre $\ker \omega$ por multiplicação: $u \mapsto eu$. Sejam $U_e = \{u \in \ker \omega : eu = \frac{1}{2}u\}$ e $V_e = \{u \in \ker \omega : eu = 0\}$. Temos as seguintes proposições (ver [55]):

Proposição 3 *Se (A, ω) é uma álgebra básica comutativa e $e \in A$ um idempotente de peso 1, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) (A, ω) é uma álgebra de Bernstein.
- ii) a) $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$
b) $(n^2)^2 = 0, u^3 = 0, \quad n \in \ker \omega, \quad u \in U_e$
c) $u(uv) = 0, uv^2 = 0, u^2(uv) = 0, (uv)v^2 = 0, (uv)^2 = 0, u^2v^2 = 0, u \in U_e, v \in V_e$

Proposição 4 *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, então as seguintes condições são verdadeiras:*

- a) $U_e^2 \subseteq V_e$, $U_e V_e \subseteq U_e$, $V_e^2 \subseteq U_e$, $U_e V_e^2 = 0$.
- b) *Se $e' \in A$ é outro idempotente de peso 1, temos $U_e \cong U_{e'}$ e $V_e \cong V_{e'}$ (isomorfismos de espaços vetoriais).*

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de dimensão finita. Como decorrência de b) da Proposição 4 acima, podemos definir o tipo de (A, ω) como o par $(r+1, s)$ onde $r = \dim U_e$ e $s = \dim V_e$. A classificação das álgebras de Bernstein de baixa dimensão, via tipo, é um problema bastante estudado, veja [38], [39], [40] e [41].

Para referência futura, de [42, Teor.3.1] temos,

Proposição 5 *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein nuclear, isto é, $A^2 = A$, então (A, ω) é uma train álgebra verificando a train equação $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^2 = 0$.*

Referências sobre o assunto: [6], [30], [35], [39], [40], [41], [42], [45], [47], [53] e [55].

1.4 Álgebras genéticas

Se A é uma F -álgebra, indicaremos por $\text{Hom}_F(A)$ a álgebra (associativa) dos operadores lineares de A . Se $L(A)$ é o conjunto dos operadores multiplicação à esquerda $L_a : x \mapsto ax$ e $R(A)$ é o conjunto dos operadores multiplicação à direita $R_a : x \mapsto xa$, a subálgebra $T(A)$ de $\text{Hom}_F(A)$ gerada por $\{\text{id}_A\} \cup L(A) \cup R(A)$ é a álgebra das transformações de A . Os elementos de $T(A)$ podem ser expressos na forma

$$\tau = f(T_1, \dots, T_n)$$

onde cada $T_j \in L(A) \cup R(A)$ e f é um polinômio em n indeterminadas associativas não comutativas. Para álgebras comutativas, $L_a = R_a$.

Diremos que uma álgebra bária comutativa e de dimensão finita (A, ω) é genética segundo Schafer, veja [33] ou [50], se para todo $\tau = f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}) \in T(A)$ e $\tau' = f(R_{y_1}, \dots, R_{y_n}) \in T(A)$, onde $\omega(x_i) = \omega(y_i)$ temos $\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau')$, onde Λ indica o espectro do operador, isto é, conjunto dos valores característicos em alguma extensão de F .

O seguinte teorema é devido a Schafer veja [50, Teor.1].

Teorema 1 *Toda álgebra genética segundo Schafer é uma train álgebra.*

Pelo Teorema 1 acima e Proposição 1, em uma álgebra genética segundo Schafer o homomorfismo peso é único.

Seja A uma álgebra comutativa de dimensão $m+1$. Diremos que A é genética segundo Gonshor (ou especial triangular), se para alguma extensão algébrica L de F , $A_L = L \otimes_F A$ admite uma base $c_0, \dots, c_m \in A_L$, para a qual as constantes de estrutura λ_{ijk} definidas por:

$$c_i c_j = \sum_{k=0}^m \lambda_{ijk} c_k, \quad (0 \leq i \leq j \leq m)$$

verificam as seguintes condições:

- a) $\lambda_{000} = 1$;
- b) $\lambda_{0jk} = 0$ para $k < j$;
- c) $\lambda_{ijk} = 0$ para $k \leq j$ se $0 < i \leq j \leq m$.

A base $c_0, \dots, c_m$ é chamada de uma base canônica de A_L e λ_{0jj} ($0 \leq j \leq m$) as train raízes desta álgebra (não confundir com as train raízes de uma train álgebra) que são invariantes em relação a base canônica escolhida. A função $\omega: A \rightarrow F$ dada por $\omega(c_0) = 1$ e $\omega(c_i) = 0$, ($i = 1, \dots, m$), é um homomorfismo não nulo de álgebras e portanto toda álgebra genética segundo Gonshor é uma álgebra bária. A proposição a seguir é [55, Lema 3.19].

Proposição 6 *Se (A, ω) é genética segundo Gonshor então $\ker \omega$ é nilpotente.*

Pela Proposição 6 acima e Proposição 1, em uma álgebra genética segundo Gonshor o homomorfismo peso é único.

O teorema a seguir é o [55, Teor.5.12].

Teorema 2 *Toda álgebra genética segundo Gonshor é genética segundo Schafer.*

O teorema seguinte, devido a Gonshor, aparece em [55, Teor.3.13].

Teorema 3 *Se F é algébricamente fechado, uma álgebra é genética segundo Gonshor se e somente se é genética segundo Schafer.*

Sejam A uma álgebra, U e V subconjuntos de A . Define-se:

- a) $UV = \langle uv : u \in U \text{ e } v \in V \rangle$;
- b) $U^1 = U$, $U^{k+1} = U^k U$, $k \geq 1$ (potências principais à direita de U);
- c) ${}^1U = U$, ${}^{k+1}U = U({}^kU)$, $k \geq 1$ (potências principais à esquerda de U).

Diremos que uma álgebra bárica comutativa (A, ω) (logo $U^k = {}^kU$ para todo $U \subseteq A$ e $k \in \mathbb{N}$) e de dimensão finita é uma train álgebra especial se as seguintes condições estiverem verificadas:

- a) $\ker \omega$ é nilpotente;
- b) As potências principais $(\ker \omega)^j$, $(j = 1, \dots)$ são ideais de A .

O seguinte teorema é devido a Schafer, veja [50].

Teorema 4 *Toda train álgebra especial é genética segundo Schafer.*

Referências sobre o assunto: [1], [5], [11], [12], [14], [15], [16], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [32], [34], [35], [38], [40], [42], [44], [46], [48], [49], [50] e [55].

1.5 O exemplo de Abraham

Em [1] Abraham prova os seguintes teoremas:

Teorema 5 *Toda nil álgebra de nil-índice 3, comutativa, não necessariamente associativa e de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero é nilpotente.*

Teorema 6 *Toda train álgebra comutativa de posto 3 sobre um corpo F de característica zero é train especial.*

Uma questão natural decorrente do Teorema 6 acima é se o mesmo ocorre com as train álgebras de posto ≥ 4 . Em [1] Abraham, a partir do exemplo de Suttles, veja [52], nos dá dois exemplos de train álgebras que não são train especial, uma de posto 5 e outra de posto 4.

Vamos inicialmente ao exemplo de Suttles. Seja a álgebra comutativa $Z = \langle c_1, \dots, c_5 \rangle$ tal que:

$$c_1 c_2 = c_2 c_4 = -c_1 c_5 = c_3, \quad c_1 c_3 = c_4, \quad c_2 c_3 = c_5, \quad \text{os outros produtos são zero.}$$

Então Z é de potências associativas, nil de nil-índice 4 pois $z^4 = 0$ para todo $z \in Z$ e $(c_1 + c_2)^3 = 2c_4 + 2c_5 \neq 0$; Z não é nilpotente pois $Z^2 = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle$ e $Z^3 = Z^2$, mas Z é solúvel pois $Z^2 Z^2 = 0$.

Agora vamos aos exemplos de Abraham. Inicialmente adicionemos uma unidade a Z , isto é, seja $A = F \oplus Z$ que é uma álgebra bária, onde o homomorfismo peso é dado por $\omega(1) = 1$ e $\omega(c_i) = 0$ ($1 \leq i \leq 5$). Para todo $x = \omega(x)1 + a \in A$ onde $a \in Z$, temos $x(x - \omega(x)1)^4 = 0$. Esta equação é de grau mínimo, logo (A, ω) é uma train álgebra de posto 5, tendo Z como núcleo da função peso, portanto não é train especial pois Z não é nilpotente.

Adicionemos agora um elemento c_0 a Z tal que $c_0^2 = c_0$, $c_0 c_i = \frac{1}{2} c_i$ ($i = 1, \dots, 5$). A álgebra obtida também é uma álgebra bária, com homomorfismo peso dado por $\omega(c_0) = 1$ e $\omega(c_i) = 0$ ($1 \leq i \leq 5$). Abraham mostra que esta álgebra é train de posto 4 e o núcleo da função peso é claramente Z .

Nos exemplos acima, temos uma train álgebra que não é train especial pois o núcleo da função peso não é nilpotente. Em [33] Holgate exhibe uma subálgebra bária da álgebra dada no segundo exemplo de Abraham, que possui posto 4. Ela é $B = \langle e_0, e_1, c_5, c_3, c_4 \rangle$, onde $e_0 = c_0 + c_1$, $e_1 = c_1 - c_2$. A tabela de multiplicação é:

$$\begin{cases} e_0^2 = e_0, & e_0 e_1 = \frac{1}{2} e_1 - c_3, & e_0 c_5 = \frac{1}{2} c_5 - c_3, & e_0 c_3 = \frac{1}{2} c_3 + c_4, & e_0 c_4 = \frac{1}{2} c_4, \\ e_1^2 = -2c_3, & e_1 c_5 = -c_3, & e_1 c_3 = c_4 - c_5, & e_1 c_4 = -c_3, \\ \text{os outros produtos são zero.} \end{cases}$$

O núcleo da função peso, neste caso, é dado por $K = \langle e_1, c_5, c_3, c_4 \rangle$ que é nilpotente, pois $K^2 = \langle c_3, c_4 - c_5 \rangle$, $K^3 = \langle c_4 - c_5 \rangle$ e $K^4 = 0$. Por outro lado, Holgate mostra que B não é genética segundo Schafer, portanto não é train especial.

Referências sobre o assunto: [1], [7], [8], [9], [33] e [55].

1.6 O processo de duplicação

O princípio de duplicação de uma álgebra foi introduzido por I.M.H.Etherington em 1939, ver [12]. As definições e os resultados a seguir aparecem em [55].

Se A é uma álgebra, então

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i \right) \left(\sum_{j \in J} c_j \otimes d_j \right) = \sum_{i \in I, j \in J} a_i b_i \otimes c_j d_j, \quad (1)$$

define uma multiplicação no espaço vetorial $A \otimes_F A$. A álgebra $A \otimes_F A$ com a multiplicação definida acima é chamada de duplicada (ou duplicada não comutativa) de A e denotada por $A \otimes_d A$.

Proposição 7 A aplicação $\varphi: A \otimes_d A \rightarrow A$ dada por $\varphi \left(\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i \right) = \sum_{i \in I} a_i b_i$ é um homomorfismo de álgebras, $\text{Im} \varphi = A^2$ e $(A \otimes_d A) \ker \varphi = \ker \varphi (A \otimes_d A) = 0$.

Proposição 8 Se (A, ω) é uma álgebra bária então $A \otimes_d A$ também é uma álgebra bária, onde o homomorfismo peso é dado por $\omega_d = \omega \circ \varphi$.

Proposição 9 Se A é uma álgebra de dimensão finita $m + 1$ e $c_0, \dots, c_m$ é uma base de A , então $c_i \otimes c_j$, $(0 \leq i, j \leq m)$ é uma base de $A \otimes_d A$.

Se A é álgebra comutativa, denotaremos por $D(A) = A \otimes_d A / J$ onde J é o ideal $\langle a \otimes b - b \otimes a : a, b \in A \rangle$ e por $a * b = a \otimes b + J \in D(A)$. Esta álgebra (que é comutativa) será chamada de duplicada comutativa de A . Observemos que a multiplicação em $D(A)$ é dada por:

$$\left(\sum_{i \in I} a_i * b_i \right) \left(\sum_{j \in J} c_j * d_j \right) = \sum_{i \in I, j \in J} a_i b_i * c_j d_j. \quad (2)$$

Proposição 10 A aplicação $\psi: D(A) \rightarrow A$ dada por $\psi \left(\sum_{i \in I} a_i * b_i \right) = \sum_{i \in I} a_i b_i$ é um homomorfismo de álgebras, $\text{Im} \psi = A^2$ e $D(A) \ker \psi = 0$.

Proposição 11 Se (A, ω) é uma álgebra bária comutativa, então $D(A)$ é uma álgebra bária onde o homomorfismo peso é dado por $\omega_d = \omega \circ \psi$.

Proposição 12 Se (A, ω) é uma álgebra bária comutativa, de dimensão finita $m + 1$ e $c_0, \dots, c_m$ é uma base de A , então $c_i * c_j$ $(0 \leq i \leq j \leq m)$ é uma base de $D(A)$.

Referências sobre o assunto: [12], [15], [23], [42], [46] e [55].

1.7 M-grupos

Um grupo com operadores é um sistema (G, M, ψ) , onde G é um grupo, M é um conjunto e ψ é uma função de $G \times M$ em G tal que:

$$\psi(ab, m) = \psi(a, m)\psi(b, m) \text{ para todo } a, b \in G \text{ e } m \in M$$

Nestas condições diremos simplesmente que G é um M -grupo e simplificaremos a notação, denotando $\varphi(a, m)$ por am . Portanto $(ab)m = (am)(bm)$ se $a, b \in G$ e $m \in M$.

Sejam G um M -grupo e H um subgrupo de G . Diremos que H é um M -subgrupo de G se $hm \in H$ para todo $h \in H$ e $m \in M$.

Sejam G, G' dois M -grupos e $\varphi: G \rightarrow G'$ um homomorfismo de grupos. Diremos que φ é um M -homomorfismo se $\varphi(a)m = \varphi(am)$ para todo $a \in G$ e $m \in M$. Quando $G' = G$ e φ comuta com todos os automorfismos internos de G , diremos que φ é normal. De modo natural definem-se M -endomorfismos, M -epimorfismos, M -monomorfismos e M -isomorfismos.

Um M grupo G é decomponível se existirem dois M -subgrupos normais H e K não triviais, tais que $G = H \times K$. Caso contrário diremos que G é indecomponível. Aqui $H \times K$ indica o produto direto dos M -subgrupos H e K , cuja estrutura de M -grupo é dada por: $(hk)(h'k') = (hh')(kk')$ e $(hk)m = ((hm)(km))$ $h, h' \in H, k, k' \in K$ e $m \in M$.

Proposição 13 [36, Teor.8] *Um M -grupo G é decomponível se e somente se existe um M -endomorfismo normal θ de G tal que $\theta^2 = \theta$, $\theta \neq 0, \text{id}_G$.*

Um M -grupo G verifica a condição de cadeia descendente (c.c.d.) se toda cadeia de M -subgrupos normais descendente estaciona.

Proposição 14 [36, Teor.9] *Se $G \neq 1$ é um M -grupo satisfazendo (c.c.d.), então existem M -subgrupos normais e indecomponíveis $H_1, \dots, H_m$ de G tais que $G = H_1 \times \dots \times H_m$.*

Um M grupo G verifica a condição de cadeia ascendente (c.c.a.) se toda cadeia de M -subgrupos normais ascendente estaciona.

Teorema 7 [36, Teor.Krull-Schmidt] *Seja G um M -grupo que satisfaz (c.c.a.) e (c.c.d.). Sejam $H_1, \dots, H_s, K_1, \dots, K_t$ M -subgrupos normais e indecomponíveis tais que*

$$G = H_1 \times \dots \times H_s = K_1 \times \dots \times K_t.$$

Então $s = t$ e existe uma permutação dos índices $i \mapsto i'$ tal que $H_i \cong K_{i'}$ ($i = 1, \dots, s$) (isomorfismo de M -grupos). Além disso, reordenando os K_j , se necessário, para que $H_i \cong K_i$, temos $G = H_1 \times \dots \times H_j \times K_{j+1} \times \dots \times K_s$. ($0 \leq j \leq s$).

Referências sobre o assunto: [36] e [37].

1.8 Decomposição de Peirce

No parágrafo 1.3 apresentamos uma decomposição de Peirce para uma álgebra de Bernstein, neste apresentaremos uma decomposição de Peirce para uma álgebra comutativa de dimensão arbitrária.

Teorema 8 [43, Teor.6.2] *Sejam A uma álgebra comutativa e $e \in A$, um idempotente e $f(X) \in F[X]$ tais que $f(R_e) = 0$ em A . Se $f = f_1^{k_1} \dots f_m^{k_m}$, onde $f_1, \dots, f_m$ são polinômios mônicos irredutíveis distintos em $F[X]$, então $A = A_{(1)} \oplus \dots \oplus A_{(m)}$, onde $A_{(j)}$ é o subespaço de A anulado por $f_j(R_e)^{k_j}$.*

Corolário [43, Cor.6.3] *Sejam A uma álgebra comutativa, $e \in A$ um idempotente e $f(X) \in F[X]$ tais que $f(R_e) = 0$ em A . Se as raízes características $r_1, \dots, r_m$ de f são distintas e estão em F , então $A = A_{(1)} \oplus \dots \oplus A_{(m)}$, onde $A_{(j)} = \ker (R_e - r_j \text{id}_A)^{k_j}$ e k_j é a multiplicidade de r_j .*

Referências sobre o assunto: [43] e [55].

Capítulo 2

Join de álgebras báricas

Neste capítulo, introduzimos um processo que permite construir uma álgebra bárica a partir de outras duas (join). É necessário admitir a hipótese (aliás bastante natural do ponto de vista genético) de existência de um idempotente de peso 1. Na segunda parte do capítulo, mostramos que algumas classes de álgebras, já bastante estudadas por vários autores, são fechadas para esta operação join.

2.1 Álgebras báricas com idempotentes

Sejam F um corpo, B uma F -álgebra não necessariamente associativa ou comutativa e de dimensão arbitrária e $\lambda, \rho: B \rightarrow B$ F -operadores lineares. No F -espaço vetorial $F \oplus B$, introduzimos uma multiplicação e uma forma linear ω por:

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, ab + \alpha\lambda(b) + \beta\rho(a)); \quad \omega(\alpha, a) = \alpha. \quad (1)$$

onde $\alpha, \beta \in F$; $a, b \in B$. Claramente ω é um homomorfismo não nulo cujo núcleo é B , $e = (1, 0)$ é um idempotente de peso 1, $(1, 0)(0, n) = (0, \lambda(n))$, $(0, n)(1, 0) = (0, \rho(n))$, para todo $n \in B$. Isto é, com as identificações usuais, cada elemento x de $[B, \lambda, \rho]$ é da forma $x = \alpha e + n$, $en = \lambda(n)$ e $ne = \rho(n)$, onde $\alpha \in F$ e $n \in B$. Denotaremos esta álgebra bárica por $[B, \lambda, \rho]$. Quando $\rho = \lambda$, indicaremos $[B, \lambda, \lambda]$ por $[B, \lambda]$. Neste caso, e é

um idempotente central, pois $en = ne$ para todo $n \in B$, que implica $ex = xe$ para todo $x \in [B, \lambda]$.

É claro que em $[B, \lambda, \rho]$ podem existir idempotentes de peso 0, por exemplo idempotentes em B .

Reciprocamente, toda álgebra bárica (A, ω) com um idempotente e de peso 1 é obtida por este processo, tomando-se $B = \ker \omega$, $\lambda = L_e$ e $\rho = R_e$, onde $R_e, L_e: B \rightarrow B$ são os operadores multiplicação à direita e à esquerda por e .

Denotaremos a classe das F -álgebras báricas que possuem um idempotente de peso 1 por $\Omega(F)$ ou simplesmente Ω . Lembremos que muitas álgebras báricas descrevendo modelos biológicos possuem idempotentes de peso 1, que se interpretam como pontos de equilíbrio para as gerações filiais. A descrição desses idempotentes em algumas dessas álgebras foi feita por vários autores, por exemplo [55].

De agora em diante, simplificaremos expressões como “ F -álgebra” para “álgebra”, etc., sempre que o contexto indicar quem é F .

Por um cálculo direto prova-se a seguinte proposição.

Proposição 1 *Sejam B uma álgebra e $\lambda, \rho: B \rightarrow B$ operadores lineares. Então:*

- a) $[B, \lambda, \rho]$ é comutativa se e somente se B é comutativa e $\lambda = \rho$;
- b) $[B, \lambda, \rho]$ é associativa se e somente se B é associativa, λ e ρ são operadores idempotentes que comutam, $\lambda(ab) = \lambda(a)b$, $\rho(ab) = a\rho(b)$ e $\rho(a)b = a\lambda(b)$ para todo $a, b \in B$.

Proposição 2 *Sejam B uma álgebra, $\lambda, \rho: B \rightarrow B$ operadores lineares e $I \subseteq B$. Então I é um ideal à esquerda (resp. direita) de $[B, \lambda, \rho]$ se e somente se I é um ideal à esquerda (resp. direita) de B que é invariante pelo operador linear λ (resp. ρ).*

Demonstração Segue trivialmente das igualdades, todas casos particulares de (1):

$$(0, a)(0, b) = (0, ab); \quad (1, 0)(0, b) = (0, \lambda(b)); \quad (0, b)(1, 0) = (0, \rho(b))$$

onde $a, b \in B$.

CQD

Proposição 3 *Sejam B_1 e B_2 álgebras, $\lambda_i, \rho_i: B_i \longrightarrow B_i$ operadores lineares ($i = 1, 2$).*

a) *Suponhamos $\varphi: [B_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow [B_2, \lambda_2, \rho_2]$ um homomorfismo bárico. Então existem um homomorfismo $\theta: B_1 \longrightarrow B_2$ e $c \in B_2$ tais que:*

i) $c^2 + \lambda_2(c) + \rho_2(c) = c;$

ii) *Os diagramas*

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\theta} & B_2 \\ \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \lambda_2 + L_c \\ B_1 & \xrightarrow{\theta} & B_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\theta} & B_2 \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 + R_c \\ B_1 & \xrightarrow{\theta} & B_2 \end{array}$$

são comutativos.

b) *Reciprocamente, dados um homomorfismo $\theta: B_1 \longrightarrow B_2$ e $c \in B_2$ tais que i) e ii) estão satisfeitas, então φ dada por $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$ é um homomorfismo bárico de $[B_1, \lambda_1, \rho_1]$ em $[B_2, \lambda_2, \rho_2]$.*

Demonstração a) Como φ é um homomorfismo bárico, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} [B_1, \lambda_1, \rho_1] & \xrightarrow{\varphi} & [B_2, \lambda_2, \rho_2] \\ \omega \searrow & & \swarrow \omega \\ & F & \end{array}$$

é comutativo. Escrevendo $\varphi = (f, g)$ onde $f: [B_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow F$ e $g: [B_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow B_2$, do diagrama temos $\alpha = \omega(\alpha, a) = (\omega \circ \varphi)(\alpha, a) = \omega(f(\alpha, a), g(\alpha, a)) = f(\alpha, a)$. Assim, $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, g(\alpha, a))$. Sejam $c = g(1, 0)$ e $\theta: B_1 \longrightarrow B_2$ dada por $\theta(a) = g(0, a)$, $a \in B_1$. Logo $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, g(\alpha, a)) = (\alpha, g(\alpha, 0) + g(0, a)) = (\alpha, \alpha g(1, 0) + g(0, a)) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$. Dados $(\alpha, a), (\beta, b) \in [B_1, \lambda_1, \rho_1]$, então $\varphi((\alpha, a)(\beta, b)) = \varphi(\alpha\beta, ab + \alpha\lambda_1(b) + \beta\rho_1(a)) = (\alpha\beta, \theta(ab) + \alpha\theta\lambda_1(b) + \beta\theta\rho_1(a) + \alpha\beta c)$ e $\varphi(\alpha, a)\varphi(\beta, b) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))(\beta, \beta c + \theta(b)) = (\alpha\beta, \theta(a)\theta(b) + \alpha(c\theta(b) + \lambda_2\theta(b)) + \beta(\theta(a)c + \rho_2\theta(a)) + \alpha\beta(c^2 + \lambda_2(c) + \rho_2(c)))$. Assim, comparando monômios em α e β , obtemos as 4 identidades:

$$\begin{aligned} \theta(ab) &= \theta(a)\theta(b); & c\theta(b) + \lambda_2\theta(b) &= \theta\lambda_1(b); \\ c^2 + \lambda_2(c) + \rho_2(c) &= c; & \theta(a)c + \rho_2\theta(a) &= \theta\rho_1(a); \end{aligned}$$

que provam i) e ii) e que θ é um homomorfismo.

b) O cálculo feito acima mostra que φ definido por $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$ é um homomorfismo bárico. CQD

Corolário 1 Com as notações acima, φ é monomorfismo (resp. epimorfismo) se e somente se θ é monomorfismo (resp. epimorfismo).

Demonstração 1) Suponhamos θ monomorfismo. Se $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a)) = (0, 0)$, logo $\alpha = 0$ e $\theta(a) = 0$, portanto $a = 0$. Se θ é epimorfismo e dado $(\beta, b) \in [B_2, \lambda_2, \rho_2]$, existe $a \in B_1$ tal que $\theta(a) = b - \beta c$, então $\varphi(\beta, a) = (\beta, \beta c + \theta(a)) = (\beta, \beta c + b - \beta c) = (\beta, b)$.

2) Suponhamos φ monomorfismo e $a \in B_1$ tal que $\theta(a) = 0$. Então $\varphi(0, a) = (0, \theta(a)) = (0, 0)$, logo $a = 0$. Se φ é epimorfismo e $b \in B_2$, existe $(\alpha, a) \in [B_1, \lambda_1, \rho_1]$ tal que $\varphi(\alpha, a) = (0, b)$, logo $(\alpha, \alpha c + \theta(a)) = (0, b)$, assim $\alpha = 0$ e $\theta(a) = b$. CQD

Quando $\rho_i = \lambda_i$ ($i = 1, 2$) a Proposição 3 se escreve da seguinte forma:

Corolário 2 Sejam B_1 e B_2 álgebras, $\lambda_i: B_i \rightarrow B_i$ operadores lineares ($i=1,2$).

a) Suponhamos $\varphi: [B_1, \lambda_1] \rightarrow [B_2, \lambda_2]$ um homomorfismo bárico. Então existem um homomorfismo $\theta: B_1 \rightarrow B_2$ e $c \in B_2$ tais que:

i) $c^2 + 2\lambda_2(c) = c$;

ii) c comuta com todos elementos de $\theta(B_1)$;

iii) O diagrama

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\theta} & B_2 \\ \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \lambda_2 + L_c \\ B_1 & \xrightarrow{\theta} & B_2 \end{array}$$

é comutativo.

b) Reciprocamente, dado um homomorfismo $\theta: B_1 \rightarrow B_2$ e $c \in B_2$ tais que i), ii) e iii) estão satisfeitas, então φ dada por $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$ é um homomorfismo bárico de $[B_1, \lambda_1]$ em $[B_2, \lambda_2]$.

Conforme vimos, homomorfismos báricos φ de $[B_1, \lambda_1, \rho_1]$ em $[B_2, \lambda_2, \rho_2]$ são descritos por pares (c, θ) satisfazendo i) e ii) da Prop. 3, a). Um simples cálculo mostra que se um homomorfismo bárico φ' de $[B_2, \lambda_2, \rho_2]$ em $[B_3, \lambda_3, \rho_3]$ é descrito por (c', θ') então $\varphi' \circ \varphi$ é descrito por $(c' + \theta'(c), \theta' \circ \theta)$.

2.2 Join de álgebras báricas com idempotentes

Suponhamos que (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) são membros de Ω , com idempotentes de peso 1, e_1 e e_2 respectivamente. Em $A = \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$ definimos a multiplicação componente a componente:

$$(u_1, v_1)(u_2, v_2) = (u_1 u_2, v_1 v_2), \quad u_i \in \ker \omega_1, v_i \in \ker \omega_2 \quad (i = 1, 2).$$

Sejam $\lambda, \rho: A \rightarrow A$ operadores lineares definidos por:

$$\lambda(u, v) = (e_1 u, e_2 v) \quad \text{e} \quad \rho(u, v) = (u e_1, v e_2).$$

Consideremos agora a nova álgebra em Ω , $[A, \lambda, \rho] = F \oplus \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$, que possui a seguinte multiplicação, de acordo com (1):

$$(\alpha, u, v)(\alpha', u', v') = (\alpha \alpha', uu' + \alpha e_1 u' + \alpha' u e_1, vv' + \alpha e_2 v' + \alpha' v e_2). \quad (2)$$

Mostremos que a construção acima independe dos idempotentes e_1, e_2 escolhidos em A_1 e A_2 . Sejam e'_1 e e'_2 outros idempotentes de peso 1 em A_1 e A_2 respectivamente. Denotaremos por λ' e ρ' os correspondentes operadores lineares em $A = \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$, dados por $\lambda'(u, v) = (e'_1 u, e'_2 v)$ e $\rho'(u, v) = (u e'_1, v e'_2)$.

Proposição 4 *Existe um isomorfismo bárico entre $[A, \lambda, \rho]$ e $[A, \lambda', \rho']$.*

Demonstração Escrevendo $e_i = e'_i + c_i$ ($i = 1, 2$), onde c_i tem peso zero em A_i , como e_i e e'_i são idempotentes, então $c_i = c_i^2 + e'_i c_i + c_i e'_i$ ($i = 1, 2$). Tomemos $c = (c_1, c_2) \in A$ e $\theta = \text{id}_A$ e mostremos que c e θ satisfazem i) e ii) da Prop. 3, a).

i) $c^2 + \lambda'(c) + \rho'(c) = (c_1^2 + e'_1 c_1 + c_1 e'_1, c_2^2 + e'_2 c_2 + c_2 e'_2) = (c_1, c_2) = c$;

ii) $(\theta\lambda)(u, v) = (e_1u, e_2v) = (e'_1u, e'_2v) + (c_1u, c_2v) = \lambda'(u, v) + L_c(u, v) = (\lambda' + L_c)\theta(u, v)$.

Assim o primeiro diagrama de ii) é comutativo. Similarmente prova-se que o segundo diagrama de ii) é comutativo. Pela Prop.3, $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$ é um homomorfismo bárico e pelo Corolário 1, é um isomorfismo bárico. CQD

Definição 1 A álgebra bárica $[A, \lambda, \rho]$ contruída acima é chamada de join de (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) e será denotada por $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ ou simplesmente por $A_1 \vee A_2$.

Na soma direta usual $A_1 \oplus A_2$ das álgebras A_1 e A_2 , podemos encontrar uma subálgebra que possui um homomorfismo não nulo com valores em F , sendo portanto uma álgebra bárica. De fato, $A_1 \oplus A_2 = Fe_1 \oplus \ker \omega_1 \oplus Fe_2 \oplus \ker \omega_2 = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$ e o elemento $e = e_1 + e_2$ é um idempotente pois $e_1e_2 = 0$. A subálgebra $F(e_1 + e_2) \oplus \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$ é bárica ($e_1 + e_2 \mapsto 1$) e é isomorfa à $A_1 \vee A_2$.

Proposição 5 Sendo (A_i, ω_i) ($i = 1, 2, 3$) F -álgebras na classe Ω , temos os seguintes isomorfismos báricos:

- a) $(F \vee A_1, \text{id}_F \vee \omega_1) \cong (A_1, \omega_1)$;
- b) $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2) \cong (A_2 \vee A_1, \omega_2 \vee \omega_1)$;
- c) $((A_1 \vee A_2) \vee A_3, (\omega_1 \vee \omega_2) \vee \omega_3) \cong (A_1 \vee (A_2 \vee A_3), \omega_1 \vee (\omega_2 \vee \omega_3))$.

Demonstração Escolhemos idempotentes de peso 1, $e_i \in A_i$, ($i = 1, 2, 3$).

Para provar a) basta considerar $A = \ker \text{id}_F \oplus \ker \omega_1 = \{(0, u) : u \in \ker \omega_1\}$, $c = 0 \in \ker \omega_1$, $\lambda, \rho: A \rightarrow A$ e $\theta: A \rightarrow \ker \omega_1$ dadas por $\lambda(0, u) = (0, e_1u)$, $\rho(0, u) = (0, ue_1)$ e $\theta(0, u) = u$. Assim por b) e Corolário 1 da Prop. 3, $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \theta(a))$ é um isomorfismo bárico.

Em b) consideremos $A = \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$, $A' = \ker \omega_2 \oplus \ker \omega_1$, $c = 0 \in A'$, $\lambda, \rho: A \rightarrow A$, $\lambda', \rho': A' \rightarrow A'$, $\theta: A \rightarrow A'$ dadas por $\lambda(u, v) = (e_1u, e_2v)$, $\rho(u, v) = (ue_1, ve_2)$, $\lambda'(v, u) = (e_2v, e_1u)$, $\rho'(v, u) = (ve_2, ue_1)$ e $\theta(u, v) = (v, u)$.

