**A fórmula de Jorge-Meeks,
a superfície de Costa
e sua unicidade**

Oscar João Abdounur

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Mestre
em
Matemática

Orientador: Prof. Dr. Plínio Amarante Quirino Simões

São Paulo, fevereiro de 1993

Dedico a meus pais

Agradecimentos

Agradeço a todos que , direta ou indiretamente, participaram na realização dessa tese.

Ao Prof. Dr. Plínio Amarante Quirino Simões, pelo assunto proposto, orientação e sugestões no decorrer do trabalho.

A Maria Elisa Galvão, Célia Contin Góes, Sérgio Alves pelos seminários e dúvidas esclarecidas nesse período.

A Celso J. Costa, pelo auxílio prestado no Colóquio do IMPA, na fase final do trabalho e pela disposição a ajudar a qualquer momento e distância.

Aos ex-alunos pelas dúvidas manifestadas e aos professores do Instituto pelas dúvidas sanadas.

A Fernando Menzaque, Tito Homem de Melo, Henrique Guzzo e usuários das Estações de Trabalho pela atenção, paciência, auxílio e dicas na digitação.

A D.Elza Gomide, Ricardo, Marly, Maria Lúcia e Flávio pela colaboração na versão do resumo.

Aos funcionários do Departamento de Matemática, pelo apoio mais básico.

A Glória Maria Z. Ferreira, pela normalização das referências bibliográficas.

Aos professores com os quais realizei os cursos de mestrado.

A Antônia Abbamonte, pelo estímulo.

Ao pessoal do Centro de Educação Vitalícia, pelo apoio ao aspecto mais vital.

A meus avós, meus pais, tios, irmãos e primos, pelo carinho e dedicação.

Oscar João Abdounur

Resumo

Neste trabalho, estudamos inicialmente o comportamento dos fins de uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$, completa e com curvatura total finita. Para isso, provamos que uma superfície completa e orientável do $\mathbb{R}^3$ com topologia finita e cuja aplicação normal de Gauss se estende aos fins é propriamente imersa em $\mathbb{R}^3$. Além disso, a intersecção desta superfície com uma esfera de raio r são curvas fechadas imersas em $S^2(r)$ que convergem C^1 para geodésicas com multiplicidade em $S^2(r)$ quando r tende a infinito, sendo a convergência C^∞ se a superfície for mínima. Mostramos, ainda, a Fórmula de Jorge-Meeks, que relaciona a curvatura total de uma superfície com sua característica de Euler e multiplicidade de seus fins.

Em seguida, construímos a Superfície de Costa, mostrando que ela é mergulhada e se uma superfície mínima completa do $\mathbb{R}^3$ tem curvatura total finita, gênero 1, três fins mergulhados e paralelos sendo dois do tipo catenoide e um do tipo planar, então ela é a superfície de Costa.

Abstract

In this work, we have studied the behavior of the ends of a complete minimal surface of $\mathbb{R}^3$ that has finite total curvature. Firstly, we proved that if $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a complete isometric immersion of a 2-dimensional manifold of a finite topological type, which has well-defined normal vectors at infinity, then f is proper. Furthermore, the intersection of this surface with a sphere of radius r consists of immersed closed curves in $S^2(r)$, which converge C^1 to geodesics with multiplicity, as r goes to infinity. In the case this surface is minimal, the convergence is C^∞ . We have also shown the so called Jorge-Meeks' Formula, which relates the finite total curvature of a complete minimal surface of $\mathbb{R}^3$ with its Euler's Characteristic and the multiplicity of its ends.

Afterwards, we have constructed the Costa's Surface and shown that it is embedded in $\mathbb{R}^3$. We have observed that Costa's Surface has finite total curvature, genus one, three embedded and parallel ends, two of them of catenoid type and the third one of flat type.

In the last chapter, we have shown that any surface with the above properties is the Costa's Surface.

A superfície de Costa

Conteúdo

1	Representação de Weierstrass	1
1.1	Introdução	1
1.2	Alguns Resultados e Definições	1
1.3	Representação de Weierstrass	5
2	A fórmula de Jorge-Meeks	9
2.1	Objetivos	9
2.2	Alguns Resultados e Definições	9
2.3	Teorema Principal	14
2.4	Demonstração do item (i) do Teorema	14
2.5	Demonstração do item (ii) do Teorema	19
2.6	Demonstração do item (iii) do teorema	21
2.7	Demonstração do item (iv) do teorema	27
2.8	Fórmula de Jorge-Meeks	33
3	A função P de Weierstrass	40
3.1	Alguns resultados básicos sobre funções elípticas	40
3.2	Decomposição de Funções Elípticas	44
3.3	As funções σ , ξ , e P de Weierstrass:	45
3.4	Construção de Funções Elípticas	50
3.5	A função P de Weierstrass relativa ao reticulado $L(1, i)$	54
3.6	Propriedades da Aplicação P de Weierstrass de $L(1, i)$ obtidas usando o Princípio de Reflexão de Schwarz	56
4	A superfície de Costa	62
4.1	Introdução :	62
4.2	Teorema de Existência de Superfície Mínima Completa de três fins e gênero um	63
4.3	As simetrias da superfície de Costa	68

4.4	Sinal das componentes de X em Q	82
4.5	X é um mergulho:	84
5	Unicidade da Superfícies de Costa	89
5.1	Introdução	89
5.2	Alguns Resultados e Definições	90
5.3	Inexistência de Superfície Mínima com fins mergulhados e paralelos sendo dois do tipo catenóide e um do tipo planar de ordem 1 . . .	93
5.4	Caracterização de Superfícies Mínimas Completas do $\mathbb{R}^3$ com Curvatura Total -12π , fins paralelos , dois fins do tipo catenóide e um fim planar de ordem 2	101
5.5	O reticulado $L(1, \tau)$ é retângulo.	106
5.6	O reticulado $L(1, yi)$ é quadrado.	115
5.7	A Unicidade	123

Introdução

Iniciamos o trabalho com o estudo da Representação de Weierstrass, muito utilizada na análise de superfícies mínimas e que reduz sua existência à existência de uma função meromorfa e uma 1-forma diferenciável sobre uma superfície de Riemann.

No capítulo 2, descreve-se geometricamente os fins de uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$ completa com curvatura total finita, tendo [19] como referência básica. Para isso, mostra-se que uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$ difeomorfa ao complemento de um número finito de pontos de uma superfície compacta e cuja aplicação normal de Gauss se estende aos fins, é propriamente imersa. Avalia-se, ainda, a convergência da intersecção dessa superfície com esferas de raio suficientemente grandes, inclusive para quando a superfície é mínima. Com isso, demonstra-se a fórmula de Jorge-Meeks, que relaciona a curvatura total da superfície com sua característica de Euler e multiplicidade de seus fins, generalizando a desigualdade de Chern-Osserman. Esta fórmula mostra a igualdade como condição necessária e suficiente para que os fins sejam mergulhados, o que será bastante útil na classificação de mínimas completas mergulhadas.

Em seguida, estudamos as funções elípticas, que são funções meromorfas definidas em $\mathbb{C}$ e duplamente periódicas e que juntamente com a Representação de Weierstrass, são muito utilizadas na construção de exemplos de superfícies mínimas de gênero um.

No capítulo 4, exibimos uma superfície mínima completa, mergulhada em $\mathbb{R}^3$, com três fins paralelos e curvatura total -12π , construída pelo matemático J.C. Costa em 1982. Ela pode ser decomposta em oito partes congruentes, possuindo dois planos de simetria que se interceptam ortogonalmente e duas retas que se cortam ortogonalmente sendo ainda invariante em relação ao subgrupo dos grupos

dos movimentos rígidos de $\mathbb{R}^3$ gerado por:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essa invariança é devido ao fato de que existe uma correspondência biunívoca entre o grupo de simetrias do quadrado $Q = [0, 1, 1 + i, i]$ e este subgrupo e que a superfície de Costa admite uma representação de Weierstrass que depende da função P de Weierstrass e sua derivada.

As simetrias da superfície e o fato dela ser propriamente imersa em $\mathbb{R}^3$ reduziram a prova de que a superfície é mergulhada a mostrar sua injetividade num triângulo contido em Q .

Até então, os únicos exemplos de superfícies mínimas completas do $\mathbb{R}^3$ mergulhadas e com topologia finita eram o plano (1760, Lagrange), o catenoide e o helicóide (1776, Meusnier). Este exemplo deu origem à intensa atividade de pesquisa na procura de novos exemplos, que propiciaram o desenvolvimento de técnicas fundamentais para a área.

Finalmente, mostra-se que a superfície de Costa é a única superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ de gênero um, três fins mergulhados e paralelos sendo dois do tipo catenoide e um do tipo planar. Para isso, utilizando a fórmula de Jorge-Meeks e teoria de funções elípticas, prova-se inicialmente que o fim planar de uma superfície nas condições anteriores deve ter ordem 2. Em seguida caracteriza-se, em termos de Representação de Weierstrass, superfícies mínimas completas de $\mathbb{R}^3$ com curvatura total -12π , três fins paralelos sendo dois do tipo catenoide e um planar de ordem 2. Isso se reduz a encontrar a solução de um sistema de duas equações relacionando os parâmetros do reticulado associado à função P de Weierstrass existente na representação anterior. Em seguida mostra-se que essas equações possuem apenas uma solução, que corresponde à superfície de Costa.

1.10
33.39

Capítulo 1

Representação de Weierstrass

1.1 Introdução

A representação de Weierstrass de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ reduz a existência de superfícies mínimas à existência de uma função meromorfa e uma 1-forma diferenciável sobre uma superfície de Riemann.

1.2 Alguns Resultados e Definições

Definição 1.1 *Seja M uma variedade de classe C^k , $k \geq 1$, 2-dimensional. Se $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão de classe C^k , dizemos que $X(M)$ é uma superfície de classe C^k do $\mathbb{R}^3$. $X(M)$ é orientável, compacta, conexa, fechada se M o for.*

Definição 1.2 *Seja U um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ e $\psi = \psi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de classe C^k , $k \geq 1$. Se*

$$|\psi_u| = |\psi_v| \text{ e } \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0 \quad (1.2.1)$$

dizemos que ψ é conforme. Nesse caso, ψ induz sobre U a métrica :

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) \quad (1.2.2)$$

com $\lambda = |\psi_u| = |\psi_v|$. Nessas condições, (u, v) são parâmetros isotérmicos para a superfície $\psi(U)$.

Com respeito a existência de parâmetros isotérmicos, temos o seguinte teorema

Figura 1.1: Parametrização da Superfície

Teorema 1.1 (*Existência de Parâmetros Isotérmicos*) Seja U um conjunto simplesmente conexo e $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de classe C^k , $k \geq 2$. Então existe um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow U$ de classe C^k tal que $\tilde{\psi} = \psi \circ \varphi$ é uma aplicação conforme.

Demonstração: Ver Spivak [37]. $\square$

Sejam M uma variedade 2-dimensional de classe C^k , $k \geq 2$, conexa, orientável e $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de classe C^k . O teorema 1.1 nos assegura que para cada ponto $p \in M$, existem U aberto de $\mathbb{R}^2$, simplesmente conexo e $\psi = \psi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ conforme tal que : $\psi(U) \subset X(M)$, $X^{-1}(\psi(U))$ é um aberto de M e $\varphi = X^{-1} \circ \psi$ é um homeomorfismo. (U, φ) é então uma parametrização conforme local de M . Dadas duas parametrizações locais conformes de M , $(U, \varphi(u, v))$ e $(V, \phi(\tilde{u}, \tilde{v}))$, tais que $\varphi(U) \cap \phi(V) \neq \emptyset$, a aplicação $\phi^{-1} \circ \varphi : (u, v) \in \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \phi(V)) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \phi^{-1}(\varphi(U) \cap \phi(V))$ é uma mudança de parâmetros conformes. Se $z = u + iv$, $\tilde{z} = \tilde{u} + i\tilde{v}$, $\phi^{-1} \circ \varphi(z) = \tilde{z}$ é holomorfa ou anti-holomorfa. Como M é orientável, existe uma família

$\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha) / \alpha \in \mathcal{A}\}$ de parametrizações locais conformes de M tal que : $U_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$ e as respectivas mudanças de parâmetros são holomorfas. Esta família induz, então, sobre M uma estrutura holomorfa que torna M uma superfície de Riemann e X uma imersão conforme. As parametrizações pertencentes à $\mathcal{A}$ se tornam, então, parametrizações holomorfas locais dessa superfície de Riemann.

1.2.1

Proposição 1.1 (i) Sejam $X(M)$ uma superfície do $\mathbb{R}^3$ de classe C^2 , orientada, $(U, \varphi(u, v))$ parametrização conforme local de M e $\varphi(a, b) = p \cdot \frac{\partial}{\partial u}(p), \frac{\partial}{\partial v}(p)$ definidas por $\frac{\partial}{\partial u}(p)(f) = \frac{\partial}{\partial u} f \circ \varphi(a, b), \frac{\partial}{\partial v}(p) = \frac{\partial}{\partial v} f \circ \varphi(a, b)$, onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 , constituem uma base para $T_p(M)$ espaço vetorial tangente à M em p . Sejam $du(p), dv(p)$ os operadores lineares de $T_p(M)$ em $\mathbb{R}$ duais de $\frac{\partial}{\partial u}(p)$ e $\frac{\partial}{\partial v}(p)$ respectivamente. Sejam, $z = u + iv, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}), dz = du + idv, d\bar{z} = du - idv$. Se $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ é de classe C^1 , $\frac{\partial f}{\partial u}(\text{Ref} \circ \varphi) + i\frac{\partial f}{\partial v}(\text{Imf} \circ \varphi), \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}(\text{Ref} \circ \varphi) + i\frac{\partial f}{\partial v}(\text{Imf} \circ \varphi)$ temos que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \text{ em } \varphi(U) \quad (1.2.3)$$

(ii) f é holomorfa $\iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ e f é antiholomorfa $\iff \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (iii) $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{4}(\frac{\partial}{\partial u^2} f + \frac{\partial}{\partial v^2} f)$, onde $\frac{\partial}{\partial u^2} f = \frac{\partial}{\partial u^2} (f \circ \varphi), \frac{\partial}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v^2} (f \circ \varphi)$ (iv) Se $ds^2 = X^*(\langle, \rangle)$ é a métrica riemanniana induzida sobre M por X , $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2 |dz|^2$ em $\varphi(U)$, onde $\lambda^2 = ds^2(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}) = ds^2(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}), |dz|^2 = du^2 + dv^2$. (v) Se Δ é o operador de Laplace-Beltrami de M relativamente à ds^2 , $\Delta = \frac{1}{\lambda^2}(\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v^2}) = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ em $\varphi(U)$ (vi) Se K é a curvatura Gaussiana de (M, ds^2) , $K = -\Delta \ln \lambda$ em $\varphi(U)$ (vii) Se $X = (x_1, x_2, x_3), \Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$, H é o vetor curvatura média e $N : M \rightarrow S^2(1)$ é a aplicação normal de Gauss da imersão X , $\Delta X = 2HN$

1.2.2

Definição 1.3 Seja (M, ds^2) uma variedade riemanniana de classe C^k , $k \geq 2$ e Δ o seu operador de Laplace-Beltrami. Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , f é harmônica se $\Delta f = 0$

Definição 1.4 Seja $X(M)$ uma superfície do $\mathbb{R}^3$ orientada. $X(M)$ é mínima se o seu vetor curvatura média da imersão X é nulo.

Proposição 1.2 A superfície $X(M)$ do $\mathbb{R}^3$ é mínima $\iff X$ é harmônica, isto é, x_1, x_2 e x_3 são harmônicas

Demonstração: Segue do item (vii) da proposição 1.1. $\square$

Corolário 1.1 Não existem superfícies mínimas compactas em $\mathbb{R}^3$

Demonstração:

Se (U, φ) é uma parametrização conforme local de M , $x_1 \circ \varphi, x_2 \circ \varphi$ e $x_3 \circ \varphi$ são harmônicas em U . O resultado é, então, uma consequência do princípio do máximo para funções harmônicas em abertos do $\mathbb{R}^2$. $\square$

Proposição 1.3 Seja $X(M)$ uma superfície do $\mathbb{R}^3$ de classe C^2 , orientada. Sobre M , consideremos a estrutura de superfície de Riemann induzida por X . Sejam $(U, \varphi(u, v))$ uma parametrização local de M , $z = u + iv$ e $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 2 \frac{\partial}{\partial z} X \circ \varphi$. e portanto, $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} X \circ \varphi = 2(\frac{\partial}{\partial u^2}(X \circ \varphi) + i \frac{\partial}{\partial v^2}(X \circ \varphi))$. Então:

- [i] Φ_1, Φ_2, Φ_3 são holomorfas $\iff x_1 \circ \varphi, x_2 \circ \varphi$ e $x_3 \circ \varphi$ são harmônicas.
- [ii] $\sum_{k=1}^3 \Phi_k^2 = \{|(X \circ \varphi)_u|^2 - |(X \circ \varphi)_v|^2 - 2i\langle (X \circ \varphi)_u, (X \circ \varphi)_v \rangle\} = 0$
- [iii] $|\Phi|^2 = \sum_{k=1}^3 |\Phi_k|^2 = \sum_{k=1}^3 \{(\frac{\partial x_k \circ \varphi}{\partial u})^2 + (\frac{\partial x_k \circ \varphi}{\partial v})^2\} = 2\lambda^2 > 0$
- [iv] Seja $(V, \psi(s, t))$ outra parametrização holomorfa de M tal que $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Se $w = s + it$, $\tilde{\Phi} = \frac{\partial}{\partial w} X \circ \psi$, temos que: $\Phi = \tilde{\Phi} \frac{\partial w}{\partial z}$
- [v] Então, temos de acordo com o item (iv), que existem α_1, α_2 e α_3 1-formas holomorfas, globalmente definidas em M tais que em $\varphi(U)$, $\alpha_1 = \Phi_1 dz$, $\alpha_2 = \Phi_2 dz$ e $\alpha_3 = \Phi_3 dz$. Pondo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ temos que α é uma forma diferenciável, com valores em $\mathbb{R}^3$, globalmente definida.

Proposição 1.4 Nas condições da proposição anterior,

- [i] $X(M)$ é mínima $\iff \alpha$ é holomorfa.
- [ii] Se $X(M)$ é mínima, $X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha$, onde a integral é uma integral de linha sobre qualquer curva de classe C^1 por partes, que tem como valor inicial p_0 e como valor final p .

Demonstração:

(i) É consequência do item (vii) da proposição 1.1 ou da proposição 1.2 .

(ii) Podemos supor que $M = \varphi(U)$, onde $(U, \varphi(u, v))$ é uma parametrização local holomorfa. Sejam $z_0 \in U, p_0 = \varphi(z_0), p = \varphi(z), 1 \leq k \leq 3, \gamma_z : [0, 1] \rightarrow U$, curva C^1 por partes tal que $\gamma_z(0) = z_0, \gamma_z(1) = z$ e $\eta = \varphi \circ \gamma_z$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\eta} \alpha_k &= \int_{\gamma_z} 2 \frac{\partial}{\partial z} X_k \circ \varphi(z) dz = \int [\frac{\partial}{\partial u} x_k \circ \varphi(z) - i \frac{\partial}{\partial v} x_k \circ \varphi(z)] dz \\ &= \int_{\gamma_z} [\frac{\partial}{\partial u} x_k \circ \varphi(z) - i \frac{\partial}{\partial v} x_k \circ \varphi(z)] (du + i dv) = \int_{\gamma_z} [\frac{\partial}{\partial u} x_k \circ \varphi(z) du + \frac{\partial}{\partial v} x_k \circ \varphi(z) dv] \\ &\quad + i \operatorname{Im} \left\{ \int_{\eta} \alpha_k \right\} = \int_{\gamma_z} d(x_k \circ \varphi(z)) + i \operatorname{Im} \left\{ \int_{\eta} \alpha_k \right\} \end{aligned}$$

Isto é :

$$x_k(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha_k + x_k(p_0)$$

Corolário 1.2 Se $X(M)$ é mínima, $\int_{\gamma} \alpha_k = 0$, qualquer que seja a curva γ, C^1 por partes, fechada de M .

1.3 Representação de Weierstrass

Definição 1.5 Se M é uma superfície de Riemann e β é uma 1-forma diferenciável, globalmente definida em M tal que $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \beta = 0$, qualquer que seja γ , curva C^1 por partes, fechada de M , dizemos que β não tem períodos reais.

Teorema 1.2 (Representação de Weierstrass para uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$) Sejam M uma superfície de Riemann, α_1, α_2 e α_3 1-formas diferenciáveis, globalmente definidas em M tais que:

$$(i) \quad \sum_{k=1}^3 \alpha_k^2 = 0 \quad (\text{isto é, localmente, } \alpha_k = \Phi_k dz \text{ e } \sum_{k=1}^3 \Phi_k^2 = 0) \quad (1.3.1)$$

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^3 |\alpha_k|^2 > 0 \quad (1.3.2)$$

$$(iii) \quad \text{Cada } \alpha_k \text{ não tem períodos reais.} \quad (1.3.3)$$

Então, dado $p_0 \in M$, $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $x_k = \text{Re}(\int_{p_0}^p \alpha_k)$, onde $\int_{p_0}^p \alpha_k$ é uma integral de linha sobre qualquer curva C^1 por partes, com valor inicial p_0 e valor final p , de M , é uma imersão e $X(M)$ é uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$.

Demonstração:

(i) implica que os parâmetros são isotérmicos, que junto a (ii) implica que X é uma imersão C^∞ , (iii) implica que X está bem definida e como α é holomorfa, segue da proposição 1.4 que $X(M)$ definida acima é mínima. $\square$

Definição 1.6 As 1-formas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, do teorema 1.2 são as 1-formas de Weierstrass de $X(M)$ e $X(p) = \text{Re} \int_{p_0}^p \alpha$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $\int_{p_0}^p \alpha = (\int_{p_0}^p \alpha_1, \int_{p_0}^p \alpha_2, \int_{p_0}^p \alpha_3)$ é a representação de Weierstrass da superfície mínima $X(M)$.

O item (i) do teorema 1.2 nos permite dar uma descrição simplificada das 1-formas de Weierstrass. Se $\alpha_1 = i\alpha_2$, então, $\alpha_3 = 0$ e, então, $X(M)$ é uma região do plano $x_3 = \text{constante}$. Suponhamos que $\alpha_1 \neq i\alpha_2$ e seja $w = \alpha_1 - i\alpha_2$ e $g = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 - i\alpha_2}$. Então, w é uma 1-forma holomorfa e g uma função meromorfa globalmente definidas. Se $(U, \varphi(u, v))$ é uma parametrização holomorfa local de M , $z = u + iv$, $\alpha_1 = \Phi_1 dz$, $\alpha_2 = \Phi_2 dz$, $\alpha_3 = \Phi_3 dz$, $w = f dz$ temos que $f = \Phi_1 - i\Phi_2$, $g = \frac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$. Em termos de g e w , temos:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)w \quad (1.3.4)$$

$$\alpha_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)w \quad (1.3.5)$$

$$\alpha_3 = gw \quad (1.3.6)$$

$$x_1 = \text{Re}\left(\int_z \frac{1}{2}(1 - g^2)w\right) \quad (1.3.7)$$

$$x_2 = \text{Re}\left(\int_z \frac{i}{2}(1 + g^2)w\right) \quad (1.3.8)$$

$$x_3 = \text{Re}\left(\int_z gw\right) \quad (1.3.9)$$

Como cada α_k é holomorfa e X é uma imersão, temos que :

z_0 é um polo de ordem $\bar{m}$ de $g \iff z_0$ é um zero de ordem $2m$ de f

Reciprocamente, se g é uma função meromorfa e w é uma forma holomorfa em M tais que a cada polo de ordem m de g corresponde um zero de ordem $2m$ de w , então as formas α_1, α_2 e α_3 definidas em (1.3.6) são holomorfas em M e satisfazem aos itens (i) e (ii) do Teorema 1.2. Se essas formas não têm períodos reais, nós obtemos uma imersão mínima $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ a partir de (1.3.9). As fórmulas dadas por (1.3.9) são as fórmulas da Representação de Weierstrass para superfícies mínimas do $\mathbb{R}^3$.

1.3.1

Em função de f e g a métrica riemanniana ds^2 de M é dada por:

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2 = \frac{1}{2} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2 \quad (1.3.10)$$

Pode-se relacionar a função meromorfa $g : M \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ da representação de Weierstrass com a aplicação normal de Gauss $N : M \rightarrow S^2(1)$, onde $S^2(1)$ é a esfera unitária centrada na origem. Seja $X(M)$ uma superfície mínima orientada de $\mathbb{R}^3$ e $N : M \rightarrow S^2(1)$ sua aplicação normal de Gauss. Se $(U, \varphi(u, v))$ é uma parametrização holomorfa local de M , f e g são as funções definidas no parágrafo anterior, temos que $X_u \times X_v = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2) (2\text{Reg}, 2\text{Img}, |g|^2 - 1)$ e então:

$$N = \left(\frac{2\text{Reg}}{1 + |g|^2}, \frac{2\text{Img}}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right) \quad (1.3.11)$$

Identificando $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$, extendendo o domínio e imagem da projeção estereográfica $\pi : S^2(1) - (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ para $S^2(1)$ e $\mathbb{C}_\infty$ respectivamente e definindo $\pi(0, 0, 1) = \infty$, resulta que:

$$\pi \circ N = g \quad (1.3.12)$$

ou seja, a função meromorfa g de Weierstrass pode ser identificada com a aplicação normal de Gauss através da projeção estereográfica. Do item (vi) da proposição 1.1 e (1.3.10),

$$K = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2 \quad (1.3.13)$$

Vejamos agora um exemplo de como gerar uma superfície mínima a partir de funções f e g satisfazendo as condições de polos e zeros mencionadas.

1.3.2

Exemplo: Sejam $M = \mathbb{C}$, $g(z) = -ie^z$ e $w(z) = e^{-z}dz$. w não possui zeros e g não tem polos. Logo g e w satisfazem a condição de polos e zeros. Aplicadas em (1.3.6), temos:

$$\alpha_1 = \cosh z dz \quad (1.3.14)$$

$$\alpha_2 = -i \sinh z dz \quad (1.3.15)$$

$$\alpha_3 = -idz \quad (1.3.16)$$

α_k são holomorfas, e não possuem períodos reais. Portanto,

$$x_1 = \operatorname{Re} \int_0^z \cosh z dz = \operatorname{Re}(\sinh z) = \cos v \sinh u \quad (1.3.17)$$

$$x_2 = \operatorname{Re} \int_0^z -i \sinh z dz = \operatorname{Re}(-i \cosh z) = \sinh v \sinh u \quad (1.3.18)$$

$$x_3 = \operatorname{Re} \int_0^z -idz = v \quad (1.3.19)$$

descreve uma imersão mínima e a superfície mínima resultante é o helicóide. Para maiores detalhes e outros exemplos, veja [2].

Capítulo 2

A fórmula de Jorge-Meeks

2.1 Objetivos

Neste capítulo,obtem-se uma descrição geométrica dos fins de uma superfície mínima completa com curvatura total finita do $\mathbb{R}^3$. Com base nessa descrição, obtem-se uma interpretação para a desigualdade de Chern-Osserman. A referência básica para esse capítulo é [19] .

2.2 Alguns Resultados e Definições

Definição 2.1 *Seja M uma variedade diferenciável. γ é um caminho de M , se γ for uma curva C^1 por partes de M .*

Definição 2.2 *Seja M uma variedade diferenciável e $\gamma(t)$ um caminho de M . γ é divergente se para cada compacto K de M , existe t_0 tal que $\gamma(t) \notin K$,se $t > t_0$.*

Definição 2.3 *Uma variedade riemanniana (M, ds^2) é completa se qualquer caminho divergente de M tem comprimento infinito.*

Definição 2.4 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ contínua. f é própria se a imagem inversa de qualquer subconjunto compacto de Y é um subconjunto compacto de X .*

Definição 2.5 *Sejam $X(M)$ uma superfície do $\mathbb{R}^3$ e $U \subset M$. $X(U)$ é um fim de $X(M)$ se existe uma parametrização local (V, ψ) de M tal que $V = \{q \in \mathbb{R}^2 / 0 < |q| < \epsilon\}$, $\psi(V) = U$ e para todo caminho $\gamma(t), t \in [0, 1)$*

em V tal que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t) = q$, $\psi(\gamma(t))$ tem comprimento infinito, relativamente à métrica riemanniana induzida por X sobre M .

Teorema 2.1 *Qualquer variedade diferenciável de dimensão 1 com bordo, conexa é difeomorfa ou ao círculo S^1 , ou a algum intervalo dos números reais.*

Demonstração: Ver [29].

Definição 2.6 *Sejam U e V variedades diferenciáveis, $W \subset V$ subvariedade de V , e $f : U \rightarrow V$ diferenciável. Dado $p \in U$, dizemos que f é transversal à W em p se (1) $f(p) \notin W$ ou (2) $f(p) \in W$ e $T_{f(p)}(V) = T_{f(p)}(W) + f_{*p}(T_p(U))$. f é transversal à W se f é transversal à W em p , para todo $p \in U$.*

Então temos:

Teorema 2.2 *Sejam U e V variedades diferenciáveis, $W \subset V$ subvariedade de V e $f : U \rightarrow V$ diferenciável transversal à W . Então, $f^{-1}(W)$ é uma subvariedade mergulhada de U e a codimensão de $f^{-1}(W)$ é igual a codimensão de W em V . Em particular, se a dimensão de U for igual à codimensão de W , $f^{-1}(W)$ consiste somente de pontos isolados.*

Demonstração: Ver [13].

Teorema 2.3 (Hopf-Rinow) *Seja M uma variedade riemanniana conexa. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- [i] M é completa.
- [ii] M é um espaço métrico completo, relativamente à métrica riemanniana de M .
- [iii] M é geodesicamente completa.
- [iv] Todo subconjunto fechado e limitado de M é compacto.

Demonstração: Ver [32].

Proposição 2.1 *Sejam W e Z espaços topológicos metrizáveis e $f : W \rightarrow Z$ contínua. Então, f é própria se, e somente se, a imagem $f(x_n)$ de toda sequência em W , sem subsequências convergentes, é uma sequência em Z , que também não possui subsequências convergentes.*

Demonstração: Ver [25].

Definição 2.7 $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva de Jordan se Φ for homeomorfa à S^1 .

Teorema 2.4 (da curva de Jordan) Seja Φ uma curva de Jordan do $\mathbb{R}^2$. Então:

- [i] $\mathbb{R}^2 - \Phi$ tem exatamente duas componentes conexas uma das quais é limitada e a outra é ilimitada.
- [ii] A fronteira de cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \Phi$ é Φ .

Demonstração: Ver [9]. □

Seja X um espaço topológico. Uma curva em X é qualquer função contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow X$. Ela é fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$. Dados $p \in \mathbb{R}^2$ e uma curva fechada $\alpha(s) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{p\}$ existe uma única $\varphi(s) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\varphi(a) = \varphi_0$,

$$\alpha(s) = p + \|\alpha(s) - p\|(\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)) = p + \rho(s)e^{i\varphi(s)} \quad (\forall s \in [a, b]),$$

onde $\rho(s) = \|\alpha(s) - p\|$ e $e^{it} = \cos t + i \sin t = (\cos t, \sin t)$. Neste caso, $n(\alpha, p) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}$ é um número inteiro, chamado de número de voltas de α ao redor de p e φ é uma função ângulo para α relativo à p . Se $\tilde{\varphi}$ é outra função ângulo para α relativa à p tal que $\tilde{\varphi}(a) = \tilde{\varphi}_0$ e $e^{i\tilde{\varphi}_0} = e^{i\varphi_0}$, então, $\tilde{\varphi} - \varphi = 2\kappa\pi$ onde $\kappa \in \mathbb{Z}$ e, então, $\frac{\tilde{\varphi}(b) - \tilde{\varphi}(a)}{2\pi} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}$. Portanto, $n(\alpha, p)$ está bem definido. Se $\alpha(s), \beta(s) : [a, b] \rightarrow X$ são curvas fechadas em um espaço topológico X , dizemos que elas são livremente homotópicas se existe $H(s, t) : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$ contínua tal que

$$H(s, 0) = \alpha(s), H(s, 1) = \beta(s) \quad (\forall s \in [a, b]), H(a, t) = H(b, t) \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

$H(s, t)$ é então, uma homotopia livre em X entre α e β .

Teorema 2.5 Sejam $p \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{p\}$, curvas fechadas em $\mathbb{R}^2 - \{p\}$. Então:

- (1) $n(\alpha, p) = n(\beta, p)$ se, e somente se, α e β são livremente homotópicas em $\mathbb{R}^2 - \{p\}$.
- (2) se $z = u + iv = (u, v), z_0 = p, \alpha$ é de classe C^1 por partes, $n(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0}$.

A demonstração do teorema e dos fatos mencionados acima podem se encontrados em [25]

2.2.1

Proposição 2.2 *Sejam $f(s), g(s) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que $f(s)^2 + g(s)^2 = 1$ ($\forall s$). Se $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ é tal que*

$$f(s_0) = \cos \varphi_0, g(s_0) = \sin \varphi_0, \varphi(s) = \varphi_0 + \int_a^s (fg' - f'g)(t)dt$$

é diferenciável então $f(s) = \cos \varphi(s), g(s) = \sin \varphi(s)$ ($\forall s$).

Demonstração: A derivada de $h(s) = (f(s) - \cos \varphi(s))^2 + (g(s) - \sin \varphi(s))^2$ é constantemente igual à zero e a tese é consequência imediata disto. $\square$

Então, se $\alpha(s) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é uma curva fechada diferenciável em

$$\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, \alpha(s) = (X_1(s), X_2(s)), f(s) = \frac{X_1(s)}{\sqrt{X_1(s)^2 + X_2(s)^2}},$$

$$g(s) = \frac{X_2(s)}{\sqrt{X_1(s)^2 + X_2(s)^2}}$$

$$f(a) = \cos \varphi_0, g(a) = \sin \varphi_0, \varphi(s) = \varphi_0 + \int_a^s (fg' - f'g)(t)dt$$

temos que $\alpha(s) = (\rho(s) \cos \varphi(s), \rho(s) \sin \varphi(s))$ onde $\rho(s) = \sqrt{X_1(s)^2 + X_2(s)^2}$. Se $F(s, t) = (1 - t)\alpha(s) + t\beta(s)$, onde $\beta(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ e $t \in [0, 1]$ é uma homotopia livre entre α e β em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, e então: $n(\alpha, 0) = n(\beta, 0)$, e $0 = (0, 0)$.

$$n(\beta, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b i\varphi'(s)ds = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}.$$

Teorema 2.6 *Seja Ω um aberto conexo do $\mathbb{R}^n$ e u uma função de classe C^2 em Ω cujo gráfico tem curvatura média nula. Então, $u \in C^\infty(\Omega)$ e para qualquer $y \in \Omega$ e qualquer multi-índice*

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n, |D^\beta u(y)| \leq C, \text{ onde} \\ D^\beta &= \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}, \\ C &= C(n, d, \sup_{n \in \Omega} |n|), d = \text{dist}(y, F_R \Omega). \end{aligned}$$

Demonstração: Ver [11].

2.2.2

Definição 2.8 *Sejam E, F espaços normados. $T : E \longrightarrow F$, operador linear, é compacto se:*

- (1) $T(B)$ é relativamente compacto em F , onde $B = \{x \in E / \|x\| \leq 1\}$, ou
- (2) toda sequência de pontos (x_n) , limitada, de E contém uma subsequência (x_{r_n}) tal que $T(x_{r_n})$ é convergente em F .

Dado um aberto conexo limitado U do $\mathbb{R}^n$ e $m \geq 0$, inteiro, seja $C^{(m)}(\overline{U}) = \{f \in C(\overline{U}) \cap C^{(m)}(U) / \text{para todo multi-índice } \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n \leq m, D^\beta f \text{ se prolonga continuamente a } \overline{U}\}$. Dado $f \in C^{(m)}(\overline{U})$,

$$\|f\|^{(m)} = \sup\{|D^\beta f(y)| / |\beta| \leq m, y \in \overline{U}\}.$$

Então, $(C^{(m)}(\overline{U}), \|\cdot\|^{(m)})$ é um espaço de Banach. Dado um aberto conexo limitado U do $\mathbb{R}^n$, dizemos que ele tem a propriedade C se para todo $x \in F_R U$, existem $a(x) \geq 1$ e $\epsilon(x) > 0$ tais que para todo $y \in \overline{U}$ com $\|x - y\| \leq \epsilon(x)$ existe uma curva retificável $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\{\gamma\} - \{x, y\} \subset U$, $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ e $L(\gamma) \leq a(x)\|x - y\|$, onde $L(\gamma)$ é comprimento de γ . Dizemos que U tem a propriedade $\overline{C}$ se existe $a = a(U) \geq 1$ tal que para todo $x, y \in \overline{U}$ existe uma curva retificável γ tal que $\{\gamma\} - \{x, y\} \subset U$ e $L(\gamma) \leq a(U)\|x - y\|$. Pode-se mostrar que todo aberto limitado conexo com fronteira $C^{(1)}$ tem a propriedade $\overline{C}$ e que todo aberto limitado convexo tem a propriedade $\overline{C}$.

