**ESTUDOS RECENTES SOBRE A
APLICAÇÃO DE GAUSS DE
SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{R}^3$ E $\mathbb{R}^4$**

Cristiana Bastos Paiva Valente

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA**

**Área de concentração: Geometria Diferencial
Orientador: Profa. Dra. Maria Elisa Galvão Gomes de Oliveira**

- São Paulo, setembro de 1991 -

AGRADECIMENTOS

À Profa. Maria Elisa G. G. de Oliveira por sua orientação dedicada e incansável.

Ao grupo de Geometria Diferencial, em especial à Profa. Célia Contin Góes, pelo apoio e disposição em assistir os meus seminários sobre o trabalho.

A todos os meus colegas que, de alguma forma, me deram seu apoio, em particular Elizabeth Ferreira Santos, Cristina de Abreu Suzuki e Albo Carlos Cavalheiro por suas palavras de estímulo nos momentos difíceis.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é estudar o comportamento da aplicação de Gauss de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e organizar sistematicamente os resultados obtidos nesta direção nos últimos vinte anos.

Iniciaremos estudando trabalhos de Osserman ([25], [26], [27], [28]) da década de 60. Em seguida, passamos ao resultado de Xavier [33], em 1981, que foi o primeiro a mostrar que a aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ não plana pode omitir no máximo um número finito de pontos. Chen [6] estendeu esse estudo para superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$, em 1982.

Earp e Rosenberg [11], usando as técnicas de Xavier, trabalharam com superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ de tipo topológico finito relacionando a curvatura total e a imagem da aplicação de Gauss. Estenderemos esse trabalho para superfícies em $\mathbb{R}^4$.

Em 1988, Fujimoto [14] provou que a imagem da aplicação de Gauss de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^3$ não plana omite no máximo quatro pontos em S^2 .

Baseados no artigo de Fujimoto [14], em 1990, Mo e Osserman [20] fizeram um estudo relacionando a distribuição da normal de Gauss de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e suas curvaturas totais, com o qual concluiremos este trabalho.

ABSTRACT

The objective of this work is to study the Gauss map of complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ and to explain systematically the results that have been obtained in the last twenty years.

We will start by studying Osserman's works ([25], [26], [27], [28]) which were published in the sixties. Afterwards, we will go on to Xavier's results [33] that were obtained in 1981. Xavier was the first to show that the Gauss map of a nonplanar complete minimal surface in $\mathbb{R}^3$ omits at most a finite number of points. In 1982, Chen [6] extended this study to complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$.

Earp and Rosenberg [11], using Xavier's approach, worked with complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ of finite topological type, relating the total curvature with the Gauss map. We will extend this work to surfaces in $\mathbb{R}^4$.

In 1988, Fujimoto [14] proved that the image of a nonplanar complete minimal surface in $\mathbb{R}^3$ omits at most four points in S^2 .

In 1990, Mo and Osserman [20], based on Fujimoto's paper [14], made a study of the distribution of the Gauss map of minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$. We will conclude this work with these recent results.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO 1 - Superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$	03
1.1. Teoria local e global de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$	03
1.2. A aplicação de Gauss generalizada	11
1.3. A representação de Weierstrass	14
CAPÍTULO 2 - Algumas propriedades de superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^n$	17
2.1. Uma estimativa para a curvatura gaussiana de superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^n$	18
2.2. As normais a uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$	32
2.3. As normais a uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$	45
CAPÍTULO 3 - Os teoremas de Xavier e de Earp e Rosenberg	50
3.1. O teorema de Xavier	50
3.2. O teorema de Earp e Rosenberg	57
CAPÍTULO 4 - Extensão dos teoremas de Xavier e de Earp e Rosenberg para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$	64
4.1. Extensão do teorema de Xavier para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$	65

4.2. Extensão do teorema de Earp e Rosenberg para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$	73
CAPÍTULO 5 - A imagem da aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas	
- uma extensão do teorema de Fujimoto	81
5.1. Um lema auxiliar	82
5.2. O teorema de Mo e Osserman para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$	84
5.3. O teorema de Mo e Osserman para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$	96
5.4. Conclusões	106
APÊNDICE	110
BIBLIOGRAFIA	113

INTRODUÇÃO

Em 1959, Osserman ([28], [29]) mostrou que o conjunto imagem da aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima regular não plana em $\mathbb{R}^n$ é denso em S^2 . Desde então, vários trabalhos importantes na Teoria das Superfícies Mínimas marcaram a evolução dos resultados relacionados com o comportamento da aplicação de Gauss. Entre esses trabalhos destacamos, a partir dos resultados devidos a Osserman, os artigos de F. Xavier [33], C.C. Chen [6], R.S. Earp - H. Rosenberg [11], H. Fujimoto [14] e X. Mo - R. Osserman [20].

O nosso objetivo é estudar resultados sobre o comportamento da imagem da aplicação de Gauss de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ obtidos nos últimos vinte anos, dando a eles uma organização sistemática.

Para isso destacamos no capítulo 1 algumas definições e fatos básicos da teoria local e global das superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$.

No capítulo 2 apresentaremos a sequência do trabalho de Osserman [25]. Provaremos que se a aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ omite uma vizinhança de alguma direção, então S é um plano. O mesmo resultado é válido se a aplicação normal de Gauss omite um conjunto de capacidade positiva. Para superfícies mínimas completas de curvatura total finita, mostraremos que se a aplicação normal de Gauss omite mais que três pontos, então S é um plano.

Também apresentaremos outros resultados de Osserman [25] relacionando a distribuição das normais de uma superfície mínima com a sua curvatura total.

As superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ também foram estudadas por Osserman [25] em seu trabalho, tendo sido obtidos resultados análogos.

Xavier [33] provou, em 1981, que se a aplicação de Gauss de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^3$ omite mais que seis pontos de S^2 , então S é um plano, reduzindo, pela primeira vez, o conjunto dos pontos omitidos a um conjunto finito. No ano seguinte, Chen [6] estendeu esse estudo para superfícies completas em $\mathbb{R}^4$, mostrando que se as projeções

da aplicação de Gauss generalizada de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^4$ omitem mais que seis pontos de S^2 , ou uma projeção é constante e a outra omite mais que quatro pontos, então S é um plano.

Earp e Rosenberg [11] também usaram as técnicas de Xavier e, com resultados de Osserman, demonstraram que se a curvatura de uma superfície mínima completa não-plana S em $\mathbb{R}^3$, de tipo topológico finito, é infinita, então g assume todos os valores infinitas vezes, exceto, no máximo, seis valores; ou se a curvatura total de S é finita, então g assume no máximo três valores.

É natural que esse estudo possa ser estendido para as superfícies em $\mathbb{R}^4$ e isto será apresentado no capítulo 4.

Em 1988, Fujimoto [14] provou que a imagem de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^3$ não plana omite no máximo quatro pontos em S^2 .

Mo e Osserman [20], inspirados nesse teorema e nos resultados já obtidos por Osserman, provaram que se a aplicação de Gauss de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^3$ assume cinco pontos de S^2 apenas um número finito de vezes, então S tem curvatura total finita. Eles também estenderam esse estudo para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$, provando um resultado análogo.

Através de exemplos, podemos mostrar que as afirmações desse último resultado são as melhores possíveis. Finalmente, resumiremos os resultados de Osserman [25] e de Mo e Osserman [20] e mostraremos como eles completam a descrição da aplicação de Gauss de superfícies de curvatura total finita e infinita em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, deixando em aberto a questão da existência de uma superfície mínima completa com curvatura total finita cuja imagem da aplicação normal de Gauss omite três valores na esfera.

Algumas definições e resultados sobre superfícies de Riemann, assim como alguns teoremas de Funções Analíticas, que serão utilizados no trabalho, serão apresentados no apêndice.

SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo, apresentamos um resumo dos principais resultados da teoria local e global das superfícies mínimas orientáveis em $\mathbb{R}^n$, destacando, em especial, as superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^4$, que nos interessam e serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1. Teoria local e global das superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$

Denotaremos $\mathbb{R}^n$ o *espaço euclidiano n -dimensional* e $\langle, \rangle$ o produto interno usual, isto é, $\langle \mu, \omega \rangle = \mu_1 \omega_1 + \cdots + \mu_n \omega_n$, se $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$; um *domínio* $D \subset \mathbb{R}^n$ será um conjunto aberto conexo.

Uma *superfície parametrizada regular* de classe C^k em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k dada por $X(\xi, \eta) = (x_1(\xi, \eta), \dots, x_n(\xi, \eta))$ para todo par (ξ, η) pertencente a um domínio D , tal que em cada ponto de D uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:

(i) $\frac{\partial X}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial X}{\partial \eta}$ são linearmente independentes;

(ii) $M = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi} & \frac{\partial x_n}{\partial \eta} \end{bmatrix}$ tem posto 2;

(iii) existem i, j tais que $\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0$;

(iv) $\left\| \frac{\partial X}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\| \neq 0$;

(v) $\det \mathcal{O} > 0$, onde $\mathcal{O} = M^t M$.

Considerando $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada regular de classe C^k em $\mathbb{R}^n$ e um ponto $p = (\xi, \eta) \in D$, o *plano tangente* da superfície em p , denotado por Π_p , é o espaço gerado pelos vetores $\frac{\partial X}{\partial \xi}(p)$ e $\frac{\partial X}{\partial \eta}(p)$.

Dado $v \in \Pi_p$, podemos escrever $v = v_1 \frac{\partial X}{\partial \xi} + v_2 \frac{\partial X}{\partial \eta}$. Seja Δ um domínio em $\mathbb{R}^2$ tal que $\overline{\Delta} \subset D$. Definimos a *área da superfície* $X|_{\Delta} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$A = \iint_{\Delta} \sqrt{\det \mathcal{O}} d\xi d\eta.$$

Sendo $\phi : \tilde{D} \rightarrow D$ um difeomorfismo de classe C^k , onde $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio, a aplicação $\tilde{X} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\tilde{X} = X \circ \phi$ define uma nova superfície parametrizada de classe C^k chamada uma *reparametrização* de X . Dizemos que $\tilde{X}$ é obtida de X por uma mudança de parâmetros.

Observamos que o plano tangente e a área independem dos parâmetros.

Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *curva na superfície* $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ se $\gamma([a, b]) \subset X(D)$, ou seja, se existe uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ tal que $\gamma = X \circ \alpha$.

Escrevendo $\alpha(t) = (\xi(t), \eta(t))$, temos que $\gamma(t) = X(\xi(t), \eta(t))$ e $\gamma'(t) = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}$.

Dizemos que γ é *regular* em $[a, b]$ se, e somente se $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$.

Observamos que o plano tangente da superfície num ponto p é o conjunto dos vetores tangentes a curvas contidas na superfície passando pelo ponto $P = X(p)$.

Tomemos $v \in \Pi_p; v = \frac{d\xi}{dt} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial X}{\partial \eta}$. Escrevemos

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\rangle \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\rangle \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left\langle \frac{\partial X}{\partial \eta}, \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\rangle \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 = \\ &= c_{11} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + 2c_{12} \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} + c_{22} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

e definimos a *primeira forma fundamental* da superfície como a forma quadrática

$$I(v) = c_{11} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + 2c_{12} \frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} + c_{22} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2$$

cujas matriz é $C = (c_{ij})$.

O comprimento da curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ será dado por $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ e, para qualquer curva γ na superfície, podemos definir a função comprimento de arco $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt$.

Temos que toda curva regular pode ser reparametrizada, localmente, pelo comprimento de arco.

Chamamos $\Pi_p^\perp$ o *complemento ortogonal* a Π_p ; um vetor $N \in \Pi_p^\perp$ é uma *normal da superfície* em $P = X(p)$.

Sendo γ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco contida na superfície parametrizada $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ que passa por $P = X(p)$, denotamos $\frac{d^2 X}{ds^2}$ o vetor curvatura de γ ; a projeção desse vetor sobre uma normal $N \in \Pi_p^\perp$ é

$$\left\langle \frac{d^2 X}{ds^2}, N \right\rangle = b_{11}(N) \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 + 2b_{12}(N) \frac{d\xi}{ds} \frac{d\eta}{ds} + b_{22}(N) \left(\frac{d\eta}{ds} \right)^2,$$

onde $b_{11}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}, N \right\rangle$, $b_{12}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta}, N \right\rangle$ e $b_{22}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2}, N \right\rangle$.

Então definimos a *segunda forma fundamental* da superfície como a forma quadrática

$$II_N(b) = b_{11}(N) \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 + 2b_{12}(N) \frac{d\xi}{ds} \frac{d\eta}{ds} + b_{22}(N) \left(\frac{d\eta}{ds} \right)^2$$

cuja matriz é $B = (b_{ij}(N))$.

Para cada normal, N , da superfície exprimimos a *curvatura normal* por

$$K_N(v) = \frac{II_N(v)}{I(v)}$$

Como K_N assume máximo e mínimo no círculo unitário, denominamos *curvaturas principais* da superfície na direção N os valores:

$$k_1(N) = \min_{\|v\|=1} K_N(v) \quad \text{e} \quad k_2(N) = \max_{\|v\|=1} K_N(v)$$

As funções $K(N) = k_1(N).k_2(N)$ e $H(N) = \frac{k_1(N)+k_2(N)}{2}$ são chamadas, respectivamente, *curvatura gaussiana* e *curvatura média* da superfície em relação ao vetor normal N .

Podemos escrever $H(N) = \frac{c_{22}b_{11}(N) - 2c_{12}b_{12}(N) + c_{11}b_{22}(N)}{\det(c_{ij})}$. A função $H : \Pi_p^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear definido no espaço vetorial $\Pi_p^\perp$ e existe um único vetor $\vec{H}$, chamado vetor curvatura média, tal que $H(N) = \langle N, \vec{H} \rangle$.

Notemos também que K independe da escolha dos parâmetros, e H troca de sinal se mudamos a orientação.

Uma superfície parametrizada regular é uma *superfície mínima* se $H(N) = 0$, $\forall N \in \Pi^\perp$ (ou $\vec{H} = \vec{0}$).

Os parâmetros (ξ, η) de uma superfície parametrizada regular, $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, são chamados *parâmetros isotérmicos*, se $c_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ onde $\lambda = \lambda(\xi, \eta) > 0$ em D .

Em cada ponto $p \in D$ vale que $\frac{\partial X}{\partial \xi}(p) \perp \frac{\partial X}{\partial \eta}(p)$ e $\lambda(p) = \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi}(p) \right\| = \left\| \frac{\partial X}{\partial \eta}(p) \right\|$.

Vamos enunciar alguns resultados que se encontram em [27].

Lema 1.1.1: Consideremos $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada localmente por

$\zeta = \xi + i\eta$. Se $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $\varphi_k(\zeta) = \frac{\partial X_k}{\partial \xi}(\zeta) - i \frac{\partial X_k}{\partial \eta}(\zeta)$, $k = 1, \dots, n$, então

- (i) $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\rangle$;
- (ii) $\sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|^2$;
- (iii) φ_k é analítica se, e somente se x_k é harmônica;
- (iv) (ξ, η) são parâmetros isotérmicos se, e somente se $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \equiv 0$.

Sendo (ξ, η) parâmetros isotérmicos, temos ainda

- (v) a superfície é regular se, e somente se $\sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 = 2\lambda^2$ nunca se anula; a métrica induzida é dada por $ds^2 = \lambda^2 |d\zeta|^2$;
- (vi) $\Delta X = 2\lambda^2 \vec{H}$, onde $\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ e $\vec{H}$ é o vetor curvatura média da superfície;
- (vii) a curvatura gaussiana da superfície é dada por $K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$.

Algumas propriedades ficam bastante simplificadas se as superfícies são parametrizadas por parâmetros isotérmicos. O teorema que virá a seguir nos garante que sempre existe uma reparametrização para superfícies regulares.

Teorema 1.1.2: Para cada ponto de uma superfície regular existe uma vizinhança onde existe uma reparametrização por parâmetros isotérmicos.

Em particular, o teorema é válido para superfícies mínimas e temos:

Corolário 1.1.3: Seja $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície. Os parâmetros (ξ, η) são isotérmicos se, e somente se X é uma aplicação conforme.

Corolário 1.1.4: Uma superfície é mínima se, e somente se as funções coordenadas x_k , $1 \leq k \leq n$, são funções harmônicas dos parâmetros isotérmicos.

Teorema 1.1.5: Se $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma superfície mínima regular parametrizada, localmente, por parâmetros isotérmicos $\zeta = (\xi, \eta)$, então as funções $\varphi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi}(\zeta) - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}(\zeta)$ são analíticas e satisfazem

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \equiv 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 \neq 0.$$

Reciprocamente, se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ são funções analíticas tais que $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \equiv 0$ e $\sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 \neq 0$ em um domínio simplesmente conexo D , então existe uma superfície mínima regular, $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\varphi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi}(\zeta) - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}(\zeta)$, isto é, $x_k = \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(\zeta) d\zeta$.

A definição local de uma superfície $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, motiva uma definição global que daremos a seguir.

Uma *variedade* n -dimensional M é um espaço topológico de Hausdorff tal que, para cada ponto existe uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Um *atlas* de M é uma coleção $\mathcal{A} = \{(R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha) | F_\alpha : R_\alpha \rightarrow O_\alpha \text{ homeomorfismo, } R_\alpha \text{ aberto de } \mathbb{R}^n, O_\alpha \text{ aberto de } M \text{ com } \cup_\alpha O_\alpha = M\}$.

Dizemos que um atlas $\mathcal{A}$ é uma *estrutura diferenciável* de classe C^r sobre M se $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ é de classe C^r , $\forall \alpha, \beta$; e é uma *estrutura conforme* sobre M se $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ é conforme, $\forall \alpha, \beta$.

Também, M é *orientável* se $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ preserva a orientação de $\mathbb{R}^n$ onde estiver definido, $\forall \alpha, \beta$.

Uma variedade bidimensional com uma estrutura conforme é também chamada *Superfície de Riemann*.

Uma *superfície* S em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r ($r > 1$), onde M é uma variedade diferenciável bidimensional de classe C^r .

As propriedades globais de S são as propriedades globais de M , isto é, S é simplesmente conexa, compacta, orientável, etc., se M o é. S é *regular* se localmente é uma superfície parametrizada regular, de forma que temos naturalmente definidos plano tangente, as curvaturas gaussiana e média, etc. A *curvatura total* de S é $c(S) = \int \int_M K dA$, onde K é a curvatura gaussiana de S .

Uma superfície regular de classe C^r , S , em $\mathbb{R}^n$, é uma *superfície mínima* se seu vetor curvatura média é identicamente nulo. Observamos que $c(S) \leq 0$ e dizemos que S tem curvatura total finita se $c(S) > -\infty$. Temos:

Lema 1.1.5: Se S é uma superfície mínima regular definida por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, então S induz uma estrutura conforme sobre M .

Concluimos que uma superfície mínima é de Riemann.

Vamos apresentar agora mais alguns conceitos e resultados globais.

Sejam M uma variedade n -dimensional de classe C^r e $\mathcal{A} = \{(R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha)\}$ o atlas de M . Uma *estrutura riemanniana* de classe C^q , $q \leq r$, é uma coleção de matrizes G_α , onde cada elemento de G_α é uma função C^q sobre O_α e, em cada ponto, G_α é positiva definida; além disso, se $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, temos definida $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ tal que $G_\beta = U^t G_\alpha U$, onde U é a matriz jacobiana de $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$.

Essa estrutura induz um produto interno em TM dado por $g(u, v) = u^t G_\alpha v$, onde $u, v \in T_P M$ e $P \in M$. (M, g) é denominada *variedade riemanniana*.

Considerando (M, g) uma variedade riemanniana e P, Q pontos quaisquer de M , dizemos que $\rho(P, Q) = \inf\{L(\gamma), \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ diferenciável, } \gamma(a) = P \text{ e } \gamma(b) = Q\}$ é a *distância entre P e Q sobre M* , onde $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ com $\|\gamma'(t)\|^2 = g(\gamma'(t), \gamma'(t))$. A função ρ define uma *distância* sobre M ; (M, ρ) é um espaço métrico e temos os seguintes teoremas:

Teorema 1.1.6: ([15], p. 56)

Sejam (M, g) uma variedade riemanniana e ρ a distância associada. Então (M, ρ) é um espaço métrico completo se todos os conjuntos fechados e limitados de M são compactos de M .

Um *caminho divergente* em M é uma aplicação contínua $c : [0, +\infty) \rightarrow M$ tal que para todo conjunto compacto $Q \subset M$, existe $t_0 \in [0, +\infty)$ tal que $c([t_0, +\infty)) \subset M \setminus Q$.

Dizemos que uma variedade riemanniana (M, g) é *completa*, em relação à métrica g , se todo caminho divergente tem comprimento infinito.

Relacionando os dois conceitos de completamento temos:

Teorema 1.1.7: ([15], p. 56)

(M, g) é completa se, e somente se (M, ρ) é completa.

Sejam M e $\widehat{M}$ duas variedades n -dimensionais. A aplicação $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ é uma *aplicação de recobrimento* de M , se

- (i) π é contínua e $\pi(\widehat{M}) = M$;
- (ii) todo ponto $P \in M$ admite uma vizinhança $U \subset M$ com $\pi^{-1}(U) = \cup_{\alpha} V_{\alpha}$, onde V_{α} são abertos dois a dois disjuntos de $\widehat{M}$, tais que $\pi|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo.

$\widehat{M}$ é chamada variedade de recobrimento de M ou espaço de recobrimento de M .

Como nosso principal interesse é fazer um estudo sobre superfícies, precisaremos de resultados relacionados com variedades bidimensionais, sendo que alguns destes só são

válidos para variedades simplesmente conexas. O teorema a seguir afirma que se temos uma variedade conexa bidimensional podemos passar, através de uma aplicação de recobrimento, a uma variedades bidimensional simplesmente conexa.

Teorema 1.1.8: [31]

Toda variedade conexa bidimensional M admite um espaço de recobrimento $\widehat{M}$ simplesmente conexo.

A superfície $\widehat{M}$ é chamada de *superfície de recobrimento universal* de M .

Um importante resultado é o Teorema da Uniformização de Koebe:

Teorema 1.1.9: ([2], III - 11G)

A superfície de recobrimento universal $\widehat{M}$ de uma superfície riemanniana é conformemente equivalente ao disco unitário, ao plano ou à esfera.

Uma consequência importante é:

Teorema 1.1.10: ([15], p. 67)

Toda superfície mínima simplesmente conexa S admite uma reparametrização na forma $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde M é o disco unitário, ou o plano todo.

Um problema a ser considerado é se uma aplicação de recobrimento conserva o completamento. O teorema que esclarece essa questão é:

Teorema 1.1.11: ([15], p. 58)

Seja $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento onde $(\widehat{M}, \widehat{g})$ e (M, g) são variedades riemannianas e $\widehat{g}$ é a métrica induzida sobre $\widehat{M}$ por π dada por $\widehat{g}_p(u, v) = g_{\pi(p)}(d\pi(u), d\pi(v))$. Então (M, g) é completa se, e somente se $(\widehat{M}, \widehat{g})$ é completa.

1.2. A aplicação de Gauss generalizada

Se S é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, então definimos a *aplicação normal de Gauss clássica* como sendo a aplicação $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que a cada $p \in M$ associa a normal à superfície S , $N(p)$, em $P = X(p)$.

É natural a generalização desse conceito para superfícies em $\mathbb{R}^n$. Para esta generalização, denotaremos por $G_{2,n}$ o conjunto dos planos orientados em $\mathbb{R}^n$. $G_{2,n}$ é chamado *grassmanniana dos 2-planos orientados em $\mathbb{R}^n$* .

A *aplicação de Gauss generalizada* de uma superfície regular orientada S é a aplicação $G : M \rightarrow G_{2,n}$, dada por $G(p) = T_p S$.

$G_{2,n}$ admite uma identificação natural com um conjunto Q_{n-2} , que definiremos a seguir, e para mostrarmos isso consideremos em $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ a seguinte relação de equivalência $\sim : z \sim w$ se, e somente se existe $l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $z = lw, \forall z, w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

O *espaço projetivo complexo $(n-1)$ -dimensional CP^{n-1}* é o espaço quociente de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ pela relação de equivalência $\sim$.

Temos a aplicação quociente:

$$\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow CP^{n-1}, \quad \text{onde} \quad [z] = [(z_1, z_2, \dots, z_n)]$$

$$z \mapsto [z]$$

e $(z_1, \dots, z_n)$ são as *coordenadas homogêneas* de z .

Chamamos *quádrica* do espaço projetivo CP^{n-1} o conjunto

$$Q_{n-2} = \{[z] \in CP^{n-1} \mid \sum_{k=1}^n z_k^2 = 0, z = (z_1, \dots, z_n)\}$$

Se $[(a_1, \dots, a_n)] \in Q_{n-2}$, $H = \{[z] \in CP^{n-1} \mid \sum_{k=1}^n a_k z_k = 0\}$ é um *hiperplano tangente* a Q_{n-2} .

Sejam $\Pi \in G_{2,n}$ e $\{v, w\}$ uma base ortogonal positiva de Π tal que $\|v\| = \|w\|$.

Definimos:

$$G_{2,n} \rightarrow Q_{n-2}$$

$$\Pi \mapsto [(v + iw)].$$

Essa aplicação é bijetora e nos permite identificar $G_{2,n}$ com Q_{n-2} .

A aplicação de Gauss generalizada poderá ser

$$G : M \rightarrow Q_{n-2} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$$

$$p \mapsto [(v(p) + iw(p))],$$

considerando $p \mapsto \Pi(p) \mapsto [(v(p) + iw(p))]$, onde $\{v(p), w(p)\}$ é uma base ortogonal positiva de Π_p .

Se $\zeta(\xi, \eta)$ são parâmetros isotérmicos numa vizinhança de um ponto $p \in M$, então os vetores $\frac{\partial X}{\partial \xi}(p)$, $\frac{\partial X}{\partial \eta}(p)$ são ortogonais e $\|\frac{\partial X}{\partial \xi}(p)\| = \|\frac{\partial X}{\partial \eta}(p)\|$. Logo, a aplicação de Gauss generalizada pode ser dada localmente por

$$G : M \rightarrow Q_{n-2} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$$

$$\zeta \mapsto \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}(\zeta) + i \frac{\partial X}{\partial \eta}(\zeta) \right) \right],$$

e como $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$, podemos escrever $G(\zeta) = [(\bar{\varphi}_1(\zeta), \dots, \bar{\varphi}_n(\zeta))]$.

Uma observação importante a ser feita é que a curvatura total de uma superfície mínima regular é, a menos de sinal, o oposto da área de imagem da superfície através da aplicação de Gauss generalizada.

Se a curvatura total é finita, então podemos enunciar o teorema de Chern-Osserman:

Teorema 1.2.1: ([9], [18])

Seja S uma superfície mínima regular completa dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se a curvatura total de S é finita, então:

- (i) M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\bar{M}_\gamma$, de gênero γ , exceto um número finito de pontos $\{p_1, \dots, p_r\}$ (isto é, M é do tipo *topológico finito*);
- (ii) as 1-formas $\alpha_k = \varphi_k(\zeta) d\zeta$ são analíticas ou têm polo em cada $p_j \in \bar{M} \setminus M$;
- (iii) a aplicação de Gauss $\bar{G} = [(\varphi_1, \dots, \varphi_n)]$ tem um polo em p_j de ordem $m_j \geq 2$, onde m_j é a ordem máxima de polo de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ em p_j ;
- (iv) a aplicação de Gauss tem extensão analítica a $\bar{M}$ e sua imagem, contando as multiplicidades, tem área $-c(S)$, isto é, $c(S) = -2\pi m$, para algum inteiro m .

Em particular, se S é uma superfície em $\mathbb{R}^3$, então a curvatura total de S é $c(S) = 4\pi m$, onde m é o grau de g . E sendo S uma superfície em $\mathbb{R}^4$, sua curvatura total é $c(S) = -2\pi(m_1 + m_2)$, onde m_1 e m_2 são os graus de g_1 e g_2 , respectivamente.

Daremos as seguir algumas propriedades da aplicação generalizada para superfícies em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Podemos identificar Q_1 com a esfera S^2 através da aplicação biholomorfa

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow Q_1^* = \{[(z_1, z_2, z_3)] \in Q_1 \mid z_3 \neq 0\} \\ w &\mapsto \left[\left(\frac{1}{2} \left(w - \frac{1}{w} \right), \frac{1}{2i} \left(w + \frac{1}{w} \right), 1 \right) \right] \end{aligned} \quad ,$$

que se estende de forma holomorfa a Q_1 . Observamos que, com essa identificação, a aplicação de Gauss generalizada de S , $G : M \rightarrow Q_1 \cong S^2$, coincide com a aplicação normal de Gauss.

Consideremos agora S uma superfície em $\mathbb{R}^4$ dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$.

Podemos identificar a quádrlica Q_2 com $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ através da aplicação biholomorfa

$$J : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow Q_2 \setminus H$$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto [(1 + \omega_1\omega_2, i(1 - \omega_1\omega_2), \omega_1 - \omega_2, -i(\omega_1 + \omega_2))] \quad ,$$

onde $H = \{[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{CP}^3 \mid z_1 + iz_2\}$ é o hiperplano tangente a Q_{n-2} ; podemos verificar que J se estende a uma aplicação biholomorfa de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sobre Q_2 .

Por outro lado, temos a carta local $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ dada por $\varphi(\omega) = [(\omega, 1)]$ que nos permite construir uma aplicação biholomorfa entre Q_2 e $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Se consideramos em $\mathbb{CP}^3$ a métrica de Fubini-Study, $ds^2 = 2 \frac{|z \wedge dz|^2}{|z|^4}$, o pull-back da métrica ds^2 por J é $J^*(ds^2) = 2 \frac{|d\omega_1|^2}{(1 + |\omega_1|^2)^2} + 2 \frac{|d\omega_2|^2}{(1 + |\omega_2|^2)^2}$ e o pull-back de ds^2 por φ é $\varphi^*(ds^2) = 2 \frac{|d\omega|^2}{(1 + |\omega|^2)^2}$ que é a métrica na esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Então a métrica em Q_2 , $J^*(ds^2)$, é justamente a métrica produto, onde cada fator tem a métrica da esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Em outras palavras, $J^*(ds^2)$ corresponde exatamente à métrica produto de $S^2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Concluimos que existe uma identificação de Q_2 com $S^2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$ e podemos escrever localmente $\overline{G}(\zeta) = [\phi(\zeta)]$, com $\phi(\zeta) = J(g_1(\zeta), g_2(\zeta))$, considerando J tal que $J^{-1} = (H_1, H_2)$, onde $g_k(\zeta) = H_k \circ \overline{G}(\zeta)$, $k = 1, 2$.

Utilizaremos essas propriedades nos próximos capítulos.

1.3. A representação de Weierstrass

Um importante resultado sobre superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$ é:

Teorema 1.3.1: [18]

Seja S uma superfície mínima regular conexa orientável, dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Os parâmetros isotérmicos dão uma estrutura conforme para M e existem n 1-formas diferenciáveis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ globalmente definidas em M tais que

- (i) localmente $\alpha_k = \varphi_k(\zeta) d\zeta$, onde $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi}(\zeta) - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$, $\zeta = \xi + i\eta$ são parâmetros isotérmicos, $i \leq k \leq n$;
- (ii) α_k analítica, $1 \leq k \leq n$;
- (iii) $x_k(\zeta) = \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \alpha_k$, com $\zeta_0, \zeta \in M$, $1 \leq i \leq n$.

As formas α_k 's são denominadas *formas de Weierstrass*.

Vimos no Teorema 1.3.1 a representação de uma superfície mínima por suas formas de Weierstrass e esta pode ser descrita de uma maneira diferente dependendo da dimensão do espaço ambiente. Daremos versões desse teorema para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Teorema 1.3.2: [18]

Seja S uma superfície mínima regular orientável dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde M

está parametrizada localmente pelos parâmetros isotérmicos $\zeta = (\xi, \eta)$. Existem em M 1-formas holomorfas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ globalmente definidas que satisfazem as seguintes condições:

- (i) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \equiv 0$;
- (ii) $\alpha_k = \varphi_k(\zeta) d\zeta$ e $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$, $k = 1, 2, 3$.

