**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NEUTRAS COM
CONDICÕES INICIAIS DESCONTÍNUAS**

Luiz Fichmann

*TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA*

ORIENTADOR: Prof. Dr. José Carlos Fernandes de Oliveira

São Paulo, março de 1991

*Dedico este trabalho a todas as pessoas
que amam a Deus com sinceridade.*

Abstract

In this work we extend some results obtained by J. Hale [Hale 2] and D. Henry [Henry 1] for NFDEs from the context of continuous functions to the context of regulated functions and also results concerning the conjugation of flows around a hyperbolic fixed point ([P], [N], [Hale 4]) to these equations.

The motivation for the extension is natural as the fundamental matrix of the equation which appears in the variation-of-constants formula of the linear non-homogeneous NFDE ([Hale 2], [Henry 1]) is not continuous in t , admitting jumps. To include the fundamental matrix in the context of continuous functions, it used to be considered a special limit situation or a direct sum of some spaces. So, the space of regulated functions appears as a natural context to include the fundamental matrix or even the resolvent, in the case we consider a generic Banach space as image space. In this general context, Hönig ([H1], [H3],[H4],[H5]) studied the Volterra–Stieltjes linear integral equations, and we used these results, as the initial value problem of a linear NFDE leads to such an integral equation.

The main results, besides the fundamental theory (existence and unicity of solution for each initial data, continuous and differential dependency of the solution in relation to the data, etc.), are: conjugation Hartman–Grobman – like between the flows of non-linear and linear hyperbolic equations and characterizations of the stable and unstable manifolds of a hyperbolic equilibrium. We also obtained the extension of spectral results of [Henry 1] to the context of regulated functions right-continuous.

In chapter III, we obtain analogous results for a class of difference equations (a particular type of NFDE) in L_2 phase space, profiting the spectral characterization of the flow of the linear equation in this context given in [Henry 3].

An important consequence of those conjugations results between linear and nonlinear hyperbolic equations is that the stability or unstability of the linear equation implies the stability or total unstability of the equilibrium of the non-linear equation.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
I - A EQUAÇÃO DIFERENCIAL FUNCIONAL DO TIPO NEUTRO	
1. A equação (N) e seus dados	5
2. Existência e unicidade de solução	9
3. Dependência contínua da solução de (N) com relação aos dados	17
4. Diferenciabilidade da solução de (N) em relação aos parâmetros	22
5. A solução para trás	42
6. Exemplos	59
7. O caso linear	72
II - ASPECTOS GEOMÉTRICOS, CONJUGAÇÕES DE FLUXOS E TEORIA ESPECTRAL NO ESPAÇO DE FASE $\mathcal{G}^+$	
1. O caso autônomo	89
2. Equilíbrio Hiperbólico	92
3. Subespaços complementares invariantes	103
4. A equação característica na teoria espectral	119
III - A EQUAÇÃO FUNCIONAL A DIFERENÇAS NO ESPAÇO DE FASE L_2	
1. A eq. (D) no contexto L_2 . Existência, unicidade e dependência contínua da solução em relação aos parâmetros	150
2. A solução para trás	159
3. A equação linear e teoremas de conjugação de fluxos	167
4. Diferenciabilidade da solução em relação ao dado inicial em L_2	179
APÊNDICE	
1. A Equação do tipo Neutro Linear para $t \leq t_0$ vista como Equação de Volterra-Stieltjes	190
2. As variedades estável e instável do Equilíbrio Hiperbólico	206
BIBLIOGRAFIA	226

INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações, é necessário considerar sistemas cujos estados de fase presentes dependem de estados passados. Foi assim introduzido o estudo das equações diferenciais funcionais (EDFs) que remontam aos tempos de Volterra, Krasovskii e outros. Muita contribuição foi dada por Bellman e Cooke, Hale, etc., no que se refere a aspectos analíticos e geométricos da teoria das EDFs. A teoria genérica dessas equações foi iniciada por Oliva (ver [O]) e ampliada por Mallet-Paret (ver [M-P]), Oliveira (ver [JO]) e Camargo (ver [IC]). A teoria global, não obstante, encontra-se ainda em sua infância (ver [Hale 2] e [H,M,O]).

Em [LF] foi estudada a equação diferencial funcional neutra (EDFN) linear:

$$(N) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - f(t, x_t)) = g(t, x_t) \quad (f \text{ e } g \text{ lineares e contínuas na 2a. variável})$$

num contexto de solução regradada a valores num espaço de Banach X , à luz da teoria das Equações Integrais Lineares de Volterra-Stieltjes, transformando (N) num caso particular dessas últimas.

Havia se conseguido então a existência e unicidade de solução regradada a partir de um dado inicial e uma fórmula de variação-das-constantes dessa solução utilizando o resolvente do núcleo da Equação de Volterra-Stieltjes.

Dando continuidade a isso, será considerada nesse trabalho a EDFN geral (N) em que f e g satisfazem certas condições de diferenciabilidade na 2a. variável e, com o intuito de chegar numa relação entre essa equação geral (N) e alguma linearização $(N)'$, será estabelecida primeiramente uma teoria fundamental para (N) dentro de um espaço de fase $\mathcal{G}^+ = G^+([-r, 0], X)$, espaço de funções regradas contínuas à direita de um intervalo $[-r, 0]$ a valores num espaço de Banach X . Obtivemos: existência e unicidade de solução regradada para (N) para tempos futuros, para cada dado inicial em $\mathcal{G}^+$, e, sob certas condições para f , solução para trás, isto é, para tempos passados.

Obtivemos a continuidade da solução, quando restrita a intervalos finitos, em relação ao dado inicial e aos parâmetros f e g e também a diferenciabilidade C^k ($k \in \mathbb{N}$ ou

$k = \infty$) da solução em relação ao dado inicial e aos parâmetros f e g conforme esses parâmetros satisfaçam certas condições de diferenciabilidade C^k na 2a. variável.

Verificamos que a derivada da solução de (N) em relação ao dado inicial aplicada a um elemento $\Delta\varphi$ de $\mathcal{G}^+$ é a única solução regrada com dado inicial $\Delta\varphi$, da equação variacional linear $(N)'$ de (N) em torno de sua solução.

A partir disso, conseguimos para o caso autônomo com equilíbrio hiperbólico (ou seja, quando a linearizada em torno desse equilíbrio admite um operador de evolução hiperbólico) uma certa conjugação discreta local entre o fluxo de (N) em torno do equilíbrio e o fluxo da linearizada $(N)'_0$ e uma conjugação global entre esses fluxos se a equação (N) for uma pequena perturbação da equação linear hiperbólica $(N)_0$ (teorema II.2.3).

Essas conjugações permitiram caracterizar as variedades locais estável e instável do equilíbrio hiperbólico como sendo homeomorfas aos subespaços de $\mathcal{G}^+$ invariantes pelo fluxo de $(N)'_0$ (teorema II.2.2 e observação II.2.2).

Com o intuito de mostrar que para as condições C^k de diferenciabilidade impostas para f e g nós temos que essas variedades locais estável e instável do equilíbrio hiperbólico são de classe C^k e tangenciam os subespaços invariantes citados acima, procuramos obter uma fórmula-de-variação-das-constantes no espaço de fase $\mathcal{G}^+$ para a solução $(N)'_0$ tanto para a frente do dado inicial ([LF]) como para trás do dado inicial. Obtida essa fórmula (teorema I-7-4) através da Equação Integral Linear de Volterra-Stieltjes, conseguimos então mostrar a diferenciabilidade das variedades (teorema 1 do apêndice 2).

Em [Henry 1] obtém-se, no contexto das funções contínuas a valores em espaços euclidianos, para equações lineares (N) sem a parte singular, a relação natural entre o espectro de cada operador de evolução de (N) e as raízes da equação característica de (N) e isso se dá através do gerador infinitesimal do semi-grupo de operadores de evolução, já que nesse contexto esses operadores formam um C_0 -semi-grupo (semi-grupo fortemente contínuo) e admitem então um gerador infinitesimal. O semi-grupo funciona como uma espécie de “exponencial” do seu gerador e o espectro do gerador é formado das raízes da equação característica de (N) . Para obtermos então a origem estável, instável ou mais geralmente hiperbólica, basta colocarmos condições em cima das raízes da equação característica. Nós mostramos (cap. II.4) que esses resultados se mantêm no contexto das funções regradas

contínuas à direita, apesar de o semi-grupo de operadores de evolução nesse contexto não ser fortemente contínuo e nem algo como “fortemente regrado”, pois ele tem oscilação infinita em torno de cada $t \in \mathbb{R}$ quando fixamos uma função de $\mathcal{G}^+$ não contínua, não sendo então óbvio se falar em gerador infinitesimal.

Mas notemos que enquanto as contínuas restringem o espaço de fase $\mathcal{G}^+$, se tomamos o espaço $L_2 = L_2([-r, 0], X)$ este é exatamente o fecho de $\mathcal{G}^+$ na norma $\|\cdot\|_2$. Com essa norma, o semi-grupo de evolução de uma equação linear (N) , quando existe, é um C_0 -semi-grupo.

Em [Henry 3] é mostrado que nós obtemos um C_0 -semi-grupo de evolução em L_2 para certas equações a diferenças lineares sem a parte singular e tomando X um espaço de Hilbert. É estabelecida ainda em [Henry 3] a relação natural entre o espectro de cada operador de evolução e as raízes da equação característica da equação a diferenças (D) (lembrar que uma equação a diferenças é um caso particular de uma equação (N)). Neste caso então supor que temos um operador de evolução hiperbólico equivale a supor que as raízes da equação característica de (D) estão afastadas do eixo imaginário. Para tirar proveito desse fato, tomamos uma equação a diferenças não linear (D) cuja linearizada em torno de um equilíbrio fosse exatamente a equação estudada em [Henry 3] e estabelecemos uma teoria fundamental para (D) no espaço de fase L_2 . A partir disso, conseguimos para o caso de termos um equilíbrio hiperbólico, uma conjugação local entre o fluxo de (D) e da linearizada $(D)'$ em torno do equilíbrio num conjunto de funções regradas invariante pelo fluxo (teorema III.3.3) e conseguimos uma conjugação global entre esse fluxos se a equação (D) for uma pequena perturbação da equação linear hiperbólica $(D)_0$ (teorema III.3.1). Nesse caso, foi possível caracterizar as variedades locais estável e instável do equilíbrio hiperbólico como sendo homeomorfas aos correspondentes subespaços de L_2 invariantes pelo fluxo de $(D)_0$ (teorema III.3.2).

Para a diferenciabilidade da solução de (D) em relação ao dado inicial em L_2 , temos um contra-exemplo desse fato que nos foi dado pelo Professor Ivo Vortok, de Praga, para o caso de tomarmos a parte de saltos da equação como não linear. Daniel Henry nos mostrou posteriormente que de maneira geral nós não temos a diferenciabilidade no sentido de Fréchet, no contexto L_p ($1 \leq p < \infty$), quando a parte de saltos de (D) é não linear

e que nesse contexto seria conveniente o estudo da derivação no sentido de Hadamard. Colocando então a parte de saltos linear, ou seja, considerando

$$(D)^* \quad x(t) = \sum_{j=1}^n A_j x(t - r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta) g(x(t + \theta)) d\theta \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R}$$

obtivemos a diferenciabilidade que faltava, e com isso, todos os resultados que havíamos obtido para (N) no contexto das regradas.

Então pudemos caracterizar as variedades estável e instável locais de um equilíbrio hiperbólico de $(D)^*$ como sendo homeomorfas aos subespaços de L_2 invariantes pelo fluxo de $(D)_0^*$.

Um dos resultados importantes que se extrai da caracterização das variedades estável e instável de um equilíbrio hiperbólico como sendo homeomorfas aos subespaços do espaço de fase invariantes pelo fluxo da equação linear é que se um dos subespaços se degenera (conforme as raízes da equação característica tenham parte real só negativa ou só positiva) então o equilíbrio da equação não linear é estável ou totalmente instável respectivamente.

Gostaria de agradecer à dedicada e paciente ajuda do meu orientador José Carlos Fernandes de Oliveira, sem a qual nada disso seria possível.

Gostaria também de agradecer aos professores Chaim Höning, Daniel Henry, S.Schwabick, L.Barbanti e Waldyr M.Oliva pelo material, incentivo, ajuda e conversas a respeito do assunto.

Gostaria de agradecer por fim a Elen Del Sole pelo excelente trabalho de datilografia.

A EQUAÇÃO DIFERENCIAL FUNCIONAL DO TIPO NEUTRO

1. A Equação (N) e seus Dados

Vamos considerar X um espaço de Banach e r um número real positivo.

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo qualquer da reta, indicamos por $G(I, X)$ o espaço vetorial das funções $\psi : I \rightarrow X$ para os quais existem os limites laterais $\psi(t^+)$ e $\psi(t^-)$ para todo t interior a I e nas extremidades que pertençam a I existe o limite lateral respectivo. Tais funções se chamam regradas.

Escrevemos $G([-r, 0], X) = \mathcal{G}$.

Notemos que $\mathcal{G}$ é um espaço de Banach com a norma do supremo (para $\varphi \in \mathcal{G}$ $\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\varphi(\theta)\|$).

Em $G(I, X)$ definimos a seguinte relação de equivalência: $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi(t^+) = \psi(t^+) \forall t \in \overset{\circ}{I}$, ou seja, as funções que têm o mesmo limite lateral em todo ponto são ditas equivalentes. (Para um estudo detalhado das funções regradas, ver referência [H1], lá é mostrado, dentre outras coisas, que $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi(t^-) = \psi(t^-) \forall t \in \overset{\circ}{I}$).

Uma boa representante de cada classe dessa equivalência é a função contínua à direita, por exemplo. Definimos o subespaço fechado de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}^+ = \{\varphi \in \mathcal{G} \mid \varphi(\theta^+) = \varphi(\theta) \forall \theta \in [-r, 0]\}$$

e para $p \in X$ os conjuntos fechados $\mathcal{G}_p^+ = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid \varphi(0) = p\}$ donde $\mathcal{G}_0^+$ é subespaço fechado de $\mathcal{G}^+$.

De modo análogo define-se $G^+(I, X)$ para um intervalo qualquer I .

Dado $x \in G(I, X)$ e $t \in I$ tal que $[t - r, t] \subset I$ definimos o elemento $x_t \in \mathcal{G}$ por $x_t(\theta) = x(t + \theta) \forall \theta \in [-r, 0]$.

Para $p \in X$ definimos a função característica $\chi_J p \in \mathcal{G}$ (para $J \subset [-r, 0]$) por

$$\chi_J p(\theta) = p \quad \text{se } \theta \in J$$

$$\chi_J p(\theta) = 0 \quad \text{se } \theta \notin J.$$

Para um dado $t_0 \in \mathbf{R}$ queremos estudar a equação da forma

$$(N) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - f(t, x_t)) = g(t, x_t) \quad \text{primeiramente para } t \geq t_0$$

ou na forma integral

$$(N) \quad x(t) = f(t, x_t) - f(t_0, x_{t_0}) + x(t_0) + \int_{t_0}^t g(s, x_s) ds \quad (t \geq t_0)$$

com dado inicial $x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}$, no contexto das funções regradas.

Tomaremos

$$f, g : [t_0, \infty[\times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X,$$

tais que valem as condições:

$$(0) \quad \text{Para cada } x \in G([t_0 - r, \infty[, X) \text{ fixo; a função } \tilde{f}_x : [t_0, \infty[\rightarrow X \\ \text{dada por } \tilde{f}_x(t) = f(t, x_t) \text{ é regrada, ou seja, } \tilde{f}_x \in G([t_0, \infty[X)$$

$$(0)_{L_1} \quad \text{Para cada } x \in G([t_0 - r, \infty[, X) \text{ fixo; a função } \tilde{g}_x : [t_0, \infty[\rightarrow X \\ \text{dada por } \tilde{g}_x(t) = g(t, x_t) \text{ é localmente integrável, ou seja, } \tilde{g}_x \in L_1^{\text{loc}}([t_0, \infty[, X)$$

Observação 1: Obviamente quando tomamos $f(t, \varphi)$ ou $g(t, \varphi)$ com $\varphi \in \mathcal{G}$ estamos considerando na verdade $f(t, \varphi^+)$ ou $g(t, \varphi^+)$ onde $\varphi^+ \in \mathcal{G}_0^+$ e $\varphi^+ \sim \varphi$. O fato de definirmos f e g em $\mathcal{G}_0^+$ e não de maneira mais geral em $\mathcal{G}$ nos permitirá utilizarmos o teorema 1, de representação de funcionais lineares e contínuos de $\mathcal{G}_0^+$ a valores em X .

Uma solução regrada de (N) com dado inicial $\varphi \in \mathcal{G}$ é uma função $x \in G([t_0 - r, \infty[, X)$ tal que a função $x - \tilde{f}_x : [t_0, \infty[\rightarrow X$ seja absolutamente contínua e tenha derivada quase-sempre e essa derivada seja quase sempre $\tilde{g}_x \in L_1^{\text{loc}}([t_0, \infty[, X)$ e ainda $x_{t_0} = \varphi$.

Observação 2: Podemos considerar $g : [t_0, \infty[\times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ definido quase sempre na 1a. variável (isso não afetará o sentido de (N)).

Observação 3: Vai ser importante considerarmos também a EDFN

$$(\hat{N}) \quad x(t) = f(t, x_t) + \int_{t_0}^t g(s, x_s) ds \quad \text{para } t \geq t_0$$

com dado inicial $x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}$. Nesse caso o valor de φ em 0 será irrelevante pois teremos $x(t_0) = f(t_0, \varphi)$ não necessariamente igual a $\varphi(0)$.

Quando $g \equiv 0$ a equação $(\hat{N})$ se transforma na chamada equação a diferença generalizada. Em geral os resultados obtidos para (N) serão ainda válidos para $(\hat{N})$ e faremos menção desse fato em momentos oportunos.

Para estudarmos a existência e unicidade de solução regrada para (N) , vamos dar uma condição de diferenciabilidade para f e para g , pois trabalharemos com as linearizações.

(1) f é de classe C^1 na 2a. variável, no sentido de Fréchet.

Vamos tomar f e g satisfazendo (1), ou seja,

existem $D_2 f, D_2 g : [t_0, \infty[\times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$, contínuas na 2a. variável.

Em [H1] definem-se os núcleos $\mu : [-r, 0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ de semi-variação limitada como sendo os núcleos μ com semi-variação $SV[\mu] < \infty$ onde

$$SV[\mu] = SV_{[-r, 0]}[\mu] = \sup_{d \in \mathcal{P}_{[-r, 0]}} SV^d[\mu]$$

onde para cada $d \in \mathcal{P}_{[-r, 0]}$ (conjunto das partições do intervalo $[-r, 0]$),

$d = \{-r = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n = 0\}$ ($\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n$) nós definimos

$$SV^d[\mu] = \sup_{\substack{p_i \in X \\ \|p_i\| \leq 1}} \left\| \sum_{i=1}^n [\mu(\theta_i) - \mu(\theta_{i-1})] p_i \right\|.$$

Temos então o espaço vetorial

$$SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)) = \{\mu : [-r, 0] \rightarrow \mathcal{L}(X) \mid \mu(0) = 0 \text{ e } SV[\mu] < \infty\}.$$

Esse espaço é um espaço Banach com a norma $SV[\cdot]$.

Em [H1] temos ainda demonstrado o seguinte teorema de representação:

Teorema 1. Os espaços de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$ e $SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ são isométricos, ou seja, temos uma isometria

$$\begin{array}{ccc} SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)) & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X) \\ \mu & \longrightarrow & \mathcal{I}(\mu) \end{array}$$

(de modo que $SV[\mu] = \|\mathcal{I}(\mu)\|$) onde para $\varphi \in \mathcal{G}_0^+$ temos $\mathcal{I}(\mu) \cdot \varphi = \int_{-r}^0 d\mu(\theta) \varphi(\theta)$.

Essa integral que representa o operador em $\mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$ é a integral interior, estudada amplamente em [H1].

O teorema ainda nos diz que para $L \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$ a sua respectiva $\mu = \mathcal{I}^{-1}(L)$ é dada por

$$\mu(\theta) \cdot p = -L(\chi_{[\theta, 0]} p) \quad \forall \theta \in [-r, 0[\text{ e } p \in X.$$

No nosso caso, para f e g satisfazendo (1) nós temos, para cada $(t, \varphi) \in [t_0, \infty[\times \mathcal{G}$, que existem e são únicos os núcleos $\mu_\varphi(t, \cdot)$ e $\eta_\varphi(t, \cdot) \in SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ tais que

$$\begin{aligned} D_2 f(t, \varphi) \cdot \Delta\varphi &= \int_{-r}^0 d_\theta \mu_\varphi(t, \theta) \Delta\varphi(\theta) \\ \text{e} & \qquad \qquad \qquad \forall \Delta\varphi \in \mathcal{G} \\ D_2 g(t, \varphi) \cdot \Delta\varphi &= \int_{-r}^0 d_\theta \eta_\varphi(t, \theta) \Delta\varphi(\theta) \end{aligned}$$

Aqui podemos tomar φ ou $\Delta\varphi$ em $\mathcal{G}$ pensando no sentido da Observação 1.

Vamos colocar agora condições de limitação para as derivadas de f e g :

- (2) Para cada $t_1 > t_0$ temos que $\|D_2 f\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ \varphi \in \mathcal{G}}} \|D_2 f(t, \varphi)\| < \infty$
(2)_{L1} Para cada $t_1 > t_0$ a função $m_g : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$m_g(t) = \sup_{\varphi \in \mathcal{G}} \|D_2 g(t, \varphi)\|$ é integrável (ou seja $m_g \in L_1([t_0, t_1])$).

Temos uma última condição para f :

(3) Para cada $t_1 > t_0$ a função $\mathcal{S} : [0, r] \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$\varepsilon \rightarrow \mathcal{S}(\varepsilon) = \sup_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ \varphi \in \mathcal{G}}} SV_{[-\varepsilon, 0]}[\mu_\varphi(t, \cdot)]$$

é contínua em $\varepsilon = 0$, ou seja, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{S}(\varepsilon) = 0$.

Repare que $\mathcal{S}$ cresce de $\mathcal{S}(0) = 0$ até $\mathcal{S}(r) = \|D_2 f\|$ (ver teorema 1).

Logo, por (2), $\mathcal{S}$ está bem definido.

Observação 4. Podemos definir os conjuntos, para $t_0, t_1 \in \mathbf{R}$, $t_1 > t_0$:

$$\mathcal{X}_{t_0} = \{f : [t_0, \infty[\times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid f \text{ satisfaz (0), (1), (2) e (3)}\}$$

$$Y_{t_0} = \{g : [t_0, \infty[\times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid g \text{ satisfaz (0)}_{L_1}, (1) \text{ e (2)}_{L_1}\}$$

$$\mathcal{X}_{[t_0, t_1]} = \{f : [t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid f \text{ satisfaz (0), (1), (2) e (3)}\}$$

$$Y_{[t_0, t_1]} = \{g : [t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid g \text{ satisfaz (0)}_{L_1}, (1) \text{ e (2)}_{L_1}\}$$

Observe que quando temos t_1 fixado, trocamos $[t_0 - r, \infty[$ por $[t_0 - r, t_1]$ e $[t_0, \infty[$ por $[t_0, t_1]$ em (0) e (0)_{L₁} e utilizamos esse t_1 em (2) e (2)_{L₁}.

Também definimos

$$\mathcal{X} = \{f : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid f|_{[t_0, \infty[\times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{t_0} \ \forall t_0 \in \mathbf{R}\}$$

$$Y = \{g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid g|_{[t_0, \infty[\times \mathcal{G}_0^+} \in Y_{t_0} \ \forall t_0 \in \mathbf{R}\}.$$

É fácil ver que $\mathcal{X} \subset Y$, $\mathcal{X}_{t_0} \subset Y_{t_0}$ e $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]} \subset Y_{[t_0, t_1]}$.

2. Existência e Unicidade de Solução

Teorema 1. Para cada $t_1 > t_0$ temos:

Dados $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$, $g \in Y_{[t_0, t_1]}$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ então existe um único $x = x(\varphi, f, g) \in G([t_0 - r, t_1], X)$ solução de (N) para $t_0 \leq t \leq t_1$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Para a demonstração desse teorema, vamos precisar de um lema que enunciaremos e demonstraremos a seguir.

Lema 1. Dados $t_1 > t_0$ e $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$ temos que para cada $\nu, \psi \in \mathcal{G}$, $t \in [t_0, t_1]$, $\theta \in [-r, 0]$ e $p \in X$ existe $U(\nu, \psi, t, \theta)p = \int_0^1 \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta)pd\xi \in X$, onde $\mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \cdot)$ é o núcleo que representa $D_2f(t, \xi\nu + (1-\xi)\psi)$.

Mais ainda, $U(\nu, \psi, t, \theta)$ é de semi-variação limitada em θ e para $\varepsilon \in [0, r]$

$$SV_{[-\varepsilon, 0]}[U(\nu, \psi, t, \cdot)] \leq \mathcal{S}(\varepsilon) \quad (\mathcal{S} \text{ dada na condição (3)}).$$

Além disso, para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ temos que:

$$\int_0^1 \int_{-r}^0 d_\theta \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta) \varphi(\theta) d\xi = \int_{-r}^0 d_\theta U(\nu, \psi, t, \theta) \varphi(\theta)$$

Prova: Como D_2f é contínua na 2a. variável, a função

$$[0, 1] \longrightarrow X$$

$$\xi \longrightarrow D_2f(t, \xi\nu + (1-\xi)\psi)\varphi$$

é contínua, logo integrável. Logo, está bem definido

$$\Phi_1(\varphi) = \int_0^1 D_2f(t, \xi\nu + (1-\xi)\psi)\varphi d\xi = \int_0^1 \int_{-r}^0 d_\theta \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta) \varphi(\theta) d\xi.$$

Φ_1 é claramente linear e como $\|\Phi_1(\varphi)\| \leq \|D_2f\| \cdot \|\varphi\|$ temos que $\Phi_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, X)$.

Tomando $\varphi = \chi_{[\theta, 0]}p$ temos que

$$\begin{aligned} \Phi_1(\chi_{[\theta, 0]}p) &= \int_0^1 \int_{-r}^0 d_\alpha \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \alpha) \chi_{[\theta, 0]}p(\alpha) d\xi = \\ &= \int_0^1 \int_\theta^0 d_\alpha \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \alpha) p d\xi = \int_0^1 [\mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, 0)p - \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta)p] d\xi \\ &= - \int_0^1 \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta) p d\xi = -U(\nu, \psi, t, \theta)p. \end{aligned}$$

Calculemos a semi-variação de $U(\nu, \psi, t, \cdot)$ no intervalo $[-\varepsilon, 0]$

$$\begin{aligned} SV_{[-\varepsilon, 0]}[U(\nu, \psi, t, \cdot)] &= \sup_{d \in \mathcal{P}_{[-\varepsilon, 0]}} \sup_{\substack{p_i \in X \\ \|p_i\| \leq 1}} \{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[\int_0^1 \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta_i) d\xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta_{i-1}) d\xi \right] p_i \right\| \} \\ &= \sup_{d \in \mathcal{P}_{[-\varepsilon, 0]}} \sup_{\substack{p_i \in X \\ \|p_i\| \leq 1}} \{ \left\| \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{|d|} (\mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta_i) - \mu_{\xi\nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta_{i-1})) p_i \right] d\xi \right\| \} \end{aligned}$$

Como $\left\| \sum_{i=1}^{|d|} (\mu_{\xi\nu+(1-\xi)\psi}(t, \theta_i) - \mu_{\xi\nu+(1-\xi)\psi}(t, \theta_{i-1})) p_i \right\| \leq SV_{[-\varepsilon, 0]}[\mu_{\xi\nu+(1-\xi)\psi}(t, \cdot)] \leq S(\varepsilon)$

temos que $SV_{[-\varepsilon, 0]}[U(\nu, \psi, t, \cdot)] \leq \sup_{d \in \mathcal{P}_{[-\varepsilon, 0]}} \sup_{\substack{p_i \in X \\ \|p_i\| \leq 1}} \int_0^1 S(\varepsilon) d\xi = S(\varepsilon)$.