Teorema 2.7 *Seja U um aberto conexo limitado do $\mathbb{R}^n$ que tem a propriedade C . Se $0 \leq q < m$ são inteiros,*

$$\begin{array}{ccc} C^{(m)}(\overline{U}) & \longrightarrow & C^{(q)}(\overline{U}) \text{ é compacta.} \\ f & \longrightarrow & f \end{array}$$

A demonstração deste teorema e os fatos mencionados acima podem ser encontrados em [17].

2.2.3

No que segue a menos de menção explícita, todas as superfícies consideradas são diferenciáveis de classe C^∞ . O termo diferenciável é sinônimo de diferenciável de classe C^∞ .

Figura 2.1: Parametrização de um fim da superfície

2.4.3

Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$. De acordo com o parágrafo anterior e o teorema 2.3, é suficiente mostrar que $(X \circ \varphi)^{-1}(K)$ é limitado relativamente a métrica induzida por $(X \circ \varphi)^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ em A . Isto pode ser feito mostrando-se que $(X \circ \varphi)^{-1}(C_r)$ é limitado, onde C_r é um cilindro sólido circular reto de raio r com geratriz paralela à v , e contendo K e $X \circ \varphi(\partial A)$ em seu interior.

2.4.4

Se π é um plano do $\mathbb{R}^3$ paralelo à v contendo o eixo do cilindro C_r , temos por (2.4.1) que π é transversal a $X \circ \varphi(U)$. Logo, se $\pi \cap (X \circ \varphi(U)) \neq \emptyset$, essa interseção é uma subvariedade 1-dimensional de $X \circ \varphi(U)$ pelo teorema 2.2. π também é transversal à $X \circ \varphi(\partial A)$. Logo, se $\pi \cap X \circ \varphi(\partial A) \neq \emptyset$, temos pelo teorema 2.2, que essa interseção consiste de pontos isolados e portanto de um número finito de pontos, pois $X \circ \varphi(\partial A)$ é compacto. Então, cada componente conexa de $\pi \cap X \circ \varphi(A) \neq \emptyset$ é uma variedade 1-dimensional que tem bordo vazio ou se ele não for vazio, seu bordo consiste de um ou dois pontos de $X \circ \varphi(\partial A)$ pelo teorema 2.1.

Figura 2.2: Secção de um fim cortado por um plano paralelo à v

2.4.5

Lema 2.1 *Seja Φ uma componente conexa de $X \circ \varphi(A) \cap \pi \neq \emptyset$, π o plano definido anteriormente e γ uma curva diferenciável regular em A tal que $\Phi = X \circ \varphi(\{\gamma\})$, onde $\{\gamma\}$ é a imagem de γ (ver teorema 2.1). Se (t, y) é um sistema de coordenadas no plano π , com origem em um ponto do eixo C_r , e eixos y e t paralelo e perpendicular à v , respectivamente, temos que Φ é o gráfico de uma função $y(t)$ e $|y'(t)| \leq \tan(\theta(t))$, onde $\cos\theta(t) = \langle N(t, y(t)), v \rangle$ e t pertence ao domínio de y .*

Demonstração:

$\gamma(s)$ é uma curva diferenciável regular em A , isto é, $\gamma'(s) \neq 0 \ (\forall s)$.
Sejam :

$$\eta(s) = X \circ \varphi(\gamma(s)) \text{ e } e_1 = \frac{\partial}{\partial t}, e_2 = v, e_3 = e_1 \times e_2,$$

$$\eta(s) = t(s)e_1 + y(s)e_2 = (t(s), y(s)),$$

$$N(s) = N \circ \varphi(\gamma(s)) = b_1(s)e_1 + b_2(s)e_2 + b_3(s)e_3.$$

De (2.4.1),

$$\langle N(s), v \rangle = b_2(s) = \cos(\theta(\gamma(s))) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.4.2)$$

Figura 2.3: Seção de um fim no caso em que π_p intercepta a fronteira

Mas, $\eta'(s) \times v = t'(s)e_3$, $t'(s)^2 + y'(s)^2 > 0$ e $\langle N(s), \eta'(s) \rangle = b_1(s)t'(s) + b_2(s)y'(s) = 0$. Então, $t'(s) = 0$ implicaria $b_2(s) = 0$ o que não é possível por (2.4.2). Logo, $t'(s) \neq 0 (\forall s)$ e $s = s(t)$. Então, $\eta(t) = \eta(s(t)) = (t, y(t)) (\forall t)$ e portanto $\eta(t)$ não é uma curva fechada e seu domínio, pelo teorema 2.1 é então um intervalo ou $\mathbb{R}$. Se for um intervalo, ele é semi-aberto ou fechado. Logo, $\eta'(t) = (1, y'(t))$. Se $N(t) = N(\eta(t)) = c_1(t)e_1 + c_2(t)e_2 + c_3(t)e_3 \implies \langle N(t), N(t) \rangle = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \iff \langle N(t), v \rangle = c_2(t) = \cos(\theta(t))$. Além disso, $N(t) \perp \eta'(t) \implies \langle N(t), \eta'(t) \rangle = c_1 + c_2 y' = 0 \implies |y'(t)| \leq \tan(\theta(t))$. $\square$.

2.4.6

Sejam C_r um cilindro circular reto como definido anteriormente, $p = X \circ \varphi(\tilde{p}) \in C_r \cap (X \circ \varphi)(A)$, π_p plano contendo p e o eixo de C_r , (x_1, x_2, x_3) sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^3$ tal que π_p é o plano xy e v é paralelo ao eixo y , Φ a componente conexa de $\pi_p \cap X \circ \varphi(A)$ que contem p e (t, y) sistema de coordenadas de π_p com origem em $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\frac{\partial}{\partial y} = v$ e t coincide com a coordenada x . Seja η como no parágrafo anterior. Então, $\eta(t) = (t, y(t), 0)$ e seja t_0 tal que $\eta(t_0) = p$, $\tilde{p} = \gamma(t_0)$ e $\gamma(t)$ tal

Figura 2.4: Secção de um fim no caso em que π_p não intercepta a fronteira

que $X \circ \varphi \circ \gamma = \eta$. Se existe t_1 tal que $\eta(t_1) \in X \circ \varphi(\partial A)$, sejam $L_{t_0, t_1}(\gamma)$, $L_{t_0, t_1}(\eta)$ os comprimentos das curvas $\gamma(t)$, $\eta(t)$ no intervalo que tem como extremos t_0 e t_1 . Então

$$\text{dist}(\tilde{p}, \partial A) \leq L_{t_0, t_1}(\gamma) = L_{t_0, t_1}(\eta) = \left| \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt \right| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + tg^2(\theta(t))} dt \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} |t_0 - t_1| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} (|t_0| + |t_1|) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} r < 4r$$

pelo lema 2.1. Se não existe t tal que $\eta(t) \in (X \circ \varphi)(\partial A)$, temos que o domínio de η é $(-\infty, \infty)$ pelo parágrafo 2.4.4 e pelo teorema 2.1. Seja então π_t o plano ortogonal a π_p , passando por $\eta(t)$ e paralelo à v . Pelo lema 2.1, se Φ_t é a componente conexa de $X \circ \varphi(A) \cap \pi_t$ que contém $\eta(t)$, Φ_t é o gráfico de uma função $y_t(z)$ (estamos supondo que π_p é paralelo ao plano coordenado (x, y)), isto é, $\eta_t(z) = (t, y_t(z), z)$, onde $\eta_t(z)$ é uma curva cuja imagem é Φ_t . Observe que $\eta_t(0) = \eta(t)$. Seja $t_2 = \max\{t \in \mathbb{R} / (t, y, z) \in X \circ \varphi(\partial A)\}$. Então, $\pi_{t_2} \cap X \circ \varphi(\partial A) \neq \emptyset$ e seja $q = X \circ \varphi(\tilde{q}) \in \pi_{t_2} \cap X \circ \varphi(\partial A)$. Seja $\gamma_{t_2}(z)$ curva em A tal que $X \circ \varphi \circ \gamma_{t_2} = \eta_{t_2}$ e z_0 tal que $\eta_{t_2}(z_0) = q$. Sejam α curva constituída pela restrição de η_{t_2} ao intervalo que tem como extremos z_0 e 0 seguida da restrição de η ao intervalo que tem como extremos t_2 e t_0

e σ tal que $X \circ \varphi(\sigma) = \alpha$. Então, se $L(\alpha)$ e $L(\sigma)$ são respectivamente o comprimento de α e σ , $L_{t_0, t_2}(\gamma)$ comprimento de γ restrita ao intervalo de extremos t_0, t_2 e $L_{z_0, 0}(\gamma_{t_2})$ comprimento de γ_{t_2} restrita ao intervalo com extremos z_0 e 0 , temos:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\tilde{p}, \partial A) &\leq L(\sigma) = L_{t_0, t_2}(\gamma) + L_{z_0, 0}(\gamma_{t_2}) = L_{t_0, t_2}(\eta) + L_{z_0, 0}(\eta_{t_2}) \leq \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}}(|t_0| + |t_2|) + \frac{2}{\sqrt{3}}|z_0| \leq 4r + 2r = 6r \end{aligned}$$

Logo, $(X \circ \varphi)^{-1}(C_r)$ é limitado e, então X é própria.

2.5 Demonstração do item (ii) do Teorema

2.5.1

Lema 2.2 *Sejam $(U, \varphi), A, \partial A, v$ definidos anteriormente, $Y = X \circ \varphi$, $d_0 = \sup_{p \in Y(\partial A)} |p|$, d_1 igual ao diâmetro de $Y(\partial A)$. Se π é um plano paralelo à v , tal que $\pi \cap Y(\partial A) \neq \emptyset$ e Φ é uma componente conexa limitada de $\pi \cap Y(A)$, então $\|q\| < d_0 + 2d_1$ se $q \in \Phi$.*

Demonstração:

Sejam (t, y) coordenadas ortogonais em π tal que o eixo y é paralelo à v . Se $\eta(t) = (t, y(t))$ é uma curva diferenciável tal que sua imagem $\{\eta\}$ coincide com Φ , temos que $a \leq t \leq b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, e $\eta(a), \eta(b) \in Y(\partial A)$, do parágrafo 2.4.4 e do teorema 2.1. Seja $L(\eta)$ o comprimento de η . Pelo lema 2.1, temos:

$$\begin{aligned} L(\eta) &= \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2} dt \leq \int_a^b \sqrt{1 + tg(\theta(t))^2} dt \leq \frac{2}{\sqrt{3}}(b - a) \leq \\ &\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(b - a)^2 + (y(b) - y(a))^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \|\eta(b) - \eta(a)\| < 2\|\eta(b) - \eta(a)\| \leq 2d_1 \end{aligned}$$

Como $\|\eta(t) - \eta(a)\| \leq L(\eta) (\forall t)$, $\|\eta(t)\| \leq \|\eta(a)\| + 2d_1 \leq d_0 + 2d_1$.

2.5.2

Seja $r_0 \geq d_0 + 2d_1$. Então, para $r > r_0$, $Y(\partial A) \subset B_r(0) \cap C_r$, onde $B_r(0) = \{p \in \mathbb{R}^3 / |p| < r\}$ e C_r é o cilindro circular reto sólido, centrado na origem O de $\mathbb{R}^3$, com raio r e geratriz paralela à v . Como

X é própria, $\lim_{|z| \rightarrow 0} \|Y(z)\| = \infty$, pela proposição 2.1. Da compacidade de $Y^{-1}(C_r)$, $r_1 = \sup\{\|Y(z)\| / z \in Y^{-1}(C_r)\} < \infty$. Seja, então, $0 < \rho < \epsilon$, tal que $Y(z) \in \mathbb{R}^3 - C_r$, se $|z| \leq \rho$. A conexão de $Y(A)$ implica que existe $p \in Y(A) \cap \partial C_r$.

2.5.3

Lema 2.3 Se $p \in Y(A) \cap \partial C_r$ e $Y(z) = p$, então $|\langle \frac{Y(z)}{\|Y(z)\|}, v \rangle| < \frac{r_1}{r}$

Demonstração:

Sejam π o plano passando pela origem O de $\mathbb{R}^3$, por p e paralelo à v , e $\eta(t) = (t, y(t))$ uma curva diferenciável tal que sua imagem $\{\eta\}$ é a componente conexa de $\pi \cap Y(A)$ que contém p . (Como, $Y(\partial A)$ está contido no interior de C_{r_0} , temos do parágrafo 2.4.4 que ou r_0 ou $-r_0$ pertence ao domínio de η). Também, $\eta(\pm r) = (\pm r, y(\pm r)) = p$. Podemos supor que $p = \eta(r) = (r, y(r))$. Então:

$$|\langle \frac{Y(z)}{\|Y(z)\|}, v \rangle| = \frac{|y(r)|}{\sqrt{r^2 + y^2(r)}} \leq \frac{|y(r)|}{r} < \frac{\sqrt{r^2 + y^2(r)}}{r} \leq \frac{r_1}{r}$$

2.5.4

Seja $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(z) = \|Y(z)\|^2$. Como Y e a aplicação $p \rightarrow \|p\|^2$ são próprias, h é própria. Então, $h(z) \rightarrow \infty \iff \|z\| \rightarrow 0$. Por outro lado, dado $z \in U$ e $u \in \mathbb{R}^2$, $h_{**}(u) = 2\langle Y_{**}(u), Y(z) \rangle$. Então, $h_{**} = 0 \iff \frac{Y(z)}{\|Y(z)\|} = \pm N(z)$. Logo,

$$|\langle \frac{Y(z)}{\|Y(z)\|}, v \rangle| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ se } z \in A \text{ e } h_{**} = 0 \quad (2.5.3)$$

Seja $(0, x_1, x_2, x_3)$ sistema ortogonal de coordenadas que tem o eixo x_3 paralelo à v . Então, $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, p_3)/p_3 \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{r>0} \partial C_r$, onde C_r é o cilindro circular reto sólido de raio r e geratriz paralela à v . Seja $r_2 > 0$ tal que $\frac{r_1}{r_2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\epsilon \geq \rho_2 > 0$ tal que $|z| < \rho_2 \implies Y(z) \in \partial C_r$ com $r \geq r_2$. Portanto, o lema 2.3 implica que $|\langle \frac{Y(z)}{\|Y(z)\|}, v \rangle| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ se $|z| < \rho_2$. Então, $|z| < \rho_2 \implies h_{**} \neq 0$ por (2.5.3). Seja $r_3 > r_2 > 0$ tal que $|z| < \rho_2$ se $h(z) > r_3^2$. Então, $r > r_3$ e $z \in h^{-1}(r^2)$ implica que $h(z) = r^2 > r_3^2$ e então $|z| < \rho_2$. Logo, $h_{**} \neq 0$ ($\forall z \in h^{-1}(r^2)$), isto é, r^2 é um

valor próprio de h . Então, $h^{-1}(r^2)$ é uma variedade 1-dimensional mergulhada compacta, fechada de U .

2.5.5

Lema 2.4 $h^{-1}(r^2)$ é conexa e contém $(0,0)$ na região limitada de $\mathbb{R}^2$ que tem $h^{-1}(r^2)$ como bordo.

Demonstração:

Suponhamos que existe componente conexa Γ_1 de $h^{-1}(r^2)$ tal que $(0,0)$ não pertença a seu interior. Então h é constante em seu interior ou assume um máximo ou mínimo em seu interior, o que não pode ocorrer pelo parágrafo anterior. Logo, $(0,0)$ pertence ao interior de todas componentes conexas de $h^{-1}(r^2)$. Se houver mais de uma componente conexa, pelo mesmo argumento anterior, h teria um ponto crítico na região entre as componentes conexas, o que é absurdo. Logo $h^{-1}(r^2)$ possui apenas uma componente conexa com $(0,0)$ na região limitada de $\mathbb{R}^2$ que tem $h^{-1}(r^2)$ como bordo.

2.5.6

Seja $\gamma : S^1 \rightarrow h^{-1}(r^2)$ um difeomorfismo entre S^1 e $h^{-1}(r^2)$. Então, $Y \circ \gamma$ é uma curva diferenciável imersa fechada em $Y(A)$ cuja imagem coincide com $Y(A) \cap S_r^2(0)$. Então, $\frac{1}{r}(Y(A) \cap S_r^2(0))$ é uma curva diferenciável imersa fechada em $S_1^2(0)$.

2.6 Demonstração do item (iii) do teorema

2.6.1

Sejam $C_r, S^2(r), r_3, h_z, Y$, definidas anteriormente, e $r_4 > r_3$.

Se $r > r_4$, indiquemos por $\gamma_r(s)$ uma curva diferenciável fechada mergulhada em A tal que $\{\gamma_r\} = h^{-1}(r^2)$ e seja $\beta_r = Y_0 \gamma_r$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $s \in [0, 1], \gamma_r(0) = \gamma_r(1)$ e que $n(\gamma_r, 0) = 1$, onde $0 = (0, 0)$.

Dado s , sejam π_s o plano que contém $\beta_r(s)$ e o eixo de C_r e (x, y, z) um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ tal que π_s é o plano xy . Em π_s consideremos $(0, t, y)$ sistema ortogonal de coordenadas, tendo o eixo y paralelo à v , e seja $\eta_s(t) = (t, y_s(t))$ curva diferenciável tal que $\{\eta_s\}$ é a componente conexa de $\pi_s \cap Y(A)$, que contém $\beta_r(s)$ e seja $t_s > 0$, tal que $\eta_s(t_s) = \beta_r(s)$. Como $\|\eta_s(t_s)\| =$

$r > r_4$, e $r_4 > d_0 + 2d_1$, temos que $\{\eta_s\}$ não é limitado e o domínio de η_s contém r_0 ou $-r_0$.

Indiquemos por $z_s(t)$ a curva diferenciável em A tal que $Y(z_s(t)) = \eta_s(t)$.

2.6.2

Lema 2.5 *Dado $\epsilon > 0$ existe $r_5 > r_4$, independente de s , tal que*

$$\left| \left\langle \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}, v \right\rangle \right| = \sup_s \left| \left\langle \frac{\beta_r(s)}{\|\beta_r(s)\|}, v \right\rangle \right| < \epsilon \quad \text{se } r > r_5 .$$

Demonstração:

Uma vez que $\lim_{|z| \rightarrow 0} \tan \theta(z) = 0$ e $|z| \rightarrow 0 \iff \|Y(z)\| \rightarrow \infty$ temos que existem $0 < \rho_3 < \rho_2$ e $r'_4 > r_4$ tal que: $\|Y(z)\| > r'_4 \implies |z| < \rho_3$ e, $\tan \theta(z) < \frac{\epsilon}{2}$.

Mas,

$$\left| \left\langle \frac{\beta_r(s)}{\|\beta_r(s)\|}, v \right\rangle \right| = \left| \left\langle \frac{\eta_s(t_s)}{r}, v \right\rangle \right| = \frac{|y_s(t_s)|}{r} .$$

Porém, $r^2 = (t_s)^2 + y_s(t_s)^2$ e pelo lema 2.3 $\frac{|y_s(t_s)|}{r} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, se $r > r_3$, implicam $\frac{r}{2} \leq t_s \leq r$. Então, tomando-se b fixo tal que $b > r'_4, b < t_s$ tem-se que

$$\begin{aligned} |y_s(t_s) - y_s(\pm r_0)| &= \left| \int_{\pm r_0}^b y'_s(t) dt + \int_b^{t_s} y'_s(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| + \int_b^{t_s} |y'_s(t)| dt \\ &\leq \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| + \int_b^{t_s} \tan \theta(z_s(t)) dt \\ &\leq \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| + \frac{\epsilon}{2}(t_s - b) \leq \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| + \frac{\epsilon}{2}(r - b) \end{aligned}$$

Logo:

$$|y_s(t_s)| \leq |y_s(\pm r_0)| + \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| + \frac{\epsilon}{2}(r - b) \leq r_1 + \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| + \frac{\epsilon}{2}(r - b) .$$

Então:

$$\left| \left\langle \frac{\beta_r(s)}{\|\beta_r(s)\|}, v \right\rangle \right| \leq \frac{r_1}{r} + \frac{1}{r} \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| + \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{b}{r} \right) < \frac{r_1}{r} + \frac{1}{r} \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| + \frac{\epsilon}{2} .$$

Então, existe $r_5 > r'_4$ tal que $\frac{r_1}{r} + \frac{1}{r} \left| \int_{\pm r_0}^b |y'_s(t)| dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$ se $r > r_5$.
Portanto:

$$\left| \left\langle \frac{\beta_r(s)}{\|\beta_r(s)\|}, v \right\rangle \right| < \epsilon \quad (\forall s), \quad \text{se } r > r_5. \quad \text{Isto prova o lema .}$$

□

2.6.3

Lema 2.6 *Existe $r_6 > r_5$ tal que $\left[\frac{\beta_r(s)}{r}, \frac{\beta'_r(s)}{r}, v \right] \neq 0 \quad (\forall s)$, se $r > r_6$, onde $[, ,]$ é o produto misto .*

Demonstração:

Seja

$$r > r_5, e_1(s) = \frac{\beta'_r(s)}{\|\beta'_r(s)\|}, e_3(s) = N(\beta_r(s)) = N_r(s), e_2(s) = e_3(s) \times e_1(s) .$$

Então,

$$\begin{aligned} \beta_r(s) &= \langle \beta_r(s), e_2(s) \rangle e_2(s) + \langle \beta_r(s), e_3(s) \rangle e_3(s) \\ \beta'_r(s) &= \langle \beta'_r(s), e_1(s) \rangle e_1(s) \\ v &= \langle v, e_1(s) \rangle e_1(s) + \langle v, e_2(s) \rangle e_2(s) + \langle v, e_3(s) \rangle e_3(s) , \end{aligned}$$

uma vez que $\langle \beta_r(s), \beta_r(s) \rangle = r^2 \quad (\forall s)$, e, então, $\langle \beta'_r(s), \beta_r(s) \rangle = 0 \quad (\forall s)$.

Então:

$$\left[\frac{\beta_r(s)}{r}, \frac{\beta'_r(s)}{r}, v \right] = \left\| \frac{\beta'_r(s)}{r} \right\| \left[\left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_3(s) \right\rangle \langle v, e_2(s) \rangle - \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_2(s) \right\rangle \langle v, e_3(s) \rangle \right] .$$

Mas,

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} N(Y(z)) = v, \|\beta_r(s)\| = r \quad \text{e} \quad \|Y(z)\| \rightarrow +\infty \iff |z| \rightarrow 0 .$$

Então, se $|\langle v, e_3 \rangle| = \sup_s |\langle v, e_3(s) \rangle|$, temos que:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |\langle v, e_3 \rangle| = \lim_{r \rightarrow +\infty} |\langle v, N_r \rangle| = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} |\langle v, e_1 \rangle| = \lim_{r \rightarrow +\infty} |\langle v, e_2 \rangle| = 0 .$$

O lema 2.5 implica que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \left\langle \frac{\beta_r}{r}, v \right\rangle \right| = 0$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_3(s) \right\rangle &= \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, N_r(s) - v \right\rangle + \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, v \right\rangle \Rightarrow \\ \left| \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_3(s) \right\rangle \right| &\leq \left| \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, N_r(s) - v \right\rangle \right| + \left| \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, v \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| \frac{\beta_r(s)}{r} \right\| \|N_r(s) - v\| + \left| \left\langle \frac{\beta_r}{r}, v \right\rangle \right| \end{aligned}$$

Mas, $\lim_{r \rightarrow \infty} \|N_r - v\| = 0$, onde $\|N_r - v\| = \sup_s \|N_r(s) - v\|$
Então,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_3(s) \right\rangle \right| &\leq \|N_r - v\| + \left| \left\langle \frac{\beta_r}{r}, v \right\rangle \right| (\forall s) \Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \left\langle \frac{\beta_r}{r}, e_3 \right\rangle \right| = 0 \\ \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, \frac{\beta_r(s)}{r} \right\rangle &= 1 = \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_2(s) \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_3(s) \right\rangle^2 \\ &\Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \left\langle \frac{\beta_r}{r}, e_2 \right\rangle \right| = 1 . \end{aligned}$$

Então,

$$\left[\left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_3(s) \right\rangle \left\langle v, e_2(s) \right\rangle - \left\langle \frac{\beta_r(s)}{r}, e_2(s) \right\rangle \left\langle v, e_3(s) \right\rangle \right] \neq 0 (\forall s) .$$

Como $\left\| \frac{\beta'_r(s)}{r} \right\| \neq 0 (\forall s)$, o lema está provado. $\square$

2.6.4

Sejam (O, x_1, x_2, x_3) sistema de coordenadas ortogonais do $\mathbb{R}^3$, com origem em $O = (0, 0, 0)$, tendo o eixo x_3 , paralelo à v ,

$$\sigma_r(s) = \frac{1}{r} \beta_r(s) = (x_1^r(s), x_2^r(s), x_3^r(s)) ,$$

e $\hat{\sigma}_r(s) = (x_1^r(s), x_2^r(s), 0)$.

Se $r > r_6$,

$$\rho_r(s) = \sqrt{x_1^r(s)^2 + x_2^r(s)^2} > 0 (\forall s) .$$

Então, pondo $f(s) = \frac{x_1^r(s)}{\rho_r(s)}$, $g(s) = \frac{x_2^r(s)}{\rho_r(s)}$, seja φ_0^r tal que

$$f(s_0) = \cos \varphi_0^r \text{ e } g(s_0) = \sin \varphi_0^r .$$

Então,

$$\varphi_r(s) = \varphi_0^r + \int_0^s [f(u)g'(u) - f'(u)g(u)]du$$

é diferenciável e $f(s) = \cos \varphi_r(s), g(s) = \sin \varphi_r(s) (\forall s)$.

Então, $\sigma_r(s) = (\rho_r(s) \cos \varphi_r(s), \rho_r(s) \sin \varphi_r(s), x_3^r(s))$.

Mas, $[\sigma_r(s), \sigma_r'(s), v] = -\rho_r(s)^2 \varphi_r'(s) (\forall s)$.

Então, pelo lema 2.6, $\varphi_r'(s) \neq 0 (\forall s)$. Então, $s = s(\varphi_r)$, onde $\varphi_0^r \leq \varphi_r \leq a_r$.

Sejam

$$\xi_r(\varphi_r) = \sigma_r(s(\varphi_r)), \hat{\xi}_r(\varphi_r) = \hat{\sigma}_r(s(\varphi_r)), \alpha_r(\varphi_r) = (\cos \varphi_r, \sin \varphi_r, 0) .$$

Mas,

$$\langle \xi_r(\varphi_r), \xi_r(\varphi_r) \rangle = \langle \xi_r(\varphi_r), \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle^2 + \langle \xi_r(\varphi_r), \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle^2 + \langle \xi_r(\varphi_r), \frac{\partial}{\partial x_3} \rangle^2 = 1 .$$

Dado $0 < \epsilon < 1$, existe $r_7 > r_6$ tal que $|\langle \xi_r, \frac{\partial}{\partial x_3} \rangle| = |\langle \frac{\beta_r}{r}, v \rangle| < \epsilon$.

Então,

$$\|\hat{\xi}_r\|^2 = \sup_{\varphi_r} \|\hat{\xi}_r(\varphi_r)\|^2 > 1 - \epsilon^2 .$$

Isto é, $\|\hat{\xi}_r\| > \sqrt{1 - \epsilon^2}$.

Mas, então, $F(\varphi_r, t) = (1 - t)\hat{\xi}_r(\varphi_r) + t\alpha_r(\varphi_r), t \in [0, 1]$, é uma homotopia livre entre $\hat{\xi}$ e α_r em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Então, $n(\hat{\xi}_r, 0) = n(\alpha_r, 0) = m$.

Por outro lado, se $r, r' > r_7$, $\gamma_r(s)$ e $\gamma_{r'}(s)$ são homotópicas livremente em $A - \{0\}$, pois $n(\gamma_r, 0) = n(\gamma_{r'}, 0) = 1$. Seja, $H(s, t)$ uma homotopia livre entre γ_r e $\gamma_{r'}$ em $A - \{0\}$. Então, se $G(s, t) = \frac{Y(H(s, t))}{\|Y(H(s, t))\|}$, $G(\hat{s}, t)$ é uma homotopia livre entre $\hat{\sigma}_r$ e $\hat{\sigma}_{r'}$ em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, onde $\hat{p} = (p_1, p_2, 0)$ se $p = (p_1, p_2, p_3)$.

Então, $n(\hat{\sigma}_r, 0) = n(\hat{\sigma}_{r'}, 0)$, isto é: $n(\hat{\xi}_r, 0) = n(\hat{\xi}_{r'}, 0)$.

Então, $m = n(\hat{\xi}_r, 0)$ se $r > r_7$.

Mas, $m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_r} \frac{dz}{z} = \int_{\varphi_0^r}^{a_r} d\varphi_r = \frac{1}{2\pi} (a_r - \varphi_0)$.

Logo: $a_r = \varphi_0 + 2\pi m$.

Podemos, então, supor que $\varphi_0 = 0, \varphi_r = \varphi$ onde $0 \leq \varphi \leq 2\pi m$, se $r > r_7$.

Seja, então, $\alpha = \alpha_r$.

Então, $(\forall r > r_7) \xi_r(\varphi) = (\rho_r(\varphi) \cos \varphi, \rho_r(\varphi) \sin \varphi, x_3^r(\varphi)), 0 \leq \varphi \leq 2\pi m$. Seja, então, $h(\varphi) = x_3^r(\varphi), k(\varphi) = \rho_r(\varphi)$. Então, $h(\varphi)^2 + k(\varphi)^2 = 1 (\forall \varphi)$. Sendo ψ_0^r tal que $h(0) = \cos \psi_0^r, k(0) = \sin \psi_0^r$, e

$$\psi_r(\varphi) = \psi_0^r + \int_0^\varphi [h(v)k'(v) - h'(v)k(v)]dv$$

temos que $h(\varphi) = \cos \psi_r(\varphi)$, $k(\varphi) = \sin \psi_r(\varphi)$ ($\forall \varphi$), e

$$\xi_r(\varphi) = (\cos \varphi \sin \psi_r(\varphi), \sin \varphi \sin \psi_r(\varphi), \cos \psi_r(\varphi)) ,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi m; \quad 0 < \psi_r(\varphi) < \pi.$$

2.6.5

$\xi_r(\varphi) = \sin \psi_r(\varphi) \alpha(\varphi) + \cos \psi_r(\varphi) v$ ($\forall \varphi$). Então,

$$\|\xi_r(\varphi) - \alpha(\varphi)\|^2 = (\sin \psi_r(\varphi) - 1)^2 + \cos^2 \psi_r(\varphi)$$

Porém, $\langle \xi_r(\varphi), v \rangle = \cos \psi_r(\varphi)$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} |\langle \xi_r, v \rangle| = 0$.

Então, $\lim_{r \rightarrow +\infty} |\cos \psi_r| = 0$. Ou seja, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_r = \frac{\pi}{2}$.

Então, $\lim_{r \rightarrow +\infty} (\sin \psi_r - 1)^2 = 0$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|\xi_r - \alpha\| = 0$.

2.6.6

$$\xi'_r(\varphi) = \psi'_r(\varphi) \cos \psi_r(\varphi) \alpha(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha'(\varphi) - \psi'(\varphi) \sin \psi_r(\varphi) v$$

Então, $\|\xi'_r(\varphi) - \alpha'(\varphi)\|^2 = \psi_r'^2 + (\sin \psi_r(\varphi) - 1)^2$ ($\forall \varphi$).

Por outro lado, $\|\xi'_r\|^2 = \psi_r'^2 + \sin^2 \psi_r(\varphi)$.

Então,

$$\left| \left\langle \frac{\xi'_r}{\|\xi'_r\|}, \alpha(\varphi) \right\rangle \right| = \left| \frac{\psi'_r(\varphi) \cos \psi_r(\varphi)}{\sqrt{\psi_r'^2 + \sin^2 \psi_r(\varphi)}} \right| \leq \cos \psi_r(\varphi) .$$

Logo, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \left\langle \frac{\xi'_r}{\|\xi'_r\|}, \alpha \right\rangle \right| = 0$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} [\langle \frac{\xi'_r}{\|\xi'_r\|}, \alpha' \rangle^2 + \langle \frac{\xi'_r}{\|\xi'_r\|}, v \rangle^2] = 1$.

Mas,

$$\left\langle \frac{\xi'_r(\varphi)}{\|\xi'_r(\varphi)\|}, v \right\rangle = \left\langle \frac{\xi'_r(\varphi)}{\|\xi'_r(\varphi)\|}, v - N_r(\varphi) \right\rangle$$

e, então, $\left| \left\langle \frac{\xi'_r(\varphi)}{\|\xi'_r(\varphi)\|}, v \right\rangle \right| \leq \|v - N_r(\varphi)\|$.

Mas, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|v - N_r\| = 0$.

Então, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \left\langle \frac{\xi'_r}{\|\xi'_r\|}, v \right\rangle \right| = 0$.

Logo: $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \left\langle \frac{\xi'_r}{\|\xi'_r\|}, \alpha' \right\rangle \right| = 1$.

Então,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \left\langle \frac{\xi'_r}{\|\xi'_r\|}, v \right\rangle \right| = \lim_{r \rightarrow +\infty} (|\psi'_r| \sin \psi_r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} |\psi'_r| = 0 .$$

Então, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|\xi'_r - \alpha'\| = 0$.

Isto conclui a demonstração do item (iii). $\square$

2.7 Demonstração do item (iv) do teorema

2.7.1

Seja (O, x_1, x_2, x_3) sistema de coordenadas ortogonais, onde O é a origem do $\mathbb{R}^3$ e o eixo x_3 é paralelo à v . Sejam

$$\Omega = \{p = (p_1, p_2, 0) / \frac{1}{2} \leq \|p\| < 2\} \text{ e } M_r = (\frac{1}{r}Y(A)) \cap (\Omega \times \mathbb{R}).$$

Indicando-se por (ρ, φ, x_3) coordenadas cilíndricas para o $\mathbb{R}^3$, seja $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, $r_8 > r_7$ e $\tilde{\Delta} = \{(\rho, \varphi) / |\varphi - \varphi_0| < \delta < 2\pi, \rho > r_8\}$. Então, devido ao fato de que $\langle N(p), v \rangle \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ se $p \in Y(A)$ e π é a projeção sobre o plano xy , temos que $Y(A) \cap \pi^{-1}(\tilde{\Delta})$ é o gráfico de uma função $f(p_1, p_2), (p_1, p_2, 0) \in \tilde{\Delta}$, que é diferenciável pela forma local das submersões.