Além disso, se $\alpha_1 \neq i\alpha_2$, então podemos definir as funções $f(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)$ e $g(\zeta) = \frac{\varphi_3(\zeta)}{\varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)}$, e temos que:

- (iii) f é analítica, g é meromorfa em M e

$$\varphi_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2), \quad \varphi_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2), \quad \varphi_3 = fg;$$

- (iv) $ds^2 = \frac{1}{2}|f|^2(1 + |g|^2)^2|d\zeta|^2$ e a regularidade de S é equivalente a : $P \in M$ é um zero de f de ordem $2m$ se, e somente se P é um polo de ordem m de g ;
- (v) se N é a aplicação normal de Gauss de S , então $N = F \circ g$, onde F^{-1} é a projeção estereográfica da esfera S^2 .

Reciprocamente, se $f d\zeta$ e g são definidas sobre uma superfície de Riemann M satisfazendo (iii), (iv) e as 1-formas analíticas $\alpha_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2) d\zeta$, $\alpha_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2) d\zeta$, $\alpha_3 = fg d\zeta$ não tem períodos reais (isto é, $\text{Re} \int_\gamma \alpha_k = 0$, onde γ é uma curva fechada qualquer, $k = 1, 2, 3$) então $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $x_k(P) = \text{Re} \int_{P_0}^P \alpha_k$, $k = 1, 2, 3$, define uma superfície mínima regular em $\mathbb{R}^3$.

Dizemos que $X(P) = \text{Re} \int_{P_0}^P \frac{f}{2}(1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) d\zeta$ é a *representação de Weierstrass* para a superfície S em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.3.3: [18]

Consideremos S uma superfície mínima regular orientável dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde M está parametrizada localmente pelos parâmetros isotérmicos (ξ, η) . Existem, em M 1-formas holomorfas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ globalmente definidas tais que:

- (i) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 \equiv 0$;
- (ii) $\alpha_k = \varphi_k(\zeta) d\zeta$, com $\zeta = \xi + i\eta$ e $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$, $k = 1, \dots, 4$;

Além disso, se $\alpha_1 \neq i\alpha_2$, então podemos definir as funções $f(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)$,

$$g_1(\zeta) = \frac{\varphi_3(\zeta) + i\varphi_4(\zeta)}{\varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)} \quad \text{e} \quad g_2(\zeta) = \frac{\varphi_3(\zeta) - i\varphi_4(\zeta)}{\varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)}$$

e temos que

(iii) f é analítica, g_1 e g_2 são meromorfas em M tais que para todo zero P de f a ordem de zero de f em P é igual à máxima ordem de polo de g_1, g_2 e $g_1 \cdot g_2$ neste mesmo ponto;

$$\varphi_1 = \frac{f}{2}(1 + g_1 g_2), \quad \varphi_2 = \frac{if}{2}(1 - g_1 g_2), \quad \varphi_3 = \frac{f}{2}(g_1 - g_2) \quad \text{e} \quad \varphi_4 = -\frac{if}{2}(g_1 + g_2);$$

(iv) $ds^2 = \frac{1}{2}|f|^2(1 + |g_1|^2)(1 + |g_2|^2)|d\zeta|$.

Reciprocamente, se $f d\zeta, g_1$ e g_2 são definidas sobre uma superfície de Riemann M satisfazendo (iii) e (iv) e as 1-formas analíticas $\alpha_1 = \frac{f}{2}(1 + g_1 g_2) d\zeta$, $\alpha_2 = \frac{if}{2}(1 - g_1 g_2) d\zeta$, $\alpha_3 = \frac{f}{2}(g_1 - g_2) d\zeta$ e $\alpha_4 = -\frac{if}{2}(g_1 + g_2) d\zeta$ não tem períodos reais, então $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $x_k(P) = \operatorname{Re} \int_{P_0}^P \alpha_k$, $k = 1, \dots, 4$, define uma superfície mínima regular em $\mathbb{R}^4$.

Dizemos que

$$X(P) = \operatorname{Re} \int_{P_0}^P \frac{f}{2}(1 + g_1 g_2, i(1 - g_1 g_2), g_1 - g_2, -i(g_1 + g_2)) d\zeta$$

é a *representação de Weierstrass generalizada* para a superfície S em $\mathbb{R}^4$.

CAPÍTULO 2

ALGUMAS PROPRIEDADES DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPLETAS EM $\mathbb{R}^n$

Ossermann ([28], [29]) mostrou em 1959 que o conjunto imagem da aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima regular completa em $\mathbb{R}^n$ é denso na esfera unitária ou a superfície é um plano. Neste capítulo serão apresentados resultados relacionados com esse fato.

Inicialmente provaremos que se as normais a uma superfície mínima completa S em $\mathbb{R}^n$ omitem uma vizinhança de alguma direção, então S é um plano. Além disso, mostraremos também que se S é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$ e as suas normais em um ponto qualquer P fazem um ângulo de pelo menos $\alpha > 0$ com alguma direção fixada, então a curvatura gaussiana é tal que

$$|K(P)| \leq \frac{1}{d^2} \frac{16(n-1)}{\sin^4 \alpha},$$

onde d é a distância de P a fronteira de S .

Com isso podemos verificar que se S é uma superfície completa então $K \equiv 0$ e, portanto, S é um plano.

Estabeleceremos também algumas relações entre a curvatura total de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e a distribuição das suas normais. Se a superfície é mínima e completa em $\mathbb{R}^3$, teremos três possibilidades a considerar:

- (i) a curvatura total de S é infinita: neste caso, as normais assumirão toda direção infinitas vezes, exceto, no máximo, um conjunto de capacidade zero;
- (ii) a curvatura total de S é finita, não nula: verificaremos que as normais de S assumem todas as direções, exceto, no máximo, três direções;

(iii) a curvatura total de S é zero: S é um plano.

No final deste capítulo provaremos que se a aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^3$ omite um conjunto de capacidade positiva então S é um plano. Esse resultado pode ser estendido para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$. Verificaremos que se a imagem de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^4$ através da aplicação generalizada de Gauss é um conjunto cujas projeções em S_1 e S_2 omitem conjuntos de capacidade positiva, então S é um plano.

Assim, relacionamos a aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ com conjuntos de capacidade positiva.

Esses resultados foram obtidos por Ossermann [25].

2.1. Uma estimativa para a curvatura gaussiana de superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\zeta = \xi + i\eta$ parâmetros isotérmicos para a superfície mínima e $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ com $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$, $k = 1, \dots, n$.

Para as demonstrações dos teoremas que virão a seguir precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 2.1.1: Em um ponto P de uma superfície mínima S em $\mathbb{R}^n$ todo vetor normal faz um ângulo de pelo menos α com o eixo x_n se, e somente se

$$\frac{|\varphi_n(P)|^2}{|\varphi(P)|^2} \geq \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

Demonstração: Denotemos $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ um vetor unitário qualquer de $\mathbb{R}^n$.

O ângulo θ entre os vetores e_n e μ é tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle \mu, e_n \rangle}{\|\mu\| \|e_n\|} = \langle \mu, e_n \rangle = \mu_n.$$

Se μ faz um ângulo de pelo menos α com o eixo x_n , então $|\mu_n| \leq \cos \alpha$.

Sejam $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(P) / \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi}(P) \right\|$ e $a_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n}) = \frac{\partial x}{\partial \eta}(P) / \left\| \frac{\partial x}{\partial \eta}(P) \right\|$, onde P é um ponto de S .

Segue que $\|a_1\| = \|a_2\|$, $a_1 \perp a_2$ e o plano tangente de S em P é $\Pi_P = [a_1, a_2]$, com $[a_1, a_2]$ o subspaço gerado por $\{a_1, a_2\}$.

Vamos estudar dois casos:

CASO 1: $e_n \in \Pi_P$.

Se $e_n \in \Pi_P$, então todo vetor normal, N , de S em P , é ortogonal a e_n . Logo, todas as normais fazem um ângulo de exatamente $\frac{\pi}{2}$ com x_n , isto é, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Como $e_n \in [a_1, a_2]$, $e_n = Aa_1 + Ba_2$, com $A, B \in \mathbb{R}$. Temos:

$$a_{1n} = \langle a_1, e_n \rangle = \langle a_1, Aa_1 + Ba_2 \rangle = A,$$

$$a_{2n} = \langle a_2, e_n \rangle = \langle a_2, Aa_1 + Ba_2 \rangle = B, \text{ e}$$

$$1 = \|e_n\|^2 = A^2 + B^2.$$

Sabemos que, em P , $\left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\| = \left\| \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\| = \lambda$, portanto,

$$\begin{aligned} |\varphi_n|^2 &= \left(\frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_n}{\partial \eta} \right)^2 = \\ &= \left(a_{1n} \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\| \right)^2 + \left(a_{2n} \left\| \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\| \right)^2 = \\ &= \lambda^2 (a_{1n}^2 + a_{2n}^2). \end{aligned}$$

Como $|\varphi|^2 = 2\lambda^2$, ou seja, $\lambda^2 = \frac{|\varphi|^2}{2}$, temos que:

$$|\varphi_n|^2 = \frac{|\varphi|^2}{2} (a_{1n}^2 + a_{2n}^2).$$

Logo, em P ,

$$\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} = \frac{1}{2} (a_{1n}^2 + a_{2n}^2) = \frac{1}{2} (A^2 + B^2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \quad (\text{pois } \alpha = \frac{\pi}{2}).$$

Ou seja, $\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$.

CASO 2: $e_n \notin \Pi_P$.

Se $e_n \notin \Pi_P$, então $e_n \notin [a_1, a_2]$. Tomamos $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base ortonormal de $[a_1, a_2, e_n]$, onde $v_3 = e_n$. Consideremos a_3 um vetor unitário qualquer de $[a_1, a_2]^\perp \subset [a_1, a_2, e_n]$.

Observamos que $\{a_1, a_2, a_3\}$ é outra base ortonormal de $[a_1, a_2, e_n]$ e podemos escrever $a_i = \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} v_j$. A matriz (γ_{ij}) é ortogonal e, portanto, $\gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{33}^2 = 1$, onde $\gamma_{i3} = \langle a_i, e_n \rangle = a_{in}$. Temos:

$$\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} = \frac{1}{2}(a_{1n}^2 + a_{2n}^2) = \frac{1}{2}(\gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_{33}^2),$$

com $\gamma_{33} = a_{3n} = \langle a_3, e_n \rangle = \cos \theta$, considerando θ o ângulo entre os vetores a_3 e e_n .

Suponhamos que todas as normais a S no ponto P fazem um ângulo de pelo menos α com o eixo x_n .

Como $a_3 \in [a_1, a_2]^\perp$ e $\|a_3\| = 1$, temos imediatamente que $|\gamma_{33}| = |\cos \theta| \leq \cos \alpha$.

Logo, em P ,

$$\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_{33}^2) \geq \frac{1}{2}(1 - \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2}\sin^2 \alpha.$$

Concluimos que, em P ,

$$\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} \geq \frac{1}{2}\sin^2 \alpha.$$

Para verificar a recíproca, suponhamos que em um ponto P de S ,

$$\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} \geq \frac{1}{2}\sin^2 \alpha.$$

Queremos provar que todas as normais a S em P fazem um ângulo de pelo menos α com x_n .

Se $e_n \in \Pi_P$, então todas as normais fazem um ângulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ com o eixo x_n e vale a tese trivialmente.

Se $e_n \notin \Pi_P$, então estamos nas condições do caso 2 e, em P ,

$$\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_{33}^2).$$

Como $\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} \geq \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$,

$$\gamma_{33}^2 \leq 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha,$$

daí

$$|\gamma_{33}| \leq \cos \alpha.$$

Estendendo a_1, a_2, a_3 a uma base ortonormal $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, se N é uma normal arbitrária de S em P , podemos escrever $N = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, com $\lambda_i = \langle N, a_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$.

Observamos que $N \in [a_1, a_2]^\perp$, logo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; como $e_n \in [a_1, a_2, a_3]$, temos que $e_n \perp a_i$, $4 \leq i \leq n$, e $\langle e_n, a_i \rangle = 0$, $4 \leq i \leq n$.

Consideremos β o ângulo entre os vetores N e e_n . Escrevemos:

$$\begin{aligned} |\cos \beta| &= |\langle N, e_n \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle a_i, e_n \rangle \right| = |\lambda_3 \langle a_3, e_n \rangle| = \\ &= |\lambda_3| \langle a_3, e_n \rangle = |\lambda_3| |\cos \theta|. \end{aligned}$$

Como $\lambda_3 = \langle N, a_3 \rangle$, $|\lambda_3| \leq 1$ e segue que $|\cos \beta| \leq |\cos \theta| \leq \cos \alpha$.

Postanto, pelas observações iniciais, as normais fazem um ângulo de pelo menos α com o eixo x_n . ■

Lema 2.1.2: Seja S uma superfície mínima definida em $|\zeta| < 1$ cujas normais fazem um ângulo de pelo menos $\alpha > 0$ com o eixo x_n em cada ponto de S . Se P é o ponto de S correspondente a $\zeta = 0$ e d é a distância de P à fronteira de S , então

$$d \leq |\varphi_n(0)| \operatorname{cosec} \alpha.$$

Demonstração: Consideremos S uma superfície mínima dada pela aplicação $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo D o disco unitário $|\zeta| < 1$.

Tomemos uma curva arbitrária, C , indo de $\zeta = 0$ à fronteira de D .

O comprimento da curva $X(C)$ é dado por $\int_C \lambda |d\zeta|$.

Por hipótese $\alpha > 0$, portanto, segue do Lema 2.1.1 que $\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} \geq \frac{1}{2} \sin^2 \alpha > 0$. Logo

$$\frac{|\varphi|^2}{2} \leq |\varphi_n|^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Como $\lambda^2 = \frac{|\varphi|^2}{2}$, o comprimento de $X(C)$ é:

$$(1) \quad \int_C \lambda |d\zeta| = \int_C \frac{|\varphi|}{\sqrt{2}} |d\zeta| \leq \operatorname{cosec} \alpha \int_C |\varphi_n| |d\zeta|.$$

Definimos a função $E : D \rightarrow \mathbb{C}$ por $E(\zeta) = \int_0^\zeta \varphi_n(\zeta) d\zeta$. Como $\varphi_n(\zeta) \neq 0, \forall \zeta \in D$, $E'(\zeta) = \varphi_n(\zeta) \neq 0, \forall \zeta \in D$ e a função $\omega = E(\zeta)$ tem função inversa $\zeta = I(\omega)$ definida em algum círculo centrado em $\omega = 0 = E(0)$.

Se R é o raio do maior desses círculos, então a circunferência de raio R existe um ponto ω_0 , com $|\omega_0| = R$ tal que $I(\omega)$ não pode se estender a uma vizinhança de ω_0 .

Observemos que $R < \infty$, pois, se I estivesse definida em $\mathbb{C}$, então, pelo fato de I ser uma função inteira e limitada, pelo Teorema de Liouville, concluiríamos que I seria uma função constante, e isto é um absurdo.

Seja L o segmento com extremos $\omega = 0$ e $\omega = \omega_0$; L é descrito por $\omega(t) = \omega_0 t$, com $0 \leq t \leq 1$.

Notamos que $\omega(0) = 0, \omega(1) = \omega_0$ e que $\frac{d\omega}{dt} = \omega_0$ e, portanto, $|d\omega| = |\omega_0| dt = R dt$.

Consideremos $\Gamma = I(L)$; Γ é uma curva indo de $\zeta = 0$ à fronteira de $|\zeta| = 1$.

Definimos uma função $H : D \rightarrow B(0, R)$ por $H(z) = I(Rz)$, onde $B(0, R)$ é a bola aberta de centro $\omega = 0$ e raio R . Observamos que H é uma função analítica e que, como $E(0) = 0, H(0) = I(0) = 0$. Por outro lado, $|H(z)| = |I(Rz)| \leq 1$, logo, pelo Lema de Schwarz, $|H'(0)| \leq 1$.

Temos $|H'(z)| = |RI'(Rz)|$ e, em particular, para $z = 0$, segue que $1 \geq |H'(0)| = R|I'(0)|$, ou seja,

$$(2) \quad R \leq \frac{1}{|I'(0)|}.$$

Por definição, $d = \inf_C \int_C \lambda |d\zeta|$, logo, de (1), temos que

$$d \leq \int_{\Gamma} \lambda |d\zeta| \leq \operatorname{cossec} \alpha \int_{\Gamma} |\varphi_n| |d\zeta| = \operatorname{cossec} \alpha \int_{\Gamma} |E'(\zeta)| |d\zeta| \quad (\text{pois } E' = \varphi_n) .$$

Por outro lado, $\omega = E(\zeta)$, $d\omega = E'(\zeta) d\zeta$ e segue de (2) que

$$\begin{aligned} d &\leq \operatorname{cossec} \alpha \int_L |d\omega| = \operatorname{cossec} \alpha \int_0^1 R dt = R \operatorname{cossec} \alpha \leq \\ &\leq \frac{1}{|I'(0)|} \operatorname{cossec} \alpha = |E'(0)| \operatorname{cossec} \alpha = |\varphi_n(0)| \operatorname{cossec} \alpha \quad (\text{pois } I = E^{-1}) . \end{aligned}$$

Portanto, $d \leq |\varphi_n(0)| \operatorname{cossec} \alpha$. ■

Os lemas acima nos permitem provar:

Teorema 2.1.1: Se as normais de uma superfície mínima completa S em $\mathbb{R}^n$ omitem uma vizinhança de alguma direção, então S é um plano.

Demonstração: Sendo S dada pela aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, consideremos o recobrimento universal de M , $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$; temos o seguinte diagrama com $\widehat{X} = X \circ \pi$:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \widehat{X} & \\ M & \xrightarrow{X} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Trabalharemos com a superfície dada por $\widehat{X} : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e identificaremos X e $\widehat{X}$.

Pelo Teorema da Uniformização de Koebe, $\widehat{M}$ uniformemente equivalente ao disco ou a um plano.

Podemos supor que as normais omitem uma vizinhana do eixo x_n (caso contrrio basta fazermos uma rotao conveniente). Existe $\alpha > 0$ tal que as normais fazem um ngulo de pelo menos α com esse eixo.

Se $\widehat{M}$ conformemente equivalente ao disco unitrio, da demonstrao do Lema 2.1.2, sabemos que existe uma curva $X(\Gamma)$ indo at a fronteira de S e que tem comprimento $\int_{\Gamma} \lambda |d\zeta| \leq |\varphi_n(0)| \operatorname{cossec} \alpha < \infty$, o que um absurdo, pois S uma superfcie completa.

Se $\widehat{M}$ é conformemente equivalente a $\mathbf{C}$ e as normais omitem uma vizinhança do eixo x_n , então segue do Lema 2.1.1 que

$$\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} \geq \frac{1}{2} \sin^2 \alpha > 0, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{|\varphi|^2}{|\varphi_n|^2} \leq 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

Portanto,

$$\frac{|\varphi_k|^2}{|\varphi_n|^2} \leq \frac{\sum_{k=1}^n |\varphi_n|^2}{|\varphi_n|^2} = \frac{|\varphi|^2}{|\varphi_n|^2} \leq 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha,$$

isto é,

$$(3) \quad \left| \frac{\varphi_k}{\varphi_n} \right|^2 \leq 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

Definimos $f_k : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ por $f_k = \frac{\varphi_k}{\varphi_n}$, com $k = 1, \dots, n$.

Segue de (3) que $|f_k| \leq \sqrt{2} \operatorname{cosec} \alpha$ e essas funções f_k 's são limitadas. Como $\varphi_n \neq 0$, as funções são inteiras e, pelo Teorema de Liouville, $f_k = c_k$, onde c_k é uma constante e $k = 1, \dots, n$. Podemos escrever $\frac{\varphi_k}{\varphi_n} = c_k$ ou $\varphi_k = c_k \varphi_n$.

Tomemos $\omega_k = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(\zeta) d\zeta, k = 1, \dots, n$, e observamos que

$$\omega_k = \int_{\zeta_0}^{\zeta} c_k \varphi_n(\zeta) d\zeta = c_k \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_n(\zeta) d\zeta = c_k \omega_n.$$

Consideremos $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, com α_k e β_k constantes reais, e $\omega_n(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$.

Temos que

$$\omega_k = c_k \omega_n = \alpha_k u - \beta_k v + i(\alpha_k v + \beta_k u)$$

Escrevemos

$$x_k = \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(\zeta) d\zeta = \operatorname{Re} \omega_k + \gamma_k,$$

onde γ_k é uma constante real. Logo $x = \alpha u - \beta v + \gamma$, onde α, β e γ são vetores reais constantes. A superfície S é completa, portanto deve ser o plano todo. ■

Para obter uma forma mais aperfeiçoada deste teorema, precisaremos da expressão da curvatura gaussiana de uma superfície mínima em termos das funções $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$, $1 \leq k \leq n$.

Consideremos o produto interno usual em $\mathbb{C}^n$: $\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k \bar{v}_k$, onde $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $u, v \in \mathbb{C}^n$.

Lema 2.1.3: Seja $K(P)$ a curvatura gaussiana de S em P . Então

$$K(P) = -4 \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\varphi_i \varphi'_j - \varphi'_i \varphi_j|^2}{\left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i|^2 \right)^3}$$

Demonstração: Sabemos que $K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$, onde $\lambda^2 = \frac{1}{2} |\varphi|^2$.

Podemos então escrever:

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda^2}{|\varphi|^2}.$$

Utilizando a identidade de Lagrange,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i b_j - a_j b_i|^2 = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^2 \right) - \left| \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j \right|^2$$

para quaisquer $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, a tese equivale a

$$\begin{aligned} K &= -4 \frac{\sum_{i=1}^n |\varphi_i|^2 \sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2 - \left| \sum_{j=1}^n \varphi_j \bar{\varphi}'_j \right|^2}{|\varphi|^6} = \\ &= -4 \frac{|\varphi|^2 |\varphi'|^2 - |\langle \varphi, \varphi' \rangle|^2}{|\varphi|^6}. \end{aligned}$$

Logo, basta provar que $\Delta \log \lambda^2 = 4 \frac{|\varphi|^2 |\varphi'|^2 - |\langle \varphi, \varphi' \rangle|^2}{|\varphi|^4}$.

Temos:

$$\Delta \log \lambda^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\log \lambda^2) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\log \lambda^2).$$

Sendo $\frac{\partial}{\partial \xi}(\log \lambda^2) = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\log \lambda^2) = -\frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi^2}.$$

Analogamente, $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\log \lambda^2) = -\frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta^2}$.

Segue então que

$$\Delta \log \lambda^2 = 2 \left\{ -\frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right)^2 \right] + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta^2} \right) \right\}$$

Como $\lambda^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k$, derivando em relação a ξ , $\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = \frac{1}{4\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right)$.

$$\text{Logo, } \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{16\lambda^3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) \right]^2 + \frac{1}{4\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right).$$

Derivando λ^2 com relação a η obtemos uma expressão análoga e temos que

$$\begin{aligned} \Delta \log \lambda^2 = & -\frac{1}{4\lambda^4} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) \right]^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{2\lambda^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) \right]. \end{aligned}$$

Como $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$ são analíticas,

$$(4) \quad \varphi'_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} = -i \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} \quad \text{e, portanto,}$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi^2}.$$

Por outro lado, segue de (4) que $\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \xi} = \overline{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi}} = \overline{\varphi'_k}$, ou seja,

$$(6) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \xi} = \overline{\varphi'_k}.$$

Analogamente, temos

$$(7) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \eta} = -i \overline{\varphi'_k} \quad \text{e, utilizando (5),}$$

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_k}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi^2}.$$

De (4), (6) e (7), vale que

$$\begin{aligned} (I) &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) \right]^2 = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} \bar{\varphi}_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \xi} \right)^2 + \\ &+ 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} \bar{\varphi}_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \xi} \right) + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} \bar{\varphi}_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \eta} \right)^2 + \\ &+ 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} \bar{\varphi}_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \eta} \right) = \\ &= 4 \left(\sum_{k=1}^n \varphi'_k \bar{\varphi}_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}'_k \right) = 4 | \langle \varphi, \varphi' \rangle |^2 \end{aligned}$$

E de (5) e (8), segue que

$$\begin{aligned} (II) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\varphi}_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi^2} \bar{\varphi}_k + 2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \xi} + \varphi_k \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_k}{\partial \xi^2} \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left[-\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi^2} \bar{\varphi}_k + 2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \xi} - \varphi_k \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_k}{\partial \xi^2} \right] = \\ &= 4 \sum_{k=1}^n \varphi'_k \bar{\varphi}'_k = 4 |\varphi'|^2 \end{aligned}$$

Como $\lambda^2 = \frac{1}{2} |\varphi|^2$, $\Delta \log \lambda^2 = 4 \frac{|\varphi|^2 |\varphi'|^2 - \langle \varphi, \varphi' \rangle^2}{|\varphi|^4}$ e o lema está provado. ■

Observamos que segue do Lema 2.1.3 que $K \leq 0$.

Lema 2.1.4: Sejam $f_k = \frac{\varphi_k}{\varphi_n}$ funções nas condições anteriores com $k = 1, \dots, n$. Então

$$K = -\frac{4}{|\varphi_n|^2} \cdot \frac{\sum_{j < k \leq n-1} |f_j f'_k - f_k f'_j|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |f'_j|^2}{\left(\sum_{k=1}^{n-1} |f_k|^2 + 1\right)^3}$$

Demonstração: Temos:

$$(9) \quad \varphi_k = f_k \varphi_n \text{ e } f'_k = \frac{\varphi_n \varphi'_k - \varphi_k \varphi'_n}{\varphi_n^2}. \text{ Logo}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \varphi_n \varphi'_k - \varphi_k \varphi'_n &= f'_k \varphi_n^2, \text{ e} \\ f_j f'_k - f_k f'_j &= \frac{\varphi_j \varphi'_k - \varphi_k \varphi'_j}{\varphi_n^2} \end{aligned}$$

Portanto

$$(11) \quad \varphi_j \varphi'_k - \varphi_k \varphi'_j = (f_j f'_k - f_k f'_j) \varphi_n^2, \quad 1 \leq k < n$$

Daí, segue do Lema 2.1.3 que

$$\begin{aligned} K &= -4 \frac{\sum_{j < k \leq n-1} (|f_j f'_k - f_k f'_j|^2 |\varphi_n|^4) + \sum_{j=1}^{n-1} |f'_j|^2 |\varphi_n|^4}{\left(\sum_{k=1}^{n-1} |f_k|^2 |\varphi_n|^2 + |\varphi_n|^2\right)^3} = \\ &= -\frac{4}{|\varphi_n|^2} \frac{\sum_{j < k \leq n-1} |f_j f'_k - f_k f'_j|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |f'_j|^2}{\left(\sum_{k=1}^{n-1} |f_k|^2 + 1\right)^3}. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.1.5: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ definida em $\mathbb{C}$. Se $K \equiv 0$, então S é um plano.

Demonstração: Sejam $f_k = \frac{\varphi_k}{\varphi_n}$ como no lema anterior, definidas em $\mathbb{C}$.

Logo, $K \equiv 0$ se, e somente se $|f'_k| \equiv 0$, $1 \leq k < n$. Portanto, se $K \equiv 0$, então $f_k = c_k$, onde c_k é uma constante, e $\varphi_k = c_k \varphi_n$. Da demonstração do Teorema 2.1.1, concluímos que S é um plano. ■

Segue dos lemas e do Teorema 2.1.1:

Teorema 2.1.6: Sejam S uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$ e P um ponto qualquer de S . Suponhamos que as normais a S em P fazem um ângulo de pelo menos $\alpha > 0$ com alguma direção fixada. Então

$$|K(P)| \leq \frac{1}{d^2} \frac{16(n-1)}{\sin^4 \alpha},$$

onde d é a distância de P à fronteira de S .

Demonstração: Seja S dada pela aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como na demonstração do Teorema 2.1.1, podemos assumir que as normais a S em P fazem um ângulo de pelo menos $\alpha > 0$ com o eixo x_n . Também consideramos o recobrimento universal de M , $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ e $\widehat{X} = X \circ \pi$. Novamente identificamos $\widehat{X}$ com X .

Sejam φ_k e f_k as funções das demonstrações anteriores.

Temos que $f_k = \frac{\varphi_k}{\varphi_n}$ ou $\varphi_k = \varphi_n f_k$, $k = 1, \dots, n-1$ e $\frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} \geq \frac{1}{2} \sin^2 \alpha > 0$ (pois $\alpha > 0$).

Logo

$$2\cossec^2 \alpha \geq \frac{|\varphi_n|^2}{|\varphi|^2} = \frac{\sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2}{|\varphi_n|^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} |\varphi_k|^2 + |\varphi_n|^2}{|\varphi_n|^2} = \sum_{k=1}^{n-1} |f_k|^2 + 1.$$

Portanto,

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{n-1} |f_k|^2 \leq 2\cossec^2 \alpha - 1.$$

Pelo Teorema da Uniformização de Kőbe, o recobrimento universal $\widehat{M}$ é conformemente equivalente ao ζ -plano ou ao disco unitário $|\zeta| < 1$.

Suponhamos que $\widehat{M}$ é conformemente equivalente ao ζ -plano.

Nesse caso, podemos concluir, pelo Teorema de Liouville, que f_k é constante, pois f_k é inteira e, por (12), é limitada. Se f_k é constante, $f'_k = 0$ e então $K(P) = 0$ pelo Lema 2.1.4. Portanto, vale a tese trivialmente.

Suponhamos que $\widehat{M}$ é conformemente equivalente ao disco unitário $|\zeta| < 1$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $X(0) = P$.

Denotamos

$$A_k = |f_k(0)|, B_k = |f'_k(0)| \text{ e } M_k = \sup |f_k(\zeta)|.$$

Observamos que existem as constantes M_k porque as funções f_k 's são limitadas, e podemos verificar que $B_k \leq M_k(1 - \frac{A_k^2}{M_k^2})$.

Para mostrar isto, usaremos um resultado de funções analíticas ([10], p. 131-132) que é uma consequência do Lema de Schwarz ([10]):

Seja $F : D \rightarrow C$ analítica tal que $|F(z)| \leq 1$, para qualquer $z \in D$, onde D é o disco unitário $|z| < 1$. Então para todo $a \in D$ temos que

$$|F'(a)| \leq \frac{1 - |F(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

Em particular, para $a = 0$, vale que

$$(13) \quad |F'(0)| \leq 1 - |F(0)|^2$$

Defino a função $F(\zeta) = \frac{f_k(\zeta)}{M_k}$; F é analítica em D e $|F(\zeta)| \leq 1$, pois $|f_k(\zeta)| \leq M_k, \forall \zeta \in D$.

Então, pelo resultado enunciado acima, $|F'(0)| \leq 1 - |F(0)|^2$. Como $F(0) = \frac{f_k(0)}{M_k}$ e $F'(0) = \frac{f'_k(0)}{M_k}$, $\frac{|f'_k(0)|}{M_k} \leq 1 - \frac{|f_k(0)|^2}{M_k^2}$, ou seja,

$$|f'_k(0)| \leq M_k \left(1 - \frac{|f_k(0)|^2}{M_k^2} \right) \quad \text{ou} \\ B_k \leq M_k \left(1 - \frac{A_k^2}{M_k^2} \right).$$

Seja $\eta_k = 1 - \frac{A_k^2}{M_k}$; sendo $A_k \leq M_k$, $\eta_k \leq 1$. Temos ainda $B_k \leq M_k \eta_k$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |f_j(0)f'_k(0) - f_k(0)f'_j(0)|^2 &\leq (|f_j(0)||f'_k(0)| + |f_k(0)||f'_j(0)|)^2 = \\ &= (A_j B_k + A_k B_j)^2 \leq 2(A_j^2 B_k^2 + A_k^2 B_j^2), \end{aligned}$$

pois $2A_j B_k A_k B_j \leq A_j^2 B_k^2 + A_k^2 B_j^2$.