Em c) consideremos

$$A_1 \vee A_2 = Fe \oplus \ker(\omega_1 \vee \omega_2), \quad e = (1, 0); \quad A_2 \vee A_3 = Fe' \oplus \ker(\omega_2 \vee \omega_3), \quad e' = (1, 0);$$

$$A = \ker(\omega_1 \vee \omega_2) \oplus \ker \omega_3; \quad A' = \ker \omega_1 \oplus \ker(\omega_2 \vee \omega_3);$$

$$c = 0 \in A'; \quad \lambda, \rho: A \longrightarrow A; \quad \lambda', \rho': A' \longrightarrow A', \quad \theta: A \longrightarrow A' \text{ dadas por } \lambda(a, w) = (ea, e_3w), \quad \rho(a, w) = (ae, we_3), \quad \lambda'(u, b) = (e_1u, e'b), \quad \rho'(u, b) = (ue_1, be') \text{ e } \theta((0, u, v), w) = (u, (0, v, w)). \quad \text{CQD}$$

A condição c) da proposição acima nos permite definir recursivamente o join de n membros $(A_1, \omega_1), \dots, (A_n, \omega_n)$ de Ω . Para isso, escolhemos idempotentes de peso 1 $e_i \in A_i$, decompomos $A_i = Fe_i \oplus \ker \omega_i$, formamos a soma direta $\ker \omega_1 \oplus \dots \oplus \ker \omega_n$ com multiplicação componente a componente, acrescentamos o corpo F e finalmente estendemos a multiplicação por:

$$\begin{aligned} & (\alpha, u_1, \dots, u_n)(\beta, v_1, \dots, v_n) = \\ & = (\alpha\beta, u_1v_1 + \alpha e_1v_1 + \beta u_1e_1, \dots, u_nv_n + \alpha e_nv_n + \beta u_ne_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Essa álgebra será denotada por $(A_1 \vee \dots \vee A_n, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_n)$ ou simplesmente por $A_1 \vee \dots \vee A_n$. Notemos que $e = (1, 0, \dots, 0)$ é um idempotente de peso 1, que age no núcleo de $\omega_1 \vee \dots \vee \omega_n$ por $e(0, u_1, \dots, u_n) = (0, e_1u_1, \dots, e_nu_n)$ e $(0, u_1, \dots, u_n)e = (0, u_1e_1, \dots, u_ne_n)$. Esse idempotente será chamado de join de $e_1, \dots, e_n$ e denotado por $e_1 \vee \dots \vee e_n$. Cada uma das álgebras báricas (A_i, ω_i) possui uma cópia isomorfa em $A_1 \vee \dots \vee A_n$ que é a subálgebra $A'_i = \{(\alpha, 0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0) : \alpha \in F \text{ e } u_i \in \ker \omega_i\}$. Observemos também que $(\ker \omega_i)(\ker \omega_j) = 0$ se $i \neq j$. As funções $(\alpha, u_1, \dots, u_n) \in A_1 \vee \dots \vee A_n \mapsto \alpha e_i + u_i \in A_i$ e $\alpha e_i + u_i \in A_i \mapsto (\alpha, 0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0) \in A_1 \vee \dots \vee A_n$ são respectivamente epimorfismos e monomorfismos báricos. A primeira é chamada de projeção natural de $A_1 \vee \dots \vee A_n$ em A_i e a segunda de injeção natural de A_i em $A_1 \vee \dots \vee A_n$. Além disso estes homomorfismos levam elementos do núcleo em elementos do núcleo.

Com a identificação usual de $(\alpha, u_1, \dots, u_n)$ com $\alpha e + u_1 + \dots + u_n$, então (3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\alpha e + \sum_{i=1}^n u_i\right) \left(\beta e + \sum_{i=1}^n v_i\right) = \alpha\beta e + \sum_{i=1}^n (u_i v_i + \alpha e_i v_i + \beta u_i e_i). \quad (3')$$

Observemos também que se $\dim A_i < \infty$, então $\dim(A_1 \vee \dots \vee A_n) = \sum_{i=1}^n \dim A_i - n + 1$.

Um cálculo direto mostra que se (A, ω) e (B, γ) são álgebras báricas e $\varphi: A \rightarrow B$ é um epimorfismo bárico, então $\varphi(\ker \omega) = \ker \gamma$. As Proposições 6 e 7 a seguir são demonstradas sem dificuldade.

Proposição 6 *Se (A_i, ω_i) ($i = 1, \dots, n$) são membros de Ω , $\varphi_i: A_1 \vee \dots \vee A_n \rightarrow A_i$ é a projeção natural e $\psi_i: A_i \rightarrow A_1 \vee \dots \vee A_n$ é a injeção natural temos:*

- a) *Se I é um ideal à direita (resp. esquerda) de $A_1 \vee \dots \vee A_n$, então $\varphi_i(I)$ é um ideal à direita (resp. esquerda) de A_i ($1 \leq i \leq n$). Além disso se $I \subseteq \ker(\omega_1 \vee \dots \vee \omega_n)$, então $\varphi_i(I) \subseteq \ker \omega_i$;*
- b) *Se $I \subseteq \ker \omega_i$ é um ideal à direita (resp. esquerda) de A_i , então $\psi_i(I) \subseteq \ker(\omega_1 \vee \dots \vee \omega_n)$ e é um ideal à direita (resp. esquerda) de $A_1 \vee \dots \vee A_n$ ($1 \leq i \leq n$).*

Proposição 7 *Se $(A, \omega), (A_1, \omega_1), \dots, (A_n, \omega_n)$ são membros de Ω e $\varphi: A_1 \vee \dots \vee A_n \rightarrow A$ um epimorfismo bárico, temos:*

- a) *Se I é um ideal à direita (resp. esquerda) de $A_1 \vee \dots \vee A_n$, então $\varphi(I)$ é um ideal à direita (resp. esquerda) de A . Além disso se $I \subseteq \ker(\omega_1 \vee \dots \vee \omega_n)$, então $\varphi(I) \subseteq \ker \omega$;*
- b) *Se $I \subseteq \ker \omega_i$ é um ideal à direita (resp. esquerda) de A_i , então $(\varphi\psi_i)(I) \subseteq \ker \omega$ e é um ideal à direita (resp. esquerda) de A ($1 \leq i \leq n$);*
- c) *Se φ é um isomorfismo bárico, então $\ker \omega = \varphi(\ker(\omega_1 \vee \dots \vee \omega_n)) = (\varphi\psi_1)(\ker \omega_1) \oplus \dots \oplus (\varphi\psi_n)(\ker \omega_n)$.*

Observação Sejam $(A_1, \omega_1), (A_2, \omega_2)$ membros de Ω , $e_1 \in A_1, e_2 \in A_2$ idempotentes de peso 1, $e = e_1 \vee e_2$ e $A'_i = \{\alpha e + u : \alpha \in F, u \in \ker \omega_i\}$ ($i = 1, 2$). Conforme já vimos, A'_i é uma subálgebra bárica de $A_1 \vee A_2$ isomorfa, como álgebra bárica, a A_i ($i = 1, 2$). Identifiquemos A_i com A'_i , fazendo $A_i = A'_i$. Sejam as projeções canônicas $\varphi_0: A_1 \vee A_2 \rightarrow Fe$, $\varphi_i: A_1 \vee A_2 \rightarrow A_i$, que são dadas por $\varphi_0(\alpha e + u + v) = \alpha e$, $\varphi_1(\alpha e + u + v) = \alpha e + u$ e $\varphi_2(\alpha e + u + v) = \alpha e + v$, onde $\alpha \in F, u \in \ker \omega_1$ e $v \in \ker \omega_2$. Dado $x = \alpha e + u + v \in A_1 \vee A_2$, então $x = -\alpha e + (\alpha e + u) + (\alpha e + v) = (-\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2)(x)$.

2.3 Algumas classes fechadas

Neste parágrafo, mostraremos que as classes de álgebras mais estudadas até agora são fechadas para a operação join.

Proposição 8 *Sejam (A_1, ω_1) , (A_2, ω_2) membros de Ω . Então:*

- a) (A_i, ω_i) é Bernstein se e somente se $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ também o é;
- b) (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) são train álgebras verificando o mesmo t -polinômio à direita (ou esquerda) $f(x)$ se e somente se $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ é train álgebra verificando o t -polinômio $f(x)$.

Demonstração Como φ_i é um epimorfismo bárico, então $(\omega_1 \vee \omega_2)(x) = (\omega_i \circ \varphi_i)(x)$ ($i = 1, 2$). Sejam $e_i \in A_i$ ($i = 1, 2$) idempotentes de peso 1 e $e = e_1 \vee e_2$.

a) Dado $x = \alpha e + a + b \in A_1 \vee A_2 = Fe \oplus \ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2$, então

$$\varphi_0 \left((x^2)^2 - (\omega_1 \vee \omega_2)(x)^2 x^2 \right) = (\varphi_0(x)^2)^2 - (\omega_1 \vee \omega_2)(x)^2 \varphi_0(x)^2 = \alpha^4 e - \alpha^4 e = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left((x^2)^2 - (\omega_1 \vee \omega_2)(x)^2 x^2 \right) = \\ & = -\varphi_0 \left((x^2)^2 - (\omega_1 \vee \omega_2)(x)^2 x^2 \right) + \varphi_1 \left((x^2)^2 - (\omega_1 \vee \omega_2)(x)^2 x^2 \right) + \\ & \quad \varphi_2 \left((x^2)^2 - (\omega_1 \vee \omega_2)(x)^2 x^2 \right) = \\ & = (\varphi_1(x)^2)^2 - (\omega_1 \vee \omega_2)(x)^2 \varphi_1(x)^2 + (\varphi_2(x)^2)^2 - (\omega_1 \vee \omega_2)(x)^2 \varphi_2(x)^2 = \\ & = (\varphi_1(x)^2)^2 - \omega_1(\varphi_1(x))^2 \varphi_1(x)^2 + (\varphi_2(x)^2)^2 - \omega_2(\varphi_2(x))^2 \varphi_2(x)^2 = 0. \end{aligned}$$

A recíproca é trivial. Similarmente prova-se b).

CQD

Proposição 9 *Sejam (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) membros de Ω . Então (A_i, ω_i) satisfazem uma identidade polinômial $p(x_1, \dots, x_m) = 0$ se e somente se $A_1 \vee A_2$ também satisfaz esta identidade.*

Demonstração Suponhamos que (A_i, ω_i) satisfazem $p(x_1, \dots, x_m) = 0$. Dados $x_1, \dots, x_m \in A_1 \vee A_2$. Como $\varphi_i(p(x_1, \dots, x_m)) = p(\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_m))$, então,

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_m) &= -\varphi_0(p(x_1, \dots, x_m)) + \varphi_1(p(x_1, \dots, x_m)) + \varphi_2(p(x_1, \dots, x_m)) = \\ &= -p(\varphi_0(x_1), \dots, \varphi_0(x_m)) + p(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_m)) + p(\varphi_2(x_1), \dots, \varphi_2(x_m)) = 0. \end{aligned}$$

A recíproca é trivial.

CQD

Na proposição a seguir admitiremos que as bases canônicas de cada álgebra são dadas em uma mesma extensão algébrica de F .

Proposição 10 *Sejam (A_1, ω_1) , (A_2, ω_2) membros de Ω . Então (A_i, ω_i) é genética segundo Gonshor se e somente se $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ também o é.*

Demonstração Admitamos que $\dim A_1 = n + 1$ e $\dim A_2 = m + 1$. Sejam $e_1 \in A_1$, $e_2 \in A_2$ idempotentes de peso 1, $e = e_1 \vee e_2$. Suponhamos que (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) são genéticas segundo Gonshor e sejam $\{a_0, \dots, a_n\}$ e $\{b_0, \dots, b_m\}$ bases canônicas de A_1 e A_2 respectivamente. Pela unicidade da função peso, temos que $\omega_1(a_0) = 1$, $\omega_1(a_i) = 0$, $\omega_2(b_0) = 1$, $\omega_2(b_j) = 0$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$). Escrevendo $a_i a_j = \sum_{k=0}^n \lambda_{ijk} a_k$ ($0 \leq i \leq j \leq n$) e $b_i b_j = \sum_{k=0}^m \gamma_{ijk} b_k$ ($0 \leq i \leq j \leq m$), sabemos que:

$$\lambda_{000} = 1, \quad \lambda_{0jk} = 0 \quad (k < j), \quad \lambda_{ijk} = 0 \quad (k \leq j, \quad 0 < i \leq j \leq n);$$

$$\gamma_{000} = 1, \quad \gamma_{0jk} = 0 \quad (k < j), \quad \gamma_{ijk} = 0 \quad (k \leq j, \quad 0 < i \leq j \leq m).$$

Sejam $a'_0 \in \ker \omega_1$ e $b'_0 \in \ker \omega_2$ tais que $a_0 = e_1 + a'_0$ e $b_0 = e_2 + b'_0$. Mostremos que $\{c_0, \dots, c_{n+m}\}$ é uma base canônica, onde

$$c_k = \begin{cases} e + a'_0 + b'_0 & \text{se } k = 0; \\ a_k & \text{se } 1 \leq k \leq n; \\ b_{k-n} & \text{se } n + 1 \leq k \leq n + m. \end{cases}$$

Definimos δ_{ijk} ($0 \leq i \leq j \leq n+m$, $0 \leq k \leq n+m$) por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{00k} = \begin{cases} \lambda_{00k} & \text{se } 0 \leq k \leq n; \\ \gamma_{00,k-n} & \text{se } n+1 \leq k \leq n+m; \end{cases} \\ \delta_{0jk} = \begin{cases} \lambda_{0jk} & \text{se } 1 \leq j \leq n \text{ e } 0 \leq k \leq n; \\ \gamma_{0,j-n,k-n} & \text{se } n+1 \leq j \leq n+m \text{ e } n+1 \leq k \leq n+m; \end{cases} \\ \delta_{ijk} = \begin{cases} \lambda_{ijk} & \text{se } 1 \leq i \leq j \leq n \text{ e } 0 \leq k \leq n; \\ \gamma_{i-n,j-n,k-n} & \text{se } n+1 \leq i \leq j \leq n+m \text{ e } n+1 \leq k \leq n+m; \end{cases} \\ \text{os outros casos são zeros.} \end{array} \right.$$

Como $a_0^2 = a_0 + a$ onde $a = \sum_{k=1}^n \lambda_{00k} a_k$, temos $e_1 + a'_0 + a = a_0^2 = e_1 + 2e_1 a'_0 + a_0'^2$, assim

$a'_0 + a = 2e_1 a'_0 + a_0'^2$. Similarmente para b_0 , $b'_0 + b = 2e_2 b'_0 + b_0'^2$, onde $b = \sum_{k=1}^m \gamma_{00k} b_k$. Logo

$$c_0^2 = e + 2e_1 a'_0 + a_0'^2 + 2e_2 b'_0 + b_0'^2 = e + a'_0 + b'_0 + a + b = c_0 + \sum_{k=1}^{n+m} \delta_{00k} c_k.$$

Para $1 \leq j \leq n$,

$$c_0 c_j = (e + a'_0 + b'_0) a_j = e_1 a_j + a'_0 a_j = a_0 a_j = \sum_{k \geq j} \lambda_{0jk} a_k = \sum_{k \geq j} \delta_{0jk} c_k.$$

Para $n+1 \leq j \leq n+m$,

$$c_0 c_j = b_0 b_{j-n} = \sum_{k \geq j-n} \gamma_{0,j-n,k} b_k = \sum_{k+n \geq j} \delta_{0j,k+n} c_{k+n} = \sum_{k' \geq j} \delta_{0jk'} c_{k'}.$$

Para $1 \leq i \leq j \leq n$,

$$c_i c_j = a_i a_j = \sum_{k > j} \lambda_{ijk} a_k = \sum_{k > j} \delta_{ijk} c_k.$$

Para $n+1 \leq i \leq j \leq n+m$,

$$c_i c_j = b_{i-n} b_{j-n} = \sum_{k > j-n} \gamma_{i-n,j-n,k} b_k = \sum_{k+n > j} \delta_{ij,k+n} c_{k+n} = \sum_{k' > j} \delta_{ijk'} c_{k'}.$$

Para $1 \leq i \leq n$ e $n+1 \leq j \leq n+m$, $c_i c_j = a_i b_{j-n} = 0$. Assim obtemos uma base canônica para $A_1 \vee A_2$.

Suponhamos inversamente que $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ seja genética segundo Gonshor e seja $\{c_0, \dots, c_{n+m}\}$ uma base canônica de $A_1 \vee A_2$. Então $c_0 = e_0 + a_0 + b_0$, $c_1 =$

$a_1 + b_1, \dots, c_{n+m} = a_{n+m} + b_{m+n}$ onde $a_i \in \ker \omega_1$ e $b_i \in \ker \omega_2$ ($0 \leq i \leq n+m$). Escrevendo $c_i c_j = \sum_{k=0}^{n+m} \lambda_{ijk} c_k$ $0 \leq i \leq j \leq n+m$, sabemos que:

$$(1) \quad (e + a_0 + b_0)^2 = e + a_0 + b_0 + \sum_{k \geq 1} \lambda_{00k} (a_k + b_k).$$

$$(2) \quad (e + a_0 + b_0)(a_j + b_j) = \sum_{k \geq j} \lambda_{0jk} (a_k + b_k) \quad 1 \leq j \leq n+m.$$

$$(3) \quad (a_i + b_i)(a_j + b_j) = \sum_{k > j} \lambda_{ijk} (a_k + b_k) \quad 1 \leq i \leq j \leq n+m.$$

Como $(e + a_0 + b_0)^2 = e + 2e_1 a_0 + a_0^2 + 2e_2 b_0 + b_0^2$ de (1) temos

$$(4) \quad \begin{cases} (e_1 + a_0)^2 = e_1 + a_0 + \sum_{k \geq 1} \lambda_{00k} a_k; \\ (e_2 + b_0)^2 = e_2 + b_0 + \sum_{k \geq 1} \lambda_{00k} b_k. \end{cases}$$

De (2) e (3) temos:

$$(5) \quad \begin{cases} (e_1 + a_0)a_j = \sum_{k \geq j} \lambda_{0jk} a_k; \\ (e_2 + b_0)b_j = \sum_{k \geq j} \lambda_{0jk} b_k. \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} a_i a_j = \sum_{k > j} \lambda_{ijk} a_k; \\ b_i b_j = \sum_{k > j} \lambda_{ijk} b_k. \end{cases}$$

Mostremos agora que (A_1, ω_1) é genética segundo Gonshor. Sejam

$$t_n = \max \{j : a_j \neq 0, 1 \leq j \leq n+m\}, \quad t_{n-1} = \max \{j : \{a_{t_n}, a_j\} \text{ é l. i., } 1 \leq j \leq t_n\},$$

$$t_{n-2} = \max \{j : \{a_{t_n}, a_{t_{n-1}}, a_j\} \text{ é l. i., } 1 \leq j \leq t_{n-1}\}$$

e assim por diante, logo obtemos $\{a_{t_n}, \dots, a_{t_p}\}$ linearmente independente. Mostremos que $p = 1$, assim $\{a_{t_n}, \dots, a_{t_1}\}$ é uma base de A_1 . Dado $j \in \{1, \dots, n+m\} \setminus \{t_n, \dots, t_p\}$ tal que $a_j \neq 0$, então $j < t_n$. Seja $r = \min \{i : j < t_i, p \leq i \leq n\}$, então $\{a_{t_n}, \dots, a_{t_r}, a_j\}$ é linearmente dependente, assim $a_j = \sum_{i=r}^n \alpha_{ij} a_{t_i}$, portanto $p = 1$. Finalmente provemos que $\{e_1 + a_0, a_{t_1}, \dots, a_{t_n}\}$ é uma base canônica de A_1 . Do que foi feito acima e (4), temos

$$(e_1 + a_0)^2 = e_1 + a_0 + \sum_{k \geq 1} \gamma_{00k} a_{t_k}.$$

Dado t_s com $1 \leq s \leq n$. De (5), temos

$$(e_1 + a_0)a_{t_s} = \sum_{k \geq t_s} \lambda_{0t_s k} a_k.$$

Suponhamos que exista $j > t_s$ tal que $j \in \{1, \dots, n+m\} \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ e $a_j \neq 0$. Pelo que foi feito acima, $a_j = \sum_{i=r}^n \alpha_{ij} a_{t_i}$, onde $r = \min \{i : j < t_i, 1 \leq i \leq n\}$. Como $t_s < j < t_r$, então $s < r$, portanto

$$(e_1 + a_0)a_{t_s} = \sum_{k \geq s} \gamma_{0sk} a_{t_k}.$$

Similarmente para $s, r \in \{1, \dots, n\}$ com $s \leq r$, por (6) temos

$$a_{t_s} a_{t_r} = \sum_{k > r} \gamma_{srk} a_{t_k}.$$

O que prova que $\{e_1 + a_0, a_{t_1}, \dots, a_{t_n}\}$ é uma base canônica de A_1 . Analogamente prova-se que (A_2, ω_2) é genética segundo Gonshor. CQD

Proposição 11 *Sejam (A_1, ω_1) , (A_2, ω_2) membros de Ω . Então (A_i, ω_i) é genética segundo Schafer se e somente se $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ também o é.*

Demonstração Admitamos que $\dim A_1 = n+1$ e $\dim A_2 = m+1$. Sejam $e_j \in A_j$ ($j = 1, 2$), $e = e_1 \vee e_2 \in A_1 \vee A_2$ idempotentes de peso 1 e $\{e, a_{1j}, \dots, a_{n,j}\}$ base de A_j , onde $n_1 = n$ e $n_2 = m$, logo $\{e, a_{11}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{m2}\}$ é uma base de $A_1 \vee A_2$. Suponhamos que ambas (A_i, ω_i) são genéticas segundo Schafer. Sejam $\tau = f(R_{x_1}, \dots, R_{x_s})$ e $\tau' = f(R_{y_1}, \dots, R_{y_s})$ onde f é um polinômio de s indeterminadas associativas e não comutativas, $x_i, y_i \in A_1 \vee A_2$ e $(\omega_1 \vee \omega_2)(x_i) = (\omega_1 \vee \omega_2)(y_i)$ ($1 \leq i \leq s$). Como φ_j é um homomorfismo bárico, então $\omega_j(\varphi_j(x_i)) = (\omega_1 \vee \omega_2)(x_i) = (\omega_1 \vee \omega_2)(y_i) = \omega_j(\varphi_j(y_i))$. Dados $c \in \ker \omega_j$ e $b = \alpha e + b_1 + b_2 \in A_1 \vee A_2$, onde $b_i \in \ker \omega_i$, então $R_b(c) = c(e + b_j) = c\varphi_j(b) = R_{\varphi_j(b)}(c)$. Com isso é fácil perceber que $\tau(c) = f(R_{\varphi_j(x_1)}, \dots, R_{\varphi_j(x_s)})(c)$ e $\tau'(c) = f(R_{\varphi_j(y_1)}, \dots, R_{\varphi_j(y_s)})(c)$. Indiquemos por $\tau_j = f(R_{\varphi_j(x_1)}, \dots, R_{\varphi_j(x_s)})$ e $\tau'_j = f(R_{\varphi_j(y_1)}, \dots, R_{\varphi_j(y_s)})$ e vamos calcular os polinômios característicos de τ_j, τ, τ'_j e τ' . Temos

$$\tau_j(e) = \alpha e + \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{kj} a_{kj} \quad \text{e} \quad \tau_j(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{kij} a_{kj}.$$

Assim,

$$\det(\tau_j - \lambda \text{id}_{A_j}) = \det \left(\begin{array}{c|c} \alpha - \lambda & 0_{1,n_j} \\ \hline (N_j)_{n_j,1} & (M_j)_{n_j} - \lambda I_{n_j} \end{array} \right) = (\alpha - \lambda) \det((M_j)_{n_j} - \lambda I_{n_j}).$$

Por outro lado,

$$\tau(e) = \alpha e + \sum_{k=1}^n \alpha_{k1} a_{k1} + \sum_{k=1}^m \alpha_{k2} a_{k2} \quad \text{e} \quad \tau(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{kij} a_{kj}.$$

logo

$$\begin{aligned} \det(\tau - \lambda \text{id}_{A_1 \vee A_2}) &= \det \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha - \lambda & 0_{1,n} & 0_{1,m} \\ \hline (N_1)_{n,1} & (M_1)_n - \lambda I_n & 0_{n,m} \\ \hline (N_2)_{m,1} & 0_{m,n} & (M_2)_m - \lambda I_m \end{array} \right) = \\ &= (\alpha - \lambda) \det((M_1)_n - \lambda I_n) \det((M_2)_m - \lambda I_m). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \det(\tau'_j - \lambda \text{id}_{A_j}) &= (\alpha' - \lambda) \det((M'_j)_{n_j} - \lambda I_{n_j}) \quad \text{e} \\ \det(\tau' - \lambda \text{id}_{A_1 \vee A_2}) &= (\alpha' - \lambda) \det((M'_1)_n - \lambda I_n) \det((M'_2)_m - \lambda I_m). \end{aligned}$$

Como $\Lambda(\tau_j) = \Lambda(\tau'_j)$, então pelo que foi feito acima, $\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau')$, logo $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ é genética segundo Schafer.

Suponhamos reciprocamente que $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ seja genética segundo Schafer e sejam $\tau = f(R_{x_1}, \dots, R_{x_s})$ e $\tau' = f(y_1, \dots, y_s)$, onde f é um polinômio em s indeterminadas associativas e não comutativas, $x_i, y_i \in A_1$ e $\omega_1(x_i) = \omega_1(y_i)$. Como $\tau(a_{i2}) = 0$ ($1 \leq i \leq m$), temos que o polinômio característico de τ considerado como um operador de $A_1 \vee A_2$ é dado por,

$$\det(\tau - \lambda \text{id}_{A_1 \vee A_2}) = \left(\begin{array}{c|c} M_{n+1} - \lambda I_{n+1} & 0_{n+1,m} \\ \hline 0_{m,n+1} & -\lambda I_m \end{array} \right) = (-\lambda)^m \det(M_{n+1} - \lambda I_{n+1}).$$

Analogamente,

$$\det(\tau' - \lambda \text{id}_{A_1 \vee A_2}) = (-\lambda)^m \det(N_{n+1} - \lambda I_{n+1}).$$

Como $\omega_1(x_i) = \omega_1(y_i)$ então, $(\omega_1 \vee \omega_2)(x_i) = (\omega_1 \vee \omega_2)(y_i)$, assim $\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau')$ considerando τ e τ' como operadores em $A_1 \vee A_2$. Por outro lado,

$$\det(\tau - \lambda \text{id}_{A_1}) = \det(M_{n+1} - \lambda I_{n+1}) \quad \text{e} \quad \det(\tau' - \lambda \text{id}_{A_1}) = \det(N_{n+1} - \lambda I_{n+1}).$$

Logo $\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau')$ considerando τ e τ' como operadores em A_1 . Portanto (A_1, ω_1) é genética segundo Schafer. Analogamente para (A_2, ω_2) . CQD

Proposição 12 *Sejam (A_1, ω_1) , (A_2, ω_2) membros de Ω . Então (A_i, ω_i) é train especial se e somente se $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ também o é.*

Demonstração Suponhamos que (A_i, ω_i) são train álgebras especiais, então $\ker \omega_i$ é nilpotente de índice n_i e as potências $(\ker \omega_i)^k$ são ideais de A_i . Seja $n = \max\{n_1, n_2\}$, então $(\ker(\omega_1 \vee \omega_2))^n = (\ker \omega_1)^n \oplus (\ker \omega_2)^n = 0$, portanto $\ker(\omega_1 \vee \omega_2)$ é nilpotente. Dado $k \geq 1$, como $(\ker(\omega_1 \vee \omega_2))^k = (\ker \omega_1)^k \oplus (\ker \omega_2)^k$ então, $(\ker(\omega_1 \vee \omega_2))^k$ é ideal de $A_1 \vee A_2$. Para a recíproca utiliza-se argumentos semelhantes. CQD

As álgebras descritas nas proposições acima (exceto o caso de álgebras satisfazendo identidade polinomial, Prop.9) possuem uma única função peso. Álgebras báricas que possuem uma única função peso formam, por sua vez, uma grande classe fechada, de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 13 *Se $\text{car} F \neq 2$, (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) possuem uma única função peso, então $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ possui uma única função peso.*

Demonstração Sejam $e_1 \in A_1$ e $e_2 \in A_2$ idempotentes de peso 1 com join e e seja $\omega: A_1 \vee A_2 \rightarrow F$ um homomorfismo não nulo. Seja $\omega'_i: A_i \rightarrow F$ dado por $\omega'_i(\alpha e_i + a) = \omega(\alpha e + a)$, onde $\alpha \in F$ e $a \in A_i$ ($i = 1, 2$), a projeção natural. Se $\alpha e + a + b \in A_1 \vee A_2$, e $\omega(\alpha e + a + b) \neq 0$, temos $\omega'_1(\frac{\alpha}{2}e_1 + a) + \omega'_2(\frac{\alpha}{2}e_2 + b) = \omega(\frac{\alpha}{2}e + a) + \omega(\frac{\alpha}{2}e + b) = \omega(\alpha e + a + b) \neq 0$, logo,

no mínimo, um dos ω'_i ($i = 1, 2$), não é nulo. Mostremos que ambos são não nulos. Se $\omega'_1 \neq 0$, então $\omega'_1 = \omega_1$, assim $\omega(\alpha e + a + b) = \omega'_1(a) + \omega'_2(\alpha e + b) = \omega_1(a) + \omega'_2(\alpha e + b) = \omega'_2(\alpha e + b) \neq 0$. Similarmente, se $\omega'_2 \neq 0$ então $\omega'_1 \neq 0$. Então $\omega'_i = \omega_i$ ($i = 1, 2$), portanto $\omega(\alpha e + a + b) = \omega(\frac{\alpha}{2}e + a) + \omega(\frac{\alpha}{2}e + b) = \omega_1(\frac{\alpha}{2}e + a) + \omega_2(\frac{\alpha}{2}e + b) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha = (\omega_1 \vee \omega_2)(\alpha e + a + b)$ e assim $\omega = \omega_1 \vee \omega_2$. CQD

Capítulo 3

Álgebras báricas indecomponíveis

Neste capítulo introduzimos o conceito de álgebra bárica indecomponível, baseando-nos no conceito bem conhecido de grupo (abeliano) com operadores. Em seguida, tratamos do problema de como decompor uma álgebra bárica em uma espécie de soma direta (join) de álgebras indecomponíveis. Isto exige a hipótese de que os ideais bilaterais da álgebra, contidos no núcleo da função peso, satisfaçam a condição de cadeias descendentes. Para garantir a unicidade da decomposição em álgebras indecomponíveis, devemos admitir também a condição de cadeias ascendentes para esses ideais. É claro que estas hipóteses são automaticamente verificadas para álgebras de dimensão finita. O principal resultado do capítulo é um teorema do tipo Krull-Schmidt (Teorema 3); este teorema permite reduzir o problema de classificação, em várias classes de álgebras báricas que têm sido estudadas por vários autores, à descrição das álgebras que são indecomponíveis. Em seguida, são analisados quanto à decomponibilidade alguns exemplos clássicos de álgebras genéticas (Teorema 4 e Corolário do Teorema 5). Surgem daí algumas perguntas naturais sobre indecomponibilidade, para as quais respostas parciais ou totais são dadas.

Em todo este capítulo Ω' será uma subclasse não vazia da classe Ω das álgebras báricas com idempotentes (capítulo anterior), satisfazendo a seguinte condição:

$$(A_1, \omega_1), (A_2, \omega_2) \in \Omega' \text{ se e somente se } (A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2) \in \Omega'$$

Diremos neste caso que Ω' é fechada. Conforme [Cap.2, § 2.3], as álgebras de Bernstein

constituem uma classe fechada, bem como as train álgebras verificando a mesma t-equação, as álgebras verificando a mesma identidade polinomial, as álgebras genéticas segundo Gonshor, genéticas segundo Schafer e train especial (desde que possuam idempotentes).

3.1 Álgebras báricas indecomponíveis

Definição 1 *Seja (A, ω) um membro de Ω' , com $\dim A \geq 2$. Diremos que (A, ω) é decomponível em Ω' se existirem dois outros membros de Ω' , (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) , com $\dim A_i \geq 2$, tais que $(A, \omega) \cong (A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$. Se tais álgebras não existirem, diremos que (A, ω) é indecomponível em Ω' .*

Pela definição, as álgebras em Ω' de dimensão 2 são indecomponíveis.

Seja dada $(A, \omega) \in \Omega'$. O grupo aditivo $\ker \omega$ possui uma estrutura de M -grupo abeliano (veja [Cap.1, §1.7]). O conjunto M de operadores é formado por todos os operadores lineares L_a e R_a do núcleo de ω , onde $L_a(u) = au$, $R_a(u) = ua$ e a é um elemento da álgebra A ou do corpo F . Com estas hipóteses, os M -subgrupos de $\ker \omega$ são os ideais bilaterais de A contidos em $\ker \omega$. Se $\tau: \ker \omega \rightarrow \ker \omega$ é um M -homomorfismo então, por [Cap.1, §1.7], τ é um operador linear, $\tau(an) = a\tau(n)$ e $\tau(na) = \tau(n)a$ para todo $a \in A$ e $n \in \ker \omega$. Lembremos que um M -grupo abeliano G é decomponível se existirem M -subgrupos não triviais H_1 e H_2 tais que $G = H_1 \oplus H_2$; caso contrário, G é indecomponível.