Logo, existe e está bem definido $\Phi_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, X)$ dado por $\Phi_2(\varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta U(\nu, \psi, t, \theta) \varphi(\theta)$, pois toda integral interior com núcleo de semi-variação limitada define um operador linear-contínuo nas funções regradas. Falta só mostrar que $\Phi_1 = \Phi_2$. Para isso, basta mostrar que Φ_1 e Φ_2 coincidem nas funções do tipo $\chi_{[-r, c]} p$ para $p \in X$, $c \in]-r, 0]$ e $]-r, c[$ sendo algum dos intervalos $[-r, c]$, $[-r, c[$, $] - r, c]$ ou $] - r, c[$, pois o conjunto dessas funções características é total em $\mathcal{G}$ e $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, X)$.

Uma verificação simples e direta nos mostra que

$$\Phi_1(\chi_{[-r, c]} p) = \Phi_2(\chi_{[-r, c]} p) = \int_0^1 [\mu_{\xi\nu+(1-\xi)\psi}(t, c) - \mu_{\xi\nu+(1-\xi)\psi}(t, -r)] p d\xi$$

Está provado o lema.

Prova do teorema 1. Consideremos $E = G([t_0 - r, t_1], X)$ com a norma $\|\cdot\|_\lambda$ (para $\lambda \geq 0$) dada por $\|x\|_\lambda = \sup_{t \in [t_0 - r, t_1]} e^{-\lambda t} \|x(t)\|$. E é um espaço de Banach, pois essa norma é equivalente à norma do supremo.

Seja $\delta > 0$, com $t_1 - t_0 = k\delta$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $\int_a^{a+\delta} m_g(t) dt < \frac{1}{2} \quad \forall a \in [t_0, t_1 - \delta]$ (m_g dado em (2) $_{L_1}$ para $g \in Y_{[t_0, t_1]}$).

Vamos definir primeiramente $T_1 : E \rightarrow E$ por

$$\begin{aligned} (T_1 x)(t) &= \varphi(t - t_0) && \text{para } t_0 - r \leq t < t_0 \\ (T_1 x)(t) &= f(t, x_t) - f(t_0, \varphi) + \varphi(0) + \int_{t_0}^t g(s, x_s) ds && \text{para } t_0 \leq t < t_0 + \delta \\ \text{e } (T_1 x)(t) &= 0 && \text{para } t_0 + \delta \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

Por (0) e (0) $_{L_1}$ vemos que $T_1(E) \subset E$.

Para $t_0 \leq t < t_0 + \delta$ temos:

$$T_1 x(t) - T_1 y(t) = f(t, x_t) - f(t, y_t) + \int_{t_0}^t (g(s, x_s) - g(s, y_s)) ds.$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } f(t, x_t) - f(t, y_t) &= \int_0^1 D_2 f(t, \xi x_t + (1 - \xi)y_t)[x_t - y_t] d\xi \\ &= \int_0^1 \int_{-r}^0 d_\theta \mu_{\xi x_t + (1 - \xi)y_t}(t, \theta) \cdot [x(t + \theta) - y(t + \theta)] d\xi \\ &= \int_{-r}^0 d_\theta U(x_t, y_t, t, \theta)[x(t + \theta) - y(t + \theta)] \quad (\text{pelo Lema 1.}) \end{aligned}$$

Assim, para $\lambda > 0$, $\varepsilon \in [0, r]$ e $t_0 \leq t < t_0 + \delta$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t}[T_1 x(t) - T_1 y(t)] &= \int_{-r}^{-\varepsilon} d_\theta U(x_t, y_t, t, \theta) e^{\lambda \theta} e^{-\lambda(t+\theta)} [x(t + \theta) - y(t + \theta)] + \\ &\quad + \int_{-\varepsilon}^0 d_\theta U(x_t, y_t, t, \theta) e^{\lambda \theta} e^{-\lambda(t+\theta)} [x(t + \theta) - y(t + \theta)] \\ &\quad + e^{-\lambda t} \int_{t_0}^t \int_0^1 D_2 g(s, \xi x_s + (1 - \xi)y_s) \cdot (x_s - y_s) d\xi ds. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|T_1 x(t) - T_1 y(t)\| &\leq SV_{[-r, 0]}[U(x_t, y_t, t, \cdot)] e^{-\lambda \varepsilon} \|x - y\|_\lambda + \\ &\quad + SV_{[-\varepsilon, 0]}[U(x_t, y_t, t, \cdot)] \cdot \|x - y\|_\lambda + e^{-\lambda t} \int_{t_0}^t m_g(s) \cdot \|x_s - y_s\| ds \\ &\leq \|D_2 f\| e^{-\lambda \varepsilon} \|x - y\|_\lambda + \mathcal{S}(\varepsilon) \cdot \|x - y\|_\lambda + e^{-\lambda t} \int_{t_0}^t m_g(s) \|x_s - y_s\| ds. \end{aligned}$$

Mas

$$e^{-\lambda t} \|x_s - y_s\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} e^{-\lambda t} |x(s + \theta) - y(s + \theta)| \leq \sup_{-r \leq \theta \leq 0} e^{-\lambda(s + \theta)} |x(s + \theta) - y(s + \theta)| \leq \|x - y\|_\lambda.$$

Assim:

$$e^{-\lambda t} \|T_1 x(t) - T_1 y(t)\| \leq (\|D_2 f\| e^{-\lambda \varepsilon} + \mathcal{S}(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t_0 + \delta} m_g(s) ds) \cdot \|x - y\|_\lambda.$$

Tomando então $\varepsilon > 0$ apropriado para que $S(\varepsilon) < \frac{1}{8}$ e $\lambda > 0$ tal que $\|D_2 f\| \cdot e^{-\lambda \varepsilon} < \frac{1}{4}$ vemos que

$$\|T_1 x - T_1 y\|_\lambda \leq \frac{7}{8} \|x - y\|_\lambda \quad \forall x, y \in E.$$

Logo, T_1 é uma contração. Seja $x_1 \in E$ seu ponto fixo.

Definindo $x_0 \in E$ por $x_0(t) = \varphi(t - t_0)$ para $t_0 - r \leq t < t_0$ e $x_0(t) = 0$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ podemos formar a seqüência de contrações $(T_j)_{1 \leq j \leq k}$ onde para cada $j = 1, 2, 3, \dots, k$ temos $T_j : E \rightarrow E$ é definida por recorrência por:

$$\begin{aligned} (T_j x)(t) &= x_{j-1}(t) \quad \text{para } t_0 - r \leq t < t_0 + (j-1)\delta \\ (T_j x)(t) &= f(t, x_t) - f(t_0, \varphi) + \varphi(0) + \int_{t_0}^{t_0+(j-1)\delta} g(s, (x_{j-1})_s) ds + \int_{t_0+(j-1)\delta}^t g(s, x_s) ds \end{aligned}$$

para $t_0 + (j-1)\delta \leq t < t_0 + j\delta$ e finalmente $(T_j x)(t) = 0$ para $t_0 + j\delta \leq t \leq t_1$.

Já mostramos que $T_1 : E \rightarrow E$ é uma contração quando colocamos em E a norma $\|\cdot\|_\lambda$ com $\lambda > 0$ apropriado e chamamos de $x_1 \in E$ seu único ponto fixo.

Por indução em $j = 2, \dots, k$, suponhamos que $T_{j-1} : E \rightarrow E$ é uma contração (E com a mesma norma $\|\cdot\|_\lambda$ dada para T_1) e que tem ponto fixo $x_{j-1} \in E$; provaremos então que $T_j : E \rightarrow E$ também é contração e temos o seu ponto fixo $x_j \in E$.

Esta demonstração segue os passos da demonstração de que T_1 é contração já que para $t_0 + (j-1)\delta \leq t < t_0 + j\delta$ temos que

$$T_j x(t) - T_j y(t) = f(t, x_t) - f(t, y_t) + \int_{t_0+(j-1)\delta}^t (g(s, x_s) - g(s, y_s)) ds,$$

e com os mesmos $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ acima concluímos que

$$\|T_j x - T_j y\|_\lambda \leq \frac{7}{8} \|x - y\|_\lambda.$$

Verificamos então que

$$x_j|_{[t_0-r, t_0+(j-1)\delta]} = x_{j-1}|_{[t_0-r, t_0+(j-1)\delta]} \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Cada $x_j|_{[t_0-r, t_0+j\delta]}$ é solução de (N) em $[t_0, t_0+j\delta]$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Assim, se definimos a última contração $T_{k+1} : E \rightarrow E$ por

$$T_{k+1}x(t) = x_k(t) \quad t_0 - r \leq t < t_1$$

$$\text{e } T_{k+1}x(t_1) = f(t_1, x_{t_1}) - f(t_0, \varphi) + \varphi(0) + \int_{t_0}^{t_1} g(s, (x_k)_s) ds$$

obtemos o ponto fixo de T_{k+1} , $x_{k+1} \in E = G([t_0 - r, t_1], X)$ que será então solução de (N) em $[t_0, t_1]$ com $x_{t_0} = \varphi$.

A unicidade segue do fato de que toda solução $\bar{x}$ é tal que quando restrita a $[t_0 - r, t_0 + \delta]$ é necessariamente ponto fixo de T_1 e portanto igual a x_1 e assim por diante. ■

São imediatos os corolários:

Corolário 1. Para $t_0 \in \mathbf{R}$, dados $f \in \mathcal{X}_{t_0}$, $g \in Y_{t_0}$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ então existe um único $x = x(\varphi, f, g) \in G([t_0 - r, \infty[, X)$ solução de (N) para $t \geq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Corolário 2. Se $f \in \mathcal{X}$, $g \in Y$, dados $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ temos que existe um único $x = x(t_0, \varphi, f, g) \in G(\mathbf{R}, X)$ solução de (N) para $t \geq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$ e $x|_{]-\infty, t_0-r[} \equiv 0$.

Observação 1. Valem as mesmas conclusões do teorema 1, do corolário 1 e do corolário 2, com as mesmas hipóteses, se trocarmos a equação (N) pela equação $(\hat{N})$, dada na observação 1.3. A demonstração é completamente análoga.

Observação 2. O teorema 1 continua válido se ao invés de $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$, considerarmos (0), (1), $\|f\| = \sup_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ \varphi \in \mathcal{G}}} \|f(t, \varphi)\| < \infty$ e abrandarmos as condições (2) e (3) para respectivamente $\|D_2 f\|_M = \sup_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ \|\varphi\| \leq M}} \|D_2 f(t, \varphi)\| < \infty$ para cada $M > 0$ e $S_M(\varepsilon) = \sup_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ \|\varphi\| \leq M}} SV_{[-\varepsilon, 0]}[\mu_\varphi(t, \cdot)]$ é contínua em $\varepsilon = 0$ para cada $M > 0$.

O Lema 1 nesse caso fica válido pois basta ver que $\|\Phi_1(\varphi)\| \leq \|D_2 f\|_M \cdot \|\varphi\|$ onde $M = \max\{\|\nu\|, \|\psi\|\}$ (repare que para $0 \leq \xi \leq 1$ temos $\|\xi\nu + (1-\xi)\psi\| \leq M$) e também

$$SV_{[-\varepsilon, 0]}[U(\nu, \psi, t, \cdot)] \leq \mathcal{S}_M(\varepsilon).$$

Para o teorema 1, nesse caso, definimos $E_j = \{x \in E \mid \|x\| \leq M_j\}$ $j = 1, 2, \dots, k+1$ com $M_1 = 4\|f\| + 2\|\varphi\| + 2\|g\|$ (aqui $\|g\| = \int_{t_0}^{t_1} (|g(s, 0)| + m_g(s))ds$) e vemos que $T_1(E_1) \subset E_1$ pois para $x \in E_1$ temos:

$$\|T_1 x\| \leq 2\|f\| + \|\varphi\| + \|g\| + \frac{1}{2}\|x\| \leq 2\|f\| + \|\varphi\| + \|g\| + \frac{1}{2}M_1 \leq M_1$$

e como $\|T_1 x - T_1 y\|_\lambda \leq (\|D_2 f\|_{M_1} \cdot e^{-\lambda\varepsilon} + \mathcal{S}_{M_1}(\varepsilon) + \frac{1}{2}) \cdot \|x - y\|_\lambda$ encontramos $\varepsilon_1 > 0$ e $\lambda_1 > 0$ tal que, na norma $\|\cdot\|_{\lambda_1}$, T_1 é contração e temos $x_1 \in E_1$. Do mesmo modo tomamos

$$M_2 = M_1 + 2\|g\|M_1 \quad \text{e temos} \quad E_1 \subset E_2.$$

Vemos que $T_2(E_2) \subset E_2$ pois para $x \in E_2$ temos:

$$\begin{aligned} \|T_2 x\| &\leq 2\|f\| + \|\varphi\| + \|g\| + \int_{t_0}^{t_1} m_g(s)ds \|x_1\| + \frac{1}{2}\|x\| \\ &\leq \frac{1}{2}M_1 + \|g\| \cdot M_1 + \frac{1}{2}M_2 \leq M_2 \end{aligned}$$

$$\text{e } \|T_2 x - T_2 y\|_\lambda \leq (\|D_2 f\|_{M_2} e^{-\lambda\varepsilon} + \mathcal{S}_{M_2}(\varepsilon) + \frac{1}{2}) \|x - y\|_\lambda.$$

Assim encontramos $\varepsilon_2 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ tal que na norma $\|\cdot\|_{\lambda_2}$, T_2 é contração; teremos então $x_2 \in E_2$.

Por recorrência definimos para $j = 2, 3, \dots, k+1$. $M_j = M_{j-1} + 2\|g\|(M_{j-1} - M_{j-2}) = M_1 + 2\|g\|M_{j-1}$ (colocando $M_0 = 0$) e teremos $M_1 < M_2 < \dots < M_{k+1}$ e portanto $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_{k+1} \subset E$ e as contrações $T_j : E_j \rightarrow E_j$ com ponto fixo $x_j \in E_j$.

Assim $x_{k+1} = x(\varphi, f, g) \in E$ será a solução de (N) em $[t_0, t_1]$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Observação 3. Seja $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^+ = \{f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]} \mid f \text{ satisfaz } (0)_+\}$ com

$(0)_+$ Para cada $x \in G^+([t_0 - r, t_1], X)$ fixo; a função $\tilde{f}_x$ está em $G^+([t_0, t_1], X)$.

($\tilde{f}_x : [t_0, t_1] \rightarrow X$ dada em (0) , ou seja, $\tilde{f}_x(t) = f(t, x_t)$).

Se $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^+$, $g \in Y_{[t_0, t_1]}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ então a solução de (N) em $[t_0, t_1]$ com $x_{t_0} = \varphi$ é contínua à direita.

Isso pois $E^+ = G^+([t_0 - r, t_1], X)$ é um subespaço fechado de E e por $(0)_+$ vemos que $T_j(E^+) \subset E^+$ (as contrações do teorema 1), assim cada ponto fixo x_j está em E^+ .

Observação 4. Seja $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^c = \{f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]} \mid f \text{ satisfaz } (0)_c\}$ com

$(0)_c$ Para cada $x \in C([t_0 - r, t_1], X)$ fixo, temos que $\tilde{f}_x$ está em $C([t_0, t_1], X)$.

Temos que: se $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^c$, $g \in Y_{[t_0, t_1]}$ e $\varphi \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = C([-r, 0], X)$) então a única solução regradada de (N) em $[t_0, t_1]$ com $x_{t_0} = \varphi$ é contínua.

De fato, consideremos no teorema 1 os subconjuntos fechados de E , para $j = 1, 2, \dots, k$:

$$E_j^c = \{x \in E \mid x(t) = x_{j-1}(t) \text{ para } t_0 - r \leq t < t_0 + (j-1)\delta\}$$

$$\text{e } x|_{[t_0 - r, t_0 + j\delta]} \in C([t_0 - r, t_0 + j\delta], X);$$

por $(0)_c$ vemos que $T_j(E_j^c) \subset E_j^c$ e assim cada ponto fixo x_j está em E_j^c e $x_k|_{[t_0 - r, t_1]} \in C([t_0 - r, t_1], X)$.

Tomando $E_{k+1}^c = \{x \in E \mid x(t) = x_k(t) \text{ para } t_0 - r \leq t < t_1\}$

vemos que $x_{k+1} = x(\varphi, f, g) \in C([t_0 - r, t_1], X)$.

Observação 5. Definimos

$$\mathcal{X}_{t_0}^+ = \{f \in \mathcal{X}_{t_0} \mid \forall t_1 > t_0 \ f|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^+\}$$

para $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{X}_{t_0}^c = \{f \in \mathcal{X}_{t_0} \mid \forall t_1 > t_0 \ f|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^c\}$$

e

$$\mathcal{X}^+ = \{f \in \mathcal{X} \mid \forall t_0, t_1, t_1 > t_0 \text{ temos } f|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^+\}$$

$$\mathcal{X}^c = \{f \in \mathcal{X} \mid \forall t_0, t_1, t_1 > t_0 \text{ temos } f|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^c\}$$

Então para $t_0 \in \mathbb{R}$ temos que:

- a) para $f \in \mathcal{X}_{t_0}^+$, (resp. $f \in \mathcal{X}^+$), $g \in Y_{t_0}$ (resp. $g \in Y$) e $\varphi \in \mathcal{G}^+$, a solução regradada de (N) em $[t_0, \infty[$ com $x_{t_0} = \varphi$ é contínua à direita;
- b) para $f \in \mathcal{X}_{t_0}^c$, (resp. $\mathcal{X}^c$), $g \in Y_{t_0}$ (resp. Y) e $\varphi \in \mathcal{C}$, a solução regradada de (N) em $[t_0, \infty[$ com $x_{t_0} = \varphi$ é contínua.

3. Dependência contínua da solução de (N) com relação aos dados

Fixados $t_0, t_1 \in \mathbf{R}$, $t_1 > t_0$, vamos ver neste parágrafo que a solução $x(\varphi, f, g)$ de (N) em $t_0 \leq t \leq t_1$, com $x_{t_0} = \varphi$, depende continuamente de $\varphi \in \mathcal{G}$, $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}$. As normas desses espaços são definidas no teorema abaixo, cuja demonstração é canônica.

Teorema 1. $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$ é um espaço de Banach com a norma $\|f\|_1$ definida por

$\|f\|_1 = \max\{\|f\|_0, \|D_2 f\|\}$ onde $\|f\|_0 = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|f(t, 0)\|$ e $\|D_2 f\|$ é dado na condição (2)

e $Y_{[t_0, t_1]}$ é um espaço vetorial normado com a norma $\|g\|$ definida por

$\|g\| = \int_{t_0}^{t_1} (|g(s, 0)| + m_g(s)) ds$ onde m_g é dado na condição (2)_{L₁}.

Teorema 2. Para cada $t_1 > t_0$, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \mathcal{X}_{[t_0, t_1]} \times Y_{[t_0, t_1]} &\longrightarrow G([t_0 - r, t_1], X) \\ (\varphi, f, g) &\longrightarrow x(\varphi, f, g) \end{aligned}$$

é contínua.

Prova. Vamos mostrar que essa aplicação é contínua em $(\varphi, f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{X}_{[t_0, t_1]} \times Y_{[t_0, t_1]}$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, vamos encontrar $\delta > 0$ tal que se $\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta$, $\|f - \bar{f}\|_1 < \delta$, $\|g - \bar{g}\| < \delta$ (para $(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}) \in \mathcal{G} \times \mathcal{X}_{[t_0, t_1]} \times Y_{[t_0, t_1]}$) então teremos $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$ onde aqui $x = x(\varphi, f, g)$ e $\bar{x} = x(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g})$.

Seja $M > 0$ | $\|\varphi\| < M$, $\|f\|_1 < M$, $\|g\| < M$, $\|x\| < M$ e $\|\bar{\varphi}\| < M$, $\|\bar{f}\|_1 < M$ e

$$\|\bar{g}\| < M \text{ sempre que } \|\varphi - \bar{\varphi}\| < \frac{1}{8}, \quad \|f - \bar{f}\|_1 < \frac{1}{8}, \quad \|g - \bar{g}\| < \frac{1}{8}$$

Para $t_0 \leq t \leq t_1$ temos:

$$x(t) - \bar{x}(t) = f(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t) + \varphi(0) - \bar{\varphi}(0) - f(t_0, \varphi) + \bar{f}(t_0, \bar{\varphi}) + \int_{t_0}^t g(s, x_s) ds - \int_{t_0}^t \bar{g}(s, \bar{x}_s) ds$$

Assim:

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &\leq |f(t, x_t) - \bar{f}(t, x_t)| + |\bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t)| + |\varphi(0) - \bar{\varphi}(0)| + |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \\ &+ |f(t_0, \bar{\varphi}) - \bar{f}(t_0, \bar{\varphi})| + \int_{t_0}^t |g(s, x_s) - \bar{g}(s, x_s)| ds + \int_{t_0}^t |\bar{g}(s, x_s) - \bar{g}(s, \bar{x}_s)| ds \\ &\leq \|f - \bar{f}\|_1 (\|x\| + 1) + |\bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t)| + \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \\ &+ |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \|f - \bar{f}\|_1 (\|\bar{\varphi}\| + 1) + \|g - \bar{g}\| (\|x\| + 1) + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s) \|x_s - \bar{x}_s\| ds \\ &\leq \delta(M + 1) + |\bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t)| + \delta + |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \\ &+ \delta(M + 1) + \delta(M + 1) + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s) (\|\varphi - \bar{\varphi}\| + \|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]}) ds \\ &\leq 4\delta(M + 1) + |\bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t)| + |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s) \|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]} ds \end{aligned}$$

(supondo aqui $\delta > 0$ | $\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta$, $\|f - \bar{f}\|_1 < \delta$ e $\|g - \bar{g}\| < \delta$ e $\delta < \frac{1}{8}$).

Agora:

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t) &= \int_{-r}^0 d_\theta \bar{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) (x(t + \theta) - \bar{x}(t + \theta)) = \\ &= \int_{-r}^{-k} d_\theta \bar{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) (\varphi(k + \theta) - \bar{\varphi}(k + \theta)) + \int_{-k}^0 d_\theta \bar{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) (x(t + \theta) - \bar{x}(t + \theta)) \end{aligned}$$

com $\bar{U}$ dado no lema 2.1 para $\bar{f}$ e $k = t - t_0$ se $t_0 \leq t \leq t_0 + r$, ou $k = r$ se $t \geq t_0 + r$ (quando $k = 0$ ou $k = r$ uma das duas integrais é zero).

Assim:

$$|\bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t)| \leq \|D_2 \bar{f}\| \cdot \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \left| \int_{-k}^0 d_\theta \bar{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) (x(t + \theta) - \bar{x}(t + \theta)) \right|$$

quando $k > 0$, se tomamos $\lambda > 0$ e $0 < \eta < k$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{-k}^0 d_\theta \bar{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta)(x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)) &= \\ &= e^{\lambda t} \int_{-k}^{-\eta} d_\theta \bar{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) e^{\lambda \theta} e^{-\lambda(t+\theta)} (x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)) \\ &\quad + e^{\lambda t} \int_{-\eta}^0 d_\theta \bar{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) e^{\lambda \theta} e^{-\lambda(t+\theta)} (x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)) \end{aligned}$$

Definindo $\|y\|_\lambda^{[t_0, t]} = \sup_{t_0 \leq \xi \leq t} e^{-\lambda \xi} \|y(\xi)\|$ ($y \in G([t_0 - r, t_1], X)$) temos:

$$\left| \int_{-k}^0 d_\theta \bar{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta)(x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)) \right| \leq e^{\lambda t} [\|D_2 \bar{f}\| e^{-\lambda \eta} + \bar{\mathcal{S}}(\eta)] \|x - \bar{x}\|_\lambda^{[t_0, t]}$$

com $\bar{\mathcal{S}}$ dado na condição (3) para $\bar{f}$.

Assim:

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &\leq 4\delta(M+1) + M\delta + e^{\lambda t} [M e^{-\lambda \eta} + \bar{\mathcal{S}}(\eta)] \|x - \bar{x}\|_\lambda^{[t_0, t]} + \\ &\quad + |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s) \|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]} ds \end{aligned}$$

Tomando $\eta > 0$ tal que $\mathcal{S}(\eta) < \frac{1}{8}$ teremos

$$\bar{\mathcal{S}}(\eta) \leq \mathcal{S}(\eta) + \sup_{\substack{\xi \in [t_0, t_1] \\ \psi \in \mathcal{G}}} SV_{[-r, 0]}[\mu_\psi(\xi, \cdot) - \bar{\mu}_\psi(\xi, \cdot)] = \mathcal{S}(\eta) + \|D_2 f - D_2 \bar{f}\| < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

e escolhendo $\lambda > 0$ para que $M e^{-\lambda \eta} < \frac{1}{4}$ teremos:

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &\leq 5\delta(M+1) + \frac{1}{2} e^{\lambda t} \|x - \bar{x}\|_\lambda^{[t_0, t]} + \\ &\quad + |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s) \|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]} ds, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} |x(t) - \bar{x}(t)| &\leq 5\delta(M+1) e^{-\lambda t_0} + \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|_\lambda^{[t_0, t]} + \\ &\quad + e^{-\lambda t_0} (|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s) \|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]} ds) \end{aligned}$$

ou seja, para $t_0 \leq \xi \leq t$ temos:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda \xi} |x(\xi) - \bar{x}(\xi)| &\leq 5\delta(M+1) e^{-\lambda t_0} + \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|_\lambda^{[t_0, t]} + \\ &\quad + e^{-\lambda t_0} (|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s) \|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]} ds), \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t_0, t]} &\leq 5\delta(M+1)e^{-\lambda t_0} + \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t_0, t]} + \\ &\quad + e^{-\lambda t_0}(|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s)\|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]} ds), \end{aligned}$$

logo,

$$\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t_0, t]} \leq 10\delta(M+1)e^{-\lambda t_0} + 2e^{-\lambda t_0}(|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s)\|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]} ds)$$

e

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|^{[t_0, t]} &\leq e^{\lambda t_1} \|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t_0, t]} \leq 10\delta(M+1)e^{\lambda(t_1-t_0)} + 2e^{\lambda(t_1-t_0)}|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| \\ &\quad + 2e^{\lambda(t_1-t_0)} \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s)\|x - \bar{x}\|^{[t_0, s]} ds \end{aligned}$$

Como $m_{\bar{g}}(s) \geq 0$, $m_{\bar{g}} \in L_1([t_0, t_1])$ e $\|x - \bar{x}\|^{[t_0, \cdot]} \in L_{\infty}([t_0, t_1])$ podemos aplicar Gronwall na desigualdade acima (segundo [H-2], corolário 15) e obter:

$$\|x - \bar{x}\|^{[t_0, t]} \leq [10\delta(M+1)e^{\lambda(t_1-t_0)} + 2e^{\lambda(t_1-t_0)}|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})|] \exp(2e^{\lambda(t_1-t_0)} \int_{t_0}^t m_{\bar{g}}(s) ds),$$

assim,

$$\|x - \bar{x}\|^{[t_0, t_1]} \leq [10\delta(M+1)e^{\lambda(t_1-t_0)} + 2e^{\lambda(t_1-t_0)}|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})|] \exp(2e^{\lambda(t_1-t_0)} . M) .$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, se tomamos $\delta > 0$, $\delta < \frac{1}{8}$, $\delta < \varepsilon$ e ainda tal que

$$\delta . 10(M+1)e^{\lambda(t_1-t_0)} . e^{2Me^{\lambda(t_1-t_0)}} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e ainda tal que se}$$

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta \text{ então } |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| < \frac{\varepsilon}{2e^{\lambda(t_1-t_0)} e^{2Me^{\lambda(t_1-t_0)}}}$$

vemos que quando $\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta$, $\|f - \bar{f}\|_1 < \delta$ e $\|g - \bar{g}\| < \delta$ temos $\|x - \bar{x}\|^{[t_0, t_1]} < \varepsilon$ e como $\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta < \varepsilon$ concluimos que $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$. ■

Definição 1. O operador de evolução $\tau(t, t_0)$.