2.7.2

Dado $\lambda > r_8$, seja

$$\begin{aligned} \beta_\lambda(\varphi) &= (x_1^\lambda(\varphi), x_2^\lambda(\varphi), x_3^\lambda(\varphi)) \\ &= (\lambda \cos \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \lambda \sin \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \lambda \cos \psi_\lambda(\varphi)), \varphi \in (\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta), \end{aligned}$$

onde $\{\beta_\lambda\} \subset Y(A) \cap S^2(\lambda)$. Então,

$$\frac{1}{r}\beta_\lambda(\varphi) = (\frac{\lambda}{r} \cos \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda(\varphi))$$

e $\frac{x_1^\lambda(\varphi)^2 + x_2^\lambda(\varphi)^2}{r^2} = \frac{\lambda^2}{r^2} \sin^2 \psi_\lambda(\varphi)$. Então, indicando-se por $\rho_\lambda, \left[\frac{x_1^\lambda(\varphi)^2}{r^2} + \frac{x_2^\lambda(\varphi)^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$,

temos que $\frac{1}{r}\beta_\lambda(\varphi) \in M_r$ se, e somente se, $\frac{1}{2} \leq \rho_\lambda \leq 2$, isto é $\frac{1}{2} \leq \frac{\lambda}{r} \sin \psi_\lambda(\varphi) \leq 2$, ou seja $\frac{r}{2} \leq \lambda \sin \psi_\lambda(\varphi) \leq 2r$. Mas, se $r_8 < \frac{r}{2}$ temos que

$$\begin{aligned} \beta_\lambda(\varphi) &= (\lambda \cos \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \lambda \sin \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \lambda \cos \psi_\lambda(\varphi)) \\ &= (x_1^\lambda(\varphi), x_2^\lambda(\varphi), f(x_1^\lambda(\varphi), x_2^\lambda(\varphi))), \end{aligned}$$

onde $\sqrt{1 - \epsilon^2} \leq \sin \psi_\lambda(\varphi) \leq 1$, pelo parágrafo 2.6.4 Sendo $\Delta' = \{(p_1, p_2, 0) / \frac{1}{2} < \rho < 2, |\varphi - \varphi_0| < \delta < 2\pi\}$, consideremos Δ o maior aberto convexo contido

em Δ' . Temos que M_r é o gráfico de $f_r(x_1, x_2) = \frac{1}{r}f(rx_1, rx_2)$ sobre Δ . Mas, $\|(p_1, p_2, 0)\| > r_8$ implica que

$$[1 + f_{x_1}^2(p)^2]f_{x_1x_2}(p) - 2f_{x_1}(p)f_{x_2}(p)f_{x_1x_2}(p) + [1 + f_{x_2}(p)^2]f_{x_1x_1}(p) = 0 ,$$

onde $p = (p_1, p_2, 0)$. Como

$$\begin{aligned} (f_r)_{x_1} &= f_{x_1}, (f_r)_{x_2} = f_{x_2}, (f_r)_{x_1x_1} = rf_{x_1x_1} , \\ (f_r)_{x_1x_2} &= rf_{x_1x_2}, (f_r)_{x_2x_2} = rf_{x_2x_2} \text{ temos que} \end{aligned}$$

$$[1 + (f_r)_{x_1}^2](f_r)_{x_2x_2} - 2(f_r)_{x_1}(f_r)_{x_2}(f_r)_{x_1x_2}[1 + (f_r)_{x_2}^2](f_r)_{x_1x_1} = 0$$

f_r e $D^\beta f_r$ se estendem continuamente a $\overline{\Delta}$ e existe $C_r > 0$ tal que $\|D^\beta f_r\| \leq C_r$ ($\forall \beta \in \mathbb{N}^2$). Porém se, $r', r > 2r_8, r' > r, f_{r'} = \frac{1}{r'}f = \frac{r}{r'}\frac{1}{r}f = \frac{r}{r'}f_r$. Então, usando-se a estimativa interior para o gradiente de uma solução da equação da superfície mínima de De Giorgi, pode-se mostrar que $\|D^\beta f_{r'}\|$ é limitada em $\overline{\Delta}$ para $r' > r$. Ver [11], página 347. Então, se $r_9 \geq 2r_8, (f_r)_{r > r_9}$ é uma família de funções limitadas em

$$C^{|\beta|}(\overline{\Delta}) \ (\forall \beta) .$$

Dado $j \geq 1$, inteiro,

$$\begin{aligned} C^j(\overline{\Delta}) &\hookrightarrow C^{j-1}(\overline{\Delta}) \\ h &\longrightarrow h \end{aligned}$$

é compacta. $A = \{f_r/r \geq r_9\} \subset C^j(\overline{\Delta})$ ($\forall j$) e uma vez que qualquer sequência de A admite uma subsequência que converge em $C^{j-1}(\overline{\Delta})$ temos que existe $f \in C^{j-1}(\overline{\Delta})$ tal que $f_j \xrightarrow{C^{j-1}(\overline{\Delta})} f$. Como isto vale para qualquer $j \geq 1, f_j \xrightarrow{C^\infty(\overline{\Delta})} f$.

2.7.3

Uma vez que

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, f_r(x_1, x_2)) &= \frac{\beta_\lambda(\varphi)}{r} \\ &= \left(\frac{\lambda}{r} \cos \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda(\varphi) \right) , \end{aligned}$$

temos que $f_r(x_1, x_2) = \frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda(\varphi)$. Mas: $\frac{r}{2} \leq \lambda \sin \psi_\lambda(\varphi) \leq 2r$ e $\sin \psi_\lambda(\varphi) > \sqrt{1 - \epsilon^2}, 0 < \epsilon < 1$, implicam que: $\frac{r}{2} \leq \lambda \leq \frac{2r}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$ e então:

$$|f_r(x_1, x_2)| = \frac{\lambda |\cos \psi_\lambda(\varphi)|}{r} \leq \frac{2r}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \frac{1}{r} |\cos \psi_\lambda(\varphi)| = \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} |\cos \psi_\lambda(\varphi)| .$$

Mas, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |\cos \psi_\lambda| = 0$. E, $r \rightarrow +\infty$ implica que $\lambda \rightarrow +\infty$. Então

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |f_r| = 0. \text{ Isto é: } f_r \xrightarrow{cj(\bar{\Delta})} 0 \quad (\forall j).$$

Portanto, $f_r \xrightarrow{c^\infty(\bar{\Delta})} 0 \quad (\forall j)$.

2.7.4

(a) $\xi_r(\varphi) = \sin \psi_r(\varphi) \alpha(\varphi) + \cos \psi_r(\varphi) v \quad (\forall \varphi)$ (ver parágrafo 2.6.5).

Então:

$$\begin{aligned} \xi'_r(\varphi) &= \cos \psi_r(\varphi) \psi'_r(\varphi) \alpha(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha'(\varphi) - \sin \psi_r(\varphi) \psi'_r(\varphi) v = \\ &= \psi'_r(\varphi) [\cos \psi_r(\varphi) \alpha(\varphi) - \sin \psi_r(\varphi) v] + \sin \psi_r(\varphi) \alpha'(\varphi) = \\ &= \psi'_r(\varphi) \wedge_{11}(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha'(\varphi), \text{ onde } \wedge_{11} = \cos \psi_r(\varphi) \alpha(\varphi) - \sin \psi_r(\varphi) v. \\ \xi''_r(\varphi) &= \psi''_r(\varphi) \wedge_{11}(\varphi) + \psi'_r(\varphi) \wedge'_{11}(\varphi) + \cos \psi_r(\varphi) \psi'_r(\varphi) \alpha'(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha''(\varphi) = \\ &= \psi''_r(\varphi) \wedge_{11}(\varphi) + \psi'_r(\varphi) \wedge_{12}(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha''(\varphi), \\ &\text{onde } \wedge_{12}(\varphi) = \wedge'_{11}(\varphi) + \cos \psi_r(\varphi) \alpha'(\varphi) \\ \xi'''_r(\varphi) &= \xi^{(3)}(\varphi) = \psi_r^{(3)} \wedge_{11}(\varphi) + \psi_r^{(2)}(\varphi) \wedge_{11}^{(1)}(\varphi) + \psi_r^{(2)}(\varphi) \wedge_{12}(\varphi) + \\ &\quad + \psi_r^{(1)}(\varphi) \wedge_{12}^{(1)}(\varphi) + \cos \psi_r(\varphi) \psi_r^{(1)}(\varphi) \alpha^{(2)}(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha^{(3)}(\varphi) = \\ &= \psi_r^{(3)} \wedge_{11}(\varphi) + \psi_r^{(2)}(\varphi) \wedge_{23}(\varphi) + \psi_r^{(1)}(\varphi) \wedge_{13}(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha^{(3)}(\varphi), \\ &\text{onde } \wedge_{23}(\varphi) = \wedge_{11}^{(1)}(\varphi) + \wedge_{12}(\varphi) \text{ e } \wedge_{13}(\varphi) = \wedge'_{12}(\varphi) + \cos \psi_r(\varphi) \alpha''(\varphi). \\ \xi_r^{(4)}(\varphi) &= \psi_r^{(4)}(\varphi) \wedge_{11}(\varphi) + \psi_r^{(3)} \wedge_{11}^{(1)}(\varphi) + \psi_r^{(3)}(\varphi) \wedge_{23}(\varphi) + \psi_r^{(2)} \wedge_{23}^{(1)}(\varphi) + \\ &\quad + \psi_r^{(2)}(\varphi) \wedge_{13}(\varphi) + \psi_r^{(1)}(\varphi) \wedge_{13}^{(1)}(\varphi) + \cos \psi_r(\varphi) \psi_r^{(1)}(\varphi) \alpha^{(3)}(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha^{(4)}(\varphi) = \\ &= \psi_r^{(4)}(\varphi) \wedge_{11}(\varphi) + \psi_r^{(3)} \wedge_{34}(\varphi) + \psi_r^{(2)} \wedge_{24}(\varphi) + \psi_r^{(1)}(\varphi) \wedge_{14}(\varphi) + \sin \psi_r(\varphi) \alpha^{(4)}(\varphi), \\ &\text{onde } \wedge_{34}(\varphi) = \wedge_{11}^{(1)}(\varphi) + \wedge_{23}(\varphi), \wedge_{24}(\varphi) = \wedge_{23}^{(1)}(\varphi) + \wedge_{13}(\varphi), \\ &\quad \wedge_{14}(\varphi) = \wedge_{13}^{(1)}(\varphi) + \cos \psi_r(\varphi) \alpha^{(3)}(\varphi). \end{aligned}$$

Então em geral:

$$\begin{aligned}
\xi^{(n)}(\varphi) &= \psi_r^{(n)} \wedge_{11} + \psi_r^{(n-1)} \wedge_{n-1,n} + \cdots + \psi_r^{(1)} \wedge_{1n} + \sin \psi_r \alpha^{(n)}, \text{ onde:} \\
\wedge_{n-1,n} &= \wedge_{11}^{(1)} + \wedge_{n-2,n-1} \\
\wedge_{n-2,n} &= \wedge_{n-2,n-1}^{(1)} + \wedge_{n-3,n-1} \\
\wedge_{n-3,n} &= \wedge_{n-3,n-2}^{(1)} + \wedge_{n-4,n-1} \\
&\vdots \\
\wedge_{2,n} &= \wedge_{2,3}^{(1)} + \wedge_{1,n-1} \\
\wedge_{1,n} &= \wedge_{1,n-1}^{(1)} + \cos \psi_r \alpha^{(n-1)}
\end{aligned}$$

(b) Então, dado n

$$\begin{aligned}
\|\xi^{(n)}(\varphi) - \alpha^{(n)}(\varphi)\| &\leq |\psi_r^{(n)}(\varphi)| \|\wedge_{11}\| + |\psi_r^{(n-1)}(\varphi)| \|\wedge_{n-1,n}(\varphi)\| + \cdots \\
&\quad + |\psi_r^{(1)}(\varphi)| \|\wedge_{1n}(\varphi)\| + |\sin \psi_r - 1| \|\alpha^{(n)}(\varphi)\|
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

onde $\|\wedge_{11}\|, \dots, \|\wedge_{n-1,n}\|$ são limitados se $|\psi_\lambda^{(j)}| \rightarrow 0$, $0 \leq j \leq n-1$

(c) Mas, $f_r(x_1, x_2) = \frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda(\varphi)$, $x_1 = \frac{x_1^\lambda}{r}$, $x_2 = \frac{x_2^\lambda}{r}$. Então,

$$\begin{aligned}
f_r\left(\frac{\lambda}{r} \cos \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi)\right) &= \frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda(\varphi) \\
f_r\left(\frac{\lambda}{r} \cos \varphi \sin \psi_\lambda(\varphi), \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \cos \psi_\lambda(\varphi)\right) &= \frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda, \text{ onde} \\
\frac{1}{r} x_1^\lambda &= \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \sin \psi_\lambda = x, \\
\frac{1}{r} x_2^\lambda &= \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \cos \psi_\lambda = y. \text{ Então:} \\
x^{(1)} &= -\frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda + \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(1)} \\
x^{(2)} &= -\frac{\lambda}{r} \cos \varphi \sin \psi_\lambda - \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(1)} - \\
&\quad - \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(1)} - \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(1)} + \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(2)} = \\
&= Z_2(\cos \varphi, \sin \psi_\lambda, \psi_\lambda^{(1)}) + \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(2)} \\
x^{(3)} &= Z_3(\varphi) + \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(3)}. \text{ Em geral,}
\end{aligned}$$

$$x^{(n)} = Z_n(\varphi) + \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(n)}, \quad (2.7.5)$$

onde $Z_n(\varphi) = Z_n(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi_\lambda, \sin \psi_\lambda, \psi_\lambda^{(n-1)}, \psi_\lambda^{(n-2)}, \dots, \psi_\lambda^{(1)})$
e $|Z_n|$ é limitado se $|\psi_\lambda^{(j)}| \rightarrow 0$, $0 \leq j \leq n-1$.

Analogamente,

$$\begin{aligned} y &= \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \cos \psi_\lambda \implies y^{(1)} = W_1(\varphi) - \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(1)}, \\ y^{(2)} &= W_2(\varphi) - \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(2)}, \\ y^{(n)} &= W_n(\varphi) - \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

onde

$$W_n(\varphi) = W_n(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi_\lambda, \sin \psi_\lambda, \psi_\lambda^{(1)}, \dots, \psi_\lambda^{(n-1)}) \text{ e}$$

$$|W_n| \text{ é limitado se } \psi_\lambda^{(j)} \rightarrow 0, \quad 0 \leq j \leq n-1$$

Sejam

$$g(\varphi) = f_r(x(\varphi), y(\varphi)) = g(x(\varphi), y(\varphi))$$

$$\text{e } S(\varphi) = \frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda$$

Então,

$$S^{(1)}(\varphi) = -\frac{\lambda}{r} \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(1)}$$

$$S^{(2)}(\varphi) = t_2(\varphi) - \frac{\lambda}{r} \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(2)}, \text{ onde } t_2(\varphi) = -\frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda (\psi_\lambda^{(1)})^2$$

$$S^{(3)}(\varphi) = t_3(\varphi) - \frac{\lambda}{r} \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(3)},$$

$$\text{onde } t_3(\varphi) = \frac{\lambda}{r} \sin \psi_\lambda (\psi_\lambda^{(1)})^3 - 3 \frac{\lambda}{r} \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(1)} \psi_\lambda^{(2)} - \frac{\lambda}{r} \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(3)}.$$

Em geral,

$$S^{(n)}(\varphi) = t_n(\varphi) - \frac{\lambda}{r} \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(n)}$$

$$\text{onde } |t_n| \rightarrow 0 \text{ se } |\psi_\lambda^{(j)}| \rightarrow 0, \text{ quando } 0 \leq j \leq n-1$$

$$S^{(1)}(\varphi) = \frac{\partial g}{\partial x} x^{(1)} + \frac{\partial g}{\partial y} y^{(1)}$$

$$S^{(2)}(\varphi) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (x^{(1)})^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} x^{(1)} y^{(1)} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} (y^{(1)})^2 + \frac{\partial g}{\partial x} x^{(2)} + \frac{\partial g}{\partial y} y^{(2)}$$

Isto é, se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$,

$$S^{(2)}(\varphi) = \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha g(x, y) (x^{(1)})^{\alpha_1} (y^{(1)})^{\alpha_2} + \frac{\partial g}{\partial x} x^{(2)} + \frac{\partial g}{\partial y} y^{(2)}$$

Pondo,

$$g_2(\varphi) = \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha g(x, y) (x^{(1)})^{\alpha_1} (y^{(1)})^{\alpha_2}, \text{ temos}$$

$$S^{(2)}(\varphi) = g_2(\varphi) + \frac{\partial g}{\partial x} x^{(2)} + \frac{\partial g}{\partial y} y^{(2)}$$

Em geral,

$$S^{(n)} = g_n(\varphi) + \frac{\partial g}{\partial x} x^{(n)} + \frac{\partial g}{\partial y} y^{(n)},$$

onde $|g_n| \rightarrow 0$ se $|\psi_\lambda^{(j)}| \rightarrow 0$, quando $0 \leq j \leq n-1$

Temos, então,

$$\begin{aligned} S^{(n)}(\varphi) &= g_n(\varphi) + \frac{\partial g}{\partial x} Z_n(\varphi) + \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \cos \psi_\lambda \psi_\lambda^{(n)} \frac{\partial g}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y} W_n(\varphi) - \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(n)} \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_n(\varphi) - \frac{\lambda}{r} \sin \psi_\lambda \psi_\lambda^{(n)} &= g_n(\varphi) + \frac{\partial g}{\partial x} Z_n(\varphi) + \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y} W_n(\varphi) + \frac{\lambda}{r} \cos \varphi \cos \psi_\lambda \frac{\partial g}{\partial x} \psi_\lambda^{(n)} - \frac{\lambda}{r} \sin \varphi \sin \psi_\lambda \frac{\partial g}{\partial y} \psi_\lambda^{(n)} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{r} \left[\sin \psi_\lambda + \cos \varphi \cos \psi_\lambda \frac{\partial g}{\partial x} - \sin \varphi \sin \psi_\lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right] \psi_\lambda^{(n)} &= \\ &= t_n(\varphi) - g_n(\varphi) - \frac{\partial g}{\partial x} Z_n(\varphi) - \frac{\partial g}{\partial y} W_n(\varphi) \end{aligned}$$

Seja $r > r_{10}$ tal que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| < \frac{1}{4}, \quad |\sin \psi_\lambda| > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{\lambda}{r} \leq 4, \quad (\forall \varphi).$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{|\psi_n^{(n)}(\varphi)|}{2} \frac{1}{4} &\leq \frac{\lambda}{r} \left| |\operatorname{sen} \psi_\lambda| - \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \right| \leq \\ &\leq |g_n(\varphi)| + \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| |Z_n| + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| |W_n| + |t_n(\varphi)|. \end{aligned}$$

Uma vez que $r \rightarrow +\infty$ se, e só se, $\lambda \rightarrow +\infty$ e como já foi provado que $|\psi'_\lambda| \rightarrow 0$ (independente de φ), temos, por indução sobre n , que se $r \rightarrow +\infty$, $|\psi_\lambda^{(n)}| \rightarrow 0$ ($\forall n$) (independente de φ). Então, $\|\xi_r^{(n)} - \alpha^{(n)}\| \rightarrow 0$ ($\forall n$) independente de $\varphi \in (\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta)$. Por compacidade se tem então que $\|\xi_r^{(n)} - \alpha^{(n)}\| \rightarrow 0$ ($\forall n$) independente de $\varphi \in [0, 2\pi m]$. Logo, $\xi_r \xrightarrow{c} \alpha$. Isto prova (iv). $\square$

2.8 Fórmula de Jorge-Meeks

2.8.1

(a) Seja $X(M)$ uma superfície diferenciável orientada do $\mathbb{R}^3$ e K a sua curvatura gaussiana, isto é, a curvatura gaussiana de $(M, X^*(\langle, \rangle))$. Se $N : M \rightarrow S^2(1)$ é a aplicação normal de $X(M)$, $K = \det N_*$ e $H = \frac{1}{2} \operatorname{traço} N_*$. Então, se $X(M)$ é mínima, uma vez que N_* é simétrica relativamente à $X^*(\langle, \rangle)$, temos que $K(p) \leq 0$ ($\forall p \in M$). Indicando-se por dM o elemento de volume de $(M, X^*(\langle, \rangle))$, temos então que: $-\infty \leq \int_M K dM \leq 0$

Definição 2.9 Se $X(M)$ é mínima e $C(M) = \int_M K dM \geq -\infty$ dizemos que $X(M)$ tem curvatura total infinita ou finita conforme $C(M) = -\infty$ ou $C(M) > -\infty$.

(b)

Proposição 2.3 Seja $X(M)$ uma superfície diferenciável orientada do $\mathbb{R}^3$, N sua aplicação normal de Gauss, K sua curvatura gaussiana e dM seu elemento de volume. Se $d\Sigma$ é o elemento de volume de $S^2(1)$ temos:

- (1) $K dM = N^*(d\Sigma)$.
- (2) $\int_M K dM$ é a área algébrica da imagem $N(M)$.
- (3) Se $X(M)$ é mínima, $C(M) = -(\text{área de } N(M))$.

Demonstração: Ver página 290 de [31].

(c)

Teorema 2.9 (Huber, A.) *Seja $(M, <, >)$ uma variedade riemanniana de dimensão 2, completa, orientada tendo curvatura gaussiana K tal que:*

- (a) $K(p) \leq 0 \quad (\forall p \in M)$.
- (b) $-\infty < \int_M K dM$, onde dM é o elemento de volume de $(M, <, >)$.

Então, M com a estrutura de superfície de Riemann induzida pela família de parametrizações isotérmicas positivas de $(M, <, >)$ é conforme à $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$ onde $\overline{M}$ é uma superfície de Riemann compacta e $p_1, \dots, p_n \in \overline{M}$.

Demonstração: Ver [18].

(d) Seja $X(M)$ uma superfície mínima orientada do $\mathbb{R}^3$ e (g, w) uma representação de Weierstrass de $X(M)$. Então, se

$$\pi : S^2(1) - \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ onde } \mathbb{C} \text{ é o } \mathbb{R}^2 = \{(p_1, p_2, 0) / p_1, p_2 \in \mathbb{R}\}$$

com a estrutura complexa natural, é a projeção estereográfica, temos que $g = \pi \circ N$. (Ver cap. I, parágrafo 1.3.1)

Teorema 2.10 *Sejam $X(M)$ uma superfície mínima completa orientada do $\mathbb{R}^3$, tendo curvatura total finita, (g, w) uma representação de Weierstrass de $X(M)$, N a aplicação normal de $X(M)$ e $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$, onde $\overline{M}$ é uma superfície de Riemann compacta e $p_1, \dots, p_n \in \overline{M}$. Então,*

- (1) g se estende a uma função holomorfa de $\overline{M}$ em $\hat{\mathbb{C}}$.
- (2) $C(M) = -4\pi m$, onde m é um inteiro positivo.
- (3) Se (U, z) é uma parametrização holomorfa local de $\overline{M}$, onde $p_j \in z(U)$, $p_k \notin z(U)$ se $p_k \neq p_j$ e $w = f dz$ em $U - \{z^{-1}(p_j)\}$ temos que f se estende meromorficamente à U , tendo um polo de ordem pelo menos 2 em $z^{-1}(p_j)$.

Demonstração: Ver [33].

(e) Sejam $m < n$ e $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ $\{p = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_m p_m / \lambda_j \geq 0, \sum_{j=0}^m \lambda_j = 1\}$ é um m -simplexo ou um simplexo de dimensão m do $\mathbb{R}^n$ se $\{p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ é linearmente independente. Ele é indicado por $[p_0, \dots, p_m]$. Uma k -face do simplexo $[p_0, \dots, p_m]$ do $\mathbb{R}^n$ é qualquer simplexo $[p_{j_1}, \dots, p_{j_k}]$, onde $j_1, \dots, j_k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Um poliedro P do $\mathbb{R}^n$ é qualquer coleção finita de simplexos do $\mathbb{R}^n$ tais que :

- (1) se S é um simplexo de P , então toda face de S também o é.
- (2) se S', S'' são simplexos de P , então a intersecção $S' \cap S''$ é vazia ou é uma face comum a S' e S'' .

Dado um poliedro P do $\mathbb{R}^3$ $|P|$ indica a união dos simplexos de P . Um poliedro do $\mathbb{R}^n$ tem dimensão k , se k for a dimensão máxima dos simplexos que o constituem.

Definição 2.10 *Seja P um poliedro de dimensão m do $\mathbb{R}^n$ e para cada $i = 0, 1, \dots, m$ seja α_i o número de simplexos de dimensão i de P . O número*

$$\chi(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^n \alpha_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j$$

é a característica de Euler-Poincaré de P

Teorema 2.11 *Sejam P e Q poliedros do $\mathbb{R}^n$. Se $|P|$ e $|Q|$ são homeomorfos, $\chi(P) = \chi(Q)$.*

Seja X um espaço topológico. Uma triangulação de X é um homeomorfismo $h : |P| \rightarrow X$ onde P é um poliedro de $\mathbb{R}^n$. Diz-se, então, que X é triangulável. Se $k : |Q| \rightarrow X$ e $h : |P| \rightarrow X$ são triangulações do espaço topológico X , $k^{-1} \circ h : |P| \rightarrow |Q|$ é um homeomorfismo. Isto permite a seguinte definição: se $h : |P| \rightarrow X$ é uma triangulação de X , $\chi(X) = \chi(P)$ é a característica de Euler-Poincaré de X .

Teorema 2.12 *Toda variedade diferenciável compacta é triangulável.*

(f) Seja $\overline{M}$ uma superfície de Riemann compacta e $p \in \overline{M}$. Dada uma parametrização holomorfa local de (U, z) de $\overline{M}$ tal que $z(0) = p$, uma curva simples diferenciável fechada γ tal que $\{\gamma\} \subset z(U)$ é possível determinar-se uma triangulação $h : |P| \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{M}$ de $\overline{M}$ tal que o vértice $\underline{0}$ seja vértice de P , os triângulos que tem $\underline{0}$ como vértice estão todos contidos em U e se A é a união das 1-faces desses triângulos com vértices distintos de $\underline{0}$, então $h(A) = \{\gamma\}$. Se $\eta = z^{-1} \circ \gamma$, então η é uma curva fechada simples de D tal que $\{\eta\} = A$ e $\underline{0}$ está contido na componente conexa limitada de $\mathbb{R}^2 - \{\eta\}$, que indicaremos por B . Uma vez que o número de faces omitidas da triangularização de $\overline{M}$ para se obter a triangularização de M é o mesmo que o número de arestas omitidas, indicando-se por α_j o número de j -simplexos de P , $j = 0, 1, 2$, temos que

$$\chi(\overline{M} - z(B)) = (\alpha_0 - 1) - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(\overline{M}) - 1.$$

Obs Maiores informações sobre este parágrafo e o anterior podem ser encontrados em [23].

(g) Seja $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade riemanniana diferenciável 2-dimensional, orientada com conexão riemanniana ∇ . Seja (e_1, e_2) um referencial móvel local tangente de $(M, \langle, \rangle)$, isto é e_1, e_2 são campos de vetores diferenciáveis definidos num aberto V de M e $\langle e_1(p), e_2(p) \rangle = 0$, e $\langle e_1(p), e_1(p) \rangle = \langle e_2(p), e_2(p) \rangle = 1$ ($\forall p \in V$). Seja w_{12} a 1-forma diferenciável definida em V por $\nabla_v e_1 = w_{12}(v)e_2$ ($\forall v \in T_p(M), p \in V$). Então, se dM é o elemento de volume de $(M, \langle, \rangle)$, (e_1, e_2) é um referencial móvel local definido em V tal que $dM(e_1, e_2) = 1$, $\gamma(s) : [a, b] \rightarrow V$ é uma curva diferenciável tal que $\|\gamma'(s)\| = 1$ ($\forall s$) e $\varphi(s) = \varphi_0 + \int_a^s [f(t)g'(t) - f'(t)g(t)]dt$, onde

$$f(s) = \langle \gamma'(s), e_1(s) \rangle, \quad g(s) = \langle \gamma'(s), e_2(s) \rangle, \quad f(a) = \cos \varphi_0,$$

temos que $\varphi(s)$ é diferenciável e $\cos \varphi(s) = f(s)$ e $\sin \varphi(s) = g(s)$ ($\forall s$). Então, $k_g(s) = \frac{d\varphi}{ds} + w_{12}(\gamma'(s))$ é a curvatura geodésica de γ em s .

(h) Sejam $X(M)$ uma superfície do $\mathbb{R}^3$, diferenciável, orientada, N a sua aplicação normal de Gauss, dM o elemento de volume de $(M, X^*(\langle, \rangle))$, (e_1, e_2) um referencial móvel local de $(M, X^*(\langle, \rangle))$ definido no aberto V tal que $dM(e_1, e_2) = 1$, e $\gamma(s) : [a, b] \rightarrow V$ é uma curva diferenciável tal que $\|\gamma'(s)\| = 1$ ($\forall s$), e $k_g(s)$ é a curvatura geodésica de γ em s . Então, se $X \circ \gamma = \alpha$,

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \times (\alpha'(s)) \rangle \quad (\forall s \in [a, b]).$$

Obs A referência para os fatos mencionados neste parágrafo e no anterior é [31].

(i) Seja $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade riemanniana diferenciável, orientada de dimensão 2. Seja dM o seu elemento de volume e para qualquer $p \in M$ seja $J_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ definido por $\|J_p(v)\| = \|v\|$, $\langle J_p(v), v \rangle = 0$ e $dM(v, J_p(v)) > 0$ se $v \neq 0$. J_p tem as seguintes propriedades:

(a) $J_p \circ J_p = -id$.

(b) se z é um campo de vetores tangentes diferenciável de M , $J(z)$ definido por $J(z)(p) = J_p(z(p))$ também é um campo de vetores tangentes diferenciável.

(c) se (e_1, e_2) é um referencial móvel de $(M, \langle, \rangle)$ tal que $dM(e_1, e_2) = 1$, então, $J(e_1) = e_2, J(e_2) = -e_1$.

Para cada $p \in M$, J_p é o operador de $+90^\circ$ em $T_p(M)$. Se $\gamma(s) : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva diferenciável, tal que $\gamma'(s) \neq 0$ ($\forall s$), dizemos que ela é orientada positivamente se $dM(\gamma'(s), J(\gamma'(s))) > 0$ ($\forall s$).

Teorema 2.13 (*Teorema de Gauss-Bonnet*) *Seja $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade riemanniana de dimensão 2 e D um aberto conexo de M tendo fecho compacto tal que a sua fronteira ∂D é uma união de curvas regulares fechadas orientadas positivamente. Se k é a curvatura gaussiana de $(M, \langle, \rangle)$, k_g a curvatura geodésica das curvas que compõem ∂D e s denota um comprimento de arco de cada curva componente de ∂D temos que $\int_D K dM + \int_{\partial D} k_g ds = 2\pi\chi(\overline{D})$.*

Obs Maiores informações sobre os fatos mencionados nestes três últimos parágrafos podem ser encontradas em [31] (págs. 329 , 337 (ex.9) , 309 (ex.5) , 387 , (ex.8)) .

2.8.2

Teorema 2.14 (*Fórmula de Jorge-Meeks*) *Seja $\overline{M}$ uma superfície de Riemann compacta, $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \xrightarrow{X} \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa com curvatura total finita, tendo como fins $F_1, \dots, F_n$ com multiplicidade $m_1, \dots, m_n$, respectivamente. Então, $C(M) = 2\pi(\chi(\overline{M}) - \sum_{j=1}^n m_j - n)$.*

Demonstração:

(a) Seja $r_* > 0$ tal que $r > r_*$ implica que as conclusões do teorema 2.8, bem como as afirmações feitas no decorrer de sua prova sejam válidas. No que se segue os entes geométricos introduzidos na demonstração do teorema 2.8, aparecem todos indexados por $j, j = 1, 2, \dots, n$.

Dado $r > r_*$ seja $\{\beta_j^r\} = X(M) \cap S^2(r)$, onde $\beta_j^r = Y_0 \gamma_j^r$ e $\gamma_j^r(\varphi_j)$, $\varphi_j \in [0, 2\pi m_j]$, é uma curva simples fechada em $A_j \subset U_j$. Seja $D_j^r \subset U_j$ a componente limitada de $\mathbb{R}^2 - \{\gamma_j^r\}$ tal que $F_r D_j^r = \{\gamma_j^r\}$ e seja $M_r = \overline{M} - \bigcup_{j=1}^n \varphi_j(D_j^r)$ (este último φ_j é o da parametrização local (U_j, φ_j) introduzida no parágrafo 2.4.1). Do teorema de Gauss-Bonnet obtém-se $\int_{M_r} K dM + \int_{\varphi_j(\gamma_j^r)} k_g ds = 2\pi\chi(M_r)$. Mas, $\chi(M_r) = \chi(\overline{M}_r - n)$. Pelo Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{M_r} K dM &= \lim_{r \rightarrow +\infty} -(\text{área } N(M_r)) = - \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{N(M_r)} d\Sigma = \\ &= - \int_{N(M)} d\Sigma = \int_M K dM . \end{aligned}$$

(b) Cálculo de $\int_{\varphi_j(\gamma_r)} k_g ds$. Temos:

$$\begin{aligned}\beta_j^r &= Y_0 \gamma_j^r \text{ e} \\ \beta_j^r(\varphi_j) &= (r \cos \varphi_j \sin \psi_j^r(\varphi_j), r \sin \varphi_j \sin \psi_j(\varphi_j), r \cos \psi_j^r(\varphi_j)) ,\end{aligned}$$

com $\varphi_j \in [0, 2\pi m_j]$. Seja $\varphi = \varphi_j, \beta_j^r = \beta_r, \psi_j^r = \psi_r$. Então, $\|\beta_r'(\varphi)\| = r\sqrt{\sin^2 \psi_r(\varphi) + \psi_r'(\varphi)^2}$, $s(\varphi) = \int_0^\varphi r\sqrt{\sin^2 \psi_r(\varphi) + \psi_r'^2} d\varphi$ é uma função comprimento de arco para $\beta_r(\varphi)$ e, então,

$$ds = r\sqrt{\sin^2 \psi_r(\varphi) + \psi_r'(\varphi)^2} d\varphi \text{ e } \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r\sqrt{\sin^2 \psi_r + \psi_r'^2}}$$

Pondo $\theta_r(s) = \beta_r(\varphi(s))$ temos: $\theta_r' = \beta_r' \frac{d\varphi}{ds}$ e $\theta_r'' = \beta_r'' \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \beta_r' \frac{d^2\varphi}{ds^2}$. Então,

$$\begin{aligned}\langle \theta_r''(s), N(\theta_r(s)) \times \theta_r'(s) \rangle &= \langle \beta_r''(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2, N(\theta_r(s)) \times \theta_r'(s) \rangle \\ &= -\langle \frac{\beta_r''}{r^2(\sin^2 \psi_r + \psi_r'^2)}, N(\beta_r) \times \beta_r' \rangle \frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_j(\gamma_j^r)} k_g ds &= -\int_0^{L_j} \langle \frac{\beta_r''}{r^2(\sin^2 \psi_r + \psi_r'^2)}, N(\beta_r) \times \beta_r' \rangle \frac{d\varphi}{ds}(s) ds = \\ &= -\int_0^{2\pi m_j} \langle \frac{\beta_r''}{r^2(\sin^2 \psi_r + \psi_r'^2)}, N(\beta_r) \times \beta_r' \rangle(\varphi) d\varphi = \\ &= -\int_0^{2\pi m_j} \langle \frac{\beta_r''}{r}, N(\beta_r) \times \frac{\beta_r'}{r} \rangle(\varphi) \frac{1}{\sin^2 \psi_r + \psi_r'^2}(\varphi) d\varphi\end{aligned}$$

Mas então:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_j(\gamma_j^r)} k_g ds &= -\int_0^{2\pi m_j} \lim_{r \rightarrow +\infty} \langle \frac{\beta_r''}{r}, N(\beta_r) \times \frac{\beta_r'}{r} \rangle(\varphi) \frac{1}{\sin^2 \psi_r + \psi_r'^2}(\varphi) d\varphi \\ &= -\int_0^{2\pi m_j} \langle \alpha'', v_j \times \alpha' \rangle d\varphi .\end{aligned}$$

Mas, $\alpha''(\varphi) = -\alpha(\varphi)$ e $\langle \alpha(\varphi), \alpha'(\varphi) \times v_j \rangle = 1$ para todo φ . Então:

$$\int_{\varphi_j(\gamma_j^r)} k_g ds = \int_0^{2\pi m_j} d\varphi = 2\pi m_j .$$

□

Corolário 2.1 (*Desigualdade de Chern-Osserman*) *Seja $\overline{M}$ uma superfície de Riemann compacta, $X : M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa tendo curvatura total finita e fins $F_1, \dots, F_n$. Então:*

$$C(M) \leq 2\pi(\chi(\overline{M}) - n)$$

---

e a igualdade vale se, e só se, os fins F_j são todos mergulhados.

Capítulo 3

A função P de Weierstrass

3.1 Alguns resultados básicos sobre funções elípticas

As funções elípticas são funções meromorfas de natureza simples: elas são definidas em $\mathbb{C}$ e são duplamente periódicas. Seus valores ficam então caracterizados pelos valores que elas assumem num paralelogramo de $\mathbb{C}$.

3.1.1 Algumas definições e notações

Sejam $w, w' \in \mathbb{C}$ tais que $\text{Im} \frac{w'}{w} > 0$ e

$$L = L(w, w') = \{z \in \mathbb{C} / z = mw + nw', m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dizemos que:

- i) Dados $z, z' \in \mathbb{C}$. z é L-equivalente a z' se $z - z' \in L(w, w')$. Isto é indicado por $z \sim^L z'$.
- ii) Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ é L-irredutível se $z_i - z_j \notin L(w, w') \forall i, j, i \neq j$.
- iii) Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, $R_{z_0} = \{z = z_0 + \alpha w + \beta w' / 0 \leq \alpha, \beta < 1\}$ é o paralelogramo básico apoiado em z_0 (relativo à $L(w, w')$). Se $z_0 = mw + nw' \in L$, $R_{z_0} = R_{m,n}$.
- iv) Dado R_{z_0} , ∂R_{z_0} é a curva C^1 por partes reunião dos segmentos $[z_0, z_0 + w], [z_0 + w, z_0 + w + w'], [z_0 + w + w', z_0 + w'], [z_0 + w', z_0]$, onde dados $a, b \in \mathbb{C}$, $[a, b] = \{(1-t)a + tb / 0 \leq t \leq 1\}$.