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{j < k \leq n-1} |f_j(0)f'_k(0) - f_k(0)f'_j(0)|^2 &\leq 2 \sum_{j < k \leq n-1} (A_j^2 B_k^2 + A_k^2 B_j^2) \leq \\ &\leq 2 \sum_{j \neq k} A_j^2 B_k^2 \leq 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} A_j^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} B_k^2 \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(14) \quad \sum_{j < k \leq n-1} |f_j(0)f'_k(0) - f_k(0)f'_j(0)|^2 \leq 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} A_j^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} B_k^2 \right)$$

De (12) segue que

$$|f_k(\zeta)|^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} |f_k(\zeta)|^2 \leq 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - 1 \leq 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

logo vale que

$$(15) \quad M_k^2 < 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha, \text{ para cada } k.$$

Como $B_k \leq M_k$, utilizando (14) e (15), temos que

$$\begin{aligned} &\sum_{j < k \leq n-1} |f_j(0)f'_k(0) - f_k(0)f'_j(0)|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |f'_j(0)|^2 \leq \\ &\leq 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} A_j^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} B_k^2 \right) + \sum_{j=1}^{n-1} B_j^2 = \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} B_k^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n A_j^2 + 1 \right) \leq \\ &\leq 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} A_j^2 + 1 \right), \text{ ou seja} \end{aligned}$$

$$\sum_{j < k \leq n-1} |f_j(0)f'_k(0) - f_k(0)f'_j(0)|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |f'_j(0)|^2 \leq 4(n-1)\operatorname{cosec}^2\alpha \left(\sum_{j=1}^{n-1} A_j^2 + 1 \right).$$

Substituindo na expressão de K , segue do Lema 2.1.2 que em P :

$$\begin{aligned} |K(P)| &\leq \frac{4}{|\varphi_n(0)|^2} \frac{4(n-1)\operatorname{cosec}^2\alpha(1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k^2)}{(1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k^2)^3} = \\ &= \frac{16(n-1)\operatorname{cosec}^2\alpha}{|\varphi_n(0)|^2} \frac{1}{(1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k^2)^2} \leq \\ &\leq \frac{16(n-1)}{d^2} \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{d^2} \frac{16(n-1)}{\operatorname{sen}^4\alpha}. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.1.7: Se acrescentarmos às hipóteses do Teorema 2.1.6 o complemento, então S é um plano.

Demonstração: Para cada $P \in S$, n e α fixados, temos que, se $d \rightarrow \infty$, então $K \rightarrow 0$. E segue do teorema anterior que se S é completa então $K \equiv 0$, e S é um plano. ■

2.2. As normais a uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$

Sendo S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$, mostraremos que:

- (i) Se, em alguma vizinhança da fronteira de S , as normais omitem um conjunto de capacidade logarítmica positiva, então S é do tipo topológico finito.
- (ii) Se a aplicação normal de Gauss omite um conjunto de capacidade positiva, então S é um plano.

Para isso precisaremos de algumas definições e alguns lemas técnicos.

Considerando uma *região* de $\mathbf{C}$ como um aberto conexo de $\mathbf{C}$, definimos:

Definição 2.2.0: Uma função $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, onde G é um aberto de $\mathbf{C}$, é *harmônica* se tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e satisfaz $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ em G .

Definição 2.2.1: Uma função $v(z)$ é uma *função subharmônica* em uma região G de $\mathbf{C}$ se existe uma função harmônica $u(z)$ definida em G tal que $v(z) \leq u(z)$ e $u(z)$, $v(z)$ coincidem na fronteira de G .

Toda função harmônica é subharmônica.

Temos ainda:

Definição 2.2.2: Uma variedade bidimensional M com uma estrutura conforme é chamada *hiperbólica* se existe uma função subharmônica negativa não constante sobre M . Caso contrário, M será chamada *parabólica*.

Definição 2.2.3: Um subconjunto fechado da esfera cujo complemento é *parabólico* no sentido conforme acima, é um conjunto de *capacidade logarítmica nula*. Dizemos que um conjunto tem *capacidade logarítmica positiva* se o seu complemento é *hiperbólico*.

Definição 2.2.4: Consideremos G um subconjunto aberto conexo de $\mathbf{C}$ e $a \in G$. Se existe uma função harmônica H definida em G tal que $H(z) = \log |z - a|$ na fronteira de G , então chamamos a função $g(z, a) = H(z) - \log |z - a|$ *função de Green de G com polo a* .

Para uma dada função G , a função de Green g nem sempre existe, mas, quando existe é única; notamos que, como $\log |z - a|$ é harmônica em $G \setminus \{a\}$, $g(z, a)$ também o é.

Proposição 2.2.5: Uma superfície de Riemann (não compacta) é hiperbólica se admite função de Green relativa a cada um de seus pontos. Caso contrário, a superfície é dita parabólica ([15], p. 116).

Princípio do Máximo: Uma função harmônica definida na região G assume máximo na fronteira de G .

Uma superfície S dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é parabólica (respectivamente hiperbólica) se M também o é.

Lema 2.2.6: Seja R uma região do plano complexo $\mathbb{C}$ cujo complementar em $\widehat{\mathbb{C}}$ tem capacidade logarítmica positiva. Então $\log(1 + |\omega|^2)$ tem majorante harmônico em R .

Demonstração: Em primeiro lugar, consideremos $R' = F(R)$ e $B' = F(B)$, onde F é a inversa da projeção estereográfica e $B = \widehat{\mathbb{C}} \setminus R$; $R' \subset S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ e observamos que B é compacto.

Por hipótese, B tem capacidade logarítmica positiva e, pela Definição 2.2.3, observamos que R é um conjunto hiperbólico. Tomemos $\omega_0 \in R$ e $g(\omega, \omega_0) = h(\omega) - \log|\omega - \omega_0|$ a função de Green de R com polo ω_0 . Como $g(\omega, \omega_0) > 0$ ([10], p. 275), temos que $h(\omega) > \log|\omega - \omega_0|$ em R .

Consideremos $f(\omega) = \log(\frac{1+|\omega|^2}{|\omega-\omega_0|^2})$; f é contínua em $B = \widehat{\mathbb{C}} \setminus R$, que é um conjunto compacto, logo existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(\omega)| \leq M$.

Podemos escrever $f(\omega) = \log(1 + |\omega|^2) - 2\log|\omega - \omega_0|$. A função $f_1(\omega) = \log(1 + |\omega|^2) - 2h(\omega)$ é tal que $f_1(\omega) \leq f(\omega) \leq M$ porque $h(\omega) > \log|\omega - \omega_0|$.

Seja $\omega_1 \in \partial R$. Então $\lim_{\omega \rightarrow \omega_1} [\log(1 + |\omega|^2) - 2h(\omega)] \leq M$.

Como $1 + |\omega|^2 \leq (1 + |\omega|)^2$, $\log(1 + |\omega|^2) \leq 2\log(1 + |\omega|)$ que é uma função harmônica e isto implica que $\log(1 + |\omega|^2)$ é subharmônica em R . Consequentemente, $\log(1 + |\omega|^2)$ assume máximo na fronteira de R pelo Princípio do Máximo e, portanto, $\log(1 + |\omega|^2) - 2h(\omega) \leq M$ em R .

Concluimos que $\log(1 + |\omega|^2) \leq 2h(\omega) + M$, que é uma função harmônica em R e o lema está provado. ■

Lema 2.2.7: Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ métrica sobre D tal que λ é uma função de classe C^2 e D é completa com relação a essa métrica.

Se existe uma função $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica em D , tal que $\log \lambda(z) \leq h(z), \forall z \in D$, então D é o plano todo ou é o plano menos um ponto.

Demonstração: Consideremos $\tilde{\lambda}(z) = e^{h(z)}$. Observamos que $\tilde{\lambda} > 0$, está definida em D e é de classe C^2 ; podemos considerar uma nova métrica em D dada por $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\lambda}^2(z) \delta_{ij}$. Como $\log \lambda(z) \leq h(z)$, $\log \lambda(z) \leq \log \tilde{\lambda}(z)$, isto é, $\lambda(z) \leq \tilde{\lambda}(z), \forall z \in D$.

Tomemos $\mathbf{C}$ uma curva divergente em D . O seu comprimento na nova métrica é tal que $\int_{\mathbf{C}} \tilde{\lambda}(z) |dz| \geq \int_{\mathbf{C}} \lambda(z) |dz| = \infty$, logo D é também completa em relação à métrica $\tilde{\lambda}$.

Sendo $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$ o recobrimento universal, temos que $\tilde{D}$ é completo com relação à métrica $\tilde{\lambda}$.

Seja $\tilde{h} = h \circ \pi$. Como π é analítica, $\tilde{h}$ é harmônica e está definida num domínio simplesmente conexo $\tilde{D}$, portanto, existe uma função analítica, $H(z)$, tal que $\operatorname{Re} H(z) = \tilde{h}(z)$.

Definimos a função $\omega : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\omega(z) = \int_{z_0}^z e^{H(\zeta)} d\zeta$.

Observamos que ω está bem definida porque $\tilde{D}$ é simplesmente conexo e, como $\omega'(z) = e^{H(z)} \neq 0, \forall z \in \tilde{D}$, ω tem inversa local ω^{-1} definida num círculo de centro $\omega = 0$.

Consideremos R o maior círculo nessas condições (estamos numa situação já estudada, análoga à do Lema 2.1.2) e L o segmento que vai de $\omega = 0$ a $\omega = \omega_0$ com $|\omega_0| = R$, isto é, $L : \omega = \omega_0 t, 0 \leq t \leq 1$.

Sendo $\Gamma = \omega^{-1}(L)$ e observando que $|\frac{d\omega}{dz}| = |e^{H(z)}| = e^{h(\pi(z))} = \tilde{\lambda}(\pi(z))$, o comprimento de Γ é

$$\int_{\Gamma} \tilde{\lambda}(\pi(z)) |dz| = \int_{\Gamma} \left| \frac{d\omega}{dz} \right| |dz| = \int_L |d\omega| = \int_0^1 |\omega_0| dt = \int_0^1 R dt = R.$$

Como $\tilde{D}$ é completa e Γ é uma curva divergente, $R = \infty$ e, portanto, $\tilde{D}$ é o plano; além disso, $\omega(\tilde{D}) = \mathbb{C}$, pois, se isso não fosse verdade, teríamos uma função ω^{-1} inteira e

limitada. Logo, pelo Teorema de Liouville, ω^{-1} seria constante, absurdo. Como $\pi \circ \omega^{-1}$ é analítica em $\mathbb{C}$, segue do Pequeno Teorema de Picard que $\pi \circ \omega^{-1}$ é constante ou assume todos os valores de $\mathbb{C}$, com exceção de um ponto de máximo, isto é, $D = \mathbb{C}$ ou $D = \mathbb{C} \setminus \{P\}$. ■

Teorema 2.2.8: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$. Se a aplicação normal de Gauss omite um conjunto de capacidade positiva então S é um plano.

Demonstração: Vamos considerar o recobrimento universal de M , $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$, com $\widehat{X} = X \circ \pi$; e identificaremos $\widehat{X}$ e X .

Seja B o conjunto omitido por N , $B = S^2 \setminus N(\widehat{M})$. Notemos que, como $g = F^{-1} \circ N$, onde F^{-1} é a projeção estereográfica, segue da hipótese que g omite um conjunto de capacidade positiva; podemos supor que esse conjunto contém o infinito, portanto, g é analítica e $f \neq 0$.

Do Lema 2.2.6, temos que existe uma função harmônica H definida em $\mathbb{C} \setminus B$ tal que $\log(1 + |g(\zeta)|^2) \leq H(g(\zeta))$, ou seja,

$$(16) \quad 1 + |g(\zeta)|^2 \leq e^{H(g(\zeta))}$$

Como $\widehat{M}$ é simplesmente conexa, existe uma função analítica h tal que

$$(17) \quad \operatorname{Re} h(\zeta) = H(g(\zeta))$$

Seja $E(\zeta) = \frac{1}{2}f(\zeta)e^{h(\zeta)}$; E é analítica e $E(\zeta) \neq 0, \forall \zeta$.

Pelo Teorema da Uniformização de Koebe $\widehat{M}$ é conformemente equivalente ao disco unitário D ou ao plano complexo.

Suponhamos que $\widehat{M} \equiv D$. Consideremos $\mathbf{C}$ uma curva divergente qualquer e segue de (16) e (17) que o seu comprimento é

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \lambda |d\zeta| &= \frac{1}{2} \int_{\sigma} |f(\zeta)|(1 + |g(\zeta)|^2) |d\zeta| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\sigma} |f(\zeta)|e^{H(g(\zeta))} |d\zeta| = \int_{\sigma} |E(\zeta)| |d\zeta|, \end{aligned}$$

onde $X(\sigma) = C$.

Por outro lado, como $E(\zeta) \neq 0, \forall \zeta \in D$, a função $\omega = P(\zeta) = \int_0^\zeta E(z) dz$ definida em D é tal que $P'(\zeta) = E(\zeta) \neq 0, \forall \zeta \in D$ e P admite inversa $\zeta = I(\omega)$ definida num disco centrado em $E(0) = 0$ e raio r . Tomemos R o maior desses raios r e novamente estamos na situação do Lema 2.1.2, portanto, pelas mesmas razões anteriores, podemos concluir que $R < \infty$.

Consideremos ω_0 tal que $|\omega_0| = R$ e L o segmento indo de $\omega = 0$ a $\omega = \omega_0$. Notamos que $\Gamma = I(L)$ é uma curva divergente em D porque, caso contrário, poderíamos estender essa curva através de I e também estenderíamos a vizinhança de ω_0 , o que é um absurdo pois estamos num círculo máximo.

A curva Γ é dada por $\zeta(t) = I(\omega_0 t)$, onde $0 \leq t < 1$ e o comprimento de $X(\Gamma)$ é

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \lambda |d\zeta| &\leq \int_{\Gamma} |E(\zeta)| |d\zeta| = \\ &= \int_0^1 |P'(\zeta(t))| |\zeta'(t)| dt = \int_0^1 |\omega_0| dt = R < \infty, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, porque S é completa.

Logo, $\widehat{M}$ é conformemente equivalente a $\mathbf{C}$.

Como B tem capacidade positiva, g deve omitir mais que dois valores ([19], p. 126).

Logo, pelo Pequeno Teorema de Picard, g é constante e consequentemente $\varphi_k = c_k f$, $k = 1, 2, 3$, onde c_k é uma constante complexa. Sendo

$$\begin{aligned} c_k &= \alpha_k + i\beta_k \quad \text{e} \quad f(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta), \\ x_k &= \operatorname{Re} \omega_k = \operatorname{Re} \int_0^1 \varphi_k d\zeta = \alpha_k u - \beta_k v + \gamma_k, \end{aligned}$$

com γ_k uma constante real, isto é, $x = \alpha u - \beta v + \gamma$ e S está contida num plano. Como S é completa, S é o próprio plano. ■

Lema 2.2.9: Sejam $D = \{z \in \mathbf{C} | 0 < r_1 < |z| < r_1 \leq \infty\}$ e $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ métrica riemanniana em D de classe C^2 . Se existe uma função $h(z)$ harmônica em D tal que

$\log \lambda(z) \leq h(z), \forall z \in D$ e se $\int_{\gamma} \lambda(z) dz = \infty$ para toda curva γ com parametrização $z(t)$, onde $0 \leq t < 1$, e $\lim_{t \rightarrow 1} |z(t)| = r_2$, então $r_2 = \infty$.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $r_2 < \infty$. Consideramos uma transformação conforme $T : D \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\omega = T(z) = cz$, onde $c \in \mathbb{R}$. Escolhendo convenientemente c , temos que $T : D \rightarrow D' \subset \mathbb{C}$, onde $D' = \{\omega \in \mathbb{C} | r'_1 < |\omega| < r'_2\}$ com $r'_1 < \frac{1}{r'_2} < 1 < r'_2$. Para fazermos essa escolha, consideremos r_1 e r_2 os raios do anel inicial, $r'_1 = cr_1$ e $r'_2 = cr_2$. Tomando $c \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{r_2} < c < \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}$, temos que $T : D \rightarrow D'$ é bijetora.

Definimos em D' uma métrica $d\sigma = \rho(\omega)|d\omega|$ com $\rho = \lambda \circ T^{-1}$. Observamos que se existe uma função harmônica $h(z)$ em D tal que $\log \lambda(z) \leq h(z), \forall z \in D$, então $H(\omega) = h(T^{-1}(\omega))$ é harmônica em D' e $\log \rho(\omega) = \log \lambda(T^{-1}(\omega)) \leq h(T^{-1}(\omega)) = H(\omega), \forall \omega \in D'$. Além disso, se $z(t), 0 \leq t < 1$ é uma parametrização para uma curva γ em D com $\lim_{t \rightarrow 1} |z(t)| = r_2$ tal que $\int_{\gamma} \lambda(z) |dz| = \infty$, então $T \circ \gamma$ é uma curva em D' com $\lim_{t \rightarrow 1} |T(z(t))| = \lim_{t \rightarrow 1} |cz(t)| = c \lim_{t \rightarrow 1} |z(t)| = cr_2 = r'_2$ e tal que

$$\int_{T(\gamma)} \rho(\omega) |d\omega| = \int_{\gamma} \rho(T(z)) |cdz| = c \int_{\gamma} \lambda(z) |dz| = \infty$$

Seja $\Delta = \{\omega \in \mathbb{C} | \frac{1}{r'_2} < |\omega| < r'_1\}$. Como $r'_1 < \frac{1}{r'_2}$, temos que $\Delta \subset D'$.

Observamos que se $\omega \in \Delta$ então $\frac{1}{\omega} \in \Delta$ e podemos definir sobre Δ a métrica $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\lambda}^2 \delta_{ij}$ dada por $\tilde{\lambda}(\omega) = \rho(\omega) \cdot \rho(\frac{1}{\omega})$.

Temos:

$$\log \tilde{\lambda}(\omega) = \log \rho(\omega) + \log \rho\left(\frac{1}{\omega}\right) \leq H(\omega) + H\left(\frac{1}{\omega}\right) = \tilde{h}(\omega),$$

com $\tilde{h}(\omega)$ uma função harmônica em Δ .

Seja $\omega_1(t), 0 \leq t < 1$, uma parametrização para uma curva γ_1 em Δ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow 1} |\omega_1(t)| = r'_2.$$

Temos:

$$\int_{\gamma_1} \tilde{\lambda}(\omega) |d\omega| = \int_{\gamma_1} \rho(\omega) \rho\left(\frac{1}{\omega}\right) |d\omega|$$

Observamos que quando t tende a 1, $|\omega_1(t)|$ tende a r'_2 e, portanto, $\frac{1}{|\omega_1(t)|}$ tende a $\frac{1}{r'_2}$.

Como $\rho(\frac{1}{\omega})$ é contínua, é localmente limitada e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\int_{\gamma_1} \tilde{\lambda}(\omega) |d\omega| = \int_{\gamma_1} \rho(\omega) \rho\left(\frac{1}{\omega}\right) |d\omega| \geq M \int_{\gamma_1} \lambda(\omega) |d\omega| = \infty.$$

Tomemos γ_2 e γ_3 curvas com parametrizações $\omega_2(t)$ e $\omega_3(t)$, respectivamente, com $0 \leq t < 1$, tais que $\lim_{t \rightarrow 1} |\omega_2(t)| = \frac{1}{r'_2}$ e $\omega_3(t) = \frac{1}{\omega_2(t)}$.

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dt} &= -\frac{1}{\omega_3^2(t)} \frac{d\omega_3}{dt} \quad \text{e} \\ \int_{\gamma_2} \tilde{\lambda}(\omega) |d\omega| &= \int_0^1 \rho(\omega_2(t)) \rho\left(\frac{1}{\omega_2(t)}\right) \left|\frac{d\omega_2}{dt}\right| dt = \\ &= \int_0^1 \rho\left(\frac{1}{\omega_3(t)}\right) \rho(\omega_3(t)) \left|-\frac{1}{\omega_3^2(t)} \frac{d\omega_3}{dt}\right| dt \geq \\ &\geq \frac{1}{(r'_2)^2} \int_0^1 \rho(\omega_3(t)) \rho\left(\frac{1}{\omega_3(t)}\right) \left|\frac{d\omega_3}{dt}\right| dt = \\ &= \frac{1}{(r'_2)^2} \int_{\gamma_3} \tilde{\lambda}(\omega) |d\omega| = \infty, \quad \text{pois } \lim_{t \rightarrow 1} |\omega_3(t)| = r'_2. \end{aligned}$$

Logo $\int_{\gamma} \tilde{\lambda}(\omega) |d\omega| = \infty$ para qualquer caminho divergente em Δ e, portanto, Δ é completo com relação à métrica $\tilde{g}$.

Como $\log \tilde{\lambda}(\omega) \leq \tilde{h}(\omega)$, $\forall \omega \in \Delta$, com H harmônica, segue do Lema 2.2.7, que $\Delta = \mathbb{C}$ ou $\Delta = \mathbb{C} \setminus \{p\}$, logo $r'_2 = \infty$ e $r_2 = \infty$. ■

Temos:

Teorema 2.2.10: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$. Se em alguma vizinhança da fronteira de S as normais omitem um conjunto de capacidade positiva, então S é conformemente equivalente a uma superfície com tipo topológico finito.

Demonstração: Para demonstrarmos esse teorema precisaremos do seguinte lema:

Lema Auxiliar ([26], Lema 3, p. 395): Seja $g(z)$ uma função analítica no disco unitário D . Então $\log(1 + |g|^2)$ tem um majorante harmônico em D se, e somente se a função característica de $g(z)$, $T(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\theta})| d\theta$, é limitada, onde $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$.

Sendo S dada pela aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, consideremos V uma vizinhança da fronteira de S e Q um compacto de M tal que $V = X(M \setminus Q)$. Temos que o complementar de $R = g(V)$ é um conjunto de capacidade positiva; g omite $\mathbb{C} \setminus R$ na vizinhança V .

Podemos assumir que as normais omitem a direção x_3 -positiva e nesse caso $g \neq \infty$.

Logo, pelo Lema 2.2.6, existe uma função harmônica H em R tal que $\log(1 + |g(\zeta)|^2) \leq H(g(\zeta))$, portanto

$$(18) \quad 1 + |g(\zeta)|^2 \leq e^{H(g(\zeta))}$$

Definimos a função

$$\tilde{\lambda}(\zeta) = \frac{1}{2} \left| \frac{\varphi_3(\zeta)}{g(\zeta)} \right| e^{H(g(\zeta))}, \quad e$$

observamos que $\frac{\varphi_3(\zeta)}{g(\zeta)} = f(\zeta)$ é uma função analítica que não se anula porque $g \neq \infty$ e S é regular.

Afirmamos que $\lambda \leq \tilde{\lambda}$, pois segue de (18) que:

$$\begin{aligned} \lambda(\zeta) &= \frac{1}{2} |f(\zeta)| (1 + |g(\zeta)|^2) = \frac{1}{2} \left| \frac{\varphi_3(\zeta)}{g(\zeta)} \right| (1 + |g(\zeta)|^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{\varphi_3(\zeta)}{g(\zeta)} \right| e^{H(g(\zeta))} = \tilde{\lambda}(\zeta). \end{aligned}$$

Também observamos que $\log \tilde{\lambda}$ é harmônica porque $\log \tilde{\lambda}(\zeta) = \log\left(\frac{1}{2}|f(\zeta)|\right) + H(g(\zeta))$ e f e g são funções analíticas.

Podemos definir uma nova métrica conforme, em $M \setminus Q$, $d\tilde{s} = \tilde{\lambda}(\zeta)|d\zeta|$. Como $\tilde{\lambda}$ é um produto de funções analíticas, podemos estender analiticamente a métrica ([10], p. 214) à Q . A superfície S é completa com relação a essa nova métrica, pois, dada uma curva divergente $\mathbb{C}$ qualquer de $M \setminus Q$, $\int_c \tilde{\lambda}(\zeta)|d\zeta| = \infty$ (porque S é completa com relação à métrica ds).

Portanto, concluímos que S é também completa com relação à métrica $d\tilde{s}$.

Como $\log \tilde{\lambda}$ é harmônica em $M \setminus Q$, $\Delta \log \tilde{\lambda} = 0$ em $M \setminus Q$ e, portanto, a curvatura gaussiana $\tilde{K} = -\frac{\Delta \log \tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}^2} = 0$ em $M \setminus Q$.

Podemos escrever a curvatura total de M :

$$c = \int_M \tilde{K} dA = \int_{M \setminus Q} K dA + \int_Q K dA = \int_Q K dA < \infty,$$

porque Q é um conjunto compacto e K é contínua.

Como M é completa, concluímos do Teorema de Huber ([17], p. 61) que M tem conectividade finita.

Então existe uma subregião compacta M_0 de M cujo complementar é a união de um número finito de regiões duplas-conexas. Seja D_j uma dessas regiões. A métrica em D_j é dada por $ds = \lambda(\zeta)|d\zeta|$.

Podemos assumir que a fronteira de D_j consiste de uma curva de Jordan γ (ou seja, uma curva fechada de classe $\mathcal{C}^1$) e que $D_j \subset M \setminus Q$. A região D_j é conformemente equivalente ao anel $A_j = \{\zeta \in \mathbb{C} | r_j < |\zeta| < r\}$ onde $\gamma : |\zeta| = r$.

Vamos provar que $r_j = 0$.

Suponhamos que $r_j > 0$ e então temos $A_j = \{\zeta | 0 < r_j < |\zeta| < r\}$. Como no lema anterior, consideremos $A'_j = \{\zeta \in \mathbb{C} | 0 < r_j < |\zeta| < \frac{1}{r_j}\}$, onde $r_j < 1 < \frac{1}{r_j} < r$ e uma nova métrica $d\sigma = \rho(\zeta)|d\zeta|$ em A'_j , onde $\rho(\zeta) = \lambda(\zeta)\lambda(\frac{1}{\zeta})$

Observamos que A'_j é completa em relação à métrica $d\sigma$ (veja Lema 2.2.9). O mesmo ocorre para a superfície de recobrimento universal de $\tilde{A}_j$ de A'_j que é conformemente equivalente ao disco unitário $D = \{\omega \in \mathbb{C} | |\omega| < 1\}$, porque A'_j é hiperbólico ([15], p. 112, 116).

Sendo $\omega = \omega(\zeta)$ a aplicação que leva D em A'_j , a métrica em D é $d\tilde{\sigma} = \tilde{\rho}|d\omega|$ onde $\tilde{\rho}(\omega) = \frac{1}{2}|f(\zeta(\omega))|(1 + |g(\zeta(\omega))|^2)|f(\frac{1}{\zeta(\omega)})|(1 + |g(\frac{1}{\zeta(\omega)})|^2)|\frac{d\zeta}{d\omega}|$.

Como as funções $f(\zeta(\omega))$, $f(\frac{1}{\zeta(\omega)})$ e $\frac{d\zeta}{d\omega}$ são analíticas e diferentes de zero em D , $g(\zeta(\omega))$ e $g(\frac{1}{\zeta(\omega)})$ são analíticas em D . Mas as normais da superfície omitem na vizinhança V um conjunto de capacidade positiva e o mesmo acontece para funções $g(\zeta(\omega))$ e $g(\frac{1}{\zeta(\omega)})$, logo ambas têm funções característica limitadas em D ([28], p. 73). Portanto, segue do Lema

auxiliar que existem funções harmônicas H_1, H_2 tais que

$$\log \tilde{\rho}(\omega) \leq \log |f(\zeta(\omega))| + \log |f(\frac{1}{\zeta(\omega)})| + \log |H_1(\omega)| + \log |H_2(\omega)|,$$

ou seja, $\log \tilde{\rho}(\omega)$ tem um majorante harmônico em D e, pelo Lema 2.2.7, D é $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ e portanto parabólico ([22], p. 8, 14), o que é um absurdo. Concluimos que $r_j = 0$, logo M é conformemente equivalente a $\overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$, onde $\overline{M}$ é uma superfície compacta. ■

Corolário 2.2.11: Se S é uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ e

- (i) infinitamente conexa, ou
- (ii) hiperbólica,

então as normais de S assumem todas as direções infinitas vezes, com exceção, no máximo um conjunto de capacidade zero.

Em particular, a curvatura total de S deve ser infinita.

Demonstração: A curvatura total de S é $c(S) = -\text{área}(\text{Im } N)$, onde $\text{Im } N$ é a imagem de S através da aplicação normal.

Se provarmos que as normais de S assumem todas as direções infinitas vezes, com exceção de, no máximo um conjunto de capacidade zero, é imediato que $c(S) = -\infty$, porque um conjunto de capacidade zero tem área zero ([30], p. 181 e 284).

Para demonstrarmos esse corolário, consideremos subregiões compactas de S , S_n , tais que $S_n \subset S_{n+1}$ e $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ e B_n o conjunto omitido por $N(S \setminus S_n)$.

Se para algum n , B_n tem capacidade positiva, então, pelo Teorema 2.2.10, S é conformemente equivalente a uma superfície compacta com um número finito de pontos removidos e, portanto, S é finitamente conexa e parabólica ([23], §274), o que contradiz as hipóteses. Logo, cada B_n tem capacidade zero e consequentemente $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ também ([30], p. 331). Como $S_n \subset S_{n+1}$, $S^2 \setminus B_{n+1} \subset S^2 \setminus B_n$, cada ponto é assumido pela normal do complemento de cada S_n infinitas vezes, o que prova o corolário. ■

Teorema 2.2.12: Se S é uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ finitamente conexa e parabólica, então S tem curvatura total finita ou as normais assumem todas as direções infinitas vezes exceto, no máximo, duas direções.

Demonstração: Uma superfície parabólica finitamente conexa é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann $\overline{M}$ compacta menos um número finito de pontos ([23], §274), isto é, $M \cong \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$. Se g é uma função meromorfa então a imagem de S através de g deve cobrir cada ponto somente um número finito de vezes e, nesse caso, a curvatura total é finita.

Se g tem alguma singularidade essencial p_i então, pelo Grande Teorema de Picard, g assume todos os valores infinitas vezes exceto, no máximo dois e isto prova o teorema. ■

Corolário 2.2.13: Uma superfície mínima completa S em $\mathbb{R}^3$ tem curvatura total infinita se, e somente se suas normais assumem todas as direções infinitas vezes exceto, no máximo, um conjunto de capacidade zero.

Demonstração: Suponhamos que S tem curvatura total infinita.

Se S é infinitamente conexa ou hiperbólica, então, pelo Corolário 2.2.11, as normais de S assumem todas as direções infinitas vezes, exceto, no máximo, um conjunto de capacidade zero.

Se S é finitamente conexa e parabólica, então, pelo Teorema 2.2.12, as normais de S assumem todas as direções infinitas vezes exceto, no máximo, duas direções p_1, p_2 . Como $\{p_1, p_2\}$ é um subconjunto finito de S^2 , tem capacidade zero ([19], p. 126) e vale a tese.

Suponhamos agora que as normais de S assumem todas as direções infinitas vezes exceto, no máximo, um conjunto B de capacidade zero. Como $N(B)$ tem capacidade zero ([30], p. 184) é imediato concluir que a curvatura total de S é infinita. ■

Para o caso em que a curvatura total é finita, temos ainda:

Teorema 2.2.14: Seja S uma superfície mínima completa com curvatura total finita. Se g omite mais que três pontos, então S é um plano.

Demonstração: Segue do Teorema 1.2.1, que $M \cong \overline{M} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ onde $\overline{M}$ é uma superfície compacta de gênero γ ; a aplicação de Gauss $G : M \rightarrow Q_1 \cong S^2$ se estende a uma aplicação de $\overline{M}$ e que a curvatura total de S é dada por

$$c(S) = -\text{área } g(\overline{M}).$$

Se o grau de g é n ,

$$(19) \quad c(S) = -4\pi n \leq (4 - 4\gamma - 4r)\pi \quad ([18], \text{Proposição 6.1}).$$

Se g é constante, então é imediato que S é um plano.

Suponhamos, por absurdo, que S não é um plano; a função g não é constante e temos que g é um n -recobrimento de ramificação de $\widehat{\mathbb{C}}$ por $\overline{M}$.

Para cada ponto P omitido por $g = F^{-1} \circ G$ (onde F^{-1} é a projeção estereográfica), nós devemos ter

$$(20) \quad g^{-1}(P) \subset \{p_1, \dots, p_r\} = \overline{M} \setminus M$$

Logo, se q é o número de pontos omitidos, temos que

$$(21) \quad r \geq nq - B',$$

onde B é a ordem total de ramificação de g dos pontos omitidos. Mas

$$(22) \quad B' \leq B,$$

onde B é a ordem total de ramificação de g .