Supondo $f \in \mathcal{X}$, $g \in Y$, definimos para cada $t_0, t \in \mathbf{R}$, $t \geq t_0$, operador

$$\tau(t, t_0) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \quad \text{por}$$

$$\tau(t, t_0) \cdot \varphi = x_t(t_0, \varphi, f, g) \in \mathcal{G}$$

onde $x(t_0, \varphi, f, g)$ é dada no corolário 2.2.

Pela unicidade da solução de (N) para cada dado inicial em $\mathcal{G}$, podemos concluir que a família $\{\tau(t, t_0) \mid t_0, t \in \mathbf{R}, t \geq t_0\}$ é de evolução, ou seja, que vale:

$$\tau(t, s) \circ \tau(s, t_0) = \tau(t, t_0) \quad \forall t_0, s, t \in \mathbf{R} \text{ com } t \geq s \geq t_0$$

$$\text{e } \tau(s, s) = I_{\mathcal{G}} \quad (\text{identidade de } \mathcal{G}) \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

É imediata, a partir do teorema 2, a seguinte:

Proposição 1. O operador $\tau(t, t_0)$ é contínuo, $\forall t_0, t \in \mathbf{R}$, $t \geq t_0$.

Observação 1. Se $\varphi \sim \bar{\varphi}$ (equivalência dada no início do §1) e $\varphi(0) = \bar{\varphi}(0)$ então $\tau(t, t_0)\varphi \sim \tau(t, t_0)\bar{\varphi}$ e para $t \geq t_0 + r$ temos $\tau(t, t_0)\varphi = \tau(t, t_0)\bar{\varphi}$.

Observação 2. Podemos definir o operador de evolução para a equação $(\hat{N})$ (dada na observação 1.3), que está bem definido (ver observação 2.1), é de evolução e também satisfaz a proposição 1 (pois o teorema 2 continua válido para a equação $(\hat{N})$).

Notemos que neste caso a observação 1 também se verifica, mesmo que $\varphi(0) \neq \overline{\varphi(0)}$.

Observação 3.

$$\text{Se } f \in \mathcal{X}^+ \text{ então } \tau(t, t_0)(\mathcal{G}^+) \subset \mathcal{G}^+$$

$$\text{e se } f \in \mathcal{X}^c \text{ então } \tau(t, t_0)(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}.$$

(Ver observação 2.5.)

Observação 4. Se $f \in \mathcal{X}$ é linear na 2a. variável (ou seja, para cada $t \in \mathbf{R}$ $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, X)$) e se $g \in Y$ é linear na 2a. variável então

$$\tau(t, t_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}) \quad \forall t_0, t \in \mathbf{R}, t \geq t_0.$$

(A linearidade sai direto da unicidade de solução de (N) e a continuidade é a proposição 1.)

Também podemos dizer que:

Se $f \in \mathcal{X}^+$ e é linear na 2a. variável e $g \in Y$ é linear na 2a. variável, então

$$\tau(t, t_0)|_{\mathcal{G}^+} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+) \quad \forall t_0, t \in \mathbf{R}, t \geq t_0$$

e se $f \in \mathcal{X}^c$ e é linear na 2a. variável e $g \in Y$ é linear na 2a. variável, então

$$\tau(t, t_0)|_C \in \mathcal{L}(C) \quad \forall t_0, t \in \mathbf{R}, t \geq t_0.$$

Estudaremos a equação (N) linear com maiores detalhes no §7.

4. Diferenciabilidade da solução de (N) em relação aos parâmetros

Fixemos neste parágrafo $t_0, t_1 \in \mathbf{R}$, $t_1 > t_0$. Vamos mostrar aqui que, impondo condições C^k de diferenciabilidade na 2a. variável para $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}$, com algumas limitações para as derivadas de f e g , nós teremos a diferenciabilidade C^k da solução $x(\varphi, f, g) \in G([t_0 - r, t_1], X)$ de (N) em relação ao dado inicial $\varphi \in \mathcal{G}$ e também em relação aos parâmetros f e g dentro de certos subespaços fechados de $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$ e $Y_{[t_0, t_1]}$ respectivamente.

Seja $k \in \mathbf{N}$ e $f, g : [t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ de classe C^k na 2a. variável. Definimos por recorrência os conjuntos $M^k(\mathcal{G}^k, X)$ como

$$M^0(\mathcal{G}^0, X) = X \text{ e para } k > 0 \quad M^k(\mathcal{G}^k, X) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, M^{k-1}(\mathcal{G}^{k-1}, X)).$$

Para $k > 0$ podemos então identificar $M^k(\mathcal{G}^k, X)$ como o conjunto das aplicações k -lineares contínuas de $(\mathcal{G}_0^+)^k$ em X e vemos que para $i = 0, 1, 2, \dots, k$ temos

$D_2^{(i)} f : [t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow M^i(\mathcal{G}^i, X)$ a i -ésima derivada de f na 2a. variável no sentido de Fréchet

(repare que $D_2^{(0)} f = f$ e $D_2^{(1)} f = D_2 f$).

Definamos agora as seguintes propriedades para f ou g :

(0)^k Para cada $i = 0, 1, \dots, k$, fixados $x, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i \in G([t_0 - r, t_1], X)$ a função $t \in [t_0, t_1] \rightarrow D_2^{(i)} f(t, x_t)(\Delta x_1, \dots, \Delta x_i) \in X$ é **regrada**.

(0)_{L₁}^k Para cada $i = 0, 1, \dots, k$, fixados $x, \Delta x_1, \dots, \Delta x_i \in G([t_0 - r, t_1], X)$ a função $t \in [t_0, t_1] \rightarrow D_2^{(i)} g(t, x_t)(\Delta x_1, \dots, \Delta x_i) \in X$ é **integrável**.

(1)^k f é de classe C^k na 2a. variável.

(2)^k $\|D_2 f\| = \sup_{\substack{t \in [t_0, t_1] \\ \varphi \in \mathcal{G}}} \|D_2 f(t, \varphi)\| < \infty$

e para cada $i = 1, 2, 3, \dots, k$ e para cada $M > 0$ temos que $\exists L_M^{(i)} = L_M^{(i)}(f)$ tal que

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \|D_2^{(i)} f(t, \varphi) - D_2^{(i)} f(t, \psi)\| \leq L_M^{(i)} \|\varphi - \psi\| \text{ sempre que } \|\varphi\| \leq M, \|\psi\| \leq M$$

(2)_{L₁}^k $m_g(s) = \sup_{\varphi \in \mathcal{G}} \|D_2 g(s, \varphi)\|$ é integrável

e para cada $i = 1, 2, 3, \dots, k$ e para cada $M > 0$ temos $\exists m_{g_M}^{(i)} \in L_1([t_0, t_1])$ tal que

$$\|D_2^{(i)} g(s, \varphi) - D_2^{(i)} g(s, \psi)\| \leq m_{g_M}^{(i)}(s) \|\varphi - \psi\| \text{ sempre que } \|\varphi\| \leq M, \|\psi\| \leq M$$

e também temos $\|D_2^{(i)} g(s, 0)\|$ é integrável em $s \in [t_0, t_1]$.

Lema 1. Para toda $f : [t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ vale a implicação: (0), (1)^k e (2)^k $\Rightarrow$ (0)^k.

Prova. Por indução sobre $k \in \mathbb{N}$.

1) $k = 1$. Para $x, \Delta x \in G([t_0 - r, t_1], X)$ fixos temos:

$$\text{para } t \in [t_0, t_1], D_2 f(t, x_t) \Delta x_t = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(t, x_t + \xi \Delta x_t) - f(t, x_t)}{\xi}$$

Basta então mostrar que esse limite é uniforme em $t \in [t_0, t_1]$ pois por (0) temos que as funções $\frac{f(t, x_t + \frac{1}{n} \Delta x_t) - f(t, x_t)}{1/n}$ são regradas em t e limite uniforme de funções regradas é uma função regradada.

Mas temos:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{f(t, x_t + \xi \Delta x_t) - f(t, x_t)}{\xi} - D_2 f(t, x_t) \Delta x_t \right| \\ &= \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\int_0^1 [D_2 f(t, x_t + \nu \xi \Delta x_t) - D_2 f(t, x_t)] \xi \Delta x_t d\nu}{\xi} \right| \\ (\text{por (2)}^1) \quad & \leq L_M^{(1)} \cdot \|\Delta x\|^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

(onde para (2)¹ tomamos $M = \|x\| + \|\Delta x\|$).

2) Supondo que (0), (1)^k e (2)^k $\Rightarrow$ (0)^k teremos que (0), (1)^{k+1} e (2)^{k+1} $\Rightarrow$ (0)^k e assim, para $x, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{k+1} \in G([t_0 - r, t_1], X)$ fixos temos:

$$\begin{aligned} \text{para } t \in [t_0, t_1] \quad & D_2^{(k+1)} f(t, x_t)(\Delta x_{1t}, \dots, \Delta x_{k+1t}) = \\ & = \lim_{\xi > 0} \frac{D_2^{(k)} f(t, x_t + \xi \Delta x_{k+1t})(\Delta x_{1t} \dots \Delta x_{kt}) - D_2^{(k)} f(t, x_t)(\Delta x_{1t} \dots)}{\xi} \end{aligned}$$

e por raciocínio análogo ao do 1º caso, temos que esse limite é uniforme em $t \in [t_0, t_1]$ (usando (1)^{k+1} e (2)^{k+1} com $M = \|x\| + \|\Delta x_{k+1}\|$). Mas por (0)^k temos que estamos calculando no 2º membro o limite de função regradas em t . Logo o 1º membro é uma função regradada em t , ou seja, vale (0)^{k+1}. ■

Lema 2. Para toda $g : [t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ vale a implicação: (0)_{L₁}, (1)^k e (2)_{L₁}^k $\Rightarrow$ (0)_{L₁}^k.

Prova. Por indução sobre $k \in \mathbb{N}$.

1) $k = 1$. Para $x, \Delta x \in G([t_0 - r, t_1], X)$ fixos temos

$$\gamma_n(s) = \frac{g(s, x_s + \frac{1}{n} \Delta x_s) - g(s, x_s)}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D_2 g(s, x_s) \Delta x_s \quad \text{q.s. em } s$$

e por (0)_{L₁} temos que $\gamma_n \in L_1([t_0, t_1], X)$.

Então $D_2g(s, x_s)\Delta x_s$ é mensurável em $s \in [t_0, t_1]$ (limite simples de mensuráveis). Assim $\|D_2g(s, x_s)\Delta x_s\|$ é mensurável em s e $\|D_2g(s, x_s)\Delta x_s\| \leq m_g(s)\|\Delta x\|$ (por $(2)_{L_1}$, $m_g \in L_1([t_0, t_1])$). Logo $\|D_2g(s, x_s)\Delta x_s\|$ é integrável em s e assim $D_2g(s, x_s).\Delta x_s$ é integrável em s .

2) Supondo que $(0)_{L_1}, (1)^k (2)_{L_1}^k \Rightarrow (0)_{L_1}^k$, teremos que

$$(0)_{L_1}, (1)^{k+1} (2)_{L_1}^{k+1} \Rightarrow (0)_{L_1}^k$$

e assim para $x, \Delta x_1, \Delta x_2 \dots \Delta x_{k+1} \in G([t_0 - r, t_1], X)$ fixos temos:

$$\gamma_n^k(s) = \frac{D_2^{(k)}g(s, x_s + \frac{1}{n}\Delta x_{k+1s})(\Delta x_{1s} \dots \Delta x_{ks}) - D_2^{(k)}g(s, x_s)(\Delta x_{1s}, \dots, \Delta x_{ks})}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D_2^{(k+1)}g(s, x_s)(\Delta x_{1s}, \dots, \Delta x_{k+1s}) \text{ q.s. em } s \in [t_0, t_1]$$

e por $(0)_{L_1}^k$ temos que $\gamma_n^k \in L_1([t_0, t_1], X)$.

Por um raciocínio análogo ao do 1º caso, e reparando que

$$\|D_2^{(k+1)}g(s, x_s)(\Delta x_{1s}, \dots, \Delta x_{k+1s})\| \leq \left(m_{g_M}^{(k+1)}(s)\|x\| + \|D_2^{(k+1)}g(s, 0)\| \right) \cdot \|\Delta x_1\| \dots \|\Delta x_{k+1}\|$$

(por $(2)_{L_1}^{k+1}$, onde tomamos $M = \|x\|$) teremos que

$D_2^{(k+1)}g(s, x_s)(\Delta x_{1s}, \dots, \Delta x_{k+1s})$ é integrável em s , ou seja, vale $(0)_{L_1}^{k+1}$. ■

Reparemos que $(0)^0 = (0)$, $(0)_{L_1}^0 = (0)_{L_1}$, $(1)^1 = (1)$, $(2)^0 = (2)$ e $(2)_{L_1}^0 = (2)_{L_1}$.

Observação 1. Podemos definir agora o subespaço vetorial de $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$:

$$\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k = \{f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]} \mid \text{vale } (1)^k \text{ e } (2)^k\}$$

e o subespaço vetorial de $Y_{[t_0, t_1]}$

$$Y_{[t_0, t_1]}^k = \{g \in Y_{[t_0, t_1]} \mid \text{vale } (1)^k \text{ e } (2)_{L_1}^k\}$$

Observação 2. $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k \subset Y_{[t_0, t_1]}^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^{k+1} \subset \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k \subset \dots \subset \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^0 = \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$$

$$Y_{[t_0, t_1]}^{k+1} \subset Y_{[t_0, t_1]}^k \subset \dots \subset Y_{[t_0, t_1]}^0 = Y_{[t_0, t_1]}.$$

Podemos então chamar $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^\infty = \bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ e $Y_{[t_0, t_1]}^\infty = \bigcap_{k=0}^\infty Y_{[t_0, t_1]}^k$.

Vamos provar primeiramente o

Teorema 1. Para $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}^k$ fixos ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) a função

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{G} \times G([t_0, t_1], X) &\longrightarrow G([t_0, t_1], X) \\ (\varphi, x) &\longrightarrow \mathcal{T}(\varphi, x) \end{aligned}$$

dada por $\mathcal{T}(\varphi, x)(t) = f(t, x_t) - f(t_0, \varphi) + \varphi(0) + \int_{t_0}^t g(s, x_s) ds$ para $t \in [t_0, t_1]$

(onde aqui consideramos $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ se $t + \theta > t_0$

$$\text{e } x_t(\theta) = \varphi(t - t_0 + \theta) \text{ se } t + \theta \leq t_0 \quad (\theta \in [-r, 0])),$$

é de classe C^k .

Ou seja, as derivadas parciais de $\mathcal{T}$ em relação φ e a x existem e são contínuas até a ordem k .

Prova. Basta provar que $\mathcal{T}^*(\varphi, x)(t) \stackrel{\text{def.}}{=} f(t, x_t) + \int_{t_0}^t g(s, x_s) ds$ é de classe C^k em relação φ e a x pois as parcelas $f(t_0, \varphi)$ e $\varphi(0)$ o são trivialmente (lembrar que $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$).

Vamos fazer a prova por indução.

1) $k = 1$. Queremos mostrar que existem $\frac{\partial \mathcal{T}^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, G([t_0, t_1], X))$ e $\frac{\partial \mathcal{T}^*(\varphi, x)}{\partial x} \in \mathcal{L}(G([t_0, t_1], X))$ e que $\frac{\partial \mathcal{T}^*}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \mathcal{T}^*}{\partial x}$ são contínuas em φ e x .

Para termos uma idéia de quem esses operadores poderiam ser, vamos, por um momento, supor que eles existem. Então:

$$\frac{\partial \mathcal{T}^*(\varphi, x)}{\partial x} \cdot \Delta x = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}^*(\varphi, x + \xi \Delta x) - \mathcal{T}^*(\varphi, x)}{\xi} \text{ na norma de } G([t_0, t_1], X)$$

e para cada $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{T}^*(\varphi, x)}{\partial x} \Delta x \right)(t) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(t, x_t + \xi \Delta x_t^0) - f(t, x_t) + \int_{t_0}^t [g(s, x_s + \xi \Delta x_s^0) - g(s, x_s)] ds}{\xi} \\ &= D_2 f(t, x_t) \Delta x_t^0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{g(s, x_s + \frac{1}{n} \Delta x_s^0) - g(s, x_s)}{1/n} ds \end{aligned}$$

Como $\frac{g(s, x_s + \frac{1}{n} \Delta x_s^0) - g(s, x_s)}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D_2 g(s, x_s) \Delta x_s^0$ q.s. em s e $D_2 g(s, x_s) \Delta x_s^0$ é integrável em s pela propriedade $(0)_{L_1}^1$ e também

$$\left\| \frac{g(s, x_s + \frac{1}{n} \Delta x_s^0) - g(s, x_s)}{1/n} \right\| \leq \sup_{\psi \in \mathcal{G}} \|D_2 g(s, \psi)\| \cdot \|\Delta x\| = \|\Delta x\| \cdot m_g(s),$$

usando o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que:

$$\left(\frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial x} \Delta x \right)(t) = D_2 f(t, x_t) \Delta x_t^0 + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \Delta x_s^0 ds$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \Delta \varphi \right)(t) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(t, x_t + \xi \Delta \varphi_0^t) - f(t, x_t) + \int_{t_0}^t [g(s, x_s + \xi \Delta \varphi_0^s) - g(s, x_s)] ds}{\xi} \\ &= D_2 f(t, x_t) \cdot \Delta \varphi_0^t + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \Delta \varphi_0^s ds \end{aligned}$$

onde, evidentemente, temos:

$$\begin{aligned} \Delta x_i^0(\theta) &= 0 & \text{se } t + \theta \leq t_0 \\ \Delta x_i^0(\theta) &= \Delta x(t + \theta) & \text{se } t + \theta > t_0 \\ \Delta \varphi_0^t(\theta) &= \Delta \varphi(t + \theta - t_0) & \text{se } t + \theta \leq t_0 \\ \Delta \varphi_0^t(\theta) &= 0 & \text{se } t + \theta > t_0 \end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^1$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}^1$, as funções

$$t \in [t_0, t_1] \xrightarrow{T_{x, \Delta x}^*} T_{x, \Delta x}^*(t) = D_2 f(t, x_t) \Delta x_t^0 + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \Delta x_s^0 ds$$

e

$$t \in [t_0, t_1] \xrightarrow{T_{\varphi, \Delta \varphi}^*} T_{\varphi, \Delta \varphi}^*(t) = D_2 f(t, x_t) \Delta \varphi_0^t + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \Delta \varphi_0^s ds$$

estão bem definidas e são regradas (estão em $G([t_0, t_1], X)$) para cada $\Delta x \in G([t_0, t_1], X)$ e $\Delta \varphi \in \mathcal{G}$.

Para provar que elas são as respectivas derivadas de T^* em relação a x e a φ

respectivamente aplicadas em Δx e $\Delta\varphi$, calculemos:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|T^*(\varphi, x + \Delta x) - T^*(\varphi, x) - T_{x, \Delta x}^*\|}{\|\Delta x\|} \quad (\text{na norma de } G([t_0, t_1], X)) \\
&= \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \frac{\|f(t, x_t + \Delta x_t^0) - f(t, x_t) - D_2 f(t, x_t) \Delta x_t^0\|}{\|\Delta x\|} + \\
&\quad \frac{\int_{t_0}^t [g(s, x_s + \Delta x_s^0) - g(s, x_s) - D_2 g(s, x_s) \Delta x_s^0] ds}{\|\Delta x\|} \\
&\leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \frac{\int_0^1 \|D_2 f(t, x_t + \xi \Delta x_t^0) - D_2 f(t, x_t)\| d\xi \cdot \|\Delta x\|}{\|\Delta x\|} + \\
&\quad \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\int_0^1 \|D_2 g(s, x_s + \xi \Delta x_s^0) - D_2 g(s, x_s)\| d\xi \cdot \|\Delta x\|}{\|\Delta x\|} ds \\
&\leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_0^1 L_M^{(1)} \cdot \xi \cdot d\xi \|\Delta x\| + \\
&\quad \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 m_{g_M}^{(1)}(s) \xi \|\Delta x\| d\xi ds \\
&= \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} L_M^{(1)} \cdot \|\Delta x\| + \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m_{g_M}^{(1)}(s) ds \cdot \|\Delta x\| = 0
\end{aligned}$$

Reparem que usamos aqui $(2)^1$ e $(2)_{L_1}^1$ e tomamos então $M > 0$ tal que

$$\|x\| < M, \|\varphi\| < M \text{ e para } \|\Delta x\| \text{ pequeno } \|x_s + \xi \Delta x_s^0\| < M \quad (0 \leq \xi \leq 1, s \in [t_0, t_1])$$

Analogamente concluímos que

$$\lim_{\|\Delta\varphi\| \rightarrow 0} \frac{\|T^*(\varphi + \Delta\varphi, x) - T^*(\varphi, x) - T_{\varphi, \Delta\varphi}^*\|}{\|\Delta\varphi\|} = 0 \quad \text{na norma de } G([t_0, t_1], X)$$

logo

$$T_{x, \Delta x}^* = \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial x} \Delta x \quad \text{e} \quad T_{\varphi, \Delta\varphi}^* = \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi.$$

Vamos mostrar que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T^*}{\partial x} : \mathcal{G} \times G([t_0, t_1], X) \longrightarrow \mathcal{L}(G([t_0, t_1], X)) \\
& \text{e } \frac{\partial T^*}{\partial \varphi} : \mathcal{G} \times G([t_0, t_1], X) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{G}, G([t_0, t_1], X))
\end{aligned}$$

são contínuas em $(\varphi, x) \in \mathcal{G} \times G([t_0, t_1], X)$.

Mostremos para $\frac{\partial T^*}{\partial \varphi}$ por exemplo (o raciocínio para $\frac{\partial T^*}{\partial x}$ é completamente análogo)

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\Delta \varphi, \Delta x) \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial T^*(\varphi + \Delta \varphi, x + \Delta x)}{\partial \varphi} - \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \right\| = \\
& \hspace{15em} (\text{na norma de } \mathcal{L}(\mathcal{G}, G([t_0, t_1], X))) \\
& = \lim_{(\Delta \varphi, \Delta x) \rightarrow 0} \sup_{\|\Delta \varphi\| \leq 1} \left\| \frac{\partial T^*(\varphi + \Delta \varphi, x + \Delta x)}{\partial \varphi} \overline{\Delta \varphi} - \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \overline{\Delta \varphi} \right\| = \\
& \hspace{15em} (\text{na norma de } G([t_0, t_1], X)) \\
& = \lim_{(\Delta \varphi, \Delta x) \rightarrow 0} \sup_{\|\Delta \varphi\| \leq 1} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \| D_2 f(t, x_t + \Delta x_t^0 + \Delta \varphi_t^0) \cdot \overline{\Delta \varphi_t^0} - D_2 f(t, x_t) \overline{\Delta \varphi_t^0} \\
& \hspace{10em} + \int_{t_0}^t [D_2 g(s, x_s + \Delta x_s^0 + \Delta \varphi_s^0) - D_2 g(s, x_s)] \cdot \overline{\Delta \varphi_s^0} ds \| \\
& \leq \lim_{(\Delta \varphi, \Delta x) \rightarrow 0} \sup_{\|\Delta \varphi\| \leq 1} L_M^{(1)} \cdot (\|\Delta x\| + \|\Delta \varphi\|) \cdot \|\overline{\Delta \varphi}\| \\
& \hspace{10em} + \lim_{(\Delta x, \Delta \varphi) \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} m_{g_M}^{(1)}(s) \cdot (\|\Delta x\| + \|\Delta \varphi\|) ds = 0
\end{aligned}$$

Aqui pegamos $M > 0$ tal que para $\Delta \varphi$ e Δx pequenos temos

$$\|x_s + \xi[\Delta x_s^0 + \Delta \varphi_s^0]\| < M \quad (0 \leq \xi \leq 1, \quad t_0 \leq s \leq t_1) \quad \text{e usamos } (2)^1 \text{ e } (2)_{L^1}^1.$$

Logo T^* é de classe C^1 em relação a φ e x .

Podemos passar para a segunda parte da indução sobre $k \in \mathbb{N}$.

2) Suponhamos que T^* é de classe C^k em relação a φ e a x quando $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}^k$. Vamos mostrar que se $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^{k+1} \subset \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}^{k+1} \subset Y_{[t_0, t_1]}^k$ então T^* será de classe C^{k+1} em relação a φ e x .

Temos então agora $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^{k+1}$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}^{k+1}$. Pela hipótese de indução, T^* é C^k em relação a φ e a x e seja então, de maneira geral

$$\frac{\partial^k T^*(\varphi, x)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2} \dots \partial z_{i_k}} \in M^k(G_{i_1} \times G_{i_2} \times \dots \times G_{i_k}, G([t_0, t_1], X))$$

(o espaço de Banach das aplicações k -lineares contínuas de $G_{i_1} \times \dots \times G_{i_k}$ em $G([t_0, t_1], X)$), a derivada parcial de ordem k de T^* em (φ, x) , em relação a $(z_{i_1}, \dots, z_{i_k})$ onde $i_j = 1$ ou $i_j = 2$ para $j = 1, 2, \dots, k$ e

$$z_1 \in G_1 = \mathcal{G}$$

$$z_2 \in G_2 = G([t_0, t_1], X)$$

Supomos ainda na hipótese de indução que para $\Delta_j z_{i_j} \in G_{i_j}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) e para $t \in [t_0, t_1]$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k T^*(\varphi, x)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}}(\Delta z_{i_1}, \dots, \Delta z_{i_k})(t) &= D_2^{(k)} f(t, x_t)(\Delta_1 z_{i_1}^t, \dots, \Delta_k z_{i_k}^t) \\ &+ \int_{t_0}^t D_2^{(k)} g(s, x_s)(\Delta_1 z_{i_1}^s, \dots, \Delta_k z_{i_k}^s) ds \in X \end{aligned}$$

onde

$$\Delta_j z_{i_j}^t = \Delta_j z_{i_0}^t \quad \text{se } i_j = 1$$

$$\text{e } \Delta_j z_{i_j}^t = \Delta_j z_{i_2}^0 \quad \text{se } i_j = 2$$

Já mostramos que para $k = 1$ isso é verdade.

Seja então

$$L \in \mathcal{L}(G_{i_{k+1}}, M^k(G_{i_1} \times \dots \times G_{i_k}, G([t_0, t_1], X))) \approx M^{k+1}(G_{i_1} \times G_{i_{k+1}}, G([t_0, t_1], X))$$

tal que para $\Delta_j z_{i_j} \in G_{i_j}$ ($j = 1, 2, \dots, k, k+1$) e $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} L(\Delta_1 z_{i_1}, \dots, \Delta_k z_{i_k}, \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}})(t) &= D_2^{(k+1)} f(t, x_t)(\Delta_1 z_{i_1}^t, \dots, \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}}^t) + \\ &+ \int_{t_0}^t D_2^{(k+1)} g(s, x_s)(\Delta_1 z_{i_1}^s, \dots, \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}}^s) ds \in X \end{aligned}$$

Já sabemos por $(0)^{k+1}$ e $(0)_{L_1}^{k+1}$ que $L(\Delta_1 z_{i_1}, \dots, \Delta_k z_{i_k}, \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}}) \in G([t_0, t_1], X)$.

Vamos mostrar que $L = \frac{\partial^{k+1} T^*(\varphi, x)}{\partial z_{i_1}, \dots, \partial z_{i_{k+1}}}$.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $i_{k+1} = 1$ (caso $i_{k+1} = 2$, o raciocínio é o mesmo).