Teorema 1 *Dada $(A, \omega) \in \Omega'$ as seguintes condições são equivalentes:*

- a) (A, ω) é decomponível em Ω' ;
- b) O M -grupo aditivo $\ker \omega$ (acima descrito) é decomponível.

Demonstração $a) \implies b)$: Suponhamos que existem duas álgebras báricas (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) em Ω' tais que $\dim A_i > 1$ ($i = 1, 2$) e $\varphi: A_1 \vee A_2 \rightarrow A$ um isomorfismo bárico. Por [Cap.2, Prop.7] temos, $\ker \omega = \varphi(\ker \omega_1 \oplus \ker \omega_2) = \varphi(\ker \omega_1) \oplus \varphi(\ker \omega_2)$ e ambos $I = \varphi(\ker \omega_1)$ e $J = \varphi(\ker \omega_2)$ são ideais de A . Claramente eles são não nulos, pois φ é injetora. Isso prova que o M -grupo aditivo $\ker \omega$ é decomponível.

$b) \implies a)$: Sejam I e J dois M -subgrupos (isto é, dois ideais de A , ambos contidos no núcleo de ω) não nulos, tais que $\ker \omega = I \oplus J$ e seja $e \in A$ um idempotente de peso 1, assim $A = Fe \oplus I \oplus J$. Consideremos as subálgebras báricas (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) dadas por $A_1 = Fe \oplus I$, $A_2 = Fe \oplus J$, $\omega_1 = \omega|_{A_1}$ e $\omega_2 = \omega|_{A_2}$. Então (A_i, ω_i) está em Ω' e $\dim A_i > 1$ ($i = 1, 2$). A função $\varphi: A_1 \vee A_2 \longrightarrow A$ dada por $\varphi(\alpha, u, v) = \alpha e + u + v$ é um isomorfismo bárico e portanto A é decomponível. CQD

Teorema 2 *Se (A, ω) é um membro de Ω' , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) (A, ω) é decomponível em Ω' ;
- b) Existe um M -endormorfismo θ do M -grupo aditivo $\ker \omega$ tal que $\theta^2 = \theta$, $\theta \neq 0, \text{id}_{\ker \omega}$;
- c) Existe um endomorfismo de álgebras $\theta: \ker \omega \longrightarrow \ker \omega$ tal que $\theta^2 = \theta$, $\theta \neq 0, \text{id}_{\ker \omega}$, $\theta(\ker \omega)$ é um ideal do $\ker \omega$ e para algum idempotente $e \in A$ de peso 1, $\theta(en) = e\theta(n)$ e $\theta(ne) = \theta(n)e$ para todo $n \in \ker \omega$;
- d) Existe um endomorfismo bárico $\varphi: A \longrightarrow A$ tal que $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi \neq \text{id}_A$ e $\varphi(\ker \omega)$ é um ideal não nulo do $\ker \omega$.

Demonstração $a) \iff b)$: é consequência direta do Teorema 1 e [Cap.1, Prop.13].

$a) \implies c)$: Tomemos uma decomposição $\ker \omega = I \oplus J$ onde I e J são ideais não nulos de A e seja $\theta: \ker \omega \longrightarrow \ker \omega$ a projeção canônica sobre I dada por, $n_1 + n_2 \mapsto n_1$. Claramente θ é um homomorfismo, $\theta^2 = \theta$, $\theta \neq \text{id}_{\ker \omega}$, 0 . Para $n = n_1 + n_2 \in \ker \omega$, onde $n_1 \in I$ e $n_2 \in J$, $en = e(n_1 + n_2) = en_1 + en_2$, logo $\theta(en) = en_1 = e\theta(n)$; similarmente $\theta(ne) = \theta(n)e$.

$c) \implies d)$: Seja $\varphi: A \longrightarrow A$ dada por $\varphi(\alpha e + a) = \alpha e + \theta(a)$. Claramente φ é homomorfismo de álgebras báricas, $\varphi^2 = \varphi$ pois $\theta^2 = \theta$, $\varphi \neq \text{id}_A$ pois $\theta \neq \text{id}_{\ker \omega}$, $\varphi(\ker \omega) = \theta(\ker \omega)$ é um ideal de $\ker \omega$ e $\varphi(\ker \omega) \neq 0$ pois $\theta \neq 0$.

$d) \implies a)$: Se $e \in A$ é um idempotente de peso 1, então $e_0 = \varphi(e)$ também é um idempotente de peso 1 pois φ é bárico. Sejam $I = \varphi(\ker \omega)$ e $J = \ker \varphi$. Por hipótese, I é um ideal do $\ker \omega$. Para todo $b \in I$, temos $b = \varphi(n)$, $n \in \ker \omega$, logo $e_0 b = \varphi(e)\varphi(n) =$

$\varphi(en) \in \varphi(\ker \omega) = I$ e similarmente $be_0 \in I$, assim I é um ideal de A . Por outro lado, J é um ideal de A (pois é um núcleo) e $J \subseteq \ker \omega$ pois, para todo elemento $b = \alpha e_0 + c \in J$, onde $\alpha \in F$ e $c \in \ker \omega$, temos $0 = \varphi(\alpha e_0 + c) = \alpha \varphi(e_0) + \varphi(c) = \alpha \varphi^2(e) + \varphi(c) = \alpha \varphi(e) + \varphi(c) = \alpha e_0 + \varphi(c)$. Portanto $\alpha = 0$ e $b = c \in \ker \omega$. Se $J = 0$ teríamos $\varphi = \text{id}_A$. CQD

Uma questão que se coloca naturalmente é saber quais membros de Ω' podem ser obtidos como join de um número finito de álgebras indecomponíveis. Como é de se esperar, tendo em vista a questão similar para M -grupos tratada em [36, Teor. 9] ([Cap.1, Prop.14]), deve-se impor uma condição de cadeias descendentes.

Definição 2 Uma álgebra bárica (A, ω) em Ω' satisfaz (c.c.d.) se o M -grupo $(\ker \omega, +)$ satisfaz (c.c.d.), conforme [Cap.1, § 1.7].

Em termos de ideais, esta definição diz que toda cadeia estritamente descendente de ideais de A , contidos no $\ker \omega$, é finita.

Proposição 1 Se $(A, \omega) \in \Omega'$ satisfaz (c.c.d.) e $\dim A > 1$, então existe um conjunto finito de álgebras báricas indecomponíveis $(A_1, \omega_1), \dots, (A_m, \omega_m)$ em Ω' tais que $(A, \omega) \cong (A_1 \vee \dots \vee A_m, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_m)$.

Demonstração Como o M -grupo $(\ker \omega, +)$ satisfaz (c.c.d.), por [Cap.1, Prop.14], $\ker \omega$ pode ser expresso como soma direta de um número finito de M -subgrupos indecomponíveis, a saber $\ker \omega = I_1 \oplus \dots \oplus I_m$. Sendo I_j indecomponível então $A_j = Fe \oplus I_j$ (onde e é um idempotente de peso 1 de A) é uma álgebra bárica indecomponível, com a função peso $\omega_j = \omega|_{A_j}$. Claramente $A = A_1 \vee \dots \vee A_m$. CQD

3.2 Teorema de Krull-Schmidt

Proposição 2 Sejam (A, ω) e (A_i, ω_i) ($i = 1, \dots, m$) membros de Ω' e suponhamos que existe um isomorfismo bárico $\varphi: A_1 \vee \dots \vee A_m \longrightarrow A$. Então existem ideais $N_1, \dots, N_m$ de A , contidos em $N = \ker \omega$, tais que:

- a) A subálgebra bária (A'_i, ω'_i) é isomorfa a (A_i, ω_i) onde $A'_i = Fe \oplus N_i$ e $\omega'_i = \omega|_{A'_i}$ e e é um idempotente de peso 1 fixado em A .
- b) $A = A'_1 \vee \dots \vee A'_n$.

Demonstração Sejam $e' \in A_1 \vee \dots \vee A_m$ tal que $\varphi(e') = e$, $e_i \in A_i$ idempotentes de peso 1, $e_0 = e_1 \vee \dots \vee e_m$ e $N_i = \varphi(\ker \omega_i)$. Como φ é isomorfismo por [Cap.2, Prop.7], N_i é um ideal de A e $N = \varphi(\ker \omega_1 \oplus \dots \oplus \ker \omega_m) = \varphi(\ker \omega_1) \oplus \dots \oplus \varphi(\ker \omega_m) = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$. Como e' é um idempotente de peso 1 em $A_1 \vee \dots \vee A_m$, então existe $c = c_1 + \dots + c_m \in \ker(\omega_1 \vee \dots \vee \omega_m)$ tal que $e' = e_0 + c$. Assim $c_i = c_i^2 + c_i e_i + e_i c_i$, logo $e'_i = e_i + c_i \in A_i$ é um idempotente de peso 1. Dado $a_1 + \dots + a_m \in \ker \omega_1 \oplus \dots \oplus \ker \omega_m$, temos $e'(a_1 + \dots + a_m) = (e_0 + c)(a_1 + \dots + a_m) = e_1 a_1 + \dots + e_m a_m + c_1 a_1 + \dots + c_m a_m = e'_1 a_1 + \dots + e'_m a_m$. Similarmente $(a_1 + \dots + a_m)e' = a_1 e'_1 + \dots + a_m e'_m$ e assim $e' = e'_1 \vee \dots \vee e'_m$. Mostremos que $\varphi_i: A_i \rightarrow Fe \oplus N_i$ dada por $\varphi_i(\alpha e'_i + a_i) = \alpha e + \varphi(a_i)$ é um isomorfismo bário. Claramente φ_i é bijetora e preserva a função peso. Dados $\alpha e'_i + a_i, \alpha' e'_i + a'_i \in A_i$, então $\varphi_i((\alpha e'_i + a_i)(\alpha' e'_i + a'_i)) = \varphi_i(\alpha \alpha' e'_i + a_i a'_i + \alpha e'_i a'_i + \alpha' a_i e'_i) = \varphi_i(\alpha \alpha' e'_i + a_i a'_i + \alpha e' a'_i + \alpha' a_i e') = \alpha \alpha' e + \varphi(a_i a'_i + \alpha e' a'_i + \alpha' a_i e') = \alpha \alpha' e + \varphi(a_i) \varphi(a'_i) + \alpha e \varphi(a'_i) + \alpha' \varphi(a_i) e = (\alpha e + \varphi(a_i))(\alpha' e + \varphi(a'_i))$. CQD

Definição 3 Uma álgebra bária $(A, \omega) \in \Omega'$ satisfaz a condição de cadeias ascendentes (c.c.a.) se o M -grupo $(\ker \omega, +)$ satisfaz (c.c.a.), conforme definição dada em [Cap.1, § 1.7].

Teorema 3 (Krull-Schmidt) Suponhamos que $(A, \omega) \in \Omega'$ satisfaz ambas (c.c.d.) e (c.c.a.). Sejam $(A_1, \omega_1), \dots, (A_n, \omega_n), (B_1, \gamma_1), \dots, (B_m, \gamma_m)$ álgebras indecomponíveis em Ω' tais que:

$$(A, \omega) \cong (A_1 \vee \dots \vee A_n, \omega_1 \vee \dots \vee \omega_n);$$

$$(A, \omega) \cong (B_1 \vee \dots \vee B_m, \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_m).$$

Então $n = m$ e para alguma permutação $i \mapsto i'$ de índices, temos $(A_i, \omega_i) \cong (B_{i'}, \gamma_{i'})$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração De acordo com a Prop.2, existem ideais $I_1, \dots, I_n$ de A , todos contidos em $N = \ker \omega$ tais que $N = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$ e $(A_i, \omega_i) \cong (A'_i, \omega'_i)$ onde $A'_i = Fe \oplus I_i$, $\omega'_i = \omega|_{A'_i}$. Similarmente, existem ideais $J_1, \dots, J_m$ de A , todos contidos em N , tais que $N = J_1 \oplus \dots \oplus J_m$ e $(B_j, \gamma_j) \cong (B'_j, \gamma'_j)$, onde $B'_j = Fe \oplus J_j$ e $\gamma'_j = \omega|_{B'_j}$. Como (A_i, ω_i) e (B_j, γ_j) são indecomponíveis, os correspondentes M -grupos $(I_i, +)$ e $(J_j, +)$ são indecomponíveis. Assim pelo Teorema de Krull-Schmidt para M -grupos (conforme [Cap.1, Teor.7]), temos $n = m$ e, por reordenação dos J_j , se necessário, temos também $n + 1$ decomposições "mistas" do núcleo:

$$N = I_1 \oplus \dots \oplus I_k \oplus J_{k+1} \oplus \dots \oplus J_n \quad (0 \leq k \leq n). \quad (1)$$

Denotemos por ψ_{kj} a projeção canônica de N sobre o j -ésimo somando em (1); em particular, ψ_{0j} é a projeção de N sobre J_j . Seja ψ'_j a injeção canônica de I_j em N . Mostremos que $\tau_j = \psi_{j-1,j} \psi'_j: I_j \longrightarrow J_j$ ($1 \leq j \leq n$) é um isomorfismo de F -álgebras. Como a multiplicação é componente a componente, τ_j é homomorfismo, $\tau_j(ea) = e\tau_j(a)$ e $\tau_j(ae) = \tau_j(a)e$ para todo $a \in I_j$. Suponhamos $a_j \in I_j$ e $0 = \tau_j(a_j) = \psi_{j-1,j}(a_j)$. Na decomposição intermediária $I_1 \oplus \dots \oplus I_{j-1} \oplus J_j \oplus \dots \oplus J_n$ temos $a_j = a'_1 + \dots + a'_n$ e assim $0 = \psi_{j-1,j}(a_j) = a'_j$, com isso $a_j \in I_j \cap (I_1 \oplus \dots \oplus I_{j-1} \oplus J_{j+1} \oplus \dots \oplus J_n) = 0$, portanto τ_j é um monomorfismo. Dado agora $b_j \in J_j$ temos $b_j = b'_1 + \dots + b'_n$ na decomposição $I_1 \oplus \dots \oplus I_j \oplus J_{j+1} \oplus \dots \oplus J_n$, assim $b_j = \psi_{j-1,j}(b_j) = \psi_{j-1,j}(b'_j)$, portanto τ_j é um epimorfismo. Mostremos que $\varphi_j: A'_j \longrightarrow B'_j$ dado por $\varphi_j(\alpha e + a) = \alpha e + \tau_j(a)$ é um isomorfismo bárico. Claramente φ_j é bijetora e preserva a função peso. Dados $\alpha e + a, \beta e + b \in A'_j$, então $\varphi_j((\alpha e + a)(\beta e + b)) = \varphi_j(\alpha \beta e + ab + \alpha eb + \beta ae) = \alpha \beta e + \tau_j(ab) + \alpha \tau_j(eb) + \beta \tau_j(ae) = \alpha \beta e + \tau_j(a)\tau_j(b) + \alpha e \tau_j(b) + \beta \tau_j(a)e = (\alpha e + \tau_j(a))(\beta e + \tau_j(b)) = \varphi_j(\alpha e + a)\varphi_j(\beta e + b)$.

CQD

Como consequência deste teorema, a classificação das álgebras báricas verificando (c.c.a.) e (c.c.d.), pertencentes a qualquer subclasse fechada de Ω , reduz-se a determinar aquelas que são indecomponíveis. Em particular, isto se aplica a álgebras de Bernstein, train álgebras com a mesma t -equação, álgebras genéticas segundo Gonshor, Schafer, etc. Observemos que se $A \in \Omega$ é indecomponível em Ω , ela o será também em qualquer

subclasse fechada Ω' de Ω .

Observação Sejam B uma álgebra e $\lambda, \rho: B \rightarrow B$ operadores lineares. Suponhamos que a álgebra bária $[B, \lambda, \rho]$ (ver [Cap.2, § 2.1]) satisfaz (c.c.a.) e (c.c.d.), então pela Proposição 1, Teorema 3 e [Cap.2, Prop.2], existe um conjunto finito de ideais bilaterais (a menos de isomorfismos) de B indecomponíveis e invariantes por λ e ρ tal que B é soma direta desses ideais.

3.3 Alguns exemplos e questões

Algumas álgebras genéticas *comutativas* bem conhecidas serão analisadas nas seções **A**, **B** e **C** no que concerne à sua decomponibilidade. O leitor poderá ver em [55] maiores detalhes sobre elas, bem como suas interpretações biológicas. Na seção **D**, mostraremos que as condições (c.c.a.) e (c.c.d.) são independentes, mesmo para as álgebras não comutativas indecomponíveis, que se assemelham a álgebra gamética de poliplóides $G(2, 2m)$, ver seção **C**. Em todo o parágrafo F é um corpo com $\text{car} F \neq 2$.

Neste parágrafo, “indecomponível” significa “indecomponível em Ω ”.

A) Exemplo 1 A álgebra gamética $G(2, 2)$ possui dimensão 2 logo é indecomponível. Mostremos que a sua duplicada comutativa $Z(2, 2)$ é também indecomponível. Consideremos a seguinte base $\{c_0, c_1, c_2\}$ de $Z(2, 2)$ tal que:

$$c_0^2 = c_0, \quad c_0 c_1 = \frac{1}{2} c_1, \quad c_0 c_2 = c_1 c_2 = c_2^2 = 0, \quad c_1^2 = \frac{1}{4} c_2. \quad (2)$$

A função peso ω é 1 em c_0 e 0 em c_1 e c_2 . Seja I um ideal não nulo de $Z(2, 2)$, tal que $I \subset \ker \omega$. Dado $x = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \in I$, com $x \neq 0$, então por (2) $c_0 x = \frac{1}{2} \alpha_1 c_1 \in I$, logo $\alpha_1 c_1 \in I$. Se $\alpha_1 \neq 0$, então $c_1 \in I$, assim por (2) $c_2 \in I$, portanto $I = \ker \omega$, que é uma contradição, daí $\alpha_1 = 0$, portanto $I = F c_2$. Com isso, não é possível decompor $\ker \omega$ como soma direta de dois ideais não nulos de $Z(2, 2)$.

Exemplo 2 Mostremos que a segunda duplicada comutativa de $G(2, 2)$, chamada de

álgebra copular, ver [55], é indecomponível. Essa álgebra possui uma base $\{c_0, c_1, \dots, c_5\}$ com a seguinte tabela de multiplicação:

$$\begin{cases} c_0^2 = c_0, & c_0c_1 = \frac{1}{2}c_1, & c_0c_2 = \frac{1}{4}c_3, & c_1^2 = \frac{1}{4}c_2, & c_1c_2 = \frac{1}{8}c_4, & c_2^2 = \frac{1}{16}c_5; \\ \text{os outros produtos são zero.} \end{cases} \quad (2')$$

O núcleo da função peso é o subespaço gerado por $c_1, \dots, c_5$, que como ideal é gerado por c_1 , pois

$$c_2 = 4c_1^2, \quad c_3 = 4c_0c_2 = 16c_0c_1^2, \quad c_4 = 8c_1c_2 = 32c_1^3, \quad c_5 = 256(c_1^2)^2.$$

Assim se I é um ideal dessa álgebra, contido no $\ker\omega$, que contém c_1 , então $I = \ker\omega$. Seja I um ideal da álgebra copular, contido no $\ker\omega$, tal que para algum $x \in I$ sua c_1 -componente não é nula. Se $x = \sum_{i=1}^5 \alpha_i c_i$ com $\alpha_1 \neq 0$, então $4c_0x = 2\alpha_1c_1 + \alpha_2c_3$ e $4c_0(c_0x) = \alpha_1c_1 \in I$. Como $\alpha_1 \neq 0$, $c_1 \in I$, portanto $I = \ker\omega$. Agora demonstremos a indecomponibilidade. Suponhamos que existem dois ideais, não nulos, da álgebra copular, ambos contidos no $\ker\omega$, tais que $\ker\omega = I \oplus J$. Decompondo $c_1 = x + y$, $x \in I$, $y \in J$, vemos que as c_1 -componentes de x e de y são ambas nulas, pois caso contrário, $I = \ker\omega$ ou $J = \ker\omega$. Mas a c_1 -componente de c_1 é 1, que é uma contradição.

Exemplo 3 Consideremos a álgebra bária comutativa (A, ω) dada por $A = \langle d_0, \dots, d_4 \rangle$, $\omega(d_0) = 1$, $\omega(d_i) = 0$ ($1 \leq i \leq 4$) e

$$\begin{cases} d_0^2 = d_0, & d_0d_1 = \frac{1}{2}d_1 - d_3, & d_0d_2 = \frac{1}{2}d_2 - d_3, & d_0d_3 = \frac{1}{2}d_3 + d_4, & d_0d_4 = \frac{1}{2}d_4, \\ d_1^2 = -2d_3, & d_1d_2 = -d_3, & d_1d_3 = d_4 - d_2, & d_1d_4 = -d_4, \\ \text{os outros produtos são zero.} \end{cases}$$

Conforme [33], esta álgebra é train, mas não é especial triangular e $\ker\omega$ é nilpotente de índice 4, conforme [Cap.1, § 1.4, § 1.5]. Além disso é uma subálgebra da álgebra que aparece em [1, § 3]. Mostremos que ela é indecomponível. Para isso provemos inicialmente que, se $I \subseteq \ker\omega$ é um ideal de A tal que existe em I um elemento cuja d_1 -componente não é nula, então $I = \ker\omega$. Dado $x = \alpha_1d_1 + \dots + \alpha_4d_4 \in I$ com $\alpha_1 \neq 0$, então $d_2x = -\alpha_1d_3$,

assim $d_3 \in I$, logo $d_0 d_3 = \frac{1}{2} d_3 + d_4$, $d_1 d_3 = d_4 - d_2 \in I$, daí $d_4, d_2 \in I$ e $d_1 \in I$. Suponhamos que existam I e J dois ideais de A tais que $\ker \omega = I \oplus J$. Sejam $x \in I$ e $y \in J$ tais que $c_1 = x + y$, logo a d_1 -componente de x ou a d_1 -componente de y não é nula, portanto $I = \ker \omega$, daí $J = 0$ ou o contrário. Isso prova o que queríamos.

Observação 1 Os exemplos 1 e 2 poderiam sugerir que a duplicada comutativa de qualquer álgebra bária indecomponível é também indecomponível, mas logo mais daremos um contra-exemplo. No Teorema 5, mostraremos que a duplicada será indecomponível se uma hipótese adicional for feita sobre a álgebra.

Observação 2 Uma pequena mudança em (2'), trocando $c_0 c_2 = \frac{1}{4} c_3$ por $c_0 c_2 = \frac{1}{4} c_2$, produz uma álgebra decomponível, pois $I = \langle c_1, c_2, c_4, c_5 \rangle$ e $J = \langle c_3 \rangle$ são ideais dessa álgebra e $\ker \omega = I \oplus J$. Mas, essa álgebra provavelmente não tem uma interpretação biológica. Observemos também que se trocarmos os coeficiente não nulos $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ que aparecem em (2) e (2') por outros coeficientes não nulos poderemos obter novas álgebras sem destruir a indecomponibilidade, mas destruindo muito provavelmente a interpretação biológica.

B) As álgebras gaméticas para poliplóides foram bem estudadas por vários autores, ver [5], [19] e [55], por exemplo. As álgebras gaméticas para herança Mendeliana simples com $n + 1$ alelos, denotadas por $G(n + 1, 2)$, são claramente decomponíveis para $n \geq 2$:

$$G(n + 1, 2) = G(2, 2) \vee \dots \vee G(2, 2) \quad (n \text{ somandos}).$$

Para isto, basta observar a tábua de multiplicação de $G(2, 2)$ e de $G(n + 1, 2)$, ver [5]. O caso geral, incluindo poliploidia, é descrito pelas álgebras $G(n + 1, 2m)$, das quais revemos aqui algumas propriedades. Existe uma base (no sentido de Gonshor ver [Cap.1, § 1.4]) consistindo de todos os monômios formais $X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ com $i_0 + i_1 + \dots + i_n = m$. A

multiplicação, obviamente comutativa, é dada por: $(X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) (X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) =$

$$= \begin{cases} \binom{2m}{m}^{-1} \binom{i_0 + j_0}{m} X_0^{i_0 + j_0 - m} X_1^{i_1 + j_1} \dots X_n^{i_n + j_n} & \text{se } i_0 + j_0 \geq m; \\ 0 & \text{se } i_0 + j_0 < m. \end{cases} \quad (3)$$

A função peso ω é 1 em X_0^m e 0 nos outros elementos da base. O monômio X_0^m é um idempotente de peso 1. Se denotarmos por V_j o subespaço gerado por todos os monômios $X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ com $i_1 + \dots + i_n = j$ então

$$G(n+1, 2m) = FX_0^m \oplus \ker \omega = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_m.$$

De (3) temos que, $X_0^m (X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) = \binom{2m}{m}^{-1} \binom{2m-j}{m} X_0^{m-j} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$. Os escalares $t_j = \binom{2m}{m}^{-1} \binom{2m-j}{m}$, $j = 0, 1, \dots, m$, são as train raízes dessa álgebra no sentido de Gonshor (ver § 1.4). Elas aparecem com multiplicidade 1, n , $\dots$, $\binom{j+n-1}{j}$, $\dots$, $\binom{m+n-1}{m}$, que são respectivamente as dimensões de $V_0, V_1, \dots, V_m$. Observemos que $G(n+1, 2m)$ é graduada, isto é, $V_i V_j \subseteq V_{i+j}$ ($i+j \leq m$) e $V_i V_j = 0$ se $m < i+j$. Observemos também que $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ é gerado, como ideal, pela base $\{X_0^{m-i} X_i : i = 1, \dots, n\}$ de V_1 .

Lema Suponhamos $i+j \leq m$, $b \in V_i$ e $L_b: V_j \longrightarrow V_{i+j}$ a aplicação linear dada por $L_b(x) = bx$. Então L_b é injetora se $b \neq 0$.

Demonstração Basta escrever a matriz de L_b , relativa às bases de V_j e V_{i+j} mencionadas acima e encontrar um número apropriado de linhas linearmente independentes, a saber $\binom{j+n-1}{j}$, que também é a dimensão de V_j . CQD

Teorema 4 $G(n+1, 2m)$ é indecomponível para todo $n \geq 1$ e $m \geq 2$.

Demonstração De acordo com o Teorema 1, basta mostrar que é impossível uma decomposição do $\ker \omega = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ em soma direta de dois ideais não nulos I e J de $G(n+1, 2m)$. Suponhamos, por absurdo, existam ideais não nulos I e J de $G(n+1, 2m)$ tais que $\ker \omega = V_1 \oplus \dots \oplus V_m = I \oplus J$. Temos, em princípio, 3 situações a considerar:

a) I e J ambos contidos em V_m .

b) Exatamente um dos dois contido em V_m .

c) Nenhum dos dois contido em V_m .

Caso a) Claramente impossível pois teríamos $I \oplus J \subseteq V_m \neq \ker \omega$.

Caso b) J contido em V_m .

Tomemos o monômio $X_0^{m-1}X_i \in V_1$, para algum $1 \leq i \leq n$. Decompomos $X_0^{m-1}X_i = u + v$, $u \in I$, $v \in J$ e depois decompomos $u = a_1 + \dots + a_m$ com $a_i \in V_i$. Assim, $X_0^{m-1}X_i = a_1 + \dots + (a_m + v)$ o que implica $a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$ e $a_m + v = 0$. Logo,

$$u = a_1 - v = X_0^{m-1}X_i - v \in I. \quad (4)$$

Multiplicando (4) por X_0^m , temos $X_0^m (X_0^{m-1}X_i - v) = \binom{2m}{m}^{-1} \left(\binom{2m-1}{m} X_0^{m-1}X_i - v \right) \in I$, assim

$$\binom{2m-1}{m} X_0^{m-1}X_i - v \in I. \quad (5)$$

Subtraindo (5) de (4) e observando que $\binom{2m-1}{m} > 1$, pois $m \geq 2$, obtemos que $X_0^{m-1}X_i \in I$. Portanto I contém o conjunto $\{X_0^{m-1}X_i : 1 \leq i \leq n\}$, que gera, como ideal, $\ker \omega$, logo $I = \ker \omega$, que é uma contradição.

Caso c)

Afirmamos que em um dos ideais I ou J , podemos encontrar um elemento a tal que, quando a é decomposto como $a = a_1 + \dots + a_m$, $a_i \in V_i$, temos $a_1 \neq 0$. De fato, decompomos, por exemplo, $X_0^{m-1}X_1 = a + b$, $a \in I$ e $b \in J$. Em seguida decompomos $a = a_1 + \dots + a_m$, $b = b_1 + \dots + b_m$, $a_i, b_i \in V_i$ ($i = 1, \dots, m$). Assim, $X_0^{m-1}X_1 = (a_1 + b_1) + \dots + (a_m + b_m)$, logo $a_2 + b_2 = \dots = a_m + b_m = 0$ e $X_0^{m-1}X_1 = a_1 + b_1$. Assim $a_1 \neq 0$ ou $b_1 \neq 0$. Suponhamos $a_1 \neq 0$ então $a = a_1 + a_2 + \dots + a_m \in I$ é o elemento procurado. No caso em que $b_1 \neq 0$, então $b = b_1 + \dots + b_m \in J$ é a solução.

Assumiremos em definitivo que o ideal I contém tal elemento a cuja componente a_1 em V_1 é diferente de zero. Procuremos agora um elemento especial em J . Escolhemos um elemento c em J que não está em V_m . Assim em sua decomposição $c = c_1 + \dots + c_k + \dots +$

$c_m, c_i \in V_i$ ($i = 1, \dots, m$), podemos supor que $c_k \neq 0$ e $c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$. Claramente $k < m$, pois $c \notin V_m$. Consideremos o operador linear $L_b: V_k \rightarrow V_{m-1}$ dado por $x \mapsto bx$ onde $b = X_0^{k+1} X_1^{m-k-1}$. Pelo Lema acima, L_b é injetora, assim $(X_0^{k+1} X_1^{m-k-1}) c_k \neq 0$. Por outro lado, de (3), $(X_0^{k+1} X_1^{m-k-1}) c_{k+1} \in V_m$ e $(X_0^{k+1} X_1^{m-k-1}) c_r = 0$ para $r \geq k+2$. Daí, $c' = (X_0^{k+1} X_1^{m-k-1}) c \in (V_{m-1} \oplus V_m) \cap J$. Daí $c' = c_{m-1} + c_m \in J$ com $c_i \in V_i$ ($i = m-1, m$) e $c_{m-1} \neq 0$. O produto $ac' = 0$ pois $a \in I$, $c' \in J$ e $I \cap J = 0$. Mas $0 = (a_1 + \dots + a_m)(c_{m-1} + c_m) = a_1 c_{m-1} = L_{a_1}(c_{m-1})$, pois $V_i V_j = 0$ para $i+j > m$. Isto contradiz o fato de L_{a_1} ser injetora. Com essa contradição final terminamos a demonstração. CQD

Deixamos como problema aberto decidir se $G(n+1, 2m)$, onde se leva em conta também a existência de mutação, é indecomponível.

C) Nesta seção, discutiremos 5 questões envolvendo indecomponibilidade:

- a) Se A é indecomponível então A^2 é indecomponível ?
- b) A imagem homomorfa de uma álgebra indecomponível é também indecomponível ?
- c) A duplicada comutativa de uma álgebra indecomponível é indecomponível ?
- d) O núcleo da função peso é indecomponível (como álgebra) se a álgebra básica é indecomponível ?
- e) Uma subálgebra básica de uma álgebra indecomponível é indecomponível ?

As 5 questões têm resposta negativa conforme mostram os seguintes exemplos.