Da relação de Riemann para g temos

$$(23) \quad B - 2n = 2\gamma - 2.$$

Combinando (22) e (23) com (21) temos:

$$r - nq \geq -B' \geq -B = -2n + 2 - 2\gamma,$$

ou seja,

$$(24) \quad n(2 - q) + r \geq 2(1 - \gamma) .$$

De (19) segue que

$$-4\pi n = c(S) \leq 2\pi(2 - 2\gamma - 2r),$$

ou seja,

$$(25) \quad 2(1 - \gamma) \geq 2r - 2n .$$

Combinamos (25) com (24). Temos que $n(2 - q) + r \geq 2r - 2n$, ou seja,

$$(26) \quad n(4 - q) \geq r \geq 1 .$$

Como n é um número inteiro positivo $q \leq 3$, o que contradiz a hipótese. Concluimos que S é um plano. ■

Mais adiante daremos uma versão desse teorema para superfícies em $\mathbb{R}^4$.

2.3. As normais a uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$.

Usando o fato de que a quádrlica Q_2 é equivalente ao produto $S_1 \times S_2$ de duas esferas de Riemann, Chern [8] provou que se S é uma superfície mínima completa no $\mathbb{R}^4$ tal que a aplicação de Gauss generalizada, G , leva S num subconjunto de Q_2 , cujas projeções em S_1 e S_2 ambas omitem alguma vizinhança, então S é um plano.

Posteriormente Osserman [25] melhorou esse teorema e esse estudo é o que vamos apresentar a seguir.

Teorema 2.3.1: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$. Se a imagem de S através da aplicação generalizada de Gauss, é um conjunto cujas projeções em S_1 e S_2 omitem conjuntos de capacidade positiva, então S é um plano.

Como esse teorema é análogo ao Teorema 2.2.8, as demonstrações serão semelhantes.

Demonstração: Sendo S dada pela aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, da mesma maneira consideremos o recobrimento universal, $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$, e $\widehat{X} = X \circ \pi$, com a identificação: $\widehat{X} = X$.

Também podemos supor que o infinito faz parte dos conjuntos omitidos pelas projeções de G , g_1 e g_2 . Consequentemente $f = \varphi_1 - i\varphi_2 \neq 0$. Segue do Lema 2.2.6 que existem funções harmônicas, H_1 H_2 , tais que

$$(27) \quad \begin{cases} \log(1 + |g_1(\zeta)|^2) \leq H_1(g_1(\zeta)) \\ \log(1 + |g_2(\zeta)|^2) \leq H_2(g_2(\zeta)) \end{cases}$$

Como $\widehat{M}$ é simplesmente conexa, existem funções analíticas, h_1 e h_2 , tais que

$$(28) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} h_1(\zeta) = H_1(g_1(\zeta)) \\ \operatorname{Re} h_2(\zeta) = H_2(g_2(\zeta)) \end{cases}$$

Defino $E(\zeta) = \frac{1}{2}f(\zeta)e^{\frac{h_1(\zeta)+h_2(\zeta)}{2}}$, E é analítica e $E(\zeta) \neq 0 \forall \zeta$.

De (27) e (28) segue que

$$(29) \quad 1 + |g_k(\zeta)|^2 \leq e^{H_k(g(\zeta))}, k = 1, 2$$

Como S é regular, pelo teorema da representação de Koebe, $\widehat{M}$ é conformemente equivalente ao disco unitário $|\zeta| < 1$ ou ao plano complexo.

No primeiro caso, provaremos a existência de uma curva divergente Γ que tem o comprimento finito e isto contradiz o fato de S ser completa.

Para demonstrarmos essa afirmação observamos que como $E(\zeta) \neq 0, \forall \zeta \in D = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$, a função $\omega = P(\zeta) = \int_0^\zeta E(z) dz$ definida em D é tal que $P'(\zeta) = E(\zeta) \neq 0, \forall \zeta \in D$. Então P admite inversa $\zeta = I(\omega)$, definida num disco centrado em $E(0) = 0$ e com raio r .

Seja R o maior desses raios. Pelo mesmo argumento anteriormente utilizado, concluímos que $R < \infty$.

Também consideramos ω_0 tal que $|\omega_0| = R$, L o segmento indo de $\omega = 0$ a $\omega = \omega_0$ e $\Gamma = I(L)$, onde Γ é curva divergente dada por $\zeta(t) = I(t\omega_0), 0 \leq t < 1$.

Segue de (29) que o comprimento de $X(\Gamma)$ é

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \lambda |d\zeta| &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |f(\zeta)| [(1 + |g_1(\zeta)|^2)(1 + |g_2(\zeta)|^2)]^{\frac{1}{2}} |d\zeta| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |f(\zeta)| e^{\frac{H_1(g_1(\zeta)) + H_2(g_2(\zeta))}{2}} |d\zeta| = \int_{\Gamma} |E(\zeta)| d\zeta \\ &= \int_0^1 |P'(\zeta(t))| |\zeta'(t)| dt = \int_0^1 |\omega_0| dt = R < \infty \end{aligned}$$

Portanto, S não é completa, o que leva a contradição da hipótese.

Suponhamos agora que $\widehat{M}$ é conformemente equivalente ao plano $\mathbb{C}$.

Temos das hipóteses que g_1 e g_2 devem omitir mais que dois valores logo, pelo Pequeno Teorema de Picard, g_1 e g_2 são constantes e, portanto, $\varphi_k = c_k f$, $k = 1, \dots, 4$, onde c_k é uma constante complexa.

Novamente, pelos argumentos usados na demonstração do Teorema 2.2.8, S está contida num plano e, como S é completa, S é o próprio plano. ■

Temos ainda:

Teorema 2.3.2: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ com curvatura total finita. Se g_1 e g_2 omitem mais que três pontos, ou se uma delas é constante e a outra omite mais que dois pontos, então S é um plano.

Demonstração: Do Teorema 1.2.1 sabemos que S está definida pela aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde $M \cong \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ e γ é o gênero de $\overline{M}$, que a aplicação de Gauss $G : M \rightarrow \mathbb{Q}_2$

se estende a uma aplicação de $\overline{M}$. Finalmente, a curvatura total de S é dado por

$$c(S) = \iint_M K dA = -\text{área } G(\overline{M}).$$

Sabemos que

$$\text{área } G(\overline{M}) = \text{área } g_1(\overline{M}) + \text{área } g_2(\overline{M}),$$

considerando $G = (g_1, g_2)$ e $Q_2 = \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ (ou $S_1 \times S_2$).

Se a ordem de g_k é $n_k, k = 1, 2$, então

$$(30) \quad c(S) = -2\pi(n_1 + n_2) \leq (-4\gamma - 4r + 4)\pi \quad ([18], \text{Proposição 6.1}).$$

Suponhamos que S não é um plano, neste caso g_1 e g_2 não são constantes.

Então $g_k(\overline{M})$ é um n_k -recobrimento de ramificação de $\widehat{C}$ por $\overline{M}$.

Para cada ponto P omitido por $g_k = \pi_k \circ G$, nós devemos ter

$$(31) \quad g_k^{-1}(P) \subset \{p_1, \dots, p_r\} = \overline{M} \setminus M$$

Então, se q_k é o número de pontos omitidos, temos que

$$(32) \quad r \geq n_k q_k - B'_k$$

onde B'_k é a ordem total de ramificação de g_k dos pontos omitidos. Mas

$$(33) \quad B'_k \leq B_k$$

onde B_k é a ordem total de ramificação de g_k .

Da relação de Riemann para g_k , temos:

$$(34) \quad B_k - 2n_k = 2\gamma - 2.$$

Considerando (33), (34) com (32), temos

$$r - n_k q_k \geq -B'_k \geq -B_k = -2n_k + 2 - 2\gamma,$$

isto é,

$$(35) \quad n_k(2 - q_k) + r \geq 2(1 - \gamma), k = 1, 2.$$

De (30) segue que

$$-2\pi(n_1 + n_2) = c(S) \leq 2\pi(2 - 2\gamma - 2r),$$

ou seja,

$$(36) \quad 2(1 - \gamma) \geq 2r - n_1 - n_2 .$$

Considerando (36) com (35), segue que

$$(37) \quad \begin{cases} n_1(2 - q_1) + r \geq 2r - n_1 - n_2 \\ n_2(2 - q_2) + r \geq 2r - n_1 - n_2 \end{cases}, \text{ isto é,}$$

$$\begin{cases} n_1(3 - q_1) + n_2 \geq r \\ n_2(3 - q_2) + n_1 \geq r \end{cases} \text{ e somando,}$$

$$(38) \quad n_1(4 - q_1) + n_2(4 - q_2) \geq 2r.$$

Desde que $r \geq 1$, $q_1 < 4$ e $q_2 < 4$.

De fato, notamos que $n_1(4 - q_1) + n_2(4 - q_2) \geq 2$ e, portanto, se $q_k \geq 4$, então $4 - q_k \leq 0$ e $n_1(4 - q_1) + n_2(4 - q_2) \leq 0$ (pois $n_k > 0$, $k = 1, 2$).

Mas, por hipótese, g_1 e g_2 omitem mais que três pontos e $q_k < 4$, $k = 1, 2$, é um absurdo.

Logo, S é um plano.

Suponhamos agora que g_1 omite mais que dois pontos e que g_2 é constante ($n_2 = 0$).

Adaptamos as relações anteriores e temos que

$$(39) \quad n_1(2 - q_1) + r \geq 2(1 - \gamma)$$

$$(40) \quad 2(1 - \gamma) \geq 2r - n_1 .$$

Novamente combinando (39) e (40), segue que

$$(41) \quad n_1(3 - q_1) \geq r \geq 1 .$$

Logo, $q_1 \leq 2$, o que contradiz a hipótese de g_1 omitir mais que três pontos.

Concluimos que S é um plano. ■

CAPÍTULO 3

OS TEOREMAS DE XAVIER E DE EARP E ROSENBERG

No Capítulo 2, mostramos que a aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa S em $\mathbb{R}^3$ não pode omitir um conjunto de capacidade logarítmica positiva, a menos que a superfície seja um plano. Se a curvatura total for finita e S não é um plano, então g omite no máximo três valores (Teorema de Osserman).

Neste capítulo apresentaremos uma versão aperfeiçoada do primeiro resultado, devida a Xavier [33], que mostrou, em 1981, que se a aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa S omite mais que seis pontos de S^2 então S é um plano.

Também vimos anteriormente que se uma superfície mínima completa S em $\mathbb{R}^3$ tem curvatura total infinita, então g assume todos os valores infinitas vezes, exceto, no máximo, um conjunto de capacidade zero.

Em 1988 Earp e Rosenberg [11] provaram, usando as técnicas de Xavier, que se a curvatura de uma superfície mínima completa não-plana S em $\mathbb{R}^3$, de tipo topológico finito, é infinita, então g assume todos os valores infinitas vezes exceto, no máximo seis valores ou, se a curvatura total de S é finita, então g omite no máximo três valores, usando o Teorema de Osserman.

3.1. O Teorema de Xavier

O Teorema de Xavier se enuncia:

Teorema 3.1.1: O complemento da imagem da aplicação de Gauss de uma superfície

mínima completa não-plana em $\mathbb{R}^3$ contém, no máximo, seis pontos em S^2 .

Para a demonstração desse teorema precisaremos dos seguintes resultados:

Teorema de Yau [32]: Seja M uma superfície de Riemann completa. Se u é uma função não-negativa, satisfazendo $\Delta \log u = 0$, quase sempre, então $\int_M u^p = \infty$, para qualquer número real $p > 0$, a menos que u seja uma função constante.

Segundo Montel [21], uma classe $\mathcal{F}$ de funções $f(z)$ meromorfas num aberto conexo G é chamada *normal* se, dada qualquer sequência (f_n) de funções de $\mathcal{F}$, podemos encontrar uma subsequência (f_{n_p}) que converge pontualmente em G e uniformemente em subconjuntos compactos de G com respeito à métrica riemanniana.

Seja f uma função meromorfa no disco unitário $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Observando que as transformações $\omega = T(z) = e^{i\lambda} \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in D$, levam o disco unitário D no disco unitário $|\omega| < 1$, definimos: uma família $\mathcal{F}$ de funções f é dita *invariante* se para toda função $f(z)$ em $\mathcal{F}$, as *translações* $f(z, z_0, \lambda)$ dadas por $f(z, z_0, \lambda) = f(e^{i\lambda} \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z})$ são tais que $f(z, z_0, \lambda) \in \mathcal{F}$.

Uma função $f(z)$ é chamada *normal* se $f(z)$ junto com as translações constituem uma família normal.

Teorema 3.1.2: ([16], Teorema 6.5, p. 163) Uma família invariante $\mathcal{F}$ de funções $f(z)$ meromorfas em $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ é normal em D se, e somente se existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} \leq B, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Uma função $f(z)$ meromorfa em D é normal se, e somente se $\frac{(1-|z|^2)|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq B, \forall z \in D$, onde B é uma constante.

- Observação: ([16], p. 169)

Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções holomorfas f tais que $f(z) \neq 0, 1$ em $|z| < 1$. Existe

uma constante $B > 0$ tal que $\frac{|f'(0)|}{1+|f'(0)|} \leq B$ e, portanto, $\mathcal{F}$ é normal.

Lema 3.1.3: Sejam T uma função holomorfa no disco unitário D , com $T \neq 0, a$, onde $a \in \mathbb{C}^*$ e $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$, com $k \in \mathbb{Z}^*$. Então $\frac{|T'|}{|T|^\alpha + |T|^{2-\alpha}} \in L^p(D)$, para qualquer número real p , com $0 < p < 1$, onde $L^p(D)$ é o conjunto das funções p -integráveis em D .

Demonstração: Consideremos a função $T^{\frac{1}{k}}$; essa função omite dois valores, logo, estamos nas condições da observação anterior e segue do Teorema 3.1.2 que existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{|T'|}{k|T|^{1-\frac{1}{k}}(1+|T|^{\frac{2}{k}})} &\leq \frac{B}{1-|z|^2}, \\ \frac{|T'|}{|T|^\alpha + |T|^{2-\alpha}} &\leq \frac{kB}{1-|z|^2} \in L^p(D), 0 < p < 1, \quad \text{pois} \\ \int_D \frac{1}{(1-|z|^2)^p} dx dy &= 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{(1-r^2)^p} = \\ &= \frac{\pi}{-p+1} (\lim_{r \rightarrow 1} (1-r^2)^{-p+1} + 1) < \infty. \end{aligned}$$

■

Lema 3.1.4: Sejam g uma função holomorfa no disco unitário D que omite seis valores $a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{C}$ e p e α números reais tais que $p = \frac{5}{6\alpha}$ e $\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$.

(i) Se $|g(z) - a_j| \leq l < 1$, então

$$(1) \quad \frac{1}{|g(z) - a_j|^{p\alpha}} \leq 2^p \frac{1}{(|g(z) - a_j|^\alpha + |g(z) - a_j|^{2-\alpha})^p},$$

(ii) Se $|g(z) - a_j| > l$, então existe $K > 0$ tal que

$$(2) \quad \frac{1}{|g - a_j|} < K \frac{1}{(|g - a_j|^\alpha + |g - a_j|^{2-\alpha})^p},$$

onde $1 \leq j \leq 6$.

Demonstração: (i) Se $|g(z) - a_j| \leq l < 1$, então, como $\alpha < 1$, $2 - 2\alpha > 0$ e

$$\frac{(|g - a_j|^\alpha + |g - a_j|^{2-\alpha})^p}{2^p |g - a_j|^{p\alpha}} = \left[\frac{1}{2} (1 + |g - a_j|^{2-2\alpha}) \right]^p < 1.$$

Concluimos que vale (1).

(ii) Como $p\alpha = \frac{5}{6}$ e $\alpha \geq \frac{10}{11}$, temos que $\frac{1}{p} = \frac{6}{5}\alpha$, $\frac{1}{p} - \alpha = \frac{1}{5}\alpha > 0$ e $\frac{1}{p} - 2 + \alpha = \frac{11}{5}\alpha - 2 \geq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|g - a_j|^\alpha + |g - a_j|^{2-\alpha}}{|g - a_j|^{\frac{1}{p}}} \right) = \\ & = \left[\left(\frac{1}{|g - a_j|} \right)^{\frac{1}{p}-\alpha} + \left(\frac{1}{|g - a_j|} \right)^{\frac{1}{p}-2+\alpha} \right]^p < \left[\left(\frac{1}{l} \right)^{\frac{1}{p}-\alpha} + \left(\frac{1}{l} \right)^{\frac{1}{p}-2+\alpha} \right]^p, \end{aligned}$$

e temos (2), considerando $K = \left[\left(\frac{1}{l} \right)^{\frac{1}{p}-\alpha} + \left(\frac{1}{l} \right)^{\frac{1}{p}-2+\alpha} \right]^p$. ■

Demonstração do teorema: Para a demonstração do Teorema de Xavier, consideremos S dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Suponhamos que o complemento da imagem da aplicação de Gauss de S contém mais que seis pontos, ou seja, que a aplicação de Gauss omite, por exemplo, sete pontos.

Consideremos o recobrimento universal $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ e $\widehat{X} = X \circ \pi$; identificamos X e $\widehat{X}$.

Pelo teorema da uniformização de Koebe, $\widehat{M}$ é conformemente equivalente ao plano $\mathbb{C}$ ou ao disco unitário D .

Como $g = F^{-1} \circ N$, se N omite sete pontos, então g omite sete pontos; e podemos supor que $g \neq \infty$ (se isso não ocorre fazemos uma rotação conveniente).

Se $\widehat{M}$ é uniformemente equivalente a $\mathbb{C}$, em consequência, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função meromorfa e, pelo teorema de Picard, g é constante ou omite no máximo dois pontos.

Se g é constante, $N = F \circ g$ é constante e isto contradiz a hipótese de S ser não plana.

Também, se g omite no máximo dois pontos, N omite no máximo dois pontos, o que contradiz a hipótese de N omitir mais que seis pontos.

Portanto, a única possibilidade é $\widehat{M}$ ser conformemente equivalente ao disco unitário D .

Como $g \neq \infty$, podemos supor que g omite seis pontos distintos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 , onde $a_i \neq \infty, i = 1, \dots, 6$.

Definimos a função $h = f^{-\frac{2}{p}} g' \prod_{i=1}^6 (g - a_i)^{-\alpha}$, onde α é como no lema auxiliar com $\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$ e $p = \frac{5}{6\alpha}$. Observamos que h é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{a_i, i = 1, \dots, 6\}$ porque $g \neq \infty$ e consequentemente $f \neq 0$ pela condição de regularidade. Além disso, notamos que, como g é uma função meromorfa não constante, os zeros de g' são isolados e, portanto, os zeros de h também o são, formando assim um conjunto discreto de pontos Ω . Consideremos $\Omega_N = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq N\}$ e podemos escrever $\Omega = \bigcup_N \Omega_N$, reunião enumerável de conjuntos finitos, temos que Ω tem medida nula.

Seja $u = |h|$. Temos que $u \geq 0$ e $\Omega = \{z \mid u(z) = 0\}$ tem medida nula.

Vamos provar que $\int_D u^p = \infty$.

Para isto consideremos os seguintes casos:

CASO 1: Suponhamos que u não é constante. Então, como h é uma função analítica, $\Delta \log u = 0$, quase sempre.

Por outro lado, temos que u é uma função não negativa e D é completo, então, segue do teorema de Yau que $\int_D u^p = \infty$, para qualquer número real $p > 0$. Em particular, para $p = \frac{5}{6\alpha} > 0$, temos que $\int_D u^p = \infty$.

CASO 2: Suponhamos que $u = c$, onde c é uma constante, então temos que

$$\int_D u^p = c^p \int_D dA = c^p \text{vol } D$$

Sabemos que D é completa, simplesmente conexa e com curvatura não positiva (pois é mínima), portanto, $\text{vol } D = \infty$ e concluímos então que $\int_D u^p = \infty$.

A contradição será obtida provando que a integral $\int_D u^p$ é finita.

Para isso escrevemos

$$\int_D u^p = \int_D |h|^p \lambda^2 d\xi d\eta = \int_D \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - a_i|^{p\alpha}} d\xi d\eta.$$

Seja $H = \frac{|g'|^p(1+|g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g-a_i|^{p\alpha}}$. Então basta provar que $\int_D H d\xi d\eta < \infty$.

Para isso, consideremos o subconjunto de D , $D_j = \{\zeta \in D \mid T_j(\zeta) < l\}$, onde $T_j(\zeta) = |g(\zeta) - a_j|$ e $0 < l < \frac{1}{4} \min\{1, |a_i - a_k|, i \neq k; i, k = 1, \dots, 6\}$, com $j = 1, \dots, 6$.

Seja $D' = D \setminus \bigcup_{j=1}^6 D_j$. Como $D = \bigcup_{j=1}^6 D_j \cup D'$, escrevemos

$$\int_D H d\xi d\eta \leq \sum_{j=1}^6 \int_{D_j} H d\xi d\eta + \int_{D'} H d\xi d\eta.$$

Vamos verificar primeiro que:

(i) $\int_{D_j} H d\xi d\eta < \infty$, para $j = 1, \dots, 6$.

Fixado j , se $\zeta \in D_j$, então $T_j(\zeta) \leq l$ e $T_i(\zeta) > l$, para $i \neq j$, isto é, $\frac{1}{T_i(\zeta)} < \frac{1}{l}$, para $i \neq j$.

Por outro lado,

$$|g(\zeta)| = |g(\zeta) - a_j + a_j| \leq |g(\zeta) - a_j| + |a_j| \leq l + |a_j|,$$

logo $(1 + |g|^2)^2 \leq [1 + (l + |a_j|)^2]^2$ e existe $c > 0$ tal que

$$H = \frac{(1 + |g|^2)^2}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^6 |g-a_i|^{p\alpha}} \cdot \frac{|g'|^p}{|g-a_j|^{p\alpha}} \leq c \frac{|g'|^p}{|g-a_j|^{p\alpha}}.$$

Daí, como $D_j \subset D$, segue do Lema 3.1.4(i), que

$$(3) \quad \int_{D_j} H \leq c \int_{D_j} \frac{|g'|^p}{|g-a_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta \leq 2^p \cdot c \int_D \frac{|g'|^p}{(|g-a_j|^\alpha + |g-a_j|^{2-\alpha})^p} d\xi d\eta$$

Vamos utilizar o Lema 3.1.3, tomando para T a função $g - a_j$. Notamos que T é uma função holomorfa e $T \neq 0, a$, onde $a = a_i - a_j$ para algum $i \neq j$, porque $g \neq a_j$ e $g - a_j \neq a_i - a_j, \forall i \neq j$. Portanto vale que $\int_D \frac{|g'|^p}{(|g-a_j|^\alpha + |g-a_j|^{2-\alpha})^p} < \infty, \forall j$ e segue de (3) que $\int_{D_j} H < \infty$.

Verifiquemos também que

$$(ii) \int_{D'} H < \infty, \text{ onde } D' = D \setminus \bigcup_{j=1}^6 D_j.$$

Para isso escrevemos:

$$(4) \quad H = \prod_{i=1}^5 \left| \frac{g - a_6}{g - a_i} \right|^{p\alpha} \left(\frac{1}{|g - a_6|^2} + \left| \frac{g}{g - a_6} \right|^2 \right)^2 \frac{|g'|^p}{|g - a_6|^{6p\alpha - 4}}.$$

Se $\zeta \in D', \zeta \notin D_j, 1 \leq j \leq 6$, então $T_j(\zeta) > l$, isto é,

$$(5) \quad \frac{1}{T_j(\zeta)} < \frac{1}{l}, \quad 1 \leq j \leq 6.$$

Seja B_j a bola de centro a_j e raio l , $1 \leq j \leq 6$. Definimos $h_j : \mathbb{C} \setminus B_j \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $h_j(z) = \frac{z+c}{z-a_j}$, onde $c \in \mathbb{C}$.

Afirmamos que h_j é uma função limitada. De fato, se considerarmos o círculo de centro a_j e raio $r \geq l$ dada por $z(t) = a_j + re^{it}$, então

$$h_j(z(t)) = \frac{a_j + re^{it} + c}{a_j + re^{it} - a_j} = 1 + \frac{a_j + c}{r} e^{it}.$$

Como $a_j + c \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$h_j(z(t)) = 1 + \frac{r_j}{r} e^{i\alpha_j}, \text{ com } a_j + c = r_j e^{i\theta_j} \text{ e } \alpha_j = \theta_j + t.$$

Logo, h_j leva o círculo $z(t) = a_j + re^{it}$ em outro círculo $h_j(z(t)) = 1 + \frac{r_j}{r} e^{i\alpha_j}$ que tem raio $\frac{r_j}{r}$.

Consequentemente, quando $r \rightarrow \infty$, temos que $\frac{r_j}{r} \rightarrow 0$ e, portanto, $h_j(\mathbb{C} \setminus B_j) \subset B(1, \frac{r_j}{r})$ e

h_j é limitada em $\mathbb{C} \setminus B_j$. Como $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^6 B_j \subset \mathbb{C} \setminus B_j$, concluímos que h_j também é limitada

em $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^6 B_j$. Em D' , $T_j(\zeta) > l$, $1 \leq j \leq 6$, $g(\zeta) \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^6 B_j$ e consideramos as funções

$h_i(g(\zeta)) = \frac{g(\zeta) - a_6}{g(\zeta) - a_i}$, onde $c = -a_6$ e $h_6(g(\zeta)) = \frac{g(\zeta)}{g(\zeta) - a_6}$, onde $c = 0$. Como h_j é limitada

em $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^6 B_j$, existem constantes $M_i > 0$, $i = 1, \dots, 6$, tais que em D' ,

$$(6) \quad \left| \frac{g - a_6}{g - a_i} \right| \leq M_i, \quad 1 \leq i \leq 5, \text{ e } \left| \frac{g}{g - a_6} \right| \leq M_6$$

Daí, sendo $p\alpha = \frac{5}{6}$, $6p\alpha - 4 = 1$; utilizando (4), (5), (6) temos que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\int_{D'} H d\xi d\eta \leq M \int_{D'} \frac{|g'|^p}{|g - a_6|} d\xi d\eta$$

Como $D' \subset D$, segue do Lema 3.1.4(ii) que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\int_{D'} H d\xi d\eta < K \int_D \frac{|g'|^p}{(|g - a_6|^\alpha + |g - a_6|^{2-\alpha})^p} d\xi d\eta < \infty,$$

pelas observações anteriores com relação ao Lema 3.1.3.

De (i) e (ii), concluímos que $\int_D u^p < \infty$, o que é um absurdo. Logo, g omite no máximo seis pontos, isto é, a aplicação de Gauss omite no máximo seis pontos em S^2 . ■

3.2. O teorema de Earp e Rosenberg

Earp e Rosenberg estudaram a aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa S não-planar de tipo topológico finito no caso em que a curvatura total é finita, provando que g omite no máximo três valores e, no caso da curvatura total ser infinita, mostrando que g assume todos os valores infinitas vezes, exceto, no máximo, seis valores. Para apresentarmos esses resultados, utilizaremos os seguintes lemas.

Lema 3.2.1: Seja $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida num aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ que omite dois valores 0 e $a \neq 0$. Se $\phi_\lambda : D \rightarrow \Omega$ é uma família de aplicações conformes, com $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e $\lambda \in \Gamma$, então existe uma constante $c > 0$ tal que para $z_0 = \phi_\lambda(0)$,

- (i) $\frac{|g'(z_0)|}{1 + |g(z_0)|^2} \leq \frac{c}{|\phi'_\lambda(0)|}$ e
- (ii) $\frac{|g'(z_0)|}{|g(z_0)|^\alpha + |g(z_0)|^{2-\alpha}} \leq c \frac{k}{|\phi'_\lambda(0)|}$, para $k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$.

Demonstração: Analogamente ao Lema 3.1.3, a família $g \circ \phi_\lambda : D \rightarrow \mathbb{C}$ é normal em D , pois $g \circ \phi_\lambda$ é holomorfa e omite dois valores ([16], p. 169). Logo, pelo Teorema 3.1.2, existe $c > 0$ tal que

$$\frac{|g'(\phi_\lambda(0))|}{1 + |g(\phi_\lambda(0))|^2} \leq \frac{c}{|\phi'_\lambda(0)|} \text{ e como } z_0 = \phi_\lambda(0),$$

está provado (i).

Para obter (ii), basta aplicar o mesmo teorema para a família $(g \circ \phi_\lambda)^{\frac{1}{k}}$, observando que $z_0 = \phi_\lambda(0)$ e $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$.

Lema 3.2.2: Sejam $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa que omite k pontos $p_1, \dots, p_k$, com $k \geq 6$, num anel $A \subset \mathbb{C}$ e

$$J_k(z) = \frac{|g'(z)|^p (1 + |g(z)|^2)^2}{\prod_{i=1}^k |g(z) - p_i|^{p\alpha}}, \forall z \in A,$$

onde $k p \alpha = 5$, $\alpha \leq 1$ e $p(2 - \alpha) \leq 1$. Então, existe $j, 1 \leq j \leq k$, e uma constante positiva c_j tal que

$$(7) \quad J_k(z) \leq c_j \frac{|g'(z)|^p}{(|g(z) - p_j|^\alpha + |g(z) - p_j|^{2-\alpha})^p}$$

Demonstração: Vamos decompor A em conjuntos tais que vale (7) em cada um deles.

Para cada $s, 1 \leq s \leq k$, consideremos $T_s(z) = |g(z) - p_s|$ e $D_s = \{z \in A \mid T_s(z) \leq l < 1\}$, onde $l = \frac{1}{4} \min\{4, |p_s - p_i|, i \neq s, 1 \leq i \leq k\}$; os conjuntos D_s são disjuntos dois a dois.

Do Lema 3.1.4(i) e observando que $|g|$ é limitada em D_s , temos que vale (7) em cada $D_s, s = 1, \dots, k$.

Seja $U = \bigcup_{s=1}^k D_s$. Consideremos agora J_k em $A \setminus U$ e tomemos $D'_s = \{z \in A \setminus U \mid l \leq T_s(z) < 1\}, 1 \leq s \leq k$.

Sendo $z \in D'_s \subset A \setminus U, T_i(z) > l$ para todo $1 \leq i \leq k, i \neq s$, portanto T_i^{-1} é limitado em D'_s . Logo $J_k \leq c \frac{|g'|^p}{T_j^{p\alpha}}$, onde $c > 0$, e fazendo cálculos análogos ao Lema 3.1.4 para obter (1), vale (7) em $D'_s, 1 \leq s \leq k$. Consideremos o conjunto $V = \bigcup_{s=1}^k D'_s$.

Seja $W = A \setminus (U \cup V)$; notando que se $z \in W$, então $T_i(z) \geq 1, i = 1, \dots, k$, vamos mostrar que vale (7) em W . Para isso, observamos que, para cada $s, 1 \leq s \leq k$, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que, em W ,

$$(8) \quad \frac{\sum_{t=0}^4 a_t T_s^t}{T_s^{kp\alpha}} \leq \frac{c_1}{T_s} \leq \frac{c_2}{(T_s^\alpha + T_s^{2-\alpha})^p},$$

onde $a_0, \dots, a_4$ são números positivos quaisquer.

De fato, em W , $\frac{1}{T_s} \leq 1$, logo $\frac{1}{T_s^n} \leq \frac{1}{T_s}$, com $n \in \mathbb{N}$, e $\frac{\sum_{t=0}^4 a_t T_s^t}{T_s^{kp\alpha}} \leq \frac{c_1}{T_s}$, onde $c_1 = \sum_{t=0}^4 a_t$. Por outro lado, como $\frac{1}{p} - \alpha > 0$ e $\frac{1}{p} - 2 + \alpha \geq 0$ e com cálculos análogos ao Lema 3.1.4 para obter (2), vale que $\frac{1}{T_s} \leq \frac{c_2}{(T_s^\alpha + T_s^{2-\alpha})^p}$.

Para cada $s, 1 \leq s \leq k$, consideremos em W a região onde $1 \leq T_s \leq R_s$, onde R_s é uma constante qualquer positiva. Como $T_i \geq 1, 1 \leq i \leq k$, T_i^{-1} é limitada e $|g|$ também o é, logo

$$(9) \quad J_k \leq c \frac{|g'|^p}{T_j},$$

onde c é uma constante positiva. Utilizando a segunda desigualdade de (8) para $s = j$, concluimos que vale (7) em cada região onde $1 \leq T_s \leq R_s, s = 1, \dots, k$.