Calculemos então

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Delta_{k+1} z_1\| \rightarrow 0} \frac{\left\| \frac{\partial^k T^*(\varphi + \Delta_{k+1} z_1, x)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} - \frac{\partial^k T^*(\varphi, x)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} - L \cdot \Delta_{k+1} z_1 \right\|}{\|\Delta_{k+1} z_1\|} = \\
& \quad \text{(na norma de } M^k(G_{i_1} \times \dots \times G_{i_k}, G([t_0, t_1], X))) \\
& = \lim_{\|\Delta_{k+1} z_1\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\|\Delta_j z_{i_j}\| \leq 1 \\ j=1, \dots, k}} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \frac{\|D_2^{(k)} f(t, x_t + \Delta_{k+1} z_{1_0}^t)(\Delta_1 z_{i_1}^t \dots \Delta_k z_{i_k}^t)\|}{\|\Delta_{k+1} z_1\|} \\
& \quad \frac{-D_2^{(k)} f(t, x_t)(\Delta_1 z_{i_1}^t \dots \Delta_k z_{i_k}^t) - D_2^{(k+1)} f(t, x_t)(\Delta_1 z_{i_1}^t \dots \Delta_k z_{i_k}^t, \Delta_{k+1} z_{1_0}^t)}{\|\Delta_{k+1} z_1\|} \\
& \quad + \frac{\int_{t_0}^t ([D_2^{(k)} g(s, x_s + \Delta_{k+1} z_{1_0}^s) - D_2^{(k)} g(s, x_s)](\Delta_1 z_{i_1}^s \dots \Delta_k z_{i_k}^s))}{\|\Delta_{k+1} z_1\|} \\
& \quad - \frac{D_2^{(k+1)} g(s, x_s)(\Delta_1 z_{i_1}^s, \dots, \Delta_{k+1} z_{1_0}^s) ds}{\|\Delta_{k+1} z_1\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta_{k+1} z_1\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\|\Delta_j z_{i_j}\| \leq 1 \\ j=1, 2, \dots, k}} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \frac{\| \int_0^1 [D_2^{(k+1)} f(t, x_t + \xi \Delta_{k+1} z_{1_0}^t) \\
& \quad - D_2^{(k+1)} f(t, x_t)](\Delta_1 z_{i_1}^t \dots \Delta_{k+1} z_{1_0}^t) d\xi \|}{\|\Delta_{k+1} z_1\|} \\
& \quad + \lim_{\|\Delta_{k+1} z_1\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\|\Delta_j z_{i_j}\| \leq 1 \\ j=1, 2, \dots, k}} \frac{\int_{t_0}^{t_1} \| \int_0^1 [D_2^{(k+1)} g(s, x_s + \xi \Delta_{k+1} z_{1_0}^s) \\
& \quad - D_2^{(k+1)} g(s, x_s)](\Delta_1 z_{i_1}^s \dots \Delta_{k+1} z_{1_0}^s) d\xi \| ds}{\|\Delta_{k+1} z_1\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta_{k+1} z_1\| \rightarrow 0} \int_0^1 L_M^{(k+1)} \xi \cdot \|\Delta_{k+1} z_1\| d\xi + \lim_{\|\Delta_{k+1} z_1\| \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} m_{g_M}^{(k+1)}(s) \int_0^1 \xi \|\Delta_{k+1} z_1\| d\xi ds = 0
\end{aligned}$$

Usamos aqui $(2)^{k+1}$ e $(2)_{L_1}^{k+1}$ (com $M > 0$ apropriado).

Logo T^* tem as derivadas parciais de ordem $k+1$, dadas pela fórmula acima.

Vamos mostrar que

$$\frac{\partial^{k+1} T^*}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_{k+1}}} : \mathcal{G} \times G([t_0, t_1], X) \rightarrow M^{k+1}(G_{i_1} \times \dots \times G_{i_{k+1}}, G([t_0, t_1], X))$$

é contínua em $(\varphi, x) \in \mathcal{G} \times G([t_0, t_1], X)$.

Calculemos então

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\Delta\varphi, \Delta x) \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial^{k+1} \mathcal{T}^*(\varphi + \Delta\varphi, x + \Delta x)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_{k+1}}} - \frac{\partial^{k+1} \mathcal{T}^*(\varphi, x)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_{k+1}}} \right\| = \\
& \quad \text{na norma de } M^{k+1}(G_{i_1} \times \dots \times G_{i_{k+1}}, G([t_0, t_1], X)) \\
& = \lim_{(\Delta\varphi, \Delta x) \rightarrow 0} \sup_{\substack{\|\Delta_j z_{i_j}\| \leq 1 \\ j=1,2,\dots,k+1}} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \| D_2^{(k+1)} f(t, x_t + \Delta x_t^0 + \Delta\varphi_t^0) (\Delta_1 z_{i_1}^t \dots \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}}^t) \\
& \quad - D_2^{(k+1)} f(t, x_t) \cdot (\Delta_1 z_{i_1}^t \dots \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}}^t) \\
& + \int_{t_0}^t [D_2^{(k+1)} g(s, x_s + \Delta x_s^0 + \Delta\varphi_s^0) - D_2^{(k+1)} g(s, x_s)] (\Delta_1 z_{i_1}^s \dots \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}}^s) ds \| \\
& \leq \lim_{(\Delta\varphi, \Delta x) \rightarrow 0} L_M^{(k+1)} \cdot (\|\Delta x\| + \|\Delta\varphi\|) \\
& + \lim_{(\Delta\varphi, \Delta x) \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} m_{g_M}^{(k+1)}(s) ds (\|\Delta x\| + \|\Delta\varphi\|) = 0
\end{aligned}$$

onde usamos $(2)^{k+1}$ e $(2)_{L_1}^{k+1}$ (com $M > 0$ apropriado).

Logo $\mathcal{T}^*$ é C^{k+1} em relação a φ e a x .

Está provada a indução e portanto o teorema. ■

Teorema 2. Fixado $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$ e $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$, $g \in Y_{[t_0, t_1]}^k$ então a aplicação $\varphi \in \mathcal{G} \longrightarrow x(\varphi) \in G([t_0 - r, t_1], X)$ é de classe C^k , onde $x(\varphi) = x(\varphi, f, g)$ é a solução regradada de (N) com $x_{t_0} = \varphi$.

Mais ainda, para $k \geq 1$, a derivada $\frac{\partial x(\varphi)}{\partial \varphi} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, G([t_0 - r, t_1], X))$ é tal que para $\Delta\varphi \in \mathcal{G}$ a função $y = \frac{\partial x(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi \in G([t_0 - r, t_1], X)$ é a única solução regradada da equação variacional linear

$$(N)' : y(t) = D_2 f(t, x_t) y_t + \Delta\varphi(0) - D_2 f(t_0, \varphi) \cdot \Delta\varphi + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \cdot y_s ds,$$

$t_0 \leq t \leq t_1$, com dado inicial $y_{t_0} = \Delta\varphi$.

Prova. Seja $\delta > 0$ tal que $\int_a^{a+\delta} m_g(s) ds < \frac{1}{2} \quad \forall a \in [t_0, t_1 - \delta]$ e $t_1 = t_0 + \ell\delta$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Para $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$, para a aplicação $\mathcal{T}$ definida no teorema 1, podemos dizer que

$$\|T(\varphi, x) - T(\varphi, y)\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} \leq (\|D_2 f\| e^{-\lambda\varepsilon} + \mathcal{S}(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} m_g(s) ds) \cdot \|x - y\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]}$$

Pois se para $(\varphi, x) \in \mathcal{G} \times G([t_0, t_1]; X)$ definimos $x^\varphi \in G([t_0 - r, t_1], X)$ de maneira que $x^\varphi(t) = x(t)$ para $t_0 < t \leq t_1$ e $x^\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$ para $t_0 - r \leq t \leq t_0$ vemos que

$$\mathcal{T}(\varphi, x)(t) = T_1(x^\varphi)(t) \text{ para } t_0 \leq t < t_0 + \delta \text{ (} T_1 \text{ dada no teorema 2.1)}$$

e no teorema 2.1 foi concluída a desigualdade acima.

Assim, para $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ propícios, vemos que $\|T(\varphi, x) - T(\varphi, y)\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} \leq \frac{7}{8} \|x - y\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]}$, ou seja,

1) Se $\int_{t_0}^{t_1} m_g(s) ds < \frac{1}{2}$, $\mathcal{T}(\varphi, \cdot) : G([t_0, t_1], X) \rightarrow G([t_0, t_1], X)$ é uma família de contrações $(G([t_0, t_1], X)$ com a norma $\|\cdot\|_{\lambda}$) uniforme em $\varphi \in \mathcal{G}$ (pois $\|T(\varphi, x) - T(\varphi, y)\|_{\lambda} \leq \frac{7}{8} \|x - y\|_{\lambda} \forall \varphi \in \mathcal{G}$). Como $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}^k$, do teorema 1, sabemos que $\mathcal{T}$ é de classe C^k em relação φ e a x . Logo $\mathcal{T}$ é de classe C^k em relação a φ e x se tomarmos em $\mathcal{G}$ e em $G([t_0, t_1], X)$ a norma $\|\cdot\|_{\lambda}$ que é equivalente à norma do supremo.

Então podemos dizer que o ponto fixo de $\mathcal{T}(\varphi, \cdot) : x(\varphi) = \mathcal{T}(\varphi, x(\varphi))$ é de classe C^k em relação $\varphi \in \mathcal{G}$, na norma $\|\cdot\|_{\lambda}$ e portanto também na norma do supremo (aqui utilizamos o resultado sobre diferenciabilidade de contrações uniformes dado em [Hale 4], por exemplo).

A solução de (N) em $G([t_0 - r, t_1], X)$ é tal que $x(\varphi, f, g)_{|[t_0, t_1]}$ é o ponto fixo de $\mathcal{T}(\varphi, \cdot)$ e $x(\varphi, f, g)_{t_0} = \varphi$, logo $x(\varphi, t, g) \in G([t_0 - r, t_1], X)$ é de classe C^k em relação a φ .

Isso implica que o operador de evolução $\tau(t, t_0) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ (lembrar que estamos no caso $\int_{t_0}^{t_1} m_g(s) ds < \frac{1}{2}$) é de classe C^k pois $\tau(t, t_0) = \Gamma_t \circ x(\cdot, f, g)$, onde $\Gamma_t : G([t_0 - r, t_1], X) \rightarrow \mathcal{G}$ é o operador linear e contínuo (portanto C^∞) que a cada $x \in G([t_0 - r, t_1], X)$ corresponde $\Gamma_t x = x_t \in \mathcal{G}$.

2) Supondo agora $t_1 > t_0$ qualquer.

Dados $s, t \in [t_0, t_1]$ com $t \geq s$ e $\int_s^t m_g(\bar{s}) d\bar{s} < \frac{1}{2}$, afirmamos que $\tau(t, s) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é de classe C^k .

Como todo o raciocínio anterior não depende do particular t_0 , se utilizarmos s como o " t_0 " novo, lembrando que $f_{[s, t] \times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{[s, t]}^k$ e $g_{[s, t] \times \mathcal{G}_0^+} \in Y_{[s, t]}^k$, pelo item 1) concluiremos que $\tau(t, s) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é de classe C^k .

Afirmamos agora que $\tau(t_1, t_0) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é de classe C^k .

Isso pois $\tau(t_1, t_0) = \tau(t_1, t_1 - \delta) \circ \tau(t_1 - \delta, t_1 - 2\delta) \circ \dots \circ \tau(t_1 - (\ell - 1)\delta, t_0)$ (lembrar que $t_0 = t_1 - \ell\delta$, $\ell \in \mathbb{N}$), logo $\tau(t_1, t_0)$ é composto de um número finito de operadores de classe C^k e portanto é de classe C^k .

Finalmente, a solução de (N) em $t_0 \leq t \leq t_1$ como função do dado inicial

$\varphi \in \mathcal{G} \longrightarrow x(\varphi) \in G([t_0 - r, t_1], X)$ será então de classe C^k , pois

$$x(\varphi) = \left(\sum_{j=0}^m \pi_j \circ \tau(t_1 - jr, t_0) + \pi_{m+1} \right)(\varphi)$$

onde $m \in \mathbb{N}$ é o maior natural tal que $t_1 - mr > t_0$ e $\pi_j : \mathcal{G} \rightarrow G([t_0 - r, t_1], X)$ para $j = 0, 1, 2, \dots, m+1$ são as funções lineares-contínuas (portanto C^∞) definidas por:

$$\text{para } 0 \leq j \leq m, \psi \in \mathcal{G} \begin{cases} \pi_j \psi(t) = \psi(t - t_1 + jr) & \text{se } t_1 - (j+1)r < t \leq t_1 - jr \\ \pi_j \psi(t) = 0 & \text{se } t \in [t_0 - r, t_1] \setminus]t_1 - (j+1)r, t_1 - jr] \end{cases}$$

e $\pi_{m+1} \psi(t) = \psi(t - t_0)$ se $t_0 - r \leq t \leq t_1 - (m+1)r$ e

$\pi_{m+1} \psi(t) = 0$ se $t > t_1 - (m+1)r$.

Falta então mostrar que para $k \geq 1$, $\frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi$ é a solução regradada de $(N)'$ (equação variacional de (N) em torno da solução $x(\varphi, f, g)$) com dado inicial $\Delta \varphi \in \mathcal{G}$.

Seja então para $\Delta\varphi \in \mathcal{G}$,

$$y = \frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi \in G([t_0 - r, t_1], X).$$

Temos:

$$x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]} = \mathcal{T}(\varphi, x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]})$$

e derivando ambos os membros em relação $\varphi \in \mathcal{G}$ e em seguida aplicando a $\Delta\varphi$ obtemos:

$$y|_{[t_0, t_1]} = \frac{\partial \mathcal{T}(\varphi, x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]})}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{T}(\varphi, x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]})}{\partial x} \cdot y|_{[t_0, t_1]}.$$

Assim para $t_0 \leq t \leq t_1$ temos, conforme as fórmulas do teorema 1:

$$\begin{aligned} y(t) &= D_2 f(t, x_t) \cdot \Delta\varphi_0^t + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \Delta\varphi_0^s ds + D_2 f(t_0, \varphi) \cdot \Delta\varphi + \Delta\varphi(0) + \\ &\quad + D_2 f(t, x_t) y_t^0 + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) y_s^0 ds. \end{aligned}$$

Reparando que $y_{t_0} = \Delta\varphi$ (pois $x(\varphi, f, g)_{t_0} = \varphi$) concluímos que y satisfaz $(N)'$ com dado inicial $y_{t_0} = \Delta\varphi$.

É importante observar, para concluir o teorema, que $(N)'$ tem uma única solução regradada para cada dado inicial em $\mathcal{G}$ pois para $k \geq 1$

$$f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k, g \in Y_{[t_0, t_1]}^k \Rightarrow L_f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]} \text{ e } L_g \in Y_{[t_0, t_1]}$$

onde L_f e L_g são os dados da equação linear $(N)'$, ou seja

$$L_f(t, \Delta\varphi) = D_2 f(t, x_t) \cdot \Delta\varphi \text{ e } L_g(t, \Delta\varphi) = D_2 g(t, x_t) \cdot \Delta\varphi. \quad \blacksquare$$

Teorema 3. Fixados $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}^k$.

Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ é um subespaço fechado de $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ tal que para cada $M > 0$ a função

$$S_M^{\mathcal{F}}(\varepsilon) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \|f\|_1 \leq M}} S^f(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

(aqui para $f \in \mathcal{F}$ indicamos por $\mathcal{S}^f$ a função dada na propriedade (3) para f) então a aplicação

$$(\varphi, f) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow x(\varphi, f) \in G([t_0 - r, t_1], X)$$

é de classe C^k onde $x(\varphi, f) = x(\varphi, f, g)$ é a solução regradada de (N) para $t \in [t_0, t_1]$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Mais ainda, para $k \geq 1$, a derivada $\frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial f} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, G([t_0 - r, t_1], X))$ é tal que para $\Delta f \in \mathcal{F}$ a função $z = \frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial f} \cdot \Delta f \in G([t_0 - r, t_1], X)$ é a única solução regradada da equação linear:

$$(N)^* : \quad z(t) = D_2 f(t, x_t) z_t + \Delta f(t, x_t) - \Delta f(t_0, \varphi) + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) z_s ds \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

com dado inicial $z_{t_0} = 0$.

Prova. A aplicação $\mathcal{T}$ definida no teorema 1, na verdade também depende de $f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$. Chamando $\mathcal{F}_M = \{f \in \mathcal{F} \mid \|f\|_1 \leq M\}$ a bola fechada de raio $M > 0$, do subespaço $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k \subset \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$ temos então

$$\mathcal{T} : \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M \times G([t_0, t_1], X) \rightarrow G([t_0, t_1], X)$$

como no teorema 1.

Se tomamos $\delta > 0 \mid \int_a^{a+\delta} m_g(s) ds < \frac{1}{2} \forall a \in [t_0, t_1 - \delta]$ e $t_1 = t_0 + \ell\delta$, $\ell \in \mathbb{N}$ como no teorema 2, teremos para $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|T(\varphi, f, x) - T(\varphi, f, y)\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} &\leq (\|D_2 f\| e^{-\lambda\varepsilon} + \mathcal{S}^f(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} m_g(s) ds) \|x - y\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} \\ &\leq (M e^{-\lambda\varepsilon} + \mathcal{S}_M^{\mathcal{F}}(\varepsilon) + \frac{1}{2}) \|x - y\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} \end{aligned}$$

e então para $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ propícios teremos

$$\|T(\varphi, f, x) - T(\varphi, f, y)\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} \leq \frac{7}{8} \|x - y\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]},$$

ou seja,

1) Se $\int_{t_0}^{t_1} m_g(s)ds < \frac{1}{2}$ $T(\varphi, f, \cdot) : G([t_0, t_1], X) \rightarrow G([t_0, t_1], X)$ é uma família de contrações $(G([t_0, t_1], X))$ com a norma $\|\cdot\|_\lambda$ uniforme em relação aos parâmetros $(\varphi, f) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M$

$$(\|T(\varphi, f, x) - T(\varphi, f, y)\|_\lambda \leq \frac{7}{8}\|x - y\|_\lambda \quad \forall (\varphi, f) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M)$$

Pelo teorema 1, T é C^k em relação a φ e a x ($\mathcal{F}_M \subset \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ e $g \in Y_{[t_0, t_1]}^k$) em relação a qualquer norma equivalente à norma do supremo.

T é C^∞ em relação a $f \in \mathcal{F}_M$ pois é a translação de um operador linear e contínuo em $f \in \mathcal{F}_M$. Repare que a derivada em relação a f de cada derivada parcial de T aplicada a um acréscimo Δf , simplesmente troca f por Δf na sua expressão. Como f e $\Delta f \in \mathcal{F}_M \subset \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$, cada derivada em relação a f de cada derivada parcial de T manterá então o mesmo grau de diferenciabilidade em relação a φ e a x da respectiva derivada parcial de T .

Logo T é de classe C^k em relação $(\varphi, f, x) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M \times G([t_0, t_1], X)$.

Podemos então dizer que o ponto fixo de T :

$x(\varphi, f) = T(\varphi, f, x(\varphi, f))$ é de classe C^k em relação $(\varphi, f) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M$

(na norma $\|\cdot\|_\lambda$ e portanto na norma do supremo).

Como isso vale para $M > 0$ arbitrário, então $x(\varphi, f) = T(\varphi, f, x(\varphi, f))$ é C^k em relação a $(\varphi, f) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}$.

A solução de (N) em $G([t_0 - r, t_1], X)$ é tal que $x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]}$ é o ponto fixo de $T(\varphi, f, \cdot)$ e $x(\varphi, f, g)_{t_0} = \varphi$, logo $x(\varphi, f, g)$ é de classe C^k em relação a $(\varphi, f) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}$.

O operador de evolução $\tau(t, t_0)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), que para cada f fixado é um operador de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}$, na verdade também depende de f . Podemos por algum instante então escrever

$$\tau(t, t_0) : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

$$(\varphi, f) \longrightarrow \tau(t, t_0)(\varphi, f) = x_t(\varphi, f, g)$$

e ele é de classe C^k (lembrar que aqui estamos no caso $\int_{t_0}^{t_1} m_g(s)ds < \frac{1}{2}$ e que, como no teorema 2, $\tau(t, t_0) = \Gamma_t \circ x(\cdot, \cdot, g) : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$).

Se definimos

$$\begin{aligned}\bar{\tau}(t, t_0) : \mathcal{G} \times \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{F} \\ (\varphi, f) &\longrightarrow (\tau(t, t_0)(\varphi, f), f)\end{aligned}$$

então evidentemente $\bar{\tau}(t, t_0)$ será de classe C^k .

2) Supondo agora $t_1 > t_0$ qualquer.

Dados $s, t \in [t_0, t_1]$ com $t \geq s$ e $\int_s^t m_g(\bar{s}) d\bar{s} < \frac{1}{2}$, afirmamos que

$$\bar{\tau}(t, s) : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{F} \text{ é de classe } C^k.$$

Se trocamos t_0 por s na definição de $\mathcal{T}$ (ver teorema 1) e mantemos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_M$ (ou seja, $\mathcal{T} : \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M \times G([s, t], X) \rightarrow G([s, t], X)$ dado no teorema 1) podemos raciocinar como no item 1) para concluir que $\bar{\tau}(t, s)$ é de classe C^k (repare que $f \in \mathcal{F} \Rightarrow f|_{[s, t] \times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{[s, t]}^k$).

Afirmamos agora que $\tau(t_1, t_0) : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é de classe C^k .

Isso pois $\bar{\tau}(t_1, t_0) = \bar{\tau}(t_1, t_1 - \delta) \circ \bar{\tau}(t_1 - \delta, t_1 - 2\delta) \circ \dots \circ \bar{\tau}(t_1 - (\ell - 1)\delta, t_0)$ (lembrar que $t_0 = t_1 - \ell\delta$, $\ell \in \mathbb{N}$), logo $\bar{\tau}(t_1, t_0) : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{F}$ é a composição de um número finito de operadores de classe C^k e é portanto de classe C^k .

Agora $\tau(t_1, t_0) = \pi \circ \bar{\tau}(t_1, t_0)$ onde $\pi : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é a projeção canônica.

Logo $\tau(t_1, t_0)$ é de classe C^k em $(\varphi, f) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}$.

Finalmente, a solução de (N) em $t_0 \leq t \leq t_1$ como função de $(\varphi, f) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}$, ou seja,

$$\begin{aligned}x : \mathcal{G} \times \mathcal{F} &\longrightarrow G([t_0 - r, t_1], X) \\ (\varphi, f) &\longrightarrow x(\varphi, f) = x(\varphi, f, g)\end{aligned}$$

será de classe C^k em (φ, f) , pois

$$x(\varphi, f) = \left(\sum_{j=0}^m \pi_j \circ \tau(t_1 - jr, t_0) + \pi_{m+1} \circ \pi \right)(\varphi, f)$$

onde $m \in \mathbb{N}$ é o maior natural tal que $t_1 - mr > t_0$ as funções $\pi_j : \mathcal{G} \rightarrow G([t_0 - r, t_1], X)$, $j = 0, 1, \dots, m+1$ são as funções lineares contínuas dadas no teorema 2.

Falta então mostrar que para $k \geq 1$, $\frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial f} \cdot \Delta f$ é a única solução regradada de $(N)^*$ com dado inicial $0 \in \mathcal{G}$.

$$\text{Seja então } \Delta f \in \mathcal{F}, z = \frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial f} \cdot \Delta f \in G([t_0 - r, t_1], X)$$

$$\text{temos: } x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]} = T(\varphi, f, x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]})$$

e derivando ambos os membros em relação a $f \in \mathcal{F}$ e aplicando em $\Delta f \in \mathcal{F}$ obtemos:

$$z|_{[t_0, t_1]} = \frac{\partial T(\varphi, f, x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]})}{\partial f} \cdot \Delta f + \frac{\partial T(\varphi, f, x(\varphi, f, g)|_{[t_0, t_1]})}{\partial x} \cdot z|_{[t_0, t_1]}$$

Assim, para $t_0 \leq t \leq t_1$ temos:

$$z(t) = \Delta f(t, x_t) - \Delta f(t_0, \varphi) + D_2 f(t, x_t) z_t^0 + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) z_s^0 ds.$$

Reparando que $z_{t_0} = 0$ (pois $x(\varphi, f, g)_{t_0} = \varphi$) concluímos que z satisfaz $(N)^*$ com $z_{t_0} = 0$. A unicidade de solução regradada para $(N)^*$ vem do fato de $(N)^*$ ser uma equação do tipo $(\hat{N})$ (ver observação 1.3) com parâmetros $\overline{L}_f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$ e $L_g \in Y_{[t_0, t_1]}$ onde $\overline{L}_f(t, \psi) = D_2 f(t, x_t) \cdot \psi + \Delta f(t, x_t) - \Delta f(t_0, \varphi)$ e $L_g(t, \psi) = D_2 g(t, x_t) \cdot \psi$ (ver última observação do teorema 2). ■

Teorema 4. Fixado $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$.

Se $\mathcal{H} \subset Y_{[t_0, t_1]}^k$ é um subespaço fechado de $Y_{[t_0, t_1]}$ tal que

$$\exists \delta > 0 \quad | \quad \int_a^{a+\delta} m_g(s) ds < \frac{1}{2} \quad \forall a \in [t_0, t_1 - \delta] \text{ e } \forall g \in \mathcal{H}$$

($t_1 = t_0 + \ell\delta, \ell \in \mathbb{N}$)

(m_g dado na condição (2)_{L₁} para $g \in \mathcal{H}$) então a aplicação:

$$(\varphi, f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H} \rightarrow x(\varphi, f, g) \in G([t_0 - r, t_1], X)$$

($\mathcal{F}$ dado no teorema 3) é de classe C^k , onde $x(\varphi, f, g)$ é a solução regradada de (N) em $[t_0, t_1]$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Mais ainda, para $k \geq 1$, a derivada $\frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial g} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, G([t_0 - r, t_1], X))$ é tal que para $\Delta g \in \mathcal{H}$ a função $w = \frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial g} \cdot \Delta g \in G([t_0 - r, t_1], X)$ é a única solução regradada da equação linear:

$$(N)^{**} \quad w(t) = D_2 f(t, x_t) w_t + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) w_s ds + \int_{t_0}^t \Delta g(s, x_s) ds \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

com dado inicial $w_{t_0} = 0$.

Prova. A aplicação $\mathcal{T}$ dada no teorema 3 também depende de $g \in Y_{[t_0, t_1]}$ e podemos tomar:

$$\mathcal{T} : \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M \times \mathcal{H} \times G([t_0, t_1], X) \rightarrow G([t_0, t_1], X).$$

Assim:

$$\|T(\varphi, f, g, x) - T(\varphi, f, g, y)\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} \leq (Me^{-\lambda\varepsilon} + \mathcal{S}_M^{\mathcal{F}}(\varepsilon) + \frac{1}{2}) \cdot \|x - y\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]}$$

e para $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ propícios:

$$\|T(\varphi, f, g, x) - T(\varphi, f, g, y)\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} \leq \frac{7}{8} \|x - y\|_{\lambda}^{[t_0, t_0+\delta]} \quad \forall (\varphi, f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M \times \mathcal{H}.$$

Assim, se:

1) $\delta = t_1 - t_0$ $\mathcal{T}(\varphi, f, g, \cdot) : G([t_0, t_1], X) \rightarrow G([t_0, t_1], X)$ é uma família de contrações uniforme em relação aos parâmetros $(\varphi, f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M \times \mathcal{H}$.