- v) Uma função meromorfa $f : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ é elíptica relativa à L , se $f(z + \Omega) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\Omega \in L(w, w')$.

A seguir, apresentaremos proposições com características básicas da estrutura das funções elípticas.

3.1.2

Proposição 3.1 *Toda função elíptica não constante possui polo em qualquer paralelogramo básico..*

Demonstração:

Se tal não acontecesse, f seria inteira e limitada, contradizendo o Teorema de Liouville. $\square$

3.1.3

Proposição 3.2 *Se $f(z)$ é uma função elíptica relativa à $L(w, w')$, R_{z_0} é um paralelogramo básico tal que $f(z)$ não possui nenhum polo em $\{\partial R_{z_0}\}$ temos:*

i)

$$\int_{\partial R_{z_0}} f(z) dz = 0 . \quad (3.1.1)$$

ii) $s(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ é elíptica e se $f(z)$ não tem zeros em $\{\partial R_{z_0}\}$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_{z_0}} z s(z) dz \in L(w, w') \quad (3.1.2)$$

Demonstração:

i) Indicando-se $\int_{[a,b]}$ por $\int_a^b$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R_{z_0}} f(z) dz &= \int_{z_0}^{z_0+w} f(z) dz \\ &+ \int_{z_0+w}^{z_0+w+w'} f(z) dz + \int_{z_0+w+w'}^{z_0+w'} f(z) dz \\ &+ \int_{z_0+w'}^{z_0} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_0+w} f(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{z_0}^{z_0+w'} f(z+w)dz + \int_{z_0+w}^{z_0} f(z+w')dz \\
& + \int_{z_0+w'}^{z_0} f(z)dz = 0
\end{aligned}$$

pois $f(z+w) = f(z+w') = f(z)$. Isto prova o item i) .

ii) Dado $a \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z + \Omega) - f(a + \Omega)}{z - a} = \\
&= f'(a + \Omega) (\forall \Omega \in L) .
\end{aligned}$$

Logo, $f'(z)$ é elíptica . Tem-se então que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ também o é . Mas,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R_{z_0}} z s(z) dz &= \int_{z_0}^{z_0+w} z s(z) dz + \int_{z_0+w}^{z_0+w+w'} z s(z) dz \\
&+ \int_{z_0+w+w'}^{z_0+w'} z s(z) dz + \int_{z_0+w'}^{z_0} z s(z) dz \\
&= \int_{z_0}^{z_0+w} z s(z) dz + \int_{z_0}^{z_0+w'} (z+w) s(z+w) dz \\
&+ \int_{z_0+w}^{z_0} (z+w') s(z+w') dz + \int_{z_0+w'}^{z_0} z s(z) dz \\
&= w \int_{z_0}^{z_0+w'} s(z) dz + w' \int_{z_0+w}^{z_0} s(z) dz
\end{aligned}$$

Lema 3.1 Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma curva $\mathbb{C}^1$ por partes , $h(z)$ é uma função holomorfa em um aberto que contém $\{\gamma\}$, h nunca se anula em $\{\gamma\}$ e $\lambda(a)$ é qualquer valor de $\text{Log}(h(\gamma(a)))$, temos que $\lambda(a) + \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz$ é um valor de $\text{Log}h(\gamma(b))$

Demonstração: Ver pág 124 de [4]. □

Como $f(z_0) = f(z_0 + w) = f(z_0 + w')$, temos que

$$\int_{z_0}^{z_0+w'} s(z) dz = 2\pi m , \int_{z_0+w}^{z_0} s(z) dz = 2\pi n ,$$

de acordo com o lema anterior. Isto prova ii). □

3.1.4

Proposição 3.3 *Seja $f(z)$ uma função elíptica relativa à $L(w, w')$. Se R_{z_0} é um paralelogramo básico e $p_1, \dots, p_k$ são os polos de $f(z)$ pertencentes a R_{z_0} temos que $\sum_{j=1}^k \text{Res}(f, p_j) = 0$*

Demonstração:

Seja R_{z_1} um paralelogramo básico tal que $p_1, \dots, p_k \in R_{z_1} - \{\partial R_{z_1}\}$. Então, $\int_{\partial R_1} f(z) dz = \sum_j 2\pi i \text{Res}(f, p_j) = 0$. $\square$

Proposição 3.4 *Seja $f(z)$ uma função elíptica relativa à $L(w, w')$ e R_{z_0} um paralelogramo básico. Então, o número de polos e zeros de $f(z)$ em R_{z_0} , levando-se em conta suas respectivas ordens, é o mesmo.*

Demonstração:

Os polos e zeros de $f(z)$ são polos simples de $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Se p é um polo de ordem m de f , $\text{Res}(\frac{f'}{f}, p) = -m$. Se a é um zero de ordem n de f , $\text{Res}(\frac{f'}{f}, a) = n$. Sejam $p_1, \dots, p_k$ os polos de $f(z)$ em R_{z_0} e seja R_{z_1} um paralelogramo básico tal que $p_1, \dots, p_k \in R_{z_1} - \{\partial R_{z_1}\}$. Então, como $\frac{f'}{f}$ é elíptica, $\int_{\partial R_{z_1}} \frac{f'}{f} dz = 0$. Como esta integral é igual à $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos de $\frac{f'}{f}$ em R_{z_1} , temos que existem $z_1, \dots, z_s \in R_{z_0}$, com ordens $n_1, \dots, n_s$ tais que $n_1 + \dots + n_s - m_1 - \dots - m_k = 0$. $\square$

Corolário 3.1 *Seja $f(z)$ uma função elíptica relativa à $L(w, w')$. Então, todo número complexo é assumido o mesmo número de vezes em cada paralelogramo básico.*

Demonstração:

Dado $c \in \mathbb{C}$, $f(z) - c$ e $f(z)$ têm os mesmos polos com as mesmas ordens. Logo, têm o mesmo número de zeros $\square$

Definição 3.1 *O número de vezes com que cada valor é assumido por uma função elíptica em qualquer paralelogramo básico é a sua ordem*

3.1.5

Proposição 3.5 *Sejam $f(z)$ uma função elíptica relativa ao reticulado $L(w, w')$, R_{z_0} um paralelogramo básico, $p_1, \dots, p_k \in R_{z_0}$, polos de $f(z)$ com ordens $m_1, \dots, m_k$; $z_1, \dots, z_s \in R_{z_0}$, zeros de $f(z)$ com ordens $n_1, \dots, n_s$. Então:*

$$\sum_{j=1}^k m_j p_j - \sum_{j=1}^s n_j z_j \in L(w, w') \quad (3.1.3)$$

Demonstração:

Podemos supor que $p_1, \dots, p_k, z_1, \dots, z_s \notin \{\partial R_{z_0}\}$. Então,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_{z_0}} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_1 z_1 + \dots + n_s z_s - m_1 p_1 - \dots - m_k p_k,$$

pelo princípio do argumento. O resultado é então consequência da proposição 3.2. $\square$

3.2 Decomposição de Funções Elípticas

3.2.1

Teorema 3.1 *(Decomposição de Weierstrass para Funções Inteiras) Seja $f(z)$ uma função inteira, k um inteiro não negativo, $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ os zeros não nulos de $f(z)$ listados tantas vezes quantas forem suas multiplicidades. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ é uma sequência de inteiros positivos tal que $\sum_n \left| \frac{z}{z_n} \right|^{\lambda_n+1}$ é convergente uniformemente em cada compacto de $\mathbb{C}$, temos que:*

$$f(z) = e^{h(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} \epsilon_{\lambda_n}(z/z_n) \quad (3.2.1)$$

onde, $h(z)$ é uma função inteira e

$$\epsilon_{\lambda_n}(z/z_n) = (1 - z/z_n) \exp \left\{ \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{\lambda_n} \right\}$$

O produto acima converge absolutamente em $\mathbb{C}$ e uniformemente em cada compacto de $\mathbb{C}$. Em particular, o valor do produto não depende da ordem dos fatores.

Demonstração: Ver pág 299 de [34]. □

Observação: Esta decomposição de $f(z)$ não é única, já que a sequência $(\lambda_n)_n$ pode ser escolhida de várias maneiras. Em particular, se a série $\sum_n \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}}$ converge, podemos escolher $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \dots$.

3.2.2

Teorema 3.2 (*Decomposição de Mittag-Leffler para Funções Meromorfas*) *Seja $f(z)$ uma função meromorfa com polos em $z_0 = 0, z_1, \dots, z_i, \dots$ tendo, respectivamente $G_0(\frac{1}{z}), \dots, G_i(\frac{1}{z-z_i})$ como partes principais. Se $H_1(z), \dots, H_i(z) \dots$ é uma sequência de polinômios tal que a série $G_0(\frac{1}{z}) + \sum_{i=1}^{\infty} [G_i(\frac{1}{z-z_i}) - H_i(z)]$ é absolutamente e uniformemente convergente em cada compacto de $\mathbb{C}$, se omitirmos dela um número finito de parcelas tendo singularidades nele, temos que:*

$$f(z) = H(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ G_i\left(\frac{1}{z-z_i}\right) - H_i(z) \right\} \quad (3.2.2)$$

onde $H(z)$ é uma função inteira.

Demonstração: Ver [34]. □

Observação: Esta decomposição de $f(z)$ não é única, pois em geral há várias escolhas possíveis para os polinômios $H_i(z)$.

3.3 As funções σ , ξ , e P de Weierstrass:

Utilizaremos os Teoremas anteriores para construir uma função inteira σ e uma função meromorfa ξ com zeros e polos respectivamente nos pontos de um reticulado do plano, construindo em seguida P , uma função elíptica de ordem 2 com polos nos pontos do reticulado.

3.3.1

Lema 3.2 *Seja $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots$ uma ordenação dos pontos do reticulado $L(w, w')$ tal que $|z_{i+1}| \geq |z_i| \forall i$. Então $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|z_i|^3}$ converge.*

Demonstração:

Sejam

$$G_k = \{z = mw + nw' / m = \pm k \text{ e } -k \leq n \leq k \text{ ou } n = \pm k \text{ e } -k \leq m \leq k\}$$

e

$$S_k = \sum_{i=1}^{8k} \frac{1}{|z_{i_k}|^3}, \quad z_{i_k} \in G_k. \text{ Para todo } z_i \in L, \exists k \text{ tal que } z_i \in G_k \text{ e } z_i \notin G_l, \forall l \neq k.$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|z_i|^3} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \quad (3.3.1)$$

Se h é a altura do paralelogramo $R_{0,0}$, $|z_{i_k}| \geq kh$, $\forall z_{i_k} \in G_k$. Como G_k possui $8k$ elementos,

$$S_k = \sum \frac{1}{|z_{i_k}|^3} \leq 8k \frac{1}{(kh)^3} = \frac{8}{h^3 k^2} \quad (3.3.2)$$

Então:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|z_i|^3} \leq \frac{8}{h^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

que converge. $\square$

Teorema 3.3 *Seja $\{z_i/i \in \mathbb{N}\}$ uma ordenação dos pontos do reticulado $L(w, w')$ tal que $|z_{i+1}| > |z_i|, \forall i$. Então as funções:*

$$i) \sigma(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\left(\frac{z}{z_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_k}\right)^2\right)}$$

$$ii) \xi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} \right\}$$

$$iii) P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} \right\}$$

$$iv) P'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{-2}{(z - z_k)^3} \right\}$$

convergem absolutamente e quase uniformemente no plano, não dependendo da ordenação do reticulado.

Demonstração:

i) Pelo Lema 3.2, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^3$ converge quase uniformemente no plano. Portanto para $\lambda_n = 2$ e $h(z) = 0$, no Teorema 3.1, $\sigma(z)$ converge absolutamente e quase uniformemente no plano, não dependendo da ordem dos termos e só tem z_i e $z = 0$ como zeros simples.

ii) Se $G_i(\frac{1}{z-z_i}) = \frac{1}{z-z_i}$ e $H_i(z) = -\frac{1}{z_i} - \frac{z}{z_i^2} - \frac{z^2}{z_i^3}$ temos que

$$G_i(\frac{1}{z-z_i}) - H_i(z) = -\frac{z^3}{z_i^4} - \dots = (\frac{z}{z_i})^3 \frac{1}{z-z_i}.$$

Logo, dados $R > 0$ e i_0 , tal que $i \geq i_0$ implica que $|z_i| \geq 2R$, temos que $|G_i(\frac{1}{z-z_i}) - H_i(z)| \leq \frac{R^3}{|z_i|^3} \frac{1}{|z-z_i|} \leq \frac{R^2}{|z_i|^3}$ se $|z| < R$. Então, $\sum_{i=1}^{\infty} [G_i(\frac{1}{z-z_i}) - H_i(z)]$ converge quase-uniformemente em $\mathbb{C}$. Pondo $G_0(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z}$, ii) é consequência do teorema de Mittag-Leffler.

iii) Como a convergência de (ii) é quase uniforme, pode-se derivar termo a termo e trocando o sinal resulta que $P(z) = -\xi'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2}$ o que mostra o item (iii).

iv) Como a convergência de (iii) é quase uniforme, pode-se derivar termo a termo resultando em $P'(z) = -\frac{2}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{-2}{(z-z_k)^2} \right\}$ o que mostra o item (iv). $\square$

Observação: $\sigma(z)$ tem zeros simples nos pontos de $L(w, w')$, $\xi(z)$ polos simples nos pontos de $L(w, w')$ com resíduos iguais à 1 nos pontos de $L(w, w')$, $P(z)$ e $P'(z)$ tem respectivamente polos duplos e triplos com resíduos nulos nos pontos de $L(w, w')$.

Proposição 3.6 *A função P de Weierstrass é elíptica de ordem 2, par e tem polos duplos nos pontos do reticulado $L(w, w')$.*

Demonstração:

Do item (iii) do Teorema 3.3,

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z-z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} \right\}$$

Dado $z_j \in L(w, w')$ temos:

$$\begin{aligned} P(z + z_j) &= \frac{1}{(z + z_j)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z + z_j - z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} \right\} \\ &= \frac{1}{(z + z_j)^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z + z_j - z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} \right\} + \frac{1}{z_j^2} - \frac{1}{z_j^2}. \end{aligned}$$

Como a somatória anterior não depende da ordem, $z_j - z_k \in L(w, w')$, colocando-se $\frac{1}{(z + z_j)^2} - \frac{1}{z_j^2}$ para dentro da somatória obtém-se a expressão original de $P(z)$. Portanto,

$$P(z + z_j) = P(z). \quad (3.3.3)$$

A somatória da expressão de $P(z)$ fica inalterada quando substituímos z por $-z$. Logo $P(-z) = P(z)$. $\square$

Proposição 3.7 *A função P' de Weierstrass é elíptica de ordem 3, ímpar, com polos triplos nos pontos do reticulado $L(w, w')$ e zeros em*

$$w_1 = \frac{w}{2}, w_2 = \frac{w + w'}{2} \quad e \quad w_3 = \frac{w'}{2}.$$

Demonstração:

Da Proposição 3.6, $P(z + \tilde{w}) = P(z)$, $\forall \tilde{w} \in L(w, w')$. Derivando ambos os termos da expressão

$$P'(z + \tilde{w}) = P'(z). \quad (3.3.4)$$

Como P tem polos duplos no reticulado e é par, P' tem polos triplos no reticulado e é ímpar. Como P' é ímpar e elíptica, temos:

$$P'\left(\frac{w}{2}\right) = -P'\left(\frac{-w}{2}\right) \quad e \quad P'\left(\frac{-w}{2}\right) = P'\left(\frac{-w}{2} + w\right) = P'\left(\frac{w}{2}\right). \quad (3.3.5)$$

Portanto, $P'\left(\frac{w}{2}\right) = -P'\left(\frac{w}{2}\right)$, ou seja, $P'\left(\frac{w}{2}\right) = 0$. Analogamente, mostra-se que $P'\left(\frac{w'}{2}\right) = 0$. Da Proposição 3.5, $w_1 + w_2 + w_3 = \frac{w}{2} + \frac{w'}{2} + w_2 = mw + nw'$. Logo, $w_2 = (m - \frac{1}{2})w + (n - \frac{1}{2})w'$. Como $w_2 \in R_{0,0}$, isto só é possível se $m = 1, n = 1$. $\square$

Teorema 3.4 *Sejam P a função de Weierstrass relativa ao reticulado $L(w, w')$; $w_1 = \frac{w}{2}, w_2 = \frac{w+w'}{2}$ e $w_3 = \frac{w'}{2}, P(w_i) = e_i, i = 1, 2, 3, \{z_k/k \in \mathbb{N}\}$ uma ordenação para os pontos de L tal que $|z_{k+1}| > |z_k|$,*

$$g_2 = 60 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^4} \text{ e } g_3 = 140 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^6}.$$

Então:

- i) $P'(z)^2 = 4(P(z) - e_1)(P(z) - e_2)(P(z) - e_3)$
- ii) $P'(z)^2 = 4P(z)^3 - g_2P(z) - g_3$
- iii) $e_1 + e_2 + e_3 = 0$
- iv) $e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{1}{4}g_2$
- v) $e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3$
- vi) $P(z)^2 = \frac{1}{6}P''(z) + \frac{1}{12}g_2$
- vii) $(P(z - w_j) - e_j)(P(z) - e_j) = (e_j - e_t)(e_j - e_s)$ onde (s, t, j) é uma permutação do conjunto $\{1, 2, 3\}$

Demonstração:

(a) Em $R_{0,0}$, $P'(z)$ tem 0 como único polo de ordem 3 e como únicos zeros w_1, w_2, w_3 . Então, $P'(z)^2$ ainda é elíptica, tem ordem 6 e tem um único polo de ordem 6 em 0 e zeros de ordem 2 em w_1, w_2, w_3 . Se

$$g(z) = (P(z) - e_1)(P(z) - e_2)(P(z) - e_3),$$

temos que $g(z)$ é elíptica. Como $g(z)$ tem um único polo de ordem 6 em 0 e tem zeros duplos em w_1, w_2, w_3 , segue-se que $\frac{P'(z)^2}{g(z)}$ é elíptica e holomorfa. Então, $P'(z)^2 = cg(z)$, onde $c \in \mathbb{C}$. Mas a parte principal de $P'(z)^2$ em $z = 0$ é $\frac{4}{z^6} + \dots$ e a de $g(z)$ é $\frac{1}{z^6} + \dots$. Então: $c = 4$. Isto prova i).

(b) Para cada inteiro $n \geq 2$, $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^n}$ é absolutamente convergente, já que cada $|z_k| \leq hk$, onde h é a menor das altitudes de cada paralelogramo básico. Como $z_k \in L(w, w')$ se, e somente se, $-z_k \in L(w, w')$, temos que $s_n = 0$ se $n \geq 3$ é ímpar.

(c) Se $|z| < |z_k|$, $\frac{1}{(z-z_k)^2} = \frac{1}{z_k^2} + 2\frac{z}{z_k^3} + 3\frac{z^2}{z_k^4} + \dots$. Então, se $|z| < |z_1|$

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} \right) = \frac{1}{z^2} + 3s_4z^2 + 5s_6z^4 + \dots,$$

$$P'(z) = -\frac{2}{z^3} - 6s_4z + 20s_6z^3 + \dots,$$

$$P'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24s_4}{z^2} - 80s_6 + \dots,$$

$$P(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9s_4}{z^2} + 15s_6 + \dots$$

Logo,

$$P'(z)^2 - 4P(z)^3 = -\frac{60s_4}{z^2} - 140s_6 - \dots$$

e

$$P'(z)^2 - 4P(z)^2 + 60s_4P(z) = -140s_6 + \dots$$

Porém, $h(z) = P'(z)^2 - 4P(z)^3 + 60s_4P(z) = -140s_6 + \dots$ é holomorfa em $\mathbb{C}$. Isto é, $h(z)$ é constante. Ou seja, $h(z) = -140s_6$. Isto prova (ii).

(d) Uma vez que

$$P'(z)^2 = 4(P(z) - e_1)(P(z) - e_2)(P(z) - e_3) =$$

$$4P(z)^2 - 4(e_1 + e_2 + e_3)P(z) + 4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3)P(z) - 4e_1e_2e_3$$

(iii), (iv) e (v) são consequências de (ii).

(e) De (ii), temos que $(2P''(z) - 12P(z) + g_2)P'(z) = 0$, $(\forall z)$. Isto implica (vi).

(f) $(P(z) - e_j)(P(z - w_j) - e_j)$ é elíptica e inteira. Logo, é constante. Mas,

$$(P(-w_s) - e_j)(P(-w_s - w_j) - e_j) = (P(w_s) - e_j)(P(-w_t) - e_j) = (e_s - e_j)(e_t - e_j),$$

pois P é par e $w_1 + w_2 + w_3 \equiv 0$. $\square$

3.4 Construção de Funções Elípticas

Os objetos básicos para a construção de funções elípticas são as três funções de Weierstrass: P, ξ e σ .

3.4.1

Teorema 3.5 (Periodicidade de ξ e σ) Se $\xi(z)$ e $\sigma(z)$ são, respectivamente, as funções ξ e σ de Weierstrass relativas ao reticulado $L(w, w')$, existem $2\eta_1$, $2\eta_3 \in \mathbb{C}$ tais que :

- (i) $\xi(z+w) = \xi(z) + 2\eta_1$ e $\xi(z+w') = \xi(z) + 2\eta_3$, se $z \notin L(w, w')$
- (ii) $2\eta_1 w' - 2\eta_3 w = 2\pi i$ (relação de Legendre)
- (iii) se $w_1 = \frac{w}{2}$, $w_2 = \frac{w'}{2}$,

$$\sigma(z+w) = -\sigma(z)e^{2\eta_1(z+w_1)} \text{ e } \sigma(z+w') = -\sigma(z)e^{2\eta_1(z+w_2)}, (\forall z \in \mathbb{C})$$

Demonstração:

(a) Primeiramente, observemos que $\xi'(z) = -P(z)$. Portanto

$$(\xi(z+w)' - \xi(z)') = (\xi(z+w') - \xi(z))' = 0, \text{ se } z \notin L(w, w').$$

Sejam, então,

$$2\eta_1 = \xi(z+w) - \xi(z) \text{ e } 2\eta_3 = \xi(z+w') - \xi(z).$$

Isto prova (i).

(b) Seja R_{z_0} um paralelogramo básico tal que $z_0 \notin L(w, w')$. Então:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial R_{z_0}} \xi(z) dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_0+w} \xi(z) dz + \int_{z_0+w}^{z_0+w+w'} \xi(z) dz + \int_{z_0+w+w'}^{z_0+w'} \xi(z) dz + \int_{z_0+w'}^{z_0} \xi(z) dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_0+w} \xi(z) dz + \int_{z_0}^{z_0+w'} \xi(z+w) dz + \int_{z_0+w}^{z_0} \xi(z+w') dz + \int_{z_0+w'}^{z_0} \xi(z) dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_0+w} [\xi(z) - \xi(z+w')] dz + \int_{z_0}^{z_0+w'} [\xi(z+w) - \xi(z)] dz = -2\eta_3 w + 2\eta_1 w' \end{aligned}$$

Mas, $\int_{\partial R_{z_0}} \xi(z) dz = 2\pi i$ e isto prova (ii).

(c) Como $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \xi(z)$ temos de (i) que $\frac{\sigma'(z+w)}{\sigma(z+w)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = 2\eta_1$. Integrando esta equação, obtem-se, então, $\sigma(z+w) = \sigma(z)e^{2\eta_1 z + c}$, onde $c \in \mathbb{C}$. Mas, σ é ímpar e, então:

$$\sigma\left(-\frac{w}{2} + w\right) = \sigma\left(\frac{w}{2}\right) = \sigma\left(-\frac{w}{2}\right)e^{-2\eta_1 \frac{w}{2} + c}$$

Logo, $e^c = -e^{2\eta_1 \frac{w}{2}}$. Do mesmo modo se prova a outra fórmula de (iii). $\square$

3.4.2

Teorema 3.6 (Construção de funções elípticas por meio de suas partes principais) Seja f uma função elíptica relativa à $L(w, w')$ com pólos p_i , $i = 1, 2, \dots, k$ L -irredutíveis de ordens m_i , $i = 1, 2, \dots, k$ e partes principais $\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_j^i}{(z-p_i)^j}$,

$i = 1, 2, \dots, k$, respectivamente. Então,

$$f(z) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(-1)^{j-1} a_j^i}{(j-1)!} \xi^{j-1}(z-p_i) + c \quad (3.4.1)$$

onde c é uma constante .

Demonstração:

(a) O processo de caracterização de f consiste em ir eliminando os polos através de funções auxiliares. Dado o polo p_i de ordem m_i , $\xi(z-p_i)$ tem parte principal $\frac{1}{z-p_i}$. Logo $\xi'(z-p_i)$ terá por parte principal $\frac{-1}{(z-p_i)^2}$ e $\xi^j(z-p_i)$ tem $\frac{(-1)^j j!}{(z-p_i)^{j+1}}$ como parte principal. Portanto,

$$f^*(z) = f(z) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(-1)^{j-1} a_j^i \xi^{(j-1)}(z-p_i)}{(j-1)!} \quad (3.4.2)$$

que é analítica em $\mathbb{C}$. Mostremos agora que $f^*(z)$ é elíptica relativa à $L(w, w')$. Separando os termos correspondentes a $j = 1$, temos:

$$f^*(z) = f(z) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=2}^{m_i} \frac{(-1)^{j-1} a_j^i \xi^{(j-1)}(z-p_i)}{(j-1)!} - \sum_{i=1}^k a_1^i \xi(z-p_i) \quad (3.4.3)$$

Como $P = -\xi$, os dois primeiros termos do lado direito da igualdade acima formam uma função elíptica. Analisamos o terceiro abaixo:

(b)

Lema 3.3 A função $r(z) = \sum_{i=1}^k a_1^i \xi(z-p_i)$ é elíptica .

Demonstração:

$$r(z+w) = \sum_{i=1}^k (a_1^i \xi(z-p_i) + a_1^i 2\eta_1) =$$

$$\sum_{i=1}^k a_1^i \xi(z - p_i) + 2\eta_1 \sum_{i=1}^k a_1^i = r(z) + 2\eta_1 \sum_{i=1}^k \text{Res}(f, p_i)$$

. Como os p_i são L -irredutíveis, $\sum_{i=1}^k \text{Res}(f, p_i) = 0$. □

Portanto f^* é elíptica e holomorfa, isto é, constante. Logo,

$$f(z) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(-1)^{j-1} a_j^i \xi^{j-1}(z - p_i)}{(j-1)!} + c.$$

□

3.4.3

Teorema 3.7 (*Construção de funções elípticas por meio de polos e zeros*) *Seja f uma função elíptica relativa à $L(w, w')$ com polos $p_1, p_2, \dots, p_k$ L -irredutíveis e zeros $z_1, z_2, \dots, z_s$ L -irredutíveis, com ordens $m_i, i = 1, \dots, k$ e $n_j, j = 1, \dots, s$, respectivamente, tais que $m_1 p_1 + \dots + m_k p_k = n_1 z_1 + \dots + n_s z_s$. Então existe uma constante complexa $c \in \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = \frac{c \prod_{i=1}^s (\sigma(z - z_i))^{n_i}}{\prod_{i=1}^k (\sigma(z - p_i))^{m_i}}$$

Demonstração:

O processo de caracterização de f consiste em ir eliminando os polos e zeros com funções auxiliares gerando uma função analítica e elíptica em $\mathbb{C}$, portanto constante. Como $\sigma(z)$ só possui zeros simples nos pontos do reticulado, $\sigma(z - b)$ só terá zeros simples nos pontos L -equivalentes à b e portanto $(\sigma(z - b))^n = (\sigma^n(z - b))$ só terá zeros de ordem n nos pontos L -equivalentes à b . Consideremos o polo p_i e o zero z_j . A função $f(z) \frac{\sigma^{m_i}(z - p_i)}{\sigma^{n_j}(z - z_j)}$ não possui polo em p_i nem zero em z_j . Então:

$$f^*(z) = f(z) \frac{\prod_{i=1}^k \sigma^{m_i}(z - p_i)}{\prod_{j=1}^s \sigma^{n_j}(z - z_j)} \text{ é analítica em } \mathbb{C}$$

Mostremos agora a elipticidade de f^* .

$$\begin{aligned}
 f^*(z+w) &= f(z+w) \frac{\prod_{i=1}^k (\sigma(z+w-p_i))^{m_i}}{\prod_{i=1}^s (\sigma(z+w-z_i))^{n_i}} \\
 &= f(z) \frac{\prod_{i=1}^k (e^{2\eta_1(z-p_i+\frac{w}{2})} \sigma(z-p_i))^{m_i}}{\prod_{i=1}^s (e^{2\eta_1(z-z_i+\frac{w}{2})} \sigma(z-z_i))^{n_i}} = \\
 &= f(z) \frac{\prod_{i=1}^k \sigma^{m_i}(z-p_i)}{\prod_{i=1}^s \sigma^{n_i}(z-z_i)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^k e^{2\eta_1 m_i (z-p_i+\frac{w}{2})}}{\prod_{i=1}^s e^{2\eta_1 n_i (z-z_i+\frac{w}{2})}} = \\
 &= f(z) \frac{\prod_{i=1}^k \sigma^{m_i}(z-p_i)}{\prod_{i=1}^s \sigma^{n_i}(z-z_i)} \cdot e^{2\eta_1 \left[\left(z + \frac{w}{2} \right) \left(\sum_{i=1}^k m_i - \sum_{i=1}^s n_i \right) + \left(\sum_{i=1}^s n_i z_i - \sum_{i=1}^k m_i p_i \right) \right]}
 \end{aligned}$$

Como $m_1 + \dots + m_k = n_1 + \dots + n_s$, temos que:

$$f^*(z+w) = f^*(z)$$

Analogamente,

$$f^*(z+w') = f^*(z)$$

Então, $f^*(z)$ é elíptica e holomorfa, portanto constante .

□

3.5 A função P de Weierstrass relativa ao reticulado $L(1, i)$

Teorema 3.8 *Seja P a função de Weierstrass relativa ao reticulado $L(1, i)$. Então:*

- $(i) P(x) \in \mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R} - L(1, i)$

- (ii) Em $[0, 1]$, P é simétrica relativamente à $w_1 = \frac{1}{2}$
- (iii) Em $[0, i]$, P é simétrica relativamente à $w_3 = \frac{i}{2}$
- (iv) $2\eta_1 = \pi$, $2\eta_3 = -\pi i$
- (v) $P(w_2) = e_2 = 0$ e w_2 é um zero duplo de P
- (vi) $e_1 > 0$, $e_3 = -e_1$

Demonstração:

(a) Se $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_k \left(\frac{1}{(x - z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} \right) + \left(\frac{1}{(x - \bar{z}_k)^2} - \frac{1}{\bar{z}_k^2} \right)$. Então, $\overline{P(x)} = P(x)$. Isto prova (i) .

(b) Se $x \in (0, 1)$, $P(x - w_1) = P(x - w_1 + 1) = P(x + w_1)$. Isto prova (ii)

(c) Se $y \in (0, i)$, $P(y - w_3) = P(y - w_3 + i) = P(y + w_3)$. Isto prova (iii)

(d) $\xi(w_1) = \xi(\frac{1}{2}) = \xi(1 - \frac{1}{2}) = \xi(-\frac{1}{2}) + 2\eta_1 = -\xi(\frac{1}{2}) + 2\eta_1 = -\xi(w_1) + 2\eta_1$. Portanto $2\eta_1 = 2\xi(w_1)$. Do mesmo modo, $2\eta_3 = 2\xi(w_3)$. Mas ,

$$\begin{aligned} \eta_1 = \xi(w_1) &= \xi\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \sum_k \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{1}{2z_k^2} \right) = \\ &= i \left[\frac{2}{i} + \sum_k \left(\frac{1}{\frac{i}{2} - iz_k} + \frac{1}{iz_k} + \frac{i}{2(iz_k)^2} \right) \right] = i\xi\left(\frac{i}{2}\right) = i\xi(w_3) = i\eta_3 \implies \eta_1 = i\eta_3 \end{aligned}$$

A relação de Legendre implica que $i2\eta_3 = 2\pi - 2\eta_1$. Então, $2\eta_1 = 2\pi - 2\eta_1$, isto é , $2\eta_1 = \pi$. Isto prova (iv)

(e) Para todo z ,

$$P(iz) = \frac{1}{(iz)^2} + \sum_k \left(\frac{1}{(iz - z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} \right) = -\frac{1}{z^2} + \sum_k \left(\frac{-1}{(z - z_k)^2} - \frac{1}{(iz_k)^2} \right) = -P(z)$$

pois $z_k \in L(1, i)$ se, e só se , $iz_k \in L(1, i)$. Então, $P(iw_2) = -P(w_2)$. Mas, $P(iw_2) = P(\frac{i}{2} - \frac{1}{2}) = P(\frac{i}{2} + \frac{1}{2}) = P(w_2)$. Logo, $P(w_2) = -P(w_2)$, isto é , $P(w_2) = e_2 = 0$. Mas, $P'(w_2) = 0$, pela proposição 3.7 . Então , como P tem ordem 2 , w_2 é o único zero de P em $R_{0,0}$ e este zero é duplo . Isto prova (v) .

(f) Seja $h(x) = \sum_k \left(\frac{1}{(x - z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} \right)$, onde $x \in [0, 1)$. Então, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ e então, se $x \in [0, 1)$, $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = +\infty$. Então, como P não se anula em $[0, 1)$, temos que $P(x) > 0, \forall x \in [0, 1)$. Em particular, $P(w_1) = e_1 > 0$. Como $e_1 + e_2 + e_3 = 0, e_3 = -e_1$. $\square$

3.6 Propriedades da Aplicação P de Weierstrass de $L(1, i)$ obtidas usando o Princípio de Reflexão de Schwarz

3.6.1 Princípio de Reflexão de Schwarz

Definição 3.2 Dado um círculo ou uma reta Γ de $\mathbb{C}$, $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $S(z) = T^{-1}(\overline{Tz})$, onde T é uma aplicação de Möbius tal que $T(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}z = 0\}$ é a simetria relativa à Γ .

Observação: A definição acima não depende da aplicação de Möbius que transforma Γ em $\{z \in \mathbb{C} / \text{Im}z = 0\}$

Teorema 3.9 (*Princípio de Reflexão de Schwarz*) Sejam Γ_1 um círculo ou uma reta de $\mathbb{C}$, G um aberto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $G \cap \Gamma_1 = \emptyset$, mas $\text{Fr}G \cap \Gamma_1 = \Gamma_0$, onde Γ_0 é um sub-arco de Γ_1 . Consideremos $f(z)$ holomorfa em G e contínua em $G \cup \Gamma_0$, tal que $f(\Gamma_0)$ é um sub-arco de Γ_2 , onde Γ_2 é um círculo ou uma reta de $\mathbb{C}$. Sejam S_1, S_2 , respectivamente, simetrias relativas à Γ_1 e Γ_2 . Se $G^* = S_1(G)$, $G \cup \Gamma_0 \cup G^*$ é um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $g : G \cup \Gamma_0 \cup G^* \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = f(z)$ se $z \in G \cup \Gamma_0$, $g(z) = S_2(f(S_1(z)))$ se $z \in G^*$ é holomorfa.

Demonstração: Ver pág. 685 de [36].

(a) Definindo $f_0(z) = e_1 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \frac{z-w_2}{z-1} \frac{w_1-1}{w_1-w_2}\right)$ transforma conformemente, isto é, é holomorfa e injetiva, o interior do triângulo $[w_1, 1, w_2]$, de vértices $w_1, 1, w_2$, de R_0 , no primeiro quadrante de $\mathbb{C}$, de tal modo que:

$$(1) f_0(w_1) = e_1, f_0(1) = \infty, f_0(w_2) = 0$$

$$(2) f_0([w_1, 1]) = [e_1, \infty], f_0 \text{ é injetiva em } [w_1, 1]$$

$$(3) f_0([1, w_2]) \text{ é o semi-eixo imaginário positivo e } f_0 \text{ é injetora em } [1, w_2]$$

$$(4) f_0([w_2, w_1]) = [0, e_1] \text{ e } f_0 \text{ é injetiva em } [w_2, w_1]$$

Figura 3.1: A função f_0

Figura 3.2: A função f_1

(b) $\mu(w_2 + z) = w_2 - i\bar{z}$ é a simetria de $\mathbb{C}$ relativamente à reta que contém o segmento $[1, w_2]$ e a simetria relativamente ao eixo imaginário é $z \rightarrow -\bar{z}$. Então, a função $f_1(z)$ definida por $f_1(z) = f_0(z)$, se z pertence ao interior do triângulo $[w_1, 1, w_2]$ ou ao segmento $(1, w_2)$ e $f_1(z) = -\overline{f_0(\mu(z + w_2))}$ se z pertence ao interior do triângulo $[1, w_3 + 1, w_2]$ de R_0 , é holomorfa no interior do quadrado $[w_2, w_1, 1, w_3 + 1]$ de R_0 , transformando-o conformemente no semi-plano $\text{Im} z > 0$ de $\mathbb{C}$. Além disso, $f_1(w_3 + 1) = -e_1$, $f_1(1) = \infty$ e f_1 transforma o segmento $[1, w_3 + 1]$ injetivamente sobre $(-\infty, -e_1]$ e o segmento $[w_3 + 1, w_2]$ injetivamente sobre o segmento $[-e_1, 0]$.