Consideremos a álgebra comutativa K de dimensão 5 sobre F gerada por $c_1, \dots, c_5$ com a seguinte tabela de multiplicação:

$$\begin{cases} c_1 c_2 = c_2 c_4 = -c_1 c_5 = c_3, & c_1 c_3 = c_4, & c_2 c_3 = c_5, \\ \text{os outros produtos são zero.} \end{cases}$$

Sabemos que K é solúvel pois $K^2 = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle$ e $(K^2)^2 = \langle c_3, c_4, c_5 \rangle^2 = 0$. Porém K não é nilpotente, pois $K^2 = K^3 = \dots$, todas com dimensão 3. Além disso, K é nil de

nil-índice 4. Mostremos que K não pode ser decomposta na soma direta de dois ideais não nulos. Seja I um ideal não nulo de K , $x = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_5 c_5 \in I$ e suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$. Então $xc_5 = -\alpha_1 c_3 \in I$, assim $c_3 \in I$. Daí $c_4 = c_1 c_3$ e $c_5 = c_2 c_3$ também estão em I . Se $\alpha_2 \neq 0$, então $xc_4 = \alpha_2 c_3 \in I$, assim c_3 (logo c_4, c_5) $\in I$. Mostremos agora que K não se decompõe como soma direta de dois ideais não nulos. Sejam I e J ideais tais que $K = I \oplus J$ e seja $c_1 = x_1 + y_1$, $x_1 \in I$, $y_1 \in J$. A c_1 -componente de x_1 deve ser 1 ou 0 e a c_1 -componente de y_1 deve ser 0 ou 1. Pois se ambas são não nulas, pelos argumentos acima, $\{c_3, c_4, c_5\} \subseteq I \cap J$, que é uma contradição. Por simetria, podemos assumir que $x_1 = \beta_2 c_2 + \dots + \beta_5 c_5$ e $y_1 = c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_5 c_5$. Então $\langle c_3, c_4, c_5 \rangle \subseteq J$ e necessariamente $\beta_2 = 0$, pois caso contrário também $\langle c_3, c_4, c_5 \rangle \subseteq I$. Portanto $x_1 = \beta_3 c_3 + \beta_4 c_4 + \beta_5 c_5 \in J$, logo $x_1 = 0$, assim $y_1 = c_1 \in J$, portanto $c_1, c_3, c_4, c_5 \in J$. Mostremos agora que $c_2 \in J$ e para isso decomponamos $c_2 = x_2 + y_2$, $x_2 \in I$, $y_2 \in J$. A c_2 -componente de x_2 é 1 ou 0 e de y_2 é 0 ou 1 (argumento acima). Se a c_2 -componente de x_2 for 1, então I contém c_3, c_4 e c_5 , que é impossível. Portanto x_2 é combinação linear de c_1, c_3, c_4, c_5 , logo $x_2 \in J$, assim $x_2 = 0$ e $c_2 \in J$. Esta é a contradição final provando que K não pode ser decomposto.

Consideremos agora duas álgebras bárias diferentes em Ω tendo K como núcleo, obtidas pela adjunção à base $c_1, \dots, c_5$ de um novo elemento c_0 sujeito respectivamente às seguintes regras:

- (1) $c_0^2 = c_0$, $c_0 c_1 = c_0 c_2 = 0$, $c_0 c_i = \frac{1}{2} c_i$ ($i = 3, 4, 5$),
- (2) $c_0^2 = c_0$, $c_0 c_i = \frac{1}{2} c_i$ ($i = 1, \dots, 5$).

Como K não pode decompor-se como soma direta de dois de seus ideais não nulos, então ambas as álgebras, *a fortiori* são indecomponíveis. No primeiro caso, obtemos uma álgebra de Bernstein de tipo (4,2), ver [Cap.1, § 1.3] ou [45, § 4]. Observemos que A^2 possui dimensão 4, é gerada por c_0, c_3, c_4, c_5 e olhando para a tábua de multiplicação concluímos que $A^2 \cong G(2,2) \vee G(2,2) \vee G(2,2)$, obtendo um contra-exemplo à questão a) colocada no início da seção.

No segundo caso, temos uma train álgebra indecomponível de posto 4. O ideal K^2

de A é gerado por c_3, c_4 e c_5 e daí obtemos a tábua de multiplicação da álgebra A/K^2 . Sendo $d_i = c_i + K^2$ para $i = 0, 1, 2$ teremos (cálculo trivial)

$$d_0^2 = d_0, \quad d_0 d_i = \frac{1}{2} d_i \quad (i = 1, 2), \quad d_1^2 = d_2^2 = d_1 d_2 = 0.$$

Como conseqüência, $A/K^2 \cong G(2, 2) \vee G(2, 2)$, que é decomponível e serve como contra-exemplo para a questão colocada em b).

Existem muitos contra-exemplos à terceira questão, sendo a álgebra de Bernstein usada acima um deles. De fato, temos a seguinte família de contra-exemplos, conforme

Proposição 3 *Toda álgebra de Bernstein A com a decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U \oplus V$, onde $\dim V \geq 1$ e $U^2 = 0$, possui duplicada comutativa decomponível.*

Demonstração Suponhamos que A seja do tipo $(1 + r, s)$, com $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ e $V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$. Uma base de $D(A)$ é obtida a partir da base $\{e, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ de A por duplicação. Decompomos a base de $D(A)$ em seis blocos:

$$\begin{aligned} & e * e, \quad e * u_i (i = 1, \dots, r), \quad e * v_j (j = 1, \dots, s), \\ & u_i * u_j (1 \leq i \leq j \leq r), \quad u_i * v_j (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s) \quad \text{e} \quad v_i * v_j (1 \leq i \leq j \leq s), \end{aligned}$$

que geram aditivamente seis subespaços denotados por

$$F(e * e), \quad e * U, \quad e * V, \quad U * U, \quad U * V \quad \text{e} \quad V * V.$$

Portanto,

$$D(A) = F(e * e) \oplus e * U \oplus e * V \oplus U * U \oplus U * V \oplus V * V.$$

O subespaço $I = e * V$ está contido no anulador de $D(A)$ pois $ev = 0$ para todo $v \in V$. Assim $e * V$ é um ideal de $D(A)$. O subespaço $J = e * U \oplus U * U \oplus U * V \oplus V * V$ é também um ideal de $D(A)$, devido às relações (conseqüências de $U^2 = 0$)

$$(e * U)(U * U) = (U * U)^2 = (U * U)(U * V) = (U * U)(V * V) = 0,$$

e do fato de que $(e * U)(U * V)$, $(e * U)(V * V)$, $(U * V)^2$, $(U * V)(V * V)$, $(V * V)^2$ estão todos contidos em $U * U$. Por outro lado, $\dim(e * V) = \dim V \geq 1$, logo I é um ideal não nulo e o mesmo ocorre com J . Pelo Teorema 1, $D(A)$ é decomponível. CQD

Consideremos a álgebra copular (C, ω) dada no exemplo 2 da seção A), que é indecomponível. Sejam $I = \langle c_1, c_2, c_4, c_5 \rangle$ e $J = \langle c_3 \rangle$ que são ideais do $\ker \omega$, mas não de C e $\ker \omega = I \oplus J$. Obtemos aí um contra-exemplo para a questão colocada em d).

Consideremos a subálgebra (B, ω') de (C, ω) onde $B = \langle c_0, c_3, c_4, c_5 \rangle$ e $\omega' = \omega|_B$. Observemos que (B, ω') é uma zero álgebra de dimensão 4, logo decomponível e portanto um contra exemplo para a questão e).

Sabemos que se A é uma álgebra comutativa, sua duplicada comutativa $D(A)$ possui a propriedade: $x * x = 0$ para $x \in A$ acarreta $x = 0$. Além disso da definição da multiplicação conforme (2) de [Cap.1, § 1.6] temos:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) * \left(\sum_{j=1}^m c_j d_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i * b_i \right) \left(\sum_{j=1}^m c_j * d_j \right) \quad (a_i, b_i, c_j, d_j \in A).$$

Lema Sejam (A, ω) um membro de Ω comutativa, $\omega' = \omega|_{A^2}$ e $\omega_d = \omega \circ \psi: D(A) \rightarrow F$ onde $\psi: D(A) \rightarrow A^2$ é dada por $\psi(x * y) = xy$. Então:

a) $\ker \omega' = \langle xa : x \in A \text{ e } a \in \ker \omega \rangle = A(\ker \omega)$;

b) $\ker \omega_d = \langle x * a : x \in A \text{ e } a \in \ker \omega \rangle$.

Demonstração Seja $e \in A$ um idempotente de peso 1.

a) Dado $x \in \ker \omega'$, então $x = \sum_{i=1}^n (\alpha_i e + a_i)(\beta_i e + b_i)$, com $a_i, b_i \in \ker \omega$, $\alpha_i, \beta_i \in F$, assim, $x = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \beta_i e + a_i b_i + \alpha_i e b_i + \beta_i e a_i) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right) e + \sum_{i=1}^n (a_i b_i + \alpha_i e b_i + \beta_i e a_i)$. Como $0 = \omega'(x) = \omega(x)$, então $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = 0$, logo $x = \sum_{i=1}^n \left((\alpha_i e + \frac{1}{2} a_i) b_i + (\beta_i e + \frac{1}{2} b_i) a_i \right)$.

b) Análogo ao que foi feito em a).

CQD

Teorema 5 Se $(A, \omega) \in \Omega$ é comutativa, indecomponível e $A^2 = A$, então $(D(A), \omega_d)$ é indecomponível.

Demonstração Sejam I e J ideais de $D(A)$ tais que $\ker \omega_d = I \oplus J$. Seja $\psi: D(A) \rightarrow A$ dada por $\psi(a * b) = ab$. Como $A^2 = A$, por [Cap.1, Prop.10], ψ é epimorfismo de álgebras, logo $\psi(I)$ e $\psi(J)$ são ideais de A . Como $\omega_d = \omega \circ \psi$, então $\psi(I)$ e $\psi(J)$ estão contidos no $\ker \omega$. Dado $x \in \psi(I) \cap \psi(J)$, então $x = \psi\left(\sum_{i=1}^n a_i * b_i\right) = \psi\left(\sum_{j=1}^m c_j * d_j\right)$ onde $\sum_{i=1}^n a_i * b_i \in I$ e $\sum_{j=1}^m c_j * d_j \in J$, logo $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{j=1}^m c_j d_j$. Por outro lado,

$$x * x = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) * \left(\sum_{j=1}^m c_j d_j\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i * b_i\right) \left(\sum_{j=1}^m c_j * d_j\right).$$

Como $\sum_{i=1}^n a_i * b_i \in I$, $\sum_{j=1}^m c_j * d_j \in J$ e $IJ = 0$, então $x * x = 0$, portanto $x = 0$. Como $A^2 = A$, então $\ker \omega = \ker \omega'$. Dados $x \in A$ e $a \in \ker \omega$, então existem $i \in I$ e $j \in J$ tais que $x * a = i + j$, assim $xa = \psi(x * a) = \psi(i) + \psi(j)$, logo $xa \in \psi(I) \oplus \psi(J)$; por a) do Lema acima, $\ker \omega = \psi(I) \oplus \psi(J)$. Como A é indecomponível, $\psi(I) = 0$ e $\psi(J) = \ker \omega$ ou $\psi(I) = \ker \omega$ e $\psi(J) = 0$. Suponhamos o primeiro caso. Mostremos que $I = 0$. Por b) do Lema, para $x \in I$ temos, $x = \sum_{i=1}^n x_i * a_i \in I$ com $x_i \in A$ e $a_i \in \ker \omega$ ($i = 1, \dots, n$). Como $\ker \omega = \psi(J)$, então $a_i = \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} c_{ij} = \psi\left(\sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} * c_{ij}\right)$, onde $\sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} * c_{ij} \in J$. Como $A^2 = A$, então $x_i = \sum_{k=1}^{n_i} d_{ik} f_{ik}$ com $d_{ik}, f_{ik} \in A$. Assim $x = \sum_{i=1}^n x_i * a_i = \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^{n_i} d_{ik} f_{ik} \right) * \left(\sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} c_{ij} \right) \right)$, logo $x = \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^{n_i} d_{ik} * f_{ik} \right) \left(\sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} * c_{ij} \right) \right)$. Como $\sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} * c_{ij} \in J$, temos que $\left(\sum_{k=1}^{n_i} d_{ik} * f_{ik} \right) \left(\sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} * c_{ij} \right) \in J$, logo $x \in J$. Por outro lado $x \in I$ e $I \cap J = 0$, portanto $x = 0$. Logo $D(A)$ é indecomponível. CQD

Corolário A álgebra zigótica $Z(n+1, 2m)$ é indecomponível para todo $n \geq 1$ e $m \geq 2$.

Demonstração Como $Z(n+1, 2m) = D(G(n+1, 2m))$, $G(n+1, 2m)$ é indecomponível e $(G(n+1, 2m))^2 = G(n+1, 2m)$, pelo Teorema 4, $Z(n+1, 2m)$ é indecomponível. CQD

D) Sejam F um corpo infinito, $V = \langle c_0, c_1, \dots \rangle$ um F -espaço vetorial de dimensão infinita livremente gerado pelos c_i ($i = 0, 1, \dots$). Seja dada uma matriz infinita $T = (t_{ij})$

$(0 \leq i, j)$ com elementos em F , com $t_{00} = 1$, $t_{0i} = t_{i0}$, (todo i) e, $t_{0i} \neq t_{0j}$ se $i \neq j$.

Definimos uma multiplicação (não comutativa) e uma função peso ω em V por:

$$\begin{cases} c_0 c_i = c_i c_0 = t_{0i} c_i & 0 \leq i; \\ c_i c_j = t_{ij} c_i & 1 \leq i, j; \\ \omega(c_0) = 1, \quad \omega(c_i) = 0 & 1 \leq i. \end{cases}$$

Claramente c_0 é um idempotente e portanto V é um membro de Ω . Suponhamos agora que $I \neq 0$ é um ideal de V , contido no $\ker \omega$. Se $x = \alpha_k c_k + \dots + \alpha_m c_m$ é um elemento não nulo de I , com $\alpha_k \neq 0$ e $k \leq m$, mostremos que $c_k \in I$ (observe que k depende de x). Se $k = m$, então $c_m = \alpha_m^{-1} x$. Se $k < m$, temos

$$c_0 x = t_{0k} \alpha_k c_k + \dots + t_{0m} \alpha_m c_m \in I,$$

$$t_{0m} x = t_{0m} \alpha_k c_k + \dots + t_{0m} \alpha_m c_m \in I.$$

assim,,
$$c_0 x - t_{0m} x = (t_{0k} - t_{0m}) \alpha_k c_k + \dots + (t_{0,m-1} - t_{0m}) \alpha_{m-1} c_{m-1} \in I,$$

onde a c_k -componente é não nula; por recorrência, temos finalmente que $c_k \in I$.

Agora distinguiremos dois casos:

I) $t_{ij} = 0$ para $1 \leq i < j$ e $t_{ij} \neq 0$ para $1 \leq j \leq i$. Dado um ideal I como acima, seja $n = \min \{k : x \in I, c_k\text{-componente de } x \text{ é diferente de zero}\}$. Então $c_i c_n = t_{in} c_i$ para todo $i \geq n$, $c_n c_j = t_{nj} c_n$ para todo $n \geq j$. Os outros produtos por c_n são zero. Isso implica que $I = \langle c_n, c_{n+1}, \dots \rangle$, que denotaremos por I_n . Temos uma cadeia estritamente descendente de ideais da álgebra, todos contidos no $\ker \omega$, dada por:

$$\ker \omega = I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

Claramente não existem cadeias infinitas de ideais de A , todos contidos no $\ker \omega$, que sejam estritamente ascendentes. Esta álgebra, de dimensão infinita, é indecomponível pois $I_n \cap I_m \neq 0$ para todo n, m .

II) $t_{ij} \neq 0$ se $1 \leq i \leq j$ e $t_{ij} = 0$ para $1 \leq j < i$. Dado I um ideal não nulo da álgebra tal que $I \subset \ker \omega$, seja $n = \sup\{k : x \in I, c_k\text{-comp. de } x \neq 0 \text{ e } c_i\text{-comp. de } x \text{ é } 0, 1 \leq i < k\}$. Como $I \neq \ker \omega$, então $n < \infty$. Por outro lado $c_i c_n = t_{in} c_i$ para $i \leq n$, $c_n c_j = t_{nj} c_n$ para $1 \leq n \leq j$ e os outros produtos são zero. Então $I = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$, que denotaremos por I_n . Temos uma cadeia estritamente ascendente de ideais da álgebra, todos contidos no $\ker \omega$, dada por:

$$0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$$

e não existem cadeias infinitas de ideais de A , todos contidos no $\ker \omega$, estritamente descendente. Esta álgebra também é indecomponível e de dimensão infinita.

Observação É bem conhecido que as condições ascendente e descendente de cadeias são independentes uma da outra. Este exemplo foi colocado aqui pois ele é uma generalização das álgebras gaméticas de poliplóides.

Capítulo 4

Train álgebras obtidas de nil-álgebras por homotetias

Em [1], Abraham utilizou uma nil-álgebra comutativa A de nil-índice 4, que não é nilpotente, obtida por Suttles [52], para exibir o primeiro exemplo de uma train álgebra comutativa que não era genética. Veja [Cap.1, § 1.5] para maiores detalhes. Basicamente o autor adicionou uma unidade ao exemplo de Suttles, obtendo uma train álgebra de posto 5 que não é genética. Ele observou também que se adicionasse um idempotente e tal que $ex = \frac{1}{2}x$, para todo $x \in A$, obteria outra train álgebra de posto 4 que não é genética.

Os resultados deste capítulo (Teoremas 1 e 1') foram obtidos pela tentativa de entender mais profundamente o procedimento adotado por Abraham e se possível, generalizá-lo para nil-álgebras de nil-índice n , não necessariamente comutativas. Trataremos apenas o caso das nil-álgebras à direita, o caso “à esquerda” sendo similar.

4.1 As funções $[n, j; r]$ e $(n, j; r)$

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e F um corpo. Introduzimos duas funções de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times F$ em F , denotadas por $(n, j; r)$ e $[n, j; r]$, onde $n, j \in \mathbb{N}$ e $r \in F$, por recorrência, da seguinte forma:

a) Para $n < j$, $(n, j; r) = 0$. Para $n \geq j$, $(n, 0; r) = 1$ e

$$(n, j; r) = (-1)^j \left(\binom{n-1}{j} r^j + \binom{n-1}{j-1} r^{j-1} \right) \text{ se } j \geq 1.$$

b) Para $n < j$, $[n, j; r] = 0$. Para $n \geq j$, $[n, 0; r] = r^{1-\delta_{0n}}$ e

$$[n, j; r] = \sum_{i=0}^{n-j} [n-1-i, j-1; r] r^i \text{ se } j \geq 1,$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker. Observemos que para $r = 1$, $(n, j; 1) = (-1)^j \binom{n}{j}$.

As Proposições 1 e 2 a seguir serão demonstradas no apêndice A.

Proposição 1 Para todo $n, j \in \mathbb{N}$ e $r \in F$, são válidas as seguintes igualdades:

- a) $[n, n; r] = 1;$
- b) $[n, n-1; r] = nr \quad (n \geq 1);$
- c) $(n, j; r) = (n-1, j; r) - (n-1, j-1; r)r \quad (n \geq 2, j \geq 1);$
- d) $[n, j; r] = [n-1, j; r]r + [n-1, j-1; r] \quad (n \geq 1, j \geq 1).$

Proposição 2 São válidas as seguintes igualdades:

- a) $\sum_{j=0}^k (n, j; r) = (-1)^k \binom{n-1}{k} r^k \quad (0 \leq k \leq n-1);$
- b) $\sum_{j=0}^n (n, j; r) = 0 \quad (n \geq 1);$
- c) $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k (n, j; r) \right) r^{n-1-k} = 0 \quad (n \geq 2);$
- d) $\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] (n-1, i; r) = 0 \quad (0 \leq j \leq n-2);$
- e) $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (2r-1)^{i-1} [n, i; r] = 1 \quad (n \geq 1).$

4.2 Train álgebras obtidas de nil-álgebras por homotetias

A função $[n, j; r]$ é usada para exprimir convenientemente o valor de t-polinômios em elementos de álgebras báricas. Utilizando a notação do capítulo 2, Ω será a classe de

todas as álgebras básicas que possuem um idempotente e de peso 1. Cada uma destas álgebras pode ser decomposta em $A = Fe \oplus \ker \omega$.

A proposição a seguir será demonstrada no apêndice A.

Proposição 3 *Seja (A, ω) um membro de Ω , $e \in A$ um idempotente de peso 1 e suponhamos que existe $r \in F$ tal que $ea = ra = ae$ para todo $a \in \ker \omega$. Então para todo $f(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)x^{n-1}x$, onde $\gamma_i \in F$, $\gamma_0 = 1$ e $b = \omega(b)e + a \in A = Fe \oplus \ker \omega$, temos*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(\omega(b)e + a) = b^n + \gamma_1 \omega(b)b^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(b)b^{n-1}b = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right) \omega(b)^n e + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n-j} a^j. \end{aligned}$$

O próximo lema é bem conhecido e omitiremos sua demonstração.

Lema *Se B é uma nil-álgebra à direita de nil-índice $s \geq 2$, então para todo $a \in B$ com $a^{s-1} \neq 0$, os elementos $a, a^2, \dots, a^{s-1}$ são linearmente independentes.*

O primeiro exemplo dado por Abraham (ver [Cap.1, § 1.5]) é um caso particular do próximo teorema, com $r = 1$, $e = 1_A$ e $s = 4$.

Teorema 1 *Sejam (A, ω) um membro de Ω , $e \in A$ um idempotente de peso 1 e suponhamos existir $r \in F$ onde $2r \neq 1$ e tal que $ea = ra = ae$ para todo $a \in \ker \omega$. Se $\ker \omega$ é nil à direita de nil-índice $s \geq 2$, (A, ω) satisfaz a t-equação à direita $f(x) = x^{s+1} + \gamma_1 \omega(x)x^s + \dots + \gamma_s \omega(x)x^s x = 0$, onde $\gamma_i = (s, i; r)$, $0 \leq i \leq s$. Além disso, (A, ω) não satisfaz nenhuma outra t-equação à direita de grau $< s + 1$ e portanto o seu posto à direita é $s + 1$.*

Demonstração Da Proposição 2 b), concluímos que $f(x)$ é de fato um t-polinômio, pois $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_s = \sum_{i=0}^s (s, i; r) = 0$. Da Proposição 3 temos, para todo $b = \omega(b)e + a \in A = Fe \oplus \ker \omega$:

$$f(b) = b^{s+1} + \gamma_1 \omega(b)b^s + \dots + \gamma_s \omega(b)b^s b = \sum_{j=1}^{s+1} \left(\sum_{i=0}^{s+1-j} [s+1-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{s+1-j} a^j$$

$$= \sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{i=0}^{s+1-j} [s+1-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{s+1-j} a^j \quad \text{pois } a^s = a^{s+1} = 0.$$

Da Proposição 2 d) temos

$$\sum_{i=0}^{s+1-j} [s+1-i, j; r] \gamma_i = \sum_{i=0}^{s+1-j} [s+1-i, j; r](s, i; r) = 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq s-1.$$

Portanto (A, ω) é uma train álgebra à direita de posto à direita $\leq s+1$, pois satisfaz $f(x) = 0$. Provemos que de fato seu posto é $s+1$. Seja $x^t + \alpha_1 \omega(x) x^{t-1} + \dots + \alpha_{t-1} \omega(x)^{t-1} x = 0$ a t-equação à direita de A logo, para todo $b \in \ker \omega$, temos que $b^t = 0$. Como $\ker \omega$ é nil á direita de nil-índice s , então $s \leq t$. Por outro lado pela definição de posto à direita, $t \leq s+1$, logo $t = s$ ou $t = s+1$. Suponhamos por absurdo que $t = s$. Escolhemos $a \in \ker \omega$ com $a^{s-1} \neq 0$ logo $a, a^2, \dots, a^{s-1}$ são linearmente independentes. Tomemos o elemento $b = e + a$ (de peso 1) e usando a Proposição 3, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &= b^s + \alpha_1 b^{s-1} + \dots + \alpha_{s-1} b = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=0}^{s-j} [s-i, j; r] \alpha_i \right) a^j = \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{i=0}^{s-j} [s-i, j; r] \alpha_i \right) a^j \quad \text{pois } a^s = 0. \end{aligned}$$

Pela independência linear das potências $a, a^2, \dots, a^{s-1}$, temos um sistema triangular de $s-1$ equações lineares nas incógnitas $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$:

$$\sum_{i=0}^{s-j} [s-i, j; r] \alpha_i = 0 \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq s-1.$$

Assim, multiplicando a j -ésima equação por $(-1)^{j-1} (2r-1)^{j-1}$, obtemos o sistema linear,

$$\sum_{i=0}^{s-j} (-1)^{j-1} (2r-1)^{j-1} [s-i, j; r] \alpha_i = 0, \quad 1 \leq j \leq s-1.$$

Somando as equações, obtemos

$$\sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{i=0}^{s-j} (-1)^{j-1} (2r-1)^{j-1} [s-i, j; r] \alpha_i \right) = 0.$$

Colocando em evidência os α_i 's obtemos,

$$0 = \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{j-1} (2r-1)^{j-1} [s, j; r] + \left(\sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{j-1} (2r-1)^{j-1} [s-1, j; r] \right) \alpha_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{j=1}^{s-2} (-1)^{j-1} (2r-1)^{j-1} [s-2, j; r] \right) \alpha_2 + \dots + \\
& + \left(\sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} (2r-1)^{j-1} [2, j; r] \right) \alpha_{s-2} + \alpha_{s-1}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2 e) a igualdade acima se escreve:

$$0 = -(-1)^{s-1} (2r-1)^{s-1} [s, s; r] + 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{s-1} = (-1)^s (2r-1)^{s-1} [s, s; r].$$

Pela Proposição 1 a) $[s, s; r] = 1$ logo $2r = 1$, que é uma contradição, portanto finalmente $t = s + 1$. CQD

Corolário 1 (Abraham) *Seja (A, ω) uma álgebra bária com elemento unidade 1_A (logo um membro de Ω). Se $\ker \omega$ é nil à direita de nil-índice $s \geq 2$, então (A, ω) é uma train álgebra à direita de posto $s + 1$ com t-equação à direita $(x - \omega(x)1_A)^s x = 0$.*

Demonstração Aplicando o Teorema 1, com $e = 1_A$ e portanto $r = 1$, concluímos que (A, ω) é uma train álgebra à direita de posto $s + 1$, onde os coeficientes γ_i de sua t-equação à direita são dados por $\gamma_i = (s, i; 1) = (-1)^i \left(\binom{s-1}{i} + \binom{s-1}{i-1} \right) = (-1)^i \binom{s}{i}$, $0 \leq i \leq s$. Para $b \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
0 &= b^{s+1} + \gamma_1 \omega(b) b^s + \dots + \gamma_s \omega(b)^s b = (b^s + \gamma_1 \omega(b) b^{s-1} + \dots + \gamma_s \omega(b)^s 1_A) b = \\
&= \left(b^s + \binom{s}{1} (-\omega(b)) b^{s-1} + \dots + \binom{s}{s-1} (-\omega(b))^{s-1} + (-\omega(b))^s 1_A \right) b = \\
&= (b - \omega(b) 1_A)^s b.
\end{aligned}$$
CQD

Corolário 2 *Sejam B uma nil-álgebra à direita de nil-índice $s \geq 2$ e $r \in F$ com $2r \neq 1$. Então a álgebra bária $[B, r \text{id}_B]$ é uma train álgebra à direita de posto $s + 1$, com t-equação à direita $x^{s+1} + \gamma_1 \omega(x) x^s + \dots + \gamma_s \omega(x)^s x = 0$, onde $\gamma_i = (s, i; r)$ para $0 \leq i \leq s$.*

Demonstração Conforme vimos no Capítulo 2, $[B, r \text{id}_B]$ é um membro de Ω , $e = (1, 0)$ é um idempotente de peso 1 e para todo $a \in B$, $e(0, a) = (0, a)e = (0, r \text{id}_B(a)) = (0, ra) =$

$r(0, a)$. Como o núcleo da função peso de $[B, r \text{id}_B]$ é isomorfo à B , então ele também é nil à direita de nil-índice s . O Teorema 1 completa a demonstração. CQD

Observação Sejam (A, ω) uma álgebra bária em Ω cujo núcleo é nil à direita de nil-índice à direita s e $e \in A$ um idempotente de peso 1 tal que $ea = ae = ra$ para todo $a \in \ker \omega$ com $2r \neq 1$. Então e é o único idempotente de peso 1 em A . De fato, se $e' \in A$ é um idempotente de peso 1 então $e' = e + c$, onde $c \in \ker \omega$, assim $e + c = e' = e'^2 = e + 2ce + c^2 = e + 2rc + c^2$ logo $c^2 = (1 - 2r)c$; daí $c^3 = (1 - 2r)c^2 = (1 - 2r)^2c$; por indução, para todo k , $c^k = (1 - 2r)^{k-1}c$. Como $\ker \omega$ é nil à direita de nil-índice à direita s , então $0 = (1 - 2r)^{s-1}c$ e como $2r \neq 1$, temos $c = 0$ e $e = e'$.

Seja (A, ω) uma álgebra bária verificando as hipóteses do Teorema 1. Sabemos que (A, ω) é isomorfa, como álgebra bária, a $[\ker \omega, L_e]$. Por outro lado, para todo $a \in \ker \omega$, $L_e(a) = ra = r \text{id}_{\ker \omega}(a)$. Portanto (A, ω) é isomorfa, como álgebra bária, a $[\ker \omega, r \text{id}_{\ker \omega}]$. A proposição a seguir nos diz quando duas álgebras desse tipo são isomorfas.

Proposição 4 *Suponhamos B_1 e B_2 duas álgebras, ambas nil à direita de nil-índices m e n respectivamente, $m \geq 2$ e $n \geq 2$. Sejam $r, s \in F$ com $2r \neq 1$ e $2s \neq 1$. Então $[B_1, r \text{id}_{B_1}]$ e $[B_2, r \text{id}_{B_2}]$ são isomorfas, como álgebras báricas, se e somente se B_1 e B_2 são isomorfas (logo $m = n$) e $r = s$.*

Demonstração Suponhamos $[B_1, r \text{id}_{B_1}]$ e $[B_2, r \text{id}_{B_2}]$ isomorfas como álgebras báricas e indiquemos por φ o isomorfismo. Por [Cap.2, Cor.1 e 2 da Prop.3] existem um isomorfismo $\theta: B_1 \rightarrow B_2$ e $c \in B_2$ tais que $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$, $c^2 + 2s \text{id}_{B_2}(c) = c$ e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\theta} & B_2 \\ r \text{id}_{B_1} \downarrow & & \downarrow s \text{id}_{B_2} + L_c \\ B_1 & \xrightarrow{\theta} & B_2 \end{array}$$

é comutativo. Agora $c = c^2 + 2sc$, implica $c^n = (1 - 2s)^{n-1}c$ (argumento usado acima) e como $2s \neq 1$, então $c = 0$. Do diagrama, para todo $a \in B_1$, $(\theta(r \text{id}_{B_1}))(a) = ((s \text{id}_{B_2})\theta)(a)$,

daí $r\theta(a) = s\theta(a)$, logo $(r - s)\theta(a) = 0$. Como $\theta \neq 0$, temos $r = s$. A recíproca é trivial.

CQD

Analisaremos, agora, o caso em que $2r = 1$, o que exige $\text{car} F \neq 2$. O Teorema 1' obtido abaixo generaliza o segundo exemplo de Abraham [1].

Teorema 1' *Sejam (A, ω) um membro de Ω , $e \in A$ um idempotente de peso 1 tal que $ea = ae = \frac{1}{2}a$ para todo $a \in \ker \omega$. Então se $\ker \omega$ é nil à direita de nil-índice $s \geq 2$, (A, ω) satisfaz a t-equação à direita $f(x) = x^s + \gamma_1 \omega(x)x^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} \omega(x)^{s-1}x = 0$ onde $\gamma_i = (s-1, i; \frac{1}{2})$, $0 \leq i \leq s-1$. Além disso, (A, ω) não satisfaz nenhuma outra t-equação à direita de grau $< s$ e portanto seu posto à direita é s .*

Demonstração Da Proposição 2 b), concluímos que $f(x)$ é de fato um t-polinômio, pois $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{s-1} = \sum_{i=0}^{s-1} (s-1, i; \frac{1}{2}) = 0$. Da Proposição 3 temos, para todo $b = \omega(b)e + a \in A = Fe \oplus \ker \omega$,

$$\begin{aligned} f(b) &= b^s + \gamma_1 \omega(b)b^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} \omega(b)^{s-1}b = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=0}^{s-j} [s-i, j; \frac{1}{2}] \gamma_i \right) \omega(b)^{s-j} a^j = \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{i=0}^{s-j} [s-i, j; \frac{1}{2}] \gamma_i \right) \omega(b)^{s-j} a^j \quad \text{pois } a^s = 0. \end{aligned}$$

Da Proposição 2 d) temos,

$$\sum_{i=0}^{s-j} [s-i, j; \frac{1}{2}] \gamma_i = \sum_{i=0}^{s-j} [s-i, j; \frac{1}{2}] (s-1, i; \frac{1}{2}) = 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq s-2.$$

Faltou o caso em que $j = s-1$. Para este, temos:

$$\sum_{i=0}^1 [s-i, s-1; \frac{1}{2}] (s-1, i; \frac{1}{2}) = [s, s-1; \frac{1}{2}] (s-1, 0; \frac{1}{2}) + [s-1, s-1; \frac{1}{2}] (s-1, 1; \frac{1}{2})$$

e da Proposição 1, temos:

$$\begin{aligned} &[s, s-1; \frac{1}{2}] (s-1, 0; \frac{1}{2}) + [s-1, s-1; \frac{1}{2}] (s-1, 1; \frac{1}{2}) = \\ &= \frac{s}{2} + (-1) \left(\binom{s-2}{1} \frac{1}{2} + \binom{s-2}{0} \right) = \frac{s}{2} - \left(\frac{s-2}{2} + 1 \right) = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} = 0. \end{aligned}$$

É claro que s é o posto de A pois $\ker \omega$ é nil à direita de nil-índice s .