Como $\mathcal{T}$ é a translação de um operador linear e contínuo em $g \in \mathcal{H} \subset Y_{[t_0, t_1]}$, fazendo um raciocínio análogo ao do item 1) do teorema 3, concluímos que $\mathcal{T}$ é C^k em relação a (φ, f, g, x) e então o ponto fixo de $\mathcal{T}$ será de classe C^k em relação $(\varphi, f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M \times \mathcal{H}$ e como $M > 0$ é arbitrário, ele será de classe C^k em relação a $(\varphi, f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H}$ e também a solução de (N) com dado inicial φ será C^k em relação a (φ, f, g) .

Como no teorema 3, o operador $\tau(t, t_0)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) que agora ressaltaremos sua dependência de $g \in \mathcal{H}$ será C^k em (φ, f, g) . O mesmo se dará então para

$$\bar{\tau}(t, t_0) : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H}$$

$$(\varphi, f, g) \longrightarrow (\tau(t, t_0)(\varphi, f, g), f, g)$$

2) $t_1 = t_0 + \ell\delta$ ($\ell \in \mathbb{N}$ qualquer).

Quando definimos, para $s \in [t_0, t_1 - \delta]$, $T : \mathcal{G} \times \mathcal{F}_M \times \mathcal{H} \times G([s, s + \delta], X) \rightarrow G([s, s + \delta], X)$ trocando em tudo (menos em $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_M$ e $\mathcal{H}$) t_0 por s e t_1 por $s + \delta$, teremos as mesmas conclusões do item 1) para $\tau(t, s)$ e $\bar{\tau}(t, s)$ com $s \leq t \leq s + \delta$ (ou seja, eles são de classe C^k).

Afirmamos agora que $\tau(t_1, t_0) : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ é de classe C^k , pois

$$\bar{\tau}(t_1, t_0) = \bar{\tau}(t_1, t_1 - \delta) \circ \bar{\tau}(t_1 - \delta, t_1 - 2\delta) \circ \dots \circ \bar{\tau}(t_1 - (\ell - 1)\delta, t_0)$$

$$\text{e } \tau(t_1, t_0) = \bar{\pi} \circ \bar{\tau}(t_1, t_0)$$

(onde $\bar{\pi} : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ é a projeção canônica),

todos de classe C^k .

Finalmente a solução de (N) em $t_0 \leq t \leq t_1$ como função de $(\varphi, f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H}$, ou seja:

$$\begin{aligned} x : \mathcal{G} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H} &\longrightarrow G([t_0 - r, t_1], X) \\ (\varphi, f, g) &\longrightarrow x(\varphi, f, g) \end{aligned}$$

será de classe C^k em (φ, f, g) , pois

$$x(\varphi, f, g) = \left(\sum_{j=0}^m \pi_j \circ \tau(t_1 - jr, t_0) + \pi_{m+1} \circ \bar{\pi} \right)(\varphi, f, g),$$

tudo como no teorema 3 e teorema 2.

A verificação de que $w = \frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial g} \cdot \Delta g$ (quando $k \geq 1$) satisfaz $(N)^{**}$ com dado inicial $w_{t_0} = 0 \in \mathcal{G}$ se dá de maneira análoga à do teorema 3. $(N)^{**}$ tem uma única solução regrada em $[t_0, t_1]$ pois é uma equação do tipo $(\hat{N})$ (ver observação 1.3) com parâmetros:

$\bar{L}_f \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}$ e $L_g \in Y_{[t_0, t_1]}$ dados por

$$\bar{L}_f(t, \psi) = D_2 f(t, x_t) \cdot \psi + \int_{t_0}^t \Delta g(s, x_s) ds \text{ e } L_g(t, \psi) = D_2 g(t, x_t) \cdot \psi$$

(ver últimas observações dos teoremas 2 e 3). ■

5. A solução para trás

Vamos estudar aqui uma possibilidade de haver solução para (N) para $t \leq t_0$, colocando para f uma condição suficiente $(\widetilde{3})$ análoga à condição (3) .

Seja, para $\tilde{t}_0 < t_0$, o espaço

$$\tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^+ = \{f : [\tilde{t}_0, t_0] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid f \text{ satisfaz } (0)_+, (1), (2) \text{ e } (\widetilde{3})\}.$$

onde para $(0)_+$ tomamos os intervalos $[\tilde{t}_0 - r, t_0]$ e para (1) e (2) tomamos $t \in [\tilde{t}_0, t_0]$ ($(0)_+$ definido na observação 2.3). Definimos a propriedade:

$(\widetilde{3})$ Para cada $(t, \varphi) \in [\tilde{t}_0, t_0] \times \mathcal{G}$, o núcleo $\mu_\varphi(t, \cdot) \in SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ que representa $D_2 f(t, \varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$ (ver teorema 1.1) é tal que apresenta um salto em $\theta = -r : A(t, \varphi) = \mu_\varphi(t, -r) - \mu_\varphi(t, -r^+) \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\exists L \in G^+([\tilde{t}_0, t_0], \mathcal{L}(X))$ com $L(t)$ injetor para cada $t \in [\tilde{t}_0, t_0]$, e $c \in [0, 1[$ tais que $\|L(t) \circ A(t, \varphi) - I_X\| \leq c$ $\forall (t, \varphi) \in [\tilde{t}_0, t_0] \times \mathcal{G}$ (I_X é a identidade de X) e a função $\tilde{\mathcal{S}} : [0, r] \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$\varepsilon \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(\varepsilon) = \sup_{\substack{t \in [\tilde{t}_0, t_0] \\ \varphi \in \mathcal{G}}} SV_{[-r, -r+\varepsilon]}[\widetilde{\mu}_\varphi(t, \cdot)]$$

é contínua em $\varepsilon = 0$, ou seja, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \tilde{\mathcal{S}}(\varepsilon) = 0$ (aqui, $\widetilde{\mu}_\varphi(t, \theta) = \mu_\varphi(t, \theta)$ para $\theta \in]-r, 0]$ e $\widetilde{\mu}_\varphi(t, -r) = \mu_\varphi(t, -r^+)$).

Observação 1. Em geral para $[a, b] \subset \mathbf{R}$ e Y espaço de Banach, $SV([a, b], Y) \not\subset G([a, b], Y)$, o que no nosso caso ($[a, b] = [-r, 0], Y = \mathcal{L}(X)$) faz com que pudéssemos ter $\mu_\varphi(t, \cdot) \in SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ sem ter salto em $\theta = -r$. Assim sendo, isso foi exigido na condição $(\widetilde{3})$. Caso $Y \not\hookrightarrow c_o(\mathbf{N})$ (como os espaços reflexivos ou os de dimensão finita, por exemplo) então se demonstra que $SV([a, b], Y) \subset G([a, b], Y)$.

Lema 1. Seja $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^+$ então

$$\forall t \in [\tilde{t}_0, t_0], \psi, \nu \in \mathcal{G} \text{ e } p \in X \text{ existe } \int_0^1 A(t, \xi\psi + (1-\xi)\nu) p d\xi.$$

Prova: Para cada $\xi \in [0, 1]$ temos $A(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)p = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)p$ onde $A_n(t, \varphi)p = \mu_\varphi(t, -r)p - \mu_\varphi(t, -r + \frac{1}{n})p = D_2f(t, \varphi)\chi_{[-r, -r + \frac{1}{n}]}p$ (pelo teorema 1.1).

Logo, $A_n(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)p = D_2f(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)\chi_{[-r, -r + \frac{1}{n}]}p$ é integrável em $\xi \in [0, 1]$ pois D_f é contínua na 2a. variável.

Então $A(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)p$ é mensurável em $\xi \in [0, 1]$ (limite simples de mensuráveis), logo $\|A(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)p\|$ é mensurável em $\xi \in [0, 1]$.

Temos ainda $\|A(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)p\| \leq \|D_2f\| \cdot \|p\|$ ($\|D_2f\|$ dado em (2)).

Assim, concluindo que $\xi \in [0, 1] \rightarrow \|A(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)p\| \in \mathbf{R}_+$ é integrável, temos por fim a integrabilidade de $A(t, \xi\psi + (1 - \xi)\nu)p$. ■

Teorema 1. Para cada $\tilde{t}_0 < t_0$ temos:

Dados $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^+$, $g \in Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ então existe um único

$x = x(\varphi, f, g) \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)$ solução de (N) para $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Prova: Chamemos de $E = G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)$ que é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\lambda$ (para $\lambda \geq 0$) dada por $\|x\|_\lambda = \sup_{t \in [\tilde{t}_0 - r, t_0]} e^{\lambda t} \|x(t)\|$ pois essa norma é equivalente à norma do supremo.

Seja $0 < \delta < r$ com $t_0 - \tilde{t}_0 = k\delta$, $k \in \mathbf{N}$ tal que $\int_{a-\delta}^a m_g(t)dt < \frac{1-\epsilon}{3K} \forall a \in [\tilde{t}_0 + \delta, t_0]$ (m_g dado em (2)_{L1} para $g \in Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}$ e c e $K = \|L\|$ dados em (3) para $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^+$).

Vamos definir primeiramente $\tilde{T}_1 : E \rightarrow E$ por

$$(\tilde{T}_1 x)(t) = \varphi(t - t_0) \quad \text{para } t_0 - r \leq t \leq t_0$$

$$(\tilde{T}_1 x)(t - r) = x(t - r) + L(t) \cdot [f(t, x_t) - f(t_0, \varphi) + \varphi(0) + \int_{t_0}^t g(s, x_s)ds - \varphi(t - t_0)]$$

para $t_0 - \delta \leq t < t_0$

$$\text{e } (\tilde{T}_1 x)(t - r) = 0 \quad \text{para } \tilde{t}_0 \leq t < t_0 - \delta$$

Por (0)₊ e (3) (que diz que $L \in G^+([\tilde{t}_0, t_0], \mathcal{L}(X))$) vemos que $\tilde{T}_1(E) \subset E$.

Para $x, y \in E$ e $t_0 - \delta \leq t < t_0$ temos:

$$\tilde{T}_1 x(t-r) - \tilde{T}_1 y(t-r) = x(t-r) - y(t-r) + L(t)[f(t, x_t) - f(t, y_t) + \int_{t_0}^t (g(s, x_s) - g(s, y_s))ds]$$

Mas

$$\begin{aligned} f(t, x_t) - f(t, y_t) &= \int_0^1 D_2 f(t, \xi x_t + (1-\xi)y_t)(x_t - y_t)d\xi \\ &= \int_0^1 \int_{-r}^0 d_\theta \mu_{\xi x_t + (1-\xi)y_t}(t, \theta)(x(t+\theta) - y(t+\theta))d\xi \\ &= \int_0^1 \int_{-r}^0 d_\theta [\chi_{\{-r\}} A(t, \xi x_t + (1-\xi)y_t)(\theta) + \tilde{\mu}_{\xi x_t + (1-\xi)y_t}(t, \theta)](x(t+\theta) - y(t+\theta))d\xi \\ &= \int_0^1 (-A(t, \xi x_t + (1-\xi)y_t)(x(t-r^+) - y(t-r^+)) \\ &\quad + \int_{-r}^0 d_\theta \tilde{\mu}_{\xi x_t + (1-\xi)y_t}(t, \theta)(x(t+\theta) - y(t+\theta)))d\xi \\ &= - \int_0^1 A(t, \xi x_t + (1-\xi)y_t)(x(t-r) - y(t-r))d\xi + \int_{-r}^0 d_\theta \tilde{U}(x_t, y_t, t, \theta)(x(t+\theta) - y(t+\theta)) \end{aligned}$$

Combinando o lema 2.1 e o lema 1 vemos que as integrais acima e $\tilde{U}(\nu, \psi, t, \theta) = \int_0^1 \tilde{\mu}_{\xi \nu + (1-\xi)\psi}(t, \theta)d\xi$ existem e vale para $\tilde{U}$ a igualdade análoga à dada para U no lema 2.1, a qual usamos acima.

Também vamos ter $SV_{[-r, -r+\epsilon]}[\tilde{U}(\nu, \psi, t, \cdot)] \leq \tilde{S}(\epsilon)$ ($\tilde{S}$ dado em $(\tilde{\mathfrak{B}})$). Aqui vemos também a importância de estarmos no contexto $E = G^+([t_0 - r, t_0], X)$ pois nesse caso $x(t-r^+) = x(t-r)$. Assim:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 x(t-r) - \tilde{T}_1 y(t-r) &= \int_0^1 [I_X - L(t).A(t, \xi x_t + (1-\xi)y_t)](x(t-r) - y(t-r))d\xi + \\ &+ L(t)[\int_{-r}^0 d_\theta \tilde{U}(x_t, y_t, t, \theta)(x(t+\theta) - y(t+\theta)) + \int_{t_0}^t \int_0^1 D_2 g(s, \xi x_s + (1-\xi)y_s)(x_s - y_s)d\xi ds] \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_1 x(t-r) - \tilde{T}_1 y(t-r)\| &\leq c\|x(t-r) - y(t-r)\| + \\ &+ K\| \int_{-r}^{-r+\epsilon} d_\theta \tilde{U}(x_t, y_t, t, \theta)(x(t+\theta) - y(t+\theta)) \| + \\ &+ K\| \int_{-r+\epsilon}^0 d_\theta \tilde{U}(x_t, y_t, t, \theta)(x(t+\theta) - y(t+\theta)) \| + K \int_t^{t_0} m_g(s)\|x_s - y_s\|ds \end{aligned}$$

$$e^{\lambda(t-r)} \|\tilde{T}_1 x(t-r) - \tilde{T}_1 y(t-r)\| \leq c\|x-y\|_\lambda + Ke^{-\lambda r} [\tilde{S}(\varepsilon)e^{\lambda r}\|x-y\|_\lambda + \\ + \|D_2 f\|e^{\lambda r}e^{-\lambda\varepsilon}\|x-y\|_\lambda] + K \int_t^{t_0} m_g(s)ds\|x-y\|_\lambda$$

(repare que $e^{\lambda(t-r)}\|x_s - y_s\| \leq \|x-y\|_\lambda$).

Assim:

$$\|\tilde{T}_1 x - \tilde{T}_1 y\|_\lambda \leq (c + K\tilde{S}(\varepsilon) + K\|D_2 f\|e^{-\lambda\varepsilon} + \frac{1-c}{3}).\|x-y\|_\lambda$$

e podemos encontrar $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tal que $\tilde{T}_1$ seja contração em E com a norma $\|\cdot\|_\lambda$. O ponto fixo de $\tilde{T}_1$, $x_1 \in E$, é a única solução de (N) em $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$ com $x_{1t_0} = \varphi$ (lembrar que $L(t)$ é injetor).

Definindo $x_0 \in E$ por $x_0(t) = \varphi(t - t_0)$ para $t_0 - r \leq t \leq t_0$ e $x_0(t) = 0$ para $\tilde{t}_0 - r \leq t < t_0 - r$ podemos formar a seqüência de contrações $(\tilde{T}_j)_{1 \leq j \leq k}$ onde para cada $j = 1, 2, \dots, k$ temos: $\tilde{T}_j : E \rightarrow E$ é definida por recorrência por:

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_j x)(t) &= x_{j-1}(t) \quad \text{para } t_0 - r - (j-1)\delta \leq t \leq t_0 \\ (\tilde{T}_j x)(t-r) &= x(t-r) + L(t)[f(t, x_t) - f(t_0, \varphi) + \varphi(0) + \int_{t_0}^{t_0-(j-1)\delta} g(s, (x_{j-1})_s)ds \\ &\quad + \int_{t_0-(j-1)\delta}^t g(s, x_s)ds - x_{j-1}(t)] \quad \text{para } t_0 - j\delta \leq t < t_0 - (j-1)\delta \\ (\tilde{T}_j x)(t-r) &= 0 \quad \text{se } \tilde{t}_0 \leq t < t_0 - j\delta \end{aligned}$$

Para $j = 1$, já mostramos que para $\lambda \geq 0$ apropriado temos $\tilde{T}_1$ é contração em E com a norma $\|\cdot\|_\lambda$. Supondo, por indução, que $\tilde{T}_{j-1}$ é contração em E com a mesma norma $\|\cdot\|_\lambda$ e que tem ponto fixo $x_{j-1} \in E$, fica fácil provar que $\tilde{T}_j$ também é contração em E com essa norma $\|\cdot\|_\lambda$. Isso segue os passos da demonstração de que $\tilde{T}_1$ é contração, pois para $t_0 - j\delta \leq t < t_0 - (j-1)\delta$ temos:

$$\tilde{T}_j x(t-r) - \tilde{T}_j y(t-r) = x(t-r) - y(t-r) + L(t)[f(t, x_t) - f(t, y_t) + \int_{t_0-(j-1)\delta}^t (g(s, x_s) - g(s, y_s))ds]$$

e assim

$$\|\tilde{T}_j x - \tilde{T}_j y\|_\lambda \leq (c + K\tilde{S}(\varepsilon) + K\|D_2 f\|e^{-\lambda\varepsilon} + \frac{1-c}{3}).\|x-y\|_\lambda$$

Verificamos então que $x_{j|[t_0-r-(j-1)\delta, t_0]} = x_{j-1|[t_0-r-(j-1)\delta, t_0]}$ $j = 1, 2, \dots, k$ e cada $x_{j|[t_0-r-j\delta, t_0]}$ é a única solução de (N) em $[t_0 - j\delta, t_0]$ com $x_{t_0} = \varphi$, ou seja, $x_k = x(\varphi, f, g) \in G^+([t_0 - r, t_0], X)$ é a única solução regradada de (N) em $[\tilde{t}_0, t_0]$ com $x_{t_0} = \varphi$. ■

Corolário 1. Por $t_0 \in \mathbf{R}$, definamos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{X}}_{t_0}^+ &= \{f :]-\infty, t_0] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid f|_{[\tilde{t}_0, t_0] \times \mathcal{G}_0^+} \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^+ \forall \tilde{t}_0 < t_0\} \\ \tilde{Y}_{t_0} &= \{g :]-\infty, t_0] \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid g|_{[\tilde{t}_0, t_0] \times \mathcal{G}_0^+} \in Y_{[\tilde{t}_0, t_0]} \forall \tilde{t}_0 < t_0\}\end{aligned}$$

então dados $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{t_0}^+$, $g \in \tilde{Y}_{t_0}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ existe um único $x = x(\varphi, f, g) \in G^+([-\infty, t_0], X)$ solução de (N) para $t \leq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Prova. Análoga à prova do Corolário 2.1.

Corolário 2. Definamos $\tilde{\mathcal{X}}^+ = \{f \in \mathcal{X}^+ \mid \forall t_0 \in \mathbf{R} \text{ temos } f|_{]-\infty, t_0] \times \mathcal{G}_0^+} \in \tilde{\mathcal{X}}_{t_0}^+\}$ ($\mathcal{X}^+$ dado na observação 2.5); então dados $f \in \tilde{\mathcal{X}}^+$, $g \in Y$, $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ temos que existe um único $x = x(t_0, \varphi, f, g) \in G^+(\mathbf{R}, X)$ solução de (N) para todo $t \in \mathbf{R}$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Repare que para $f \in \tilde{\mathcal{X}}^+$ temos as propriedades (3) e $(\widetilde{3})$ satisfeitas para cada restrição da primeira variável a um intervalo fechado.

Observação 2. O teorema 1 e os corolários 1 e 2 são válidos para a equação $(\hat{N})$ (dada na observação 1.3). Na demonstração do teorema, nesse caso, omitimos as parcelas $-f(t_0, \varphi) + \varphi(0)$ de definição das contrações $\widetilde{T}_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$). Repare que a equação $(\hat{N})$ com dado inicial $\varphi \in \mathcal{G}^+$ tem a mesma solução da equação (N) com dado inicial $\varphi_j \in \mathcal{G}^+$, onde $\varphi_j(\theta) = \varphi(\theta)$ para $-r \leq \theta < 0$ e $\varphi_j(0) = f(t_0, \varphi)$.

Observação 3. Seja $\tilde{\mathcal{X}}_{[t_0, t_0]}^c = \{f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[t_0, t_0]}^+ \mid f \text{ satisfaz } (0)_c \text{ e } (\widetilde{3})_c\}$

onde a propriedade $(0)_c$ é definida na observação 2.4 e a propriedade $(\widetilde{3})_c$ diz que o operador $L \in G^+([\widetilde{t}_0, t_0], \mathcal{L}(X))$ dado em $(\widetilde{3})$ deve ser contínuo.

Temos que: se $f \in \widetilde{\mathcal{X}}_{[\widetilde{t}_0, t_0]}^c$, $g \in Y_{[\widetilde{t}_0, t_0]}$ e $\varphi \in \mathcal{C}$ então a única solução regradada contínua à direita de (N) em $[\widetilde{t}_0, t_0]$ com $x_{t_0} = \varphi$ é contínua.

Isso pois se considerarmos no teorema 1, para $j = 1, 2, \dots, k$, os subconjuntos fechados de E :

$$E_j^c = \{x \in E \mid x(t) = x_{j-1}(t) \text{ para } t_0 - (j-1)\delta - r \leq t \leq t_0$$

$$\text{e } x|_{[t_0 - j\delta - r, t_0]} \in C([t_0 - j\delta - r, t_0], X)\},$$

por $(0)_c$ e $(\widetilde{3})_c$ ($L \in C([\widetilde{t}_0, t_0], \mathcal{L}(X))$) vemos que $\widetilde{T}_j(E_j^c) \subset E_j^c$ assim cada ponto fixo de $\widetilde{T}_j$ está em E_j^c ($x_j \in E_j^c$) $j = 1, 2, \dots, k$ e então

$$x_k = x(\varphi, f, g) \in E_k^c \subset C([\widetilde{t}_0 - r, t_0], X).$$

Observação 4. Sejam: $\widetilde{\mathcal{X}}_{t_0}^c = \{f \in \widetilde{\mathcal{X}}_{t_0}^+ \mid \forall \widetilde{t}_0 < t_0 \text{ temos } f|_{[\widetilde{t}_0, t_0] \times \mathcal{G}_0^+} \in \widetilde{\mathcal{X}}_{[\widetilde{t}_0, t_0]}^c\}$

(para $t_0 \in \mathbf{R}$)

e $\widetilde{\mathcal{X}}^c = \widetilde{\mathcal{X}}^+ \cap \mathcal{X}^c$ ($\mathcal{X}^c$ dado na observação 2.5).

Para $t_0 \in \mathbf{R}$, se $f \in \widetilde{\mathcal{X}}_{t_0}^c$, $g \in \widetilde{Y}_{t_0}$ e $\varphi \in \mathcal{C}$, a única solução $x(\varphi, f, g)$ dada no corolário 1 é contínua.

Também, para $f \in \widetilde{\mathcal{X}}^c$, $g \in Y$, $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{C}$ temos que a única solução $x(t_0, \varphi, f, g)$ dada no corolário 2 é contínua, ou seja, $x(t_0, \varphi, f, g) \in C(\mathbf{R}, X)$.

Definição 1. O operador de evolução $\tau(t, t_0)$ para t e t_0 quaisquer.

Supondo $f \in \tilde{\mathcal{X}}^+$, $g \in Y$, definimos para cada $t, t_0 \in \mathbf{R}$, o operador

$$\tau(t, t_0) : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+ \text{ por } \tau(t, t_0)\varphi = x_t(t_0, \varphi, f, g) \in \mathcal{G}^+$$

onde $x(t_0, \varphi, f, g)$ é dada no corolário 2.

Facilmente conclui-se que a família $\{\tau(t, t_0) \mid t, t_0 \in \mathbf{R}\}$ é de evolução, ou seja,

$$\tau(t, s) \circ \tau(s, t_0) = \tau(t, t_0) \quad \forall t_0, s, t \in \mathbf{R}$$

$$\text{e } \tau(s, s) = I_{\mathcal{G}^+} \quad (\text{identidade de } \mathcal{G}^+)$$

Observação 5. Se $f \in \tilde{\mathcal{X}}^c$ então $\tau(t, t_0)(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ (ver observação 4).

Proposição 1. O operador $\tau(t, t_0)$ é contínuo $\forall t, t_0 \in \mathbf{R}$.

Prova. Já vimos que $\tau(t, t_0)$ é contínuo para $t \geq t_0$ na proposição 3.1. Para $t < t_0$ isso segue do teorema 2 que mostraremos a seguir.

Teorema 2. Dados $\tilde{t}_0 < t_0$, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^+ \times \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^c \times Y_{[\tilde{t}_0, t_0]} &\longrightarrow G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X) \\ (\varphi, f, g) &\longrightarrow x(\varphi, f, g) \end{aligned}$$

é contínua.

Prova. Vamos mostrar que essa aplicação (definida pelo teorema 1) é contínua em $(\varphi, f, g) \in \mathcal{G}^+ \times \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^c \times Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}$, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$ nós vamos encontrar $\delta > 0$ tal que se $\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta$, $\|f - \bar{f}\|_1 < \delta$, $\|g - \bar{g}\| < \delta$ então $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$ onde aqui $x = x(\varphi, f, g)$ e $\bar{x} = x(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g})$.

Seja a princípio $0 < \delta < \frac{1}{8}$ e $\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta$, $\|f - \bar{f}\|_1 < \delta$ e $\|g - \bar{g}\| < \delta$ e seja $M > 0 \mid \|\varphi\| < M$, $\|\bar{\varphi}\| < M$, $\|f\|_1 < M$, $\|\bar{f}\|_1 < M$, $\|g\| < M$, $\|\bar{g}\| < M$ e $\|x\| < M$.

Para $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$ temos:

$$\begin{aligned} x(t) - \bar{x}(t) &= f(t, x_t) - \bar{f}(t, x_t) + \bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t) + \varphi(0) - \bar{\varphi}(0) + \\ &\quad + f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi}) + f(t_0, \bar{\varphi}) - \bar{f}(t_0, \bar{\varphi}) + \\ &\quad + \int_{t_0}^t [g(s, x_s) - \bar{g}(s, x_s)] ds + \int_{t_0}^t [\bar{g}(x, x_s) - \bar{g}(s, \bar{x}_s)] ds \\ &= \Gamma(t) + \bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t) \end{aligned}$$

(onde definimos $\Gamma(t) = f(t, x_t) - \bar{f}(t, x_t) + \varphi(0) - \bar{\varphi}(0) + f(t_0, \varphi) - \bar{f}(t_0, \bar{\varphi}) + \int_{t_0}^t [g(s, x_s) - \bar{g}(s, \bar{x}_s)] ds$)

e temos

$$\begin{aligned} |\Gamma(t)| &\leq \|f - \bar{f}\|_1 (\|x\| + 1) + \|\varphi - \bar{\varphi}\| + |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \|f - \bar{f}\|_1 (\|\bar{\varphi}\| + 1) \\ &\quad + \|g - \bar{g}\| (\|x\| + 1) + \int_t^{t_0} m_{\bar{g}}(s) (\|\varphi - \bar{\varphi}\| + \|x - \bar{x}\|^{[s-r, t_0-r]}) ds \\ &\leq \delta(M+1) + \delta + |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \delta(M+1) + \delta(M+1) + \delta M \\ &\quad + \int_t^{t_0} m_{\bar{g}}(s) \|x - \bar{x}\|^{[s-r, t_0-r]} ds \end{aligned}$$

(onde $\|y\|^{[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} |y(t)|$ para $[a,b] \subset [\tilde{t}_0 - r, t_0]$).

Agora

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, x_t) - \bar{f}(t, \bar{x}_t) &= \int_{-r}^0 d_\theta \tilde{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) (x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)) \\ &\quad - \int_0^1 \bar{A}(t, \xi x_t + (1-\xi)\bar{x}_t) (x(t-r) - \bar{x}(t-r)) d\xi \\ &= \int_{-r}^0 d_\theta \tilde{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) (x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)) - \int_0^1 A(t, \xi x_t + (1-\xi)\bar{x}_t) (x(t-r) - \bar{x}(t-r)) d\xi \\ &\quad + \int_0^1 [A(t, \xi x_t + (1-\xi)\bar{x}_t) - \bar{A}(t, \xi x_t + (1-\xi)\bar{x}_t)] (x(t-r) - \bar{x}(t-r)) d\xi \end{aligned}$$

(para $\bar{f} \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^+$ temos $\tilde{U}$ e $\bar{A}$ dados, como no teorema 1 temos $\tilde{U}$ e A para f).