(c) A simetria relativa à reta que contém o segmento $[w_2, w_3 + 1]$ é $\beta(z + w_2) = w_2 + \bar{z}$ e a simetria relativamente ao eixo real de $\mathbb{C}$ é $z \rightarrow \bar{z}$. Então, a função $f_2(z)$ definida por $f_1(z)$, se z pertence ao interior do quadrado $[w_2, w_1, 1, w_3 + 1]$

Figura 3.3: A função f_2

ou ao segmento (w_2, w_3+1) , e $f_2(z) = \overline{f_1(\beta(z+w_2))}$, se z pertence ao interior do quadrado $[w_2, w_3+1, 1+i, w_1+i]$, é holomorfa no interior do retângulo $[w_1, 1, 1+i, w_1+i]$, transformando-o conformemente sobre

$$\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}z = 0, \text{Re}z \geq 0\}.$$

Além disso, (1) $f_2(1+i) = \infty$, $f_2(w_1+i) = e_1$, (2) f_2 transforma injetivamente o segmento $[w_3+1, 1+i]$ sobre $[-e_1, \infty]$ contido no semi-eixo real negativo, (3) f_2 transforma injetivamente o segmento $[1+i, w_1+i]$ sobre o segmento $[\infty, e_1]$, contido no semi-eixo real positivo, (4) f_2 transforma injetivamente o segmento $[w_1+i, w_2]$ sobre o segmento $[e_1, 0]$.

(d) A simetria relativamente à reta que contém o segmento $[w_1, w_1+i]$ é $\alpha(z+w_2) = w_2 - \bar{z}$ e a simetria relativamente ao eixo real é o $z \rightarrow \bar{z}$. Então, a função $f_3(z)$ definida como $f_2(z)$ se z pertence ao interior do retângulo $[w_1, 1, 1+i, w_1+i]$ ou ao segmento (w_1, w_1+i) , e $f_3(z) = \overline{f_2(\alpha(z+w_2))}$, se z pertence ao interior do retângulo $[0, w_1, w_1+i, i]$, é holomorfa no interior do quadrado $[0, 1, 1+i, i]$. Além disso, (1) $f_3(i) = \infty$, $f_3(w_3) = -e_1$, $f_3(0) = \infty$, (2) f_3 transforma $[w_1+i, i]$ injetivamente sobre $[e_1, \infty]$, (3) f_3 transforma $[i, w_3]$ injetivamente sobre $[\infty, -e_1]$, (4) f_3 transforma $[w_3, 0]$ injetivamente sobre $[-e_1, \infty]$.

(e) Aplicando-se cuidadosamente o princípio de reflexão de Schwarz à função f_3 , obtém-se, então, uma função meromorfa $f(z)$ em $\mathbb{C}$, com polos somente nos pontos do reticulado, e com zeros somente nos pontos $L(1, i)$ -congruentes à w_2 . Além disso, f tem como períodos 1 e i , e é portanto elíptica. Como cada ponto de $\mathbb{C} - \{0\}$ é assumido duas vezes no paralelogramo básico R_0 , temos

Figura 3.4: A função f_3

que f é de ordem 2. E, uma vez que ela assume os mesmos polos e zeros de P e um valor comum $f(w_1) = e_1$, ela coincide com P . Como consequência, temos o seguinte resultado:

3.6.2

Proposição 3.8 *Seja $P(z)$ relativa ao reticulado*

$$L(1, i) \text{ e } I, II, III, IV, V, VI, VII \text{ e } VIII$$

os triângulos do paralelogramo básico da figura 3.5: Então:

- (1) Se $\mu(w_2 + z) = w_2 - i\bar{z}$, $P(\mu(w_2 + z)) = -\overline{P(w_2 + z)}$
- (2) Se $\beta(w_2 + z) = w_2 + \bar{z}$, $P(\beta(w_2 + z)) = \overline{P(w_2 + z)}$
- (3) Se $\rho(w_2 + z) = w_2 + iz$, $P(\rho(w_2 + z)) = -P(w_2 + z)$
- (4) P restrita à $[w_2, w_1]$ é estritamente crescente e sobre $[0, e_1]$
- (5) P restrita à $[w_1, 1]$ é estritamente crescente e sobre $[e_1, \infty]$
- (6) Se $z \in [1, w_2]$, $P(z)$ é um imaginário puro com $\text{Im}P$ estritamente crescente
- (7) $\text{Re}P(z) > 0$, se

$$z \in I, IV, V \text{ ou } VIII \text{ e } \text{Re}P(z) < 0, \text{ se } z \in II, III, VI \text{ ou } VII$$

- (8) $\text{Im}P(z) > 0$, se

$$z \in I, II, \cancel{VIN} \text{ ou } \cancel{VIN} \text{ e } \text{Im}P(z) < 0, \text{ se } z \in \cancel{III}, \cancel{IV}, V \text{ ou } VI$$

$\pm, \pm$

Figura 3.5: Os triângulos $I, II, III, IV, V, VI, VII$ e $VIII$

Demonstração:

Só falta mostrar (3). Porém, como $\rho = \beta \circ \mu$, temos $P(\rho(w_2 + z)) = P(\beta(\mu(w_2 + z))) = \overline{P(\mu(w_2 + z))} = -P(w_2 + z)$. $\square$

Corolário 3.2 $P(z)$ é imaginário puro, se $z \in [1, i]$, $[0, 1 + i]$ e $P(z)$ é real, se $z \in [0, i]$, $[0, 1]$, $[w_3, w_3 + i]$, $[i, i + 1]$, $[1, 1 + i]$.

Demonstração:

Segue imediatamente dos itens (4), (5) e (6) aplicados aos itens (1), (2) e (3). $\square$

3.6.3

A figura 3.6 sintetiza os sinais de ReP e ImP no quadrado básico R_0

Figura 3.6: (a) Sinal de $\text{Re}(P(z))$ (b) Sinal de $\text{Im}(P(z))$

Capítulo 4

A superfície de Costa

4.1 Introdução :

A superfície de Costa é o toro munido da estrutura conforme induzida sobre ele pelo reticulado $L(1, i)$, menos três fins minimamente mergulhado em $\mathbb{R}^3$. Ele foi construído em 1982 pelo matemático C.J.Costa em sua tese de doutorado [7]. A importância do exemplo se deve ao fato de que ele é o primeiro exemplo, após 206 anos de uma superfície mínima completa mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com topologia finita, isto é, M é conforme a uma superfície de Riemann compacta menos um número finito de pontos. Os exemplos conhecidos antes eram o plano (1760, Lagrange), o Catenóide e o Helicóide (1776, Meusnier). Além disso, as técnicas desenvolvidas para construção do exemplo e mostrar que ele é mergulhado (1985, Hoffman-Meeks) se tornaram fundamentais no desenvolvimento da teoria de superfícies mínimas.

4.1.1

Dado $L(w, w')$, indiquemos por $\mathbf{C}/L$ o espaço quociente da relação L -equivalência e seja $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/L$ a aplicação quociente. $\mathbf{C}/L$ com a topologia quociente é um espaço topológico de Hausdorff, compacto e conexo. Se V é um aberto L -irredutível temos que $U = \pi(V) \subset \mathbf{C}/L$ é aberto e $\pi|_V : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Então, $\{(V, \pi|_V) / V \text{ é aberto } L\text{-irredutível}\}$ é um atlas holomorfo sobre $\mathbf{C}/L$, que induz sobre $\mathbf{C}/L$ uma estrutura de superfície de Riemann.

Proposição 4.1 *Dados $L = L(w, w')$, $L' = L(\lambda, \lambda')$ reticulados de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}/L$ e $\mathbb{C}/L'$ são conformes se, e só se, existem $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tais que :*

$$ad - bc \neq 0 \text{ e } \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{a\frac{w'}{w} + b}{c\frac{w'}{w} + d}$$

Demonstração: Ver [10] página 9.

Observação: Se $mw + nw' \in L(w, w')$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/L &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ \pi(mw + nw') &\longrightarrow (e^{2\pi im}, e^{2\pi in}) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

Logo, $\mathbb{C}/L$ é homeomorfo a um toro e, então, $\chi(\mathbb{C}/L) = 0$.

4.2 Teorema de Existência de Superfície Mínima Completa de três fins e gênero um

Seja P a função de Weierstrass relativa ao reticulado $L(1, i)$. Então, P induz sobre $\mathbb{C}/L(1, i) = \mathbb{T}^2$ uma aplicação holomorfa de T^2 em $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{S}^2(1)$ que ainda será indicada por P . Sendo π a aplicação quociente, sejam :

$$p_0 = \pi(0), \quad p_1 = \pi\left(\frac{1}{2}\right), \quad p_2 = \pi\left(\frac{i}{2}\right).$$

Teorema 4.1 *Sejam $M = T^2 - \{p_0, p_1, p_2\}$, $a = 2\sqrt{2\pi}P(\frac{1}{2})$, $g = \frac{a}{P'}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)Pdz$, $\alpha_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)Pdz$, $\alpha_3 = Pgdz$. Então, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ é a representação de Weierstrass para uma superfície mínima completa $X(M)$ do $\mathbb{R}^3$, tendo curvatura total -12π , os fins de M associados a p_0, p_1, p_2 são disjuntos, mergulhados, paralelos e fora de um compacto, X é um mergulho.*

Demonstração:

Para mostrar a existência de $X(M)$ devemos mostrar que:

- (a) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$ em M
- (b) $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 \neq 0$

Figura 4.1: Curvas geradoras da homologia de M

- (c) Para toda curva fechada C^1 por partes em M , cada α_j não tem períodos reais, isto é, $\operatorname{Re} \int_\gamma \alpha_j(z) dz = 0$
- (d) Toda curva C^1 por partes de M , divergente, tem comprimento infinito.

(1) (a) e (b) são imediatas das expressões de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(2) Como toda curva C^1 por partes de M é homotópica a uma combinação linear com coeficientes inteiros das curvas $\alpha = \pi(\tilde{\alpha})$, $\beta = \pi(\tilde{\beta})$, $\gamma_1 = \pi(\tilde{\gamma}_1)$, $\gamma_2 = \pi(\tilde{\gamma}_2)$, $\gamma_3 = \pi(\tilde{\gamma}_3)$, onde :

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{i}{3} + t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\tilde{\beta}(t) = \frac{1}{3} + ti, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\tilde{\gamma}_1(t) = \rho_1 e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \rho_1 < \frac{1}{4},$$

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \frac{1}{2} + \rho_2 e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad 0 < \rho_2 < \frac{1}{6},$$

$$\tilde{\gamma}_3(t) = \frac{1}{2} + \rho_3 e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \rho_3 < \frac{1}{6},$$

É então suficiente mostrar que :

$$\operatorname{Re} \int_\alpha \alpha_j dz = \operatorname{Re} \int_\beta \alpha_j dz = \operatorname{Re} \int_{\gamma_k} \alpha_j dz = 0$$

para $j = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$.

(3) $\alpha_3 = \frac{aP}{P'} dz = \frac{aPP'}{4(P-e_1)P(P+e_1)} dz = \frac{a}{8e_1} \left(\frac{P'}{P-e_1} - \frac{P'}{P+e_1} \right) dz$ Mas, $\frac{P'}{P-e_1} = \frac{d}{dz} \text{Log}(P(z) - e_1)$ e $\frac{P'}{P+e_1} = \frac{d}{dz} \text{Log}(P(z) + e_1)$. Como $P(\frac{i}{3}) = P(\frac{i}{3} + 1)$, temos então, que $\int_{\delta} \alpha_3$ é igual a i vezes a variação do argumento de P ao longo de $\delta = \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ e γ_3 . Então $\text{Re} \int_{\delta} \alpha_3 dz = 0$ Portanto α_3 não tem períodos reais.

$$\begin{aligned} (4) \alpha_1 &= \frac{P}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4P(P-e_1)(P-e_3)} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \left(P - \frac{a^2}{4} \left(\frac{1}{2e_1} \left(\frac{1}{P-e_1} - \frac{1}{P-e_3} \right) \right) \right) dz, \\ \frac{1}{P-e_1} &= \frac{P(z-w_1)-e_1}{2e_1^2} \\ \frac{1}{P-e_3} &= \frac{P(z-w_3)+e_1}{2e_1^2} \end{aligned}$$

Pois

$$\frac{1}{P-e_1} \text{ e } \frac{P(z-w_1)-e_1}{2e_1^2}$$

são funções elípticas tendo os mesmos polos e zeros em R_0 com as mesmas ordens e assumindo o mesmo valor em $-w_3$. A outra expressão é válida por argumento análogo. Então,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(P - \frac{a^2}{4} \left[\frac{P(z-w_1)}{4e_1^3} - \frac{P(z-w_3)}{4e_1^3} - \frac{1}{2e_1^2} \right] \right) dz$$

e

$$\int_{\alpha} P(z-w_1) dz = \int_0^1 P\left(\frac{i}{3} + t - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} P\left(\frac{i}{3} + t - \frac{1}{2}\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 P\left(\frac{i}{3} + t - \frac{1}{2}\right) dt$$

Da elipticidade de P seguida de mudança de variável $u = t + \frac{1}{2}$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} P\left(\frac{i}{3} + t - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} P\left(\frac{i}{3} + t + \frac{1}{2}\right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 P\left(\frac{i}{3} + u\right) du,$$

Do mesmo modo, pondo $u = t - \frac{1}{2}$, temos:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 P\left(\frac{i}{3} + t - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} P\left(\frac{i}{3} + u\right) du$$

Então,

$$\int_{\alpha} P(z - w_1) dz = \int_0^1 P\left(\frac{i}{3} + u\right) du = \int_{\alpha} P(z) dz = -2\eta_1 = -\pi ,$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} P(z - w_3) dz &= \int_{\alpha} P\left(z - \frac{i}{2} + i\right) dz = \int_{\alpha} P\left(z + \frac{i}{2}\right) dz = \\ &= \int_{\alpha^* = \alpha + \frac{i}{2}} P(w) dw = \int_{\alpha} P(z) dz = -2\eta_1 = -\pi \end{aligned}$$

pois α e α^* são homotópicas em M . Analogamente se tem:

$$\int_{\beta} P(z - w_1) dz = \int_{\beta} P(z) dz = -2\eta_3 = \pi i$$

e

$$\int_{\beta} P(z - w_3) dz = \int_{\beta} P(z) dz = -2\eta_3 = \pi i$$

Logo:

$$\int_{\alpha} \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(-2\eta_1 + \frac{a^2}{8e_1^2} \right) = 0$$

e

$$\int_{\beta} \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(-2\eta_3 + \frac{a^2}{8e_1^2} i \right) = 2\pi i$$

. Mas, $2\eta_3 = -\pi i$, então:

$$\operatorname{Re} \int_{\beta} \alpha_1 = 0$$

Como

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(P - \frac{a^2}{4} \left[\frac{P(z - w_1)}{4e_1^3} - \frac{P(z - w_3)}{4e_1^3} - \frac{1}{2e_1^2} \right] \right) dz$$

temos que:

$$\operatorname{Res}(\alpha_1, p_j) = 0 \text{ se } j = 1, 2, 3$$

Então α_1 não tem períodos reais em M .

(5) Com argumento análogo ao desenvolvido em (4), temos:

$$\alpha_2 = \frac{i}{2} \left(P + \frac{a^2}{4} \left[\frac{P(z - w_1)}{4e_1^3} - \frac{P(z - w_3)}{4e_1^3} - \frac{1}{2e_1^2} \right] \right) dz$$

$$\int_{\alpha} \alpha_2 = \frac{i}{2} \left(-2\eta_1 - \frac{a^2}{8e_1^2} \right) = -\pi i$$

$$\int_{\beta} \alpha_2 = \frac{i}{2} \left(-2\eta_3 - \frac{a^2 i}{8e_1} \right) = 0 .$$

Logo,

$$\operatorname{Re} \int_{\alpha} \alpha_2 = \operatorname{Re} \int_{\beta} \alpha_2 = 0$$

De modo análogo ao ocorrido com α_1 , $\operatorname{Res}(\alpha_2, p_j) = 0$, se $j = 1, 2, 3$. Logo, α_2 também não tem períodos reais.

(6) Então, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ constituem a representação de Weierstrass para superfície $X(M)$ do $\mathbb{R}^3$ dada por $x_k = \operatorname{Re} \int \alpha_k$.

(7) Se $\gamma(t)$ é divergente em M então

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

onde $\lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t) = 0$, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{i}{2}$. O comprimento de γ é dado por

$$\int_{\gamma} |\lambda| |dz| = \int_{\gamma} \frac{|f|(1+|g|^2)}{2} |dz|, \text{ onde } f(z) = P(z)$$

Em $\frac{1}{2}$ e $\frac{i}{2}$, f é analítica e g tem polo simples e em 0 , f tem polo duplo e g tem zero triplo. Logo,

$$0, \frac{1}{2} \text{ e } \frac{i}{2} \text{ são polos duplos de } f(1+g^2)$$

Consideremos então as três possibilidades para γ . Se $\gamma \rightarrow 0$, $\exists \epsilon_1$ tal que

$$f(1+g^2) = \frac{1}{z^2} h_0(z), \quad \forall z \in D_{\epsilon_1}(0)$$

onde, $h_0(z)$ é analítica em $D_{\epsilon_1}(0)$ e $h_0(0) \neq 0$. Portanto pelo Teorema dos zeros isolados, $\exists r < \epsilon_1$ tal que $h_0(z) \neq 0, \forall z \in D_r(0)$. Logo, $|h_0(z)| > m > 0, \forall z \in D_r(0)$. Se γ^* é a parte de γ contida em $D_r(0)$, de

$$\int_{\gamma} |f|(1+|g|^2) |dz| > \int_{\gamma^*} |f|(1+|g^2|) |dz| = \int_{\gamma^*} \frac{1}{|z|^2} |h_0(z)| |dz| > m \int_{\gamma^*} \frac{1}{|z|^2} |dz|$$

Mas,

$$\int_{\gamma} \left| \frac{dz}{z^2} \right| > \left| \int_{\gamma^*} \frac{dz}{z^2} \right| = \left| \lim_{a \rightarrow 0} \int_{z_0}^a \frac{dz}{z^2} \right| = \left| \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{a} \right) \right| = \infty$$

$$\int_{\gamma} |\lambda| |dz| = \infty$$

isto é, γ tem comprimento ∞ . Para $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$ e $\frac{i}{2}$ o argumento é análogo. Portanto,

$$\int_{\gamma} |\lambda| |dz| = \infty \quad \forall \gamma \subset M \text{ divergente}$$

ou seja, M é completa.

(8) Como P' tem ordem 3, g tem ordem 3, então $C(M) = -12\pi$. Pela fórmula de Jorge-Meeks, temos $-12\pi = 2\pi[\chi(T^2) - m_0 - m_1 - m_2 - 3]$, onde I_1, I_2, I_3 são respectivamente as ordens dos fins associados à p_0, p_1, p_2 . Então, $I_0 = I_1 = I_2 = 1$. Ou seja, os fins são mergulhados.

(9) Como P' tem um polo triplo em p_0 , e zeros simples em p_1, p_2 , temos que $g(p_0) = 0$, $g(p_1) = g(p_2) = \infty$. Tem-se então que os fins são paralelos.

$$(10) x_3(\pi(z)) = \operatorname{Re} \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left(\int_{w_2}^z \frac{P'(z)}{P - e_1} d\xi - \int_{w_2}^z \frac{P'(z)}{P + e_1} d\xi \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \operatorname{Log} \left| \frac{P(z) - e_1}{P(z) + e_1} \right|$$

Portanto,

$$\text{Se } z \rightarrow w_1 = \frac{1}{2}, x_3 \rightarrow -\infty$$

$$\text{Se } z \rightarrow w_3 = \frac{i}{2}, x_3 \rightarrow +\infty$$

$$\text{Se } z \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0,$$

ou seja, este fim é assintótico ao plano $z = 0$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que,

$D_j = \{z \in \mathbb{C} / |z| < \epsilon\} \xrightarrow{\varphi_j} M$ é uma parametrização holomorfa local de T^2 tal que $\varphi_j(0) = p_j$ e se $F_j = X(\varphi_j(D_j - \{0\}))$, $F_j \cap F_k = \emptyset$ se $k \neq j$. Portanto, se $K = T^2 - \cup_j \varphi_j(D_j)$, temos que $X|_{M-K}$ é um mergulho. $\square$

4.3 As simetrias da superfície de Costa

4.3.1

O grupo de simetrias do quadrado $Q = [0, 1, 1+i, i]$ é o grupo diedral D_4 e tem oito elementos. Cada simetria leva vértice em vértice e é caracterizada pela sua

Figura 4.2: O quadrado básico $[0, 1, 1 + i, i]$

Figura 4.3: Decomposição do quadrado em triângulos

ação sobre dois vértices distintos. Sendo $\beta(w_2 + z) = w_2 + \bar{z}$ a reflexão relativa ao segmento $[w_3, w_3 + 1]$, $\rho(w_2 + z) = w_2 + iz$ a rotação em torno w_2 de ângulo igual à $\frac{\pi}{2}$ radianos, temos que $\rho^4 = i_d$ e $D_4 = \{i_d, \rho, \rho^2, \rho^3, \beta, \rho\beta, \rho^2\beta, \rho^3\beta\}$ onde $\rho^3\beta$ é a reflexão relativa à $[1, i]$, $\rho^2\beta$ reflexão relativa à $[w_1, w_1 + i]$ e $\rho\beta$ é a reflexão relativa à $[0, 1 + i]$. Se T é o triângulo $[w_1, 1, w_2]$, temos então que o quadrado $[0, 1, 1 + i, i]$ se decompõe nos triângulos $\rho^j\beta^k(T)$, onde $j = 0, 1, 2, 3$, $k = 0, 1$. Pondo $\tau = \rho\beta$, temos que $\rho = \tau\beta$. Então, os elementos de D_4 são induzidos por simetrias relativas às retas de $\mathbb{C}$

4.3.2

A representação de Weierstrass da superfície de Costa $X(M)$ é inteiramente determinada por P e P' . Porém, P e portanto P' ficam inteiramente

determinadas pela ação de D_4 sobre Q . Se esta ação de D_4 sobre Q se refletir na representação de Weierstrass, $X(M)$ ficará inteiramente determinada conhecendo-se a imagem de X sobre T ou sobre um de seus simétricos.

4.3.3

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \frac{1}{2}P(z) - \frac{a^2}{8(P(z)^2 - e_1^2)}, \\ \Phi_2(z) &= \frac{i}{2}P(z) + \frac{ia^2}{8(P(z)^2 - e_1^2)}, \\ \Phi_3(z) &= a \frac{P(z)}{P'(z)}\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\Phi_1(w_2 + iz) &= \Phi_1(\rho(w_2 + z)) = \frac{1}{2}P(\rho(w_2 + z)) - \frac{a^2}{8(P(\rho(w_2 + z))^2 - e_1^2)} = \\ &= -\frac{1}{2}P(w_2 + z) - \frac{a^2}{8(P(w_2) - e_1^2)} = i \Phi_2(w_2 + z)\end{aligned}$$

pois $P(\rho(w_2 + z)) = -P(w_2 + z)$. Do mesmo modo,

$$\Phi_2(\rho(w_2 + z)) = -i \Phi_1(w_2 + z)$$

Como:

$$P'(w_2 + iz) = iP'(w_2 + z), \quad \Phi_3(\rho(w_2 + z)) = \frac{aiP(w_2 + z)}{P'(w_2 + z)} = i\Phi_3(w_2 + z)$$

Então,

$$\begin{aligned}x_1(\pi(\rho(w_2 + z))) &= Re \int_{p_2}^{\pi(\rho(w_2 + z))} \alpha_1 = \int_{w_2}^{\rho(w_2 + z)} \Phi_1(\xi) d\xi = \\ &= Re \int_{w_2}^{w_2 + iz} \Phi_1(\xi) d\xi = Re \int_0^z \Phi_1(w_2 + iz) idz = \int_0^z i \Phi_2(w_2 + z) idz = \\ &= -Re \int_0^z \Phi_2(w_2 + z) dz = -Re \int_0^{w_2 + z} \Phi_2(\xi) d\xi = -x_2(\pi(w_2 + z))\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$x_2(\pi(\rho(w_2 + z))) = x_1(\pi(w_2 + z))$$

e

$$x_3(\pi(\rho(w_2 + z))) = -x_3(\pi(w_2 + z))$$

Tem-se, então,

$$X(\pi(\rho(w_2 + z))) = R \circ X(\pi(w_2 + z)),$$

onde R é a aplicação ortogonal do $\mathbb{R}^3$ que tem

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como matriz. R é a rotação de ângulo igual à $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário em torno do eixo x_3 , seguida da reflexão relativa ao plano (x_1, x_2) .

4.3.4

Como $P(\beta(w_2 + z)) = \overline{P(w_2 + z)}$ e $P'(\beta(w_2 + z)) = \overline{P'(w_2 + z)}$,

$$\Phi_1(\beta(w_2 + z)) = \overline{\Phi_1(w_2 + z)}$$

$$\Phi_2(\beta(w_2 + z)) = -\overline{\Phi_2(w_2 + z)}$$

$$\Phi_3(\beta(w_2 + z)) = \overline{\Phi_3(w_2 + z)}$$

$$\begin{aligned} X(\pi(\beta(w_2 + z))) &= (x_1(\pi(w_2 + z)), -x_2(\pi(w_2 + z)), x_3(\pi(w_2 + z))) = \\ &= B(X(\pi(w_2 + z))) \end{aligned}$$

Isto é, $X \circ \pi \circ \beta = B \circ X \circ \pi$ onde B é a aplicação ortogonal do $\mathbb{R}^3$ que tem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como matriz. B é a reflexão relativa ao plano (x_1, x_3)

4.3.5

Indicando-se por Θ o difeomorfismo induzido sobre M por $\Theta \in D_4$, temos o seguinte resultado, cuja demonstração já foi essencialmente feita.

Teorema 4.2 *Se Θ é o difeomorfismo induzido sobre M por $\rho^j \circ \beta^k \in D_4$ e $X(M)$ é a superfície de Costa, temos:*

- (1) $X \circ \Theta = T \circ X$, onde $T = R^j \circ B^k$
- (2) Θ é uma isometria de M , relativamente à métrica $X^*(\langle, \rangle)$

Corolário 4.1

- (1) O plano (x_1, x_3) é um plano de simetria de $X(M)$ e $X(\pi[w_3, w_3+1])$ e $X(\pi[0, 1])$ estão contidos neste plano.
- (2) O plano (x_2, x_3) é um plano de simetria de $X(M)$ e $X(\pi[w_1, w_1+i])$ e $X(\pi[0, i])$ estão contidos neste plano.

Demonstração:

$$(a) p \in X(M) \implies p = X(\pi(z)), z \in Q \implies \beta(z) \in Q \implies X(\pi(\beta(z))) \in X(M)$$

. Mas,

$$X(\pi(\beta(z))) = B \circ X(\pi(z)) = B(p) \in X(M)$$

Como B é a reflexão relativa ao plano (x_1, x_3) , ele é um plano de simetria.

(b) Se

$$p \in X(M) \implies p = X(\pi(z)), z \in Q \implies \rho^2 \circ \beta(z) \in Q \implies X \circ \pi(\rho^2 \circ \beta(z)) \in X(M)$$

Então,

$$X(\pi(\rho^2 \circ \beta(z))) = R^2 \circ B \circ X(\pi(z)) = (R^2 \circ B)(X(p)) \in X(M)$$

Como $R^2 \circ B$ é a reflexão relativa ao plano (x_2, x_3) , ele é um plano de simetria.

(c) Se

$$z \in [w_3, 1 + w_3], \beta(z) = z \implies X(\pi(\beta(z))) = X(\pi(z))$$

Mas

$$X(\pi(z)) = B \circ X(\pi(z)) \iff X(\pi(z)) \in \text{plano}(x_1, x_3)$$

(d) Se

$$\begin{aligned} z \in [0, 1], \beta(z) &= z + i, X(\pi(\beta(z))) = X(\pi(z)) = \text{Re} \int_{w_2}^{\beta(z)} \phi(\xi) d\xi \\ &= \text{Re} \int_{w_2}^z \phi(\xi) d\xi + \text{Re} \int_z^{\beta(z)} \phi(\xi) d\xi \\ &= \text{Re} \int_{w_2}^z \phi(\xi) d\xi + \text{Re} \int_z^{z+i} \phi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Como ϕ não tem períodos reais,

$$\operatorname{Re} \int_z^{z+i} \phi(\xi) d\xi = 0 \text{ e } X \circ \pi(\beta(z)) = \operatorname{Re} \int_{w_2}^z \phi(\xi) d\xi = X(\pi(z)).$$

Logo,

$$X(\pi(z)) = B \circ X(\pi(z)), \text{ isto é, } X(\pi(z)) \text{ pertence ao plano } (x_1, x_3)$$

(e) Se

$$\hat{\alpha} = \rho^2 \circ \beta \text{ e } z \in [w_1, w_1 + i], \hat{\alpha}(z) = z \implies R^2 \circ B(X(\pi(z))) = X(\pi(z))$$

Logo $X(\pi(z))$ pertence ao plano (x_2, x_3)

(f) Se

$$\begin{aligned} z \in [0, i], \hat{\alpha}(z) &= 1 - z \text{ e } X \circ \pi(\hat{\alpha}(z)) = \operatorname{Re} \int_{w_2}^{\hat{\alpha}(z)} \Phi(\xi) d\xi \\ &= \operatorname{Re} \int_{w_2}^z \Phi(\xi) d\xi + \operatorname{Re} \int_z^{z+1} \Phi(\xi) d\xi = \operatorname{Re} \int_{w_2}^z \Phi(\xi) d\xi \\ &= X(\pi(z)), \end{aligned}$$

pois Φ não tem períodos reais. Logo, $X(\pi(z))$ pertence ao plano (x_2, x_3) . $\square$

Corolário 4.2 Se $T_3 = \{u + iv/\frac{1}{2} \mid u < 1, \frac{1}{2} \leq v \leq u\}$, $X(\pi(\rho^j \beta^k(T_3)))$, onde $j = 0, 1, 2, 3; k = 0, 1$ é uma decomposição de $X(M)$ em partes congruentes em $\mathbb{R}^3$

Demonstração: É consequência imediata do teorema. $\square$

4.3.6

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 2. Uma sequência (p_k) de pontos distintos de M é divergente se ela não tem nenhum ponto de acumulação em M . Se $X(M)$ é uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$, o conjunto:

$$\mathcal{F} = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = \lim_{p_k \rightarrow +\infty} X(p_k), \text{ onde } (p_k) \text{ é uma sequência divergente de } M\}$$

é o conjunto dos valores fronteira de $X(M)$. O fecho convexo $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de um subconjunto $\mathcal{A}$ do $\mathbb{R}^3$ é o menor conjunto convexo fechado que contém $\mathcal{A}$. Dado $B \subset \mathbb{R}^3$, $\overset{\circ}{B}$ é o interior de B .

Teorema 4.3 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima, onde M é uma variedade diferenciável de dimensão 2 e $\mathcal{F}$ o conjunto dos valores fronteira de $X(M)$. Então:*

- (i) $X(M) \subset \mathcal{C}(\mathcal{F})$.
- (ii) *Se M é compacta com bordo ∂M , $M_0 = M - \partial M$ e se $X(M)$ não está contida em nenhum plano do $\mathbb{R}^3$, $X(M_0) \subset \overline{\mathcal{C}(\mathcal{X}(\partial M))}$.*

Demonstração: Ver páginas 53 de [33] e 15 de [21]. □

4.3.7

Proposição 4.2 *X transforma*

- (1) $\pi((0, 1 + i))$ *injetivamente sobre a reta $x_1 - x_2 = x_3 = 0$*
- (2) $\pi((1, i))$ *injetivamente sobre a reta $x_1 + x_2 = x_3 = 0$*
- (3) $\pi([w_2, w_2 + \frac{1}{2}])$ *injetivamente sobre uma curva contida no quadrante*

$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ *do plano (x_1, x_3) , que é um gráfico sobre o eixo x_1 , de tal modo que*

$$X(\pi(w_2)) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \pi(w_2 + \frac{1}{2})} x_1(p) = \lim_{p \rightarrow \pi(w_2 + \frac{1}{2})} x_3(p) = +\infty.$$

- (4) $\pi((w_3 + 1, 1 + i))$ *numa curva contida no quadrante $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ do plano (x_2, x_3) , que é um gráfico sobre o eixo x_3 e :*

$$\lim_{p \rightarrow \pi(1+i)} x_2(p) = \lim_{p \rightarrow \pi(w_3+1)} x_2(p) = \lim_{p \rightarrow \pi(w_3+1)} x_3(p) = +\infty.$$

Demonstração:

(a) $(0, 1 + i)$ é fixado por $\rho\beta$. Então, dado $p \in \pi((0, 1 + i))$, $X(p) = R \circ B(X(p))$, isto é, $(x_1(p), x_2(p), x_3(p)) = (x_2(p), x_1(p), -x_3(p))$. Ou seja, $x_1(p) - x_2(p) = x_3(p) = 0$.

(b) Mostremos, inicialmente, que $\pi([\frac{1+i}{2}, 0])$ é transformado injetivamente sobre

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x_1 - x_2 = x_3 = 0, x_1 \in (-\infty, 0]\}$$

Parametrizando $[\frac{1+i}{2}, 0)$, temos:

$$z_1(t) = (\frac{1}{2} - t) + i(\frac{1}{2} - t), \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}$$

Dos itens (b) e (e) da seção 3.6, temos:

$$P(z_1(t)) = \lambda(t)i, \quad \lambda(0) = 0, \quad \lambda(1) = -\infty \quad \text{e} \quad \lambda(t), \lambda'(t) < 0$$

Como

$$\Phi_1(\xi) = \frac{1}{2} \left(P(\xi) - \frac{a^2}{4(P(\xi)^2 - e_1^2)} \right),$$

$$\begin{aligned} x_1(\pi(z_1(t))) &= \operatorname{Re} \int_0^t \frac{1}{2} \left(i\lambda(t) + \frac{a^2}{4(\lambda^2(t) + e_1^2)} \right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) dt \\ &= \int_0^t \frac{1}{4} \left(\lambda(t) - \frac{a^2}{4(\lambda^2(t) + e_1^2)} \right) dt \end{aligned}$$

e

$$(x_1(\pi(z(t))))' = (x_2(\pi(z(t))))' = \frac{1}{4} \left(\lambda(t) - \frac{a^2}{4(\lambda^2(t) + e_1^2)} \right) < 0$$

Portanto, $x_1(\pi(z_1(t)))$ é decrescente. Para finalizar, devemos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 1} x_1(\pi(z_1(t))) = -\infty$$

$$\text{Mas, } \lim_{t \rightarrow 1} x_1(\pi(z_1(t))) = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{1}{4} \left(\lambda(t) - \frac{a^2}{4(\lambda^2(t) + e_1^2)} \right) dt,$$

onde $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(t) < 0$ e $\lim_{t \rightarrow 1} \lambda(t) = -\infty$,

$$\frac{-a^2}{4(\lambda^2(t) + e_1^2)} \quad \text{é contínua em } [0, 1)$$

e $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{-a^2}{4(\lambda^2(t) + e_1^2)} = 0$. Logo

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{-a^2}{4(\lambda^2(t) + e_1^2)} dt \quad \text{é finito.}$$

De $P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\tilde{w} \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \tilde{w})^2} - \frac{1}{\tilde{w}^2} \right)$, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{1}{4} \lambda(t) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{4} \int_0^t \left(\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_1^2(t)} \right) + \operatorname{Im} \left(\sum_{\tilde{w} \in L - \{0\}} \frac{1}{(z_1(t) - \tilde{w})^2} - \frac{1}{\tilde{w}^2} \right) \right) dt . \end{aligned}$$

Em $z_1(t)$, P é analítica exceto em $z_1(1) = 0$. Logo

$\sum_{\tilde{w} \in L - \{0\}} \frac{1}{(z - \tilde{w})^2} - \frac{1}{\tilde{w}^2}$ é analítica em $\{z_1(t)\} \cup \{0\}$ e

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{4} \int_0^t \operatorname{Im} \left(\sum_{\tilde{w} \in L - \{0\}} \frac{1}{(z_1(t) - \tilde{w})^2} - \frac{1}{\tilde{w}^2} \right) dt \text{ é finito.}$$

Logo

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{4} \int_0^t \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_1^2(t)} \right) dt = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{4} \int_0^t \frac{-2}{(1-t)^2} dt = \lim_{t \rightarrow 1} -\frac{1}{2(1-t)} \Big|_0^t = -\infty$$

Então, $\lim_{t \rightarrow 1} x_1(\pi(z_1(t))) = -\infty$. Logo, $\pi([\frac{1+i}{2}, 0))$ é transformado injetivamente na semi-reta

$$x_1 - x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 \in (-\infty, 0]$$

(c) Como $[w_2, 0]$ é transformado por ρ em $[w_2, 1]$ e

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$X(\pi([w_2, 1]))$ é transformado injetivamente sobre a semi-reta

$$x_1 + x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 \in [0, +\infty)$$

(d) Analogamente,

$$X(\pi(w_2, 1+i)) = X(\pi(\rho(w_2, 1+i))) =$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_1 = x_3 = 0, \quad x_1 \in [0, +\infty)\}$$

ou seja, $X(\pi[w_2, 1+i])$ é transformado injetivamente na semi-reta:

$$x_1 - x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 \in [0, +\infty)$$

(e)

$$\begin{aligned} X(\pi[w_2, i]) &= X(\pi(\rho[w_2, i])) \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 \in (-\infty, 0]\} \end{aligned}$$

ou seja, $\pi[w_2, i]$ é transformado injetivamente na semi-reta

$$x_1 - x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 \in (-\infty, 0]$$

Isto conclui a prova dos itens (1) e (2) .