CQD

Corolário (Abraham) *Se B é uma nil-álgebra à direita de nil-índice à direita $s \geq 2$, então a álgebra bária $[B, \frac{1}{2} \text{id}_B]$ é uma train álgebra à direita de posto s , com t -equação à direita $x^s + \gamma_1 \omega(x)x^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} \omega(x)x = 0$, onde $\gamma_i = (s-1, i; \frac{1}{2})$, $0 \leq i \leq s-1$.*

Demonstração Se $e = (1, 0)$ e $a \in B$ então, $e(0, a) = (0, a)e = (0, \frac{1}{2} \text{id}_B(a)) = \frac{1}{2}(0, a)$. Como B é nil à direita de nil-índice s , pelo Teorema 1' a demonstração está terminada.

CQD

Proposição 5 *Sejam B_1 e B_2 duas álgebras. Então $[B_1, \frac{1}{2} \text{id}_{B_1}]$ e $[B_2, \frac{1}{2} \text{id}_{B_2}]$ são isomorfas, como álgebras báricas, se e somente se B_1 e B_2 são isomorfas.*

Demonstração Se supomos $[B_1, \frac{1}{2} \text{id}_{B_1}]$ e $[B_2, \frac{1}{2} \text{id}_{B_2}]$ isomorfas, como álgebras báricas, por [Cap.2, Cor.1 e 2 da Prop.3] B_1 e B_2 são isomorfas. A recíproca é trivial.

CQD

A proposição a seguir refere-se ao ideal de Etherington de $[B, r \text{id}_B]$ conforme [Cap.1, § 1.1].

Proposição 6 *Se B é uma F -álgebra e $r \in F$, então o ideal de Etherington de $[B, r \text{id}_B]$ é B se $r \neq \frac{1}{2}$ e é gerado por $\{a^2 : a \in B\}$ se $r = \frac{1}{2}$.*

Demonstração Dado $x = \omega(x)e + a \in [B, r \text{id}_B]$, então

$$x^2 - \omega(x)x = a^2 + \omega(x)(2r - 1)a.$$

Se $r = \frac{1}{2}$ temos o que queríamos. Admitamos agora que $r \neq \frac{1}{2}$. Indiquemos por J o ideal de Etherington de $[B, r \text{id}_B]$. Se $x \in B$, então $x^2 - \omega(x)x = x^2 \in J$. Dado $a \in B$, seja $x = (2r - 1)^{-1}e + a$, pela relação acima temos, $a^2 + a \in J$, como $a^2 \in J$, então $a \in J$. CQD

Observação Sejam (A, ω) um membro de Ω , $e \in A$ um idempotente de peso 1. Suponhamos que exista $r \in F$ tal que $ea = ae = ra$ para todo $a \in \ker \omega$. Assim $I \subseteq \ker \omega$ é um ideal de A se e somente se I é um ideal do $\ker \omega$. Com isso, conforme [Cap.3, Def.1], (A, ω) é

decomponível como álgebra bária se e somente se existem ideais bilaterais I e J de $\ker \omega$ não nulos tais que $\ker \omega = I \oplus J$, isto é, se e somente se $\ker \omega$ é decomponível como soma direta de dois ideais bilaterais não nulos.

Exemplo 1 Sejam (A, ω) uma álgebra bária em Ω cujo núcleo é nil à direita e $e \in A$ um idempotente de peso 1 tal que $ea = ae = \frac{1}{2}a$ para todo $a \in \ker \omega$.

Temos a seguinte questão: Se $e' \in A$ é outro idempotente de peso 1, então $e'a = ae' = \frac{1}{2}a$ para todo $a \in \ker \omega$? A resposta é negativa conforme o seguinte contra-exemplo. Consideremos a álgebra comutativa $A = \langle c_0, \dots, c_5 \rangle$, já utilizada no Capítulo 2 onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^2 = c_0, \quad c_0 c_i = \frac{1}{2} c_i \quad (1 \leq i \leq 5); \\ c_1 c_2 = c_2 c_4 = -c_1 c_5 = c_3, \quad c_1 c_3 = c_4, \quad c_2 c_3 = c_5; \\ \text{os outros produtos são zero.} \end{array} \right.$$

Mostra-se facilmente que $e_0 = c_0 + c_1$ é um idempotente de peso 1 e $e_0 c_3 = \frac{1}{2} c_3 + c_4$, $e_0 c_4 = \frac{1}{2} c_4$, $e_0 c_5 = \frac{1}{2} c_5 - c_3$.

Exemplo 2 Sejam $F[X]$ a álgebra comutativa dos polinômios em uma indeterminada com coeficientes em F e $A = F[X]/(X^s)$ onde $s \geq 2$. Sabemos que $A = \langle \mathbf{1}, T, \dots, T^{s-1} \rangle$, onde $\mathbf{1} = 1 + (X^s)$ e $T^i = X^i + (X^s)$ ($1 \leq i \leq s-1$). Seja $\omega: A \rightarrow F$ dada por $\omega(\mathbf{1}) = 1$ e $\omega(T^i) = 0$ ($1 \leq i \leq s-1$), que é um homomorfismo não nulo de álgebras, logo (A, ω) é uma álgebra bária. Dado $\alpha_1 T + \dots + \alpha_{s-1} T^{s-1} \in \ker \omega$, então $(\alpha_1 T + \dots + \alpha_{s-1} T^{s-1})^s = (T(\alpha_1 \mathbf{1} + \dots + \alpha_{s-1} T^{s-2}))^s = T^s (\alpha_1 \mathbf{1} + \dots + \alpha_{s-1} T^{s-2})^s = 0$. Assim $\ker \omega$ é nil de nil-índice s . Pelo Corolário 1 do Teorema 1, (A, ω) é uma train álgebra de posto $s+1$ com t-equação $(x - \omega(x)\mathbf{1})^s x = 0$.

Observação Todos os resultados apresentados neste parágrafo, relativos a train álgebras à direita e nil-álgebras à direita são válidos também para os correspondentes conceitos à esquerda, com as mudanças óbvias.

Capítulo 5

Alguns resultados sobre train álgebras

Neste capítulo apresentamos uma condição equivalente à existência de uma t -equação em uma álgebra bária (Teorema 1). Além disso, para train álgebras, com t -raízes $1, r_1, \dots, r_{n-2}$, se $\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}$ forem todos distintos, obtemos uma decomposição de Peirce da álgebra (Proposição 6) e uma tábua de multiplicação dos subespaços que aparecem nesta decomposição (Teorema 2). Em todo o capítulo F será um corpo com $\text{car} F = 0$ e A uma F -álgebra. Todas as potências utilizadas serão as principais à direita.

5.1 As funções $(f_1, \dots, f_n)$

Sejam dadas n funções arbitrárias $f_i: A \rightarrow K_i$, onde $K_i = F$ ou $K_i = A$ ($1 \leq i \leq n$). Define-se, por recorrência, a aplicação $(f_1, \dots, f_n): \bigoplus_n A \rightarrow K$, onde $K = F$ se $K_i = F$ para todo i ou $K = A$ se $K_i = A$ para algum i , do seguinte modo:

a) $(f_1) = f_1$;

b) $(f_1, \dots, f_n)(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f_1, \dots, f_{n-1})(a_{\sigma^i(1)}, \dots, a_{\sigma^i(n-1)}) f_n(a_{\sigma^i(n)})$
onde $(a_1, \dots, a_n) \in \bigoplus_n A$ e σ é o ciclo $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ no grupo simétrico S_n .

As Proposições 1 e 2 a seguir serão demonstradas no apêndice B.

Proposição 1 *Se as aplicações $f_i: A \rightarrow K_i$ ($i = 1, \dots, n$) são lineares então $(f_1, \dots, f_n)$ é uma aplicação n -linear simétrica.*

Introduzimos um pouco mais de notações. Sejam $f: A \rightarrow K_1$, $g: A \rightarrow K_2$ onde $K_i = F$ ou $K_i = A$ ($i = 1, 2$) e $a, b \in A$. Então:

- a) $(f^{(1)}) = f$ e $(f^{(m)}) = (f, \dots, f)$;
- b) $(f^{(m)}, g^{(p)}) = (f, \dots, f, g, \dots, g)$;
- c) $(f^{(m)}, g^{(0)}) = (f^{(m)})$ e $(f^{(0)}, g^{(p)}) = (g^{(p)})$;
- d) $(a^{(1)}) = a$ e $(a^{(m)}) = (a, \dots, a)$;
- e) $(a^{(m)}, b^{(p)}) = (a, \dots, a, b, \dots, b)$;
- f) $(a^{(m)}, b^{(0)}) = (a^{(m)})$ e $(a^{(0)}, b^{(p)}) = (b^{(p)})$.

Proposição 2 (Fórmula do binômio para potências principais à direita)

$$\text{Se } a, b \in A, \text{ então } (a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}).$$

Quando A é associativa e comutativa, obtemos a fórmula usual do binômio.

5.2 Train álgebras e funções multilineares simétricas

Neste parágrafo apresentaremos a definição de train álgebra sob outra forma.

A demonstração da Proposição 3 a seguir está no apêndice B.

Proposição 3 *Se A, B são F -álgebras e $\mu: \bigoplus_n A \rightarrow B$ é uma aplicação n -linear simétrica tal que $\mu(a_1^{(n-1)}, a_2) = 0$ para todo $a_1, a_2 \in A$, então $\mu = 0$.*

Dada uma álgebra bária (A, ω) , consideremos as funções lineares $\text{id}_A: A \rightarrow A$ e $\omega: A \rightarrow F$. Assim podemos considerar as funções multilineares simétricas obtidas delas pelo processo acima, ou seja $(\omega^{(n)})$, $(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)})$, etc.

Proposição 4 Se (A, ω) uma álgebra bária, então:

- a) $(\omega^{(n)})(a_1, \dots, a_n) = \omega(a_1) \dots \omega(a_n)$, para todo $a_1, \dots, a_n \in A$;
- b) $(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)})(a^{(n)}) = \omega(a)^j a^{n-j}$ para todo $a \in A$ e $1 \leq j \leq n-1$;
- c) $n(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)})(a^{(n-1)}, b) = (n-j)\omega(a)^j (\text{id}_A^{(n-j)})(a^{(n-j-1)}, b) + j\omega(a)^{j-1}\omega(b)a^{n-j}$,
para todo $a, b \in A$, $1 \leq j \leq n-1$.

Demonstração a) Faremos a demonstração por indução sobre n . Para $n=1$ é claro. Se admitimos a igualdade verdadeira para $n \geq 1$, então

$$\begin{aligned} (n+1)(\omega^{(n+1)})(a_1, \dots, a_{n+1}) &= \\ (\omega^{(n)})(a_1, \dots, a_n)\omega(a_{n+1}) + \dots + (\omega^{(n)})(a_{n+1}, a_1, \dots, a_n)\omega(a_n) &= \\ \omega(a_1) \dots \omega(a_n)\omega(a_{n+1}) + \dots + \omega(a_{n+1})\omega(a_1) \dots \omega(a_n)\omega(a_n) &= (n+1)\omega(a_1) \dots \omega(a_{n+1}). \end{aligned}$$

b) Se $j = n-1$, então pelo item a) temos,

$$\begin{aligned} n(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A)(a^{(n)}) &= (\omega^{(n-1)})(a^{(n-1)})a + \dots + (\omega^{(n-1)})(a^{(n-1)})a = \\ n(\omega^{(n-1)})(a^{(n-1)})a &= n\omega(a)^{n-1}a. \end{aligned}$$

Agora usaremos indução sobre n . Para $n=2$, temos que $j=1$ o que já foi provado acima.

Admitamos a igualdade verdadeira para $n \geq 1$. Seja $1 \leq j < n$, então

$$\begin{aligned} (n+1)(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n+1-j)})(a^{(n+1)}) &= (\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)})(a^{(n)})a + \dots + (\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)})(a^{(n)})a = \\ (n+1)(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)})(a^{(n)})a &= (n+1)\omega(a)^j a^{n-j}a = (n+1)\omega(a)^j a^{n+1-j}. \end{aligned}$$

c) Se $j = n-1$, pelo item a) temos,

$$\begin{aligned} n(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A)(a^{(n-1)}, b) &= \\ (\omega^{(n-1)})(a^{(n-1)})b + (\omega^{(n-1)})(a^{(n-2)}, b)a + \dots + (\omega^{(n-1)})(b, a^{(n-2)})a &= \\ (\omega^{(n-1)})(a^{(n-1)})b + (n-1)(\omega^{(n-1)})(a^{(n-2)}, b)a &= \omega(a)^{n-1}b + (n-1)\omega(a)^{n-2}\omega(b)a. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\omega(a)^{n-1} (\text{id}_A) (a^{(0)}, b) + (n-1)\omega(a)^{n-2}\omega(b)a = \omega(a)^{n-1}b + (n-1)\omega(a)^{n-2}\omega(b)a.$$

Agora usaremos indução sobre n . Se $n = 2$, então $j = 1$ e este caso já foi provado acima. Admitamos a igualdade verdadeira para $n \geq 2$. Para $1 \leq j < n$, pelo item b) e hipótese de indução temos,

$$\begin{aligned} (n+1) \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n+1-j)} \right) (a^{(n)}, b) &= \\ \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n)})b + \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n-1)}, b)a + \dots + \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)} \right) (b, a^{(n-1)})a &= \\ \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n)})b + n \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n-1)}, b)a &= \\ \omega(a)^j a^{n-j} b + (n-j)\omega(a)^j \left(\text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n-j-1)}, b)a + j\omega(a)^{j-1}\omega(b)a^{n+1-j} &= \\ \omega(a)^j \left(a^{n-j} b + (n-j) \left(\text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n-j-1)}, b)a \right) + j\omega(a)^{j-1}\omega(b)a^{n+1-j}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (n+1-j) \left(\text{id}_A^{(n+1-j)} \right) (a^{(n-j)}, b) &= \\ \left(\text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n-j)})b + \left(\text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n-1-j)}, b)a + \dots + \left(\text{id}_A^{(n-j)} \right) (b, a^{(n-1-j)})a &= \\ a^{n-j} b + (n-j) \left(\text{id}_A^{(n-j)} \right) (a^{(n-j-1)}, b)a. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (n+1) \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n+1-j)} \right) (a^{(n)}, b) &= \\ (n+1-j)\omega(a)^j \left(\text{id}_A^{(n+1-j)} \right) (a^{(n-j)}, b) + j\omega(a)^{j-1}\omega(b)a^{n+1-j}. \end{aligned} \quad \text{CQD}$$

Teorema 1 Para uma álgebra bária (A, ω) são equivalentes as condições:

- a) (A, ω) satisfaz o t -polinômio à direita $x^n + \gamma_1 \omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0$;
- b) As aplicações n -lineares simétricas $\left(\text{id}_A^{(n)} \right), \dots, \left(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A \right)$ satisfazem à relação de dependência linear: $\left(\text{id}_A^{(n)} \right) + \gamma_1 \left(\omega, \text{id}_A^{(n-1)} \right) + \dots + \gamma_{n-1} \left(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A \right) = 0$.

Demonstração $a) \implies b)$ Seja $\mu = \left(\text{id}_A^{(n)} \right) + \gamma_1 \left(\omega, \text{id}_A^{(n-1)} \right) + \dots + \gamma_{n-1} \left(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A \right)$ e sejam dados $a_1, a_2 \in A$ e $\lambda \in F$. Substituindo $b = a_1 + \lambda a_2$ na t -equação de a) e usando a Proposição 2 temos,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\text{id}_A^{(n)}) (a_1^{(n-j)}, (\lambda a_2)^{(j)}) + \\
& + \gamma_1 (\omega(a_1) + \lambda \omega(a_2)) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (\text{id}_A^{(n-1)}) (a_1^{(n-1-j)}, (\lambda a_2)^{(j)}) + \dots + \\
& + \gamma_{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \omega(a_1)^{n-1-j} (\lambda \omega(a_2))^j \right) (a_1 + \lambda a_2) = 0.
\end{aligned}$$

Colocando os λ 's em evidência, obteremos uma expressão do tipo $b_1 + \lambda b_2 + \dots + \lambda^n b_n = 0$, daí $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$. Calculemos b_2 ,

$$\begin{aligned}
0 = b_2 &= \binom{n}{1} (\text{id}_A^{(n)}) (a_1^{(n-1)}, a_2) + \\
& \gamma_1 \left(\omega(a_1) \binom{n-1}{1} (\text{id}_A^{(n-1)}) (a_1^{(n-2)}, a_2) + \omega(a_2) (\text{id}_A^{(n-1)}) (a_1^{(n-1)}) \right) + \\
& \gamma_2 \left(\binom{n-2}{1} \omega(a_1)^2 (\text{id}_A^{(n-2)}) (a_1^{(n-3)}, a_2) + 2\omega(a_1)\omega(a_2) (\text{id}_A^{(n-2)}) (a_1^{(n-2)}) \right) + \dots + \\
& \gamma_{n-1} \left(\omega(a_1)^{n-1} a_2 + \binom{n-1}{1} \omega(a_1)^{n-2} \omega(a_2) a_1 \right) = \\
& = n (\text{id}_A^{(n)}) (a_1^{(n-1)}, a_2) + \\
& + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \left((n-j) \omega(a_1)^j (\text{id}_A^{(n-j)}) (a_1^{(n-j-1)}, a_2) + j \omega(a_1)^{j-1} \omega(a_2) a_1^{n-j} \right).
\end{aligned}$$

Pela Proposição 4 c),

$$0 = n (\text{id}_A^{(n)}) (a_1^{(n-1)}, a_2) + n \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j (\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)}) (a_1^{(n-1)}, a_2) = n \mu(a_1^{(n-1)}, a_2)$$

e daí pela Proposição 3, $\mu = 0$.

$b) \implies a)$ Para todo $b \in A$, pela Proposição 4 b),

$$\begin{aligned}
0 &= (\text{id}_A^{(n)}) (b^{(n)}) + \gamma_1 (\omega, \text{id}_A^{(n-1)}) (b^{(n)}) + \dots + \gamma_{n-1} (\omega^{(n-1)}, \text{id}_A) (b^{(n)}) = \\
&= b^n + \gamma_1 \omega(b) b^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(b)^{n-1} b.
\end{aligned}$$

CQD

5.3 Decomposição de Peirce para train álgebras comutativas de posto n

Neste parágrafo (A, ω) será uma train álgebra que verifica a t-equação à direita de grau $n \geq 2$ (portanto o posto à direita de A é $\leq n$):

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0. \quad (1)$$

Além disso, admitiremos também que existe um idempotente $e \in A$ de peso 1 tal que $ea = ae$, para todo $a \in \ker \omega$. Seja $R_e: \ker \omega \rightarrow \ker \omega$ o operador linear $a \mapsto ae$.

Proposição 5 *Em (A, ω) estão verificadas as seguintes identidades:*

- a) $n \left(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A \right) (e^{(n-1)}, a) = a$ para todo $a \in \ker \omega$;
- b) $n \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)} \right) (e^{(n-1)}, a) = (2R_e^{n-j-1} + R_e^{n-j-2} + \dots + R_e)(a)$, para todo $a \in \ker \omega$ e $0 \leq j \leq n-2$;
- c) O operador linear R_e anula o polinômio

$$p(X) = 2X^{n-1} + (1 + 2\gamma_1)X^{n-2} + \dots + (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-3} + 2\gamma_{n-2})X + \gamma_{n-1} = (2X - 1) \left(X^{n-2} + (1 + \gamma_1)X^{n-3} + \dots + (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-2}) \right) \in F[X].$$

Demonstração a) Pela Proposição 4 c),

$$n \left(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A \right) (e^{(n-1)}, a) = \omega(e)^{n-1} a + (n-1) \omega(e)^{n-2} \omega(a) e = a.$$

b) Para $j = n-2$ temos

$$n \left(\omega^{(n-2)}, \text{id}_A^{(2)} \right) (e^{(n-1)}, a) = \left(\omega^{(n-2)}, \text{id}_A \right) (e^{(n-1)}) a + (n-1) \left(\omega^{(n-2)}, \text{id}_A \right) (e^{(n-2)}, a) e.$$

Pela Proposição 4 e item a),

$$\left(\omega^{(n-2)}, \text{id}_A \right) (e^{(n-1)}) = \omega(e)^{n-2} e = e \quad \text{e} \quad (n-1) \left(\omega^{(n-2)}, \text{id}_A \right) (e^{(n-2)}, a) = a.$$

Logo $n \left(\omega^{(n-2)}, \text{id}_A^{(2)} \right) (e^{(n-1)}, a) = ea + ae = 2R_e(a)$.

Agora usaremos indução sobre n . Se $n = 2$, então $j = 0$ o que já foi provado acima. Para $0 \leq j < n - 1$, pela hipótese de indução e Proposição 4 temos,

$$\begin{aligned} (n+1) \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n+1-j)} \right) (e^{(n)}, a) &= \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)} \right) (e^{(n)})a + n \left(\omega^{(j)}, \text{id}_A^{(n-j)} \right) (e^{(n-1)}, a)e = \\ &= \omega(e)^j e^{n-j} a + (2R_e^{n-j-1} + \dots + R_e)(a)e = ea + R_e(2R_e^{n-j-1} + \dots + R_e)(a) = \\ &= (2R_e^{n-j} + R_e^{n-j-1} + \dots + R_e)(a). \end{aligned}$$

c) Pelo Teorema 1, para todo $a \in \ker \omega$ temos

$$\left(\text{id}_A^{(n)} \right) (e^{(n-1)}, a) + \gamma_1 \left(\omega, \text{id}_A^{(n-1)} \right) (e^{(n-1)}, a) + \dots + \gamma_{n-1} \left(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A \right) (e^{(n-1)}, a) = 0.$$

Pelos itens a) e b) temos

$$\begin{aligned} 2R_e^{n-1} + R_e^{n-2} + \dots + R_e + \gamma_1(2R_e^{n-2} + R_e^{n-3} + \dots + R_e) + \dots + \gamma_{n-2}2R_e + \gamma_{n-1}\text{id}_{\ker \omega} = \\ 2R_e^{n-1} + (1 + 2\gamma_1)R_e^{n-2} + \dots + (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-3} + 2\gamma_{n-2})R_e + \gamma_{n-1}\text{id}_{\ker \omega} = 0. \text{ CQD} \end{aligned}$$

Observação Do item c) da Proposição 5, temos que $\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}$ são os auto-valores possíveis de R_e , onde $r_1, \dots, r_{n-2}$ são as raízes de

$$X^{n-2} + (1 + \gamma_1)X^{n-3} + \dots + (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-2}) = 0.$$

Além disso $1, r_1, \dots, r_{n-2}$ são as t-raízes de (A, ω) , pois

$$\begin{aligned} X^n + \gamma_1 X^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} X &= X \left(X^{n-1} + \gamma_1 X^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1} \right) = \\ &= X(X-1) \left(X^{n-2} + (1 + \gamma_1)X^{n-3} + \dots + (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-2}) \right). \end{aligned}$$

Aqui utilizamos novamente o fato que $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$.

Supomos a partir de agora que o polinômio $p(X)$ da Prop.5, item c), possui todas as suas raízes no corpo F e que elas são de multiplicidade 1, isto é, $r_j \in F$ para todo j e $\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}$ são distintos dois a dois. Indicaremos por $A_k(e)$ o subespaço próprio do autovalor $k \in \left\{ \frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2} \right\}$, isto é $A_k(e) = \{a \in A : ea = ka\}$.

Proposição 6 *Se os subespaços $A_{r_1}(e), \dots, A_{r_{n-2}}(e)$ são todos não nulos, então (A, ω) é uma train álgebra de posto n .*

Demonstração Indiquemos por m o posto de (A, ω) e seja $x^m + \alpha_1 \omega(x)x^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} \omega(x)^{m-1}x = 0$ sua t-equação, logo $m \leq n$. Por c) da Prop.5 temos que

$$2R_e^{m-1} + (1 + 2\alpha_1)R_e^{m-2} + \dots + (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-3} + 2\alpha_{m-2})R_e + \alpha_{m-1}\text{id}_{\ker \omega} = 0.$$

Fixado $1 \leq j \leq n-2$ e $u \in A_{r_j}(e)$, $u \neq 0$, então como $R_e(u) = r_j u$, temos:

$$(2r_j^{m-1} + (1 + 2\alpha_1)r_j^{m-2} + \dots + (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-3} + 2\alpha_{m-2})r_j + \alpha_{m-1})u = 0.$$

Logo $2r_j^{m-1} + (1 + 2\alpha_1)r_j^{m-2} + \dots + (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-3} + 2\alpha_{m-2})r_j + \alpha_{m-1} = 0$ e daí r_j é raiz de $2X^{m-1} + (1 + 2\alpha_1)X^{m-2} + \dots + (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-3} + 2\alpha_{m-2})X + \alpha_{m-1} = 0$ e como $\frac{1}{2}$ também é raiz, ele possui ao menos $n-1$ raízes distintas logo $n \leq m$. CQD.

De acordo com c) da Proposição 5 e [Cap.1, Cor. do Teor.8] para $f(X) = p(X)$ se $r_k = 1$ para algum k ou $f(X) = (X-1)p(X)$ se $r_j \neq 1$ para todo j , temos:

Proposição 7 (Decomposição de Peirce) *Se A é comutativa, então*

$$A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}}(e) \oplus A_{r_1} \oplus \dots \oplus A_{r_{n-2}}(e).$$

Voltamos a utilizar agora a função $[n, j; r]$ introduzida no Cap.4. As demonstrações dos Lemas 1, 2 e 3 a seguir estão no apêndice B.

Lema 1 *Sejam $r \in F$, $\gamma_0 = 1$ e $n \geq 2$. São válidas as seguintes igualdades:*

$$\text{a) } 2r^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) r^{n-2-j} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (1 + [n-i, 1; r]);$$

b) *Em $F[X]$ temos,*

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=0}^{n-2} r^i X^{n-2-i} + \sum_{j=0}^{n-3} \left(\left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{n-3-j} r^i X^{n-3-j-i} \right) \right) = \\ \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r]) \right) X^{n-2-j}; \end{aligned}$$

$$\text{c) } \textit{Se } r \textit{ é uma raiz de } p = 2X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) X^{n-2-j} \in F[X] \textit{ então,}$$

$$p = (X-r) \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r]) \right) X^{n-2-j}.$$

Lema 2 Se $r, s \in F$ e $n \geq 2$, então em $F[X]$ temos,

$$\sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j \left(\sum_{i=0}^{n-j-2} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) X^{n-j-i-2} \right) = \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i ([j-i+1, 1; r] + [j-i+1, 1; s]) \right) X^{n-2-j}.$$

Lema 3 Sejam $n \geq 2$ e $p \in F$. Então,

$$[n, 1; p] = 2p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p \quad e \quad [n, 1, \frac{1}{2}] = 1.$$

Proposição 8 Se A é comutativa, $n \geq 3$, $0 \leq j \leq n-2$, $a \in A_r(e)$ e $b \in A_s(e)$, onde $r, s \in \{\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}\}$, então

$$n(n-1) \left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (e^{(n-2)}, a, b) = \sum_{i=0}^{n-2-j} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) R_e^{n-j-i-2}(ab).$$

Demonstração Para $j = n-2$, pela Proposição 5 e $(\omega^{(n-2)}, \text{id}) (e^{(n-3)}, a, b) = 0$ temos,

$$\begin{aligned} n(n-1) \left(\omega^{(n-2)}, \text{id}^{(2)} \right) (e^{(n-2)}, a, b) &= (n-1) \left(\omega^{(n-2)}, \text{id} \right) (e^{(n-2)}, a) b + \\ &= (n-1) \left(\omega^{(n-2)}, \text{id} \right) (e^{(n-2)}, b) a + (n-1)(n-2) \left(\omega^{(n-2)}, \text{id} \right) (e^{(n-3)}, a, b) e = 2ab. \end{aligned}$$

Faremos a demonstração por indução sobre n . Se $n = 3$, então $0 \leq j \leq 1$. Para $j = 1$, já foi provado acima. Para $j = 0$, por [Cap.4, Prop.1], temos

$$\begin{aligned} 6 \left(\text{id}_{\ker \omega}^{(3)} \right) (e, a, b) &= 2 \left(\left(\text{id}_{\ker \omega}^{(2)} \right) (e, a) b + \left(\text{id}_{\ker \omega}^{(2)} \right) (a, b) e + \left(\text{id}_{\ker \omega}^{(2)} \right) (b, e) a \right) = \\ &= 2((ea)b + (ab)e + (eb)a) = 2((r+s)ab + R_e(ab)) = (2R_e + ([2, 1; r] + [2, 1; s]) \text{id}_{\ker \omega})(ab). \end{aligned}$$

Admitamos a igualdade verdadeira para $n \geq 3$. Seja $0 \leq j \leq n-2$, pela Proposição 5, Lema 3 e hipótese de indução temos,

$$\begin{aligned} (n+1)n \left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n+1-j)} \right) (e^{(n-1)}, a, b) &= \\ &= n \left(\left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (e^{(n-1)}, a) b + \left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (e^{(n-2)}, a, b) e + \right. \\ &\quad \left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (e^{(n-3)}, a, b, e) e + \dots + \left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (a, b, e^{(n-2)}) e + \\ &\quad \left. + \left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (b, e^{(n-1)}) a \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \left(\left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (e^{(n-1)}, a) b + \left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (e^{(n-1)}, b) a + \right. \\
&\quad \left. + (n-1) \left(\omega^{(j)}, \text{id}_{\ker \omega}^{(n-j)} \right) (e^{(n-2)}, a, b) e \right) = \\
&= (2R_e^{n-j-1} + R_e^{n-j-2} + \dots + R_e) (a) b + (2R_e^{n-j-1} + R_e^{n-j-2} + \dots + R_e) (b) a + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2-j} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) R_e^{n-j-i-2}(ab) e = \\
&= ([n-j, 1; r] + [n-j, 1; s]) ab + \sum_{i=0}^{n-2-j} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) R_e^{n-j-i-1}(ab) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1-j} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) R_e^{n-j-i-1}(ab). \quad \text{CQD}
\end{aligned}$$

Teorema 2 *Com as hipóteses anteriores, sendo A comutativa, então:*

- a) $A_{\frac{1}{2}}^2(e) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n-2} A_{r_i}(e);$
- b) $A_{\frac{1}{2}}(e) A_{r_i}(e) \subseteq A_{\frac{1}{2}}(e) \oplus \left(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^{n-2} A_{r_j}(e) \right) \quad (1 \leq j \leq n-2);$
- c) $A_{r_i}(e) A_{r_j}(e) \subseteq \bigoplus_{k=1, k \neq i, k \neq j}^{n-2} A_{r_k}(e) \quad (1 \leq i \leq j \leq n-2).$

Demonstração Sejam $r, s \in \{\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}\}$, $a \in A_r(e)$ e $b \in A_s(e)$. Pelo Teorema 1,

$$\left((\text{id}_A^{(n)}) + \gamma_1 \left(\omega, \text{id}_A^{(n-1)} \right) + \dots + \gamma_{n-1} \left(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A \right) \right) (e^{(n-2)}, a, b) = 0.$$

Pela Proposição 8 e como $\left(\omega^{(n-1)}, \text{id}_A \right) (e^{(n-2)}, a, b) = 0$, então

$$\sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j \left(\sum_{i=0}^{n-j-2} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) R_e^{n-j-i-2}(ab) \right) = 0.$$

Pela Proposição 7 podemos escrever $ab = a_{\frac{1}{2}} + a_{r_1} + \dots + a_{r_{n-2}}$ e como a soma é direta,

$$\left(\sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j \left(\sum_{i=0}^{n-j-2} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) t^{n-j-i-2} \right) \right) a_t = 0 \text{ onde } t \in \{\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}\}.$$

Chamemos o coeficiente acima de β_t . Pelo Lema 2 temos

$$\beta_t = \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i ([j-i+1, 1; r] + [j-i+1, 1; s]) \right) t^{n-2-j}.$$

Sabemos que $r_1, \dots, r_{n-2}$ são as raízes de $\sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i \right) X^{n-2-j} = 0$ e como $\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}$ são dois a dois distintos, então $\sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2-j} \neq 0$.

Para $r = s = \frac{1}{2}$, pelo Lema 3 e [Cap.4, Prop.1] temos $\beta_t = 2 \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i \right) t^{n-2-j}$.

Para $t = \frac{1}{2}$, temos $\beta_{\frac{1}{2}} \neq 0$, logo $a_{\frac{1}{2}} = 0$. Para $t \in \{r_1, \dots, r_{n-2}\}$, temos que $\beta_t = 0$.

Assim obtemos a).

Para $r = \frac{1}{2}$ e $s = r_i$ ($i = 1, \dots, n-2$), pelo Lema 3 e [Cap.4, Prop.1] temos

$$\beta_t = \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r_i]) \right) t^{n-2-j}.$$

Como $\frac{1}{2}, r_1, \dots, r_{n-2}$ são dois a dois distintos e além disso são as raízes de

$$p(X) = 2X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) X^{n-2-j}$$

temos, pelo Lema 1 c), que $\beta_{\frac{1}{2}} = 0$, $\beta_{r_i} \neq 0$ e $\beta_t = 0$ para $t \in \{r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_{n-2}\}$

Portanto $a_{r_i} = 0$ e assim obtemos b).