Temos agora $T_1, \dots, T_k$ limitados por constantes que dependem apenas de $p_1, \dots, p_k$ e tomemos $R = \min\{R_i, i = 1, \dots, k\}; R > 1$. Na região de W onde $T_i \geq R, i = 1, \dots, k$, vale que

$$(10) \quad \frac{1}{\prod_{i=1}^k T_i^{p\alpha}} = \frac{c_0}{T_s^{p\alpha k}},$$

para cada $s, 1 \leq s \leq k$.

Para mostrarmos essa desigualdade, escrevemos

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^k T_i^{p\alpha}} = \prod_{i=1}^k \left(\frac{T_s}{T_i}\right)^{p\alpha} \frac{1}{T_s^{p\alpha k}},$$

e consideremos $B_i = B(p_i, R)$ e as funções $H_i(\omega) = \frac{\omega - p_i}{\omega - \bar{p}_i}$. Da demonstração do Teorema 3.1.1, segue que H_i é limitada em $\mathbb{C} \setminus B_i$ e, portanto, também o é em $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{t=1}^k B_t$, logo, existe uma constante $c_0 > 0$ tal que $\prod_{i=1}^k \left(\frac{T_s}{T_i}\right)^{p\alpha} = \prod_{i=1}^k \left|\frac{g - p_s}{g - p_i}\right|^{p\alpha} \leq c_0$ e vale (10).

Utilizando (10), (8), para $s = j$,

$$J_k \leq c_0 \frac{|g'|^p}{T_j^{kp\alpha}} (1 + |g|^2) \leq c_0 |g'|^p \frac{(1 + (|g - p_j| + |p_j|)^2)^2}{T_j^{kp\alpha}} \leq c \frac{|g'|^p}{(T_j^\alpha + T_j^{2-\alpha})^p}$$

e vale (7), onde $T_i \geq R$, $i = 1, \dots, R$. Com isso o lema está provado. ■

Lema 3.2.3: Seja $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa que omite k pontos, $p_1, \dots, p_k$, num anel A , com $k \geq 6$. Então existem α e p , $0 < p < 1$, tais que

$$(I) = \int_A \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^k |g - p_i|^{p\alpha}} dx dy < \infty.$$

Demonstração: Sendo $J_k = \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^k |g - p_i|^{p\alpha}}$ e $A = \left(\bigcup_{s=1}^6 D_s\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^6 D'_s\right) \cup W$ nas condições do Lema 3.2.2, temos

$$(I) \leq \sum_{s=1}^6 \left(\int_{D_s} J_k dx dy + \int_{D'_s} J_k dx dy \right) + \int_W J_k dx dy$$

e considerando $N = D_s$ ou D'_s ou W , $N \subset A$, temos que

$$\int_N J_k dx dy \leq \int_N \frac{|g'|^p}{(|g - p_j|^\alpha + |g - p_j|^{2-\alpha})^p} dx dy \leq \int_A \frac{|g'|^p}{(|g - p_j|^\alpha + |g - p_j|^{2-\alpha})^p} dx dy$$

Nosso problema se reduz a mostrar que

$$\int_A \frac{|g'|^p}{(|g - p_j|^\alpha + |g - p_j|^{2-\alpha})^p} dx dy < \infty.$$

Sendo $A = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\}$, consideremos uma transformação $T : A \rightarrow A'$, $\omega = T(z) = cz$, onde $A' = \{\omega \in \mathbb{C} | r'_1 < |\omega| < r'_2\}$, com $e^{-\pi} < r'_1 < r'_2 < 1$ (basta considerar $c \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{r_1 e^\pi} < c < 1$).

Sendo $\omega = u + iv$, provaremos que

$$\int_{A'} \frac{|g'(L(\omega))|^p}{(|g(L(\omega)) - p_j|^\alpha + |g(L(\omega)) - p_j|^{2-\alpha})^p} du dv < \infty, \text{ onde } L = T^{-1}.$$

Para isso, consideremos o anel $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} | e^{-\pi} < |\omega| < 1\}$; $A' \subset \Omega$ e aplicaremos o Lema 3.2.1 para a família de aplicações de recobrimento conforme $\phi_z : D \rightarrow A'$, dados por $\phi_z(\omega) = \exp(i \log(\frac{\bar{d}\omega - d}{\omega - 1}))$, onde $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, $z \in A' \subset D$, $d = \exp(-i \log z)$ e, portanto, $\phi_z(0) = z$.

Calculando a derivada de ϕ_z em $\omega = 0$, obtemos $\phi'_z(0) = \exp(i \log d) i \frac{(d - \bar{d})}{d}$ e, portanto,

$$(11) \quad |\phi'_z(0)| = |z| \left| 1 - \frac{\bar{d}}{d} \right|.$$

Como $d = \exp(-i \log z)$, $\bar{d} = \exp(i \log |z|^2)$, e tomando $t = \log |z|^2$, temos $\left| 1 - \frac{\bar{d}}{d} \right|^2 = |1 - \cos t - i \sin t|^2 = 2 - 2 \cos t$ e segue de (11) que

$$(12) \quad |\phi'_z(0)| = |z| \sqrt{2 - 2 \cos t}$$

Consideremos uma vizinhança da fronteira de Ω , $V = \{z \in \Omega | 1 - \epsilon < |z| < 1\}$, onde $0 < \epsilon < 1$ (isto é, em $t = 0$); $\Omega = V \cup (\Omega \setminus V)$. Existem constantes positivas c_1, c_2 tais que, em V , $c_1 \leq \frac{\sqrt{2-2\cos t}}{\sqrt{t^2}} \leq c_2$, isto é,

$$(13) \quad c_1 \sqrt{t^2} \leq \sqrt{2 - 2 \cos t} \leq c_2 \sqrt{t^2}.$$

Basta observar que como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

escolhendo $0 < r < \frac{1}{2}$, existe $\delta = \delta(r) > 0$ tal que se $-\delta < t < \delta$, então $0 < \frac{1}{2} - r < \frac{1 - \cos t}{t^2} < \frac{1}{2} + r$. Também podemos escolher ϵ e r tais que se $t \in V$, então $-\delta < t < \delta$, logo $\frac{1 - \cos t}{t^2}$ é uma função limitada e vale (13).

Da segunda desigualdade do Lema 3.2.1, de (12) e (13) e observando que $\frac{1}{|z|} > 1$ e $t < 0$, temos que

$$\begin{aligned} \int_V J_k du dv &\leq \int_V \frac{1}{|\phi'_z(0)|^p} du dv \leq \\ &\leq c_1 \int_V \frac{1}{|z|^p (-\log |z|)^p} du dv \leq \\ &\leq c_1 \int_V \frac{1}{|z|^2 (-\log |z|)^p} du dv, \text{ pois } p < 1. \end{aligned}$$

Sendo $z = re^{i\theta}$,

$$\int_V J_k du dv \leq c \int_{1-\epsilon}^1 \frac{r dr}{r^2(-\log r)^p} = c[(\log r)^{1-p}]^{1-\epsilon} < \infty \text{ (pois } p < 1 \text{)}.$$

Como $\Omega \subset V \cup (\overline{\Omega \setminus V})$ e $\int_{\overline{\Omega \setminus V}} J_k du dv < \infty$ (pois $\overline{\Omega \setminus V} = \{z \in \mathbb{C} | e^{-\pi} \leq |z| \leq 1 - \epsilon\}$ é um compacto),

$$\int_{\Omega} J_k du dv \leq \int_V J_k du dv + \int_{\overline{\Omega \setminus V}} J_k du dv < \infty.$$

Mas $A' \subset \Omega$, logo

$$\int_{A'} J_k du dv \leq \int_{\Omega} J_k du dv < \infty$$

e o lema está provado. ■

O teorema de Earp e Rosenberg se enuncia:

Teorema 3.2.4: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ de tipo topológico finito que não é um plano. Então g assume todos os valores infinitas vezes, exceto, no máximo, seis valores, ou S tem curvatura total finita e g omite no máximo três valores.

Demonstração: Sendo S dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde M é topologicamente uma superfície compacta $\overline{M}$ menos um número finito de pontos $q_1, \dots, q_r$, consideremos um disco perfurado em cada um dos pontos q_j . Se q_j 's são pólos de g , esta pode ser estendida a uma função meromorfa em $\overline{M}$. Como g não é constante e observando que $g(\overline{M})$ é aberto e fechado, concluímos que $g(\overline{M}) = \widehat{\mathbb{C}}$ e que a curvatura total de S é $c(S) = -4\pi m$, onde m é o grau de g e, portanto, finita. Logo, pelo Teorema 2.2.14, g omite no máximo três pontos.

Se q_j é uma singularidade essencial de g , então, pelo Grande Teorema de Picard, g assume todos os valores de $\mathbb{C}$, exceto possivelmente um, infinitas vezes.

No caso em que os q_j 's não são pólos, suponhamos, por absurdo, que existem sete pontos, $p_1, \dots, p_7 \in \mathbb{C}$, assumidos um número finito de vezes por g . Fazemos uma rotação, se necessário, podemos supor que $p_7 = \infty$.

Como $g^{-1}\{p_j, j = 1 \dots, 7\}$ é um conjunto finito de pontos, podemos escolher um fim de S conformemente equivalente ao anel

$$A = \{\zeta \in \mathbb{C} | 0 < \frac{1}{r} \leq |\zeta| < r < \infty\},$$

tal que g omite os pontos p_j 's em A .

Consideremos a função

$$h(\zeta) = \frac{g'(\zeta)}{f^{\frac{2}{p}}(\zeta) \prod_{j=1}^6 (g(\zeta) - p_j)^\alpha},$$

onde $6p\alpha = 5$, $\alpha \leq 1$ e $p(2 - \alpha) \leq 1$.

Como g não tem pólos em A , f não tem zeros em A e, portanto, h é uma função holomorfa em A . Além disso, observamos que os zeros de h são isolados, formando assim um conjunto discreto.

Usando o Teorema de Yau, provaremos que $\int_A |h|^p = \infty$.

Para isso, consideramos a métrica $d\tilde{s}$ em $\mathring{A}$ (interior de A) definida por $d\tilde{s} = \tilde{\lambda}(\zeta)d\zeta$, onde $\tilde{\lambda}(\zeta) = \lambda(\zeta)\lambda(\frac{1}{\zeta})$. Do Lema 2.2.9, constatamos que A é completo em relação a $d\tilde{s}$. Como $\Delta \log |h| = 0$ quase sempre, se h não é constante então segue do Teorema de Yau que $\int_A |h|^p = \infty$.

Se h é constante, então escrevemos $\int_A |h|^p = K \text{vol } A = \infty$ (pois A é completo, simplesmente conexo e com curvatura não positiva e, portanto, $\text{vol } A = \infty$).

Xavier provou que a integral em questão é finita no disco unitário D e faremos o mesmo para o anel A .

Escrevendo

$$\int_A |h|^p = \int_A \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - p_i|^{p\alpha}} d\xi d\eta,$$

do Lema 3.2.3, para $k = 6$, concluímos que $\int_A |h|^p < \infty$, o que é um absurdo, logo o teorema está provado. ■

CAPÍTULO 4

EXTENSÃO DOS TEOREMAS DE XAVIER E DE EARP E ROSENBERG PARA SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{R}^4$

No capítulo anterior, apresentamos o estudo da distribuição da aplicação de Gauss generalizada de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ e destacamos os resultados de Earp e Rosenberg. É natural que esse estudo possa ser estendido para as superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$.

Chen [6] mostrou em 1982 que se as projeções, g_1 e g_2 , da aplicação de Gauss generalizada de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^4$ omitem mais de seis pontos de S^2 , ou uma projeção é constante e a outra omite mais de quatro pontos de S^2 , então S é um plano.

Se S é uma superfície mínima não plana de tipo topológico finito, provaremos que

- (i) g_1 e g_2 assumem todos os valores de $\widehat{\mathbf{C}}$ infinitas vezes, exceto, no máximo seis valores, ou uma projeção é constante e a outra assume todos os valores de $\widehat{\mathbf{C}}$ infinitas vezes, exceto no máximo quatro valores; ou
- (ii) S tem curvatura total finita e g_1 e g_2 omitem no máximo três valores de $\mathbf{C}$ ou uma das projeções é constante e a outra omite no máximo dois valores.

Para isso usaremos as mesmas técnicas usadas por Earp e Rosenberg [11] e o Teorema 2.3.2, de Osserman.

4.1. Extensão do teorema de Xavier para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$

Para a demonstração da extensão do Teorema de Xavier para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ precisaremos de um lema auxiliar que é análogo ao Lema 3.1.3.

Lema 4.1.1: Sejam $T_1 : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, 0\}$ e $T_2 : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{b, 0\}$ funções holomorfas, onde D é o disco unitário e $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então

$$\int_D \prod_{j=1}^2 \left(\frac{|T'_j|}{|T_j|^2 + |T_j|^{2-\alpha}} \right)^p dx dy < \infty,$$

onde $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $0 < p < \frac{1}{2}$.

Demonstração: Segue do Teorema 3.1.2 para $T_j^{\frac{1}{k}}$, $j = 1, 2$ que $\exists B_j > 0$ tal que

$$\frac{|T'_j|}{|T_j|^2 + |T_j|^{2-\alpha}} \leq k \frac{B_j}{1-|z|^2}.$$

$$\text{Logo, } \int_D \prod_{j=1}^2 \left(\frac{|T'_j|}{|T_j|^2 + |T_j|^{2-\alpha}} \right)^p d\xi d\eta \leq k^2 B_1 B_2 \int_D \frac{1}{(1-|z|^2)^{2p}} < \infty, \text{ pois } 2p < 1. \quad \blacksquare$$

Também precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 4.1.2: Sejam $g_1 : D \rightarrow \mathbb{C}$ e $g_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas no disco unitário D que omitem os pontos $a_1, \dots, a_6$ e $b_1, \dots, b_6$, respectivamente; consideremos p e l números positivos, com $l \leq 1$ e α um número real tal que $\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$ e $p\alpha = \frac{5}{12}$ ou $p\alpha = \frac{3}{4}$.

Sendo $c_j = a_j$ se $k = 1$ e $c_j = b_j$ se $k = 2$ temos:

(i) Se $|g_k(z) - c_j| \leq l$, então

$$(1) \quad \frac{|g'_k|^p}{|g_k - c_j|^{p\alpha}} \leq 2^p \frac{|g'_k|^p}{(|g_k - c_j|^\alpha + |g_k - c_j|^{2-\alpha})^p};$$

(ii) Se $|g_k(z) - c_j| > l$, então

$$(2) \quad \frac{|g'_k|^p}{|g_k - c_j|^{\frac{1}{n}}} < K \frac{|g'_k|^p}{(|g_k - c_j|^\alpha + |g_k - c_j|^{2-\alpha})^p};$$

com $j = 1, \dots, 6$, onde $n = 2$ se $p = \frac{5}{12\alpha}$ e $n = 1$ se $p = \frac{3}{4\alpha}$.

Demonstração: A demonstração é imediata, basta utilizar as estimativas feitas no Lema 3.1.4, para obter as expressões (1) e (2), considerando $K = [(\frac{1}{l})^{\frac{1}{np}-\alpha} + (\frac{1}{l})^{\frac{1}{np}+\alpha-2}]^p$ para (ii).

Temos:

Teorema 4.1.3: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ com G a aplicação generalizada de Gauss e g_1 e g_2 suas projeções em $S_1 \times S_2$. Se

- (i) g_1 e g_2 omitem mais de seis pontos, ou
- (ii) uma projeção é constante e a outra omite mais de quatro pontos,

então S é um plano.

Demonstração: Consideremos S dada pela aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde M é uma superfície de Riemann. A aplicação generalizada de Gauss pode ser expressa por $\overline{G} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, onde $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$, $k = 1, \dots, 4$.

As projeções g_1 e g_2 são definidas por

$$g_1 = \frac{\varphi_2 + i\varphi_4}{\varphi_1 - i\varphi_2} \quad \text{e} \quad g_2 = \frac{\varphi_3 - i\varphi_4}{\varphi_1 - i\varphi_2}$$

e a métrica é dada por

$$ds^2 = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g_1|^2)^2 (1 + |g_2|^2)^2 |d\zeta|^2,$$

onde $f = \varphi_1 - i\varphi_2$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que S é simplesmente conexa. Caso contrário, trabalharemos com o recobrimento universal, $\widehat{M}$, de M .

Como S é regular, pelo teorema da uniformização de Koebe, $\widehat{M}$ é conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ ou ao disco unitário D .

Se M é conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, então, pelo teorema de Picard, temos que g_1 e g_2 são ou constantes ou omitem no máximo dois pontos, logo, não satisfazem às hipóteses do teorema.

Temos, então que $\widehat{M}$ é conformemente equivalente ao disco unitário D .

Através de uma rotação, se necessário, consideramos o infinito como um dos pontos omitidos por g_1 e g_2 e, portanto, g_1 e g_2 são holomorfas.

Suponhamos, por absurdo, que S não é um plano, então g_1 e g_2 não são ambas constantes.

Inicialmente vamos considerar a hipótese (i): g_1 e g_2 omitem mais que seis pontos.

Podemos supor que g_1 e g_2 omitem sete pontos e, como $g_1 \neq \infty$ e $g_2 \neq \infty$, consideremos g_1 omitindo seis pontos distintos $a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{C}$ e g_2 omitindo seis pontos distintos $b_1, \dots, b_6 \in \mathbb{C}$.

Definimos a função $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$h = g_1' g_2' f^{-\frac{2}{p}} \prod_{i=1}^6 (g_1 - a_i)^{-\alpha} \prod_{j=1}^6 (g_2 - b_j)^{-\alpha},$$

onde $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^*$, com $\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$ e $p\alpha = \frac{5}{12}$.

Notamos que h é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{a_i, b_j, \text{ com } i, j = 1, \dots, 6\}$ porque $g_1 \neq a_i, g_2 \neq b_j$ e sendo a superfície S regular, $f \neq 0$. Além disso, os zeros de h , que são os zeros de g_1' e g_2' , são isolados, formando assim um conjunto discreto. Logo $\Delta \log u = 0$ quase sempre.

Suponhamos que u não é uma função constante.

Como D é uma superfície de Riemann e u é uma função não-negativa satisfazendo $\Delta \log u = 0$ quase sempre, segue do teorema de Yau, citado no capítulo 3, que $\int_D u^p = \infty$, para qualquer número real $p > 0$. Em particular, para $p = \frac{5}{12\alpha} > 0$, temos que $\int_D u^p = \infty$.

Suponhamos que u é uma constante k . Logo,

$$\int_D u^p = \int_D k^p dA = k^p \int_D dA = k^p \text{vol } D = \infty,$$

pois D é uma superfície de Riemann mínima, simplesmente conexa e completa e vimos no capítulo 3 que $\text{vol } D = \infty$.

Chegaremos a um absurdo, pois mostraremos também que $\int_D u^p < \infty$.

Para isto, consideremos

$$l = \frac{1}{2} \min\{2, |a_i - a_j|, |b_i - b_j|, |a_i - b_j|, \text{ com } i \neq j, i, j = 1, \dots, 6\}.$$

Fixado $j, 1 \leq j \leq 6$, consideremos $T_{ij}(\zeta) = |g_i(\zeta) - c_j|$, o conjunto $D_j = \bigcap_{i=1}^2 \{\zeta \in D | T_{ij}(\zeta) \leq l\}$, onde $c_j = a_j$, se $i = 1$ e $c_j = b_j$, se $i = 2, j = 1, \dots, 6$ e $D' = D \setminus \bigcup_{j=1}^6 D_j$.

Como $D = (\bigcup_{j=1}^6 D_j) \cup D'$, escrevemos

$$\begin{aligned} \int_D u^p &= \sum_{j=1}^6 \int_{D_j} u^p + \int_{D'} u^p, \text{ onde} \\ u^p &= |h|^p = \frac{|g'_1|^p}{\prod_{i=1}^6 |g_1 - a_i|^{\alpha p}} \frac{|g'_2|^p}{\prod_{i=1}^6 |g_2 - b_i|^{\alpha p}} |f|^{-2} \text{ e} \\ \int_D u^p &= \frac{1}{4} \int_D \frac{|g'_1|^p}{\prod_{i=1}^6 |g_1 - a_i|^{\alpha p}} \frac{|g'_2|^p}{\prod_{j=1}^6 |g_2 - b_j|^{\alpha p}} (1 + |g_1|^2)(1 + |g_2|^2) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que $\int_{D_j} u^p < \infty, i \leq j \leq 6$.

Sendo $\zeta \in D_j$,

$$(3) \quad \begin{cases} T_{ij}(\zeta) \leq l, i = 1, 2, \\ T_{ik}(\zeta) > l, \text{ se } k \neq j, \text{ isto é } \frac{1}{T_{ik}(\zeta)} < \frac{1}{l} \end{cases}$$

Também temos que

$$|g_i(\zeta)| \leq |g_i(\zeta) - c_j| + |c_j| \leq l + |c_j|$$

e, portanto,

$$(4) \quad 1 + |g_i|^2 \leq 1 + (l + |c_j|)^2, i = 1, 2.$$

De (3) e (4), segue que

$$\begin{aligned} \int_{D_j} u^p &= \frac{1}{4} \int_{D_j} \frac{1 + |g_1|^2}{\prod_{k \neq j} |g_1 - a_k|^{p\alpha}} \frac{1 + |g_2|^2}{\prod_{k \neq j} |g_2 - b_k|^{p\alpha}} \frac{|g'_1|^p}{|g_1 - a_j|^{p\alpha}} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{D_j} \frac{1 + (l + |a_j|^2)(1 + (l + |b_j|^2))}{l^{10}} \frac{|g'_1|^p}{|g_1 - a_j|^{p\alpha}} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Se $M = \frac{1}{4}l^{-10}(1 + (l + |a_j|)^2)(1 + (l + |b_j|^2))$, então

$$\int_{D_j} u^p \leq M \int_{D_j} \frac{|g'_1|^{p\alpha}}{|g_1 - a_j|^{p\alpha}} \frac{|g'_2|^{p\alpha}}{|g_2 - b_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta.$$

Como $D_j \subset D$, segue de (1) do Lema 4.1.2 que

$$\begin{aligned} \int_{D_j} u^p &\leq 2^{2p} M \int_{D_j} \prod_{i=1}^2 \left(\frac{|g'_i|}{|g_i - c_j|^\alpha + |g_i - c_j|^{2-\alpha}} \right) d\xi d\eta \\ &\leq 2^{2p} M \int_D \prod_{i=1}^2 \left(\frac{|g'_i|}{|g_i - c_j|^\alpha + |g_i - c_j|^{2-\alpha}} \right)^p d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{D_j} u^p \leq \int_D \prod_{i=1}^2 \left(\frac{|g'_i|}{|g_i - c_j|^\alpha + |g_i - c_j|^{2-\alpha}} \right)^p d\xi d\eta,$$

onde $c = 2^{2p} M > 0$.

Definimos as funções $T_i(\zeta) = g_i(\zeta) - c_j, i = 1, 2$, holomorfas em D .

Observamos que $T_i(\zeta) \neq 0$ e $T_i(\zeta) \neq c_k - c_j$ para $k \neq j$, pois $g_i \neq c_k, \forall i, k$. Logo, pelo Lema 4.1.1, concluímos que

$$(5) \quad \int_D \prod_{i=1}^2 \left(\frac{|g'_i|}{|g_i - c_j|^\alpha + |g_i - c_j|^{2-\alpha}} \right)^p d\xi d\eta < \infty,$$

para todo j , pois, como $p = \frac{5}{12\alpha}$ e $\frac{10}{11} \leq \alpha < 1, 0 < \frac{5}{12} < p < \frac{11}{24} < \frac{1}{2}$ e p é um número real nas condições do lema.

Temos, então,

$$\int_{D_j} u^p < \infty.$$

Mostremos também que $\int_{D'} u^p < \infty$, onde $D' = D \setminus \bigcup_{j=1}^6 D_j$. Para isso, observamos que se $\zeta \in D'$, então $\zeta \notin D_j, i \leq j \leq 6$, e temos que $T_{1j}(\zeta) > l$ ou $T_{2j}(\zeta) > l, 1 \leq j \leq 6$.

Logo, definimos os seguintes conjuntos:

$$D'_{1j} = \{\zeta \in D' | T_{1j}(\zeta) \leq l \text{ e } T_{2j}(\zeta) > l\},$$

$$D'_{2j} = \{\zeta \in D' | T_{1j}(\zeta) > l \text{ e } T_{2j}(\zeta) \leq l\} \text{ e}$$

$$D'_{3j} = \{\zeta \in D' | T_{1j}(\zeta) > l \text{ e } T_{2j}(\zeta) > l\}.$$

Sejam $D'_1 = \bigcup_{j=1}^6 D'_{1j}$, $D'_2 = \bigcup_{j=1}^6 D'_{2j}$ e $D'_3 = \bigcup_{j=1}^6 D'_{3j}$. Logo, como $D' \subset (D'_1 \cup D'_2 \cup D'_3)$,

$$\int_{D'} u^p \leq \sum_{j=1}^6 \int_{D'_{1j}} u^p + \sum_{j=1}^6 \int_{D'_{2j}} u^p + \sum_{j=1}^6 \int_{D'_{3j}} u^p.$$

Primeiro provaremos que $\int_{D'_{3j}} u^p < \infty$.

Escrevemos

$$\begin{aligned} \int_{D'_{3j}} u^p &= \int_{D'_{3j}} \frac{(1 + |g_1|^2)(1 + |g_2|^2)|g'_1|^p|g'_2|^p}{\prod_{i=1}^6 |g - a_i|^{p\alpha} \prod_{i=1}^6 |g - b_i|^{p\alpha}} d\xi d\eta = \\ &= \int_{D'_{3j}} \frac{1 + |g_1|^2}{|g - a_6|^2} \frac{1 + |g_2|^2}{|g - b_6|^2} \frac{1}{\prod_{i=1}^5 \left| \frac{g_1 - a_i}{g_1 - a_6} \right|^{p\alpha}} \frac{1}{\prod_{i=1}^5 \left| \frac{g_2 - b_i}{g_2 - b_6} \right|^{p\alpha}} \frac{|g'_1|^p}{|g_1 - a_6|^{6p\alpha-2}} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_6|^{6p\alpha-2}} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Como $p\alpha = \frac{5}{12}$ e $6p\alpha - 2 = \frac{1}{2}$, segue que

$$\int_{D'_{3j}} u^p = \int_{D'_{3j}} \prod_{i=1}^2 \left[\left(\frac{1}{|g_i - c_6|^2} + \left| \frac{g_i}{g_i - c_6} \right|^2 \right) \prod_{k=1}^5 \left| \frac{g_i - c_6}{g_i - c_k} \right|^{p\alpha} \frac{|g'_i|^p}{|g_i - c_6|^{\frac{1}{2}}} \right] d\xi d\eta.$$

Sejam $A_j = B(a_j, l)$ e $B_j = B(b_j, l)$ as bolas de raio l e centro em a_j e b_j , respectivamente.

Para a função g_1 , definimos a função $h_j : \mathbb{C} \setminus A_j \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_j(\omega) = \frac{\omega+c}{\omega-a_j}$, onde c é uma constante complexa qualquer e para a função g_2 , definimos a função $f_j : \mathbb{C} \setminus B_j \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_j(\omega) = \frac{\omega+c}{\omega-b_j}$, onde c é uma constante complexa qualquer, $j = 1, \dots, 6$.

Como $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^6 (A_j \cup B_j) \subset \mathbb{C} \setminus A_j$ e $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^6 (A_j \cup B_j) \subset \mathbb{C} \setminus B_j$, temos que as funções $h_j(\omega) = \frac{\omega+c}{\omega-a_j}$ e $f_j(\omega) = \frac{\omega+c}{\omega-b_j}$ são limitadas em $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^6 (A_j \cup B_j)$, logo $h_j(g_1(\zeta))$ e $f_j(g_2(\zeta))$ também o são.

Logo, utilizando (5) e (2) do Lema 4.1.2 e sendo $D'_3 \subset D$, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{D'_3} u^p &\leq k \int_{D'_3} \prod_{i=1}^2 \frac{|g'_i|^p}{|g_i - c_6|^{\frac{1}{2}}} \leq N \int_{D'_3} \prod_{i=1}^2 \frac{|g'_i|^p}{(|g_i - c_6|^\alpha + |g_i - c_6|^{2-\alpha})^p} \leq \\ &\leq N \int_D \prod_{i=1}^2 \frac{|g'_i|^p}{(|g_i - c_6|^\alpha + |g_i - c_6|^{2-\alpha})^p} < \infty, \text{ onde } N = K^2 k > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_{D'_3} u^p < \infty$.

Provaremos também que $\int_{D'_{1j}} u^p < \infty$.

Se $\zeta \in D'_{1j}$, então $T_{1j}(\zeta) \leq l$ e $|g_2(\zeta) - b_j| > l$; logo $T_{1k}(\zeta) > l$, para $k \neq j$.

Utilizando (1) e (2) e observando que as funções $h_k(\omega) = \frac{\omega - c}{\omega - b_k}$, com c uma constante complexa, são limitadas em $\mathbb{C} \setminus B(b_k, l)$, temos, utilizando (5) que $\int_{D'_{ij}} u^p =$

$$\begin{aligned} &= \int_{D'_{1j}} \frac{1 + |g_1|^2}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^6 |g_1 - a_i|^{p\alpha}} \frac{|g'_1|^p}{|g_1 - a_j|^{p\alpha}} \left(\frac{1}{|g_2 - b_j|^2} + \left| \frac{g_2}{g_2 - b_j} \right|^2 \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^6 \left| \frac{g_2 - b_j}{g_2 - b_i} \right|^{p\alpha} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_j|^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta \leq \\ &\leq K \int_{D'_{1j}} \frac{|g'_1|^p}{|g_1 - a_j|^{p\alpha}} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_j|^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta \leq M \int_{D'_{1j}} \prod_{i=1}^2 \frac{|g'_i|^p}{(|g_i - c_j|^\alpha + |g_i - c_j|^{2-\alpha})^p} d\xi d\eta \leq \\ &\leq M \int_D \prod_{i=1}^2 \frac{|g'_i|^p}{(|g_i - c_j|^\alpha + |g_i - c_j|^{2-\alpha})^p} d\xi d\eta < \infty, \text{ pois } D'_{1j} \subset D. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $\int_{D'_{2j}} u^p < \infty$.

Concluimos, então, que $\int_D u^p < \infty$ e conseqüentemente $\int_D u^p < \infty$, o que é um absurdo, pois tínhamos provado anteriormente que $\int_D u^p = \infty$.

Logo S é um plano.

Consideremos, agora, a hipótese (ii): uma das projeções é constante e a outra omite mais que quatro pontos.

Podemos supor que g_1 é constante e que g_2 omite cinco pontos, e escolher o infinito como um dos pontos omitidos por g_2 ; chamemos $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{C}$ os outros pontos.

Definimos a função $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ por $h = g'_2 f^{\frac{-2}{p}} \prod_{j=1}^4 (g_2 - b_j)^{-\alpha}$, onde $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^*$, com $\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$ e $p = \frac{3}{4\alpha}$.

Observamos que h é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{b_j, 1 \leq j \leq 4\}$, porque $g_2 \neq b_j, j = 1, \dots, 4$, e $f \neq 0$.

Seja $u = |h| \geq 0$. Vamos mostrar que $\int_D u^p = \infty$.

Se u é uma constante R , então

$$\int_D u^p = R^p \int_D dA = R^p \text{vol } D = \infty,$$

pois D é uma superfície de Riemann simplesmente conexa, mínima e completa.

Suponhamos que u não é constante. Notemos que os zeros de h são isolados, porque são os zeros de g'_2 e g_2 não é constante. Novamente, pelo Teorema de Yau, citado anteriormente, temos que $\int_D u^p = \infty$, para qualquer número real $p > 0$ e, em particular para $p = \frac{3}{4\alpha} > 0$.

Mostraremos também que $\int_D u^p < \infty$, e para isto chamamos $l = \frac{1}{2} \min\{2, |b_i - b_j|, i \neq j, i, j = 1, \dots, 4\}$.