(f) Seja $\gamma(t) = \left(\frac{t+1}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $0 \leq t \leq 1$ parametrização para $[w_2, w_2 + \frac{1}{2}]$. Do Corolário 4.1, $x(\pi(\gamma(t))) \in \text{plano}(x_1, x_3)$, $\forall t \in [0, 1)$. Portanto:

$$x_2(\gamma(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, 1)$$

Da secção 3.6

$$P(\gamma(t)) = k(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{tal que} \quad k(t) \in [-e_1, 0] \text{ é}$$

decrecente com $k(0) = 0$ e $k(1) = -e_1$.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(\pi(\gamma(t))) = \frac{Re}{2} \int_{w_2}^{\gamma(t)} \left(P(\xi) - \frac{a^2}{4(P(\xi)^2 - e_1^2)} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^t \left(k(t) - \frac{a^2}{4(k(t)^2 - e_1^2)} \right) dt = \frac{1}{4} \int_0^t \frac{(k(t)(k(t)^2 - e_1^2) - a^2/4)}{4(k(t)^2 - e_1^2)} \end{aligned}$$

Em $[-e_1, 0]$, $k(k^2 - e_1^2)$ assume valor máximo em $\frac{-e_1}{\sqrt{3}}$, logo

$$k(t)(k(t)^2 - e_1^2) - a^2/4 \leq \frac{e_1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2e_1^2}{3} - 2\pi e_1^2 = 2e_1^2 \left(\frac{e_1}{3\sqrt{3}} - \pi \right) < 0,$$

já que $e_1 = 6,875185$ de [1]. Logo, como $k^2 - e_1^2 < 0$, o integrando da integral é positivo $\forall t$. Portanto: $x_1(t)$ é crescente e não negativo sendo igual a zero somente quando $t = 0$, ou seja, em $\pi(w_2)$. A função $\frac{1}{P(z)^2 - e_1^2}$ tem polo simples em $w_2 + \frac{1}{2}$. Então,

$$\frac{1}{P^2(z) - e_1^2} = \frac{a_{-1}}{z - w_2 - \frac{1}{2}} + h(z), \quad \text{onde } h \text{ é analítica em } w_2 + \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\frac{1}{k^2(t) - e_1^2} = \frac{1}{P(\gamma(t))^2 - e_1^2} = \frac{2a_{-1}}{(t-1)} + h\left(\frac{t-1}{2}\right), \quad a_{-1} > 0,$$

pois $k(t) \in [-e_1, 0]$. Mas,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{2a_{-1}}{(t-1)} dt = \lim_{t \rightarrow 1} 2a_{-1} \ln |t-1| = -\infty$$

Como $k(t)$ e $h\left(\frac{t-1}{2}\right)$ são contínuas em $[0, 1]$,

$$\lim_{p \rightarrow \pi(w_2 + \frac{1}{2})} x_1(p) = \lim_{t \rightarrow 1} x_1(t) = +\infty$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = x_3(\pi(\gamma(t))) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln \left| \frac{k(t) - e_1}{k(t) + e_1} \right| = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln \left| 1 - \frac{2e_1}{k(t) + e_1} \right| \\ \left(\frac{k(t) - e_1}{k(t) + e_1} \right)' &= \frac{2e_1 k'(t)}{(k(t) + e_1)^2} < 0, \quad \text{pois } k'(t) < 0. \text{ Logo} \\ g(t) &= \frac{k(t) - e_1}{k(t) + e_1} \text{ é decrescente,} \end{aligned}$$

com $g(0) = -1$ e $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = -\infty$. Portanto, $\left| \frac{k(t) - e_1}{k(t) + e_1} \right|$ é crescente e não negativa. Mas,

$$x_3(t) = 0 \iff \frac{k(t) - e_1}{k(t) + e_1} = -1, \text{ isto é } k(t) = 0 \iff t = 0.$$

Portanto

$$x_3(t) \text{ é crescente e não negativa sendo } x_3(\gamma(t)) = 0 \iff t = 0$$

Ou seja, em $x_3(\pi(w_2)) = 0$. Também:

$$\lim_{p \rightarrow \pi(w_2 + \frac{1}{2})} x_3(p) = \lim_{t \rightarrow 1} x_3(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln \left| \frac{k(t) - e_1}{k(t) + e_1} \right| = +\infty$$

Temos, também, que $t = t(x_1)$ com $0 < x_1 < +\infty$. Então, $X(t) = (x_1, 0, x_3(x_1))$, com $0 < x_3 < +\infty$. Isto conclui a prova de (3).

(g) Seja $\alpha(t) = \frac{(1+t)i}{2}$, $0 \leq t \leq 1$ uma parametrização para $[w_3, i]$. Do Corolário 4.1 do teorema 4.2, $X(t) = X(\pi(\alpha(t))) \in \text{plano } (x_2, x_3) \forall t \in (0, 1)$, portanto

$$x_1(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Da secção 3.6,

$P(\alpha(t)) = \phi(t)$, $0 \leq t < 1$ tal que $\phi(t) \in (-\infty, -e_1]$ é decrescente com $\phi(0) = -e_1$ e $\lim_{t \rightarrow 1} \phi(t) = -\infty$. Portanto, $\phi(t) < 0, \phi'(t) < 0$ ($\forall t$)

(h) Considere a função

$$\begin{aligned} x_2(t) = x_2(\pi(\alpha(t))) &= x_2(t_0) + \frac{Re}{2} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} i \left(P(\xi) + \frac{a^2}{P^2(\xi) - e_1^2} \right) d\xi = \\ &= x_2(t_0) + \int_{t_0}^t \left(-\frac{1}{4} \right) \left(\phi(t) + \frac{a^2/4}{\phi^2(t) - e_1^2} \right) dt \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{1}{4} \left(\phi(t) + \frac{a^2/4}{\phi(t)^2 - e_1^2} \right). \text{ Temos:} \\ \lim_{t \rightarrow 0} g(t) &= -\infty, \\ \lim_{t \rightarrow 1} g(t) &= +\infty \text{ e} \\ g'(t) &= -\frac{1}{4} \left(\phi'(t) - \frac{(a^2/4)2\phi(t)\phi'(t)}{\phi(t)^2 - e_1^2} \right) > 0, \forall t \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Portanto,

$\exists t_0 \in]0, 1[$ único tal que $g(t_0) = 0$, $g(t) > 0$, se $t > t_0$ e $g(t) < 0$ se $t < t_0$.

Como $x_2'(t) = g(t)$, temos que $x_2(t)$ é decrescente quando $t < 0$ e crescente quando $t > 0$. Logo, x_2 assume um mínimo absoluto em t_0 . Vamos avaliar $\lim_{t \rightarrow 0^+} x_2(\alpha(t))$ e $\lim_{t \rightarrow 1^-} x_2(\alpha(t))$.

(k) A função $j(z) = \frac{-a^2/4}{P^2(z) - e_1^2}$ possui polo simples em

$$z = \frac{i}{2} \implies j(z) = \frac{a-1}{z - \frac{i}{2}} + h(z), \quad h(z) \text{ analítica em } \frac{i}{2}$$

Como $j(\alpha(t)) < 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0} j(\alpha(t)) = -\infty$

$\implies a-1$ é um imaginário puro não nulo, $h(\alpha(t)) \in \mathbb{R}$ e $\frac{a-1}{i} < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Então, } \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{t_0}^t -\frac{a^2/4}{\phi^2(t) - e_1^2} dt &= \\ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2a-1}{i} (\ln t - \ln t_0) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{t_0}^t h(\alpha(t)) dt &= +\infty. \end{aligned}$$

Como $\phi(t)$ é contínua em $]0, t_0[$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x_2(\pi(\alpha(t))) = +\infty$$

(l) A função $P(z)$ tem polo duplo em $i \implies$

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{a_{-2}}{(z-i)^2} + \frac{a_{-1}}{z-i} + h^*(z), \quad h^*(z) \text{ analítica em } z=i \\ \text{Como } P(\alpha(t)) &= \phi(t) < 0 \quad \forall t \in]0, 1[, \\ 0 > \phi(t) &= P(\alpha(t)) = \frac{-4a_{-2}}{(t-1)^2} + \frac{2a_{-1}}{(t-1)} + h^*(\alpha(t)), \quad \forall t \in]0, 1[\\ \implies \phi(t) &= -\frac{4a_{-2}}{(t-1)^2} m(\alpha(t)), \quad m(z) \text{ analítica em } z=i \text{ e} \\ m(i) &\neq 0 \end{aligned}$$

Logo, para t próximo de 1, $a_{-2}m(\alpha(t)) > 0$. Como $m(\alpha(t))$ é contínua em $t=1$, $a_{-2}m(\alpha(t)) > M > 0$ para $t > t_1, t_1 \in (0, 1)$ e $M > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Mas, } \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{t_0}^t \frac{-\phi(t)}{4} dt &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{t_0}^{t_1} -\frac{\phi(t)}{4} dt + \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{t_1}^t -\frac{\phi(t)}{4} dt \\ \text{Como } \int_{t_1}^t -\frac{\phi(t)}{4} &\geq -M \frac{1}{t-1}, \text{ temos que } \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^1 -\frac{\phi(t)}{4} dt = +\infty \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x_2(\pi(\alpha(t))) = +\infty$$

$$(m) \quad x_3(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln \left| \frac{\phi(t) - e_1}{\phi(t) + e_1} \right|$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi(t) - e_1}{\phi(t) + e_1} \right)' &= \left(\frac{\phi'(t)(\phi(t) + e_1) - \phi'(t)(\phi(t) - e_1)}{(\phi(t) + e_1)^2} \right) = \frac{2e_1\phi'(t)}{(\phi(t) + e_1)^2} < 0 \text{ e} \\ \frac{\phi(t) - e_1}{\phi(t) + e_1} &= 1 - \frac{2e_1}{\phi(t) + e_1} > 0 \quad \forall t \in]0, 1[\implies \end{aligned}$$

$x_3(t)$ é decrescente

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x_3(t) = +\infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow 1^-} x_3(t) = 0, \text{ temos que } x_3(t) > 0 \quad \forall t \in]0, 1[$$

Figura 4.4: O triângulo $D = [w_2, w_2 + 1, 1 + i]$ e o conjunto D^*

Temos também que $t = t(x_3)$, com $0 < x_3 < +\infty$. Então, $X(t) = (0, x_2(x_3), x_3)$ com $0 < x_3 < +\infty$

(n) Considere o triângulo $[w_2, w_2 + 1, 1 + i]$ e seja $D = [w_2, w_2 + 1, 1 + i] - \{w_2, w_3 + 1, w_2 + 1, 1 + i\}$.

$$\alpha_1^* = X(\pi((1 + i, w_2))) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 = x_3 = 0, x_1 > 0\}$$

$$\alpha_2^* = X(\pi((w_2, w_3 + 1))) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 \geq 0, x_2 = 0, x_3 \geq 0\}$$

$$\alpha_3^* = X(\pi((w_3 + 1, w_2 + 1))) = X(\pi((w_3, w_2))) = X(\pi(\rho^2(w_3 + 1, w_2))) = \\ = R^2 \circ X((\pi(w_3 + 1, w_2))) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 \leq 0, x_2 = 0, x_3 \geq 0\}$$

$$\alpha_4^* = X(\pi((w_2 + 1, 1 + i))) = X(\pi((w_2, i))) = X(\pi(\rho((w_2, 1 + i)))) = \\ = R \circ X((w_2, 1 + i)) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = x_3 = 0, x_1 < 0\}$$

$$\alpha^* = \alpha_1^* \cup \alpha_2^* \cup \alpha_3^* \cup \alpha_4^* \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2, x_3 \geq 0\}$$

que é convexo. Pelo item (i) do teorema 4.3

$$X(\pi(D)) \subset \mathcal{C}(\alpha) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2, x_3 \geq 0\}$$

Considere D^* compacto como na figura 4.4 e as curvas β_1 , β_2 , β_3 e β_4 de modo que o bordo de D^* seja diferenciável. Pelo resultado anterior,

$$X(\pi(\beta_i)) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2, x_3 \geq 0\} \forall i = 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

Figura 4.5: As curvas α_1^* , α_2^* , α_3^* e α_4^*

Portanto, pelo item (ii) do teorema 4.3,

$$X(\pi(\overset{\circ}{D}^*)) \subset \overline{\overset{\circ}{C}(\mathcal{X}(\pi(\partial\mathcal{D}^*)))} \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2, x_3 > 0\}$$

Portanto

$$X(\pi((w_3 + 1, 1 + i))) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0, x_2, x_3 > 0\}$$

Isto conclui a prova de (4). □

Com relação ao sinal das componentes da aplicação X , temos:

4.4 Sinal das componentes de X em $\mathbb{Q}$

4.4.1

Proposição 4.3 *Sejam x_1, x_2 e x_3 as componentes da superfície de Costa $X(M)$. Se $I, II, III, \dots, VIII$ são os triângulos explicitados esquematicamente na figura 4.3, temos:*

$$(i) \quad x_3 > 0 \iff z \in (II \cup III \cup VI \cup VII)^0$$

Figura 4.6: As Imagens por $\pi \circ X$ das curvas β_1 , β_2 , β_3 e β_4

$$\begin{aligned}
 x_3 = 0 &\iff z \in (i, 1) \text{ ou } z \in (0, i + 1) \\
 x_3 < 0 &\iff z \in (I \cup IV \cup V \cup VIII)^0 \\
 \text{(ii) } x_2 > 0 &\iff z \in (III \cup IV \cup V \cup VI)^0 \\
 x_2 = 0 &\iff z \in (w_3, w_3 + 1) \text{ ou } z \in (0, 1) \\
 x_2 < 0 &\iff z \in (I \cup II \cup VII \cup VIII)^0 \\
 \text{(iii) } x_1 > 0 &\iff z \in (I \cup II \cup III \cup IV)^0 \\
 x_1 = 0 &\iff z \in (0, i) \text{ ou } z \in (\frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}) \\
 x_1 < 0 &\iff z \in (V \cup VI \cup VII \cup VIII)^0
 \end{aligned}$$

Geometricamente, temos a figura 4.7.

Demonstração:

É consequência de (a) e do teorema 4.2, já que

$$x_1(p), x_2(p), x_3(p) > 0 \text{ se } p \text{ pertence ao interior de } III.$$

□

Figura 4.7: Sinal das componentes: (a) $x_3(\pi(z))$ (b) $x_2(\pi(z))$ (c) $x_1(\pi(z))$, com $z = u + iv$.

4.5 X é um mergulho:

Teorema 4.4 *A superfície de Costa é mergulhada.*

Demonstração:

4.5.1

Precisaremos dos seguintes fatos:

(a)

Teorema 4.5 *Uma imersão injetora própria é um mergulho.*

Demonstração : Ver página 198 de [26].

(b) Um semi-espaco $H \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto do tipo $H = \{x \in \mathbb{R}^m / \alpha(x) \leq 0\}$, onde $\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é linear não nula. Neste caso, $\partial H = \{x \in \mathbb{R}^m / \alpha(x) = 0\}$ é o bordo de H . Se H é um semi-espaco do $\mathbb{R}^m$ e A é um subconjunto aberto de H , $\partial A = A \cap \partial H$ é o bordo de A .

Teorema 4.6 *Sejam $A \subset H$, $B \subset K$ abertos em semi-espacos de $\mathbb{R}^m$. Se $f : A \rightarrow B$ é um difeomorfismo de classe C^1 , então $f(\partial A) = \partial B$. Em particular, $f|_{\partial A}$ é um difeomorfismo entre ∂A e ∂B .*

Demonstração: Ver página 476 de [24].

Figura 4.8: O triângulo T_3

(c) Sejam X, Y espaços topológicos, $p : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento quando cada ponto $y \in Y$ pertence a um aberto $V \subset Y$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ é uma reunião de abertos U_{α} , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica homeomorficamente sobre V .

Teorema 4.7 Sejam X, Y espaços topológicos, onde X é um espaço de Hausdorff e Y é conexo. Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo local, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) Existe n inteiro positivo tal que a imagem inversa $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ possui n elementos.
- (2) f é própria e sobrejetiva.
- (3) f é uma aplicação de recobrimento tal que $f^{-1}(y), y \in Y$, é finito.

Demonstração: Ver página 133 de [25].

4.5.2 Demonstração que a superfície é mergulhada

(a) Seja $T_3 = \{z = u + iv \mid \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq u\} - \{w_3 + 1, 1 + i\}$ e $S = \pi(T_3)$. Então,

(1) X transforma injetivamente $\pi([w_2, w_3 + 1])$ sobre uma curva γ_1 contida no quadrante $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$ do plano (x_1, x_3) , que é um gráfico sobre o eixo x_1 de tal modo que:

$$X(\pi(w_2)) = 0 \quad \lim_{p \rightarrow \pi(w_3 + 1)} x_1(p) = \lim_{p \rightarrow \pi(w_3 + 1)} x_3(p) = +\infty$$

Figura 4.9: As curvas γ_1, γ_2 e γ_3

(2) X transforma injetivamente $\pi((w_3 + 1, 1 + i))$ numa curva γ_2 contida no quadrante $x_2 > 0, x_3 > 0$, do plano (x_2, x_3) de tal modo que :

$$\lim_{p \rightarrow \pi(1+i)} x_2(p) = \lim_{p \rightarrow \pi(w_3+1)} x_2(p) = \lim_{p \rightarrow \pi(w_3+1)} x_3(p) = +\infty$$

(3) X transforma $\pi([w_2, 1 + i))$ injetivamente sobre a semi-reta

$$\gamma_3 : x_1 = x_2, x_1 \geq 0 \text{ do plano } (x_1, x_2)$$

Do teorema 4.6, temos que nenhum ponto de $\pi(\overset{\circ}{T}_3)$ é transformado por X sobre $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Como X é uma imersão, X é então um difeomorfismo local de S sobre $X(S)$. Como X é própria e $(X|_S)^{-1}(q)$ só tem um ponto se q pertence à $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, temos pelo teorema 4.7, que $X|_S$ é injetora. Da proposição 4.2 e do teorema 4.3, temos que $X(S)$ está contida no octante $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ com $\partial X(S)$ contida nos quadrantes que delimitam este octante.

(b) Mas,

$$M = \bigcup_{j=0}^3 \bigcup_{s=0}^1 \pi(\rho^j \beta^s(T_3)), \quad X(\pi(\rho^j \beta^s(z))) = R^j B^s X(\pi(z)),$$

Porém, cada octante do $\mathbb{R}^3$ é uma imagem por uma única transformação do tipo $R^j \circ B^s, j = 0, 1, 2, 3, s = 0, 1$ do octante $(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0)$. Então X é injetora e pelo teorema 4.5, X é um mergulho. $\square$

Figura 4.10: A superfície de Costa para $|X| < R$

Figura 4.11: As curvas γ_1 , γ_2 e γ_3 na superfície de Costa

Figura 4.12: A superfície de Costa para $|X| < R$ e $x_3 < 0$

Figura 4.13: A superfície de Costa para $|X| < R$ e $x_1 < 0$

Capítulo 5

Unicidade da Superfícies de Costa

5.1 Introdução

Neste capítulo, mostraremos a unicidade da superfície estudada no capítulo anterior, ou seja, que existe uma única imersão mínima completa em $\mathbb{R}^3$ de gênero um, três fins mergulhados e paralelos sendo dois do tipo catenóide e um do tipo planar. A fim de mostrar a asserção acima, faremos uso de resultados sobre imersões mínimas completas em $\mathbb{R}^3$, funções elípticas e imersões mínimas de gênero um.

Se $X_1(M_1), X_2(M_2)$ são superfícies mínimas completas do $\mathbb{R}^3$, dizemos que elas são iguais se existem T movimento rígido e S homotetia do $\mathbb{R}^3$ tais que $S(T(X_1(M_1))) = X_2(M_2)$. No que segue, mostraremos que quando $X(M)$ é uma superfície mínima completa do $\mathbb{R}^3$, com curvatura total -12π , de gênero um, tem três fins mergulhados e paralelos, sendo dois do tipo catenóide e um do tipo planar, ela é a superfície de Costa. Este resultado será demonstrado em várias etapas.

1ª etapa: Mostra-se que para uma tal superfície, o fim planar tem que ter ordem 2.

2ª etapa: Sejam $L(1, \tau)$, reticulado de $\mathbb{C}$ tal que $\tau = x + iy$, onde $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, y > 0$, P a função de Weierstrass relativa à $L(1, \tau)$,

$$w_1 = \frac{1}{2}, w_3 = \frac{\tau}{2}, w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}, P(w_j) = e_j, j = 1, 2, 3, \alpha(t) = \frac{i}{3} + it,$$

$$\beta(t) = \frac{1}{3} + it, 0 \leq t \leq 1, 2\eta_1 = - \int_{\alpha} P(z)dz, 2\eta_2 = - \int_{\beta} P(z)dz, T^2 = \mathbf{C}/L(1, \tau),$$

$\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T}^2$ a aplicação quociente. Se $M = T^2 - \{q_1, q_2, q_3\}$ e $X(M)$ é uma superfície mínima completa do $\mathbb{R}^3$ tendo curvatura total -12π , com três fins mergulhados e paralelos, dois do tipo catenoide e um do tipo planar de ordem 2, após um movimento rígido e homotetia do $\mathbb{R}^3$ e uma transformação conforme das coordenadas de $\mathbf{C}$, mostra-se que $\pi(0) = q_3, \pi(w_k) = q_1, \pi(w_t) = q_2$ e que existe uma representação de Weierstrass (g, w) para $X(M)$ tal que:

$$g = \frac{2B(e_k - e_t)}{P'}, w = (P - e_s)dz,$$

onde $B \neq 0, (k, s, t)$ é uma permutação de $\{1, 2, 3\}$ e η_j, e_j satisfazem as equações:

$$\overline{2\eta_1 + e_s} = B^2 \left[\frac{2\eta_1 + e_k}{e_k - e_s} + \frac{2\eta_1 + e_t}{e_t - e_s} \right] \quad (I)$$

$$y\overline{2\eta_1 + e_s} - \pi = \pi B^2 \left[\frac{1}{e_k - e_s} + \frac{1}{e_t - e_s} \right] \quad (I)$$

3ª etapa: Para que (II) seja satisfeita, $L(1, \tau) = L(1, yi)$ e $s = 2$.

4ª etapa: (I) e (II) são satisfeitas somente se $L(1, \tau) = L(1, i)$ e $B = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Temos, então, que $g = \frac{2B(e_1 - e_3)}{P'} = \pm \frac{2\sqrt{2\pi}e_1}{P'}, w = Pdz$, ou seja, $X(M)$ é a superfície de Costa.

5.2 Alguns Resultados e Definições

Teorema 5.1 *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima regular completa de curvatura total finita. Então:*

- [i] M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann $\bar{M}_\gamma$ compacta de gênero γ , perfurada nos pontos $q_1, q_2, \dots, q_k$.
- [ii] Existe uma função meromorfa g e uma diferencial meromorfa w em $\bar{M}_\gamma$ tais que w é holomorfa em M e $q \in M$ é um polo de ordem m de $g \iff q$ é um zero de ordem $2m$ de w . g é a normal de Gauss da imersão.
- [iii] Se δ é um caminho fechado em M , então: $\operatorname{Re} \oint_\delta gw = 0$ e $\overline{\oint_\delta w} = \oint_\delta g^2 w$.
- [iv] Todo caminho divergente em M tem comprimento infinito.

Reciprocamente, sejam $\bar{M}_\gamma$ uma superfície de Riemann compacta
 $M = \bar{M}_\gamma - q_1, q_2, \dots, q_k$, onde $q_1, q_2, \dots, q_k \in \bar{M}_\gamma$, g uma função meromorfa em $\bar{M}_\gamma$ e w uma diferencial meromorfa em $\bar{M}_\gamma$. Se (g, w) satisfaz a (iii) e (iv), então $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$x(q) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{q_0}^q ((1-g^2)w, i(1+g^2)w, 2gw) \quad (5.2.1)$$

$$w = f dz$$

é uma imersão mínima com curvatura total finita. Além disso, se X satisfaz a (iv), X é completa.

Demonstração: Ver [33] e [7]. □

Proposição 5.1 *Seja F um fim, correspondente à q , de uma superfície mínima completa tendo curvatura total finita. Se (g, η) é uma representação de Weierstrass de $X(M)$ tal que $g(q) = 0$, temos que:*

F é mergulhado se, e só se, η tem um polo de ordem 2 em q .

$$F = m - 1$$

Demonstração: Ver página 96 de [6].

Nas condições da Proposição,

$$g(z) = a_n z^n + o(z^{n+1}) \text{ e } \eta(z) = \left[\frac{b}{z^2} + o(z^{-1}) \right] dz, a_n, b \neq 0, n \geq 1 \quad (5.2.2)$$

Dizemos, então, que F é do tipo catenóide se $n = 1$ e é do tipo planar de ordem $n - 1$, se $n > 1$.

Sejam:

$$F = \{\tau = x + yi \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 \geq 1, y > 0, -1/2 \leq x \leq 1/2\}$$

e

$$L(1, \tau) = \{m + n\tau; m, n \in \mathbb{Z}\}, \tau \in F$$

Teorema 5.2 *Sejam F e $L(1, \tau)$ definidos anteriormente. Então, para todo $C/L(w, w')$, existe $\tau \in F$ tal que $C/L(1, \tau)$ é conformemente equivalente à $C/L(w, w')$. Além disso, se $C/L(1, \tau)$ é conformemente equivalente à $C/L(1, \tau')$, com $\tau \neq \tau'$ e $\tau, \tau' \in F$, temos que $\tau, \tau' \in \operatorname{Fr} F$ e $\tau' = -\bar{\tau}$.*

Demonstração: Ver página 12 de [6].

Portanto, daqui em diante, sem perda de generalidade, as superfícies mínimas consideradas serão do tipo $C/L(1, \tau) = T_\tau$, com $L(1, \tau)$ definido anteriormente. E, então:

$$w_1 = 1/2, w_2 = (1 + \tau)/2, w_3 = \tau/2 \quad (5.2.3)$$

Além dos resultados demonstrados no capítulo 3, faremos uso ainda da seguinte propriedade de ξ :

Proposição 5.2 *Seja $\xi = \frac{1}{z} + \sum_{w \in L(1, \tau) - \{0\}} \left\{ \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right\}$ a função ξ de Weierstrass relativa ao reticulado $L(1, \tau)$. Então, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,*

$$\xi(z_1 \pm z_2) = \xi(z_1) \pm \xi(z_2) + \frac{1}{2} \frac{P'(z_1) \mp P'(z_2)}{P(z_1) - P(z_2)} \quad (5.2.4)$$

Demonstração: Ver página 28 de [6].

Teorema 5.3 *O plano e a catenóide são as únicas superfícies mínimas completas mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ de curvatura total finita e gênero zero.*

Demonstração: Ver página 299 de [27]. □

Teorema 5.4 (Strong Halfspace Theorem) *Suponha que M_1 e M_2 são duas superfícies mínimas propriamente imersas em $\mathbb{R}^3$. Se M_1 e M_2 são disjuntas, então M_1 e M_2 são planos paralelos.*

Demonstração : Ver [28]. □

Teorema 5.5 *Uma superfície mínima completa mergulhada em $\mathbb{R}^3$ é um plano ou tem pelo menos 2 fins.*

Demonstração : Ver corolário do teorema 4 da página 209 de [19]. □

Teorema 5.6 *Seja $X(M)$ uma superfície mínima completa do $\mathbb{R}^3$ tendo curvatura total finita, e dois fins mergulhados. Se M é conexa, $X(M)$ é o catenóide.*

Demonstração : Ver página 805 de [35]. □

Antes de demonstrar o Teorema principal, mostraremos alguns resultados necessários ao entendimento daquele.

5.3 Inexistência de Superfície Mínima com fins mergulhados e paralelos sendo dois do tipo catenóide e um do tipo planar de ordem 1

5.3.1

Proposição 5.3 *Sejam g e w função e diferencial elípticas relativas ao reticulado $L(1, \tau)$, e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que:*

- [i] $z_1 + z_2 \notin 0$.
- [ii] g tem ordem três com $\{z_1, z_2, w_s\}$ como conjunto L -irreduzível de polos, onde $s \in \{1, 2, 3\}$ e 0 como zero.
- [iii] $w = (P - e_s)dz$ e $\text{Res}_{z_j} g^2 w = 0, j = 1, 2$.

Então:

$$\frac{P'(z_1) + P'(z_2)}{P(z_1) - P(z_2)} = \frac{P'(z_1)}{P(z_1) - e_s} = -\frac{P'(z_2)}{P(z_2) - e_s} \text{ e } z_1 \equiv z_2 + w_s \quad (5.3.1)$$

Demonstração:

(a) Sejam $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in R_0 = \{u + iv \mid 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1\}$ tais que $\hat{z}_1 \equiv z_1, \hat{z}_2 \equiv z_2$. Se $P(z_1) = P(z_2) = b$, teríamos que $h(z) = P(z) - b$ é uma função elíptica de ordem 2 tendo como zeros em R_0 , $\hat{z}_1$ e $\hat{z}_2$ e como polo duplo 0. Então, $\hat{z}_1 + \hat{z}_2 = 0$, isto é, $z_1 + z_2 \equiv 0$. Analogamente, se $P(z_i) = P(w_s)$, $z_i \equiv -w_s \equiv w_s$. Logo,

$$P(z_1) \neq P(z_2) \text{ e } P(z_i) \neq P(w_s) \forall i \in \{1, 2\}$$

Do item (ii), g tem três polos simples em z_1, z_2 e w_s e zero na origem. Do item (iii) e como P tem ordem 2 com polo duplo na origem, w tem ordem 2 com polo duplo na origem. Como $P'(w_s) = 0$, w tem zero duplo em w_s .

(b) Portanto, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que g é uma função elíptica com polos simples em z_1, z_2 e w_s e partes principais $\frac{a}{z-z_1}, \frac{b}{z-z_2}, \frac{c}{z-w_s}$ respectivamente, onde $a, b, c \neq 0$. Logo, pelo teorema de caracterização de funções elípticas pela parte principal dado no capítulo III, temos:

$$g(z) = a\xi(z - w_s) + b\xi(z - z_1) + c\xi(z - z_2) + K \quad (5.3.2)$$

Figura 5.1: Distribuição de polos e zeros de g e w para o caso $s = 2$

Mas, $g(0) = 0$ e ξ é ímpar $\implies K = a\xi(w_s) + b\xi(z_1) + c\xi(z_2)$. Portanto:

$$g(z) = a\xi(z - w_s) + b\xi(z - z_1) + c\xi(z - z_2) + a\xi(w_s) + b\xi(z_1) + c\xi(z_2)$$

Mas, dado $b \neq z_1$,

$$\begin{aligned} \xi(z - b) - \xi(z_1 - b) &= \frac{1}{z - b} + \sum_{\Omega \in L - \{0\}} \left\{ \frac{1}{z - b - \Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z - b}{\Omega^2} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{z_1 - b} - \sum_{\Omega \in L - \{0\}} \left\{ \frac{1}{z_1 - b - \Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z_1 - b}{\Omega^2} \right\} = \\ &\quad \frac{z_1 - z}{(z - b)(z_1 - b)} + \sum_{\Omega \in L - \{0\}} \left\{ \frac{z_1 - z}{(z - b - \Omega)(z_1 - b - \Omega)} + \frac{z - z_1}{\Omega^2} \right\} = \\ &= (z - z_1) \left[-\frac{1}{(z - b)(z_1 - b)} + \sum_{\Omega \in L - \{0\}} \left\{ -\frac{1}{(z - b - \Omega)(z_1 - b - \Omega)} + \frac{1}{\Omega^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\xi(z - b) = \xi(z_1 - b) + o(z - z_1)$$

Então:

$$g(z) = a\xi(z_1 - w_s) + \frac{b}{z - z_1} + c\xi(z_1 - z_2) + a\xi(w_s) + b\xi(z_1) + c\xi(z_2) + o(z - z_1)$$

em uma vizinhança de z_1 .

Como $\text{Res}_{w_s} g = a$, $\text{Res}_{z_1} g = b$ e $\text{Res}_{z_2} g = c$, temos que $(a + b + c) = 0$. Logo, de (5.2.4) e como $P'(w_s) = 0$, numa vizinhança de z_1 , temos:

$$g(z) = \frac{b}{z - z_1} + \frac{1}{2} \left[\frac{aP'_1}{P_1 - e_s} + \frac{c(P'_1 + P'_2)}{P_1 - P_2} \right] + o(z - z_1) \quad (5.3.3)$$

onde $P'_i = P'(z_i)$. Portanto, em torno de z_1 :

$$g^2(z) = \frac{b^2}{(z - z_1)^2} + \left[\frac{aP'_1}{P_1 - e_s} + \frac{c(P'_1 + P'_2)}{P_1 - P_2} \right] \frac{b}{z - z_1} + o((z - z_1)^0) \quad (5.3.4)$$

Do item (iii), desenvolvendo w em torno z_1 , temos:

$$w = [P_1 - e_s + P'_1(z - z_1) + o((z - z_1)^2)]dz$$

Portanto,

$$\text{Res}_{z_1} g^2 w = b^2 P'_1 + b(P_1 - e_s) \left[\frac{aP'_1}{P_1 - e_s} + \frac{c(P'_1 + P'_2)}{P_1 - P_2} \right]$$

Como $\text{Res}_{z_1} g^2 w = 0$ e $a + b + c = 0$, temos:

$$\frac{P'_1}{P_1 - e_s} = \frac{P'_1 + P'_2}{P_1 - P_2}$$

Analogamente, usando a expressão local de g em torno de z_2 , bastando trocar b por c , e 1 por 2 nos índices, no argumento acima, obtemos:

$$\frac{P'_1}{P_1 - e_s} = -\frac{P'_2}{P_2 - e_s} = \frac{P'_1 + P'_2}{P_1 - P_2} \quad (5.3.5)$$

Como $P(z) - e_s$ tem polo duplo em $z = 0$, zero duplo em w_s , $P'(z)$ tem polo triplo em $z = 0$ e zero simples em w_s , $h(z) = \frac{P'(z)}{P(z) - e_s} - \frac{P'_1}{P_1 - e_s}$ tem ordem 2 com polos simples em $z = 0$ e $z = w_s$. Da expressão de h , como P é par e P' é ímpar, $h(z_1) = h(-z_2) = 0 \implies z_1 \equiv -z_2$ ou z_1 e $-z_2$ são todos os zeros de h . Como $z_1 + z_2 \not\equiv 0$, por hipótese da proposição, do teorema da distribuição de polos e zeros demonstrado no capítulo II, temos: $z_1 - z_2 \equiv w_s$, ou seja:

$$z_1 \equiv z_2 + w_s \quad (5.3.6)$$

que juntamente com (5.3.5) demonstram a proposição. $\square$

5.3.2

Lema 5.1 *Não existe imersão mínima em $\mathbb{R}^3$ de gênero um com as seguintes propriedades:*

- [i] *Os fins são mergulhados e paralelos.*
- [ii] *Dois fins são do tipo catenóide e um fim é planar de ordem 1.*

Demonstração:

Suponhamos que exista uma tal imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $M = T_\tau - \{q_1, q_2, q_3\}$. Como os fins são mergulhados, vale a fórmula de Jorge-Meeks, ou seja, $C(M) = 2\pi(\chi(T_\tau) - 6) = -12\pi$. Como $C(M) = -4\pi m$, onde m é a ordem de g , temos que g é uma função meromorfa em T_τ , ou seja, g é elíptica relativa a $L(1, \tau)$ e tem ordem 3. Sejam F_j os fins associados a q_j , com F_3 sendo o fim planar de ordem 1. Temos então dois casos:

$$g(q_1) = g(q_2) \neq g(q_3) \text{ ou } g(q_1) \neq g(q_2) = g(q_3) \quad (5.3.7)$$

1º caso : $g(q_1) = g(q_2) \neq g(q_3)$ Inicialmente, vamos estruturar g e w em termos de polos e zeros. Após uma rotação conveniente, podemos supor que $g(q_1) = g(q_2) = \infty$ e $g(q_3) = 0$. Então, q_1 e q_2 são polos simples de g e q_3 é zero duplo de g . Como g tem ordem 3, existe $\bar{q} \in M$ polo simples de g e $q' \in M$ zero simples de g . Além disso, como $g(q_3) = 0$ e F_3 é mergulhado, w tem polo duplo em q_3 . Portanto w só possuirá um zero duplo em $\bar{q}$ e q_3 será o único polo de w .