Para $r = r_i$ e $s = r_j$ com $i, j \in \{1, \dots, n-2\}$, temos

$$\begin{aligned} \beta_t &= \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i ([j-i+1, 1; r_i] + [j-i+1, 1; r_j]) \right) t^{n-2-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r_i]) \right) t^{n-2-j} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r_j]) \right) t^{n-2-j} - \\ &\quad - 2 \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i \right) t^{n-2-j}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 1 c) temos

$$\beta_{\frac{1}{2}} = -2 \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2-j} \neq 0 \text{ e } \beta_{r_i} = 2^{\delta_{ij}} \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r_i]) \right) r_i^{n-2-j} \neq 0.$$

Logo $a_{\frac{1}{2}} = 0$ e $a_{r_i} = 0$. Analogamente $\beta_{r_j} \neq 0$, logo $a_{r_j} = 0$. Além disso $\beta_t = 0$ para $t \in (\{r_1, \dots, r_{n-2}\} \setminus \{r_i, r_j\})$. Assim obtemos c). CQD

O Teorema 2 acima generaliza fórmulas análogas para train álgebras comutativas de posto 3, onde $r_1 \neq \frac{1}{2}$, que aparecem em [7].

No próximo capítulo, melhoraremos o Teorema 2 acima para train álgebras de posto 4.

Capítulo 6

Alguns resultados sobre train álgebras de posto 4

Este capítulo especifica mais os resultados do capítulo anterior para train álgebras de posto 4. Aqui iremos assumir $\text{car} F \neq 2$. Como no capítulo 5, obtemos uma decomposição de Peirce da álgebra se $1, r$ e s são as t-raízes e $\frac{1}{2}$, r e s forem distintos (Proposição 2) e uma tábua de multiplicação dos subespaços que aparecem nesta decomposição (Teorema 1). Se $\text{car} F = 0$ o Teorema 1 é [Cap.5, Teor.2] para train álgebras de posto 4. Mas, como $\text{car} F \neq 2$, apresentamos aqui uma nova demonstração especificamente para este caso. Além disso provamos outras relações de multiplicação entre os subespaços que aparecem na decomposição da álgebra (Teorema 2). Os Teoremas 3 e 4 descrevem as álgebras que têm $A_{\frac{1}{2}}(e) = 0$, sendo este último uma descrição destas álgebras em termos de espaços vetoriais e funções bilineares simétricas. Uma classe de álgebras em que $A_{\frac{1}{2}}(e) \neq 0$ foi também descrita em termos de espaços vetoriais e operadores nilpotentes de índice de nilpôtencia 3 (Teorema 5).

6.1 Construção de train álgebras de posto 4

Neste parágrafo apresentaremos algumas condições para que a álgebra básica $[B, \tau]$, ver [Cap.2, § 2.1], seja uma train álgebra à direita de posto 4. Devemos supor que F possui pelo menos 4 elementos para poder identificar expressões polinomiais, como no final da demonstração da Proposição 1.

Proposição 1 *Sejam B uma F -álgebra e $\tau: B \rightarrow B$ uma aplicação linear. Então $[B, \tau]$ verifica a t-equação à direita*

$$x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x = 0.$$

se e somente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

- a) $a^4 = 0, a \in B$;
- b) $2(\tau(a)a)a + \tau(a^2)a + \tau(a^3) + \gamma_1 a^3 = 0, a \in B$;
- c) $(\tau^2 + \gamma_1 \tau + \gamma_2 \text{id}_B)(a^2) + (2\tau + (1 + 2\gamma_1)\text{id}_B)(\tau(a)a) + 2\tau^2(a)a = 0, a \in B$;
- d) $2\tau^3 + (1 + 2\gamma_1)\tau^2 + (1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)\tau + \gamma_3 \text{id}_B = 0$.

Demonstração Dado $(\alpha, a) \in [B, \tau] = F \oplus B$, de (1) do [Cap.2, § 2.1], temos sucessivamente:

$$(\alpha, a)^2 = (\alpha^2, a^2 + 2\alpha\tau(a)),$$

$$(\alpha, a)^3 = (\alpha, a)^2(\alpha, a) = (\alpha^3, a^3 + \alpha(2\tau(a)a + \tau(a^2)) + \alpha^2(\tau(a) + 2\tau^2(a))),$$

$$\begin{aligned} (\alpha, a)^4 &= (\alpha^4, a^4 + \alpha(2(\tau(a)a)a + \tau(a^2)a + \tau(a^3)) + \\ &+ \alpha^2(\tau(a)a + 2\tau^2(a)a + 2\tau(\tau(a)a) + \tau^2(a^2)) + \alpha^3(\tau(a) + \tau^2(a) + 2\tau^3(a))). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x &= (\alpha, a)^4 + \gamma_1 \alpha(\alpha, a)^3 + \gamma_2 \alpha^2(\alpha, a)^2 + \gamma_3 \alpha^3(\alpha, a) = \\ &= ((1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\alpha^4, a^4 + \alpha(2(\tau(a)a)a + \tau(a^2)a + \tau(a^3)) + \\ &+ \alpha^2((\tau^2 + \gamma_1 \tau + \gamma_2 \text{id}_B)(a^2) + (2\tau + (1 + 2\gamma_1)\text{id}_B)(\tau(a)a) + 2\tau^2(a)a) + \\ &+ \alpha^3(2\tau^3 + (1 + 2\gamma_1)\tau^2 + (1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)\tau + \gamma_3 \text{id}_B)(a)). \end{aligned}$$

Desta identidade, podemos concluir que a), b), c) e d) são válidas. A recíproca é imediata. CQD

Corolário *Sejam B uma álgebra nil à direita de nil-índice 4 e $\tau: B \rightarrow B$ uma aplicação linear. Então $[B, \tau]$ é uma train álgebra à direita de posto 4, com t-equação à direita*

$$x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x = 0$$

se e somente se, a aplicação linear τ satisfaz b), c) e d) da Proposição 1.

Demonstração Se $[B, \tau]$ é uma train álgebra à direita de posto 4, com t-equação à direita $x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x = 0$, as condições de b), c) e d) estão verificadas, pela Prop.1. Suponhamos agora que as condições de b), c) e d) estão verificadas. Pela Proposição 1, como B é nil à direita de nil-índice 4, a t-equação à direita $x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x = 0$ é verdadeira para todo $x \in B$, logo $[B, \tau]$ é uma train álgebra à direita de posto $s \leq 4$. Como $\ker \omega = B$, então $0 = (0, a)^s = (0, a^s)$, logo $a^s = 0$ para todo $a \in B$. Como B é nil à direita de nil-índice 4, então $s \geq 4$, portanto $s = 4$. CQD

Usaremos esta proposição para construir alguns exemplos de train álgebras de posto 4.

Exemplo 1 Sejam U, V espaços vetoriais não nulos, $\phi: U \times U \rightarrow V$, $\psi: V \times V \rightarrow U$ aplicações bilineares e $A = U \oplus V$. Em A definimos a multiplicação (não comutativa, em geral)

$$(u, v)(u', v') = (\psi(v, v'), \phi(u, u')); \quad u, u' \in U; \quad v, v' \in V.$$

Suponhamos que $\psi(v, v) \in \ker \phi_u$ e $\phi(u, u) \in \ker \psi_v$ para todo $u \in U$ e $v \in V$, onde $\phi_u: U \rightarrow V$ e $\psi_v: V \rightarrow U$ são dadas por $\phi_u(u') = \phi(u', u)$ e $\psi_v(v') = \psi(v', v)$.

Sejam $r, s \in F$, $\gamma_1 = -(1 + r + s)$, $\gamma_2 = r + s + rs$ e $\gamma_3 = -rs$, assim r e s são as raízes de $X^2 + (1 + \gamma_1)X + 1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0$ e $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Suponhamos que $2r \neq 1$, $2s \neq 1$ e $r \neq s$. Mostremos que $[A, \tau]$ é uma train álgebra à direita de posto 4 com t-equação à direita $x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x = 0$, onde $\tau: A \rightarrow A$ é dada por $\tau(u, v) = (ru, sv)$. Dado $b = (u, v) \in A$, então

$$b^2 = (\psi(v, v), \phi(u, u)), \quad b^3 = (\psi(\phi(u, u), v), \phi(\psi(v, v), u)) = (0, 0).$$

Assim A é nil à direita de nil-índice 2 se $\phi(u, u) = 0$ e $\psi(v, v) = 0$ para todo $u \in U$ e $v \in V$, nil à direita de nil-índice 3 se $\phi(u, u) \neq 0$ ou $\psi(v, v) \neq 0$ para algum $u \in U$ e $v \in V$. Se $\text{car} F \neq 2$, equivalentemente, A é nil à direita de nil-índice 2 se ϕ e ψ forem alternadas, nil à direita de nil-índice 3 se ϕ ou ψ não for alternada.

Mostremos que as condições da Proposição 1 estão verificadas.

A condição a) é clara.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 2((\tau(u, v))(u, v))(u, v) + \tau((u, v)^2)(u, v) + \tau((u, v)^3) + \gamma_1(u, v)^3 = \\ & = 2(r\psi(\phi(u, u), v), s\phi(\psi(v, v), u)) + (s\psi(\phi(u, u), v), r\phi(\psi(v, v), u)) = (0, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & (\tau^2 + \gamma_1\tau + \gamma_2\text{id}_A)((u, v)^2) + (2\tau + (1 + 2\gamma_1)\text{id}_A)((\tau(u, v))(u, v)) + 2(\tau^2(u, v))(u, v) \\ & = (r^2\psi(v, v), s^2\phi(u, u)) + \gamma_1(r\psi(v, v), s\phi(u, u)) + \gamma_2(\psi(v, v), \phi(u, u)) + \\ & + 2(rs\psi(v, v), rs\phi(u, u)) + (1 + 2\gamma_1)(s\psi(v, v), r\phi(u, u)) + 2(s^2\psi(v, v), r^2\phi(u, u)) = \\ & = ((r^2 + \gamma_1r + \gamma_2 + 2rs + s + 2\gamma_1s + 2s^2)\psi(v, v), \\ & (s^2 + \gamma_1s + \gamma_2 + 2rs + r + 2\gamma_1r + 2r^2)\phi(u, u)) = \\ & = ((r^2 - r - r^2 - sr + r + s + rs + 2rs + s - 2s - 2rs - 2s^2 + 2s^2)\psi(v, v), \\ & (s^2 - s - rs - s^2 + r + s + rs + 2rs + r - 2r - 2r^2 - 2sr + 2r^2)\phi(u, u)) = (0, 0). \end{aligned}$$

d) Como $\tau(u, 0) = r(u, 0)$, $\tau(0, v) = s(0, v)$, r e s são as raízes de

$$\begin{aligned} X^2 + (1 + \gamma_1)X + 1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad \text{e} \quad 2\tau^3 + (1 + 2\gamma_1)\tau^2 + (1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)\tau + \gamma_3\text{id}_A = \\ (2\tau - \text{id}_A)(\tau^2 + (1 + \gamma_1)\tau + (1 + \gamma_1 + \gamma_2)\text{id}_A) = 0 \end{aligned}$$

então d) está verificada. Logo $[A, \tau]$ verifica a t-equação à direita $x^4 + \gamma_1\omega(x)x^3 + \gamma_2\omega(x)^2x^2 + \gamma_3\omega(x)^3x = 0$. Mostremos agora que $[A, \tau]$ não verifica nenhuma t-equação à direita do tipo $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$, $\gamma \in F$. Suponhamos o contrário, então por [Cap.1, Prop.2], $2\tau^2 - (1 + 2\gamma)\tau + \gamma\text{id}_A = 0$, logo $2(r^2u, s^2v) - (1 + 2\gamma)(ru, sv) + \gamma(u, v) = 0$, para todo $(u, v) \in A$, portanto $(2r^2 - (1 + 2\gamma)r + \gamma)u = 0$ e $(2s^2 - (1 + 2\gamma)s + \gamma)v = 0$. Como $U \neq 0$ e $V \neq 0$, então $2r^2 - (1 + 2\gamma)r + \gamma = 0$ e $2s^2 - (1 + 2\gamma)s + \gamma = 0$. Como $2r \neq 1$ e $2s \neq 1$,

então $0 = 2r^2 - (1 + 2\gamma)r + \gamma = (2r - 1)(r - \gamma)$, $0 = 2s^2 - (1 + 2\gamma)s + \gamma = (2s - 1)(s - \gamma)$, logo $r = \gamma = s$, que é uma contradição.

Destacamos neste exemplo que apesar de A ser nil à direita de nil-índice 2 ou 3, obtemos uma train álgebra de posto 4. Este exemplo será melhor estudado no § 6.3.

Exemplo 2 Sejam $U \neq 0$ um espaço vetorial sobre um corpo F de característica diferente de 2 e 3 e $\delta: U \rightarrow U$ um operador linear tal que $\delta^2 \neq 0$ e $\delta^3 = 0$. No espaço vetorial $U(\delta) = U \oplus \langle \delta \rangle \oplus \delta(U) \oplus \langle \delta^2 \rangle \oplus \delta^2(U)$ definimos a seguinte multiplicação (que obviamente é comutativa):

$$\begin{aligned} & \left(u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w) \right) \left(u', \alpha'\delta, \delta(v'), \beta'\delta^2, \delta^2(w') \right) = \\ & = \left(0, 0, \delta(\alpha'u + \alpha u'), \alpha\alpha'\delta^2, \delta^2(\beta'u + \beta u' + \alpha'v + \alpha v') \right). \end{aligned}$$

Dados $r, s \in F$, consideremos $\gamma_1 = -(1 + r + s)$, $\gamma_2 = r + s + rs$, $\gamma_3 = -rs$ que satisfazem $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Seja $\tau: U(\delta) \rightarrow U(\delta)$ dada por:

$$\tau \left(u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w) \right) = \left(\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}\alpha\delta, r\delta(v), r\beta\delta^2, s\delta^2(w) \right).$$

Mostremos que $[U(\delta), \tau]$ é uma train álgebra de posto 4 com t-equação à direita $x^4 + \gamma_1\omega(x)x^3 + \gamma_2\omega(x)^2x^2 + \gamma_3\omega(x)^3x = 0$. Para isso, pelo Corolário da Proposição 1, basta mostrar que $U(\delta)$ tem nil-índice 4 e que as condições de b) à d) da Proposição 1 estão verificadas.

a) Dado $a = (u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) \in U(\delta)$, então

$$a^2 = \left(0, 0, 2\alpha\delta(u), \alpha^2\delta^2, 2\delta^2(\beta u + \alpha v) \right), \quad a^3 = \left(0, 0, 0, 0, 3\alpha^2\delta^2(u) \right), \quad a^4 = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Como $U \neq 0$ e $\delta^2 \neq 0$, então $U(\delta)$ é nil de nil-índice 4.

b) $\tau(a)a = \left(0, 0, \alpha\delta(u), \frac{1}{2}\alpha^2\delta^2, \left(\frac{1}{2} + r\right)\delta^2(\beta u + \alpha v) \right)$, $(\tau(a)a)a = \left(0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}\alpha^2\delta^2(u) \right)$,

$$\begin{aligned} \tau(a^2) &= \left(0, 0, 2\alpha r\delta(u), r\alpha^2\delta^2, 2s\delta^2(\beta u + \alpha v) \right), \\ \tau(a^2)a &= \left(0, 0, 0, 0, 3\alpha^2 r\delta^2(u) \right), \quad \tau(a^3) = \left(0, 0, 0, 0, 3\alpha^2 s\delta^2(u) \right), \end{aligned}$$

$$2(\tau(a)a)a + \tau(a^2)a + \tau(a^3) + \gamma_1 a^3 = (0, 0, 0, 0, 3\alpha^2(1 + r + s + \gamma_1)\delta^2(u)) = 0.$$

$$c) \tau^2(a)a = (0, 0, \frac{1}{2}\alpha\delta(u), \frac{1}{4}\alpha^2\delta^2, (\frac{1}{4} + r^2)\delta^2(\beta u + \alpha v))$$

$$\begin{aligned} & (\tau^2 + \gamma_1\tau + \gamma_2\text{id}_{U(\delta)})(a^2) + (2\tau + (1 + 2\gamma_1)\text{id}_{U(\delta)})(\tau(a)a) + 2\tau^2(a)a = \\ & = (0, 0, 2\alpha(r^2 + \gamma_1r + \gamma_2 + r + \gamma_1 + 1)\delta(u), (r^2 + \gamma_1r + \gamma_2 + r + \gamma_1 + 1)\alpha^2\delta^2, \\ & (2s^2 + 2\gamma_1s + 2\gamma_2 + (2s + 1 + 2\gamma_1)(\frac{1}{2} + r) + \frac{1}{2} + 2r^2)\delta^2(\beta u + \alpha v)). \end{aligned}$$

$$\text{Mas } r^2 + \gamma_1r + \gamma_2 + r + 1 + \gamma_1 = r^2 + (1 + \gamma_1)r + 1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0;$$

$$r^2 + \gamma_1r + \gamma_2 + r + \gamma_1 + 1 = r^2 + (1 + \gamma_1)r + 1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0;$$

$$2s^2 + 2\gamma_1s + 2\gamma_2 + (2s + 1 + 2\gamma_1)(\frac{1}{2} + r) + \frac{1}{2} + 2r^2 =$$

$$= 2s^2 - 2(1 + r + s)s + 2(r + s + rs) - (1 + 2r)(\frac{1}{2} + r) + \frac{1}{2} + 2r^2 = 0.$$

$$d) \text{ Como } \tau(u, \alpha\delta, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}(u, \alpha\delta, 0, 0, 0); \tau(0, 0, \delta(v), \beta\delta^2, 0) = r(0, 0, \delta(v), \beta\delta^2, 0);$$

$$\tau(0, 0, 0, 0, \delta^2(w)) = s(0, 0, 0, 0, \delta^2(w)) \text{ e } \tau^3 + (1 + 2\gamma_1)\tau^2 + (1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)\tau + \gamma_3\text{id}_{U(\delta)} =$$

$$(2\tau - \text{id}_{U(\delta)}) (\tau - r\text{id}_{U(\delta)}) (\tau - s\text{id}_{U(\delta)}), \text{ então d) está verificada. Logo } [U(\delta), \tau] \text{ é uma}$$

$$\text{train álgebra de posto 4 com t-equação } x^4 + \gamma_1\omega(x)x^3 + \gamma_2\omega(x)^2x^2 + \gamma_3\omega(x)^3x = 0.$$

Este exemplo é inspirado na descrição das t-álgebras de posto 3, tipo $(n, 1)$ cujo ideal de Etherington tem dimensão ≤ 2 , conforme [8, Prop.1].

6.2 Train álgebras comutativas de posto 4 com idempotente de peso 1

Em [42], A.Micali e M.Ouattara mostraram que toda álgebra de Bernstein nuclear é uma train álgebra verificando a t-equação $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^2 = 0$, ver [Cap.1, § 1.3]. Isto por si mostra que a classe das álgebras báricas comutativas satisfazendo esta t-equação é muito grande e sua classificação muito difícil. Vamos obter aqui alguns resultados sobre train álgebras de posto 4 tais que $\frac{1}{2}, r, s$ são distintos dois a dois, onde $1, r, s$ são as t-raízes (no caso acima as t-raízes são $1, 0$ e $\frac{1}{2}$). Neste parágrafo F será um corpo com $\text{car}F \neq 2$.

Comecemos sem a hipótese de (A, ω) ser comutativa. Sejam (A, ω) um álgebra básica e $e \in A$ um idempotente central de peso 1. Suponhamos que (A, ω) verifica a seguinte equação à direita (portanto o posto de A é ≤ 4)

$$x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x = 0. \quad (1)$$

Para todo $x = \alpha e + a, y = \beta e + b \in A = Fe \oplus \ker \omega$,

$$xy = \alpha\beta e + ab + e(\alpha b + \beta a) = \alpha\beta e + ab + R_e(\alpha b + \beta a).$$

Pela Proposição 1, considerando $\tau = R_e: \ker \omega \rightarrow \ker \omega$, sabemos que, $\ker \omega$ é nil à direita de nil-índice menor ou igual a 4. Além disso, para todo $a \in \ker \omega$ temos:

$$2(R_e(a)a)a + R_e(a^2)a + R_e(a^3) + \gamma_1 a^3 = 0, \quad (2)$$

$$(R_e^2 + \gamma_1 R_e + \gamma_2 \text{id}_{\ker \omega})(a^2) + (2R_e + (1 + 2\gamma_1)\text{id}_{\ker \omega})(R_e(a)a) + 2R_e^2(a)a = 0, \quad (3)$$

$$2R_e^3 + (1 + 2\gamma_1)R_e^2 + (1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)R_e + \gamma_3 \text{id}_{\ker \omega} = 0. \quad (4)$$

De (4) temos

$$\begin{aligned} & 2R_e^3 + (1 + 2\gamma_1)R_e^2 + (1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)R_e + \gamma_3 \text{id}_{\ker \omega} = \\ & (2R_e - \text{id}_{\ker \omega})(R_e^2 + (1 + \gamma_1)R_e + (1 + \gamma_1 + \gamma_2)\text{id}_{\ker \omega}). \end{aligned}$$

Suporemos que o corpo F contém as raízes r e s de $X^2 + (1 + \gamma_1)X + (1 + \gamma_1 + \gamma_2) = 0$, assim,

$$\gamma_1 = -(1 + r + s), \quad \gamma_2 = r + s + rs, \quad \gamma_3 = -rs. \quad (5)$$

Admitamos também que $\frac{1}{2}$, r e s sejam distintos dois a dois. Com isso, indicando $A_k(e) = \ker (R_e - k \text{id}_{\ker \omega})$, $k \in \{\frac{1}{2}, r, s\}$ e $p(X) = 2X^3 + (1 + 2\gamma_1)X^2 + (1 + \gamma_1 + 2\gamma_2)X + \gamma_3$, de (4) e [Cap.1, Cor. do Teor.8] para $f(X) = p(X)$ se $r = 1$ ou $s = 1$, ou $f(X) = (X - 1)p(X)$ se $r \neq 1$ e $s \neq 1$, temos a seguinte proposição:

Proposição 2 (Decomposição de Peirce) *Se A é comutativa, então*

$$A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}}(e) \oplus A_r(e) \oplus A_s(e).$$

Teorema 1 Se A é comutativa, então as seguintes inclusões são válidas:

- a) $A_{\frac{1}{2}}^2(e) \subseteq A_r(e) \oplus A_s(e);$ d) $A_r(e)A_s(e) = 0;$
b) $A_{\frac{1}{2}}(e)A_r(e) \subseteq A_{\frac{1}{2}}(e) \oplus A_s(e);$ e) $A_r^2(e) \subseteq A_s(e);$
c) $A_{\frac{1}{2}}(e)A_s(e) \subseteq A_{\frac{1}{2}}(e) \oplus A_r(e);$ f) $A_s^2(e) \subseteq A_r(e).$

Demonstração Trocando a por $a + b$ em (3), temos

$$2(R_e^2 + \gamma_1 R_e + \gamma_2 \text{id}_{\ker \omega})(ab) + (2R_e + (1 + 2\gamma_1)\text{id}_{\ker \omega})(R_e(a)b + R_e(b)a) + 2R_e^2(a)b + 2R_e^2(b)a = 0. \quad (6)$$

Dados $a \in A_i(e)$ e $b \in A_j(e)$ onde $i, j \in \{\frac{1}{2}, r, s\}$, usando (6) temos

$$2(R_e^2 + \gamma_1 R_e + \gamma_2 \text{id}_{\ker \omega})(ab) + (2R_e + (1 + 2\gamma_1)\text{id}_{\ker \omega})((i + j)ab) + 2(i^2 + j^2)ab = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & (R_e^2 + (1 + \gamma_1)R_e + (1 + \gamma_1 + \gamma_2)\text{id}_{\ker \omega})(ab) = \\ & = ((1 - i - j)R_e + (1 + \gamma_1 - i^2 - j^2 - (i + j)(\frac{1}{2} + \gamma_1)))(ab). \end{aligned} \quad (7)$$

Escrevendo $ab = u + v + w$, onde $u \in A_{\frac{1}{2}}(e)$, $v \in A_r(e)$ e $w \in A_s(e)$ e substituindo em (7),

$$\text{obtemos:} \quad \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2 + i^2 + j^2 + (i + j)(1 + \gamma_1)\right)u = 0;$$

$$\left((1 - i - j)r + 1 + \gamma_1 - i^2 - j^2 - (i + j)(\frac{1}{2} + \gamma_1)\right)v = 0;$$

$$\left((1 - i - j)s + 1 + \gamma_1 - i^2 - j^2 - (i + j)(\frac{1}{2} + \gamma_1)\right)w = 0.$$

Como $X^2 + (1 + \gamma_1)X + 1 + \gamma_1 + \gamma_2 = (X - r)(X - s)$ e substituindo (5) temos:

$$\left((i - r)(i - s) + (j - r)(j - s) - \left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right)\right)u = 0; \quad (8)$$

$$\left((i - r)(i - s) + (j - r)(j - s) + \left(r - \frac{1}{2}\right)(i + j - 2s)\right)v = 0; \quad (9)$$

$$\left((i - r)(i - s) + (j - r)(j - s) + \left(s - \frac{1}{2}\right)(i + j - 2r)\right)w = 0. \quad (10)$$

Se $i = j = \frac{1}{2}$, de (8) o coeficiente de u é $\left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right) \neq 0$, logo $u = 0$; de (9) o coeficiente de v é

$$2\left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right) + \left(r - \frac{1}{2}\right)(1 - 2s) = \left(\frac{1}{2} - r\right)(1 - 2s) + \left(r - \frac{1}{2}\right)(1 - 2s) = 0;$$

de (10) o coeficiente de w é

$$2\left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right) + \left(s - \frac{1}{2}\right)(1 - 2r) = (1 - 2r)\left(\frac{1}{2} - s\right) + \left(s - \frac{1}{2}\right)(1 - 2r) = 0.$$

Isso prova a).

Se $i = \frac{1}{2}$ e $j = r$, de (8) o coeficiente de u é zero; de (9) o coeficiente de v é

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right) + \left(r - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + r - 2s\right) &= \left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s - \frac{1}{2} - r + 2s\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - r\right)(s - r) \neq 0, \end{aligned}$$

logo $v = 0$; de (10) o coeficiente de w é

$$\left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right) + \left(s - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + r - 2r\right) = \left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right) + \left(s - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - r\right) = 0.$$

Isso prova b).

Se $i = \frac{1}{2}$ e $j = s$, analogamente, como no caso anterior, obtemos c).

Se $i = r$ e $j = s$, de (8) o coeficiente de u é $-\left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right) \neq 0$, logo $u = 0$; de (9) o coeficiente de v é $\left(r - \frac{1}{2}\right)(r + s - 2s) = \left(r - \frac{1}{2}\right)(r - s) \neq 0$, logo $v = 0$; de (10) o coeficiente de w é $\left(s - \frac{1}{2}\right)(r + s - 2r) = \left(s - \frac{1}{2}\right)(s - r) \neq 0$, logo $w = 0$, isso prova d).

Se $i = j = r$, de (8) o coeficiente de u é $-\left(\frac{1}{2} - r\right)\left(\frac{1}{2} - s\right) \neq 0$, logo $u = 0$; de (9) o coeficiente de v é $\left(r - \frac{1}{2}\right)(2r - 2s) = 2\left(r - \frac{1}{2}\right)(r - s) \neq 0$, logo $v = 0$; de (10) o coeficiente de w é zero, isso prova e).

Se $i = j = s$, analogamente ao caso anterior, obtemos f). CQD

Corolário 1 *Com as hipóteses anteriores, se A é comutativa, então $A_r^3(e) = A_s^3(e) = 0$.*

Demonstração É consequência imediata de d), e) e f) do Teorema 1. CQD

Corolário 2 *Com as hipóteses anteriores, se A é comutativa, então (A, ω) é uma train álgebra de posto 4 se e somente se $A_r(e) \neq 0$ e $A_s(e) \neq 0$.*

Demonstração A prova de que A tem posto 4 quando $A_r(e) \neq 0$ e $A_s(e) \neq 0$ é a mesma que aparece em [Cap.5, Prop.6]. Suponhamos que (A, ω) é train álgebra de posto 4. Se admitimos por absurdo que $A_s(e) = 0$, então pela Prop.2, $\ker \omega = A_{\frac{1}{2}}(e) \oplus A_r(e)$. Dado $a = u + v \in \ker \omega$, $u \in A_{\frac{1}{2}}(e)$ e $v \in A_r(e)$, do Teorema 1 temos, $u^2 \in A_r(e)$, $uv \in A_{\frac{1}{2}}(e)$ e $v^2 = 0$. Assim, temos:

$$2R_e(a)a + R_e(a^2) = 2\left(\frac{1}{2}u + ru\right)(u + v) + R_e(u^2 + 2uv) = u^2 + uv + 2ruv + ru^2 + uv = (1 + r)(u^2 + 2uv) = (1 + r)a^2;$$

$$\left(2R_e^2 - (1 + 2r)R_e + r \operatorname{id}_{\ker \omega}\right)(a) = \frac{1}{2}u + 2r^2v - \frac{1}{2}u - rv - ru - 2r^2v + ru + rv = 0.$$

Logo por [Cap.1, Prop.2], (A, ω) verifica a t-equação $x^3 - (1 + r)\omega(x)x^2 + r\omega(x)^2x = 0$, que é uma contradição. CQD

Teorema 2 *Com as hipóteses anteriores, se A é comutativa, então*

- a) $A_r^2(e)A_s(e) = 0$;
- b) $A_s^2(e)A_r(e) = 0$;
- c) $(A_r(e) + A_s(e))^3 = 0$.

Demonstração Dados $a, b \in \ker \omega$ e $\lambda \in F$, então

$$(a + \lambda b)^3 = a^3 + \lambda(2(ab)a + a^2b) + \lambda^2(2(ab)b + b^2a) + \lambda^3b^3.$$

Em (2) trocando a por $a + \lambda b$, usando a igualdade acima, colocando λ e λ^2 em evidência e comparando os termos que multiplicam λ e λ^2 obtemos

$$\begin{aligned} &2(R_e(a)b)a + 2(R_e(b)a)a + 2(R_e(a)a)b + 2R_e(ab)a + \\ &+ R_e(a^2)b + 2R_e((ab)a) + R_e(a^2b) + 2\gamma_1(ab)a + \gamma_1a^2b = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Em (11) trocando a por $a + c$, onde $a, b, c \in \ker \omega$ temos

$$\begin{aligned} &[R_e(b)c + R_e(c)b + R_e(cb)]a + [R_e(a)c + R_e(c)a + R_e(ac)]b + \\ &+ [R_e(a)b + R_e(b)a + R_e(ab)]c + (R_e + \gamma_1 \operatorname{id}_{\ker \omega})((ab)c + (bc)a + (ca)b) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Se $a, b \in A_r(e)$ e $c \in A_s(e)$, então pelo Teorema 1,

$$ab \in A_s(e), \quad (ab)c \in A_r(e) \quad \text{e} \quad ac = 0 = bc.$$

Substituindo em (12) e usando (5) temos

$$\begin{aligned} 0 &= (rab + rba + sab)c + R_e((ab)c) + \gamma_1(ab)c = (2r + s + \gamma_1)(ab)c + r(ab)c = \\ &= (3r + s + \gamma_1)(ab)c = (3r + s - 1 - r - s)(ab)c = (2r - 1)(ab)c. \end{aligned}$$

Logo $(ab)c = 0$. Isso prova a). Analogamente para $a, b \in A_s(e)$ e $c \in A_r(e)$, obtemos b).

Finalmente, pelo Teorema 1 e pelos itens a) e b),

$$\begin{aligned} (A_r(e) + A_s(e))^3 &= (A_r(e) + A_s(e))^2 (A_r(e) + A_s(e)) = (A_r^2(e) + A_s^2(e)) (A_r(e) + A_s(e)) \\ &= A_r^3(e) + A_r^2(e)A_s(e) + A_s^2(e)A_r(e) + A_s^3(e) = 0. \end{aligned} \quad \text{CQD}$$

O próximo teorema mostra que grande parte da dificuldade no estudo de train álgebras comutativas de posto 4 (com $\frac{1}{2}, r$ e s distintos) reside no subespaço $A_{\frac{1}{2}}(e)$.

Teorema 3 *Com as hipóteses anteriores, se A é comutativa e $A_{\frac{1}{2}}(e) = 0$, as seguintes condições estão verificadas:*

- a) e é o único idempotente de peso 1 de A ;
- b) O ideal de Etherington J de A é igual a $\ker \omega$ ($= A_r(e) \oplus A_s(e)$);
- c) (A, ω) é uma train álgebra especial.