Sejam $D_j = \{\zeta \in D | T_{2j}(\zeta) \leq l\}$, $T_{2j}(\zeta) = |g_2(\zeta) - b_j|$, $j = 1, \dots, 4$ e $D' = D \setminus \bigcup_{j=1}^4 D_j$.

Como $D = (\bigcup_{j=1}^4 D_j) \cup D'$, podemos escrever

$$\int_D u^p = \sum_{j=1}^4 \int_{D_j} u^p + \int_{D'} u^p, \text{ onde } u^p = |h|^p = \frac{|g'_2|^p}{\prod_{j=1}^4 |g_2 - b_j|^{\alpha p}} |f|^{-2}; \text{ portanto,}$$

$$\int_D u^p = \frac{K}{4} \int_D \frac{|g'_2|(1 + |g_2|^2)}{\prod_{j=1}^4 |g_2 - b_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta = \frac{K}{4} \int_D \frac{1 + |g_2|^2}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^4 |g_2 - b_k|^{p\alpha}} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta.$$

Provaremos primeiro que $\int_{D_j} u^p < \infty$, para $j = 1, \dots, 4$.

Se $z \in D_j$, então temos:

$$(5) \quad \begin{cases} T_{2j}(\zeta) \leq l; \\ T_{2k}(\zeta) > l, \text{ se } k \neq j, \text{ ou seja, } \frac{1}{T_{2k}(\zeta)} < \frac{1}{l} \end{cases}$$

Logo, $|g_2(z)| \leq |g_2(z) - b_j| + |b_j| \leq l + |b_j|$ e, portanto,

$$(6) \quad 1 + |g_2|^2 \leq 1 + (l + |b_j|)^2$$

De (5) e (6), segue que

$$\int_{D_j} u^p \leq M \int_{D_j} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta,$$

onde $M = \frac{K}{4l^3} (1 + (l + |b_j|)^2) > 0$.

Logo, como $D \subset D_j$, de (1),

$$\int_{D_j} u^p \leq M \int_D \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta \leq 2^p M \int_D \frac{|g'_2|^p}{(|g_2 - b_j|^2 + |g_2 - b_j|^{2-\alpha})^p} d\xi d\eta.$$

Utilizando o Lema 3.1.3 para a função $T_2 = g_2 - b_j$ e $p\alpha = \frac{3}{4}$, observamos que, com $\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$, $0 < \frac{3}{4} < p \leq \frac{33}{40} < 1$,

$$(6) \quad \int_D \frac{|g'_2|^p}{(|g_2 - b_j|^\alpha + |g_2 - b_j|^{2-\alpha})^p} d\xi d\eta < \infty, \forall j \text{ e, portanto, } \int_{D_j} u^p < \infty, \forall j.$$

Também vale que $\int_{D'} u^p < \infty$, onde $D' = D \setminus \bigcup_{j=1}^4 D_j$.

Se $\zeta \in D'$, então $\zeta \notin D_j$, $j = 1, \dots, 4$ e, portanto, $T_{2j}(\zeta) > l$, $j = 1, \dots, 4$.

Sendo $p\alpha = \frac{3}{4}$, vale que $4p\alpha - 2 = 1$ e

$$\begin{aligned} \int_{D'} u^p &= \frac{K}{4} \int_{D'} \frac{(1 + |g_2|^2)}{\prod_{j=1}^4 |g_2 - b_j|^{p\alpha}} |g'_2|^p d\xi d\eta = \\ &= \int_{D'} \frac{1}{\prod_{j=1}^3 \left| \frac{g_2 - b_j}{g_2 - b_4} \right|^{p\alpha}} \frac{1 + |g_2|^2}{|g_2 - b_4|^2} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_4|^{4p\alpha-2}} d\xi d\eta = \\ &= \int_{D'} \prod_{j=1}^3 \left| \frac{g_2 - b_4}{g_2 - b_j} \right|^{p\alpha} \left(\frac{1}{|g_2 - b_4|^2} + \left| \frac{g_2}{g_2 - b_4} \right|^2 \right) \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_4|} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Consideremos $B_j = B(b_j, l)$, $j = 1, \dots, 4$ e, como no capítulo 3, as funções $H_j(z) = \frac{z+c}{z-b_j}$ definidas em $\mathbb{C} \setminus B_j$ são limitadas. Observando que $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^4 B_j \subset \mathbb{C} \setminus B_j$, concluímos que existe uma constante real $M > 0$ tal que, utilizando (2), (6) e sendo $D' \subset D$,

$$\int_{D'} u^p = M \int_{D'} \frac{|g'_2|^p}{|g_2 - b_4|} d\xi d\eta \leq c \int_D \frac{|g'_2|^p}{(|g_2 - b_4|^\alpha + |g_2 - b_4|^{2-\alpha})^p} d\xi d\eta < \infty,$$

onde $c = kM > 0$.

Concluimos, então, que $\int_D u^p < \infty$, o que é um absurdo. Logo S é um plano. ■

4.2. Extensão do Teorema de Earp e Rosenberg para Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^4$

Para estendermos o Teorema de Earp e Rosenberg, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 4.2.1: Sejam $g_1 : a \rightarrow \mathbb{C}$ e $g_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas que omitem seis pontos $a_1, \dots, a_6$ e $b_1, \dots, b_6$, respectivamente, num anel $A \subset \mathbb{C}$ e

$$J = \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k(z)|(1 + |g_k(z)|^2)}{\prod_{i=1}^6 |g_k(z) - c_i|^{p\alpha}},$$

onde $c_i = a_i$ se $k = 1$ ou $c_i = b_i$ se $k = 2$, $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$ e $p\alpha = \frac{5}{12}$.

Então existem j , $1 \leq j \leq 6$, e uma constante positiva C_j tal que

$$(7) \quad J(z) \leq C_j \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k(z)|^p}{(|g_k(z) - c_j|^\alpha + |g_k(z) - c_j|^{2-\alpha})^p}$$

em conjuntos mensuráveis M_i de A tais que $\bigcup_{i=1}^n M_i = A$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A demonstração será análoga à do Lema 3.2.2.

Tomemos $l = \frac{1}{2} \min\{2, |a_i - a_j|, |b_i - b_j|, |a_i - b_j|, |a_t - b_t|, i \neq j, i, j, t = 1, \dots, 6\}$.

Consideremos $T_{ks}(z) = |g_k(z) - c_s|$, $k = 1, 2$ e $D_s = \{z \in A \mid T_{ks}(z) \leq l \leq 1, k = 1, 2\}$, os conjuntos D_s são disjuntos dois a dois.

Logo, como, em D_s , $|g_k|$ é limitada, $k = 1, 2$ e utilizando a expressão (1) do Lema 4.1.2 para cada g_k , vale (7) em D_s para $j = s$.

Seja $U = \bigcup_{s=1}^6 D_s$. Consideremos agora J em $A \setminus U$ e os conjuntos

$$A_s = \{z \in A \setminus U \mid l \leq T_{ks}(z) < 1, k = 1, 2\},$$

$$A_{1s} = \{z \in A \setminus U \mid T_{1s}(z) < l \text{ e } l \leq T_{2s}(z) < 1\} \text{ e}$$

$$A_{2s} = \{z \in A \setminus U \mid l \leq T_{1s}(z) < 1 \text{ e } T_{2s}(z) < l\}, 1 \leq s \leq 6$$

Primeiro mostraremos que vale (7) em A_s . Para isto observamos, como antes, que $|g_k|$ é limitado, $k = 1, 2$ e que $T_{ki}(z) \geq l, \forall i$, ou seja, $\frac{1}{T_{ki}}$ é limitada, $k = 1, 2$; novamente segue do Lema 4.1.2 que vale (7) em A_s .

Também vale (7) em A_{1s} . Sendo $z \in A_{1s}$, $T_{1s}(z) < l$, logo $|g_1|$ e $\frac{1}{T_{1k}}$ são limitados, para $k \neq s$ e $l \leq T_{2s}(z) < 1$.

Escrevendo

$$(8) \quad \frac{(1 + |g_2|^2)}{\prod_{i=1}^6 |g_2 - b_i|^{p\alpha}} = \left(\frac{1}{|g_2 - b_s|^2} + \left| \frac{g_2}{g_2 - b_s} \right|^2 \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^6 \left| \frac{g - b_s}{g - b_i} \right|^{p\alpha} \frac{1}{|g_2 - b_s|^{\frac{1}{2}}}$$

e observando que as funções $H_i(\omega) = \frac{\omega - c}{\omega - b_i}$ são limitadas em $\mathbb{C} \setminus B(b_s, l)$, onde c é um número complexo qualquer e $B(b_s, l)$ é a bola de centro b_s e raio l , e $A_{1s} \subset B(b_s, l)$, segue do Lema 4.1.2 para g_1 e g_2 que vale (7) em A_{1s} . O mesmo resultado pode ser provado, analogamente, em A_{2s} .

Seja $V = \left(\bigcup_{s=1}^6 A_{1s} \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^6 A_{2s} \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^6 A_s \right)$, consideremos J em $W = A \setminus (U \cup V)$.

Pelas mesmas estimativas da expressão (8) do Lema 3.2.2, para cada s , $1 \leq s \leq 6$, $\exists c_1, c_2 > 0$ tais que, em ω ,

$$(9) \quad \frac{\sum_{t=0}^2 a_t T_{ks}^t}{T_{ks}^{6p\alpha}} \leq \frac{c_1}{T_{ks}} \leq \frac{c_2}{(T_{ks}^\alpha + T_{ks}^{2-\alpha})^p},$$

onde $a_t, 0 \leq t \leq 2$, é um número real positivo qualquer, $k = 1, 2$.

Para cada s , $1 \leq s \leq 6$, tomemos uma constante $R_s > 1$ e os conjuntos

$$B_s = \{z \in W | 1 \leq T_{ks}(z) \leq R_s, k = 1, 2\},$$

$$B_{1s} = \{z \in W | T_{1s}(z) > R_s \text{ e } 1 \leq T_{2s}(z) \leq R_s\},$$

$$B_{2s} = \{z \in W | 1 \leq T_{1s}(z) \leq R_s \text{ e } T_{2s}(z) > R_s\} \text{ e } B = \bigcup_{s=1}^6 (B_s \cup \left(\bigcup_{t=1}^2 B_{ts} \right)).$$

Se $z \in B_s$, então $|g_k(z) - c_s| \leq R_s$, logo $|g_k|$ é limitada e, como $T_{ki}(z) > 1, \forall i \neq s$, T_{ki}^{-1} também é limitada, $k = 1, 2$. Analogamente, do Lema 4.1.2(i) para cada g_k , concluímos que vale (7) em B_s , com $j = s$.

Considerando agora o conjunto $B_{1s}, 1 \leq s \leq 6$, notamos que $|g_2|$ e T_{2i}^{-1} são limitados, para $\forall i \neq s$, porque $T_{2s}(z) \leq R_s$, e $T_{2i}(z) \geq 1, \forall i$. Além disso, fazendo cálculos análogos

para obter (8) para g_1 , segue do Lema 4.1.2 para g_1 e g_2 , partes (ii) e (i), respectivamente, que vale (7) em B_{1s} , para $j = s$, e analogamente para B_{2s} .

Tomemos $R = \min\{R_1, \dots, R_s\}$; $R > 1$ e $L_s = \{z \in W | T_{ks}(z) > R; k = 1, 2\}$.

Observamos que sendo $z \in W \setminus L_s$, temos três possibilidades a considerar:

- (i) $T_{ks}(z) < R \leq R_s$, logo $z \in B_s$; ou
- (ii) $T_{1s}(z) < R \leq R_s$ e $T_{2s}(z) > R$, ou seja, se $R = R_s$, então $T_{1s}(z) < R_s$ e $T_{2s}(z) > R_s$, logo $z \in B_{2s}$, e se $R < R_s$, $T_{1s}(z) < R_s$ e $T_{2s}(z) > R_s$ ou $1 < R < T_{2s}(z) < R_s$ e, portanto, $z \in B_{2s}$ ou $z \in B_{1s}$; ou
- (iii) $T_{1s}(z) > R$ e $T_{2s}(z) < R \leq R_s$ e, analogamente, $z \in B_{1s}$ ou $z \in B_{2s}$.

Sendo $L = \bigcup_{s=1}^6 L_s$, concluimos que $A = U \cup V \cup B \cup L$.

Novamente, utilizando estimativas análogas à do Lema 3.2.2(10), temos que, em L_s , existe uma constante $c_s > 0$ tal que

$$(10) \quad \frac{1}{\prod_{i=1}^6 T_{ki}^{p\alpha}} \leq \frac{c_s}{T_{ks}^{6p\alpha}}, 1 \leq s \leq 6.$$

Vamos mostrar que também vale (7) em L_s , $1 \leq s \leq 6$. Segue de (10) e (9) que

$$\begin{aligned} J &\leq c_s \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p}{T_{ks}^{6p\alpha}} (1 + |g_k|^2) \leq \\ &\leq c_s \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p}{T_{ks}^{6p\alpha}} [1 + (|g_k - c_s| + |c_s|)^2] = \\ &= c_s \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p}{T_{ks}^{6p\alpha}} [(1 + |c_s|^2) + 2|c_s|T_{ks} + T_{ks}^2] \leq \\ &\leq c \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p}{(|g_k - c_s|^\alpha + |g_k - c_s|^{2-\alpha})^p} \end{aligned}$$

e o lema está provado. ■

Lema 4.2.2: Sejam $g_1 : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas num anel $A \subset \mathbb{C}$ que

omitem $a_1, \dots, a_6$ e $b_1, \dots, b_6$. Então existem α e p , com $0 < p < \frac{1}{2}$, tais que

$$(I) = \int_A \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p (1 + |g_k|^2)}{\prod_{i=1}^6 |g_k - c_i|^{p\alpha}} dx dy < \infty,$$

onde $c_i = a_i$ para g_1 e $c_i = b_i$ para g_2 .

Demonstração: Sendo $J = \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p (1 + |g_k|^2)}{\prod_{i=1}^6 |g_k - c_i|^{p\alpha}}$ e A a união de conjuntos mensuráveis M_j

nas condições do Lema 4.2.1, temos

$$(I) \leq \sum_{j=1}^n \int_{M_j} J \leq C_j \int_{M_j} \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p}{(|g_k - c_j|^\alpha + |g_k - c_j|^{2-\alpha})^p} dx dy$$

Como $M_j \subset A$, basta provarmos que

$$\int_A \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p}{(|g_k - c_j|^\alpha + |g_k - c_j|^{2-\alpha})^p} dx dy < \infty.$$

Estamos na situação familiar do Lema 3.2.3 e faremos uma demonstração análoga. Como antes, consideremos o anel $A = \{z \in \mathbb{C} | e^{-\pi} < |z| < 1\}$ e para cada função g_k , $k = 1, 2$, consideremos a mesma família de aplicações de recobrimento conformes $\phi_z : H \rightarrow A$, dados por $\phi_z(\omega) = \exp(i \log(\frac{\bar{d}\omega - d}{\omega - 1}))$ nas condições do Lema 3.2.3.

Novamente tomamos uma vizinhança da fronteira de A , $V = \{z \in A | 1 - \epsilon < |z| < 1\}$, onde $0 < \epsilon < 1$, $A = V \cup (\overline{A \setminus V})$.

Como $p < \frac{1}{2}$, $2p < 1$ e temos

$$\begin{aligned} \int_V J dx dy &\leq \int_V \frac{1}{|\phi'_z(0)|^{2p}} dx dy \leq \\ &\leq c_1 \int_V \frac{1}{|z|^{2p} (-\log |z|)^{2p}} dx dy \leq \\ &\leq c_1 \int_V \frac{1}{|z|^2 (-\log |z|)^{2p}} dx dy = \\ &= c \int_{1-\epsilon}^1 \frac{r dr}{r^2 (-\log r)^{2p}} = c [(\log r)^{1-2p}]^{1-\epsilon} < \infty \end{aligned}$$

Como $\int_{A \setminus V} J \, dx \, dy < \infty$, $\int_A J \, dx \, dy < \infty$. ■

Em consequência dos lemas temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.3: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ de tipo topológico finito. Então

- (i) g_1 e g_2 assumem todos os valores de $\hat{\mathbb{C}}$ infinitas vezes, exceto, no máximo seis valores, ou uma das projeções é constante e a outra assume todos os valores de $\hat{\mathbb{C}}$ infinitas vezes, exceto, no máximo quatro valores; ou
- (ii) S tem curvatura total finita e g_1 e g_2 ambas omitem no máximo três valores de $\mathbb{C}$, ou uma das projeções é constante e a outra omite no máximo dois valores.

Demonstração: Consideramos S dada por $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $M = \overline{M} \setminus \{q_1, \dots, q_r\}$ e $\overline{M}$ superfície compacta, e um disco perfurado em cada um dos pontos q_j . Se os q_j 's são polos de cada g_k , $k = 1, 2$ então a aplicação generalizada de Gauss G pode ser estendida a uma função meromorfa em $\overline{M}$ e a curvatura total de S é $c(S) = -2\pi(m_1 + m_2)$ onde m_k é o grau de g_k e, portanto, é finita. Logo, pelo Teorema 2.3.2, g_1 e g_2 omitem no máximo três valores de $\mathbb{C}$ ou uma das projeções é constante e a outra omite no máximo dois valores.

Se g_1 e g_2 não são constantes e cada g_k tem alguma singularidade essencial em p_j , então suponhamos, por absurdo, que existem $a_1, \dots, a_7, b_1, \dots, b_7 \in \hat{\mathbb{C}}$ com $a_i \neq a_j$ e $b_i \neq b_j$, para $i \neq j$, que são assumidos por g_1 e g_2 , respectivamente, um número finito de vezes, com $a_7 = b_7 = \infty$ (caso necessário podemos fazer uma rotação).

Como $\bigcup_{k=1}^2 g_k^{-1}\{c_j, j = 1, \dots, 7\}$, com $c_j = a_j$ se $k = 1$ e $c_j = b_j$ se $k = 2$, é um conjunto finito de pontos, como no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$, podemos escolher um fim de S , isto é, um anel $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < \frac{1}{r} < |\zeta| < r < \infty\}$, tal que os pontos a_j 's e b_j 's são omitidos por g_1 e g_2 , respectivamente.

Consideremos a função

$$h(\zeta) = \frac{g'_1(\zeta)g'_2(\zeta)f^{\frac{-2}{p}}}{\prod_{i=1}^6(g_1(\zeta) - a_i)^\alpha \prod_{j=1}^6(g_2(\zeta) - b_j)^\alpha} \quad \text{com } \alpha = 1 - \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{Z}^*,$$

$\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$ e $p\alpha = \frac{5}{12}$; h é uma função holomorfa em A , pois, como g_k 's não têm polos em A , f não tem zeros em A , e os zeros de h são isolados.

Como no caso em $\mathbb{R}^3$, consideremos $d\tilde{s} = \tilde{\lambda}(\zeta) d\zeta$ a métrica em $\mathring{A}$ onde $\tilde{\lambda}(\zeta) = \lambda(\zeta)\lambda(\frac{1}{\zeta})$; já provamos que A é completo com relação a $d\tilde{s}$. Além disso, como $\Delta \log |h| = 0$ quase sempre, no caso que h não é constante segue do Teorema de Yau enunciado no capítulo 3 que $\int_A |h|^p = \infty$. E no caso em que h é constante, $\int_A |h|^p = K \text{vol } A = \infty$.

Por outro lado segue do Lema 4.2.2 que

$$\int_A |h|^p = \int_A \prod_{k=1}^2 \frac{|g'_k|^p (1 + |g_k|^2)}{\prod_{i=1}^6 |g_k - c_i|^{p\alpha}} d\xi d\eta < \infty,$$

o que é um absurdo e, portanto, o teorema está provado para esse caso.

Suponhamos agora que g_1 é constante, q_j 's não são todos polos de g_2 e que existam $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \in \mathbb{C}$ que são assumidos um número finito por g_2 . Também, fazendo uma rotação se necessário, podemos considerar $b_5 = \infty$ e um anel A tal que g_2 omite b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 em A .

Como no Teorema 3.2.4, tomemos a função

$$h = \frac{g'_2 f^{\frac{-2}{p}}}{\prod_{j=1}^4 (g_2 - b_j)^\alpha}, \quad \text{onde } \alpha = 1 - \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{Z}^*,$$

$\frac{10}{11} \leq \alpha < 1$, $p(2 - \alpha) \leq 1$ e $p\alpha = \frac{3}{4}$; h é uma função holomorfa em A com zeros isolados.

Considerando a nova métrica $d\tilde{s}$ definida anteriormente, analogamente vale que

$$\int_A |h|^p = \infty.$$

Vamos mostrar que $\int_A |h|^p < \infty$, chegando também a um absurdo.

Como g_1 é constante, escrevemos

$$\int_A |h|^p = K \int_A \frac{|g'_2|^p (1 + |g_2|^2)^2}{\prod_{j=1}^4 |g_2 - b_j|^{p\alpha}} d\xi d\eta .$$

Considerando $J = \frac{|g'_2|^p (1 + |g_2|^2)^2}{\prod_{j=1}^4 |g_2 - b_j|^{p\alpha}}$ e fazendo contas análogas ao Lema 3.2.2, uti-

lizando (1) e (2) do Lema 4.1.2, podemos compor A em conjuntos mensuráveis tais que em cada um deles existe j , $1 \leq j \leq 4$, e uma constante $C_j > 0$ tais que

$$J \leq C_j \frac{|g'_2|^p}{(|g_2 - b_j|^\alpha + |g_2 - b_j|^{2-\alpha})^p} .$$

Daí, usando os mesmos argumentos do Lema 3.2.3, concluimos que

$$\int_A |h|^p = K \int_A J < \infty$$

e o teorema está provado. ■

CAPÍTULO 5

A IMAGEM DA APLICAÇÃO DE GAUSS DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPLETAS - UMA EXTENSÃO DO TEOREMA DE FUJIMOTO

No capítulo 2 apresentamos o trabalho iniciado por Osserman [25] em 1963 sobre o comportamento da imagem da aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$. Ele também fez um estudo análogo para as superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$ [25].

Para superfícies em $\mathbb{R}^3$ foi Xavier [33] quem primeiro mostrou que a aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas não planas omite no máximo um número finito de pontos. Chen [6] estendeu esse estudo para superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$. Earp e Rosenberg [11] também usaram as técnicas de Xavier e trabalharam com superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ de tipo topológico finito, relacionando a curvatura total e a imagem da aplicação de Gauss.

Em 1988, Fujimoto [14] provou que a imagem de uma superfície mínima completa S em $\mathbb{R}^3$ não plana omite, no máximo, quatro pontos em S^2 .

Em 1990, Mo e Osserman [20], inspirados no teorema de Fujimoto, fizeram um estudo mais abrangente, explorando essas idéias. Eles mostraram que se a aplicação de Gauss de uma superfície mínima S completa em $\mathbb{R}^3$ assume cinco pontos de S^2 apenas um número finito de vezes, então S tem curvatura total finita.

Provamos no capítulo 2 que a aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita não pode omitir mais que três valores. Como consequência, mostraremos que se a aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ não plana omite quatro pontos em S^2 , então todo outro ponto deve ser assumido

infinitas vezes.

Mostraremos, com exemplos, que o número “quatro” no teorema principal é o melhor possível.

Apresentaremos resultados análogos para superfícies em $\mathbb{R}^4$, provando que se cada projeção da aplicação de Gauss generalizada, g_k , de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ não plana omite quatro pontos distintos, então cada uma das g_k 's deve assumir todo outro ponto de S^2 infinitas vezes; ou se uma das projeções é constante e a outra omite três pontos, então esta projeção deve assumir todo outro ponto infinitas vezes.

Em seguida, daremos exemplos que mostram que ambas as afirmações deste teorema são as melhores possíveis.

5.1. Um lema auxiliar

A prova dos teoremas principais se basearão no lema de Fujimoto [14]:

Lema 5.1.1: Seja $h(\omega)$ uma função analítica em $|\omega| < R$ e que omite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C}$, onde $s \geq 2$. Sejam ϵ, ϵ' números reais satisfazendo $0 < s\epsilon' < \epsilon < 1$. Então existe uma constante positiva B , que depende de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \epsilon$ e ϵ' , tal que

$$\frac{(1 + |h(\omega)|^2)^{\frac{s-1-\epsilon}{2}} |h'(\omega)|}{\prod_{j=1}^s |h(\omega) - \alpha_j|^{(1-\epsilon')}} \leq B \frac{2R}{R^2 - |\omega|^2}$$

Para a demonstração deste lema precisaremos do seguinte resultado:

Lema de Schwarz-Pick: ([1], p. 13)

Seja $f : \Delta(R) \rightarrow D \subset \mathbb{C}$ uma função onde $\Delta(R) = \{\omega \mid |\omega| < R\}$ e D é um domínio. Seja ρ uma função de classe C^2 positiva definida em D tal que $\Delta \log \rho \geq \rho^2$. Então

$$|f'(\omega)|\rho(f(\omega)) \leq \frac{2R}{R^2 - |\omega|^2} .$$

Demonstração do Lema 5.1.1: Como $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1} = \infty\}$ é hiperbólico e $s \geq 2$, este é levado conformemente sobre o disco unitário através de uma aplicação bijetora F ([22], p. 8). Seja $d\sigma = \rho(z) dz$ o pull-back da métrica de Poincaré através da aplicação F . Sendo $d\sigma$ uma métrica com curvatura constante $K(\rho) = -\frac{\Delta \log \rho}{\rho^2} = -1$ no z -plano com os pontos $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ removidos, temos que $\Delta \log \rho \geq \rho^2$. Além disso, por hipótese, a função $h : \Delta(R) \rightarrow D = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ é analítica. Portanto, estamos nas condições do lema de Schwartz-Pick e podemos concluir que

$$(1) \quad \rho(h(\omega))|h'(\omega)| \leq \frac{2R}{R^2 - |\omega|^2}.$$

Notamos que, h sendo analítica também omite $\alpha_{s+1} = \infty$ e numa vizinhança de cada α_j o comportamento assintótico de $\rho(z)$ ([22], p. 249, 250) é tal que existem constantes não nulas c_j que dão aproximações

$$(2) \quad \rho(z) \sim \frac{c_j}{|z - \alpha_j| \log |z - \alpha_j|}, \quad \text{com } i \leq j \leq s, \quad e$$

$$(3) \quad \rho(z) \sim \frac{c_0}{|z| \log |z|},$$

se consideramos uma vizinhança de $\alpha_{s+1} = \infty$.

Isto mostra que para as constantes ϵ, ϵ' tais que $0 < s\epsilon' < \epsilon < 1$ a função $E(z) = \frac{(1 + |z|^2)^{\frac{s-1-\epsilon}{2}}}{\rho(z) \prod_{j=1}^s |z - \alpha_j|^{1-\epsilon'}}$, definida em D , tende a zero quando z tende a α_j , $1 \leq j \leq s+1$, pois, fixando α_k , $1 \leq k \leq s$, segue de (2) que

$$E(z) \sim |z - \alpha_k|^{\epsilon'} \log |z - \alpha_k| T(z), \quad \text{onde } T(z) = \frac{(1 + |z|^2)^{\frac{s-1-\epsilon}{2}}}{c_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s |z - \alpha_j|^{1-\epsilon'}}$$

Como $\epsilon' > 0$, $\lim_{z \rightarrow \alpha_k} |z - \alpha_k|^{\epsilon'} \log |z - \alpha_k| = 0$, e $\lim_{z \rightarrow \alpha_k} T(z) \in \mathbb{C}$, logo temos que $\lim_{z \rightarrow \alpha_k} E(z) = 0$.

Para $\alpha_{s+1} = \infty$, usando (3), fazemos cálculos análogos; observando que $\epsilon > s\epsilon'$ concluimos que $\lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = 0$.

Mostramos então que $E(z)$ tende a zero quando z tende a α_j , $1 \leq j \leq s+1$; por outro lado, notamos que $E(z)$ é uma função contínua e positiva em $D = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, logo existe uma constante $B > 0$ tal que

$$E(h(\omega)) = \frac{(1 + |h(\omega)|^2)^{\frac{s-1-\epsilon}{2}}}{\rho(h(\omega)) \prod_{j=1}^s |h(\omega) - \alpha_j|^{1-\epsilon'}} \leq B,$$

e segue de (1) que

$$\frac{(1 + |h(\omega)|^2)^{\frac{s-1-\epsilon}{2}}}{\prod_{j=1}^s |h(\omega) - \alpha_j|^{1-\epsilon'}} |h'(\omega)| \leq B \rho(h(\omega)) |h'(\omega)| \leq B \frac{2R}{R^2 - |\omega|^2}. \quad \blacksquare$$

5.2. O teorema de Mo e Osserman para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$

O principal resultado é:

Teorema 5.2.1: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$. Se a aplicação de Gauss de S assume cinco valores distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$ um número finito de vezes, então S tem curvatura total finita.

Demonstração: Sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ os valores de $\widehat{\mathbb{C}}$ assumidos por g ; por uma rotação de S em $\mathbb{R}^3$ podemos supor que $\alpha_5 = \infty$. Como $g^{-1}\{\alpha_j, 1 \leq j \leq 5\}$ é um conjunto finito de pontos, existe um conjunto compacto Q tal que g é analítica e omite $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq 4$, em $S \setminus Q$ (basta considerar $Q = g^{-1}\{\alpha_j, 1 \leq j \leq 5\}$).

Seja $S' = \{P \in S \setminus Q \mid g'(P) \neq 0\}$. Podemos definir em S' a métrica $d\tilde{s}^2 = \tilde{\lambda}^2 |d\zeta|^2$ com

$\tilde{\lambda}(\zeta) = |H(\zeta)|$, onde

$$H(\zeta) = \frac{(f(\zeta))^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (g(\zeta) - \alpha_j)^{\frac{p(1-\epsilon')}{1-p}}}{(g'(\zeta))^{\frac{p}{1-p}}}, \quad 0 < 4\epsilon' < \epsilon < 1 \quad \text{e} \quad p = \frac{2}{3-\epsilon} < 1.$$

Provaremos, inicialmente, que a expressão de $d\tilde{s}^2$ independe da escolha do parâmetro ζ .

Consideremos $\omega = \omega(\zeta)$ mudança de parâmetro; a forma $\Omega = f(\zeta) d\zeta$ em relação a esse novo parâmetro se escreve $\Omega = \tilde{f}(\omega) d\omega = \tilde{f}(\omega(\zeta)) \frac{d\omega}{d\zeta} d\zeta$, logo $\tilde{f}(\omega(\zeta)) = f(\zeta) \frac{d\zeta}{d\omega}$. A função $h(\omega) = g(\zeta(\omega))$ será tal que $h'(\omega) = g'(\zeta(\omega)) \frac{d\zeta}{d\omega}$, portanto

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \left| \frac{(\tilde{f}(\omega))^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (h(\omega) - \alpha_j)^{\frac{p(1-\epsilon')}{1-p}}}{(h'(\omega))^{\frac{p}{1-p}}} \right|^2 |d\omega|^2 = \\ &= \left| \frac{(f(\zeta))^{\frac{1}{1-p}} \left(\frac{d\zeta}{d\omega}\right)^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (g(\zeta) - \alpha_j)^{\frac{p(1-\epsilon')}{1-p}}}{(g'(\zeta))^{\frac{p}{1-p}} \left(\frac{d\zeta}{d\omega}\right)^{\frac{p}{1-p}}} \right|^2 \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right|^2 |d\zeta|^2 = \\ &= \left| \frac{(f(\zeta))^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (g(\zeta) - \alpha_j)^{\frac{p(1-\epsilon')}{1-p}}}{(g'(\zeta))^{\frac{p}{1-p}}} \right|^2 |d\zeta|^2. \end{aligned}$$

Como f e g são funções analíticas, $K = -\frac{\Delta \log \tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}^2} = 0$ e, portanto, $d\tilde{s}^2$ é plana em S' .

Além disso, observando que os zeros de g' em Q são pontos isolados e que H é analítica nos pontos em que $g' \neq 0$, $d\tilde{s}$ pode ser estendida analiticamente aos pontos de Q (estamos numa situação semelhante à do Teorema 2.2.10).

Seja $S'' = S' \cup Q$; mostraremos que S'' é completa com relação à métrica $d\tilde{s}$.