Se colocamos $\tilde{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) = -I_X$ para $\theta > 0$; teremos

$$\int_{-r}^0 d_\theta \tilde{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) (x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)) - (x(t) - \bar{x}(t)) = \int_{-r}^{0^+} d_\theta \tilde{U}(x_t, \bar{x}_t, t, \theta) (x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta))$$

(quando $t = t_0$ fazemos $x(t_0^+) = x(t_0)$ e $\bar{x}(t_0^+) = \bar{x}(t_0)$).

Assim:

$$\begin{aligned}
0 = \Gamma(t) &+ \int_{-r}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t+\theta) - \overline{x}(t+\theta)) \\
&- \int_0^1 A(t, \xi x_t + (1-\xi)\overline{x}_t)(x(t-r) - \overline{x}(t-r))d\xi \\
&+ \int_0^1 [A(t, \xi x_t + (1-\xi)\overline{x}_t) - \overline{A}(t, \xi x_t + (1-\xi)\overline{x}_t)](x(t-r) - \overline{x}(t-r))d\xi
\end{aligned}$$

Aplicando $L(t)$ (dado em $(\widetilde{3})$ para f) e somando $x(t-r) - \overline{x}(t-r)$ temos:

$$\begin{aligned}
x(t-r) - \overline{x}(t-r) &= L(t)\Gamma(t) + L(t) \int_{-r}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t+\theta) - \overline{x}(t+\theta)) + \\
&+ \int_0^1 [I_X - L(t) \circ A(t, \xi x_t + (1-\xi)\overline{x}_t)](x(t-r) - \overline{x}(t-r))d\xi \\
&+ L(t) \int_0^1 [A(t, \xi x_t + (1-\xi)\overline{x}_t) - \overline{A}(t, \xi x_t + (1-\xi)\overline{x}_t)](x(t-r) - \overline{x}(t-r))d\xi
\end{aligned}$$

Repare que para $\psi \in \mathcal{G}$ temos:

$$\|A(t, \psi) - \overline{A}(t, \psi)\| \leq SV[\mu_\psi(t, \cdot) - \overline{\mu}_\psi(t, \cdot)] \leq \|D_2 f - D_2 \overline{f}\| \leq \|f - \overline{f}\|_1 < \delta$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\|x(t-r) - \overline{x}(t-r)\| &\leq K|\Gamma(t)| + K \left| \int_{-r}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t+\theta) - \overline{x}(t+\theta)) \right| + \\
&+ c\|x(t-r) - \overline{x}(t-r)\| + K\delta\|x(t-r) - \overline{x}(t-r)\|
\end{aligned}$$

($K = \|L\|$ e $0 \leq c < 1$ dados em $(\widetilde{3})$ para f).

Se então tomamos $0 < \delta < \frac{1}{8}$ e $\delta < \frac{\hat{c}-c}{K}$ com $\hat{c} \mid c < \hat{c} < 1$ teremos:

$$(1 - \hat{c})\|x(t-r) - \overline{x}(t-r)\| \leq K|\Gamma(t)| + K \left| \int_{-r}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t+\theta) - \overline{x}(t+\theta)) \right|$$

Para $t_0 - r \leq t < t_0$

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t+\theta) - \overline{x}(t+\theta)) &= \int_{-r}^{t_0-r-t} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t+\theta) - \overline{x}(t+\theta)) \\
&+ \int_{t_0-r-t}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(\varphi(t-t_0+\theta) - \overline{\varphi}(t-t_0+\theta))
\end{aligned}$$

e para $\eta > 0 \mid -r + \eta < t_0 - r - t$ e $\lambda > 0$ temos:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-r}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t + \theta) - \overline{x}(t + \theta)) \right| \\
& \leq \left| \int_{-r}^{-r+\eta} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta) e^{-\lambda t} e^{-\lambda \theta} e^{\lambda(t+\theta)} (x(t + \theta) - \overline{x}(t + \theta)) \right| + \\
& + \left| \int_{-r+\eta}^{t_0-r-t} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta) e^{-\lambda t} e^{-\lambda \theta} e^{\lambda(t+\theta)} (x(t + \theta) - \overline{x}(t + \theta)) \right| \\
& + (\|D_2 \overline{f}\| + 1) \cdot \|\varphi - \overline{\varphi}\| \\
& \leq e^{-\lambda t} e^{\lambda r} \widetilde{\mathcal{S}}(\eta) \|x - \overline{x}\|_\lambda^{[t-r, t_0-r]} \\
& + e^{-\lambda t} e^{-\lambda(-r+\eta)} \|D_2 \overline{f}\| \cdot \|x - \overline{x}\|_\lambda^{[t-r, t_0-r]} + (M + 1)\delta
\end{aligned}$$

(aqui $\|y\|_\lambda^{[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} e^{\lambda t} |y(t)|$ para $[a, b] \subset [\widetilde{t}_0 - r, t_0]$; $\widetilde{\mathcal{S}}$ é dado em $(\widetilde{3})$ para $\overline{f}$).

Para $\widetilde{t}_0 \leq t < t_0 - r$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-r}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t + \theta) - \overline{x}(t + \theta)) \right| \\
& \leq \left| \int_{-r}^{-r+\eta} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta) e^{-\lambda t} e^{-\lambda \theta} e^{\lambda(t+\theta)} (x(t + \theta) - \overline{x}(t + \theta)) \right| + \\
& + \left| \int_{-r+\eta}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta) e^{-\lambda t} e^{-\lambda \theta} e^{\lambda(t+\theta)} (x(t + \theta) - \overline{x}(t + \theta)) \right| \\
& \leq e^{-\lambda t} e^{\lambda r} \widetilde{\mathcal{S}}(\eta) \|x - \overline{x}\|_\lambda^{[t-r, t_0-r]} + e^{-\lambda t} e^{-\lambda(-r+\eta)} (\|D_2 \overline{f}\| + 1) \|x - \overline{x}\|_\lambda^{[t-r, t_0-r]}
\end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que, para $\widetilde{t}_0 \leq t \leq t_0$ temos:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-r}^{0^+} d_\theta \widetilde{U}(x_t, \overline{x}_t, t, \theta)(x(t + \theta) - \overline{x}(t + \theta)) \right| \leq \\
& \leq e^{-\lambda(t-r)} (\widetilde{\mathcal{S}}(\eta) + e^{-\lambda \eta} (\|D_2 \overline{f}\| + 1)) \|x - \overline{x}\|_\lambda^{[t-r, t_0-r]} + (M + 1)\delta
\end{aligned}$$

Tomando $\eta > 0$ apropriadamente pequeno tal que $\widetilde{\mathcal{S}}(\eta) < \frac{1-\hat{c}}{8K}$ ($\widetilde{\mathcal{S}}$ dado em $(\widetilde{3})$ para f) temos

$$\widetilde{\mathcal{S}}(\eta) \leq \widetilde{\mathcal{S}}(\eta) + \|f - \overline{f}\|_1 \leq \frac{1-\hat{c}}{8K} + \delta \leq \frac{1-\hat{c}}{4K}$$

fazendo então $\delta < \frac{1-\hat{c}}{8K}$.

Tomando agora $\lambda > 0$ tal que $e^{-\lambda\eta}(M+1) < \frac{1-\hat{c}}{4K}$ podemos escrever que

$$\begin{aligned} \|x(t-r) - \bar{x}(t-r)\| &\leq \frac{K}{1-\hat{c}}|\Gamma(t)| + \frac{K}{1-\hat{c}}[e^{-\lambda(t-r)}(\tilde{\mathcal{S}}(\eta) + \\ &\quad + e^{-\lambda\eta}(M+1))\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} + (M+1)\delta] \\ &\leq \frac{K}{1-\hat{c}}|\Gamma(t)| + \frac{1}{2}e^{-\lambda(t-r)}\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} + \frac{K(M+1)\delta}{1-\hat{c}} \\ &\leq \frac{K}{1-\hat{c}}[4\delta(M+1) + |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \int_t^{t_0} m_{\bar{g}}(s)\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[s-r, t_0-r]} ds] \\ &\quad + \frac{1}{2}e^{-\lambda(t-r)}\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} + \frac{K(M+1)\delta}{1-\hat{c}} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} e^{\lambda(t-r)}\|x(t-r) - \bar{x}(t-r)\| &\leq \frac{5K\delta(M+1)}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-r)} + \frac{K}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-r)}|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \\ &\quad + \frac{K}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-r)} \int_t^{t_0} m_{\bar{g}}(s)\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[s-r, t_0-r]} ds + \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} \end{aligned}$$

e para qualquer $\tilde{t}$, $t \leq \tilde{t} \leq t_0$ vale que $e^{\lambda(\tilde{t}-r)}\|x(\tilde{t}-r) - \bar{x}(\tilde{t}-r)\|$ é menor ou igual ao 2º membro da desigualdade acima e então podemos dizer que

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} &\leq \frac{5K\delta(M+1)}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-r)} + \frac{K}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-r)}|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \\ &\quad + \frac{K}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-r)} \int_t^{t_0} m_{\bar{g}}(s)\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[s-r, t_0-r]} ds + \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} &\leq \frac{10K\delta(M+1)}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-r)} + \frac{2Ke^{\lambda(t_0-r)}}{1-\hat{c}}|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| \\ &\quad + \frac{2K}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-r)} \int_t^{t_0} m_{\bar{g}}(s)\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[s-r, t_0-r]} ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} &\leq e^{-\lambda(\tilde{t}_0-r)}\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[t-r, t_0-r]} \leq \frac{10K\delta(M+1)}{1-\hat{c}}e^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)} \\ &\quad + \frac{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}}|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| + \frac{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} \int_t^{t_0} m_{\bar{g}}(s)\|x - \bar{x}\|_{\lambda}^{[s-r, t_0-r]} ds \end{aligned}$$

Então $\gamma(\sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \|x - \bar{x}\|^{[-\sigma-r, t_0-r]}$ para $-t_0 \leq \sigma \leq -\tilde{t}_0$ é tal que

$$\begin{aligned} \gamma &\in L_\infty([-t_0, -\tilde{t}_0]) \quad \text{e} \quad \gamma(\sigma) \leq \alpha + \int_{-t_0}^{\sigma} \beta(\tau) \gamma(\tau) d\tau \\ \text{com } \alpha &= \frac{10(M+1)Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} \delta + \frac{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} |f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| \\ \text{e } \beta(\tau) &= \frac{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} m_{\bar{g}}(-\tau) \quad \text{para } -t_0 \leq \tau \leq -\tilde{t}_0 \\ (\text{portanto } \beta &\in L_1([-t_0, -\tilde{t}_0]) \text{ e } \beta(\tau) \geq 0) \end{aligned}$$

Podemos então aplicar Gronwall na desigualdade acima (segundo [H-2], Corolário 15)

e obter:

$$\|x - \bar{x}\|^{[t-r, t_0-r]} \leq \alpha \cdot \exp\left[\frac{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} \int_t^{t_0} m_{\bar{g}}(s) ds\right]$$

assim

$$\|x - \bar{x}\|^{[\tilde{t}_0-r, t_0-r]} \leq \alpha \cdot \exp\left[\frac{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} \cdot M\right]$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, se tomamos $\delta > 0$, $\delta < \frac{1}{8}$, $\delta < \frac{\hat{c}-c}{K}$, $\delta < \frac{1-\hat{c}}{8K}$ tal que $\delta < \varepsilon$ e ainda tal que $\delta \cdot \frac{10(M+1)Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} \cdot \exp\left[\frac{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} M\right] < \frac{\varepsilon}{2}$ e tal que se $\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta$ então $|f(t_0, \varphi) - f(t_0, \bar{\varphi})| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1-\hat{c}}{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}} \cdot \frac{1}{\exp\left[\frac{2Ke^{\lambda(t_0-\tilde{t}_0)}}{1-\hat{c}} M\right]}$ teremos que

$$\text{se } \|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta, \quad \|f - \bar{f}\|_1 < \delta \quad \text{e} \quad \|g - \bar{g}\| < \delta$$

$$\text{então } \|x - \bar{x}\|^{[\tilde{t}_0-r, t_0-r]} < \varepsilon \quad \text{e como } \|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta < \varepsilon$$

$$\text{teremos } \|x - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Vamos, a seguir, ver que, para cada $\tilde{t}_0 < t_0$, a aplicação do teorema 2 é de classe C^k em relação a $\varphi \in \mathcal{G}^+$ se fixamos $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k$ e $g \in Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k$,

$$\text{com } \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k \stackrel{\text{def.}}{=} \{f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^+ \mid \text{vale (1)}^k \text{ e (2)}^k\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

onde as propriedades $(1)^k$ e $(2)^k$, bem como o conjunto $Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k$ são dados no §4.

Colocamos $\tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^\infty = \bigcap_{k=0}^\infty \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k$.

Primeiramente temos o:

Teorema 3. Para $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[t_0, t_0]}^k$ e $g \in Y_{[t_0, t_0]}^k$ fixos ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) a função

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \mathcal{G}^+ \times G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X) &\longrightarrow G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X) \\ (\varphi, x) &\longrightarrow \tilde{T}(\varphi, x) \end{aligned}$$

dada por

$$\tilde{T}(\varphi, x)(t - r) = x(t - r) + L(t)[f(t, x_t) + \int_{t_0}^t g(s, x_s)ds - x_\varphi(t) + \varphi(0) - f(t_0, \varphi)]$$

para $\tilde{t}_0 - r \leq t - r < t_0 - r$ ($L(t)$ dado na condição (3) para f)

$$\text{e } \tilde{T}(\varphi, x)(t_0 - r) = \varphi(-r)$$

é de classe C^k .

Aqui estamos considerando na definição de $\tilde{T}$:

$$\begin{cases} x_t(\theta) = x_\varphi(t + \theta) = x(t + \theta) & \text{se } t + \theta < t_0 - r \\ x_t(\theta) = x_\varphi(t + \theta) = \varphi(t + \theta - t_0) & \text{se } t + \theta \geq t_0 - r \end{cases}$$

$$(x_\varphi \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)).$$

Prova. A prova segue os passos do teorema 4.1. Basta provar que $\tilde{T}^*$ é de classe C^k , onde $\tilde{T}^*(\varphi, x)(t - r) = L(t)[f(t, x_t) + \int_{t_0}^t g(s, x_s)ds]$ pois as parcelas restantes, a menos de $f(t_0, \varphi)$, que é C^k em φ e independe de x , são C^∞ em relação a φ e a x .

Vamos usar a indução em k .

Para $k = 1$, como no teorema 4.1, concluímos que para $t - r \in [\tilde{t}_0 - r, t_0 - r]$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{T}^*(\varphi, x)}{\partial x} \cdot \Delta x \right)(t - r) &= L(t)[D_2 f(t, x_t) \Delta x_t^0 + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \Delta x_s^0 ds] \text{ e} \\ \left(\frac{\partial \tilde{T}^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi \right)(t - r) &= L(t) \cdot [D_2 f(t, x_t) \Delta \varphi_0^t + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \Delta \varphi_s^s ds] \end{aligned}$$

onde aqui temos

$$\begin{aligned} \Delta x_t^0(\theta) &= 0 & \text{se } t + \theta \geq t_0 - r \\ \Delta x_t^0(\theta) &= \Delta x(t + \theta) & \text{se } t + \theta < t_0 - r \\ \Delta \varphi_0^t(\theta) &= \Delta \varphi(t - t_0 + \theta) & \text{se } t + \theta \geq t_0 - r \\ \Delta \varphi_0^t(\theta) &= 0 & \text{se } t + \theta < t_0 - r \end{aligned}$$

As provas de que estas são realmente as derivadas de $\tilde{T}^*$ e de que elas são contínuas em φ e em x são completamente análogas às do teorema 4.1.

Lembrar que $L \in G^+([\tilde{t}_0, t_0], \mathcal{L}(X))$ logo $K = \sup_{t \in [\tilde{t}_0, t_0]} \|L(t)\| < \infty$.

Também, por um raciocínio análogo ao do lema 4.1, temos que para $f, (0)_+, (1)^1$ e $(2)^1$ implicam em $(0)_+^1$ (ou seja, para $x, \Delta x \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)$ a função $t \in [\tilde{t}_0, t_0] \rightarrow D_2 f(t, x_t) \cdot \Delta x_t \in X$ é regradada e contínua à direita).

Supondo a propriedade válida para $k \in \mathbb{N}^*$, mostramos em seguida que se $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^{k+1}$ e $g \in Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}^{k+1}$ então $\tilde{T}^*$ é de classe C^{k+1} em relação a φ e a x . Pela hipótese de indução, $\tilde{T}^*$ é de classe C^k em relação a φ e a x e vale, para $\tilde{t}_0 - r \leq t - r < t_0 - r$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \tilde{T}^*(\varphi, x)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} (\Delta_1 z_{i_1} \dots \Delta_k z_{i_k})(t - r) = \\ = L(t) [D_2^{(k)} f(t, x_t) (\Delta_1 z_{i_1}^t \dots \Delta_k z_{i_k}^t) + \int_{t_0}^t D_2^{(k)} g(s, x_s) (\Delta_1 z_{i_1}^s \dots \Delta_k z_{i_k}^s) ds] \end{aligned}$$

onde $i_j = 1$ ou $i_j = 2$ para $j = 1, 2, \dots, k$ e $z_1 \in G_1 = \mathcal{G}^+$, $z_2 \in G_2 = G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X)$

$$\text{e } \Delta_j z_{i_j} \in G_{i_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$\text{e } \Delta_j z_{i_j}^t = \Delta_j z_1^t \quad \text{se } i_j = 1$$

$$\Delta_j z_{i_j}^t = \Delta_j z_2^0 \quad \text{se } i_j = 2$$

$$\frac{\partial^k \tilde{T}(\varphi, x)}{\partial z_{i_1}, \dots, z_{i_k}} (\Delta_1 z_{i_1} \dots \Delta_k z_{i_k}) \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X) \text{ pois } L \in G^+([\tilde{t}_0, t_0], \mathcal{L}(X))$$

e por um raciocínio análogo ao do lema 4.1 temos que para $f, (0)_+, (1)^k$ e $(2)^k \Rightarrow (0)_+^k$.

Assim, exatamente como no teorema 4.1, mostramos que, para $\tilde{t}_0 - r \leq t - r < t_0 - r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1} \tilde{T}^*(\varphi, x)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_{k+1}}} (\Delta_1 z_{i_1} \dots \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}})(t - r) = \\ = L(t)[D_2^{(k+1)} f(t, x_t)(\Delta_1 z_{i_1}^t \dots \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}}^t) + \int_{t_0}^t D_2^{(k+1)} g(s, x_s)(\Delta_1 z_{i_1}^s \dots \Delta_{k+1} z_{i_{k+1}}^s) ds] \end{aligned}$$

e que

$$\frac{\partial^{k+1} \tilde{T}^*}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_{k+1}}} : \mathcal{G}^+ \times G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X) \rightarrow M^{k+1}(G_{i_1} \times \dots \times G_{i_{k+1}}, G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X))$$

é contínua em $(\varphi, x) \in \mathcal{G}^+ \times G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X)$. ■

Teorema 4. Fixado $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$ e $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k$, $g \in Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k$ então a aplicação

$$\varphi \in \mathcal{G}^+ \rightarrow x(\varphi) \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X) \text{ é de classe } C^k$$

onde $x(\varphi) = x(\varphi, f, g)$ é a solução regradada de (N) em $[\tilde{t}_0, t_0]$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Mais ainda, para $k \geq 1$, a derivada $\frac{\partial x(\varphi)}{\partial \varphi} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+, G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X))$ é tal que para $\Delta\varphi \in \mathcal{G}^+$, a função $y = \frac{\partial x(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)$ é a única solução regradada da equação variacional linear

$$(N)' : y(t) = D_2 f(t, x_t) y_t + \Delta\varphi(0) - D_2 f(t_0, \varphi) \cdot \Delta\varphi + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) y_s ds \quad \tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$$

com dado inicial $y_{t_0} = \Delta\varphi$.

Prova. Seja $0 < \delta < r$, $t_0 - \tilde{t}_0 = \ell\delta$, $\ell \in \mathbb{N}^*$ tal que $\int_{a-\delta}^a m_g(s) ds < \frac{1-c}{3K} \quad \forall a \in [\tilde{t}_0 + \delta, t_0]$ (m_g dado em (2)_{L1} para g ; c e $K = \|L\|$ dados em (3) para f). Para $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, para a função $\tilde{T}$ definida no teorema 3, podemos dizer que:

$$\|\tilde{T}(\varphi, x) - \tilde{T}(\varphi, y)\|_{\lambda}^{[t_0 - r - \delta, t_0 - r]} \leq (c + K\tilde{\mathcal{S}}(\varepsilon) + K\|D_2 f\|e^{-\lambda\varepsilon} + \frac{1-c}{3})\|x - y\|_{\lambda}$$

(aqui $\|y\|_{\lambda}^{[a, b]} = \sup_{t \in [a, b]} e^{\lambda t} |y(t)|$ quando $[a, b] \subset [\tilde{t}_0 - r, t_0 - r]$; $\tilde{\mathcal{S}}$ é dado em (3))

para f). Pois $\tilde{T}(\varphi, x)(t - r) = \tilde{T}_1(x_\varphi)(t - r)$ para $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$ com x_φ definida no teorema 3 e $\tilde{T}_1$ dada no teorema 1 e no teorema 1 havíamos concluído a desigualdade acima para $\tilde{T}_1$. Assim, para $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ propícios, podemos ter

$$\|\tilde{T}(\varphi, x) - \tilde{T}(\varphi, y)\|_\lambda^{[t_0-r-\delta, t_0-r]} \leq \hat{c}\|x - y\|_\lambda \text{ com } \frac{2c+1}{3} < \hat{c} < 1, \text{ ou seja:}$$

1) Se $\ell = 1$, ou seja, $\int_{t_0}^{t_0} m_g(s)ds < \frac{1-c}{3K}$ então

$$\tilde{T}(\varphi, \cdot) : G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X) \rightarrow G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X)$$

é uma família de contrações $(G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0 - r], X)$ com norma $\|\cdot\|_\lambda$) uniforme em relação a $\varphi \in \mathcal{G}^+$.

Como $f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[t_0, t_0]}^k$ e $g \in Y_{[t_0, t_0]}^k$; do teorema 3, sabemos que $\tilde{T}$ é de classe C^k em relação a φ e x (com a norma $\|\cdot\|$ ou com a norma equivalente $\|\cdot\|_\lambda$).

Então podemos dizer que o ponto fixo de $\tilde{T}(\varphi, \cdot) : x(\varphi) = \tilde{T}(\varphi, x(\varphi))$ é de classe C^k em relação a $\varphi \in \mathcal{G}^+$ ([Hale 4] cap.2, por exemplo).

A solução de (N) em $G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)$ é tal que $x(\varphi, f, g)_{|[\tilde{t}_0-r, t_0-r]}$ é o ponto fixo de $\tilde{T}(\varphi, \cdot)$ e $x(\varphi, f, g)_{t_0} = \varphi$, logo

$$x(\varphi) = x(\varphi, f, g) \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X) \text{ é de classe } C^k \text{ em relação a } \varphi \in \mathcal{G}^+.$$

Isso implica que o operador de evolução $\tau(t, t_0) : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ para $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$ é de classe C^k pois $\tau(t, t_0) = \Gamma_t.x(\cdot, f, g)$ onde $\Gamma_t : G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X) \rightarrow \mathcal{G}^+$ é o operador linear contínuo (portanto C^∞) que a cada $x \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)$ corresponde $\Gamma_t x = x_t \in \mathcal{G}^+$.

2) Caso geral ($\tilde{t}_0 = t_0 - \ell\delta$, $\ell \in \mathbb{N}^*$).

Dados $s, t \in [\tilde{t}_0, t_0]$ com $t \leq s$ e $\int_t^s m_g(\bar{s})d\bar{s} < \frac{1-c}{3K}$ afirmamos que $\tau(t, s) : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ é de classe C^k .

Como todo o raciocínio anterior não dependeu do particular t_0 , se utilizarmos s como o novo " t_0 ", lembrando que $f_{|[t, s] \times \mathcal{G}_0^+} \in \tilde{\mathcal{X}}_{[t, s]}^k$ e $g_{|[t, s] \times \mathcal{G}_0^+} \in Y_{[t, s]}^k$; pelo item 1) concluiremos que $\tau(t, s) : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ é de classe C^k .

Afirmamos agora que $\tau(\tilde{t}_0, t_0) : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ é de classe C^k .

Isso pois $\tau(\tilde{t}_0, t_0) = \tau(\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta) \circ \tau(\tilde{t}_0 + \delta, \tilde{t}_0 + 2\delta) \circ \dots \circ \tau(\tilde{t}_0 + (\ell - 1)\delta, t_0)$, logo $\tau(\tilde{t}_0, t_0)$ é composto de um número finito de operadores de classe C^k , sendo portanto de classe C^k .

Finalmente, a solução de (N) em $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$ como função do dado inicial

$x : \mathcal{G}^+ \rightarrow G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)$ é de classe C^k ,

$$\text{pois } x(\varphi) = \left(\sum_{j=0}^m \tilde{\pi}_j \circ \tau(\tilde{t}_0 + jr, t_0) + \tilde{\pi}_{m+1} \right)(\varphi),$$

onde m é o maior natural tal que $\tilde{t}_0 + mr < t_0$ e

$$\tilde{\pi}_j : \mathcal{G}^+ \rightarrow G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, m+1$$

são as funções lineares-contínuas (portanto C^∞) definidas por:

$$\text{para } 0 \leq j \leq m, \psi \in \mathcal{G}^+ \begin{cases} \tilde{\pi}_j \psi(t) = \psi(t - \tilde{t}_0 - jr) & \text{se } \tilde{t}_0 + (j-1)r \leq t < \tilde{t}_0 + jr \\ \tilde{\pi}_j \psi(t) = 0 & \text{se } t \in [\tilde{t}_0 - r, t_0] \setminus [\tilde{t}_0 + (j-1)r, \tilde{t}_0 + jr[\end{cases}$$

$$\tilde{\pi}_{m+1} \psi(t) = \psi(t - t_0) \quad \text{se } \tilde{t}_0 + mr \leq t \leq t_0 \quad \text{e}$$

$$\tilde{\pi}_{m+1} \psi(t) = 0 \quad \text{se } \tilde{t}_0 - r \leq t < \tilde{t}_0 + mr$$

Falta então mostrar que para $k \geq 1$, $\frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi$ é a única solução regradada de $(N)'$ em $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$ com dado inicial $\Delta \varphi \in \mathcal{G}^+$ ($(N)'$ é a equação variacional linear de (N) em torno da solução $x(\varphi, f, g)$).