Demonstração a) Seja $e' = e + u + v \in A$ um idempotente de peso 1, onde $u \in A_r(e)$ e $v \in A_s(e)$. Como $e'^2 = e'$, então, $e + u + v = e + u^2 + v^2 + 2eu + 2ev + 2uv = e + u^2 + v^2 + 2ru + 2sv + 2uv$. Do Teorema 1, $uv = 0$, $u^2 \in A_s(e)$ e $v^2 \in A_r(e)$, assim $u = 2ru + v^2$, $v = 2sv + u^2$ logo,

$$(2r - 1)u + v^2 = 0 \quad \text{e} \quad (2s - 1)v + u^2 = 0.$$

Multiplicando a primeira igualdade por u e a segunda por v , pelo Teorema 2 temos

$$0 = (2r - 1)u^2 + v^2u = (2r - 1)u^2 \quad \text{e} \quad 0 = (2s - 1)v^2 + u^2v = (2s - 1)v^2$$

e como $2r - 1 \neq 0$ e $2s - 1 \neq 0$, então $u^2 = v^2 = 0$. Agora substituindo nas igualdades acima, obtemos $(2r - 1)u = 0$ e $(2s - 1)v = 0$, logo $u = v = 0$, portanto $e' = e$.

b) Em uma álgebra bária qualquer, o ideal de Etherington J de A é gerado por $\{u^2 - \omega(u)u : u \in A\}$ conforme [Cap.1, § 1.1]. Então para todo $u \in A$, $\omega(u^2 - \omega(u)u) = 0$, logo $J \subseteq \ker \omega$. Para todo $u \in \ker \omega$, temos $u^2 - \omega(u)u = u^2 \in J$. Com nossas hipóteses, dado $u = \alpha e + a + b \in A$, onde $\alpha \in F$, $a \in A_r(e)$ e $b \in A_s(e)$ temos

$$u^2 - \omega(u)u = \alpha(2r - 1)a + \alpha(2s - 1)b + a^2 + b^2$$

já que $ab = 0$. Como $a^2, b^2, u^2 - \omega(u)u \in J$, temos $\alpha(2r - 1)a + \alpha(2s - 1)b \in J$. Para $u = (2r - 1)^{-1}e + a$, obtemos $(2r - 1)^{-1}(2r - 1)a = a \in J$. Para $u = (2s - 1)^{-1}e + b$, temos $(2s - 1)^{-1}(2s - 1)b = b \in J$, assim $A_r(e) \subseteq J$ e $A_s(e) \subseteq J$, portanto $\ker \omega \subseteq J$ e finalmente $J = \ker \omega$.

c) Conforme [Cap.1, § 1.4], precisamos mostrar que $\ker \omega$ é nilpotente e que as potências $(\ker \omega)^j$ ($j \geq 1$) são ideais de A . Pelo Teorema 2, $(\ker \omega)^3 = (A_r(e) \oplus A_s(e))^3 = 0$, logo $\ker \omega$ é nilpotente (de índice de nilpotência ≤ 3). Falta mostrar que $(\ker \omega)^2 = A_r^2(e) \oplus A_s^2(e)$ é um ideal de A . Dados $u, u', u'' \in A_r(e)$; $v, v', v'' \in A_s(e)$, pelo Teorema 1, temos

$$e(uu') = suu' \in A_r^2(e), \quad e(vv') = rrv' \in A_s^2(e), \quad u''(uu') = 0, \quad v''(vv') = 0$$

e pelo Teorema 2, temos $u''(vv') = 0$ e $v''(uu') = 0$, provando que $(\ker \omega)^2$ é um ideal de A . CQD

6.3 Train álgebras comutativas de posto 4 tal que

$$A_{\frac{1}{2}}(e) = 0$$

Retomamos aqui o exemplo 1 do § 1. Sejam U, V espaços vetoriais não nulos sobre o corpo F , $\phi: U \times U \rightarrow V$, $\psi: V \times V \rightarrow U$ aplicações bilineares simétricas. Em $A = U \oplus V$ definimos a seguinte multiplicação:

$$(u, v)(u', v') = (\psi(v, v'), \phi(u, u')); \quad u, u' \in U; \quad v, v' \in V.$$

Suponhamos que $\psi(v, v) \in \ker \phi_u$ e $\phi(u, u) \in \ker \psi_v$, para todo $u \in U$ e $v \in V$, onde $\phi_u: U \rightarrow V$ e $\psi_v: V \rightarrow U$ são dadas por $\phi_u(u') = \phi(u', u)$ e $\psi_v(v') = \psi(v', v)$. Sejam $r, s \in F$, $\gamma_1 = -(1 + r + s)$, $\gamma_2 = r + s + rs$, $\gamma_3 = -rs$ e $\tau: A \rightarrow A$ dada por $\tau(u, v) = (ru, sv)$. Conforme vimos no § 1, se $\frac{1}{2}$, r e s forem distintos dois a dois, então $[A, \tau]$ é uma train álgebra de posto 4 com t-equação

$$x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x = 0.$$

Conforme vimos no [Cap.2, § 2.1] para o idempotente $e = (1, 0, 0)$, temos $e(0, u, 0) = r(0, u, 0)$ e $e(0, 0, v) = s(0, 0, v)$, logo $[A, \tau]_r(e) = U$, $[A, \tau]_s(e) = V$ e $[A, \tau]_{\frac{1}{2}}(e) = 0$. A partir de agora fixaremos r e s , conseqüentemente definimos a classe das álgebras que satisfazem a t-equação $x^4 + \gamma_1 \omega(x)x^3 + \gamma_2 \omega(x)^2 x^2 + \gamma_3 \omega(x)^3 x = 0$. Denotaremos a álgebra construída acima por $[U, V, \phi, \psi]$ e nos propomos a descrever a subclasse formada pelas álgebras $[U, V, \phi, \psi]$, quando U, V, ϕ e ψ variam. Observemos que pelo Teorema 3, $[U, V, \phi, \psi]$ é train especial.

Consideremos a classe de todas as 4-uplas (U, V, ϕ, ψ) , onde U e V são espaços vectoriais não nulos, $\phi: U \times U \rightarrow V$ e $\psi: V \times V \rightarrow U$ aplicações bilineares simétricas tais que $\psi(v, v) \in \ker \phi_u$ e $\phi(u, u) \in \ker \psi_v$ para todo $u \in U$ e $v \in V$.

Diremos que as 4-uplas (U, V, ϕ, ψ) e (U', V', ϕ', ψ') são equivalentes se existirem aplicações lineares bijetoras $\mu: U \rightarrow U'$ e $\vartheta: V \rightarrow V'$ tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} U \times U & \xrightarrow{\phi} & V \\ \mu \times \mu \downarrow & & \downarrow \vartheta \\ U' \times U' & \xrightarrow{\phi'} & V' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\psi} & U \\ \vartheta \times \vartheta \downarrow & & \downarrow \mu \\ V' \times V' & \xrightarrow{\psi'} & U' \end{array} \quad (13)$$

sejam comutativos.

Denotaremos esta relação de equivalência por $(U, V, \phi, \psi) \sim (U', V', \phi', \psi')$.

Teorema 4 $(U, V, \phi, \psi) \sim (U', V', \phi', \psi')$ se e somente se $[U, V, \phi, \psi]$ e $[U', V', \phi', \psi']$ são isomorfas como álgebras básicas.

Demonstração Suponhamos que $(U, V, \phi, \psi) \sim (U', V', \phi', \psi')$ como acima. Mostraremos que $\varphi: [U, V, \phi, \psi] \rightarrow [U', V', \phi', \psi']$ dada por $\varphi(\alpha, u, v) = (\alpha, \mu(u), \vartheta(v))$ é um isomorfismo bário. Para isso basta mostrar que $\theta: U \oplus V \rightarrow U' \oplus V'$ dada por $\theta(u, v) = (\mu(u), \vartheta(v))$ e $c = 0 \in U' \oplus V'$ verificam [Cap.2, Cor.1 e Cor.2 da Prop.3]. Isto é, precisamos mostrar que θ é um isomorfismo de álgebras e que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \oplus V & \xrightarrow{\tau} & U \oplus V \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ U' \oplus V' & \xrightarrow{\rho} & U' \oplus V' \end{array}$$

é comutativo, onde $\tau(u, v) = (ru, sv)$ e $\rho(u', v') = (ru', sv')$. Dado $(u, v) \in U \oplus V$, então $\theta\tau(u, v) = (\mu(ru), \vartheta(sv)) = (r\mu(u), s\vartheta(v)) = \rho\theta(u, v)$, e isso prova que o diagrama acima é comutativo. Para todo $u, u' \in U$ e $v, v' \in V$ dos diagramas de (13) temos $\vartheta(\phi(u, u')) = \phi'(\mu(u), \mu(u'))$ e $\mu(\psi(v, v')) = \psi'(\vartheta(v), \vartheta(v'))$ e então

$$\begin{aligned} \theta((u, v)(u', v')) &= \theta(\psi(v, v'), \phi(u, u')) = (\mu\psi(v, v'), \vartheta\phi(u, u')) = \\ &= (\psi'(\vartheta(v), \vartheta(v')), \phi'(\mu(u), \mu(u')))) = (\mu(u), \vartheta(v))(\mu(u'), \vartheta(v')) = \theta(u, v)\theta(u', v'). \end{aligned}$$

Logo θ é um homomorfismo. Como μ e ϑ são bijetoras então θ é bijetora.

Reciprocamente suponhamos que $[U, V, \phi, \psi]$ e $[U', V', \phi', \psi']$ são isomorfas como álgebras bárias e indiquemos por φ um isomorfismo bário. Por [Cap.2, Cor.2 da Prop.3], φ pode ser escrito como $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$, onde $c \in U' \oplus V'$, $\theta: U \oplus V \rightarrow U' \oplus V'$ é um homomorfismo e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \oplus V & \xrightarrow{\tau} & U \oplus V \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ U' \oplus V' & \xrightarrow{L_c + \rho} & U' \oplus V' \end{array}$$

é comutativo, onde $\tau(u, v) = (ru, sv)$ e $\rho(u', v') = (ru', sv')$. Escrevendo $c = (c_1, c_2)$ e $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, temos $\theta\tau = (L_c + \rho)\theta$ e assim para todo $(u, v) \in U \oplus V$ obtemos

$$\begin{aligned} (\theta_1(ru, sv), \theta_2(ru, sv)) &= (c_1, c_2)(\theta_1(u, v), \theta_2(u, v)) + (r\theta_1(u, v), s\theta_2(u, v)) = \\ &= (\psi'(c_2, \theta_2(u, v)) + r\theta_1(u, v), \phi'(c_1, \theta_1(u, v)) + s\theta_2(u, v)). \end{aligned}$$

Logo

$$\theta_1(ru, sv) = \psi'(c_2, \theta_2(u, v)) + \theta_1(ru, rv) \text{ e } \theta_2(ru, sv) = \phi'(c_1, \theta_1(u, v)) + \theta_2(su, sv))$$

e portanto

$$\theta_1(0, v) = \frac{1}{s-r} \psi'(c_2, \theta_2(u, v)) \text{ e } \theta_2(u, 0) = \frac{1}{r-s} \phi'(c_1, \theta_1(u, v)). \quad (14)$$

Por outro lado de [Cap.2, Cor.2 da Prop.3], temos $c^2 + 2\rho(c) = c$. Logo $(\psi'(c_2, c_2), \phi'(c_1, c_1)) + (2rc_1, 2sc_2) = (c_1, c_2)$. Assim

$$c_1 = \frac{1}{1-2r} \psi'(c_2, c_2) \text{ e } c_2 = \frac{1}{1-2s} \phi'(c_1, c_1). \quad (15)$$

Substituindo (15) em (14) temos $\theta_1(0, v) = \frac{1}{(s-r)(1-2s)} \psi'(\phi'(c_1, c_1), \theta_2(u, v)) = 0$. Similarmente $\theta_2(u, 0) = 0$. Sejam $\mu: U \rightarrow U'$ e $\vartheta: V \rightarrow V'$ dadas por $\mu(u) = \theta_1(u, 0)$ e $\vartheta(v) = \theta_2(0, v)$. Dado $(u, v) \in U \oplus V$, então $\theta_1(u, v) = \theta_1(u, 0) + \theta_1(0, v) = \mu(u)$ e $\theta_2(u, v) = \vartheta(v)$. Dados $(u, v), (u', v') \in U \oplus V$. Como θ é homomorfismo, temos

$$\begin{aligned} \theta((u, v)(u', v')) &= \theta(\psi(v, v'), \phi(u, u')) = (\mu\psi(v, v'), \vartheta\phi(u, u')) \text{ e} \\ \theta(u, v)\theta(u', v') &= (\psi'(\vartheta(v), \vartheta(v')), \phi'(\mu(u), \mu(u'))) \end{aligned}$$

e portanto $\mu\psi(v, v') = \psi'(\vartheta(v), \vartheta(v')) \text{ e } \vartheta\phi(u, u') = \phi'(\mu(u), \mu(u'))$.

Com isso os diagramas de (13) são comutativos. Por [Cap.2, Cor.2 da Prop.3] θ é bijetora. Dado $u \in U$ tal que $\mu(u) = 0$, daí $\theta(u, 0) = (\mu(u), 0) = 0$, logo $u = 0$. Dado $u' \in U'$, existe $(u, v) \in U \oplus V$ tal que $\theta(u, v) = (u', 0)$, daí $\mu(u) = u'$, logo μ é bijetora. Similarmente prova-se que ϑ é bijetora. CQD

Seja (A, ω) uma train álgebra de posto 4 que verifica as hipóteses do Teorema 3. Pelo Corolário 2 do Teorema 1, $A_r(e) \neq 0$ e $A_s(e) \neq 0$. Além disso pelos Teoremas 1 e 2 (A, ω) é isomorfa, como álgebra bária a $[A_r(e), A_s(e), \phi, \psi]$, onde $\phi: A_r(e) \times A_r(e) \rightarrow A_s(e)$ e $\psi: A_s(e) \times A_s(e) \rightarrow A_r(e)$ são dadas por $\phi(u, u') = uu'$ e $\psi(v, v') = vv'$. Isto completa a descrição das classes de isomorfismos de álgebras de posto 4 em que $A_{\frac{1}{2}}(e) = 0$.

6.4 Estudo de uma classe de train álgebras de posto 4 com $A_{\frac{1}{2}}(e) \neq 0$ que é train especial

Aqui retomamos o exemplo 2 do §1. Consideremos a F -álgebra $[U(\delta), \tau]$, onde U é um F -espaço vetorial não nulo, $\delta: U \rightarrow U$ é um operador linear tal que $\delta^2 \neq 0$ e $\delta^3 = 0$. Dados $r, s \in F$, $\gamma_1 = -(1 + r + s)$, $\gamma_2 = r + s + rs$ e $\gamma_3 = -rs$. Conforme vimos no §1, se $\frac{1}{2}$, r e s forem distintos $[U(\delta), \tau]$ é uma train álgebra de posto 4 com train equação $x^4 + \gamma_1\omega(x)x^3 + \gamma_2\omega(x)^2x^2 + \gamma_3\omega(x)^3x = 0$. Observemos que $[U(\delta), \tau]_{\frac{1}{2}}(e) = U \oplus \langle \delta \rangle$, $[U(\delta), \tau]_r(e) = \delta(U) \oplus \langle \delta^2 \rangle$ e $[U(\delta), \tau]_s(e) = \delta^2(U)$ para $e = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Fixaremos r e s e denotaremos $[U(\delta), \tau]$ apenas por U_δ .

Consideremos a classe de todos os pares ordenados (U, δ) , onde U é um espaço vetorial não nulo e $\delta: U \rightarrow U$ é um operador linear tal que $\delta^2 \neq 0$ e $\delta^3 = 0$.

Diremos que (U, δ) e (V, σ) são equivalentes se existirem isomorfismos $\eta: U \rightarrow V$, $\phi: \delta(U) \rightarrow \sigma(V)$ e $\vartheta: \delta^2(U) \rightarrow \sigma^2(V)$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\delta} & \delta(U) & \xrightarrow{\delta} & \delta^2(U) \\ \eta \downarrow & & \phi \downarrow & & \downarrow \vartheta \\ V & \xrightarrow{\sigma} & \sigma(V) & \xrightarrow{\sigma} & \sigma^2(V) \end{array} \quad (16)$$

seja comutativo. Denotaremos esta relação de equivalência por $(U, \delta) \sim (V, \sigma)$.

A demonstração do lema a seguir é bem conhecida e será omitida.

Lema *Sejam U, V espaços vetoriais, $\delta: U \rightarrow U$, $\sigma: V \rightarrow V$, $\eta: U \rightarrow V$, $\phi: \delta(U) \rightarrow \sigma(V)$ e $\vartheta: \delta^2(U) \rightarrow \sigma^2(V)$ aplicações lineares, tais que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\delta} & \delta(U) & \xrightarrow{\delta} & \delta^2(U) \\ \eta \downarrow & & \phi \downarrow & & \downarrow \vartheta \\ V & \xrightarrow{\sigma} & \sigma(V) & \xrightarrow{\sigma} & \sigma^2(V) \end{array}$$

seja comutativo. Se η é sobrejetora, então ϕ e ϑ são sobrejetoras.

Teorema 5 $(U, \delta) \sim (V, \sigma)$ se e somente se as álgebras básicas U_δ e V_σ são isomorfas.

Demonstração Suponhamos que $(U, \delta) \sim (V, \sigma)$. Seja $\varphi: U_\delta \rightarrow V_\sigma$ dada por

$$\varphi \left(\gamma, u, \alpha \delta, \delta(v), \beta \delta^2, \delta^2(w) \right) = \left(\gamma, \eta(u), \alpha \sigma, \phi(\delta(v)), \beta \sigma^2, \vartheta(\delta^2(w)) \right).$$

Para mostrar que φ é um isomorfismo bárico basta provar que $\theta: U(\delta) \rightarrow V(\sigma)$ dada por

$$\theta \left(u, \alpha \delta, \delta(v), \beta \delta^2, \delta^2(w) \right) = \left(\eta(u), \alpha \sigma, \phi(\delta(v)), \beta \sigma^2, \vartheta(\delta^2(w)) \right)$$

e $c = 0 \in V(\sigma)$ verificam as condições de [Cap.2, Cor.1 e Cor.2 da Prop.3]. Isto é, precisamos mostrar que θ é um isomorfismo de álgebras e que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U(\delta) & \xrightarrow{\tau} & U(\delta) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ V(\sigma) & \xrightarrow{\rho} & V(\sigma) \end{array}$$

é comutativo, onde

$$\tau \left(u, \alpha \delta, \delta(v), \beta \delta^2, \delta^2(w) \right) = \left(\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}\alpha \delta, r \delta(v), r \beta \delta^2, s \delta^2(w) \right) \quad e$$

$$\rho \left(u', \alpha' \sigma, \sigma(v'), \beta' \sigma^2, \sigma^2(w') \right) = \left(\frac{1}{2}u', \frac{1}{2}\alpha' \sigma, r \sigma(v'), r \beta' \sigma^2, s \sigma^2(w') \right).$$

Dado $(u, \alpha \delta, \delta(v), \beta \delta^2, \delta^2(w)) \in U(\delta)$ temos

$$\begin{aligned} (\theta \tau)(u, \alpha \delta, \delta(v), \beta \delta^2, \delta^2(w)) &= \left(\frac{1}{2}\eta(u), \frac{1}{2}\alpha \sigma, r \phi(\delta(v)), r \beta \sigma^2, s \vartheta(\delta^2(w)) \right) = \\ &= (\rho \theta)(u, \alpha \delta, \delta(v), \beta \delta^2, \delta^2(w)). \end{aligned}$$

Portanto o diagrama acima é comutativo. Mostremos agora que θ é um homomorfismo de álgebras. Do diagrama (16) temos $\phi \delta = \sigma \eta$ e $\vartheta \delta = \sigma \phi$ assim, $\vartheta \delta^2 = \sigma \phi \delta = \sigma^2 \eta$ logo,

$$\begin{aligned} &\theta \left((u, \alpha \delta, \delta(v), \beta \delta^2, \delta^2(w)) (u', \alpha' \delta, \delta(v'), \beta' \delta^2, \delta^2(w')) \right) = \\ &= \left(0, 0, \phi \delta(\alpha' u + \alpha u'), \alpha \alpha' \sigma^2, \vartheta \delta^2(\beta' u + \beta u' + \alpha' v + \alpha v') \right) = \\ &= \left(0, 0, \sigma(\alpha' \eta(u) + \alpha \eta(u')), \alpha \alpha' \sigma^2, \sigma^2(\beta' \eta(u) + \beta \eta(u') + \alpha' \eta(v) + \alpha \eta(v')) \right) = \\ &= \left(\eta(u), \alpha \sigma, \phi \delta(v), \beta \sigma^2, \vartheta \delta^2(w) \right) \left(\eta(u'), \alpha' \sigma, \phi \delta(v'), \beta' \sigma^2, \vartheta \delta^2(w') \right) = \\ &= \theta \left(u, \alpha \delta, \delta(v), \beta \delta^2, \delta^2(w) \right) \theta \left(u', \alpha' \delta, \delta(v'), \beta' \delta^2, \delta^2(w') \right). \end{aligned}$$

Como η , ϕ e ϑ são isomorfismos, logo bijetoras, então θ é bijetora.

Suponhamos agora que U_δ e V_σ sejam isomorfas como álgebras báricas. Por [Cap.2, Cor.2 da Prop.3], existem $c \in V(\sigma)$ e $\theta: U(\delta) \longrightarrow V(\sigma)$ um isomorfismo tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U(\delta) & \xrightarrow{\tau} & U(\delta) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ V(\sigma) & \xrightarrow{L_c + \rho} & V(\sigma) \end{array}$$

é comutativo. Escrevendo

$$c = (u_0, \alpha_0 \sigma, \sigma(v_0), \beta_0 \sigma^2, \sigma^2(w_0)) \quad e$$

$$\theta(a) = (\theta_1(a), \theta_2(a)\sigma, \theta_3(a), \theta_4(a)\sigma^2, \theta_5(a)) \quad a \in U(\delta)$$

da comutatividade do diagrama acima temos, $\theta\tau = (L_c + \rho)\theta = c\theta + \rho\theta$ logo, $(\theta\tau)(a) =$
 $= (0, 0, \sigma(\theta_2(a)u_0 + \alpha_0\theta_1(a)), \alpha_0\theta_2(a)\sigma^2, \sigma^2(\theta_4(a)u_0 + \beta_0\theta_1(a) + \theta_2(a)v_0) + \alpha_0\sigma(\theta_3(a))) +$
 $\left(\frac{1}{2}\theta_1(a), \frac{1}{2}\theta_2(a)\sigma, r\theta_3(a), r\theta_4(a)\sigma^2, s\theta_5(a)\right).$

Para todo $a \in U(\delta)$ temos:

- a) $\theta_1(\tau(a)) = \frac{1}{2}\theta_1(a);$
- b) $\theta_2(\tau(a)) = \frac{1}{2}\theta_2(a);$
- c) $\theta_3(\tau(a)) = r\theta_3(a) + \sigma(\theta_2(a)u_0 + \alpha_0\theta_1(a));$ (17)
- d) $\theta_4(\tau(a)) = r\theta_4(a) + \alpha_0\theta_2(a);$
- e) $\theta_5(\tau(a)) = s\theta_5(a) + \alpha_0\sigma(\theta_3(a)) + \sigma^2(\theta_4(a)u_0 + \beta_0\theta_1(a) + \theta_2(a)v_0).$

Como θ é homomorfismo, então para todo $a, b \in U(\delta)$ temos:

- f) $\theta_1(ab) = 0;$
- g) $\theta_2(ab) = 0;$
- h) $\theta_3(ab) = \sigma(\theta_2(a)\theta_1(b) + \theta_2(b)\theta_1(a));$ (18)

i) $\theta_4(ab) = \theta_2(a)\theta_2(b)$;

j) $\theta_5(ab) = \sigma(\theta_2(a)\theta_3(b) + \theta_2(b)\theta_3(a)) + \sigma^2(\theta_4(a)\theta_1(b) + \theta_4(b)\theta_1(a))$.

Mostremos que $\alpha_1 = \theta_2(0, \delta, 0, 0, 0) \neq 0$. Suponhamos o contrário, seja $a = (0, \delta, 0, 0, 0)$, então $\tau(a) = \frac{1}{2}a$ e $\alpha_1 = \theta_2(a) = 0$. De (17, d) $\frac{1}{2}\theta_4(a) = r\theta_4(a)$, então $\theta_4(a) = 0$. De (18) $\theta_1(a^2) = 0$, $\theta_2(a^2) = 0$, $\theta_3(a^2) = 0$, $\theta_4(a^2) = 0$ e $\theta_5(a^2) = 0$, assim $\theta(a^2) = 0$, como θ é isomorfismo, então $a^2 = 0$. Mas $a^2 = (0, 0, 0, \delta^2, 0) \neq 0$ que é uma contradição, logo $\alpha_1 \neq 0$.

Sejam $\eta: U \longrightarrow V$, $\phi: \delta(U) \longrightarrow \sigma(V)$ e $\vartheta: \delta^2(U) \longrightarrow \sigma^2(V)$ dadas por

$$\eta(u) = \alpha_1\theta_1(u, 0, 0, 0, 0), \quad \phi(v) = \theta_3(0, 0, v, 0, 0) \text{ e } \vartheta(w) = \alpha_1^{-1}\theta_5(0, 0, 0, 0, w).$$

De (18, i) se $a^2 = 0$, então $\theta_2(a) = 0$, com isso $\theta_2(u, 0, 0, 0, 0) = 0$, para todo $u \in U$ e $\theta_2(0, 0, 0, \delta^2, 0) = 0$. De (18, h) para todo $u \in U$

$$\begin{aligned} (\phi\delta)(u) &= \theta_3(0, 0, \delta(u), 0, 0) = \theta_3((u, 0, 0, 0, 0)(0, \delta, 0, 0, 0)) = \\ &= \sigma(\theta_2(0, \delta, 0, 0, 0)\theta_1(u, 0, 0, 0, 0)) = \sigma(\alpha_1\theta_1(u, 0, 0, 0, 0)) = \sigma\eta(u). \end{aligned}$$

De (17, d) $\theta_4(\tau(u, 0, 0, 0, 0)) = r\theta_4(u, 0, 0, 0, 0)$, logo $\frac{1}{2}\theta_4(u, 0, 0, 0, 0) = r\theta_4(u, 0, 0, 0, 0)$, daí $\theta_4(u, 0, 0, 0, 0) = 0$. De (18, j) temos

$$\begin{aligned} (\vartheta\delta)(\delta(u)) &= \vartheta(\delta^2(u)) = \alpha_1^{-1}\theta_5(0, 0, 0, 0, \delta^2(u)) = \alpha_1^{-1}\theta_5((u, 0, 0, 0, 0)(0, 0, 0, \delta^2, 0)) = \\ &= \alpha_1^{-1}\sigma^2(\theta_4(0, 0, 0, \delta^2, 0)\theta_1(u, 0, 0, 0, 0)). \end{aligned}$$

De (18, i) $\theta_4(0, 0, 0, \delta^2, 0) = \theta_4((0, \delta, 0, 0, 0)^2) = (\theta_2(0, \delta, 0, 0, 0))^2 = \alpha_1^2$ e logo

$$\begin{aligned} (\vartheta\delta)(\delta(u)) &= \alpha_1^{-1}\sigma^2(\alpha_1^2\theta_1(u, 0, 0, 0, 0)) = \alpha_1\sigma^2(\theta_1(u, 0, 0, 0, 0)) = (\sigma^2\eta)(u) = \sigma(\sigma\eta(u)) = \\ &= \sigma(\phi\delta)(u) = (\sigma\phi)(\delta(u)). \end{aligned}$$

Portanto o diagrama (16) é comutativo.

Falta mostrar que η , ϕ e ϑ são bijetoras. Dado $u \in U$ tal que $\eta(u) = 0$, então $\theta_1(u, 0, 0, 0, 0) = 0$. De (17, c)

$$\theta_3\left(\frac{1}{2}u, 0, 0, 0, 0\right) = r\theta_3(u, 0, 0, 0, 0), \text{ daí } \theta_3(u, 0, 0, 0, 0) = 0.$$

De (17, e)

$$\theta_5\left(\frac{1}{2}u, 0, 0, 0, 0\right) = s\theta_5(u, 0, 0, 0, 0) + \alpha_0\sigma(\theta_3(u, 0, 0, 0, 0)) = s\theta_5(u, 0, 0, 0, 0).$$

Logo $\theta_5(u, 0, 0, 0, 0) = 0$ e assim $\theta(u, 0, 0, 0, 0) = 0$. Como θ é injetora, então $u = 0$. De modo análogo prova-se que ϕ e ϑ são injetoras.

Dado $u' \in V$, existe $a = (u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) \in U(\delta)$ tal que $\theta(a) = (u', 0, 0, 0, 0)$. Por outro lado, $0 = (\theta(a))^2 = \theta(a^2)$. Como θ é injetora, então $a^2 = 0$ daí, $0 = a^2 = (0, 0, 2\alpha\delta(u), \alpha^2\delta^2, \delta^2(2\beta u + 2\alpha v))$; logo $\alpha = 0$. De (18, f) temos

$$0 = \theta_1((v, 0, 0, 0, 0)(0, \delta, 0, 0, 0)) = \theta_1(0, 0, \delta(v), 0, 0).$$

Analogamente, $\theta_1(0, 0, 0, \delta^2, 0) = 0$ e $\theta_1(0, 0, 0, 0, \delta^2(w)) = 0$. Assim, $u' = \theta_1(a) = \theta_1(u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) = \theta_1(u, 0, 0, 0, 0) = \eta(u)$, logo η é sobrejetora. Pelo Lema ϕ e ϑ são sobrejetoras. CQD

Proposição 3 *Os idempotentes de peso 1 em U_δ são dados por:*

$$e = \left(1, u, \alpha\delta, 2\alpha(1 - 2r)^{-1}\delta(u), (1 - 2r)^{-1}\alpha^2\delta^2, 6\alpha^2(1 - 2r)^{-1}(1 - 2s)^{-1}\delta^2(u)\right),$$

onde $\alpha \in F$ e $u \in U$ são arbitrários.

Demonstração Se $e = (1, u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w))$ então

$$e^2 = \left(1, u, \alpha\delta, 2\alpha\delta(u) + 2r\delta(v), (\alpha^2 + 2\alpha\beta)\delta^2, 2\beta\delta^2(u) + 2\alpha\delta^2(v) + 2s\delta^2(w)\right) \text{ e portanto}$$

$e^2 = e$ se e somente se

$$\delta(v) = 2\alpha(1 - 2r)^{-1}\delta(u), \beta = (1 - 2r)^{-1}\alpha^2 \text{ e } \delta^2(w) = (1 - 2s)^{-1}(2\beta\delta^2(u) + 2\alpha\delta^2(v)).$$

Resulta daí

$$\delta(v) = 2\alpha(1 - 2r)^{-1}\delta(u), \beta = (1 - 2r)^{-1}\alpha^2 \text{ e } \delta^2(w) = 6\alpha^2(1 - 2r)^{-1}(1 - 2s)^{-1}\delta^2(u). \text{ CQD}$$

Proposição 4 *U_δ é uma train álgebra especial.*

Demonstração Dados $(u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w))$ e $(u', \alpha'\delta, \delta(v'), \beta'\delta^2, \delta^2(w')) \in U(\delta)$ então,

$$\begin{aligned} & (u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) (u', \alpha'\delta, \delta(v'), \beta'\delta^2, \delta^2(w')) = \\ & (0, 0, \delta(\alpha'u + \alpha u'), \alpha\alpha'\delta^2, \delta^2(\beta'u + \beta u' + \alpha'v + \alpha v')). \end{aligned}$$

Como $(v, \beta\delta, \delta(w), 0, 0)(0, \delta, 0, 0, 0) = (0, 0, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w))$ então,

$$(U(\delta))^2 = \{(0, 0, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) : \beta \in F; v, w \in U\}.$$

Como $(0, 0, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) (u', \alpha'\delta, \delta(v'), \beta'\delta^2, \delta^2(w')) = (0, 0, 0, 0, \delta^2(\beta u' + \alpha'v))$ e

$$(0, 0, 0, \delta^2, 0) (w, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, \delta^2(w))$$

então $(U(\delta))^3 = \{(0, 0, 0, 0, \delta^2(w)) : w \in U\}$. É claro que $(U(\delta))^4 = 0$ e assim $\ker \omega$ é nilpotente de índice 4.

Dados $(\gamma, u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) \in U_\delta$ e $(0, 0, 0, \delta(v'), \beta'\delta^2, \delta^2(w')) \in (\ker \omega)^2$ então,

$$\begin{aligned} & (\gamma, u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) (0, 0, 0, \delta(v'), \beta'\delta^2, \delta^2(w')) = \\ & (0, 0, 0, \delta(r\gamma v'), r\gamma\beta'\delta^2, \delta^2(\beta'u + \alpha v' + s\gamma w')) \in (\ker \omega)^2. \end{aligned}$$

Portanto $(\ker \omega)^2$ é um ideal de U_δ . De modo semelhante provamos que $(\ker \omega)^3$ é um ideal de U_δ . CQD

Proposição 5 *O ideal de Etherington J de U_δ é dado por $J = (U_\delta)_r(e) \oplus (U_\delta)_s(e)$, onde $e = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.*

Demonstração Conforme demonstramos na Prop.4, $(\ker \omega)^2 = (U_\delta)_r(e) \oplus (U_\delta)_s(e)$ é um ideal de U_δ . Dado $b = (\gamma, u, \alpha\delta, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) \in U_\delta$ então,

$$b^2 - \omega(b)b =$$

$$(0, 0, 0, \delta(2\alpha u + (2r - 1)\gamma v), (\alpha^2 + (2r - 1)\gamma\beta)\delta^2, \delta^2(2\beta u + 2\alpha v + (2s - 1)\gamma w)) \in (\ker \omega)^2$$

logo $J \subseteq (\ker \omega)^2$. Para a recíproca, seja dado $b = (0, 0, 0, \delta(v), \beta\delta^2, \delta^2(w)) \in (\ker \omega)^2$.