Suponhamos que S'' não é completa, então existe uma curva β divergente em S'' com comprimento finito. Removendo um segmento inicial, se necessário, existe uma curva

divergente $\gamma : [0, 1] \rightarrow S'$, com $\gamma(t) = \beta(t)$, tal que a distância entre $\text{Im } \gamma$ e Q é um número positivo d . Se γ é divergente em S'' , então

- (i) γ tende a ζ_0 , quando t tende a 1, onde ζ_0 é um ponto de S'' tal que $g'(\zeta_0) = 0$; ou
- (ii) γ tende à fronteira de S , ∂S , quando t tende a 1.

Suponhamos que γ tende a ζ_0 , quando t tende a 1.

Podemos escrever $g'(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^m E(\zeta)$, com $m \geq 1$, onde E é uma função analítica com $E(\zeta_0) \neq 0$. Como $p = \frac{2}{3-\epsilon}$, temos que:

$$d\tilde{s} = \left| \frac{(f(\zeta))^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (g(\zeta) - \alpha_j)^{\frac{2(1-\epsilon')}{1-\epsilon}}}{(g'(\zeta))^{\frac{2}{1-\epsilon}}} \right|^2 |d\zeta|^2 = \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^{\frac{4m}{1-\epsilon}}} \frac{|d\zeta|^2}{|L(\zeta)|^2},$$

$$\text{onde } L(\zeta) = \frac{(E(\zeta))^{\frac{2}{1-\epsilon}}}{(f(\zeta))^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (g(\zeta) - \alpha_j)^{\frac{2(1-\epsilon')}{1-\epsilon}}}.$$

A função $L(\zeta)$ é contínua e não nula em ζ_0 , portanto, localmente limitada por uma constante $M > 0$. Daí ,

$$(4) \quad d\tilde{s} \geq C \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^{\frac{2m}{1-\epsilon}}}, \quad \text{onde } C = M^{-1}$$

Além disso, numa vizinhança de ζ_0 podemos supor $|\zeta - \zeta_0| < 1$, isto é, $\frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} > 1$; como $m \geq 1 > 1 - \epsilon$,

$$(5) \quad \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^{\frac{m}{1-\epsilon}}} > \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|}$$

Considerando $z(t)$ uma parametrização para γ , segue de (4) e (5) que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\tilde{s} &\geq C \int_{\gamma} \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^{\frac{2m}{1-\epsilon}}} |d\zeta| > C \int_{\gamma} \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^2} |d\zeta| = \\ &= C \int_0^1 \frac{|z'(t) dt|}{|z(t) - \zeta_0|^2} \geq C \left| \int_0^1 \frac{z'(t) dt}{(z(t) - \zeta_0)^2} \right| = \\ &= C \left| \lim_{a \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z(t) - \zeta_0} \right)_0^a \right| = +\infty, \end{aligned}$$

o que contradiz a hipótese de γ ter comprimento finito. Concluimos que o caso (i) não ocorre e, portanto, γ tende a ∂S quando t tende a 1.

Tomemos $t_0 \in [0, 1)$ tal que o comprimento de $\gamma|_{[t_0, 1)}$ seja menor que $\frac{d}{3}$ e consideremos um disco D com centro em $\gamma(t_0)$ e raio r . Como $d\tilde{s}$ é plana, D é isométrico a um disco de centro em $\omega = 0$ e raio r . Seja I uma isometria do disco $|\omega| < r$ em D com $I(0) = \gamma(t_0)$. Estendemos I , como uma isometria local em S' , a um disco de maior raio possível, que denotamos $D_R = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| < R\}$. Considerando $D = I(D_R)$, notemos que I é simplesmente a aplicação exponencial $\exp_{\gamma(t_0)} : T_{\gamma(t_0)}S \rightarrow S$ ($\exp_{\gamma(t_0)}$ está definida em $T_{\gamma(t_0)}S$ porque S é completa. Veja [5], p. 147), com $I|_{D_R} : D_R \rightarrow D$ uma isometria.

Vale que $R \leq \frac{d}{3}$. Tomamos $A' \in \partial D$ e $A = I^{-1}(A')$, por continuidade $A \in \partial D_R$, logo $|A| = R$ e como I é uma isometria, $R = d(0, A') = d(I(0), I(A')) = d(\gamma(t_0), A') \leq \frac{d}{3}$.

Além disso, vale que $d(D, Q) \geq \frac{2d}{3}$, pois, sendo $B \in D$ e $P \in Q$ pontos quaisquer, temos que $d(B, \gamma(t_0)) < \frac{d}{3}$, $d(P, \gamma(t_0)) \geq d$ e, portanto, $d(P, B) \geq d(P, \gamma(t_0)) - d(B, \gamma(t_0)) > d - \frac{d}{3} = \frac{2d}{3}$.

Existe um ponto ω_0 , com $|\omega_0| = R$, tal que a imagem do segmento L , que vai de $\omega = 0$ a ω_0 , através da aplicação I é uma curva divergente em S que tende a ∂S .

Suponhamos que não existe um ponto com essa propriedade. Logo, para cada $a \in \mathbb{C}$, com $|a| = R$, a imagem do segmento $L_a : \omega = at, 0 \leq t < 1$, através de I , é uma curva $\Gamma_a : \zeta = I(at), 0 \leq t < 1$, que tende a um ponto $\zeta_0 \in S$, quando t tende a 1.

Suponhamos que $g'(\zeta_0) = 0$. Usando os mesmos argumentos do caso (i), existe uma constante $c > 0$ tal que $d\tilde{s} \geq c \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^{\frac{2m}{1-\epsilon}}}$ e, como I é uma isometria local, $d\tilde{s}^2 = |d\omega|^2$, portanto,

$$R = \int_{L_a} |d\omega| = \int_0^1 d\tilde{s} \geq c \int_{\Gamma_a} \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^{\frac{2m}{1-\epsilon}}} = \infty,$$

o que contradiz o fato de $R \leq \frac{d}{3}$.

Concluimos que $g'(\zeta_0) \neq 0$ e, como $d(Q, D) \geq \frac{2d}{3} > 0$, $\zeta_0 \notin Q$, logo $\zeta_0 \in S'$.

Seja V_a uma vizinhança de ζ_0 tal que $\overline{V_a} \subset S'$; existe $t_1 \in [0, 1)$ tal que $I(at) \in$

$$V_a, \quad \forall t \in [t_1, 1) \text{ e } \lim_{t \rightarrow 1} I(ta) = \zeta_0.$$

Para cada a , com $|a| = R$, consideremos U_a , vizinhança de a , tal que $I(U_a) = V_a$, com $I|_{V_a} : U_a \rightarrow V_a$ difeomorfismo. Seja $R' > R$ tal que $D_{R'} = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| < R'\} \subset D_R \cup (\bigcup_a U_a)$, com $|a| = R$. Definimos a função $\psi : D_{R'} \rightarrow S'$ dada por $\psi(\omega) = I(\omega)$, se $\omega \in \overset{a}{D}_R$ e $(I|_{V_a})^{-1} \circ \psi(\omega) = \omega$, se $\omega \in U_a$. Com isso, estendemos a um disco de raio $R' > R$, absurdo. Concluimos que Γ é uma curva divergente em S que vai até ∂S .

Seja $h = g \circ I$ o pull-back da aplicação de Gauss para o disco D_R .

Como fora de Q g é analítica e omite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, o mesmo acontece para a função h . Por outro lado, $0 < 4\epsilon' < \epsilon < 1$, então, pelo Lema 5.1.1, para $s = 4$, existe uma constante $B > 0$ tal que

$$(6) \quad \frac{(1 + |h|^2)^{\frac{3-\epsilon}{2}} |h'|}{\prod_{j=1}^4 |h - \alpha_j|^{1-\epsilon'}} \leq B \frac{2R}{R^2 - |\omega|^2}.$$

Adaptaremos o argumento de Fujimoto [14] para mostrar que Γ tem comprimento finito.

Vimos que $d\tilde{s}^2$ independe da escolha do parâmetro e escolhemos o parâmetro ω escrevendo

$$|d\omega| = d\tilde{s} = \left| \frac{(f(\omega))^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (h(\omega) - \alpha_j)^{\frac{p(1-\epsilon')}{1-p}}}{(h'(\omega))^{\frac{p}{1-p}}} \right| |d\omega|.$$

$$\text{Logo } \left| \frac{f(\omega) \prod_{j=1}^4 (h(\omega) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')}}{(h'(\omega))^p} \right| = 1, \text{ ou seja,}$$

$$(7) \quad |f(\omega)| = \left| \frac{h'(\omega)}{\prod_{j=1}^4 (h(\omega) - \alpha_j)^{1-\epsilon'}} \right|^p,$$

onde h é a representação da aplicação de Gauss em termos do parâmetro ω , identificando f com $f \circ I$.

Utilizando (6) e (7), o comprimento da curva Γ é

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \int_C |f(\omega)|(1 + |h(\omega)|^2) |d\omega| = \\
 &= \frac{1}{2} \int_C (1 + |h(\omega)|^2) \left| \frac{h'(\omega)}{\prod_{j=1}^4 (h(\omega) - \alpha_j)^{1-\epsilon'}} \right|^p |d\omega| = \\
 &= \frac{1}{2} \int_C \left(\frac{(1 + |h(\omega)|^2)^{\frac{3-\epsilon}{2}} |h'(\omega)|}{\prod_{j=1}^4 |h(\omega) - \alpha_j|^{1-\epsilon'}} \right)^p |d\omega| \leq \\
 &\leq \frac{B^p}{2} \int_C \left(\frac{2R}{R^2 - |\omega|^2} \right)^p |d\omega| = K \int_C \frac{1}{(1 - |\frac{\omega}{R}|^2)^p} |d\omega| ,
 \end{aligned}$$

onde $K = 2^{p-1} B^p R^p$.

Parametrizamos a curva C por $\omega = \omega_0 t$, $0 \leq t \leq 1$; segue daí que $|d\omega| = |\omega_0| dt = R dt$

e

$$L = K \int_0^1 \frac{R dt}{(1 - t^2)^p}$$

Mas, notamos que, como $t \in [0, 1)$, $\frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-t}$ e, portanto, podemos escrever

$$L < KR \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^p} = \frac{KR}{1-p} \lim_{a \rightarrow 1} [(1-t)^{1-p}]_0^a < \infty ,$$

pois $p < 1$.

Logo, S'' não completa com relação à métrica ds^2 , podemos encontrar uma curva divergente em S com comprimento finito na métrica original, o que contradiz a hipótese de completamento de S .

Concluimos que S'' é completa com relação à métrica $d\tilde{s}^2$.

Por outro lado, S'' tem curvatura total finita e para mostrar essa afirmação observamos que, como $S'' = S' \cup Q$, podemos escrever a curvatura total de S'' por $c(S'') = \int_{S'} \tilde{K} dA + \int_Q \tilde{K} dA$.

Mas em S' a métrica $d\tilde{s}$ é plana, portanto, $\tilde{K} = 0$ e, como $\tilde{K}$ é contínua e Q compacto,

$$c(S'') = \int_Q \tilde{K} dA < \infty .$$

Sendo S'' completa com curvatura total finita, segue do Teorema de Huber ([17], p. 61) que S'' é finitamente conexa e temos:

- (i) g' só tem um número finito de zeros em S ;
- (ii) S é finitamente conexa.

Notemos que, como Q é compacto, g' só pode ter um número finito de zeros nesse conjunto e o mesmo acontece com S'' , pois $S'' = S' \cup Q$ onde $S' = \{P \in S \setminus Q | g'(P) \neq 0\}$. Seja $P_j \in S \setminus Q$ tal que $g'(P_j) = 0$; $S'' = S \setminus \bigcup_{j=1}^n \{P_j\}$. Se $n = \infty$, então S'' é infinitamente conexo, o que é um absurdo. Logo, g' também tem um número finito de zeros em $S \setminus S'' = \bigcup_{j=1}^n \{P_j\}$, com $n < \infty$, e vale o item (i).

Como $S = S'' \cup (\bigcup_{j=1}^n \{P_j\})$ e S'' é finitamente conexo, segue imediatamente que S é finitamente conexo, e vale o item (ii).

Para demonstrarmos que a curvatura total de S é finita, usaremos o mesmo argumento da demonstração do Teorema 2.2.10.

Como S é finitamente conexa, existe uma subregião compacta de M cujo complementar é a união de um número finito de regiões duplas-conexas e vimos que cada uma dessas regiões é conformemente equivalente ao disco perfurado. Então, M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\overline{M}$ com um número finito de pontos removidos, isto é, $M \cong \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$.

Numa vizinhança de cada p_j , g é analítica e omite quatro valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Pelo Grande Teorema de Picard, observamos que g não pode ter singularidade essencial em p_j , pois, caso contrário, a curvatura total seria infinita. Concluimos que cada p_j é um polo da g e esta pode ser estendida a uma função meromorfa em $\overline{M}$. Se g é constante, então $K \equiv 0$ e, portanto, a curvatura total é finita ($c(S) = 0$).

Suponhamos que g não é constante. Como $\overline{M}$ é compacta, $g(\overline{M})$ é fechado. Mas,

por outro lado, como g é uma função aberta, $g(\overline{M})$ é aberto. Logo, por conectividade, $g(\overline{M}) = \widehat{\mathbf{C}}$ e cada valor de $\mathbf{C}$ é assumido um número m de vezes.

Portanto, a área esférica de $g(\overline{M})$ é m vezes a área da esfera, isto é, $4\pi m$ e o mesmo acontece com a área esférica de $g(M)$, já que, por hipótese, apenas um número finito de pontos foi removido. Sendo m o grau de g , concluímos então que a curvatura total de S é:

$$c(S) = \int \int_M K \, dA = -4\pi m > -\infty. \quad \blacksquare$$

Uma consequência do Teorema 5.2.1 é:

Teorema 5.2.2: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ que não é um plano. Se g omite quatro pontos em S^2 , então g assume todos os outros pontos infinitas vezes.

Demonstração: Sendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ os pontos omitidos por g , suponhamos, por absurdo, que exista outro ponto α_5 que é assumido um número finito de vezes por g . Por uma rotação de S em $\mathbb{R}^3$, se necessário, consideremos $\alpha_5 = \infty$. Como $g^{-1}\{\alpha_5\}$ é um conjunto finito de pontos, existe um conjunto compacto Q tal que g omite α_5 em $S \setminus Q$ (basta considerarmos $Q = g^{-1}\{\alpha_5\}$). Temos que, em $S \setminus Q$, g é analítica, omitindo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, e estamos nas condições da demonstração do Teorema 5.2.1. Daí, podemos concluir que a curvatura total de S é finita e, como g omite mais de três pontos, segue do Teorema 2.2.14 que S é um plano, o que é um absurdo. $\blacksquare$

Osserman ([27], p.72) demonstrou o seguinte teorema: seja A um conjunto de k pontos da esfera unitária, com $k \leq 4$, então existe uma superfície mínima regular completa em $\mathbb{R}^3$ cuja imagem através da aplicação de Gauss omite precisamente o conjunto A .

Apresentaremos exemplos que mostram que $k = 4$ é o melhor possível.

Exemplo 5.2.3: Superfície de Enneper ($k = 1$)

Em 1984 Enneper exibiu uma superfície mínima regular que tem a seguinte repre-

sentação de Weierstrass:

$$M = \mathbb{C}, \quad g(\zeta) = \zeta \quad \text{e} \quad f(\zeta) = 1, \quad \text{com} \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Temos uma imersão mínima $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $x_k(P) = \operatorname{Re} \int_{P_0}^P \varphi_k(\zeta) d\zeta$, com $P_0 \in M$ e $k = 1, 2, 3$, observando que, como $M = \mathbb{C}$ é simplesmente conexa, X não tem períodos reais (isto é, $\operatorname{Re} \int_\gamma \varphi_k(\zeta) d\zeta = 0$, $k = 1, 2, 3$, para qualquer curva fechada γ em M).

A superfície de Enneper é completa, a imagem da aplicação normal de Gauss é $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ e a curvatura total é -4π , portanto, finita. Estamos com exemplo de uma superfície mínima completa regular com a aplicação normal de Gauss omitindo um ponto.

Exemplo 5.2.4: Catenóide ($k = 2$)

O catenóide é obtido da seguinte maneira:

$$M = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad g(\zeta) = \zeta \quad \text{e} \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}.$$

Consideremos $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $x_k(P) = \operatorname{Re} \int_{P_0}^P \varphi_k(\zeta) d\zeta$ e como M não é simplesmente conexa vamos verificar se X não tem períodos reais, para isto basta mostrar que $\operatorname{Re} \int_\gamma \varphi_k(\zeta) d\zeta = 0$, $k = 1, 2, 3$, para qualquer curva γ fechada em torno da origem. Temos:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}f(1 - g^2) = \frac{1}{2\zeta^2}(1 - \zeta^2) = \frac{1}{2\zeta^2} - \frac{1}{2}, \\ \varphi_2 &= \frac{i}{2}f(1 + g^2) = \frac{i}{2\zeta^2}(1 + \zeta^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta^2} + 1\right), \quad \text{e} \\ \varphi_3 &= fg = \frac{1}{\zeta}; \quad \text{logo} \quad \operatorname{Res} \varphi_1 = \operatorname{Res} \varphi_2 = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Res} \varphi_3 = 1 \end{aligned}$$

(onde estamos denotando resíduo por Res).

Como $\int_\gamma \varphi_k(\zeta) d\zeta = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \varphi_k$, $\operatorname{Re} \int_\gamma \varphi_k(\zeta) d\zeta = 0$, $k = 1, 2, 3$; daí X não tem períodos reais.

Temos o exemplo de uma superfície mínima regular completa cuja normal de Gauss omite dois pontos, $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, e com curvatura total $-4\pi < -\infty$.

Exemplo 5.2.5: Superfície de K. Voss ($k = 3$)

Consideremos $M = \mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2\}$ com $p_i \neq \infty$, $i = 1, 2$, $g(\zeta) = \zeta$, $f(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - p_1)(\zeta - p_2)}$ e $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $x_k(P) = \int_{P_0}^P \varphi_k(\zeta) d\zeta$, com $k = 1, 2, 3$ e $P_0 \in M$. Como M não é simplesmente conexa, novamente precisamos verificar se X tem períodos reais. Para isso, basta verificar se $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \varphi_k(\zeta) d\zeta = 0$ para qualquer curva fechada γ em torno de p_1 ou p_2 , onde

$$\varphi_1 = \frac{1 - \zeta^2}{2(\zeta - p_1)(\zeta - p_2)}, \quad \varphi_2 = \frac{i(1 + \zeta^2)}{2(\zeta - p_1)(\zeta - p_2)}, \quad \text{e} \quad \varphi_3 = \frac{\zeta}{(\zeta - p_1)(\zeta - p_2)}.$$

Como $\int_{\gamma} \varphi_k(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}_{p_i} \varphi_k$, onde γ é uma curva fechada qualquer em torno de p_i , $i = 1, 2$, $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \varphi_k(\zeta) d\zeta = 0$ se, e somente se $\operatorname{Res}_{p_i} \varphi_k \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p_1} \varphi_1 &= \frac{1 - p_1^2}{2(p_1 - p_2)}, & \operatorname{Res}_{p_1} \varphi_2 &= i \frac{(1 + p_1^2)}{2(p_1 - p_2)} & \text{e} & \operatorname{Res}_{p_1} \varphi_3 = \frac{p_1}{p_1 - p_2}; \\ \operatorname{Res}_{p_2} \varphi_1 &= \frac{p_2^2 - 1}{2(p_1 - p_2)}, & \operatorname{Res}_{p_2} \varphi_2 &= -i \frac{(1 + p_2^2)}{2(p_1 - p_2)} & \text{e} & \operatorname{Res}_{p_2} \varphi_3 = \frac{p_2}{p_2 - p_1}. \end{aligned}$$

Se todos os resíduos são reais, então $\operatorname{Res}_{p_1} \varphi_2 + \operatorname{Res}_{p_2} \varphi_2 = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2(p_2 - p_1)} = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2) \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{Res}_{p_1} \varphi_2 + \operatorname{Res}_{p_2} \varphi_2 = i \frac{(p_1^2 - p_2^2)}{2(p_1 - p_2)} = \frac{i}{2}(p_1 + p_2) \in \mathbb{R}$, logo $p_1 + p_2 = 0$, isto é, $p_2 = -p_1$ e substituindo temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p_1} \varphi_1 &= \frac{1 - p_1^2}{4p_1}, & \operatorname{Res}_{p_2} \varphi_1 &= \frac{p_1^2 - 1}{4p_1}, & \operatorname{Res}_{p_1} \varphi_2 &= i \frac{(1 + p_1^2)}{4p_1}, \\ \operatorname{Res}_{p_2} \varphi_2 &= -i \frac{(1 + p_1^2)}{4p_1}, & \text{e} & \operatorname{Res}_{p_i} \varphi_3 &= \frac{1}{2}, & i = 1, 2. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Res}_{p_1} \varphi_1, \operatorname{Res}_{p_1} \varphi_2 \in \mathbb{R}$, vale que $\frac{1 - p_1^2}{4p_1} = \frac{1 - \bar{p}_1^2}{4\bar{p}_1}$ e $i \frac{(1 + p_1^2)}{4p_1} = -i \frac{(1 + \bar{p}_1^2)}{4\bar{p}_1}$, ou seja, $4\bar{p}_1 - 4\bar{p}_1 |p_1|^2 = 4p_1 - 4\bar{p}_1 |p_1|^2$ e $4\bar{p}_1 + 4p_1 |p_1|^2 = -4p_1 - 4\bar{p}_1 |p_1|^2$.

Somando essas duas expressões, temos que $8\bar{p}_1 = 8|p_1|^2 \bar{p}_1$, e como $p_1 \neq 0$ (se $p_1 = 0$ então $p_2 = 0$, mas estamos considerando $p_1 \neq p_2$), $|p_1|^2 = -1$, o que é um absurdo.

Concluimos que X tem períodos reais e consideramos a aplicação de recobrimento de $M = \mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2\}$, $\pi : D \rightarrow \mathbb{C}$, onde D é o disco unitário. Nevanlinna ([22], §§2, 3) dá uma idéia geométrica de como se constrói esse recobrimento.

Segue do Teorema 1.1.11 que $\widehat{M} = D$ é completa se, e somente se $M = \mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2\}$ é completa.

Fixado $p_j, 1 \leq j \leq 2$ e considerando a curva $\gamma_j : [0, 1) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ com parametrização $\zeta(t)$, tal que $\lim_{t \rightarrow 1} \zeta(t) = p_j$, vamos provar que o comprimento de γ_j é infinito.

Para isso, consideremos $\epsilon = \frac{1}{2}|p_j - p_k|, k \neq j$ e observamos que

$$|\zeta - p_k| \leq |\zeta - p_j| + |p_j - p_k| < \epsilon + |\alpha_k - \alpha_j|$$

Logo, o comprimento de γ_j é

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} ds &= \frac{1}{2} \int_{\gamma_j} \frac{1 + |\zeta|^2}{|\zeta - p_1||\zeta - p_2|} |d\zeta| = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 + |\zeta(t)|^2}{|\zeta(t) - p_j| |\zeta(t) - p_k|} |\zeta'(t) dt| > \\ &> K \int_0^1 \frac{(1 + |\zeta(t)|^2)}{|\zeta(t) - p_j|} |\zeta'(t)| dt = K \int_0^1 \frac{|\zeta'(t)| dt}{|\zeta(t) - p_j|} + K \int_0^1 \frac{|\zeta(t)|^2}{|\zeta(t) - p_j|} |\zeta'(t)| dt \geq \\ &\geq K \left| \int_0^1 \frac{\zeta'(t) dt}{\zeta(t) - p_j} \right| + K \left| \int_0^1 \frac{(\zeta(t))^2}{\zeta(t) - p_j} \zeta'(t) dt \right| \end{aligned}$$

Vamos calcular $\left| \int_0^1 \frac{\zeta'(t) dt}{\zeta(t) - p_j} \right|$.

Considerando $z(t) = \zeta(t) - p_j$, temos que

$$\left| \int_0^1 \frac{\zeta'(t) dt}{\zeta(t) - p_j} \right| = \left| \int_{z_0}^0 \frac{dz}{z} \right| = +\infty .$$

Portanto, $\int_{\gamma_j} ds = \infty, j = 1, 2$.

Consideremos agora $p_3 = \infty$ e a curva $\gamma : [0, 1) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ com parametrização $\zeta(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 1} \zeta(t) = \infty$.

Observamos que $|\zeta - p_i| \leq |\zeta| + |p_i| \leq 2|\zeta|, i = 1, 2$ (pois $|p_i| \leq |\zeta|$), e o comprimento de γ é

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1 + |\zeta|^2}{|\zeta - p_1||\zeta - p_2|} |d\zeta| \geq \frac{1}{16} \int_{\gamma} \frac{1 + |\zeta|^2}{|\zeta|^2} |d\zeta| = \\ &= \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{|\zeta'(t)|}{|\zeta|^2} dt + \frac{1}{16} \int_0^1 |\zeta'(t)| dt \geq \\ &\geq \frac{1}{16} \left| \int_0^1 \frac{\zeta'(t) dt}{\zeta(t)} \right| + \frac{1}{16} \left| \int_0^1 \zeta'(t) dt \right| . \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $|\int_0^1 \zeta'(t) dt| = +\infty$.

Escrevemos

$$\left| \int_0^1 \zeta'(t) dt \right| = \left| \lim_{a \rightarrow 1} \zeta(a) - \zeta(0) \right| = +\infty$$

e concluímos que $\int_\gamma ds = \infty$, e a superfície é completa.

A superfície de Voss é uma superfície mínima completa com curvatura infinita cuja aplicação normal de Gauss omite três pontos.

Exemplo 5.2.6: Superfície de Scherk ($k = 4$)

Scherk observou que o helicóide e o catenóide são casos especiais de uma família de superfícies mínimas que são descritas em termos das funções φ_k por $\varphi_1 = e^{i\alpha} \cosh \zeta$, $\varphi_2 = -ie^{i\alpha} \sinh \zeta$ e $\varphi_3 = -ie^{i\alpha}$, onde α é um número real fixado. Obtemos o helicóide e o catenóide fazendo $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$, respectivamente.

No mesmo estudo, Scherk procurou superfícies mínimas que satisfazem $x_3 = f(x_1) + g(x_2)$ e a única solução é $x_3 = \log \frac{\cos x_2}{\cos x_1}$, chamada “superfície de Scherk”.

Notemos que a superfície está definida sobre os quadrados $S_{m,n} = \{(x_1, x_2) \mid |x_1 - m\pi| < \frac{\pi}{2} \text{ e } |x_2 - n\pi| < \frac{\pi}{2}\}$, com $m + n$ par. Nos lados verticais e horizontais, x_3 tende a $+\infty$ e a $-\infty$, respectivamente. Consideremos a representação paramétrica da superfície por $x_1 = -\arg(\frac{\zeta+i}{\zeta-i})$, $x_2 = -\arg(\frac{\zeta+1}{\zeta-1})$ e $x_3 = \log |\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}|$; e $M = \mathbb{C} \setminus \{\mp 1, \mp i\}$.

Se tomarmos uma curva fechada em torno de $\zeta = i$ ou $\zeta = -i$, o resíduo de φ_1 é $\text{Res } \varphi_1 = -i$ ou $\text{Res } \varphi_1 = i$ e, portanto, $\int_\gamma \varphi_1(\zeta) d\zeta = \mp 2\pi \in \mathbb{R}$.

Logo, consideremos x_1, x_2, x_3 como antes, com o domínio sendo a superfície de recobrimento de $M = \mathbb{C} \setminus \{\mp 1, \mp i\}$, S_0 , onde as funções $\arg(\frac{\zeta+i}{\zeta-i})$, $\arg(\frac{\zeta+1}{\zeta-1})$ são univalentes.

Notemos que, fixado um ramo do recobrimento em $\zeta = 0$, o disco unitário $D = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$ é levado a cada um dos quadrados $S_{m,n}$ injetivamente pela aplicação $\zeta \mapsto (x_1(\zeta), x_2(\zeta))$. Geometricamente a superfície é obtida pela reflexão da imagem do primeiro quadrado $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| < \frac{\pi}{2} \text{ e } |x_2| < \frac{\pi}{2}\}$ com relação à reta vertical que passa pelo ponto $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2}$, produzindo assim uma parte da superfície definida sobre o

quadrado $\{(x_1, x_2) \mid |x_1 - \pi| < \frac{\pi}{2} \text{ e } |x_2 - \pi| < \frac{\pi}{2}\}$. Por sucessivas repetições dessas reflexões obtemos a superfície S_0 que é uma coleção de partes definidas sobre os quadrados S_{mn} .

A superfície é completa porque x_5 tende a $\mp\infty$ em cada ponto da fronteira de $\mathbb{C} \setminus \{\mp 1, \mp i\}$.

Como $g(\zeta) = \zeta$, a superfície de Scherk é uma superfície mínima completa cuja aplicação omite quatro pontos.

5.3. O teorema de Mo e Osserman para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$.

Faremos um estudo análogo ao do parágrafo anterior para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ e o principal resultado é:

Teorema 5.3.1: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$. Se as componentes g_1 e g_2 da aplicação de Gauss assumem, respectivamente, quatro e cinco valores distintos de $\hat{\mathbb{C}}$ um número finito de vezes, então S tem curvatura total finita.

Demonstração: Nosso objetivo é mostrar que cada g_k se estende a uma função meromorfa definida em uma superfície de Riemann compacta.

Consideremos a superfície S dada pela imersão conforme $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde M é uma superfície de Riemann.

Suponhamos que, fora de um conjunto compacto Q de S , g_1 omite cinco valores distintos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{C}$ e g_2 omite quatro valores distintos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ (neste caso, escolhamos $Q = g_1^{-1}\{\alpha_i, i = 1, \dots, 5\} \cup g_2^{-1}\{\beta_j, j = 1, \dots, 4\}$).

Por uma rotação em $\mathbb{R}^4$, podemos assumir que $\alpha_5 = \infty$ e $\beta_4 = \infty$.

Como g_1 e g_2 não são constantes, g'_1 e g'_2 só podem ter zeros isolados.

Seja $S' = \{P \in S \setminus Q \mid g'_k(P) \neq 0, k = 1, 2\}$. Em S' definimos a nova métrica

$$d\tilde{s}^2 = \left| \frac{f(\zeta) \prod_{j=1}^4 (g_1(\zeta) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 (g_2(\zeta) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}}{(g'_1(\zeta))^p (g'_2(\zeta))^q} \right|^{\frac{2}{1-r}} |d\zeta|^2,$$

onde $0 < 4\epsilon' < \epsilon < 1$ e $\frac{1}{2-\epsilon} + \frac{1}{3-\epsilon} < 1$, $p = \frac{1}{3-\epsilon}$, $q = \frac{1}{2-\epsilon}$ e $r = p + q$ (portanto $r < 1$).

Como antes, podemos verificar que essa métrica independe do parâmetro ζ . Para isso, observamos que as funções $h_k(\omega) = g_k(\zeta(\omega))$, $k = 1, 2$, são tais que $h'_k(\omega) = g'_k(\zeta) \frac{d\zeta}{d\omega}$.

Como $r = p + q$, escrevemos

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \left| \frac{\tilde{f}(\omega) \prod_{j=1}^4 (h_1(\omega) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{i=1}^3 (h_2(\omega) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}}{(h'_1(\omega))^p (h'_2(\omega))^q} \right|^{\frac{2}{1-r}} |d\zeta|^2 = \\ &= \left| \frac{f(\zeta) \frac{d\zeta}{d\omega} \prod_{j=1}^4 (g_1(\zeta) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 (g_2(\zeta) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}}{(g'_1(\zeta))^p \left(\frac{d\zeta}{d\omega}\right)^p (g'_2(\zeta))^q \left(\frac{d\zeta}{d\omega}\right)^q} \right|^{\frac{2}{1-r}} \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right|^2 |d\zeta|^2 = \\ &= \left| \frac{f(\zeta) \prod_{j=1}^4 (g_1(\zeta) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 (g_2(\zeta) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}}{(g'_1(\zeta))^p (g'_2(\zeta))^q} \right|^{\frac{2}{1-r}} \cdot \left(\left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right|^{1-r} \right)^{\frac{2}{1-r}} \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right|^2 |d\zeta|^2 = \\ &= \left| \frac{f(\zeta) \prod_{j=1}^4 (g_1(\zeta) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 (g_2(\zeta) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}}{(g'_1(\zeta))^p (g'_2(\zeta))^q} \right|^{\frac{2}{1-r}} |d\zeta|^2. \end{aligned}$$

Logo, $d\tilde{s}$ independe da escolha de parâmetros.