Após uma homotetia, uma rotação da imersão da imersão em torno do eixo x_3 em $\mathbb{R}^3$, e uma translação das coordenadas em $\mathbb{C}$, podemos supor que :

$$w = (P - e_s)dz \text{ onde } s \in \{1, 2, 3\}, \pi(0) = q_3 \text{ e } \pi(w_s) = \bar{q} \quad (5.3.8)$$

onde $\pi : \mathbb{C} \rightarrow M = T_\tau = \mathbb{C}/L(1, \tau)$ é a projeção canônica. Indiquemos os pontos que são levados em q' , q_1 e q_2 pela π por z' , z_1 e z_2 respectivamente. Portanto:

$$\pi(z') = q', \pi(z_1) = q_1 \text{ e } \pi(z_2) = q_2$$

Como, q_1 , q_2 , q_3 , $\bar{q}$ e q' são pontos distintos de $\bar{M}$, o conjunto:

$$\{0, w_s, z', z_1, z_2\} \text{ é } L(1, \tau) - \text{irredutível} \quad (5.3.9)$$

Por exemplo, a distribuição de polos e zeros de g e w para $s = 2$ é mostrada na figura 5.2. Do Teorema de distribuição de polos e zeros de funções elípticas

Figura 5.2: Distribuição de polos e zeros de g e w para $s = 2$

demonstrado no capítulo III, temos que $z_1 + z_2 + w_s \equiv z'$. Se $z_1 + z_2 \equiv 0 \implies w_s \equiv z'$, que é absurdo de (5.3.9). Logo:

$$z_1 + z_2 \not\equiv 0 \quad (5.3.10)$$

Como w é holomorfa em vizinhanças de z_1 e z_2 , $\text{Res}_{z_1} w = \text{Res}_{z_2} w = 0$. Também, pelo item (iii) do teorema 5.1, temos:

$$\text{Res}_{z_1} g^2 w = \text{Res}_{z_2} g^2 w = 0 \quad (5.3.11)$$

A proposição 5.3 então implica que :

$$z_1 \equiv z_2 + w_s \text{ e } \frac{P'_1 + P'_2}{P_1 - P_2} = \frac{P'_1}{P_1 - e_s} = -\frac{P'_2}{P_2 - e_s} \quad (5.3.12)$$

Temos ainda que $\text{Re} \int_{\delta} gw = 0$. Porém, pela distribuição de polos e zeros de g e w , a diferencial elíptica gw tem polos simples em z_1 e z_2 e zero simples em w_s e z' . Portanto, pelo Teorema de caracterização de funções elípticas pela distribuição e ordem de polos,

$$gw = a\xi(z - z_1) + b\xi(z - z_2) + K \quad (5.3.13)$$

Mas, w_s é zero de $gw \implies gw = a(\xi(z - z_1) - \xi(w_s - z_1)) + b(\xi(z - z_2) - \xi(w_s - z_2))$. Como a soma dos resíduos de gw é zero, $b = -a$. Logo:

$$gw = a(\xi(z - z_1) - \xi(z - z_2) - \xi(w_s - z_1) + \xi(w_s - z_2)) \quad (5.3.14)$$

Então, $\text{Re} \int_{\delta} gw = 0 \implies \text{Res}_{z_1} gw = a \in \mathbb{R}$. De (5.2.4) e $P'(w_s) = 0$, temos que:

$$gw = \frac{a}{2} \left(\frac{P' + P'_2}{P - P_1} - \frac{P' + P'_1}{P - P_2} + \frac{P'_1}{P_1 - e_s} - \frac{P'_2}{P_2 - e_s} \right) dz \quad (5.3.15)$$

Precisamos agora integrar a equação acima e para isso, precisaremos dos seguintes resultados:

Lema 5.2 • (a) Sejam $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ os caminhos :

$$\alpha(t) = t + v_0\tau, 0 < v_0 < 1, \beta(t) = u_0 + t\tau, 0 < u_0 < 1 \text{ e } \delta = \pi \circ \alpha, \pi \circ \beta.$$

Então:

$$\int_{\delta} \frac{P'_j}{P - P_j} dz = \int_{\delta} \frac{d}{dz} \log \frac{\sigma(z - z_j)}{\sigma(z + z_j)} dz + 2\xi(z_j) \int_{\delta} dz$$

• (b)

$$\operatorname{Re} \int_{\delta} \frac{P'}{P - P_j} dz = 0$$

Demonstração:

$$(a) \xi(z - z_j) = \xi(z) - \xi(z_j) + \frac{P'(z) + P'_j}{2[P(z) - P_j]}$$

$$\xi(z + z_j) = \xi(z) + \xi(z_j) + \frac{P'(z) - P'_j}{2[P(z) - P_j]}$$

Logo,

$$\xi(z - z_j) - \xi(z + z_j) = -2\xi(z_j) + \frac{P'_j}{P(z) - P_j}$$

Porém, $\frac{d}{dz} \log \sigma(z) = \xi(z)$. Então:

$$\int_{\delta} \frac{d}{dz} \log \frac{\sigma(z - z_j)}{\sigma(z + z_j)} dz + 2\xi(z_j) \int_{\delta} dz = \int_{\delta} \frac{P'_j}{P(z) - P_j} dz$$

$$(b) \operatorname{Re} \int_{\delta} \frac{P'}{P - P_j} dz = \ln |P(\delta(1)) - P(\delta(0))| = 0,$$

pois P é elíptica. □

De posse dos resultados anteriores, (5.3.14) aplicada a $\int_{\alpha, \beta} gw = 0$ resulta respectivamente em :

$$\operatorname{Re} \left(\log \frac{\sigma(1 + v_0\tau - z_1)\sigma(v_0\tau + z_1)}{\sigma(v_0\tau - z_1)\sigma(1 + v_0\tau + z_1)} \right) + 2\xi(z_1) - \log \frac{\sigma(1 + \tau v_0 - z_2)\sigma(v_0\tau + z_2)}{\sigma(v_0\tau - z_2)\sigma(1 + v_0\tau + z_2)}$$

$$\begin{aligned}
& -2\xi(z_2) + \frac{P'_1}{P_1 - e_s} - \frac{P'_2}{P_2 - e_s} = 0 \\
& \operatorname{Re}(\log \frac{\sigma(u_0 + \tau - z_1)\sigma(u_0 + z_1)}{\sigma(u_0 - z_1)\sigma(u_0 + \tau + z_1)} + 2\tau\xi(z_1) - \log \frac{\sigma(u_0 + \tau - z_2)\sigma(u_0 + z_2)}{\sigma(u_0 - z_2)\sigma(u_0 + \tau + z_2)} \\
& - 2\tau\xi(z_2) + \frac{P'_1\tau}{P_1 - e_s} - \frac{P'_2\tau}{P_2 - e_s}) = 0
\end{aligned}$$

Como σ é pseudo-periódica, temos:

$$\sigma(1 + v_0\tau - z_1) = -e^{2\eta_1(v_0\tau - z_1 + (1/2))}\sigma(v_0\tau - z_1)$$

e

$$\sigma(u_0 - z_1 + \tau) = -e^{2\eta_3(u_0 - z_1 + (\tau/2))}\sigma(u_0 - z_1),$$

onde $2\eta_1 = \eta$ e $2\eta_3 = \eta'$. Estas equações aplicadas acima juntamente com (5.2.4) resultam em:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}[2\eta_1(z_2 - z_1) + \xi(z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \frac{P'_2}{P_2 - e_s}] = 0 \\
& \operatorname{Re}[2\eta_3(z_2 - z_1) + \tau\xi(z_1 - z_2) - \frac{\tau}{2} \frac{P'_2}{P_2 - e_s}] = 0
\end{aligned}$$

Mas:

$$z_2 - z_1 \equiv w_s \implies z_2 - z_1 = m + n\tau + w_s \implies \xi(z_1 - z_2) = -2m\eta_1 - 2n\eta_3 - \eta_s.$$

Pela fórmula de Legendre: $2\eta_1\tau - 2\eta_3 = 2\pi i \implies$

$$\xi(z_1 - z_2) = -2m\eta_1 - 2n\tau\eta_1 + 2n\pi i - \eta_s = -(2m\eta_3 + 2m\pi i)/\tau - 2n\eta_3 - \eta_s.$$

Portanto, para $s = 1$ e $s = 3$, temos:

$$2\eta_1(z_2 - z_1) + \zeta(z_1 - z_2) = 2\pi ni \text{ e } 2\eta_3(z_2 - z_1) + \tau\zeta(z_1 - z_2) = -2\pi mi \implies$$

$$\operatorname{Re}(2\eta_1(z_2 - z_1) + \xi(z_1 - z_2)) = 0$$

$$\operatorname{Re}(2\eta_3(z_2 - z_1) + \tau\xi(z_1 - z_2)) = 0$$

Então:

$$\operatorname{Re}(\frac{P'_2}{P_2 - e_s}) = \operatorname{Re}(\frac{\tau P'_2}{P_2 - e_s}) = 0$$

E como 1 e τ são linearmente independentes:

$$\frac{P'_2}{P_2 - e_s} = 0 \implies P'_2 = 0 \implies z_2 \equiv w_t, \quad t \in \{1, 2, 3\} \text{ e } t \neq s$$

Figura 5.3: Distribuição de polos e zeros de g e w para $s = 2$

de (5.3.9) . De (5.3.12): $z_1 \equiv w_t + w_s$. E como $w_1 + w_2 + w_3 \equiv 0$:

$$z_1 \equiv w_t + w_s \equiv -w_k \equiv w_k, \quad k \neq s, \quad t \implies z' \equiv z_1 + z_2 + w_s \equiv 0,$$

que é absurdo de (5.3.9). Logo, o primeiro caso não pode ocorrer.

2º caso : $g(q_1) \neq g(q_2) = g(q_3)$ Como no caso anterior, vamos estruturar g e w em termos de polos e zeros . Após uma rotação de $X(M)$ em $\mathbb{R}^3$, conveniente, teremos: $g(q_1) = g(q_3) = \infty$ e $g(q_1) = 0$. Como F_1 e F_2 são do tipo catenóide e F_3 é do tipo planar de ordem 1, q_1 e q_2 serão zero simples e polo simples, respectivamente, e q_3 será polo duplo de g . Como esta função tem ordem 3, g não terá mais polos em M e portanto, do item (ii) do Teorema 5.1, $w(q) \neq 0, \forall q \in M$. Como $g(q_1) = 0$ e F_1 é mergulhado, q_1 é polo duplo de w . Como q_3 é polo duplo de g , F_3 é planar de ordem 1 e q_2 não é polo de w , q_3 é zero duplo de w . De forma análoga ao processo descrito no caso 1, após uma eventual homotetia e rotação de $X(M)$ em $\mathbb{R}^3$ e uma translação de coordenadas em $\mathbb{C}$, temos:

$$w = (P - e_s)dz, \quad \text{com } \pi(0) = q_1 \text{ e } \pi(w_s) = q_3, \text{ onde } s \in \{1, 2, 3\}$$

Supondo $\pi(z_2) = q_2$, teremos, por exemplo, a distribuição de polos e zeros da figura 5.3 para $s = 2$. Como g é elíptica com polo duplo em w_s e polo simples em z_2 , temos:

$$g(z) = a\xi(z - z_2) + b\xi(z - w_s) + c\xi(z - w_s) + d, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ e } d \in \mathbb{C}$$

Como $\int_{\partial R} g(z) = 0$, onde ∂R é a fronteira do paralelogramo $\{0, 1, 1+\tau, \tau\}$, temos

$$c = -a \text{ e } g(z) = a\xi(z - z_2) + b\xi(z - w_s) - a\xi(z - w_s) + d$$

Agora, vamos impor as condições do Teorema 5.1 somente em torno de w_s , uma vez não temos informação sobre w numa vizinhança de z_2 . A forma local de g em w_s será:

$$g(z) = \frac{b}{(z - w_s)^2} - \frac{a}{(z - w_s)} + o((z - w_s)^0)$$

Portanto,

$$g^2(z) = \frac{b^2}{(z - w_s)^4} - \frac{2ab}{(z - w_s)^3} + \frac{a^2}{(z - w_s)^2} + o((z - w_s)^{-1})$$

$P(z)$ é par $\implies P^{2n-1}(w_s) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, o desenvolvimento de w em torno de w_s é:

$$w(z) = \left(\frac{P''(w_s)(z - w_s)^2}{2} + o((z - w_s)^4) \right) dz$$

Como w tem zero de ordem exatamente 2 em w_s ,

$$P''(w_s) \neq 0 \implies \text{Res}_{w_s} g^2 w = -abP''(w_s) \neq 0.$$

Por outro lado, w é holomorfa em w_s e do item (iii) do Teorema 5.1, $\text{Res}_{w_s} g^2 w = -\overline{\text{Res}_{w_s} w} = 0$, o que contradiz a frase anterior. Logo, o caso 2 não pode ocorrer e portanto não existe imersão mínima completa com fins mergulhados e paralelos sendo dois do tipo catenóide e um planar de ordem 1. $\square$

Vejamos agora mais um lema necessário à demonstração do Teorema principal.

5.4 Caracterização de Superfícies Mínimas Completas do $\mathbb{R}^3$ com Curvatura Total -12π , fins paralelos, dois fins do tipo catenóide e um fim planar de ordem 2

5.4.1

Lema 5.3 *Seja $X : M = T_\tau - \{q_1, q_2 \text{ e } q_3\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa de gênero um e três fins com as seguintes propriedades :*

- [i] *A curvatura total é -12π .*
- [ii] *Os fins são paralelos.*
- [iii] *Dois fins são do tipo catenóide e um fim do tipo planar de ordem 2.*

Então, após um movimento rígido e uma homotetia da imersão em $\mathbb{R}^3$, a representação de Weierstrass (g, w) de X será:

$$g = \frac{2B(e_k - e_t)}{P'} \text{ e } w = (P - e_s)dz \quad (5.4.1)$$

onde (s, k, t) é uma permutação de $(1, 2, 3)$, $B \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\pi(0) = q_3$, $\pi(w_k) = q_1$ e $\pi(w_t) = q_2$. Além disso, no reticulado $L(1, \tau)$, com $\tau = x + iy \in F$, temos:

$$\overline{(2\eta_1 + e_s)} = B^2 \left(\frac{2\eta_1 + e_k}{e_k - e_s} + \frac{2\eta_1 + e_t}{e_t - e_s} \right) \quad (5.4.2)$$

$$y \overline{(2\eta_1 + e_s)} - \pi = \pi B^2 \left(\frac{1}{e_k - e_s} + \frac{1}{e_t - e_s} \right) \quad (5.4.3)$$

Demonstração:

Seja F_j o fim planar associado à q_j . Do item (i), g tem ordem 3. Como F_3 é um fim planar de ordem 2, após uma rotação conveniente de $X(M)$ em $\mathbb{R}^3$, podemos supor que g tem um zero triplo em q_3 . Como sua ordem já é 3, e sendo os outros fins paralelos e do tipo catenóide, q_1 e q_2 serão polos simples de g . Logo, existe $q' \in M$ polo simples de g . Do item (ii) do Teorema 5.1, w só terá zero em q' sendo este duplo. Como $g(q_3) = 0$ e F_3 é mergulhado, w terá polo duplo em q_3 pela proposição (5.1).

Analogamente aos casos 1 e 2 do Lema anterior, podemos através de transformações convenientes, supor que $\pi(0) = q_3$ e $\pi(w_s) = q'$. Logo w será uma diferencial elíptica com polo duplo em $\pi(0)$ e zero duplo em $\pi(w_s)$. Portanto,

$$w = (P - e_s)dz, \quad \pi(0) = q_3, \quad \pi(w_s) = q'$$

Se pusermos $\pi(z_1) = q_1$ e $\pi(z_2) = q_2$, a representação geométrica de zeros e polos de g e w quando $s = 2$ é descrita pela figura 5.4. Como q_1, q_2, q_3 e q' são pontos distintos de M , temos que:

$$\{0, z_1, z_2, w_s\} \text{ é } L(1, \tau) \text{ irredutível} \quad (5.4.4)$$

Pelo Teorema distribuição de polos e zeros de funções elípticas, $z_1 + z_2 + w_s \equiv 0$ que juntamente com o resultado anterior implica $z_1 + z_2 \not\equiv 0$.

Além disso, do teorema 5.1 e como w é holomorfa em z_1 e z_2

$$Res_{z_j} g^2 w = -\overline{Res_{z_j} w} = 0, \quad j = 1, 2$$

Figura 5.4: Distribuição de polos e zeros de g e w para $s = 2$

Das condições anteriores, como g tem ordem 3 com polos em $\{z_1, z_2, w_s\}$ e zero na origem, as hipóteses da proposição 5.3 estão satisfeitas. Como $w_s + w_t + w_k \equiv 0$, temos então que $2z_j \equiv 0, j = 1, 2$. Logo, $z_1 \equiv w_k$ e $z_2 \equiv w_t$, com (s, k, t) uma permutação de $\{1, 2, 3\}$. Como g é uma função elíptica com polos simples em w_s, w_k e w_t e zero triplo na origem, gP' é uma função elíptica e holomorfa, isto é, $gP' = cte$. Portanto, existe $B \in \mathbb{C}$, $B \neq 0$ tal que :

$$g = 2B(e_k - e_t) \frac{1}{P'} \text{ e } w = (P - e_s)dz$$

Do capítulo III:

$$P'^2 = 4(P - e_1)(P - e_2)(P - e_3) \text{ e } \frac{(e_r - e_k)(e_r - e_t)}{P - e_r} = P(z - w_r) - e_r \implies$$

$$gw = \frac{2B(e_k - e_t)(P - e_s)}{P'} dz = \frac{2B(e_k - e_t)P'(P - e_s)}{P'^2} dz =$$

$$= \frac{2B(e_k - e_t)P'}{4(P - e_k)(P - e_t)} dz \implies gw = \frac{B}{2} \left(\frac{P'}{P - e_k} - \frac{P'}{P - e_t} \right) dz$$

Logo,

$$g^2w = B^2 \left(\frac{P(z - w_k) - e_k}{e_k - e_s} + \frac{P(z - w_t) - e_t}{e_t - e_s} \right) dz$$

Do capítulo III:

$$P^2 = \frac{P''}{6} - \frac{e_k e_s + e_k e_t + e_s e_t}{3} \implies P''(w_s) = 2(e_k - e_s)(e_t - e_s).$$

Como:

$$P(z - w_s) = \frac{1}{(z - w_s)^2} + o((z - w_s)^2), \quad P(w_k) - e_t = e_k - e_t \neq 0$$

e

$$\begin{aligned} P'(z) &= P''(w_k)(z - w_k) + o((z - w_k)^2) \implies \text{Res}_{w_k} gw = \text{Res}_{w_k} \left(\frac{B}{2} \frac{P'}{P - e_k} \right) = \\ &= \text{Res}_{w_k} \left(\frac{B}{2} \frac{P'(P(z - w_k) - e_k)}{(e_k - e_t)(e_k - e_t)} \right) = \text{Res}_{w_k} \left(\frac{B}{P''(w_k)} \left(\frac{P''(w_k)}{z - w_k} + o((z - w_k)^2) \right) \right) = B. \end{aligned}$$

Do item (iii) do Teorema 5.1, $B \in \mathbb{R} - \{0\}$, o que finaliza a primeira parte da tese.

A fim de mostrar o restante, vamos aplicar a outra condição do item (iii) do Teorema 5.1. Para isso, consideremos os caminhos:

$$\alpha(t) = (\tau/3) + t$$

$$\beta(t) = (1/3) + t\tau$$

Como $\pi \circ \alpha$ e $\pi \circ \beta$ geram a homologia de T_τ , a segunda condição do item (iii) do Teorema 5.1 equivale a:

$$\int_\delta w = \int_\delta g^2 w$$

onde $\delta = \pi \circ \alpha$, $\pi \circ \beta$.

Logo,

$$\begin{aligned} -\int_{\pi(\alpha)} w &= -\int_\alpha P dz + \int_\alpha e_s dz = \overline{2\eta_1 + e_s} = -\int_{\pi(\alpha)} g^2 w = \\ &= -\int_\alpha B^2 \left(\frac{P(z - w_k) - e_k}{e_k - e_s} + \frac{P(z - w_t) - e_t}{e_t - e_s} \right) dz = \\ \frac{B^2}{e_k - e_s} &\left(-\int_\alpha P(z - w_k) dz + \int_\alpha e_k dz \right) + \frac{B^2}{e_t - e_s} \left(-\int_\alpha P(z - w_t) dz + \int_\alpha e_t dz \right) = \\ &= \frac{B^2}{e_k - e_s} \left(-\int_{\alpha^*} P(z) dz + e_k \right) + \frac{B^2}{e_t - e_s} \left(-\int_{\alpha^{**}} P(z) dz + e_t \right), \end{aligned}$$

onde

$$\alpha^*, \alpha^{**} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha^*(t) = (\tau/3) + t - w_k, \quad \alpha^{**}(t) = (\tau/3) + t - w_t.$$

Figura 5.5: As curvas γ_1, γ_2 e γ_3

Dependendo de k e t , teremos duas das três curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ da figura 5.5. Como P é elíptica em C e holomorfa no interior do paralelogramo $[\tau/3, \tau/3 + 1, \tau/3 + w_3, \tau/3 + 1 + w_3]$, $\int_{\gamma_i} P(z)dz = \int_{\alpha} P(z)dz$ $i = 1, 2$. Logo:

$$\overline{2\eta_1 + e_s} = B^2 \left[\frac{2\eta_1 + e_k}{e_k - e_s} + \frac{2\eta_1 + e_t}{e_t - e_s} \right] \quad (5.4.5)$$

Analogamente para $\pi \circ \beta$, temos:

$$\begin{aligned} -\int_{\pi \circ \beta} w &= -\int_{\beta} Pdz + \int_{\beta} e_s dz = \overline{2\eta_3 + \tau e_s} = -\int_{\pi \circ \beta} g^2 w = \\ &= -\int_{\beta} B^2 \left(\frac{P(z - w_k) - e_k}{e_k - e_s} + \frac{P(z - w_t) - e_t}{e_t - e_s} \right) dz = \\ &= \frac{B^2}{e_k - e_s} \left(-\int_{\beta} P(z - w_k) dz + \int_{\beta} e_k dz \right) + \frac{B^2}{e_t - e_s} \left(-\int_{\beta} P(z - w_t) dz + \int_{\beta} e_t dz \right) = \\ &= \frac{B^2}{e_k - e_s} \left(-\int_{\beta^*} P(z) dz + \tau e_k \right) + \frac{B^2}{e_t - e_s} \left(-\int_{\beta^{**}} P(z) dz + \tau e_t \right), \end{aligned}$$

onde

$$\beta^*, \beta^{**} : [0, 1] \rightarrow C, \beta^*(t) = (1/3) + \tau - w_k, \beta^{**}(t) = (1/3) + \tau - w_t.$$

Analogamente, temos $\int_{\beta^*} P(z)dz = \int_{\beta^{**}} P(z)dz = \int_{\beta} P(z)dz = 2\eta_3$. Portanto:

$$\overline{2\eta_3 + \tau e_s} = B^2 \left[\frac{2\eta_3 + \tau e_k}{e_k - e_s} + \frac{2\eta_3 + \tau e_t}{e_t - e_s} \right].$$

Aplicando a relação de Legendre $\eta_3 = \tau\eta_1 - \pi i$, 5.4.5 , e $\frac{\tau-\bar{\tau}}{2i} = \text{Im}\tau = y$ a equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \overline{2\tau\eta_1 - 2\pi i + \tau e_s} &= B^2 \left[\frac{2\tau\eta_1 - 2\pi i + \tau e_k}{e_k - e_s} + \frac{2\tau\eta_1 - 2\pi i + \tau e_t}{e_t - e_s} \right] \Rightarrow \\ \bar{\tau} \overline{2\eta_1 + e_s} + 2\pi i &= \tau \overline{2\eta_1 + e_s} - 2\pi i B^2 \left[\frac{1}{e_k - e_s} + \frac{1}{e_t - e_s} \right] \Rightarrow \\ y \overline{2\eta_1 + e_s} - \pi &= \pi B^2 \left(\frac{1}{e_k - e_s} + \frac{1}{e_t - e_s} \right) \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

(5.4.5) e (5.4.6) finalizam a demonstração. $\square$

5.5 O reticulado $L(1, \tau)$ é retângulo.

O objetivo agora é mostrar que as equações do Lema 5.3 são satisfeitas se, e só se, $\tau = i$, $B = \sqrt{\pi/2}$ e $s = 2$. Esse resultado será consequência dos dois lemas mostrados mais a frente. Para isso, precisamos de algumas proposições, que estudam os sinais das partes real e imaginária das expressões $(e_j - e_k)$ e $(2\eta_i + e_l)$.

5.5.1

Proposição 5.4 Para todo reticulado $L(1, \tau)$, $\tau = x + iy \in F$, temos que :

- [i] $y \text{Re}(2\eta_1 + e_1) > 2\pi$ e $\text{Re}(e_j - e_1) < 0$, $j = 2, 3$
- [ii] $(-1)^j \text{Im}(e_j - e_1) > 0$, se $x > 0$ e $(-1)^j \text{Im}(e_j - e_1) < 0$ se $x < 0$, $j = 2, 3$

Demonstração (i) Da fórmula (79) da página (446) de [14] com as definições de w e η encontradas nas páginas 37 e 135 dessa mesma referência, temos:

$$2\eta_1 + e_1 = \pi^2 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n q^{2n}}{1 - q^{2n}} , \quad q = e^{i\pi\tau} \quad (5.5.1)$$

Calculando-se a parte real da expressão acima e substituindo-se $q = e^{i\pi\tau}$, temos:

$$\text{Re}(2\eta_1 + e_1) = \pi^2 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \text{Re}\left(\frac{e^{2\pi\tau ni}}{1 - e^{2\pi\tau ni}}\right) = \pi^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n e^{-2\pi n y} (\cos 2\pi n x - e^{-2\pi n y})}{1 - 2e^{-2\pi n y} \cos 2\pi n x + e^{-4\pi n y}} \Rightarrow \operatorname{Re}(2\eta_1 + e_1) \geq \pi^2 - \\
& -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-2\pi n y} |\cos 2\pi n x - e^{-2\pi n y}|}{|1 - 2e^{-2\pi n y} \cos 2\pi n x + e^{-4\pi n y}|} \geq \pi^2 - \frac{8\pi^2(1 + e^{-2\pi y})}{(1 - e^{-2\pi y})^2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-2\pi n y}
\end{aligned}$$

Mas $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois $\tau \in F$. E: $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow e^{\pi y} > 15$. Como $e^{\pi} > 23$ e calculando a soma da série acima, derivando a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n y}$, temos:

$$\begin{aligned}
y \operatorname{Re}(2\eta_1 + e_1) & \geq y \left(\pi^2 - \frac{8\pi^2(1 + e^{-2\pi y})e^{-2\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^4} \right) > \\
& > \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\pi^2 - \frac{8\pi^2(1 + (1/225))(1/225)}{(1 - (1/225))^4} \right) > 2\pi \Rightarrow \\
& y \operatorname{Re}(2\eta_1 + e_1) \geq 2\pi
\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

Das fórmulas (39) e (46) das páginas (255) e (258) respectivamente de [14] para o caso em estudo, temos:

$$\begin{aligned}
e_2 - e_1 &= -\pi^2 \vartheta_0^4 \text{ e } e_3 - e_1 = -\pi^2 \vartheta_3^4, \text{ onde} \\
\vartheta_0 &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \text{ e } \vartheta_3 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}
\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Então:

$$\begin{aligned}
1 - |\operatorname{Re}(\vartheta_j)| & \leq |\operatorname{Re}(\vartheta_j - 1)| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} \leq \\
& \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n y} = \frac{2e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi y}} \leq \frac{2/15}{14/15} = 1/7 \Rightarrow \frac{1}{|\operatorname{Re}(\vartheta_j)|} \leq 7/6.
\end{aligned}$$

Como $|\operatorname{Im} \vartheta_j| = |\operatorname{Im}(\vartheta_j - 1)|$, tem-se também:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Im} \vartheta_j| \leq 1/7 & \Rightarrow |\operatorname{Arg}(\vartheta_j)| = \frac{\operatorname{Im}(\vartheta_j)}{\operatorname{Re}(\vartheta_j)} \leq 1/6 \leq \pi/8 \Rightarrow \\
& \Rightarrow |\operatorname{Arg}(\vartheta_j^4)| = 4 |\operatorname{Arg}(\vartheta_j)| \leq \pi/2.
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{Arg}(e_j - e_1) = \operatorname{Arg}(\vartheta_j^4) + \pi$, por (5.5.3), temos que $e_j - e_1$ estão no 2º ou 3º quadrantes, isto é :

$$\operatorname{Re}(e_j - e_1) < 0, \quad j = 2, 3 \tag{5.5.4}$$

(ii) Para saber o sinal de $Im(e_j - e_1)$, vamos estudar o sinal de $Im(\vartheta_j)$. Se $1/6 < x < 1/2$, temos:

$$\begin{aligned} Im\vartheta_0(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 y} \operatorname{sen} \pi n^2 x \leq -2e^{-\pi y} \operatorname{sen} \pi x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi n y} = \\ &= 2e^{-\pi y} \left(-\operatorname{sen} \pi x + \frac{e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi y}} \right) \leq (2/15)(-1/2 + 1/14) \leq 0 \end{aligned}$$

Se $0 < x < 1/6$, temos:

$$\begin{aligned} (Im\vartheta_0(x))' &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 y} \pi n^2 \cos \pi n^2 x = -2\pi e^{-\pi y} \cos \pi x + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^2 e^{-\pi n^2 y} \cos \pi n^2 x \leq -2\pi e^{-\pi y} \cos \pi / 6 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2 y} \leq -\pi \sqrt{3} e^{-\pi y} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n y} \leq -\pi \sqrt{3} e^{-\pi y} + \frac{e^{-2\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} < -\pi \sqrt{3} / 15 + \frac{1/225}{(1 - 1/225)^2} < 0 \end{aligned}$$

Como $Im(\vartheta_0(x))$ é ímpar e $Im(\vartheta_0(0)) = 0$, temos:

$$Im\vartheta_0(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } 0 < x < 1/2 \\ > 0 & \text{se } -1/2 < x < 0 \end{cases} \quad (5.5.5)$$

Na majoração dos dois casos do processo anterior, só extraímos o primeiro termo da somatória sendo o restante majorado pela série absoluta. Portanto esse procedimento também vale para $g(x) = \vartheta_3(-x)$ e como esta última é ímpar, temos:

$$Im\vartheta_3(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < 1/2 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } -1/2 < x < 0 \end{cases} \quad (5.5.6)$$

De (5.5.3), (5.5.5) e (5.5.6), temos:

$$(-1)^j Im(e_j - e_1) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (5.5.7)$$

□

5.5.2

Proposição 5.5 Para todo reticulado $L(1, \tau), \tau = x + iy \in F$, temos que:

- [i] $Re(2\eta_1 + e_3) = 2\eta_1 + e_3 < 0$, se $x = 0$.
- [ii] $(-1)^j Im(2\eta_1 + e_j) > 0$ se $x > 0$ e $(-1)^j Im(2\eta_1 + e_j) < 0$, se $x < 0$, $j = 2, 3$.
- [iii] $Im(e_2 - e_3) > 0$, se $x > 0$ e $Im(e_2 - e_3) < 0$, se $x < 0$.
- [iv] $Re(e_2 - e_3) = (e_2 - e_3)$, se $x = 0$.

Demonstração:

Da fórmula (79) da página (146) de [14] com as definições de w e η encontradas nas páginas 37 e 135 dessa mesma referência, temos:

$$2\eta_1 + e_3 = -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^{2n}}, \quad q = e^{i\pi\tau} \quad (5.5.8)$$

$$2\eta_1 + e_2 = -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n nq^n}{1 - q^{2n}}, \quad q = e^{i\pi\tau} \quad (5.5.9)$$

Logo, se $x = 0$, $2\eta_1 + e_3 \in \mathbb{R}$ e como $y > 0$, temos:

$$Re(2\eta_1 + e_3) = -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-\pi ny}}{1 - e^{-2\pi ny}} < 0,$$

pois a série converge. Isto prova o item (i).