Seja então para $\Delta \varphi \in \mathcal{G}^+$, $y = \frac{\partial x(\varphi, f, g)}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi \in G^+([\tilde{t}_0 - r, t_0], X)$. Temos:

$$x(\varphi, f, g)|_{[\tilde{t}_0 - r, t_0 - r]} = \tilde{T}(\varphi, x(\varphi, f, g)|_{[\tilde{t}_0 - r, t_0 - r]})$$

e derivando ambos os membros em relação $\varphi \in \mathcal{G}^+$ e aplicando em $\Delta\varphi \in \mathcal{G}^+$ obtemos:

$$y_{[[\tilde{t}_0-r, t_0-r]]} = \frac{\partial \tilde{T}(\varphi, x(\varphi, f, g)_{[[\tilde{t}_0-r, t_0-r]])}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi + \frac{\partial \tilde{T}(\varphi, x(\varphi, f, g)_{[[\tilde{t}_0-r, t_0-r]])}{\partial x} \cdot y_{[[\tilde{t}_0-r, t_0-r]]}$$

Como $x(\varphi, f, g)_{t_0} = \varphi$ temos que $y_{t_0} = \Delta\varphi$ e para $\tilde{t}_0 - r \leq t - r < t_0 - r$, pelo teorema 3,

$$y(t-r) = L(t)[D_2 f(t, x_t) \cdot \Delta\varphi_0^t + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) \cdot \Delta\varphi_0^s ds - \Delta\varphi_0^t(0) + \Delta\varphi(0) - D_2 f(t_0, \varphi) \Delta\varphi] \\ + y(t-r) + L(t)[D_2 f(t, x_t) y_t^0 + \int_{t_0}^t D_2 g(s, x_s) y_s^0 ds - y_t^0(0)]$$

(repare que $\frac{\partial x_\varphi(t)}{\partial \varphi} \Delta\varphi = \Delta\varphi_0^t(0)$ e $\frac{\partial x_\varphi(t)}{\partial x} \Delta x = \Delta x_t^0(0)$).

Como $\Delta\varphi_0^t + y_t^0 = y_t$ e $L(t)$ é injetora obtemos que y satisfaz $(N)'$ para $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$ e $y_{t_0} = \Delta\varphi$.

Finalmente, é importante observar que $(N)'$ tem uma única solução regradada para cada dado inicial $\Delta\varphi \in \mathcal{G}^+$, pois para $k \geq 1$

$$f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k, g \in Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}^k \Rightarrow L_f \in \tilde{\mathcal{X}}_{[\tilde{t}_0, t_0]}^+ \text{ e } L_g \in Y_{[\tilde{t}_0, t_0]}$$

onde L_f e L_g são os dados da equação linear $(N)'$ definidos no final do teorema 4.2. ■

6. Exemplos

Exemplo 1. Tomemos $X = \mathbf{R}$, $r > 0$, $0 < r_0 < r_1 < \dots < r_m = r$, $A_i \in \mathbf{R}$ ($i = 0, 1, \dots, m$) e $h \in G(\mathbf{R})$ temos a equação

$$(D) \quad x(t) = h(t) \cdot \text{sen}(t + \sum_{i=0}^m A_i x((t - r_i)^+))$$

com dado inicial $x_{t_0} = \varphi$ para $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}$.

A equação (D) é um caso particular da equação $(\hat{N})$ com $g \equiv 0$ conforme vimos na observação 1.3; e nesse exemplo temos: $f : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$ dado por

$$f(t, \varphi) = h(t) \text{sen}(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i)).$$

Verificamos diretamente que vale (0) (fixando $x \in G(\mathbf{R})$) para f e ainda

se $h \in G^+(\mathbf{R})$ verificamos que vale (0)₊

se $h \in C(\mathbf{R})$ verificamos que vale (0)_c

Também vemos que f é C^∞ na 2a. variável, portanto vale (1)^k $\forall k \in \mathbf{N}$ e para $\varphi, \Delta\varphi \in \mathcal{G}_0^+$,

$$\begin{aligned} D_2 f(t, \varphi) \Delta\varphi &= h(t) \cos(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i)) \cdot \sum_{j=0}^m A_j \Delta\varphi(-r_j) \\ &= \int_{-r}^0 d_\theta \mu_\varphi(t, \theta) \Delta\varphi(\theta) \end{aligned}$$

onde temos

$$\mu_\varphi(t, \cdot) \in SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(\mathbf{R})) = BV_0([-r, 0], \mathbf{R})$$

dado por

$$\mu_\varphi(t, \theta) = \sum_{j=0}^m A_j h(t) \cos(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i)) \chi_{[-r, -r_j]}(\theta)$$

Vale (3) pois $\mu_\varphi(t, \theta) = 0$ para $-r_0 < \theta \leq 0$.

Também $\|D_2 f(t, \varphi)\| = SV_{[-r, 0]}[\mu_\varphi(t, \cdot)] = \sum_{j=0}^m |A_j h(t) \cos(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i))| \leq \sum_{j=0}^m |A_j h(t)|$, logo vale (2) (para cada $t_1 > t_0$).

Temos ainda:

$$\begin{aligned} D_2^{(2)} f(t, \varphi)(\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2) &= -h(t) \sin(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i)) \sum_{j=0}^m A_j \Delta\varphi_1(-r_j) \sum_{k=0}^m A_k \Delta\varphi_2(-r_k) \\ D_2^{(3)} f(t, \varphi)(\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3) &= -h(t) \cos(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i)) \sum_{j=0}^m A_j \Delta\varphi_1(-r_j) \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^m A_k \Delta\varphi_2(-r_k) \sum_{\ell=0}^m A_\ell \Delta\varphi_3(-r_\ell) \end{aligned}$$

⋮

etc.

Logo vale $(2)^k \quad \forall k \in \mathbf{N}$ para cada $t_1 > t_0$, ou seja,

$$f \in \mathcal{X} \text{ e para cada } t_1 > t_0 \quad f|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^\infty$$

Concluimos então que para cada $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ existe uma única $x(\varphi)$ solução regrada de (D) para $t \geq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$, e para cada $t_1 > t_0$ a aplicação $\varphi \in \mathcal{G} \rightarrow x(\varphi)|_{[t_0-r, t_1]} \in G([t_0-r, t_1])$ é de classe C^∞ . Aqui, como se trata de uma equação $(\hat{N})$ e não (N) , teremos $x(\varphi)(t_0) = f(t_0, \varphi)$ e não $x(\varphi)(t_0) = \varphi(0)$.

Também vale que se $h \in G^+(\mathbf{R})$ teremos para $\varphi \in \mathcal{G}^+$ que $x(\varphi) \in G^+([t_0-r, \infty[)$ e se $h \in C(\mathbf{R})$ teremos para $\varphi \in \mathcal{C}$ com $\varphi(0) = f(t_0, \varphi)$ que $x(\varphi) \in C([t_0-r, \infty[)$.

Observação 1. O salto de $\mu_\varphi(t, \cdot)$ em $\theta = -r$ vale

$$A(t, \varphi) = A_m h(t) \cos(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i^+))$$

e não podemos encontrar $L(t) \in \mathbf{R}$, $L(t) \neq 0$ para obtermos a condição $(\widetilde{3})$ para f , ou seja tal que $0 < L(t).A(t, \varphi) < 2 \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}$, pois o cosseno pode mudar de sinal; então nada podemos afirmar nesse caso sobre a existência de solução para trás. No exemplo 3) acrescentamos uma parcela linear nessa f de modo a podermos controlar o sinal do cosseno e ali teremos satisfeita a condição $(\widetilde{3})$ e portanto a existência e unicidade de solução para trás.

Observação 2. Naturalmente podemos tomar variantes desse exemplo como

$$f(t, \varphi) = \alpha(t) \sin(\beta(t) + \sum_{i \in I} A_i \varphi(-r_i)) + \gamma(t), \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \in G(\mathbf{R})$$

e ainda $\sum_{i \in I} A_i \varphi(-r_i)$ podendo ser finita ou enumerável, desde que se os r_i se acumularem em $\theta = 0$ devemos exigir que $SV_{[-\varepsilon, 0]}[\mu_\varphi(t, \cdot)] \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (condição (3)), ou seja, que $\sum_{r_j \leq \varepsilon} |A_j| \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Em todos esses casos temos as mesmas conclusões do exemplo 1).

Se queremos f autônoma podemos tomar α, β e γ constantes.

Exemplo 2. Para a f do exemplo 1) (ou alguma variante como na observação anterior) podemos considerar a equação (N) para alguma $g \in Y$. Daremos exemplos a seguir de $g \in Y$ tais que $g|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in Y_{[t_0, t_1]}^\infty$ e nesse caso teremos que para $t_0 \in \mathbf{R}$ e para cada $\varphi \in \mathcal{G}$, existe um único $x(\varphi) = x(\varphi, f, g) \in G([t_0 - r, \infty[)$ solução de (N) para $t \geq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Se $h \in G^+(\mathbf{R})$ teremos $f \in \mathcal{X}^+$ e para $\varphi \in \mathcal{G}^+$ teremos $x(\varphi) \in G^+([t_0 - r, \infty[)$.

Se $h \in C(\mathbf{R})$ teremos $f \in \mathcal{X}^c$ e para $\varphi \in \mathcal{C}$ teremos $x(\varphi) \in C([t_0 - r, \infty[)$ e para cada $t_1 > t_0$ a aplicação $\varphi \in \mathcal{G} \rightarrow x(\varphi)|_{[t_0 - r, t_1]} \in G([t_0 - r, t_1])$ é de classe C^∞ .

I) $g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$ com

$$g(t, \varphi) = \alpha(t) \operatorname{sen}(\beta(t) + \sum_{j \in J} B_j \varphi(-\bar{r}_j)) + \gamma(t)$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in G(\mathbf{R})$, $B_j \in \mathbf{R}$ e $0 \leq \bar{r}_j \leq r$ ($j \in J$), J finito ou enumerável (desde que $\sum_{j \in J} |B_j| < \infty$).

De maneira análoga ao exemplo 1), verificamos que g satisfaz $(0)_{L_1}$ (pois vale (0)) $(1)^k$ e $(2)_{L_1}^k \forall k \in \mathbf{N}$ (pois vale $(0)^k$ e $(2)^k$). Assim $g \in Y$ e $g|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in Y_{[t_0, t_1]}^\infty$. Nesse caso a equação fica:

$$(N) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - h(t) \operatorname{sen}(t + \sum_{i \in I} A_i x((t - r_i)^+))) = \alpha(t) \operatorname{sen}(\beta(t) + \sum_{j \in J} B_j x((t - \bar{r}_j)^+)) + \gamma(t)$$

$$\text{II) } g(t, \varphi) = \arctan(t + \int_{-r}^0 \varphi(\theta) d\theta)$$

III) $g(t, \varphi) = \int_{-r}^0 \theta \varphi(\theta) d\theta$ (aqui na verdade g não depende de t , é autônoma, e também é linear contínua em φ).

Para esses exemplos, facilmente verificamos $(0)_{L_1}$ (pois vale (0)), $(1)^k$ e $(2)_{L_1}^k$ (pois vale $(0)^k$ e $(2)^k$) $\forall k \in \mathbf{N}$.

Exemplo 3. Nas mesmas condições do exemplo 1), tomemos agora

$$f(t, \varphi) = h(t) \left[\sin\left(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i)\right) + \lambda \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i) \right] \quad \text{com } \lambda \in \mathbf{R}.$$

O exemplo 1) então se torna o caso $\lambda = 0$.

É fácil verificar que f satisfaz (0) ($(0)_+$ ou $(0)_c$ se $h \in G^+(\mathbf{R})$ ou $h \in C(\mathbf{R})$ respectivamente), $(1)^k$ e $(2)^k$ ($\forall k \in \mathbf{N}$) e (3) , agora aqui:

$$\mu_\varphi(t, \theta) = \sum_{j=0}^m A_j h(t) \left[\cos\left(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i)\right) + \lambda \right] \chi_{[-r, -r_j]}(\theta)$$

Todas as conclusões que tiramos nos exemplos 1) e 2) para a equação (D) e as equações (N) com as dadas g do exemplo 2) continuam válidas se utilizarmos esta nova f . Estamos em condições, nesse caso, de obter a solução para trás, para estas referidas equações dos exemplos anteriores.

O salto de $\mu_\varphi(t, \cdot)$ em $\theta = -r$ é $A(t, \varphi) = A_m h(t) \left[\cos\left(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i^+)\right) + \lambda \right]$.

Para f satisfazer $(\widetilde{3})$ precisamos para cada $\tilde{t}_0 < t_0$ encontrar uma função $L \in G^+([\tilde{t}_0, t_0])$ com $L(t) \neq 0$ tal que $|L(t).A(t, \varphi) - 1| \leq c < 1 \quad \forall (t, \varphi) \in [\tilde{t}_0, t_0] \times \mathcal{G}$.

Para isso precisamos então supor $A_m \neq 0$, $h \in G^+(\mathbf{R})$ com $h(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$ e $\inf_{t \in [\tilde{t}_0, t_0]} |h(t)| > 0 \quad \forall \tilde{t}_0 < t_0$ e ainda $\lambda > 1$.

Aí podemos definir

$$L(t) = \frac{h(t)}{|h(t)|\lambda.A_m\|h\|} \quad \text{onde } \|h\| = \sup_{t \in [\tilde{t}_0, t_0]} |h(t)|, \quad \text{para } t \in [\tilde{t}_0, t_0]$$

então $L \in G^+([\tilde{t}_0, t_0])$ com $L(t) \neq 0$ para $t \in [\tilde{t}_0, t_0]$ e

$$L(t).A(t, \varphi) = \frac{|h(t)|}{\lambda\|h\|} \cos\left(t + \sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i^+)\right) + \frac{|h(t)|}{\|h\|}$$

assim

$$\frac{\lambda-1}{\lambda} \frac{\ell}{\|h\|} \leq L(t).A(t, \varphi) \leq \frac{\lambda+1}{\lambda} \quad \text{onde } \ell = \inf_{t \in [\tilde{t}_0, t_0]} |h(t)|$$

assim

$$|L(t).A(t, \varphi) - 1| \leq c < 1 \quad \text{com} \quad c = 1 - \min \left\{ \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\ell}{\|h\|}, 2 - \frac{\lambda + 1}{\lambda} \right\},$$

ou seja, $c = 1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\ell}{\|h\|}$

O restante de $(\widetilde{3})$ é trivialmente satisfeito por $\tilde{\mu}_\varphi(t, \cdot) = \mu_\varphi(t, \cdot) - A(t, \varphi)\chi_{\{-r\}}$, ou seja, $f \in \tilde{\mathcal{X}}^+$. Então para a equação (N)

$$(N) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - h(t)[\text{sen}(t + \sum_{i \in I} A_i x((t - r_i)^+)) + \lambda \sum_{i \in I} A_i x((t - r_i)^+)]) = g(t, x_t)$$

(com $g \in Y$, $g|_{[a,b] \times \mathcal{G}_0^+} \in Y_{[a,b]}^\infty \quad \forall [a,b] \subset \mathbf{R}$, como, por exemplo, as funções g dadas no exemplo anterior) vale que para cada $(t_0, \varphi) \in \mathbf{R} \times \mathcal{G}^+$ existe um único $x = x(t_0, \varphi) \in G^+(\mathbf{R})$ solução de (N) para $t \in \mathbf{R}$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Se $h \in C(\mathbf{R})$, se $\varphi \in \mathcal{C}$ temos $x(t_0, \varphi) \in C(\mathbf{R})$.

E para cada $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in [a, b]$ temos que a aplicação

$$\varphi \in \mathcal{G}^+ \rightarrow x(t_0, \varphi)|_{[a,b]} \in G^+([a, b])$$

é de classe C^∞ .

Exemplo 4.

$$(D) \quad x(t) = \sum_{i=1}^m A_i x((t - r_i)^+)$$

ou

$$(N) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - \sum_{i=1}^m A_i x((t - r_i)^+)) = \int_{-r}^0 \theta x(t + \theta) d\theta.$$

Aqui $0 < r_1 < \dots < r_m = r$, $A_i \in \mathcal{L}(X)$.

Temos agora equações autônomas e lineares. Essa equação (D) justifica o nome: equação a diferenças.

Facilmente verificamos as propriedades $(0)_+$, $(1)^k$ e $(2)^k \forall k \in \mathbf{N}$ e (3) para $f, g : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ com $f(\varphi) = \sum_{i=1}^m A_i \varphi(-r_i)$ e $g(\varphi) = \int_{-r}^0 \theta \varphi(\theta) d\theta$, ou seja, $f, g \in \mathcal{X}^\infty \subset Y^\infty$ e temos os bons resultados esperados para a solução para a frente de $t_0 \in \mathbf{R}$ quando temos dado $x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}$.

Para termos a solução para trás para as equações (D) e (N) desse exemplo, basta termos $A_m \in \mathcal{L}(X)$ inversível com $A_m^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, pois nesse caso f vai satisfazer $(\widetilde{3})$ (bastando tomar $L = A_m^{-1}$).

Observação: Ainda temos os exemplos de equações:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-r}^0 \theta x(t + \theta) d\theta \\ \frac{d}{dt}(x(t) - \int_{-r}^0 \theta x(t + \theta) d\theta) &= \sum_{i=1}^m A_i x((t - r_i)^+) \\ \frac{d}{dt}(x(t) - \int_{-r}^0 \theta x(t + \theta) d\theta) &= \int_{-r}^0 \theta x(t + \theta) d\theta \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Para esses exemplos, não vamos ter a solução para trás, pois para $f(\varphi) = \int_{-r}^0 \theta \varphi(\theta) d\theta$ o núcleo $\mu(\theta) = \frac{\theta^2}{2} I_X$ (onde I_X é a identidade de X) não tem salto em $\theta = -r$.

Vamos dar alguns exemplos onde podemos adequar uma equação envolvendo funções de duas variáveis a valores reais ao nosso contexto pelo fato de podermos tomar X com dimensão infinita.

Exemplo 5. Considere a equação

$$\oplus \quad x(t, \sigma) = x(t + \psi_1(t)^+, \psi_2(t, \sigma)) + \int_{t_0}^t x(s, \sigma) ds \quad \text{para } t \geq t_0$$

onde procuramos soluções $x : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ regradas na 1a. variável.

Com os dados

$$\psi_1 : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 0[\text{ crescente (não estritamente) }$$

$$\text{ e } \psi_2 : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ com } \hat{\psi}_2 \in G(\mathbf{R}, C([0, 1]))$$

onde $\widehat{\psi}_2(t)(\sigma) = \psi_2(t, \sigma) \forall (t, \sigma) \in \mathbf{R} \times [0, 1]$.

Para fazermos essa equação cair no nosso contexto, sejam $X = C([0, 1])$ e $r = +1$ e sejam $f, g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ dadas por, para $t \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}_0^+ = G_0^+([-1, 0], C([0, 1]))$ e $\sigma \in [0, 1]$

$$f(t, \varphi)(\sigma) = \varphi(\psi_1(t))(\psi_2(t, \sigma))$$

$$\text{e } g(t, \varphi)(\sigma) = \varphi(0^-)(\sigma)$$

Para $t_0 \in \mathbf{R}$, vemos que cada solução $\hat{x} \in G([t_0 - 1, \infty[, C([0, 1]))$ da equação

$$(\hat{N}) : \quad x(t) = f(t, x_t) + \int_{t_0}^t g(s, x_s) ds \quad \text{para } t \geq t_0$$

com $x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}_f = \{\varphi \in \mathcal{G} \mid \varphi(0) = f(t_0, \varphi)\}$

nos dá uma solução $x : [t_0 - 1, \infty[\times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de $\oplus$ para $t \geq t_0$ com $x(t, \sigma) = \hat{x}(t)(\sigma)$ (e daí $x(t, \sigma) = \varphi(t - t_0)(\sigma)$ para $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$).

Verificamos facilmente que g (que é linear em φ e independente de t) satisfaz (0), (1)^k e (2)^k $\forall k \in \mathbf{N}$ logo $g \in Y^\infty$.

Vamos mostrar que $f \in \mathcal{X}$ e para cada $t_1 > t_0$ temos $f_{|[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in \mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^\infty$.

f está bem definida, pois $f(t, \varphi) = \varphi(\psi_1(t)) \circ \hat{\psi}_2(t) \in C([0, 1])$.

Para mostrar que f satisfaz (0) seja $x \in G(\mathbf{R}, X)$ fixo.

Colocando $x(t, \sigma) = x(t)(\sigma)$ temos $\sup_{\sigma \in [0, 1]} |x(t + \varepsilon, \sigma) - x(t^+, \sigma)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$

(ou seja, $\|x(t + \varepsilon) - x(t^+)\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ em $C([0, 1])$) e $\sup_{\sigma \in [0, 1]} |x(t - \varepsilon, \sigma) - x(t^-, \sigma)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$.

Definindo $f^+, f^- : \mathbf{R} \times \mathcal{G} \rightarrow X$ por $f^+(t, \varphi)(\sigma) = \varphi(\psi_1(t^+)^+)(\psi_2(t^+, \sigma))$ e analogamente $f^-(t, \varphi)(\sigma) = \varphi(\psi_1(t^-)^-)(\psi_2(t^-, \sigma))$, vamos mostrar que $f(t + \varepsilon, x_{t+\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} f^+(t, x_t)$ em $C([0, 1])$. (A demonstração de que $f(t - \varepsilon, x_{t-\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} f^-(t, x_t)$ é completamente análoga.)

$$\begin{aligned} \text{Para } \sigma \in [0, 1] \quad & |x(t + \varepsilon + \psi_1(t + \varepsilon), \psi_2(t + \varepsilon, \sigma)) - x(t + \psi_1(t^+)^+, \psi_2(t^+, \sigma))| \leq \\ & \leq |x(t + \varepsilon + \psi_1(t + \varepsilon), \psi_2(t + \varepsilon, \sigma)) - x(t + \psi_1(t^+)^+, \psi_2(t + \varepsilon, \sigma))| \\ & \quad + |x(t + \psi_1(t^+)^+, \psi_2(t + \varepsilon, \sigma)) - x(t + \psi_1(t^+)^+, \psi_2(t^+, \sigma))| \\ & \leq \sup_{\xi \in [0, 1]} |x(t + \varepsilon + \psi_1(t + \varepsilon), \xi) - x(t + \psi_1(t^+)^+, \xi)| \\ & \quad + |x(t + \psi_1(t^+)^+, \psi_2(t + \varepsilon, \sigma)) - x(t + \psi_1(t^+)^+, \psi_2(t^+, \sigma))| \end{aligned}$$

Dado $\eta > 0$, $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ tal que se $0 < \ell < \bar{\varepsilon}$ então

$$\sup_{\xi \in [0,1]} |x(t + \psi_1(t^+) + \ell, \xi) - x(t + \psi_1(t^+)^+, \xi)| < \frac{\eta}{2} \quad (x(t + \psi_1(t^+) + \ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow 0^+} x(t + \psi_1(t^+)^+))$$

em $C([0,1])$ e

$\exists \delta > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \delta$ então $0 < t + \varepsilon + \psi_1(t + \varepsilon) - t - \psi_1(t^+) = \ell < \bar{\varepsilon}$.

Também $\exists \bar{\bar{\varepsilon}} > 0$ tal que para $\xi, \bar{\xi} \in [0,1]$ com $|\xi - \bar{\xi}| < \bar{\bar{\varepsilon}}$ temos

$$|x(t + \psi_1(t^+)^+, \bar{\xi}) - x(t + \psi_1(t^+)^+, \xi)| < \frac{\eta}{2},$$

pois $x(t + \psi_1(t^+)^+, \cdot) \in C([0,1])$, sendo então uniformemente contínua.

Finalmente $\exists \bar{\delta} > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \bar{\delta}$ então $|\psi_2(t + \varepsilon, \sigma) - \psi_2(t^+, \sigma)| < \bar{\bar{\varepsilon}}$
 $\forall \sigma \in [0,1]$. Então para $0 < \varepsilon < \delta$ e $0 < \varepsilon < \bar{\delta}$ temos

$$\sup_{\sigma \in [0,1]} |x(t + \varepsilon + \psi_1(t + \varepsilon), \psi_2(t + \varepsilon, \delta)) - x(t + \psi_1(t^+)^+, \psi_2(t^+, \sigma))| < \eta$$

assim vale (0) para f .

Como f é linear e contínua na 2a. variável, facilmente verificamos $(1)^k$ e $(2)^k$
 $\forall k \in \mathbb{N}$. Para verificar (3), repare que, segundo o teorema 1.1, para $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [-1,0]$,
 $p \in X$ e $\sigma \in [0,1]$

$$\mu(t, \theta)p(\sigma) = -\chi_{[\theta, 0]}p(\psi_1(t)) \cdot (\psi_2(t, \sigma)) = \begin{cases} -p(\psi_2(t, \sigma)) & \text{se } \theta \leq \psi_1(t) < 0 \\ 0 & \text{se } -1 \leq \psi_1(t) < \theta \end{cases}$$

Assim

$$\Gamma p = -p \circ \psi_2(t, \cdot) \quad \text{para } p \in X$$

Como ψ_1 é crescente temos que para $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $\mu(t, \theta) = 0 \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1$, e
 $\psi_1(t_1) < \theta \leq 0$ e logo vale (3).

Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}_f$ e reparando que para $\hat{x} \in G([t_0 - 1, \infty[, C([0,1]))$ temos

$$\hat{x} \text{ é solução de } (\hat{N}) \text{ para } t \geq t_0 \text{ com } \hat{x}_{t_0} = \varphi \iff$$

$$\begin{cases} x : [t_0 - 1, \infty[\times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \text{ definida por } x(t, \sigma) = \hat{x}(t)(\sigma) \\ \text{é solução de } \oplus \text{ para } t \geq t_0 \text{ com } x(t, \sigma) = \varphi(t - t_0)(\sigma) \text{ para } t_0 - 1 \leq t \leq t_0 \end{cases}$$

Podemos então afirmar que existe uma única solução de $\oplus$, para $t \geq t_0$ $x : [t_0 - 1, \infty[\times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\hat{x} \in G([t_0 - 1, \infty[, C([0, 1]))$ com $\hat{x}(t)(\sigma)$ definido por $\hat{x}(t)(\sigma) = x(t, \sigma)$, e tal que $x(t, \sigma) = \varphi(t - t_0)(\sigma)$ para $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. E ainda para cada $t_1 > t_0$, a aplicação $\varphi \in \mathcal{G}_f \rightarrow \hat{x}(\varphi) \in G([t_0 - 1, t_1], X)$ (com $\hat{x}(\varphi) = \hat{x}|_{[t_0 - 1, t_1]}$) é de classe C^∞ .

Se ψ_1 e $\hat{\psi}_2$ forem contínuas à direita temos $f^+ = f$ e vale $(0)_+$, logo para $\varphi \in \mathcal{G}_f^+$ teremos $\hat{x}(\varphi) \in G^+([t_0 - 1, t_1], X)$. Se ψ_1 e $\hat{\psi}_2$ forem contínuas então vale $(0)_c$ e portanto para $\varphi \in \mathcal{C}_f$ teremos $\hat{x}(\varphi) \in C([t_0 - 1, t_1], X)$.

Como exemplo de ψ_1 e ψ_2 para a equação $\oplus$ podemos tomar a equação

$$\oplus \quad x(t, \sigma) = x(t - e^{-t^2}, \frac{\sigma t^2}{t^2 + 1}) + \int_0^t x(s, \sigma) ds \quad t \geq 0$$

com dado inicial em $G^+([-1, 0], C([0, 1]))$.

Exemplo 6. Considere a equação:

$$(I) \quad u(t, x) - \alpha u(t - r, x) = u_{xx}(t, x) - \beta u_{xx}(t - r, x) + h(x, u(t - \bar{r}, x))$$

para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq \pi$

onde temos dados $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e $0 < \bar{r} \leq r$ e $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$.

Vamos considerar $X = L_2([0, \pi])$.

Seja $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a base de Hilbert ortonormal de X dada por $s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n x$, $n \in \mathbb{N}$.