Novamente observamos que, como f e g_k , $k = 1, 2$, são funções analíticas, $d\tilde{s}^2$ é plana e pode ser estendida analiticamente à Q . Considerando $S'' = S' \cup Q$, mostraremos que S'' é completa com relação a $d\tilde{s}$.

Da mesma forma que no Teorema 5.2.1, suponhamos que S'' não é completa, isto é, existe uma curva $\gamma : [0, 1) \rightarrow S''$, divergente com comprimento finito.

Se $\gamma(t)$ tende a ζ_0 , com $g'_1(\zeta_0) = g'_2(\zeta_0) = 0$, quando t tende a 1, então $g'_k(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{m_k} H_k(\zeta)$, $k = 1, 2$, onde H_k é analítica, $H_k(\zeta_0) \neq 0$ e $m_k \geq 1$.

Podemos escrever

$$d\tilde{s} = \left| \frac{f(\zeta) \prod_{j=1}^4 (g_1(\zeta) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 (g_2(\zeta) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}}{(H_1(\zeta))^p (H_2(\zeta))^q} \right|^{\frac{1}{1-r}} \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^m} |d\zeta| ,$$

com $m = (m_1 p + m_2 q)/(1 - r)$, e considerando a função

$$H(\zeta) = \frac{(H_1(\zeta))^p (H_2(\zeta))^q}{f(\zeta) \prod_{j=1}^4 (g_1(\zeta) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 (g_2(\zeta) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}}$$

que é contínua em $\zeta = \zeta_0$ e, portanto, localmente limitada.

Logo

$$(16) \quad d\tilde{s} \geq M \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^m} |d\zeta|$$

Como estamos numa vizinhança de ζ_0 , podemos supor que $|\zeta - \zeta_0| < 1$, ou seja, $\frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} > 1$. Como $r = p + q = \frac{1}{3-\epsilon} + \frac{1}{2-\epsilon}$ e $\epsilon > 0$, $r = \frac{5}{6} > \frac{1}{2}$, ou seja, $2r > 1$, logo $m_1 p + m_2 q > p + q = r > 1 - r$ e, portanto, $m > 1$ e

$$(17) \quad \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^m} > \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} .$$

Segue de (16) e (17) que o comprimento de γ é:

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\tilde{s} &\geq M \int_0^1 \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|^{\frac{m_1 p + m_2 q}{1-r}}} |d\zeta| > \\ &> M \int_0^1 \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} |d\zeta| = M \lim_{a \rightarrow 1} \ln \left| \frac{\gamma(a) - \zeta_0}{\gamma(0) - \zeta_0} \right| = +\infty , \end{aligned}$$

o que contradiz o fato do comprimento de γ ser finito.

Então, concluímos que $\gamma(t)$ deve tender a ∂S quando t tende a 1.

Novamente consideremos $t \in [0, 1)$ tal que o comprimento de $\gamma[t_0, 1) < \frac{d}{3}$ e um pequeno disco D com centro $\gamma(t_0)$.

Como $d\tilde{s}^2$ é plana, D é isométrico a um disco no plano; consideremos uma isometria I , que leva o maior desses discos, $|\omega| < R$, em D .

Como $d\tilde{s}^2$ não depende da escolha dos parâmetros, usaremos o parâmetro ω .

Por outro lado, como I é uma isometria, $d\tilde{s}^2 = |d\omega|^2$.

Segue daí que

$$|d\omega| = d\tilde{s} = \left| \frac{f(\omega) \prod_{j=1}^4 (h_1(\omega) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 (h_2(\omega) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}}{(h'_1(\zeta))^p (h'_2(\zeta))^q} \right|^{\frac{1}{1-r}} |d\omega| ,$$

onde h_k 's são as representações das projeções da aplicação de Gauss em termos do parâmetro ω e

$$(18) \quad |f(\omega)| = \left| \frac{(h'_1(\zeta))^p (h'_2(\zeta))^q}{\prod_{j=1}^4 (h_1(\zeta) - \alpha_j)^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 (h_2(\omega) - \beta_k)^{q(1-\epsilon')}} \right| .$$

Por outro lado, utilizando o Lema 5.1.1 para as funções h_1 e h_2 , nos casos $s = 4$ e $s = 3$, respectivamente, observamos que existem constantes positivas B_1 e B_2 , tais que

$$(19) \quad \frac{(1 + |h_1|^2)^{\frac{3-\epsilon}{2}} |h'_1|}{\prod_{j=1}^4 |h_1 - \alpha_j|^{1-\epsilon'}} \leq B_1 \frac{2R}{R^2 - |\omega|^2} \quad e$$

$$(20) \quad \frac{(1 + |h_2|^2)^{\frac{2-\epsilon}{2}} |h'_2|}{\prod_{k=1}^3 |h_2 - \beta_k|^{1-\epsilon'}} \leq B_2 \frac{2R}{R^2 - |\omega|^2}$$

Seja C o segmento de $\omega = 0$ à $\omega = \omega_0$, onde $|\omega_0| = R$ e $\Gamma = I(C)$. Como Γ é uma curva divergente, segue de (18), (19) e (20) que o seu comprimento é:

$$\begin{aligned}
L &= \int_C |f(\omega)| (1 + |h_1(\omega)|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + |h_2(\omega)|^2)^{\frac{1}{2}} |d\omega| = \\
&= \frac{1}{2} \int_C \frac{|h'_1(\omega)|^p |h'_2(\omega)|^q (1 + |h_1(\omega)|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + |h_2(\omega)|^2)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{j=1}^4 |h_1(\omega) - \alpha_j|^{p(1-\epsilon')} \prod_{k=1}^3 |h_2(\omega) - \beta_k|^{p(1-\epsilon')}} |d\omega| = \\
&= \frac{1}{2} \int_C \left(\frac{(1 + |h_1(\omega)|^2)^{\frac{3-\epsilon}{2}}}{\prod_{j=1}^4 |h_1(\omega) - \alpha_j|^{1-\epsilon'}} \right)^p \left(\frac{(1 + |h_2(\omega)|^2)^{\frac{2-\epsilon}{2}}}{\prod_{k=1}^3 |h_2(\omega) - \beta_k|^{1-\epsilon'}} \right)^q |d\omega| \leq \\
&\leq B_1^p B_2^q \int_C \left(\frac{2R}{R^2 - |\omega|^2} \right)^{p+q} |d\omega| = \\
&= 2^r B_1^p B_2^q R^{-r} \int_C \frac{1}{(1 - |\frac{\omega}{R}|^2)^r} |d\omega| < \infty, \text{ pois } r < 1.
\end{aligned}$$

Portanto, se S'' não é completa em relação à métrica ds^2 então podemos encontrar uma curva divergente em S com comprimento finito na métrica original. Logo, S não é completa com relação a ds^2 , contradição.

Concluimos que S'' é completa com relação à métrica $d\tilde{s}^2$.

Novamente observamos que S'' tem curvatura total finita, pois, como $d\tilde{s}$ é plana em S' e Q é um compacto,

$$c(S'') = \int_{S''} \tilde{K} dA = \int_{S'} \tilde{K} dA + \int_Q \tilde{K} dA < \infty$$

e pelo teorema de Huber ([17], p. 61), como S'' é completa com curvatura total finita, S'' é finitamente conexa. Segue daí que:

- (i) g'_k só tem um número finito de zeros em S ;
- (ii) S é finitamente conexo.

De fato, como anteriormente observamos que, como Q é compacto, g'_k só pode ter um número finito de zeros nesse conjunto.

Sendo $P_j \in S \setminus Q$ tal que $g'_k(P_j) = 0$, $k = 1, 2$ e como $S'' = S' \cup Q$, temos que $S = S'' \cup (\bigcup_{j=1}^n \{P_j\})$, ou seja, $S'' = S \setminus \bigcup_{j=1}^n \{P_j\}$.

Se $n = \infty$, então S'' é infinitamente conexo, absurdo. Portanto, cada g_k tem também um número finito de zeros em $S \setminus Q$ e vale o item (i).

Por outro lado, como $S = S'' \cup (\bigcup_{j=1}^n \{p_j\})$ e S'' é finitamente conexo, segue imediatamente que S é finitamente conexo e vale o item (ii).

Sendo S finitamente conexa, sabemos que M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta, $\overline{M}$, com um número finito de pontos removidos $p_1, \dots, p_r$.

Numa vizinhança de cada p_j , g_1 é analítica e omite cinco valores, e g_2 é analítica e omite quatro valores.

Então, usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 5.2.1, g_1 e g_2 podem ser estendidas a funções meromorfas em $\overline{M}$, $g_1(\overline{M}) = \widehat{\mathbb{C}}$, $g_2(\overline{M}) = \widehat{\mathbb{C}}$ e a área esférica de cada $g_k(\overline{M})$ é m_k vezes a área da esfera S_k , isto é, $4\pi m_k$.

O mesmo acontece, portanto, com a área esférica de cada $g_k(M)$, já que apenas um número finito de pontos foi removido.

Logo, a curvatura total de S é

$$c(S) = \iint_M K dA = -4\pi m_1 - 4\pi m_2 = -4\pi(m_1 + m_2).$$

E os números m_1 e m_2 são finitos porque, por hipótese, existem cinco pontos que são assumidos um número finito de vezes por g_1 e existem quatro pontos que são assumidos um número finito de vezes por g_2 . Portanto, $c(S) > -\infty$. ■

Provamos no capítulo 2 que sendo S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ com curvatura total finita, se g_1 e g_2 omitem quatro pontos, ou se uma das funções é constante e a outra omite três pontos, então S é um plano. Combinando esse resultado com o teorema anterior, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.3.2: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ que não é um plano.

- (i) Se as duas projeções da aplicação de Gauss, g_1 e g_2 , ambas omitem quatro pontos, então elas devem ambas assumir todos os outros valores infinitas vezes.
- (ii) Se uma das componentes for constante e a outra omite três pontos, então ela deve assumir os outros valores infinitas vezes.

Demonstração:

- (i) Sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ e $\beta_1, \dots, \beta_4$ pontos omitidos por g_1 e g_2 , respectivamente, com $\alpha_i \neq \alpha_j$ e $\beta_i \neq \beta_j$, para $i \neq j$, suponhamos, por absurdo, que existem outros dois pontos, α_5 e β_5 , que são assumidos um número finito de vezes por g_1 e g_2 , respectivamente. Podemos considerar que $\alpha_5 = \beta_5 = \infty$ e como $g_1^{-1}\{\alpha_5\}$ e $g_2^{-1}\{\beta_5\}$ são conjuntos finitos de pontos, existe um compacto Q tal que g_1 e g_2 omitem α_5 e β_5 , respectivamente (podemos escolher $Q = g_1^{-1}\{\alpha_5\} \cup g_2^{-1}\{\beta_5\}$). Logo, estamos nas condições da demonstração do Teorema 5.3.1 e concluímos que a curvatura total de S é finita. Daí, segue do Teorema 2.3.2 que S é um plano, o que é um absurdo.
- (ii) Suponhamos que g_2 é constante, $g_2 = \beta_0$, g_1 omite α_1, α_2 e α_3 e que, por absurdo, exista outro ponto α_4 que é assumido um número finito de vezes por g_1 . Podemos considerar $\alpha_4 = \infty$ e escolhermos cinco pontos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5 = \infty$ tais que $\beta_j \neq \beta_0$, $i \leq j \leq 5$. Como $g_1^{-1}\{\alpha_4\}$ é um conjunto finito de pontos existe um compacto Q tal que g_1 omite α_4 em $S \setminus Q$ (basta escolhermos $Q = g_1^{-1}\{\alpha_4\}$). Logo, temos em $S \setminus Q$ g_1 e g_2 omitindo $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ e $\beta_1, \dots, \beta_5$, respectivamente, e novamente estamos nas condições do Teorema 5.3.1 e concluímos que a curvatura total de S é finita. Daí, segue do Teorema 2.3.2 que S é um plano, o que é um absurdo. ■

Vamos mostrar por exemplos que ambas as partes desse teorema são as melhores possíveis, ou seja, existem superfícies mínimas completas que omitem os números de pontos das hipóteses do teorema.

Exemplo 5.3.3: Sejam $f(\zeta) = \frac{1}{\prod_{j=1}^3 (\zeta - \alpha_j)}$, $g_1(\zeta) = g_2(\zeta) = \zeta$.

Consideremos $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \frac{1}{2}f(1 + g_1g_2, i(i - g_1g_2), g_1 - g_2, i(g_1 + g_2))$ e $x_k = \operatorname{Re} \int_{P_0}^P \varphi_k(\zeta) d\zeta$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Como $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tem períodos reais, consideremos a imersão mínima $\widehat{X} : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde $\widehat{M}$ é a superfície de recobrimento universal de $M = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Para verificar que a superfície é completa, basta verificar que as curvas divergentes de M tem comprimento infinito.

Fixada α_j , $1 \leq j \leq 3$, consideremos a curva $\gamma_j : [0, 1) \rightarrow \widehat{C}$ com parametrização $\zeta(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 1} \zeta(t) = \alpha_j$. O comprimento de γ_j é :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} ds &= \frac{1}{2} \int_{\gamma_j} \frac{1 + |\zeta|^2}{\prod_{i=1}^3 |\zeta - \alpha_i|} |d\zeta| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 + |\zeta(t)|^2}{|\zeta(t) - \alpha_j|} \frac{|\zeta'(t)| dt}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 |\zeta(t) - \alpha_i|} \end{aligned}$$

Seja $\epsilon = \frac{1}{2} \min\{|\alpha_j - \alpha_k|, k \neq j, 1 \leq k \leq 3\}$.

Observamos que existe $t_j \in [0, 1)$ tal que $|\zeta(t) - \alpha_j| < \epsilon$ com $t_j < t < 1$, logo

$$|\zeta(t) - \alpha_k| \leq |\zeta(t) - \alpha_j| + |\alpha_k - \alpha_j| < \epsilon + |\alpha_k - \alpha_j| ,$$

onde $k \neq j$ e $i \leq k \leq 3$.

Portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} ds &> K \int_{t_j}^1 \frac{(1 + |\zeta(t)|^2)}{|\zeta(t) - \alpha_j|} |\zeta'(t)| dt = \\ &= K \int_{t_j}^1 \frac{|\zeta'(t)| dt}{|\zeta(t) - \alpha_j|} + K \int_{t_j}^1 \frac{|\zeta(t)|^2 |\zeta'(t)| dt}{|\zeta(t) - \alpha_j|} \geq \\ &= K \left| \int_{t_j}^1 \frac{\zeta'(t) dt}{\zeta(t) - \alpha_j} \right| + K \left| \int_{t_j}^1 \frac{(\zeta(t))^2 \zeta_j'(t) dt}{\zeta(t) - \alpha_j} \right| = \infty , \end{aligned}$$

usando os mesmos argumentos do Exemplo 5.2.5 e considerando

$$K = \frac{1}{2 \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^3 (\epsilon + |\alpha_i - \alpha_j|)}.$$

Para $\alpha_4 = \infty$ consideremos a curva $\gamma : [0, 1) \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ com parametrização $\zeta(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 1} \zeta(t) = \alpha_4 = \infty$. O comprimento de γ é:

$$\int_{\gamma} ds = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1 + |\zeta|^2}{\prod_{i=1}^3 |\zeta - \alpha_i|} |d\zeta|.$$

Observamos que existe $t_0 \in [0, 1)$ tal que $|\alpha_i| \leq |\zeta(t)|$ para $t_0 \leq t < 1$ e $i = 1, 2, 3$, logo $|\zeta(t) - \alpha_i| \leq |\zeta(t)| + |\alpha_i| \leq 2|\zeta(t)|$ para $t_0 \leq t < 1$ e escrevemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds &\geq \frac{1}{2} \int_{t_0}^1 \frac{1 + |\zeta(t)|^2}{8|\zeta(t)|^3} |\zeta'(t)| dt = \\ &= \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{|\zeta'(t)|}{|\zeta(t)|^3} dt + \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{|\zeta'(t)|}{|\zeta(t)|} dt \geq \\ &= \frac{1}{16} \left| \int_0^1 \frac{\zeta'(t)}{(\zeta(t))^3} dt \right| + \frac{1}{16} \left| \int_0^1 \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} dt \right| = +\infty, \end{aligned}$$

pois $\left| \int_0^1 \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} dt \right| = +\infty$.

Temos um exemplo de uma superfície completa com g_1 e g_2 , ambos, omitindo quatro pontos.

Exemplo 5.3.4: Sejam $M = \mathbf{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$, com $\alpha_j \neq \infty$, $j = 1, 2$, $f(\zeta) = \frac{1}{\prod_{j=1}^2 (\zeta - \alpha_j)}$,

$g_1(\zeta) \equiv 0$ e $g_2(\zeta) = \zeta$.

Novamente consideremos $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ e observamos que X tem períodos reais.

Temos:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2 \prod_{j=1}^2 (\zeta - \alpha_j)}, & \varphi_2 &= \frac{i}{2 \prod_{j=1}^2 (\zeta - \alpha_j)}, \\ \varphi_3 &= \frac{-\zeta}{2 \prod_{j=1}^2 (\zeta - \alpha_j)}, & \text{e } \varphi_4 &= \frac{-i\zeta}{2 \prod_{j=1}^2 (\zeta - \alpha_j)}. \end{aligned}$$

Seja γ uma curva fechada qualquer em volta de α_1 ou α_2 . Como $\text{Res}_{\alpha_j} \varphi_2 = \frac{i}{2}$, $\int_{\gamma} \varphi_2(\zeta) d\zeta = -\pi \in \mathbb{R}$, logo X tem períodos reais e definimos $\widehat{X} : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde $\widehat{M}$ é a superfície de recobrimento universal de $M = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Afirmamos que a superfície é completa.

Primeiro fixamos $\alpha_j, j = 1, 2$ e consideramos a curva $\gamma_j : [0, 1) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ com parametrização $\zeta(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 1} \zeta(t) = \alpha_j$.

Consideremos $\epsilon = \frac{1}{2} \min |\alpha_j - \alpha_k|, k \neq j$, e $t_j \in [0, 1)$ tal que $|\zeta(t) - \alpha_j| < \epsilon$ para $t_j < t < 1$, e $|\zeta(t) - \alpha_k| < \epsilon + |\alpha_k - \alpha_j|$, para $t_j < t < 1$. Logo, o comprimento de γ_j é

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} ds &> \int_{t_j}^1 \frac{1}{2} \frac{(1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1} |\zeta(t) - \alpha_i|} |\zeta'(t)| dt \geq \\ &\geq K \int_{t_j}^1 \frac{|\zeta(t)| |\zeta'(t)|}{|\zeta(t) - \alpha_j|} dt \geq K \left| \int_{t_j}^1 \frac{\zeta(t) \zeta'(t)}{\zeta'(t) - \alpha_j} dt \right| \end{aligned}$$

Seja $\omega(t) = \zeta(t) - \alpha_j$; $d\omega = \zeta'(t) dt$ e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} ds &> K \left| \int_{\omega_0}^0 \frac{(\omega - \alpha_j) d\omega}{\omega} \right| = \\ &= K \left| \int_{\omega_0}^0 d\omega - \alpha_j \int_{\omega_0}^0 \frac{d\omega}{\omega} \right| = \infty. \end{aligned}$$

Para $\alpha_3 = \infty$, consideramos a curva $\gamma : [0, 1) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ com parametrização $\zeta(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 1} \zeta(t) = \infty$.

Novamente notamos que existe $t_0 \in [0, 1)$ tal que $|\zeta(t)| \geq |\alpha_i|$ para $t_0 \leq t < 1$ e $i = 1, 2$. Logo $|\zeta(t) - \alpha_i| \leq 2|\zeta(t)|$ para $t_0 \leq t < 1$ e o comprimento de γ é

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds &\geq \frac{1}{2} \int_{t_0}^1 \frac{(1 + |\zeta(t)|^2)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1} |\zeta(t) - \alpha_i|} |\zeta'(t)| dt \geq \\ &\geq \frac{1}{16} \int_{t_0}^1 \frac{(1 + |\zeta(t)|^2)^{\frac{1}{2}}}{|\zeta(t)|^2} |\zeta'(t)| dt \geq \frac{1}{16} \int_{t_0}^1 \frac{|\zeta'(t)|}{|\zeta(t)|} dt \geq \\ &\geq \frac{1}{16} \left| \int_{t_0}^1 \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} dt \right| = \infty. \end{aligned}$$

Portanto, todas as curvas divergentes têm comprimento infinito e, conseqüentemente, S é completa.

5.4. Conclusões

Apresentaremos agora alguns resultados sobre a relação entre a aplicação de Gauss e a curvatura total de superfícies em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^4$ baseados no estudo feito anteriormente.

Teorema 5.4.1: Seja S uma superfície mínima completa no $\mathbb{R}^3$. Então

I - São equivalentes:

- (i) a curvatura total de S é zero;
- (ii) g é constante;
- (iii) S é um plano.

II - São equivalentes:

- (i) a curvatura total de S é finita, não nula;
- (ii) a curvatura total de S é $-4\pi m$, para algum inteiro positivo m ;
- (iii) g é uma função meromorfa não constante sobre uma superfície compacta com um número finito de pontos removidos;
- (iv) g assume todo valor m vezes com um número finito de exceções e omite no máximo três valores.

III - São também equivalentes:

- (i) a curvatura total é infinita;
- (ii) g assume todos os valores infinitas vezes, exceto, no máximo, quatro valores.

A questão que permanece nesse teorema é se “três” é o número melhor possível para o número de pontos omitidos no caso da curvatura total ser finita.

O exemplo do catenóide mostra que dois pontos podem ser omitidos, logo o número de pontos omitidos é “dois” ou “três”.

Demonstração do Teorema 5.4.1: As equivalências do caso I são imediatas. Vamos estudar o caso II (supondo que S não é um plano):

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$$

Se a curvatura total de S é finita, não nula, então segue do Teorema 1.2.1 que $c(S) = -4\pi m$, para algum inteiro positivo m e segue que M é conformemente equivalente a $\overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ com $\overline{M}$ compacta à qual g se estende a uma função meromorfa não constante.

O grau de g é m e isto significa que g assume todo valor m vezes com um número finito de exceções. Além disso, segue do Teorema 2.2.14, que g omite no máximo três valores porque estamos supondo que S não é um plano.

$$(iv) \Rightarrow (i): \text{ é imediato.}$$

Caso III:

$$(i) \Rightarrow (ii).$$

Suponhamos, por absurdo, que g assume cinco valores um número finito de vezes, logo, pelo Teorema 5.2.1, a curvatura total de S é finita, o que contradiz a hipótese e a implicação está provada.

$$(ii) \Rightarrow (i): \text{ é imediato.}$$

■

Para superfícies em $\mathbb{R}^4$, podemos apresentar um resultado análogo ao Teorema 5.4.1 que é o seguinte:

Teorema 5.4.2: Seja S uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ e sejam g_1 e g_2 as componentes da aplicação de Gauss de S . Então:

I - São equivalentes:

- (i) a curvatura total de S é zero;
- (ii) g_1 e g_2 são constantes;
- (iii) S é um plano.

II - São equivalentes:

- (i) a curvatura total é finita, não nula;
- (ii) a curvatura total é $-2\pi m$, para algum inteiro positivo m ;
- (iii) cada g_k é uma função meromorfa de ordem m_k numa superfície compacta com um número finito de pontos removidos, onde $m = m_1 + m_2$;
- (iv) cada g_k assume cada valor m_k vezes, exceto um número finito de valores, com $m = m_1 + m_2$ e também, uma das funções g_k é constante e a outra omite no máximo dois valores, ou nenhuma g_k é constante e as duas componentes omitem no máximo três valores.

III - São também equivalentes:

- (i) a curvatura total de S é infinita;
- (ii) g_1 e g_2 assumem todos os valores infinitas vezes, exceto, no máximo, quatro valores.

Demonstração: As equivalências do caso I são imediatas.

Caso II: (supondo que S não é um plano)

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$$

Se a curvatura total de S é finita não nula, então, pelo Teorema 1.2.1, segue que a curvatura total é $c(S) = -2\pi m$, onde $m = m_1 + m_2$ com m_k grau de g_k , $k = 1, 2$. Além disso, $M \cong \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ com $\overline{M}$ compacta e cada g_k se estende a uma função meromorfa em $\overline{M}$.

Sendo m_k o grau de g_k , esta assume cada valor m_k vezes, exceto um número finito de valores. Como S não é um plano, segue do Teorema 2.3.2 que g_1 e g_2 omitem no máximo três valores, ou uma dessas funções é constante e a outra omite no máximo dois valores.

(iv) $\Rightarrow$ (i): é imediato.

Caso III:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Suponhamos, por absurdo, que, por exemplo, g_1 e g_2 assumem, respectivamente, quatro e cinco valores distintos de $\hat{C}$ um número finito de vezes, logo, segue do Teorema 5.3.2, que S tem curvatura total finita, absurdo.

(ii) $\Rightarrow$ (i): imediato.

■

APÊNDICE

Inicialmente apresentaremos algumas definições e resultados sobre superfícies de Riemann.

Consideremos uma aplicação holomorfa não-constante, $f : M \rightarrow N$, entre superfícies de Riemann. Seja $P \in M$ qualquer. Escolhemos coordenadas locais $\tilde{z}$ em M que se anulam em P e ζ em N se anulando em $f(P)$. Podemos escrever em termos dessas coordenadas locais

$$\zeta = f(\tilde{z}) = \sum_{k \geq n} a_k \tilde{z}^k, \quad \text{com } n > 0, a_n \neq 0.$$

Logo, existe uma aplicação holomorfa h , com $h(0) \neq 0$, tal que $\zeta = \tilde{z}^n h(\tilde{z})^n = (\tilde{z}h(\tilde{z}))^n$.

Observemos que $\tilde{z} \mapsto \tilde{z}h(\tilde{z})$ é outra coordenada local que se anula em P e, em termos dessa nova coordenada, a aplicação f é dada por $\zeta = z^n$.

Dizemos que n é o *número de ramificação* de f em P , isto é, f assume $f(P)$ n vezes em P ou f tem multiplicidade n em P . O número $(n - 1)$ é denominado *número de ramos* de f em P com notação $b_f(P)$.

Proposição 1: ([12], p. 12)

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação holomorfa não-constante entre superfícies de Riemann compactas. Então existe um número inteiro positivo m tal que todo ponto $Q \in N$ é assumido precisamente m vezes em M por f , contando com as multiplicidades, isto é, para qualquer $Q \in N$,

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} (b_f(P) + 1) = m.$$

O número m acima é chamado *grau* de f e dizemos que f é *m-recobrimento de ramificação* de N por M , ou f tem m ramos.

Sejam M uma superfície de Riemann compacta e $\chi(M)$ a característica de Euler-Poincaré. Então $\gamma = \frac{2 - \chi(M)}{2}$ é chamado *gênero* de S .

Consideremos $f : M \rightarrow N$ como antes sendo M e N superfícies de Riemann compactas de gêneros γ e g , respectivamente, e que o grau de f seja n . Definimos a *ordem total de recobrimento* de f por $B = \sum_{P \in M} b_j(P)$.

A relação de Riemann-Hurwitz para f é:

Teorema 2: ([12], p. 18)

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação holomorfa não constante de grau n entre superfícies de Riemann compactas M e N com gêneros γ e g , respectivamente. Então $\gamma = n(g-1) + 1 + \frac{B}{2}$, onde B é o número total de recobrimento de f . Em particular, se $N = \widehat{\mathbb{C}}$, então a relação é $B - 2n = 2\gamma - 2$.

Alguns resultados importantes de Funções Analíticas que utilizaremos no nosso trabalho são os seguintes:

Lema de Schwarz: [10]

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, onde D é o disco unitário, tal que $f(0) = 0$ e $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in D$. Então $|f'(0)| \leq 1$ e $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D$.

Teorema de Liouville: [10]

Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função inteira e limitada, então f é constante.

Pequeno teorema de Picard: [10]

Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é uma função meromorfa, então f é constante ou assume todos os valores de $\widehat{\mathbb{C}}$ com exceção de no máximo dois pontos.

Grande teorema de Picard: [10]

Seja $f : B(a, R) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica com singularidade essencial em $z =$

a , onde $B(a, R)$ é a bola aberta de centro a e raio R . Então para qualquer $\delta > 0$, $f(B(a, R) \setminus \{a\})$ assume todos os valores complexos, exceto possivelmente um, infinitas vezes.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L.A. Ahlfors, Conformal invariants, Topics in geometry function theory, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [2] L.A. Ahlfors and L. Sario, Riemann surfaces, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.
- [3] J.L. Barbosa and G.A. Colares, Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, Lecture Notes in Mathematics, 1195, Springer-Verlag.
- [4] S. Bernstein, Sur un théoreme de géometrie et su applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique, Comm. Inst. Sci. Math. Univ. Kharkoo, 15 (1915-17).
- [5] M. do Carmo, Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, CNPq, 1988.
- [6] C.C. Chen, On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in $\mathbb{R}^4$, Pac. J. of Math., vol. 102, No. 1, 1982.
- [7] C.C. Chen and P.A.Q. Simões, Superfícies mínimas do $\mathbb{R}^n$, Escola de Geometria Diferencial (1980).
- [8] S.S. Chern, Minimal surfaces in an euclidean space of N dimensions, pp/ 187-198 of Differential and Combinatorial Topology, A Symposium in Honor of Marston Morse, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1965.
- [9] S.S. Chern and R. Osserman, Complete minimal surfaces in euclidean n -space, J. d'Analyse, 19 (1967), 15-34.
- [10] J.B. Conway, Functions of one complex variable, Springer, 1973, Graduate Texts in Mathematics.
- [11] R.S. Earp and H. Rosenberg, On values of the Gauss map of complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, Comment. Math. Helvetici 63(1988), 549-586.
- [12] H.M. Farkas and I. Kra, Riemann surfaces, New York, Springer.

- [13] H. Fujimoto, On the Gauss map of a complete minimal surface in $\mathbb{R}^m$, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 279-288.
- [14] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan 40(1988), 237-249.
- [15] C.C. Góes, As normais às superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$. Tese de Mestrado, IME-USP, 1975.
- [16] W.K. Hayman, Meromorphic functions, Oxford Mathematical Monographs, 1964.
- [17] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv. 32 (1957), 13-72.
- [18] D. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 236 (1980).
- [19] H. Lawson, Lectures on minimal submanifolds, Monografias de Matemática - IMPA, No. 14, 1970.
- [20] X. Mo and R. Osserman, On the Gauss map and total curvature of complete minimal surfaces and an extension of Fujimoto's theorem, J. Differential Geometry 31 (1990).
- [21] P. Montel, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Paris (1927).
- [22] R. Nevanlinna, Analytic functions, Grundlehren der Math. Wissenschaften, vo. 162, Springer, New York, 1970.
- [23] J. Nitsche, Lectures on Minimal Surfaces, vol. 1, Cambridge University Press (1988).
- [24] D. O'Shea, The Bernstein-Osserman-Xavier theorems, Théorie des variétés minimales et applications, Astérisque 154-155 (1987), 95-113.
- [25] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n , Ann. Math. 2, 80(1964), 340-364.

- [26] R. Osserman, On complete minimal surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 13 (1963), 392-404.
- [27] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Von Nostrand-Reinhold, New York, 1969.
- [28] R. Osserman, Minimal surfaces in the large, *Comm. Math. Helv.* 35(1961), 65-76.
- [29] R. Osserman, Proof of a conjecture of Nirenberg, *Comm. Pure Appl. Math.* 12(1959), 229-232.
- [30] L. Sario and K. Oikawa, *Capacity functions*, Berlin, Springer, 1969.
- [31] G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Reading, Addison-Wesley.
- [32] S.T. Yau, Some function-theoretic properties of complete riemannian manifolds and their applications to geometry, *Indiana U. Math. J.*, 25(1976), 659-670.
- [33] F. Xavier, The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points on the sphere, *Ann. of Math.*, 113(1981), 211-214.
- [34] F. Xavier, Erratum to the paper "The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere", *Ann. Math.* 115(1982), 667.