Para $c = ((2r - 1)^{-1}, 0, 0, \delta(v), \beta\delta^2, 0)$ temos $c^2 - \omega(c)c = (0, 0, 0, \delta(v), \beta\delta^2, 0)$. Para

$d = ((2s - 1)^{-1}, 0, 0, 0, 0, \delta^2(w))$ temos $d^2 - \omega(d)d = (0, 0, 0, 0, 0, \delta^2(w))$. Como $b =$

$c^2 - \omega(c)c + d^2 - \omega(d)d$, então $b \in J$. CQD

Apêndice A

Neste apêndice apresentaremos as demonstrações das Proposições 1, 2 e 3 do capítulo 4. O resultado desejado é a Proposição 3. Apesar de todos os esforços não foi possível encontrar demonstrações mais elegantes.

Proposição 1 *Para todo $n, j \in \mathbb{N}$ e $r \in F$, são válidas as seguintes igualdades:*

- a) $[n, n; r] = 1;$
- b) $[n, n-1; r] = nr \quad (n \geq 1);$
- c) $(n, j; r) = (n-1, j; r) - (n-1, j-1; r)r \quad (n \geq 2, j \geq 1);$
- d) $[n, j; r] = [n-1, j; r]r + [n-1, j-1; r] \quad (n \geq 1, j \geq 1).$

Demonstração Os itens a) e b) são conseqüências imediatas da definição de $[n, j; r]$.

c) Se $n < j$ então $n-1 < j$ e $n-1 < j-1$, logo pela definição

$$(n, j; r) = 0 = (n-1, j; r) - (n-1, j-1; r)r.$$

Suponhamos $1 \leq j \leq n$. Se $j = n$, pela definição,

$$(n, n; r) = (-1)^n \left(\binom{n-1}{n} r^n + \binom{n-1}{n-1} r^{n-1} \right) = (-1)^n r^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad & (n-1, n; r) - (n-1, n-1; r)r = -(n-1, n-1; r)r = \\ & = -(-1)^{n-1} \left(\binom{n-2}{n-1} r^{n-1} + \binom{n-2}{n-2} r^{n-2} \right) r = (-1)^n r^{n-1} = (n, n; r). \end{aligned}$$

Para $j = 1$, pela definição,

$$(n-1, 1; r) - (n-1, 0; r)r = - \left(\binom{n-2}{1} r + \binom{n-2}{0} \right) - r = -(n-2)r - 1 - r =$$

$$= -((n-1)r + 1) = -\left(\binom{n-1}{1}r + \binom{n-1}{0}\right) = (n, 1; r).$$

Falta o caso em que $1 < j < n$. Temos:

$$\begin{aligned} & (n-1, j; r) - (n-1, j-1; r)r = \\ & = (-1)^j \left(\binom{n-2}{j} r^j + \binom{n-2}{j-1} r^{j-1} \right) - (-1)^{j-1} \left(\binom{n-2}{j-1} r^{j-1} + \binom{n-2}{j-2} r^{j-2} \right) r = \\ & = (-1)^j \left[\left(\binom{n-2}{j} + \binom{n-2}{j-1} \right) r^j + \left(\binom{n-2}{j-1} + \binom{n-2}{j-2} \right) r^{j-1} \right] = \\ & = (-1)^j \left(\binom{n-1}{j} r^j + \binom{n-1}{j-1} r^{j-1} \right) = (n, j; r). \end{aligned}$$

d) Se $n < j$, então $n-1 < j$ e $n-1 < j-1$. Daí,

$$[n, j; r] = 0 = [n-1, j; r]r + [n-1, j-1; r].$$

Suponhamos $1 \leq j \leq n$. Se $j = n$, usando a) temos,

$$[n-1, n; r]r + [n-1, n-1; r] = 1, \text{ logo } 1 = [n, n; r] = [n-1, n; r]r + [n-1, n-1; r].$$

Falta o caso em que $1 \leq j < n$. Temos:

$$\begin{aligned} [n-1, j; r]r + [n-1, j-1; r] &= \sum_{i=0}^{n-1-j} [n-2-i, j-1; r]r^{i+1} + [n-1, j-1; r] = \\ \sum_{k=1}^{n-j} [n-1-k, j-1; r]r^k + [n-1, j-1; r] &= \sum_{k=0}^{n-j} [n-1-k, j-1; r]r^k = [n, j; r]. \quad \text{CQD} \end{aligned}$$

Proposição 2 *São válidas as seguintes igualdades:*

- a) $\sum_{j=0}^k (n, j; r) = (-1)^k \binom{n-1}{k} r^k \quad (0 \leq k \leq n-1);$
- b) $\sum_{j=0}^n (n, j; r) = 0 \quad (n \geq 1);$
- c) $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k (n, j; r) \right) r^{n-1-k} = 0 \quad (n \geq 2);$
- d) $\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] (n-1, i; r) = 0 \quad (0 \leq j \leq n-2);$
- e) $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (2r-1)^{i-1} [n, i; r] = 1 \quad (n \geq 1).$

Demonstração Faremos a demonstração por indução sobre n , nos casos a), d) e e)

a) Para $k = 0$. Temos

$$\sum_{j=0}^0 (n, j; r) = (n, 0; r) = 1 = (-1)^0 \binom{n-1}{0} r^0, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Se $n = 1$, a) é verdadeira pois $k = 0$. Admitamos verdadeira a igualdade para $n \geq 1$. Se $0 < k \leq n$, pela Proposição 1,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (n+1, j; r) &= (n+1, 0; r) + \sum_{j=1}^k (n+1, j; r) = (n, 0; r) + \sum_{j=1}^k ((n, j; r) - (n, j-1; r)r) = \\ &= (n, 0; r) + \sum_{j=1}^k (n, j; r) - \sum_{j=1}^k (n, j-1; r)r = \sum_{j=0}^k (n, j; r) - \sum_{j=0}^{k-1} (n, j; r)r = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (n, j; r) + (n, k; r) - \sum_{j=0}^{k-1} (n, j; r)r = \\ &= (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} r^{k-1} + (-1)^k \binom{n-1}{k} r^k + (-1)^k \binom{n-1}{k-1} r^{k-1} - (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} r^k = \\ &= (-1)^k \binom{n-1}{k} r^k + (-1)^k \binom{n-1}{k-1} r^k = (-1)^k \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) r^k = (-1)^k \binom{n}{k} r^k. \end{aligned}$$

b) Pelo item anterior,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (n, j; r) &= \sum_{j=0}^{n-1} (n, j; r) + (n, n; r) = (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} r^{n-1} + (n, n; r) = \\ &= (-1)^{n-1} r^{n-1} + (-1)^n \left(\binom{n-1}{n} r^n + \binom{n-1}{n-1} r^{n-1} \right) = (-1)^{n-1} r^{n-1} - (-1)^{n-1} r^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

c) Pelo item a),

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k (n, j; r) \right) r^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k \binom{n-1}{k} r^k \right) r^{n-1-k} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \right) r^{n-1} = (1-1)^{n-1} r^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

d) Para $j = 0$, pelo item b),

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n [n-i, 0; r](n-1, i; r) &= \sum_{i=0}^{n-1} [n-i, 0; r](n-1, i; r) + [0, 0; r](n-1, n; r) = \\ &= r \sum_{i=0}^{n-1} (n-1, i; r) = 0.\end{aligned}$$

Se $n = 2$, d) é verdadeira pois $j = 0$. Admitamos verdadeira a igualdade para $n \geq 2$. Seja $1 \leq j \leq n-1$. Usando a Proposição 1,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1-j} [n+1-i, j; r](n, i; r) &= [n+1, j; r](n, 0; r) + \sum_{i=1}^{n+1-j} [n+1-i, j; r](n, i; r) = \\ &= [n+1, j; r] + \sum_{i=1}^{n+1-j} [n+1-i, j; r] ((n-1, i; r) - (n-1, i-1; r)r) = \\ &= [n+1, j; r](n-1, 0; r) + \sum_{i=1}^{n+1-j} [n+1-i, j; r](n-1, i; r) - \sum_{i=1}^{n+1-j} [n+1-i, j; r](n-1, i-1; r)r = \\ &= \sum_{i=0}^{n+1-j} [n+1-i, j; r](n-1, i; r) - \sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r](n-1, i; r)r = \\ &= \sum_{i=0}^{n+1-j} ([n-i, j; r]r + [n-i, j-1; r])(n-1, i; r) - \sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r](n-1, i; r)r = \\ &= [j-1, j; r](n-1, n+1-j; r)r + \sum_{i=0}^{n-(j-1)} [n-i, j-1; r](n-1, i; r) = 0.\end{aligned}$$

e) Para $n = 1$, usando a Proposição 1,

$$\sum_{i=1}^1 (-1)^{i-1} (2r-1)^{i-1} [1, i; r] = [1, 1; r] = 1.$$

Admitamos verdadeira a igualdade para $n \geq 1$. Então Proposição 1,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (2r-1)^{i-1} [n+1, i; r] &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (2r-1)^{i-1} ([n, i; r]r + [n, i-1; r]) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (2r-1)^{i-1} [n, i; r]r + (-1)^n (2r-1)^n [n, n+1; r]r + \sum_{i=0}^n (-1)^i (2r-1)^i [n, i; r] = \\ &= r + (-1)(2r-1) \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (2r-1)^{i-1} [n, i; r] + [n, 0; r] = r - 2r + 1 + r = 1. \quad \text{CQD}\end{aligned}$$

Proposição 3 *Seja (A, ω) um membro de Ω , $e \in A$ um idempotente de peso 1 e supomos que existe $r \in F$ tal que $ea = ra = ae$ para todo $a \in \ker \omega$. Então para todo $f(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)x^{n-1}x$, onde $\gamma_i \in F$, $\gamma_0 = 1$ e $b = \omega(b)e + a \in A = Fe \oplus \ker \omega$, temos*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(\omega(b)e + a) = b^n + \gamma_1 \omega(b)b^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(b)b^{n-1}b = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right) \omega(b)^n e + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n-j} a^j. \end{aligned}$$

Demonstração Para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} b^2 + \gamma_1 \omega(b)b &= (\omega(b)e + a)^2 + \gamma_1 \omega(b)(\omega(b)e + a) = \omega(b)^2 e + 2\omega(b)ea + a^2 + \gamma_1 \omega(b)^2 e + \gamma_1 \omega(b)a = \\ &= \omega(b)^2 e + 2\omega(b)ra + a^2 + \gamma_1 \omega(b)^2 e + \gamma_1 \omega(b)a = (1 + \gamma_1) \omega(b)^2 e + (2r + \gamma_1) \omega(b)a + a^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=0}^{2-1} \gamma_i \right) \omega(b)^2 e + \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=0}^{2-j} [2-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{2-j} a^j = \\ &= (1 + \gamma_1) \omega(b)^2 e + ([2, 1; r] + [1, 1; r] \gamma_1) \omega(b)a + [2, 2; r] a^2. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1,

$$\left(\sum_{i=0}^{2-1} \gamma_i \right) \omega(b)^2 e + \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=0}^{2-j} [2-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{2-j} a^j = (1 + \gamma_1) \omega(b)^2 e + (2r + \gamma_1) \omega(b)a + a^2.$$

Admitamos agora a afirmação verdadeira para $n \geq 2$. Sendo dado $f(x) = x^{n+1} + \gamma_1 \omega(x)x^n + \dots + \gamma_n \omega(x)x^n x$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{n+1} + \gamma_1 \omega(x)x^n + \dots + \gamma_n \omega(x)x^n x = \\ &= (x^n + \gamma_1 \omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)x^{n-1}x) x + \gamma_n \omega(x)x^n x = g(x)x + \gamma_n \omega(x)x^n x, \end{aligned}$$

logo para todo $b = \omega(b)e + a \in A$ temos $f(b) = g(b)b + \gamma_n \omega(b)^n b =$

$$= \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right) \omega(b)^n e + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n-j} a^j \right] (\omega(b)e + a) + \gamma_n \omega(b)^n (\omega(b)e + a) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1} e + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right) \omega(b)^n e a + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j e + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n-j} a^{j+1} + \gamma_n \omega(b)^{n+1} e + \gamma_n \omega(b)^n a = \\
&= \left(\sum_{i=0}^n \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1} e + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right) \omega(b)^n r a + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} r a^j + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n-j} a^{j+1} + \gamma_n \omega(b)^n a = \\
&= \left(\sum_{i=0}^n \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1} e + \left(\sum_{i=0}^{n-1} r \gamma_i + \gamma_n \right) \omega(b)^n a + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] r \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n-i, j-1; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j.
\end{aligned}$$

Pela definição,

$$\sum_{i=0}^{n-1} r \gamma_i + \gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} [n-i, 0; r] \gamma_i + [0, 0; r] \gamma_n = \sum_{i=0}^n [n-i, 0; r] \gamma_i.$$

Pela Proposição 1,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=0}^{n-1} r \gamma_i + \gamma_n \right) \omega(b)^n a + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] r \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n-i, j-1; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j = \\
&= \left(\sum_{i=0}^n [n-i, 0; r] \gamma_i \right) \omega(b)^n a + \sum_{j=2}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n-i, j-1; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] r \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n-i, j-1; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] r \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n-i, j-1; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + [n, n; r] a^{n+1} + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] r \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n-i, j-1; r] \gamma_i + \sum_{i=0}^{n-j} [n-i, j; r] r \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + a^{n+1} = \\
&\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} ([n-i, j; r] r + [n-i, j-1; r]) \gamma_i + [j-1, j-1; r] \gamma_{n+1-j} \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + a^{n+1} = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} ([n+1-i, j; r] \gamma_i + \gamma_{n+1-j}) \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + a^{n+1} = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} ([n+1-i, j; r] \gamma_i + [j, j; r] \gamma_{n+1-j}) \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + a^{n+1} = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n+1-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j + [n+1, n+1; r] a^{n+1} = \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n+1-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j
\end{aligned}$$

Portanto, $b^{n+1} + \gamma_1 \omega(b) b^n + \dots + \gamma_n \omega(b)^n b =$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1} e + \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1-j} [n+1-i, j; r] \gamma_i \right) \omega(b)^{n+1-j} a^j. \quad \text{CQD}$$

Apêndice B

Neste apêndice apresentaremos as demonstrações das Proposições 1, 2 e 3 e dos Lemas 1, 2 e 3 do capítulo 5. Vale observação similar a aquela feita no Apêndice A, sobre as dificuldades de cálculo.

Proposição 1 *Se as aplicações $f_i: A \longrightarrow K_i$ ($i = 1, \dots, n$) são lineares então $(f_1, \dots, f_n)$ é uma aplicação n -linear simétrica.*

Demonstração Por cálculos diretos prova-se que $(f_1, \dots, f_n)$ é n -linear. Se $n = 2$,

$$\begin{aligned} 2(f_1, f_2)(a_1, a_2) &= f_1(a_1)f_2(a_2) + f_1(a_2)f_2(a_1) = f_1(a_2)f_2(a_1) + f_1(a_1)f_2(a_2) = \\ &= 2(f_1, f_2)(a_2, a_1). \end{aligned}$$

logo (f_1, f_2) é simétrica. No caso geral, como S_n é gerado pelas transposições $(1\ 2), \dots, (1\ n)$, para provar que $(f_1, \dots, f_n)$ é simétrica, basta mostrar que,

$$(f_1, \dots, f_n)(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(n)}) = (f_1, \dots, f_n)(a_1, \dots, a_n).$$

Onde τ é uma das transposições acima, o que é facilmente mostrado por indução sobre n . CQD

Proposição 2 (Fórmula do binômio para potências principais à direita)

$$\text{Se } a, b \in A, \text{ então } (a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}).$$

Demonstração Faremos a demonstração por indução sobre n . Para $n = 1$ temos

$$\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (\text{id}_A) (a^{(1-i)}, b^{(i)}) = (\text{id}_A)(a^{(1)}, b^{(0)}) + (\text{id}_A)(a^{(0)}, b^{(1)}) = \text{id}_A(a) + \text{id}_A(b) = a + b.$$

Admitamos verdadeira a igualdade para $n \geq 1$. Então,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) a + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) b = \\
&= (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n)}) a + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) a + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) b + (\text{id}_A^{(n)}) (b^{(n)}) b = \\
&= (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n)}) a + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) a + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i-1)}) b + (\text{id}_A^{(n)}) (b^{(n)}) b = \\
&= (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n)}) a + \sum_{i=1}^n \left[\binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) a + \binom{n}{i-1} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i-1)}) b \right] + \\
&\quad + (\text{id}_A^{(n)}) (b^{(n)}) b.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
(n+1) (\text{id}_A^{(n+1)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i)}) &= (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i-1)}) b + (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) a + \dots + \\
&\quad + (\text{id}_A^{(n)}) (b^{(i)}, a^{(n-i)}) a + (\text{id}_A^{(n)}) (b^{(i-1)}, a^{(n+1-i)}) b + \dots + (\text{id}_A^{(n)}) (b, a^{(n+1-i)}, b^{(i-2)}) b = \\
&= (n+1-i) (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) a + i (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i-1)}) b.
\end{aligned}$$

mas,
$$\binom{n+1}{i} \frac{n+1-i}{n+1} = \binom{n}{i} \quad \text{e} \quad \binom{n+1}{i} \frac{i}{n+1} = \binom{n}{i-1}.$$

Assim,
$$\begin{aligned} &\binom{n+1}{i} (\text{id}_A^{(n+1)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i)}) = \\ &= \binom{n}{i} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n-i)}, b^{(i)}) a + \binom{n}{i-1} (\text{id}_A^{(n)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i-1)}) b. \end{aligned}$$

Como, $(\text{id}_A^{(n)}) (c^{(n)}) c = c^{n+1} = (\text{id}_A^{(n+1)}) (c^{(n+1)})$ para todo $c \in A$ temos

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (\text{id}_A^{(n+1)}) (a^{(n+1)}) + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} (\text{id}_A^{(n+1)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i)}) + (\text{id}_A^{(n+1)}) (b^{(n+1)}) = \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (\text{id}_A^{(n+1)}) (a^{(n+1-i)}, b^{(i)}). \quad \text{CQD}
\end{aligned}$$

Proposição 3 Se A, B são F -álgebras e $\mu: \bigoplus_n A \longrightarrow B$ é uma aplicação n -linear simétrica tal que $\mu(a_1^{(n-1)}, a_2) = 0$ para todo $a_1, a_2 \in A$, então $\mu = 0$.

Demonstração Provaremos por indução sobre j que, para todo j , $1 \leq j \leq n-1$ temos $\mu(a_1^{(n-j)}, a_2, \dots, a_{j+1}) = 0$ para todo $a_1, \dots, a_{j+1} \in A$. Como consequência, para $j = n-1$, obtemos $\mu(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \dots, a_n \in A$.

Para $j = 1$ é claro. Admitamos que:

$$\mu(a_1^{(n-(j-1))}, a_2, \dots, a_j) = 0 \text{ para todo } a_1, \dots, a_j \in A.$$

No lugar de a_1 coloquemos $a_1 + \lambda a_{j+1}$, onde $a_1, a_{j+1} \in A$ e $\lambda \in F$. Como μ é n -linear, desenvolvendo e colocando os λ 's em evidência, obtemos uma expressão do tipo,

$$0 = \mu((a_1 + \lambda a_{j+1})^{(n-(j-1))}, a_2, \dots, a_j) = b_1 + \lambda b_2 + \dots + \lambda^{n-j+1} b_{n-j+2},$$

$$\text{daí } b_1 = b_2 = \dots = b_{n-j+2} = 0.$$

Calculemos b_2 :

$$\begin{aligned}
0 = b_2 &= \mu(a_1^{(n-j)}, a_{j+1}, a_2, \dots, a_j) + \mu(a_1^{(n-j-1)}, a_{j+1}, a_1, a_2, \dots, a_j) + \\
&\mu(a_1^{(n-j-2)}, a_{j+1}, a_1^{(2)}, a_2, \dots, a_j) + \dots + \mu(a_{j+1}, a_1^{(n-j)}, a_2, \dots, a_j).
\end{aligned}$$

Como μ é simétrica, temos

$$0 = b_2 = (n-j+1)\mu(a_1^{(n-j)}, a_2, \dots, a_{j+1}), \text{ logo } \mu(a_1^{(n-j)}, a_2, \dots, a_{j+1}) = 0. \quad \text{CQD}$$

Lema 1 Sejam $r \in F$, $\gamma_0 = 1$ e $n \geq 2$. São válidas as seguintes igualdades:

$$\text{a) } 2r^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) r^{n-2-j} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (1 + [n-i, 1; r]);$$

b) Em $F[X]$ temos

$$2 \sum_{i=0}^{n-2} r^i X^{n-2-i} + \sum_{j=0}^{n-3} \left(\left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{n-3-j} r^i X^{n-3-j-i} \right) \right) = \\ \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r]) \right) X^{n-2-j};$$

c) Se r é uma raiz de $p = 2X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) X^{n-2-j} \in F[X]$ então,

$$p = (X - r) \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r]) \right) X^{n-2-j}.$$

Demonstração Faremos a demonstração por indução sobre n nos itens a) e b).

a) Para $n = 2$ é claro. Admitamos verdadeira a igualdade para $n \geq 2$, então

$$2r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) r^{n-1-j} = \left(2r^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) r^{n-2-j} \right) r + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i + 2\gamma_n = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (1 + [n-i, 1; r]) r + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i + 2\gamma_n.$$

Pela definição de $[n, j; r]$ temos

$$(1 + [n-i, 1; r]) r = r + [n-i, 1; r] r = r + \sum_{j=0}^{n-1-i} [n-1-i-j, 0; r] r^{j+1} = \\ = [n-i, 0; r] + \sum_{j=1}^{n-i} [n-i-j, 0; r] r^j = \sum_{j=0}^{n-i} [n-i-j, 0; r] r^j = [n+1-i, 1; r].$$

Por [Cap.4, Prop.1] temos

$$2r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) r^{n-1-j} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i [n+1-i, 1; r] + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i + 2\gamma_n = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (1 + [n+1-i, 1; r]) + \gamma_n (1 + [1, 1; r]) = \sum_{i=0}^n \gamma_i (1 + [n+1-i, 1; r]).$$

b) Para $n = 2$ é claro. Admitamos a igualdade verdadeira para $n \geq 2$. Pela hipótese de indução e pelo item a),

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} r^i X^{n-1-i} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{n-2-j} r^i X^{n-2-j-i} \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2 \sum_{i=0}^{n-2} r^i X^{n-2-i} + \sum_{j=0}^{n-3} \left(\left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{n-3-j} r^i X^{n-3-j-i} \right) \right) \right) X + 2r^{n-1} + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) r^{n-2-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r]) \right) X^{n-1-j} + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (1 + [n-i, 1; r]) = \\
&\quad \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r]) \right) X^{n-1-j}.
\end{aligned}$$

c) Pelo item b),

$$\begin{aligned}
p &= 2X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) X^{n-2-j} = \\
&= 2(X^{n-1} - r^{n-1}) + \sum_{j=0}^{n-3} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) (X^{n-2-j} - r^{n-2-j}) = \\
&= (X - r) \left(2 \sum_{i=0}^{n-2} r^i X^{n-2-i} + \sum_{j=0}^{n-3} \left(\left(\sum_{i=0}^j \gamma_i + 2\gamma_{j+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{n-3-j} r^i X^{n-3-j-i} \right) \right) \right) = \\
&= (X - r) \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i (1 + [j-i+1, 1; r]) \right) X^{n-2-j}. \quad \text{CQD}
\end{aligned}$$

Lema 2 Se $r, s \in F$ e $n \geq 2$, então em $F[X]$ temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j \left(\sum_{i=0}^{n-j-2} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) X^{n-j-i-2} \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i ([j-i+1, 1; r] + [j-i+1, 1; s]) \right) X^{n-2-j}.
\end{aligned}$$

Demonstração Faremos a demonstração por indução sobre n . Para $n = 2$ é claro.

Admitamos a igualdade verdadeira para $n \geq 2$. Então,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \left(\sum_{i=0}^{n-j-1} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) X^{n-j-i-1} \right) = \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j \left(\sum_{i=0}^{n-j-2} ([i+1, 1; r] + [i+1, 1; s]) X^{n-j-i-2} \right) \right) X + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i ([n-i, 1; r] + [n-i, 1; s]) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i([j-i+1, 1; r] + [j-i+1, 1; s]) \right) X^{n-1-j} + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i([n-i, 1; r] + [n-i, 1; s]) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^j \gamma_i([j-i+1, 1; r] + [j-i+1, 1; s]) \right) X^{n-1-j}. \quad \text{CQD}
\end{aligned}$$

Lema 3 *Sejam $n \geq 2$ e $p \in F$. Então,*

$$[n, 1; p] = 2p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p \quad e \quad [n, 1, \frac{1}{2}] = 1.$$

Demonstração a) Faremos a demonstração por indução sobre n . Se $n = 2$, por [Cap.4, Prop.1 b)], temos $[2, 1; p] = 2p$. Por [Cap.4, Prop.1 d)] temos

$$[n+1, 1, p] = [n, 1; p]p + [n, 0, p] = (2p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p)p + p = 2p^n + p^{n-1} + \dots + p.$$

b) Mesmos argumentos utilizados em a). CQD

Bibliografia

- [1] Abraham, V.M.: *A note on train algebras*, Proc. Edin. Math. Soc. (2) **20** (1976) 53-58.
- [2] Bernstein, S.: *Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. Paris **177** (1923) 528-531.
- [3] Bernstein, S.: *Principe de stationarité et généralisation de la loi de Mendel*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. Paris **177** (1923) 581-584.
- [4] Bernstein, S.: *Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity.*, U. Zap. Nauk - Issed. Kofedr.Ukrain. Oth. Mat. **1**, (1924) 83-115 (Russisch).
- [5] Costa, R.: *On the derivations of gametic algebras for polyploidy with multiple alleles*, Bol. Soc. Bras. Mat. (2) **13** (1982), 69-81.
- [6] Costa, R.: *A note on Bernstein algebras*, Linear Algebra and its Appl. **112** (1989) 195-205.
- [7] Costa, R.: *Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 5* , Proc. Edinb. Math. Soc. **33** (1990) 61-70 .
- [8] Costa, R.: *On train algebras of rank 3*, Linear Algebra and its Appl. **148** (1991) 1-12.
- [9] Costa, R.: *Some classes of train algebras of rank 4*, (Não publicado).
- [10] Costa, R. and Guzzo Jr, H.: *Indecomposable baric algebras*, Linear Algebra and its Appl. (to appear).

- [11] Etherington, I.M.H.: *On non-associative combinations*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **59** (1939) 153-162.
- [12] Etherington, I.M.H.: *Genetic Algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **59** (1939) 242-258.
- [13] Etherington, I.M.H.: *Commutative train algebras of ranks 2 and 3*, J. London Math. Soc. **15** (1940) 136-149. Corrigendum ibid **20** (1945) 238.
- [14] Etherington, I.M.H.: *Non-associative algebra and the symbolism of genetics*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **B 61** (1941) 24-42.
- [15] Etherington, I.M.H.: *Duplication of linear algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **6** (1941), 222-230.
- [16] Etherington, I.M.H.: *Special train algebras*, Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2) **12** (1941), 1-8.
- [17] Etherington, I.M.H.: *Non-commutative train algebras of ranks 2 and 3*, Proc. London Math. Soc. (2) **52** (1951), 241-252.
- [18] Glivenko, V.: *Algèbre mendélienne*, Comptes Rendus de l' Acad. des Sci. de l' URSS (13) **4** (1936) 385-386.
- [19] Gonshor, H: *Special train algebras arising in genetics* , Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **12** (1960), 41-53.
- [20] Gonshor, H: *Special train algebras arising in genetics II*, Proc. Edinb. Math Soc. (2) **14** (1965) 333-338.
- [21] Gonshor, H: *Contributions to genetic algebras*, Proc. Edinb. Math Soc. (2) **17** (1971) 289-298.
- [22] Gonshor, H: *Contributions to genetic algebras II*, Proc. Edinb. Math Soc. (2) **18** (1973) 273-279..

- [23] Gonshor, H: *Multi-algebra duplication*, J. of Math. Biology **25** (1987) 677-683.
- [24] Gonshor, H.: *Derivations in genetic algebras*, Comm. in Algebra (8) **16** (1988) 1525-1542.
- [25] Holgate, P.: *Genetic algebras associated with polyploidy*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **15** (1966) 1-9. Corrigendum. Ibid **17** (1970) 120.
- [26] Holgate, P.: *Jordan algebras arising in population genetics*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **15** (1967) 291-295. Corrigendum, Ibid **16** (1970) 120.
- [27] Holgate, P.: *The genetic algebra of k linked loci*, Proc. London Math. Soc. (3) **18** (1968) 315-327.
- [28] Holgate, P.: *Interaction between migration and breeding studied by means of genetic algebras*, J. Appl. Prob. **5** (1968) 1-8.
- [29] Holgate, P.: *Characterisations of genetic algebras*, J. London Math. Soc. (2) **6** (1972) 169-174.
- [30] Holgate, P.: *Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle*, J. London Math. Soc. (2) **9** (1975) 613-623.
- [31] Holgate, P.: *Free non-associative principal train algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. **27** (1984) 313-319.
- [32] Holgate, P.: *Some train algebras that are special triangular*, The Math. Student, **55** (2-4) (1987) 135-139.
- [33] Holgate, P.: *A train algebra that is not special triangular*, Arch. Math. vol. **50** (1988) 122-124.
- [34] Holgate, P.: *Three aspects of genetic algebra*, XI School of Algebra, São Paulo, (1990).
- [35] Holgate, P., Hentzel, I. and Peresi, L.A.: *On k^{th} order Bernstein algebras and stability at the $k+1$ generation in polyploids*, J. Math. Appl. Med. Bio. **7** (1990) 33-40.

- [36] Jacobson, N.: *Lectures in Abstract Algebra*, Van Nostrand, vol. I (1966).
- [37] Jacobson, N.: *Basic algebra*, vol. I, II, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1980).
- [38] Ljubič, Ju. I.: *Basic concepts and theorems of evolution genetics of free populations*, Uspehi Math.Nauk **26** 5 (161) (1971) 51-116. (Russisch). Englische Übersetzung: Russian Math. Surveys **26** 5 (1971) 51-123.
- [39] Ljubič, Ju. I.: *Bernsteinsche Algebren*. Uspehi Mat. Nauk. **32**, 6 (198) (1977) 261-262 (Russisch).
- [40] Ljubič, Ju. I.: *Algebraic method in evolutionary genetics*. Biom. J. **20** (1978) 511-529.
- [41] Ljubič, Ju. I.: *The classification of some types of Bernstein algebras*, Sel. Math. Sov. **6** (1987) 1-14.
- [42] Micali, A. and Ouatarra, M.: *Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington*, Linear Algebra and its App. **153** (1991) 193-207.
- [43] Osborn, J.M.: *Varieties of Algebras*, Advances in Math. **8** (1972) 163-369.
- [44] Ouatarra, M.: *Algèbres de Jordan et Algèbres Génétiques*, Cahiers Math. **37**, Montpellier, 1988.
- [45] Ouatarra, M.: *Sur les algèbres de Bernstein qui sont des T -algèbres*, Linear Algebra and its App. **148** (1991) 171-178.
- [46] Peresi, L.A.: *A note on duplication of algebras*, Linear Algebra and its App. **104** (1988) 65-69.
- [47] Peresi, L.A.: *Nilpotency in Bernstein algebras*, Arch. Math. **56** (1991) 437-439.
- [48] Rohrl, H and Walcher, S.: *Some classes of algebras and their derivation algebras*, Algebras, Groups and Geometries **4** (1987) 475-496.

- [49] Rohrl, H and Walcher, S.: *Algebras of complexity one*, Algebras, Groups and Geometries **5** (1988) 61-107.
- [50] Schafer, R.D.: *Structure of genetic algebras*, Amer. J. Math. **71** (1949) 121-153.
- [51] Schafer, R.D.: *Introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, (1966).
- [52] Suttles, D.: *A counterexample to a conjecture of Albert.*, Notices Amer. Math. Soc. **A 19** (1972) 566.
- [53] Walcher, S.: *Bernstein algebras which are Jordan algebras*, Arch. Math. **50** (1988) 218-222.
- [54] Walcher, S.: *Algebras which satisfy a train equation for the first three plenary powers*, Arch. Math. **56** (1991) 547-551.
- [55] Wörz, A.: *Algebras in Genetics*, Lecture Notes in Biomathematics **36**, Berlin-Heidelberg-New York (1980).
- [56] Zhevlakov, K.A.; Slin'ko, A.M.; Shestakov, I.P. and Shirshov, A.I.: *Rings that are nearly associative*, Inst.Math.Acad.Sci. of the U.S.S.R., Siberian Branch Novosibirsk, U.S.S.R., Academic Press, New York, (1982).