(ii) A fim de simplificar as notações, consideremos:

$$D_n(x) = 1 - 2e^{-2\pi ny} \cos 2\pi nx + e^{-4\pi ny} \quad (5.5.10)$$

$$L_n(x) = \frac{1}{D_n(x)} [n(1 + e^{-2\pi ny})e^{-\pi ny} \sin \pi nx] \quad (5.5.11)$$

$$\begin{aligned} & Im\left(\frac{q^n}{1 - q^n}\right) = \\ &= \frac{e^{-3\pi ny}(\cos \pi nx \sin 2\pi nx - \sin \pi nx \cos 2\pi nx) + e^{-\pi ny} \sin \pi nx}{1 - 2e^{-2\pi ny} \cos 2\pi nx + e^{-4\pi ny}} = \\ &= \frac{e^{-3\pi ny} \sin \pi nx + e^{-\pi ny} \sin \pi nx}{D_n(x)} = \frac{L_n(x)}{n} \end{aligned}$$

Portanto, (5.5.8) e (5.5.9) podem ser reescritas como:

$$Im(2\eta_1 + e_3) = -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x) \quad (5.5.12)$$

$$Im(2\eta_1 + e_2) = -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_n(x) \quad (5.5.13)$$

Para estudar o sinal das funções acima, devemos estudar o sinal de $L_n(x)$, o que será feito somente para $x > 0$, já que esta função é ímpar. Para isso, precisaremos de limitantes para algumas expressões que se seguem. De (5.5.10),

$$(1 - e^{-2\pi ny})^2 < D_n(x) < (1 + e^{-2\pi ny})^2 \quad (5.5.14)$$

Derivando (5.5.11) e como $\sin^2 \pi nx = 2 \sin \pi nx \cos \pi nx$, temos:

$$L'_n(x) = \frac{[\pi n^2 e^{-\pi ny} (1 + e^{-2\pi ny}) (D_n(x) - 8e^{-2\pi ny} \sin^2 \pi nx) \cos \pi nx]}{D_n(x)^2}$$

Inicialmente, consideremos $0 < x \leq 1/4$. Da expressão anterior, (5.5.14) e como $x + iy \in F$:

$$\begin{aligned} L'_1(x) &\geq \frac{\pi e^{-\pi y} (1 + e^{-2\pi y}) (1 - 10e^{-2\pi y} + e^{-4\pi y}) \cos \pi/4}{(1 + e^{-2\pi y})^4} \geq \\ &\geq \frac{\pi e^{-\pi y} (1 - 10/225) \sqrt{2}}{(1 + 1/225)^4} \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\pi e^{-\pi y}}{2} \Rightarrow \\ L'_1(x) &\geq \frac{\pi e^{-\pi y}}{2} \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

De (5.5.11), (5.5.10) para $n > 1$, temos:

$$\begin{aligned} |L'_n(x)| &\leq \frac{\pi n^2 e^{-\pi ny} (1 + e^{-2\pi ny}) |D_n(x)|}{(1 - e^{-4\pi ny})^4} \leq \frac{\pi (1 + e^{-4\pi y})^3}{(1 - e^{-4\pi y})^4} n^2 e^{-\pi ny} \leq \\ &\leq \frac{\pi (1 + (1/15)^4)^3}{(1 - (1/15)^4)^4} n^2 e^{-\pi ny} \leq (6/5) \pi n^2 e^{-\pi ny} \Rightarrow \\ |L'_n(x)| &\leq (6/5) \pi n^2 e^{-\pi ny} \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Ainda precisaremos calcular $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-n\pi y}$ o que pode ser obtido derivando-se duas vezes a série $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n\pi y} = \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-\pi y}}$, o que resulta em:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-n\pi y} = \frac{4e^{-2\pi y} - 3e^{-3\pi y} + e^{-4\pi y}}{(1 - e^{-\pi y})^3} \leq \frac{e^{-\pi y}(4/15 + (1/15)^3)}{(1 - 1/15)^3} < (2/5)e^{-\pi y}$$

Da expressão anterior, (5.5.15) e (5.5.16), temos :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} L'_n(x) &\geq L'_1(x) - \sum_{n=2}^{\infty} |L'_n(x)| \geq (\pi/2)e^{-\pi y} - (6\pi/5)(2/5)e^{-\pi y} = \\ &= (\pi e^{-\pi y})/50 > 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L'_n(x) &\leq -L'_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} |L'_n(x)| \leq -(\pi/2)e^{-\pi y} + \\ &+ (6\pi/5)(2/5)e^{-\pi y} = -(\pi e^{-\pi y})/50 < 0 \end{aligned}$$

Das expressões acima, como $L_n(0) = 0$, de (5.5.12) e (5.5.13), temos:

$$Im(2\eta_3 + e_3)(0) = Im(2\eta_1 + e_2)(0) = 0, \quad Im'(2\eta_3 + e_3) < 0 \text{ e } Im'(2\eta_1 + e_2) > 0$$

Portanto,

$$(-1)^j Im(2\eta_1 + e_j) > 0, \quad 0 < x \leq 1/4, \quad j = 2, 3 \quad (5.5.17)$$

Consideremos agora o intervalo $1/4 \leq x \leq 1/2$. De (5.5.11):

$$\begin{aligned} L_1(x) &\geq \frac{e^{-\pi y} \operatorname{sen}(\pi/4)}{(1 + e^{-2\pi y})^2} \geq \frac{e^{-\pi y}}{1 + (1/15)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{3}{5} e^{-\pi y} \Rightarrow \\ L_1(x) &\geq \frac{3}{5} e^{-\pi y} \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

Para $n > 1$, temos:

$$\begin{aligned} |L_n(x)| &< \frac{(1 + e^{-n\pi y})}{(1 + e^{-4n\pi y} - 2e^{-2n\pi y} |\cos 2\pi nx|)} n e^{-n\pi y} < \frac{(1 + e^{-4\pi y})}{(1 - e^{-4\pi y})^2} n e^{-n\pi y} \\ &< \frac{(1 + 1/15)}{(1 - 1/15)^2} n e^{-n\pi y} < 2n e^{-n\pi y} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|L_n(x)| < 2ne^{-\pi ny} \quad (5.5.19)$$

Ainda precisaremos calcular $\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n\pi y}$ o que pode ser obtido derivando-se a série $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi ny} = \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-\pi y}}$, o que resulta em:

$$\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-\pi ny} = \frac{2e^{-2\pi y} - e^{-3\pi y}}{(1 - e^{-\pi y})^2} \leq \frac{e^{-\pi y}(2/15)}{(1 - 1/15)^2} < (1/5)e^{-\pi y}$$

Da expressão anterior, (5.5.18) e (5.5.19), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x) &\geq L_1(x) - \sum_{n=2}^{\infty} |L_n(x)| \geq (3/5)e^{-\pi y} - \\ &\quad - (2/5)e^{-\pi y} = e^{-\pi y}/5 > 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_n(x) &\leq -L_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} |L_n(x)| \leq -(3/5)e^{-\pi y} + \\ &\quad + (2/5)e^{-\pi y} = -e^{-\pi y}/5 < 0 \end{aligned}$$

Das fórmulas acima, de (5.5.12) e (5.5.13), temos:

$$(-1)^j \text{Im}(2\eta_1 + e_j) > 0, \quad 1/4 < x \leq 1/2, \quad j = 2, 3 \quad (5.5.20)$$

De (5.5.17), (5.5.20) e como $\text{Im}(2\eta_1 + e_j)(x)$ é ímpar, temos:

$$(-1)^j \text{Im}(2\eta_1 + e_j) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (5.5.21)$$

Isto conclui a prova de (ii)

(iii) Das fórmulas (39) e (46) das páginas 255 e 258 respectivamente de [14] para o caso em estudo, temos:

$$\begin{aligned} e_2 - e_3 &= \pi^2 \vartheta_2^4 \\ \vartheta_2 &= 2\sqrt[4]{q} \gamma_{2,3} \\ \gamma_{2,3} &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2+n} \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

Então:

$$1 - |Re\gamma_{2,3}| \leq |1 - Re\gamma_{2,3}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2+n)y} |\cos\pi(n^2+n)x| \leq$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi ny} = \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-\pi y}} < \frac{(1/15)^2}{14/15} < 10^{-2}$$

Analogamente,

$$|Im\gamma_{2,3}(x)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi ny} < 10^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Arg\gamma_{2,3}^4| = 4arctg \left| \frac{Im\gamma_{2,3}(x)}{Re\gamma_{2,3}(x)} \right| \leq 4/99 < \pi/6$$

Como $Arg(e_2 - e_3) = Argq + Arg\gamma_{2,3}^4(x) = \pi x + \gamma_{2,3}^4(x)$,

$$\pi x - \pi/6 < Arg(e_2 - e_3) < \pi x + \pi/6 \quad (5.5.23)$$

Se $1/6 < x \leq 1/2$, $0 < Arg(e_2 - e_3) < 2\pi/3 \Rightarrow Im(e_2 - e_3) > 0$ (5.5.24)

Se $0 < x \leq 1/6$, temos:

$$Im\gamma_{2,3}'(x) \geq \pi e^{-2\pi y} - \pi \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + n)e^{-\pi(n^2+n)y} \geq \pi e^{-2\pi y} - \pi \sum_{n=6}^{\infty} ne^{-\pi ny} =$$

$$= \pi e^{-2\pi y} (1 - e^{-4\pi y} \frac{(6 - 5e^{-\pi y})}{(1 - e^{-\pi y})^2}) > \pi e^{-2\pi y} (1 - (1/15)^4 \frac{6}{(1 - 1/15)^2}) > 0$$

Do resultado anterior e como $Im\gamma_{2,3}(0) = 0$, temos:

$$Im\gamma_{2,3}(x) > 0 \Rightarrow 0 < Arg\gamma_{2,3}^4 < \pi/6 \Rightarrow \pi x < Arg(e_2 - e_3) < \pi x + \pi/6.$$

Como $0 < x \leq 1/6$, temos:

$$0 < Arg(e_2 - e_3) < \pi/3$$

Da expressão anterior, de (5.5.24) e como

$$Arg(e_2 - e_3)(x) = \pi x + 4Arg\gamma_{2,3}(x) = \pi x + 4Arg \frac{Im\gamma_{2,3}(x)}{Re\gamma_{2,3}(x)}$$

é uma função ímpar, temos que $-2\pi/3 < Arg(e_2 - e_3) < 0$, se $x < 0$. Então:

$$\begin{aligned} Im(e_2 - e_3)(x) &< 0 \text{ se } x < 0 \\ Im(e_2 - e_3)(x) &> 0 \text{ se } x > 0 \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

o que completa o item (iii).

(iv) Se $x = 0$, $Im\gamma_{2,3}(0) = 0$ e $Re\gamma_{2,3}(0) > 0$, temos:

$$\gamma_{2,3}(0) \in \mathbb{R} \text{ e } q(0) = e^{-\pi y} > 0.$$

Logo:

$$Re(e_2 - e_3) = e_2 - e_3 > 0 \text{ se } x = 0 \quad (5.5.26)$$

o que finaliza a proposição $\square$ Com esses resultados, podemos demonstrar o Lema seguinte:

5.5.3

Lema 5.4 *Seja $L(1, \tau)$ um reticulado, onde $\tau = x + iy$ e seja $B \in \mathbb{R} - 0$ tal que as equações (5.4.2) e (5.4.3) sejam satisfeitas. Então $s = 2$ e $x = 0$*

Demonstração:

Se $s = 1$, tirando a parte real da equação (5.4.3), temos:

$$Re y(2\eta_1 + e_1) - \pi = \pi B^2 \left(\frac{Re(e_k - e_1)}{|e_k - e_1|^2} + \frac{Re(e_t - e_1)}{|e_t - e_1|^2} \right)$$

Do item (i) da proposição 5.4, o primeiro membro da equação acima é maior que π e o segundo é menor que 0. Logo

$$s \neq 1 \quad (5.5.27)$$

Se $s = 3$ e $x = 0$, tirando a parte real da equação (5.4.3), temos:

$$Re y(2\eta_1 + e_3) - \pi = \pi B^2 \left(\frac{Re(e_k - e_3)}{|e_k - e_3|^2} + \frac{Re(e_t - e_3)}{|e_t - e_3|^2} \right)$$

Do item (i) da proposição 5.5, o primeiro membro da equação anterior é menor que $-\pi$ e dos itens (iv) dessa mesma proposição e (i) da proposição 5.4, o segundo membro da última equação é maior que 0, o que é absurdo. Se $s = 3$ e $x > 0$, tirando a parte imaginária da equação (5.4.3), temos:

$$-yIm(2\eta_1 + e_3) = \pi B^2 \left(\frac{-Im(e_k - e_3)}{|e_k - e_3|^2} + \frac{-Im(e_t - e_3)}{|e_t - e_3|^2} \right)$$

Do item (ii) da proposição 5.5 , o primeiro membro da equação anterior é positivo e dos itens (ii) da proposição 5.4 e (iii) da proposição 5.5 , o segundo membro da última equação é negativo , que é absurdo.

Se $s = 3$ e $x < 0$, do item (ii) da proposição 5.5 , o primeiro membro da equação anterior é negativo e dos itens (iii) dessa mesma proposição e (ii) da proposição 5.4 , o segundo membro da última equação é positivo, o que é absurdo.

Portanto , dos parágrafos anteriores e (5.5.27) , resulta que:

$$s = 2 \quad (5.5.28)$$

Vamos mostrar agora que $x = 0$. Como $s = 2$, tirando a parte imaginária da equação (5.4.3), temos:

$$-yIm(2\eta_1 + e_2) = \pi B^2 \left(\frac{-Im(e_k - e_2)}{|e_k - e_2|^2} + \frac{-Im(e_t - e_2)}{|e_t - e_2|^2} \right)$$

Se $x < 0$, dos itens (ii) da proposição 5.4 e (ii) e (iii) da proposição 5.5 o primeiro membro da equação acima é negativo enquanto que o segundo será positivo, o que é absurdo.

Se $x > 0$, dos itens (ii) da proposição 5.4 e (ii) e (iii) da proposição 5.5 o primeiro membro da equação acima é positivo enquanto que o segundo será negativo, o que é absurdo.

Portanto, $x = 0$. □

Observação: Quando $x = 0, q = e^{i\pi\tau} \in \mathbb{R}$ e então de (5.5.1) , (5.5.3) (5.5.8) , (5.5.9) e (5.5.22), temos que:

$$2\eta_1 + e_j \in \mathbb{R} , j = 1, 2, 3 \quad (5.5.29)$$

$$e_k - e_j \in \mathbb{R} , j, k = 1, 2, 3 , k \neq j \quad (5.5.30)$$

Então as equações (5.4.2) e (5.4.3) são equivalentes às equações:

$$(2\eta_1 + e_2) = B^2 \left(\frac{2\eta_1 + e_1}{e_1 - e_2} + \frac{2\eta_1 + e_3}{e_3 - e_2} \right) \quad (5.5.31)$$

$$y(2\eta_1 + e_2) - \pi = \pi B^2 \left(\frac{1}{e_1 - e_2} + \frac{1}{e_3 - e_2} \right) \quad (5.5.32)$$

5.6 O reticulado $L(1, yi)$ é quadrado.

Mostraremos agora que a solução das equações anteriores é $y = 1$ e $B = \sqrt{\pi/2}$ e para isso , precisaremos de mais algumas proposições:

5.6.1

Proposição 5.6 *Seja $L(1, iy)$ um reticulado de $\mathbb{C}$ com $y \geq 1$. Então:*

- [i] $\frac{2\eta_1 + e_1}{e_1 - e_2} + \frac{2\eta_1 + e_3}{e_3 - e_2} \geq \frac{3}{2}(1 - e^{-2\pi y})^3$
- [ii] A função $f(y) = y(2\eta_1 + e_2) - \pi$ tem a propriedade

$$f'(y) \leq \frac{-12\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} \text{ e } f(1) = 0$$

- [iii] A função $h(y) = \frac{\pi e^{-\pi y}}{e_1 - e_2} + \frac{\pi e^{-\pi y}}{e_3 - e_2}$ tem a propriedade

$$\frac{-2(1 + e^{-\pi y})e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} \leq h'(y) < 0 \text{ e } h(1) = 0$$

Demonstração:

(i) De (5.5.1) para $x = 0$, temos:

$$2\eta_1 + e_1 = \pi^2 + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} S_n(y), \quad S_n(y) = \frac{(-1)^{n+1} n e^{-2\pi n y}}{1 - e^{-2\pi n y}}$$

Se n é ímpar,

$$\begin{aligned} S_n(y) + S_{n+1}(y) &\geq n e^{-2\pi n y} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi n y}} - \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi(n+1)y}} \right) \geq \\ &\geq \frac{n e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi n y}} (1 - e^{-2\pi y}) > 0 \end{aligned}$$

A desigualdade acima aplicada a fórmula anterior resulta que:

$$2\eta_1 + e_1 \geq \pi^2 \tag{5.6.1}$$

De (5.5.3) para $x = 0$, temos:

$$e_1 - e_2 = \pi^2 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(y) \right)^4, \quad T_n(y) = (-1)^n e^{-\pi n^2 y}$$

Se n é par,

$$T_n(y) + T_{n+1}(y) = e^{-\pi n^2 y} - e^{-\pi(n+1)^2 y} > 0$$

Analogamente, se n é ímpar,

$$T_n(y) + T_{n+1}(y) < 0$$

Logo,

$$-1 < 1 - e^{-\pi y} + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(y) < 1$$

Portanto,

$$0 < e_1 - e_2 < \pi^2 \quad (5.6.2)$$

De (5.6.1) e (5.6.2), temos:

$$\frac{2\eta_1 + e_1}{e_1 - e_2} \geq (1 - e^{-2\pi y})^3 \quad (5.6.3)$$

De (5.5.22) com $x = 0$, temos:

$$\begin{aligned} e_3 - e_2 &= -16\pi^2 e^{-\pi y} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2+n)y}\right)^4 \geq \\ &\geq -16\pi^2 e^{-\pi y} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n y}\right)^4 = \frac{-16\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^4} \end{aligned}$$

De (5.5.8) com $x = 0$, temos:

$$2\eta_1 + e_3 = -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-\pi n y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{-8\pi^2 e^{-\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}}$$

Das duas equações anteriores, temos:

$$\frac{2\eta_1 + e_3}{e_3 - e_2} \geq \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi y})^3$$

que juntamente com (5.6.3) resulta em:

$$\frac{2\eta_1 + e_1}{e_1 - e_2} + \frac{2\eta_1 + e_3}{e_3 - e_2} \geq \frac{3}{2}(1 - e^{-2\pi y})^3 \quad (5.6.4)$$

Isto demonstra o item (i).

(ii) Do Teorema demonstrado no final do Capítulo III, se $y = 1$, $\eta_1 = \eta/2 = \pi/2$ e $e_2 = 0$. Logo:

$$f(1) = 0 \quad (5.6.5)$$

Para majorar $f'(y)$, precisaremos majorar as expressões abaixo:

$$\text{Se } R_n(y) = \frac{(-1)^{n+1} n e^{-\pi n y}}{1 - e^{-2\pi n y}},$$

$$\begin{aligned} R_{2k}(y) + R_{2k+1}(y) &\leq -(2k+1)e^{-2k\pi y} \left(\frac{1}{1 - e^{-4k\pi y}} - \frac{1}{1 - e^{-2(2k+1)\pi y}} \right) \leq \\ &\leq \frac{-(2k+1)e^{-2k\pi y}}{(1 - e^{-4k\pi y})(1 - e^{-2(2k+1)\pi y})} (e^{-4k\pi y}(1 - e^{-2\pi y})) < 0 \end{aligned}$$

De (5.5.9) para $x = 0$ e separando o primeiro termo da somatória, temos:

$$\begin{aligned} 2\eta_1 + e_2 &= \frac{8\pi^2 e^{-\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} + \sum_{k=1}^{\infty} (R_{2k}(y) + R_{2k+1}(y)) \leq \frac{8\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} \\ R'_{2k-1}(y) + R'_{2k}(y) &= -\pi(2k-1)^2 \frac{(1 + e^{-2\pi(2k-1)y})}{(1 - e^{-2\pi(2k-1)y})^2} e^{-\pi(2k-1)y} + \\ + 4\pi k^2 \frac{(1 + e^{-4k\pi y})}{(1 - e^{-4k\pi y})^2} e^{-2k\pi y} &\leq \frac{-\pi(2k-1)^2}{e^{\pi(2k-1)y}} + \frac{4\pi(2k-1)^2(1 + e^{-4\pi})}{(1 - e^{-4\pi})e^{(2k-1)\pi y} e^{\pi y}} \leq \\ &\leq \frac{-\pi(2k-1)^2}{e^{(2k-1)\pi y}} \left(1 - \frac{4(1 + e^{-4\pi})}{(1 - e^{-4\pi})^2} e^{-\pi} \right) \leq \\ &\leq \frac{-\pi(2k-1)^2}{e^{(2k-1)\pi y}} \left(1 - \frac{4(1 + e^{-4\pi})}{(1 - e^{-4\pi})^2} e^{-\pi} \right) \leq -\frac{4}{5} \frac{\pi(2k-1)^2}{e^{(2k-1)\pi y}} \end{aligned}$$

Das expressões anteriores e calculando-se $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-2k\pi y}$, derivando a série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k\pi y}$, temos:

$$\begin{aligned} f'(y) = 2\eta_1 + e_2 + y(2\eta_1 + e_2)'(y) &\leq \frac{8\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} + y 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} (R'_{2k-1} + R'_{2k}) \leq \\ &\leq \frac{8\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} + y 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-4/5)\pi \frac{(2k-1)^2}{e^{(2k-1)\pi y}} \leq \\ &\leq \frac{8\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} + y 8\pi^2 \pi (-4/5) e^{\pi y} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-2k\pi y} = \frac{8\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} + \\ + y \frac{8\pi^2 \pi (-4/5) e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} &= \frac{-8\pi^2 (4\pi y - 5) e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} \leq \frac{-12\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} \end{aligned}$$

o que completa o item (ii) .

(iii) Do Teorema demonstrado no final do Capítulo III, se

$$y = 1 \implies e_1 = -e_3 \text{ e } e_2 = 0.$$

Logo,

$$h(1) = 0$$

De (5.5.3) e (5.5.22) com $x = 0$, temos:

$$e_1 - e_2 = \pi^2(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 y})^4$$

$$e_3 - e_2 = -16\pi^2 e^{-\pi y} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2+n)y})^4$$

Aplicando as expressões acima à $h(y)$ e derivando, temos:

$$h'(y) = - \frac{(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - 4n^2) e^{-\pi n^2 y})}{(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 y})^5} e^{-\pi y} - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) e^{-(n^2+n)y\pi}}{4(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2+n)y})^5} < 0$$

Considerando $R_n(y) = (-1)^n (1 - 4n^2) e^{-\pi n^2 y}$ como função de n ,

$$|R'_n(y)| = e^{-\pi n^2 y} 2n(4 - \pi y(4n - 1)) < 0.$$

Logo, se n é par:

$$\begin{aligned} R_n(y) + R_{n+1}(y) < 0 &\implies -(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n(y)) > \\ &> -(1 + 6e^{-\pi y}) > -(1 + 6e^{-\pi}) \end{aligned}$$

Analogamente, $e^{\pi n^2 y}$ é decrescente e portanto, se $S_n(y) = (-1)^n e^{-\pi n^2 y}$, temos:

Se n é par:

$$\begin{aligned} S_n(y) - S_{n+1}(y) > 0 &\implies -\frac{1}{(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 y})^5} > \\ &> -\frac{1}{(1 - 2e^{-\pi y})^5} > -\frac{1}{(1 - 2e^{-\pi})^5} \end{aligned}$$

Além disso,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)e^{-(n^2+n)y} > -2 \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2\pi ny}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2\pi ny} = \frac{e^{-2\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h'(y) &= -\frac{(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - 4n^2) e^{-\pi n^2 y})}{(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 y})^5} e^{-\pi y} - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) e^{-(n^2+n)y\pi}}{4(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2+n)y})^5} \geq \\ &\geq -\frac{(1 + 6e^{-\pi})}{(1 - 2e^{-\pi})^5} e^{-\pi y} - (2/4) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2\pi ny} \geq \frac{1 + 1/23}{(1 - 2/23)^5} e^{-\pi y} - \\ &\quad -\frac{e^{-2\pi y}}{2(1 - e^{-2\pi y})^2} \geq -2e^{-\pi y} - \frac{e^{-2\pi y}}{2(1 - e^{-2\pi y})^2} = \\ &= \frac{-2e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} (1 + e^{-4\pi y} - 2e^{-2\pi y} + e^{-\pi y}/4) \geq \frac{-2(1 + e^{-\pi y})e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2}. \square \end{aligned}$$

Observação:

A fim de mostrar que $y = 1$, consideremos as funções seguintes:

$$B_1(y) = \frac{2\eta_1 + e_2}{e^{-\pi y} \left(\frac{2\eta_1 + e_1}{e_1 - e_2} + \frac{2\eta_1 + e_3}{e_3 - e_2} \right)}, \quad (5.6.6)$$

$$B_2(y) = \frac{y(2\eta_1 + e_2) - \pi}{\pi \left(\frac{1}{e_1 - e_2} + \frac{1}{e_3 - e_2} \right)} e^{-\pi y} \quad (5.6.7)$$

Como todos esses membros são escritos em séries uniformemente convergentes, todos são funções de classe C^∞ e dos itens (i) e (iii) da proposição anterior, seus denominadores não se anulam em $(1, \infty)$. Portanto,

$$B_j(y) : (1, \infty) \implies \mathbb{R}, \quad j = 1, 2 \text{ são funções de classe } C^\infty$$

Comparando as equações acima com (5.5.31) e (5.5.32), vemos que as equações (5.5.31) e (5.5.32) são satisfeitas para $y > 1$ se, e só se, $B_1(y) = B_2(y)$

5.6.2

Proposição 5.7

$$B_1(y) \leq \frac{16\pi^2}{3(1 - e^{-2\pi})^5}$$

Demonstração:

Do item (i) da proposição 5.6 e da desigualdade para $2\eta_1 + e_2$ encontrada no item (ii) da proposição 5.6 aplicados à (5.6.6), resulta que:

$$B_1 \leq \frac{8\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2 e^{-\pi y}} \frac{2}{3(1 - e^{-2\pi y})^3} = \frac{16\pi^2}{3(1 - e^{-2\pi})^5}$$

□

5.6.3

Proposição 5.8 *Sejam $\epsilon > 0$ e $f, h, k : (1 - \epsilon, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^∞ tais que :*

- [i] $f(1) = h(1) = 0$
- [ii] $h'(y) < 0$, se $y > 1 - \epsilon$
- [iii] $k'(y) \leq 0$, se $y > 1 - \epsilon$
- [iv] $\frac{f'(y)}{h'(y)} > k(y) > 0$, se $y > 1 - \epsilon$

Então a função

$$u(y) = \frac{f(y)}{h(y)} \text{ se } y \neq 1 \text{ e } u(1) = \frac{f'(1)}{h'(1)}$$

é contínua em $(1 - \epsilon, +\infty)$ e $u(y) > k(y)$ se $y \geq 1$

Demonstração:

(a) Como $h'(y) < 0$ ($\forall y$) e $h(1) = 0$, temos que

$$h(y) > 0 \text{ se } y < 1 \text{ e } h(y) < 0 \text{ se } y > 1.$$

Então, $u(y)$ é contínua se $y \neq 1$. Mas,

$$\lim_{y \rightarrow 1} u(y) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{h(y)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f'(y)}{h'(y)} = \frac{f'(1)}{h'(1)}.$$

Logo, u é contínua em $(1 - \epsilon, +\infty)$.

(b) $u(y) > k(1)$ por (iv). Suponhamos então que $y > 1$ e seja

$$g(y) = f(y) - h(y)k(y), y > 1 - \epsilon.$$

Então,

$$g'(y) = h'(y)\left[\frac{f'(y)}{h'(y)} - k(y)\right] - h(y)k'(y) < 0, \text{ se } y \geq 1.$$

Logo, $f(y) < h(y)k(y)$, se $y > 1$, ou seja, $\frac{f(y)}{h(y)} > k(y)$, se $y > 1$. □

5.6.4

Proposição 5.9

$$B_2(y) \geq \frac{6\pi^2}{1 + e^{-\pi}}$$

Demonstração:

Sejam :

$$f(y) = y(2\eta_1 + e_2) - \pi \text{ e } h(y) = \pi\left(\frac{1}{e_1 - e_2} + \frac{1}{e_3 - e_2}\right)e^{-\pi y}$$

Da proposição 5.7 , $f(1) = h(1) = 0$ e $h'(y) < 0$ e :

$$\begin{aligned} \frac{f'(y)}{h'(y)} &= \frac{-f'(y)}{-h'(y)} \geq \frac{12\pi^2 e^{-\pi y}}{(1 - e^{-2\pi y})^2} \frac{(1 - e^{-2\pi y})^2}{2(1 + e^{-\pi y})e^{-\pi y}} \\ &= \frac{6\pi^2}{1 + e^{-\pi y}} = k(y) \geq \frac{6\pi^2}{1 + e^{-\pi}} \end{aligned}$$

Portanto, de 5.8 , temos :

$$B_2(y) = \frac{f(y)}{h(y)} > k(y) = \frac{6\pi^2}{1 + e^{-\pi}}$$

□

Agora já temos condições de mostrar que a única solução de (5.5.31) e (5.5.32) é $y = 1$.

5.6.5

Lema 5.5 *Sejam $L(1, iy)$ um reticulado onde $y \geq 1$ e $B \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que (5.5.31) e (5.5.32) são satisfeitas para $s = 2$. Então $y = 1$*

Demonstração:

De 5.7 e 5.9 ,temos:

$$B_1(y) \leq \frac{16\pi^2}{3(1 - e^{-2\pi})^5} < \frac{6\pi^2}{(1 + e^{-\pi})} \leq B_2(y)$$

absurdo. Portanto as equações (5.5.31) e (5.5.32) são satisfeitas se e somente se $y = 1$. $\square$

Com esses resultados, podemos demonstrar o teorema principal:

5.7 A Unicidade

5.7.1

Teorema 5.7 *Existe uma única imersão mínima completa imersa em $\mathbb{R}^3$ de gênero um e três fins com curvatura total finita tal que:*

- [i] os fins são mergulhados e paralelos
- [ii] dois fins são do tipo catenóide e um fim é do tipo planar.

Demonstração:

Consideremos uma imersão mínima M completa em $\mathbb{R}^3$ de gênero um e três fins com curvatura total finita satisfazendo os itens (i) e (ii). Logo, pelo teorema 5.2, a imersão é representada por:

$$x : M = T_\tau - \{q_1, q_2, q_3\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ onde } T_\tau = \mathbb{C}/L(1, \tau), \tau \in \mathbb{F}$$

Como os fins são mergulhados, $C(M) = 2\pi(\chi(T_\tau) - 2k) = -12\pi$. Logo, a função g de Weierstrass relativa a M tem ordem 3 e portanto, o fim planar poderá ter ordem no máximo 2, que juntamente com o lema 5.1 resulta que o fim planar tem ordem 2. Portanto, a superfície suposta está nas condições do lema 5.4.1. Assim, após um movimento rígido, uma homotetia em $\mathbb{R}^3$ e uma translação de coordenadas de $\mathbb{C}$, a representação (g, w) de x é dada por :

$$g = \frac{2B(e_k - e_l)}{P'} \quad w = (P - e_s)dz, \quad B \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\pi(0) = q_3, \pi(w_k) = q_2, \pi(w_t) = q_1$$

onde (s, k, t) é uma permutação de $(1, 2, 3)$, $B \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}_\tau$ é a projeção canônica, sendo o fim planar associado a q_3 . Além disso, as equações (5.4.2) e (5.4.3) são satisfeitas para $L(1, \tau)$. Portanto, resulta dos lemas 5.5 e 5.4 que $\tau = i$ e $s = 2$. Para esse reticulado, temos $\eta_1 = \pi/2$, $e_2 = 0$, $e_1 = -e_3$, que aplicados a (5.5.31) resulta que:

$$B = \sqrt{\frac{2\eta_1 + e_2}{\left(\frac{2\eta_1 + e_1}{e_1 - e_2} + \frac{2\eta_1 + e_3}{e_3 - e_2}\right)}} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\pi + e_1}{e_1} - \frac{\pi - e_1}{e_1}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Aplicando esses resultados a expressão anterior, temos:

$$g = \pm \frac{2\sqrt{2\pi}e_1}{P'}, w = Pd z \text{ e } L(1, \tau) = L(1, i)$$

que é exatamente a imersão mínima construída no capítulo IV. Portanto, ela é a única superfície mínima nas condições do teorema 5.7. $\square$

5.7.2

Corolário 5.1 *Seja M uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total 12π . Então, teremos duas possibilidades:*

- [i] M é a superfície de Costa.
- [ii] M tem gênero 1 com três fins do tipo catenóide.

Demonstração:

Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ a representação da superfície mínima completa mergulhada com curvatura total $C(M) = -12\pi$. Do teorema 5.2, M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta, $\bar{M}_\gamma$ de gênero γ perfurada nos pontos $q_1, q_2, \dots, q_N$. Como os fins são mergulhados, do Capítulo II, vale a fórmula de Jorge-Meeks:

$$-12\pi = C(M) = 2\pi(\chi(\bar{M}) - 2N) = 2\pi(2 - 2\gamma - 2N)$$

ou seja,

$$\gamma + N = 4$$

Precisamos mostrar que $\gamma = 1$ e $N = 3$. Temos as seguintes possibilidades para M :

- [I] $M = \bar{M}_0 - \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- [II] $M = \bar{M}_1 - \{q_1, q_2, q_3\}$
- [III] $M = \bar{M}_2 - \{q_1, q_2\}$
- [IV] $M = \bar{M}_3 - \{q_1\}$

Dos teoremas 5.3 , 5.6 , 5.5 , respectivamente, os casos I , III e IV não podem ocorrer. Portanto, $\gamma = 1$ e $N = 3$. Logo , a superfície tem gênero um e três fins. Para os fins, temos as seguintes possibilidades:

- [i] 3 fins planares
- [ii] 2 fins planares e 1 de tipo catenóide
- [iii] 1 fim planar e 2 de tipo catenóide
- [iv] 3 fins de tipo catenóide

Do teorema 5.4 os casos (i) e (ii) não podem ocorrer. O caso (iii) pode ocorrer pelo teorema 5.7 Para o caso (iv) , uma possibilidade seria após uma rotação , termos:

$$g(q_1) = g(q_2) = g(q_3) = 0$$

sendo q_1, q_2 e q_3 zeros simples de g e como esta tem ordem 3, seus polos estão em M e portanto w teria 6 zeros em M , o que é possível ocorrer uma vez que cada fim é mergulhado e portanto, cada um é polo duplo de w . $\square$

Observação: O caso (iv) do corolário acima de fato ocorre. Para maiores informações, ver [5].

Bibliografia

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I., eds. *Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables* . Washington, National Bureau of Standards, c1964. 1046p. (National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series, 55) .
- [2] Barbosa, J.L.; Colares, A.G. *Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$* Berlin, Springer, 1986. 124p. (Lectures Notes in Mathematics, 1195) .
- [3] Chern, S.S. *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface* Proc. Amer. Math. Soc., v.6, p.771-82. 1955
- [4] Conway, J.B. *Functions of one complex variable* 2.ed. New York, Springer, 1978. 317p. (Graduate Texts in Mathematics, 11).
- [5] Costa, C.J. *Classification of complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ with total curvature 12π* Invent.Math., v.105, n.2, p.273-303, 1991.
- [6] Costa, C.J. *Funções elípticas, algébricas e superfícies mínimas* Rio de Janeiro, IMPA, 1991 174p. (18º Colóquio de Matemática)
- [7] Costa, C.J. *Imersões mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ do gênero um e curvatura total finita* Rio de Janeiro, IMPA, 1982. 51p (Informes de Matemática. Série F, 2) .
- [8] Costa, C.J. *Uniqueness of minimal surfaces embedded in $\mathbb{R}^3$ with total curvature 12π* . J. Differential Geometry, v.30, n.3, p.597-618, 1989.
- [9] Dieudonne, J.A. *Foundations of modern analysis*. New York, Academic Press, 1960. 361p. (Pure and Applied Mathematics, 10).
- [10] Forster, O. *Lectures on Riemann surfaces*. New York, Springer, 1981. 284p. (Graduate Texts in Mathematics, 81).

- [11] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin, Springer, 1977. 401p. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 224).
- [12] Goes, C.C. *As normais às superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$* São Paulo, 1975. 143p. Dissertação (Mestrado)-IME-USP.
- [13] Golubitsky, M.; Guillemin, V. *Stable mappings and their singularities*. Berlin, Springer, 1973. 209p. (Graduate Texts in Mathematics, 14).
- [14] Halphen, G.H. *Traite des fonctions elliptiques et de leurs applications*. Paris, Gauthier-Villares, 1886. v.1.
- [15] Hoffman, D.A.; Meeks III, W. *A complete embedded minimal surface in $\mathbb{R}^3$ with genus one and three ends*. Differential Geometry, v.21, p.109-127, 1985.
- [16] Hoffman, D.A.; Osserman, R. *Geometry of the generalized Gauss map*. Providence, AMS, 1980. 105p. (Memoirs of the AMS, 236).
- [17] Hönig, C.S. *Análise funcional e aplicações*. São Paulo, IME-USP, 1970. v.2
- [18] Huber, A. *On subharmonic functions and differential geometry in the large*. Comment. Math. Helv., v.32, p.13-72, 1957/58
- [19] Jorge, L.P.; Meeks III, W.H. *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*. Topology, v.22, n.2, p.203-21, 1983.
- [20] Lang, S. *Elliptic functions*. Reading, Addison-Wesley, 1973. 326p.
- [21] Lawson, H.B,Jr. *Lectures on minimal submanifolds* . Rio de Janeiro, IMPA, 1970, 15p.
- [22] Lima, E.L. *Cálculo tensorial*. Rio de Janeiro, IMPA, 1965. 228p.
- [23] Lima, E.L. *A característica de Euler-Poincaré*. Matemática Universitária, n.1 p.47-62. jun/1985.
- [24] Lima, E.L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro, IMPA,v.2, 1981. 476p.(Projeto Euclides).
- [25] Lima, E.L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Rio de Janeiro, IMPA, 1977. 263p. (11º Colóquio Brasileiro de Matemática).
- [26] Lima, E.L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro, IMPA,1973. 369p.(monografias de matemática,15)

- [27] Lopez, F.J.; Ros, A. *On embedded complete minimal surfaces of genus zero*. J. Differential Geometry, v.33, n.1, p.293-300, 1991.
- [28] Meeks III, W.H.; Rosenberg, H. *The maximum principle at infinity for minimal surfaces in flat three manifolds*. Comment. Math. Helv., v.65, n.2, p.255-70, 1970.
- [29] Milnor, J.W. *Topology from the differentiable viewpoint*. Charlottesville, University Press of Virginia, c1965. 64p.
- [30] Neville, E.H. *Elliptic functions*. Oxford, Pergamon, 1971. 198p.
- [31] O'Neill, B. *Elementary differential geometry*. New York, Academic Press, 1966. 411p.
- [32] O'Neill, B. *Semi-Riemannian geometry*. New York, Academic Press, 1983. 468p. (Pure and Applied Mathematics, 103).
- [33] Osserman, R. *A survey of minimal surfaces*. New York, Van Nostrand, 1969. 159p.
- [34] Saks, S.; Zygmund, A. *Analytic functions*. 3.ed. Amsterdam, Elsevier, 1971. 504p.
- [35] Schoen, R.M. *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*. J. Differential Geometry, v.18, n.4, p.791-809, 1983.
- [36] Segal, S.L. *Nine introductions in complex analysis*. Amsterdam, North-Holland, 1981. 716p.
- [37] Spivak, M. *Comprehensive introduction to differential geometry*. Boston, Publish or Perish, 1975. v.4.
- [38] Tannery, J.; Molk, J. *Elements de la theorie des fonctions elliptiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1893-1902. v.1