Assim, para $p \in X$ temos que $p = \sum p_n s_n$ e podemos olhar (I) como

$$(\widehat{\text{I}}) \quad U(t) - \alpha U(t-r) = A[U(t)] - \beta A[U(t-r)] + \hat{h}(U(t-\bar{r}))$$

com $U(t) \in X \ \forall t \geq 0$ e $U(t)(x) = u(t, x)$, onde

$A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é o operador fechado dado por

$$Ap = p'' \in X \text{ e portanto se } p = \sum p_n s_n \text{ então } Ap = \sum (-n^2) p_n s_n.$$

Tomaremos $\mathcal{D}(A) = W_2^2 = \{p : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists p'' \in L_2([0, \pi])\}$ que é denso em X

e $\hat{h} : X \rightarrow X$ dado por $\hat{h}(p)(x) = h(x, p(x))$ q.s. em $x \in [0, \pi]$

(h é dado então convenientemente para que $\hat{h}$ esteja bem definido, por exemplo,

$$h(x, s) = \bar{h}(x) \cdot s \text{ com } \bar{h} \in L_\infty([0, \pi]) \text{ nos daria } \hat{h}(p) = \bar{h} \cdot p \in X.)$$

Em termos de séries teremos

$$(\widehat{\text{I}}) \quad \sum U_n(t) s_n - \alpha \sum U_n(t-r) s_n = \sum (-n^2) U_n(t) s_n - \beta \sum (-n^2) U_n(t-r) s_n + \sum (\hat{h}(U(t-\bar{r})))_n s_n$$

$$\rightarrow U_n(t) - \alpha U_n(t-r) = -n^2 U_n(t) + \beta n^2 U_n(t-r) + (\hat{h}(U(t-\bar{r})))_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow U_n(t) = \frac{\alpha + \beta n^2}{1 + n^2} U_n(t-r) + \frac{(\hat{h}(U(t-\bar{r})))_n}{1 + n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow U(t) = \sum \frac{\alpha + \beta n^2}{1 + n^2} U_n(t-r) s_n + \sum \frac{(\hat{h}(U(t-\bar{r})))_n}{1 + n^2} s_n$$

$$\text{ou seja,} \quad U(t) = \phi_{\alpha, \beta}(U(t-r)) + \phi_{1,0}(\hat{h}(U(t-\bar{r})))$$

$$\text{onde } \phi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{L}(X) \text{ e é dado por } \phi_{\alpha, \beta} p = \sum \frac{\alpha + \beta n^2}{1 + n^2} p_n s_n \text{ (} p = \sum p_n s_n \in X \text{)}.$$

$\phi_{\alpha, \beta}$ está bem definido $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pois para $p = \sum p_n s_n \in X$

$$\text{temos que} \quad \left| \frac{\alpha + \beta n^2}{1 + n^2} p_n \right|^2 \leq K_{\alpha, \beta} |p_n|^2$$

$$\text{logo} \quad \sum \left| \frac{\alpha + \beta n^2}{1 + n^2} p_n \right|^2 < \infty \text{ e usamos Bessel no espaço de Hilbert } X.$$

Observe que $\phi_{1,0}$ é o operador inverso de $(I-A)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(A) & \hookrightarrow & X \\ & \hookleftarrow & \\ & \phi_{1,0} = (I-A)^{-1} & \end{array}$$

Chegamos então na Equação a Diferenças

$$\widehat{\widehat{(I)}} \quad U(t) = f(U_t) \quad (\text{que é um caso particular de } \widehat{(N)} \text{ com } g \equiv 0)$$

$$\text{com } f : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \quad \text{dada por}$$

$$f(\varphi) = \phi_{\alpha,\beta}(\varphi_{(-r)}) + \phi_{1,0}(\widehat{h}(\varphi(-\bar{r})))$$

Se tomarmos $\widehat{h} \in \mathcal{L}(X)$ (por exemplo, $h(x, s) = \bar{h}(x).s$ já mencionado)

teremos $f \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$ e verificamos facilmente as boas condições $((0)_+, (1)^k, (2)^k \forall k \in \mathbb{N}, (3))$ para f .

Assim, temos garantido que para cada $\varphi \in \mathcal{G}^+$ (onde fazemos $\varphi(0) = f(\varphi)$) existe uma única solução de $\widehat{\widehat{(I)}}$ para $t \geq 0$, $U(0, \varphi, f) \in G^+([-r, \infty[, X)$ com $U_0 = \varphi$. Essa solução é de classe C^∞ em relação ao dado inicial $\varphi \in \mathcal{G}^+$.

Para voltarmos com essa solução para a equação original (I) temos

$$U(t) = \Sigma U_n(t) s_n \quad \text{e chegamos em}$$

$$(\otimes) \quad U_n(t) - \alpha U_n(t-r) - (\widehat{h}(U(t-\bar{r})))_n = -n^2 [U_n(t) - \beta U_n(t-r)] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e concluímos que a série $\Sigma(-n^2) [U_n(t) - \beta U_n(t-r)] s_n$ é convergente em X .

$$\text{Assim, } U(t) - \beta U(t-r) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall t \geq 0.$$

$$\text{Se tomamos } \varphi \in \mathcal{G}^+ \text{ tal que } \varphi(\theta) \in \mathcal{D}(A) = W_2^2 \quad \forall \theta \in [-r, 0[$$

$$\text{concluiremos que } U(t) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall t \geq 0, \text{ pois para}$$

$$0 \leq t < r \text{ temos que } U(t) - \beta U(t-r) = U(t) - \beta \varphi(t-r) \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow U(t) \in \mathcal{D}(A)$$

e assim por diante. Podemos dizer nesse caso que $u(t, x) = U(t)(x)$ é solução de (I) para $t \geq 0$ e $x \in [0, \pi]$.

Observação: Para o caso $\beta = 0$, não precisamos de exigência nenhuma em $\varphi \in \mathcal{G}^+$ para obtermos $U(t) \in \mathcal{D}(A)$ e então a solução de (I).

Ainda para $X = L_2([0, \pi])$ temos os exemplos:

$$(II) \quad \frac{\partial}{\partial t}(u(t, x)) = u_{xx}(t, x) + \alpha u(t - r, x)$$

e teremos a equação $\dot{U}(t) = A[U(t)] + \alpha U(t - r)$

com $U(t) = \Sigma U_n(t)s_n$ e $\dot{U}(t) = \Sigma \dot{U}_n(t)s_n$

Chegamos a

$$\begin{aligned} \dot{U}_n(t) &= -n^2 U_n(t) + \alpha U_n(t - r) \\ \rightarrow \frac{d}{dt}[U_n(t)e^{n^2 t}] &= \alpha e^{n^2 t} U_n(t - r) \\ \rightarrow U_n(t) &= e^{-n^2 t} U_n(0) + \alpha \int_0^t e^{n^2(s-t)} U_n(s - r) ds. \end{aligned}$$

$$\text{Assim } U(t) = \Sigma e^{-n^2 t} U_n(0)s_n + \int_0^t \alpha (\Sigma e^{n^2(s-t)} U_n(s - r)s_n) ds$$

$$(\widehat{II}) \quad U(t) = H(t) + \int_0^t g(t - s, U_s) ds$$

com

$$g(\sigma, \varphi) = \alpha \Sigma e^{-n^2 \sigma} \varphi_n(-r)s_n \quad \sigma \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{G}^+$$

$$(\varphi(\theta) = \Sigma \varphi_n(\theta)s_n.)$$

De maneira mais geral podemos ter a equação:

$$(III) \quad \frac{\partial}{\partial t}[u(t, x) - \alpha u(t - r, x)] = u_{xx}(t, x) + f(u(t, x))$$

e teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[U(t) - \alpha U(t - r)] &= A[U(t)] + f \circ U(t) \\ \rightarrow \frac{d}{dt}[U_n(t) - \alpha U_n(t - r)] &= -n^2 U_n(t) + (f \circ U(t))_n \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[e^{n^2 t} (U_n(t) - \alpha U_n(t-r)) \right] &= -n^2 e^{n^2 t} \alpha U_n(t-r) + e^{-n^2 t} (f \circ U(t))_n \\ \rightarrow U_n(t) &= e^{-n^2 t} U_n(0) - \alpha e^{-n^2 t} U_n(-r) + \alpha U_n(t-r) + \alpha \int_0^t (-n^2) e^{-n^2(t-s)} U_n(s-r) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-n^2(t-s)} (f \circ U(s))_n ds \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} U(t) &= \Sigma e^{-n^2 t} U_n(0) s_n - \alpha \Sigma e^{-n^2 t} U_n(-r) s_n + \alpha U(t-r) + \\ &\quad + \int_0^t (\alpha \Sigma (-n^2) e^{-n^2(t-s)} U_n(s-r) s_n) ds + \\ &\quad + \int_0^t (\Sigma e^{-n^2(t-s)} (f \circ U(s))_n s_n) ds \end{aligned}$$

$$(\widehat{\text{III}}) \quad U(t) = H(t) + \alpha U(t-r) + \int_0^t g(t-s, U_s) ds$$

$$\begin{aligned} \text{com} \quad g(\sigma, \varphi) &= \alpha \Sigma (-n^2) e^{-n^2 \sigma} \varphi_n(-r) s_n + \Sigma e^{-n^2 \sigma} (f \circ \varphi(0))_n s_n \\ &= \alpha \psi_1(\sigma) [\varphi(-r)] + \psi_2(\sigma) [f \circ \varphi(0)] \\ &\quad \left[\begin{array}{l} \text{com} \quad \varphi(\theta) = \Sigma \varphi_n(\theta) s_n, \quad \psi_1(\sigma) p = \Sigma (-n^2) e^{-n^2 \sigma} p_n s_n \\ \psi_2(\sigma) p = \Sigma e^{-n^2 \sigma} p_n s_n \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ressaltamos que os exemplos (II) e (III) servem como motivação para um estudo das equações funcionais integrais $(\widehat{\text{II}})$ e $(\widehat{\text{III}})$.

7. O caso linear

Dizemos que a equação (N) é linear homogênea se os dados $f, g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ são lineares na 2a. variável.

Mais geralmente, a equação (N) é linear (não necessariamente homogênea) se temos ainda em (N) parcelas que só dependem de t . Podemos incorporar essas parcelas ao dado

f , tomando então f da forma

$$f(t, x_t) = L(t, x_t) + H(t) \quad \text{com } L \text{ linear na 2a. variável.}$$

Para (N) linear, temos

$$\text{para } f : (1) \Leftrightarrow (1)^k \forall k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow L(t, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X) \forall t \in \mathbf{R},$$

$$\text{para } g : (1) \Leftrightarrow (1)^k \forall k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow g(t, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X) \forall t \in \mathbf{R}.$$

Neste caso, conforme o teorema 1.1, existem $\mu, \eta : \mathbf{R} \times [-r, 0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ com $\mu(t, \cdot), \eta(t, \cdot) \in SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)) \forall t \in \mathbf{R}$ tais que

$$f(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \varphi(\theta) + H(t) \quad \text{e} \quad g(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \varphi(\theta) \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}.$$

Vemos que $\forall \varphi \in \mathcal{G} \quad \mu_\varphi = \mu$ e $\eta_\varphi = \eta$.

Estendendo naturalmente $\mu, \eta : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X)$ por

$$\begin{cases} \mu(t, \theta) = \mu(t, -r) & t \in \mathbf{R}, \theta \leq -r \\ \mu(t, \theta) = 0 & t \in \mathbf{R}, \theta \geq 0 \\ \eta(t, \theta) = \eta(t, -r) & t \in \mathbf{R}, \theta \leq -r \\ \eta(t, \theta) = 0 & t \in \mathbf{R}, \theta \geq 0 \end{cases}$$

temos então para $t \in [t_0, t_1]$ e $x \in G([t_0 - r, t_1], X)$

$$\begin{aligned} f(t, x_t) &= \int_{t-r}^t d_s \mu(t, s-t) x(s) + H(t) = \int_{t_0-r}^{t_1} d_s \mu(t, s-t) x(s) + H(t) \\ g(t, x_t) &= \int_{t-r}^t d_s \eta(t, s-t) x(s) = \int_{t_0-r}^{t_1} d_s \eta(t, s-t) x(s). \end{aligned}$$

Temos também

$$\text{para } f : (2) \Leftrightarrow (2)^k \forall k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow \text{para cada } t_0 < t_1 \quad \sup_{t \in [t_0, t_1]} SV[\mu(t, \cdot)] < \infty$$

$$\text{para } g : (2)_{L_1} \Leftrightarrow (2)_{L_1}^k \forall k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow \text{a função } t \rightarrow SV[\eta(t, \cdot)] \text{ é localmente integrável.}$$

Definição 1. Para $t_0 \in [a, b]$, seja

$${}^{t_0}\Gamma_a^b = \{(t, s) \in [a, b]^2 \mid t_0 \leq s \leq t \text{ ou } t \leq s \leq t_0\}.$$

Definamos o espaço vetorial $G_0^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X))$ dos núcleos $K : {}^{t_0}\Gamma_a^b \rightarrow \mathcal{L}(X)$ que satisfazem as propriedades:

(G_0^σ) Para cada $s \in [a, b]$, a função $K(\cdot, s)$ é simplesmente regrada, ou seja, para $p \in X$, a função $K(\cdot, s)p$ é regrada, e ainda temos $K(s, s) = 0$.

(SV^u) Para cada $t \in [a, t_0]$, a função $K(t, \cdot) \in SV([t, t_0], \mathcal{L}(X))$;
para cada $t \in [t_0, b]$, a função $K(t, \cdot) \in SV([t_0, t], \mathcal{L}(X))$ e
 $SV^u[K] = \sup_{t \in [a, b]} SV[K(t, \cdot)] < \infty$.

Em [H5] mostra-se que este é um espaço de Banach com a norma $SV^u[\]$.

Definição 2. Dizemos que um operador $k \in \mathcal{L}(G([a, b], X))$ é causal em relação a $t_0 \in [a, b]$

$$\text{se } x|_{[t_0, t]} \equiv 0 \Rightarrow k(x)|_{[t_0, t]} \equiv 0 \quad \forall t \in]t_0, b] \text{ caso } t_0 \neq b$$

$$\text{e se } x|_{[t, t_0]} \equiv 0 \Rightarrow k(x)|_{[t, t_0]} \equiv 0 \quad \forall t \in [a, t_0[\text{ caso } t_0 \neq a.$$

Denotemos por $\mathcal{L}_c^{t_0}(G([a, b], X))$ o subespaço de $\mathcal{L}(G([a, b], X))$ dos operadores causais em relação a t_0 .

De [H3] teoremas 2.8, 2.9 e 2.10 (ver também [H4] teorema 2.11) concluímos o

Teorema 1.

1) A aplicação $\mathcal{I} : G_0^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X)) \rightarrow \mathcal{L}_c^{t_0}(G_0^+([a, b], X), G([a, b], X))$ (onde aqui $G_0^+([a, b], X) = \{x \in G^+([a, b], X) \mid x(b) = 0\}$) dada por $(\mathcal{I}K)(x)(t) = \int_{t_0}^t ds K(t, s)x(s)$, para $t \in [a, b]$, é uma isometria do primeiro espaço sobre o segundo e para $k \in$

$\mathcal{L}_c^{t_0}(G_0^+([a, b], X), G([a, b], X))$ temos $K = \mathcal{I}^{-1}k$ é dado por (para $p \in X$):

$$\text{para } t_0 \leq s < t \quad K(t, s)p = -k(\chi_{[t, s]}p)(t)$$

$$\text{e para } t < s \leq t_0 \quad K(t, s)p = -k(\chi_{[t, s]}p)(t).$$

2) Analogamente temos $G_0^{+\sigma}.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X)) \equiv \mathcal{L}_c^{t_0}(G_0^+([a, b], X), G^+([a, b], X))$ com a mesma isometria dada em 1).

(A propriedade $(G_0^{+\sigma})$ acrescenta à propriedade (G_0^σ) o fato de a função $K(\cdot, s)p$ ser contínua à direita em $t \in [a, s[$ se $a \leq s \leq t_0$ e em $t \in [s, b[$ se $t_0 \leq s \leq b$.)

Utilizando este teorema, em [LF] (cap.II.1) mostramos que

Proposição 1. Se $f(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \cdot \varphi(\theta) + H(t)$, temos:

$$(0), (1) \text{ e } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} K_\mu \in G_0^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_{t_0}^{t_1}, \mathcal{L}(X)) & \text{para cada } t_0 < t_1 \\ \text{e } H \in G(\mathbf{R}, X) \end{cases}$$

onde $K_\mu(t, s) = \mu(t, s - t)$.

Do mesmo modo, utilizando a parte 2) do teorema 1 temos:

Proposição 2. Se $f(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \varphi(\theta) + H(t)$ então

$$(0)_+, (1) \text{ e } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} K_\mu \in G_0^{+\sigma}.SV^u({}^{t_0}\Gamma_{t_0}^{t_1}, \mathcal{L}(X)) & \text{para cada } t_0 < t_1 \\ \text{e } H \in G^+(\mathbf{R}, X) \end{cases}$$

Também mostramos em [LF] (cap.II.1) a

Proposição 3. Para $g(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \varphi(\theta)$ tal que valem (1) e (2)_{L1}. Temos:

$$(0)_{L_1} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Existe (está bem definido) o núcleo } K_\eta : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X) \text{ com} \\ K_\eta(t, s) = \sigma \int_s^t \eta(\tau, s - \tau) d\tau & \text{para } s \leq t, \text{ ou seja, para } p \in X \\ K_\eta(t, s)p = \int_s^t \eta(\tau, s - \tau) p d\tau & \text{(integral de Bochner-Lebesgue)} \\ \text{e } K_\eta(t, s) = 0 \text{ para } s \geq t \end{cases}$$

e em caso afirmativo temos $K_{\eta}|_{{}^{t_0}\Gamma_{t_0}^{t_1}} \in C_0^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_{t_0}^{t_1}, \mathcal{L}(X))$ (para $t_0 < t_1$). (A propriedade (C_0^σ) acrescenta a (G_0^σ) o fato de $K(\cdot, s)p$ ser contínua).

Em [LF] (cap.II.5) mostramos a seguinte equivalência:

Proposição 4. Para $f, g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ com

$$f(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \varphi(\theta) + H(t) \quad \text{tal que valem (0), (1) e (2)}$$

$$\text{e } g(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \varphi(\theta) \quad \text{tal que valem (0)}_{L_1}, \text{ (1) e (2)}_{L_1}$$

Dados $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ temos que, para $x \in G([t_0 - r, \infty[, X)$, são equivalentes:

1) x é solução de (N) para $t \geq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$

$\Leftrightarrow$

2) x é solução da equação de Volterra–Stieltjes linear

$$(K_N) : \quad x(t) + \int_{t_0-r}^t ds {}^{t_0}K(t, s)x(s) = F(t) \quad \text{para } t \geq t_0 - r$$

com $x(t_0 - r) = \varphi(-r)$, onde

$${}^{t_0}K(t, s) = - {}^\sigma \int_{t_0}^t \eta(\tau, s - \tau) d\tau - \mu(t, s - t) + \mu(t_0, s - t_0) \quad \text{para } t \geq t_0 \text{ e } t_0 - r \leq s \leq t$$

$${}^{t_0}K(t, s) = 0 \quad \text{caso contrário.}$$

e

$$F(t) = \varphi(t - t_0) \quad \text{para } t_0 - r \leq t \leq t_0$$

$$F(t) = H(t) - H(t_0) + \varphi(0) \quad \text{para } t \geq t_0$$

Convém reparar que para $t_0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} {}^{t_0}K(t, s) &= K(t, s) = - \int_s^t \eta(\tau, s - \tau) d\tau - \mu(t, s - t) \\ &= -(K_\eta(t, s) + K_\mu(t, s)) \end{aligned}$$

(K_μ e K_η dados na proposição 1 e 3 respectivamente).

Nas condições da proposição 4, concluímos das proposições 1 e 3 que, para cada $t_1 > t_0$,

$${}^{t_0}K|_{{}^{t_0-r}\Gamma_{t_0-r}^{t_1}} \in G_0^\sigma.SV^u({}^{t_0-r}\Gamma_{t_0-r}^{t_1}, \mathcal{L}(X)).$$

Para considerarmos soluções de (N) para trás (para $t \leq t_0$), vamos supor, além das condições da proposição 4, que existe o salto $A(t) = \mu(t, -r) - \mu(t, -r^+) \in \mathcal{L}(X)$, e $A(t)$ é inversível com $A(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Definimos $\tilde{\mu} = \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X)$ por $\tilde{\mu}(t, \theta) = \mu(t, \theta) - A(t) \cdot \chi_{]-\infty, -r]}(\theta)$.

Mostramos no apêndice 1 a seguinte equivalência:

Proposição 5. Para $f, g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ nas condições da proposição 4 e ainda com f satisfazendo $(0)_+$ e em condições de termos $A(t)$ como acima, temos que dados $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$, então, para $x \in G^+([-\infty, t_0], X)$, são equivalentes:

1) x é solução de (N) para $t \leq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$

$\Leftrightarrow$

2) x é solução da equação de Volterra–Stieltjes linear

$$(\overline{K}_N) : \quad x(t) + \int_{t_0}^t ds \, {}^{t_0}\overline{K}(t, s)x(s) = \overline{F}(t) \quad \text{para } t \leq t_0 \quad \text{com } x(t_0) = \varphi(0)$$

onde

$$\begin{aligned} {}^{t_0}\overline{K}(t, s) = & -A(t+r)^{-1} \cdot \left[\int_{t+r}^{t_0} [\eta(\tau, s-\tau) - \eta(\tau, -r)] d\tau \right. \\ & \left. - \tilde{\mu}(t+r, s-t-r) + \tilde{\mu}(t+r, -r) + \mu(t_0, s-t_0) - \mu(t_0, -r) + \chi_{]t+r, t_0]}(s) \right] \end{aligned}$$

para $t < t_0 - r$ e $t \leq s \leq t_0$ e ${}^{t_0}\overline{K}(t, s) = 0$ caso contrário, e

$$\overline{F}(t) = \varphi(t - t_0) \quad \text{para } t_0 - r \leq t \leq t_0$$

$$\overline{F}(t) = A(t+r)^{-1} \cdot [H(t+r) - H(t_0) + \varphi(0)] \quad \text{para } t < t_0 - r$$

Convém reparar que para $t \leq s \leq t_0 - r$ temos:

$$\begin{aligned} {}^{t_0}\overline{K}(t, s) = \overline{K}(t, s) = & -A(t+r)^{-1} \cdot \left(\int_{t+r}^{s+r} [\eta(\tau, s-\tau) - \eta(\tau, -r)] d\tau \right. \\ & \left. - \tilde{\mu}(t+r, s-t-r) + \tilde{\mu}(t+r, -r) + \chi_{]t+r, \infty]}(s) \right) \end{aligned}$$

($\overline{K}$ definido assim para $t \leq s$ e $\overline{K} \equiv 0$ para $t \geq s$.)

Nas condições da proposição 5, se ainda tivermos $A(\cdot)^{-1} \in G^+(\mathbf{R}, \mathcal{L}(X))$, então das proposições 2 e 3 concluímos que para cada $\tilde{t}_0 < t_0$

$${}^{t_0}\overline{K}|_{{}^{t_0}\Gamma_{\tilde{t}_0}^{t_0}}, \overline{K}|_{{}^{t_0}\Gamma_{\tilde{t}_0}^{t_0}} \in G_0^{+\sigma}.SV^u({}^{t_0}\Gamma_{\tilde{t}_0}^{t_0}, \mathcal{L}(X)).$$

Nas figuras abaixo, são representados os domínios desses núcleos:

Para $t_0 \in [a, b]$, seja $K \in G_0^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X))$.

Dados $F \in G([a, b], X)$ e $p_0 \in X$ consideremos a Equação de Volterra-Stieltjes linear:

$$(K): \quad x(t) - p_0 + \int_{t_0}^t d_s K(t, s) x(s) = F(t) - F(t_0) \quad \text{para } a \leq t \leq b$$

Os resultados principais para a equação (K) são os seguintes (ver [H-4] teorema 3.4):

Teorema 2. Dados $t_0 \in [a, b]$ e $K \in G_0^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X))$, são equivalentes:

- (p-1) Para cada $p_0 \in X$ e $F \in G([a, b], X)$, a equação (K) com estes dados tem uma única solução regradada para $a \leq t \leq b$ e o operador

$$F \in G([a, b], X) \rightarrow x_F \in G([a, b], X)$$

é causal em t_0 .

(Aqui x_F é a solução de (K) com dados $p_0 = F(t_0) \in X$ e $F \in G([a, b], X)$.)

$\Leftrightarrow$

- (p-2) O núcleo K admite um único resolvente $R \in G_I^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X))$

(Aqui na propriedade (G_I^σ) temos $R(t, t) = I_X$, identidade de X , p/ $a \leq t \leq b$) que satisfaz as equações:

$$(R^*) \quad R(t, s) - I_X + \int_s^t d_\tau K(t, \tau) \circ R(\tau, s) = 0 \quad \forall (t, s) \in {}^{t_0}\Gamma_a^b$$

$$(R_*) \quad R(t, s) - K(t, s) - I_X + {}^\sigma \int_s^t d_\tau R(t, \tau) \circ K(\tau, s) = 0 \quad \forall (t, s) \in {}^{t_0}\Gamma_a^b$$

No caso de valer uma dessas propriedades equivalentes temos que a solução única de (K) será dada por:

$$(\rho) \quad x(t) = F(t) + R(t, t_0)[p_0 - F(t_0)] - \int_{t_0}^t .d_\tau R(t, \tau).F(\tau) \quad a \leq t \leq b.$$

Temos também que essas propriedades acima implicam em

- $\Rightarrow$ (p-3) $\forall t \in [t_0, b[$ o operador $I_X - K(t^\dagger, t)$ é inversível e bicontínuo.

(Aqui $K(t^\dagger, t) \in \mathcal{L}(X)$ com $K(t^\dagger, t)p = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [K(t + \epsilon, t)p] \in X$)

e $\forall t \in]a, t_0]$ o operador $I_X - K(t^\cdot, t)$ é inversível e bicontínuo.

Em [H-5] (ver também [H-3] teorema 3.8) dá-se uma condição suficiente para que um núcleo K em $G_0^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X))$ admita um único resolvente. Este é o

Teorema 3. Se $K \in G_0^\sigma.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X))$ é tal que vale

$$\text{caso } t_0 \neq a \begin{cases} \text{a) Para cada } c \in]a, t_0], \exists \delta > 0 \mid \sup_{c-\delta \leq t < c} SV_{[t, c]}[K(t^\cdot, \cdot)] < 1 \\ \text{b) Para cada } d \in [a, t_0[, \exists \delta > 0 \mid \sup_{d \leq t < d+\delta} SV_{[t, d+\delta]}[K(t^\dagger, \cdot)] < 1 \end{cases}$$

$$\text{caso } t_0 \neq b \begin{cases} \text{c) Para cada } c \in [t_0, b[, \exists \delta > 0 \mid \sup_{c < t \leq c+\delta} SV_{[c,t]}[K(t^-, \cdot)] < 1 \\ \text{d) Para cada } d \in]t_0, b], \exists \delta > 0 \mid \sup_{d-\delta < t \leq d} SV_{[d-\delta,t]}[K(t^-, \cdot)] < 1 \end{cases}$$

então $(p-1)$, $(p-2)$ e $(p-3)$ são equivalentes.

Utilizando [H-3] (teorema 2.9) e as fórmulas (R^*) e (ρ) do teorema 2 concluímos a

Proposição 6. Se $K \in G_0^{+\sigma}.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X))$ e vale $(p-2)$ então temos que $R \in G_I^{+\sigma}.SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, \mathcal{L}(X))$ e para $F \in G^+([a, b], X)$ teremos que a solução de (K) , com dados $p_0 \in X$ e F , pertencerá a $G^+([a, b], X)$.

Vamos ver que nas condições da Proposição 4, uma condição suficiente para que cada um dos núcleos ${}^{t_0}K$ (para cada $t_0 \in \mathbb{R}$) e $K = -K_\eta - K_\mu$, definidos na proposição 4, admita um único resolvente é que f satisfaça (3).

Assim, temos a seguinte proposição (demonstrada em [LF] – Apêndice A – proposição 2):

Proposição 7. Sejam $f, g : \mathbb{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ com

$$f(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \varphi(\theta) + H(t)$$

e

$$g(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \varphi(\theta) \quad \text{tais que } f \in \mathcal{X} \text{ e } g \in Y.$$

Então os núcleos ${}^{t_0}K$ (para cada $t_0 \in \mathbb{R}$), $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X)$ definidos na proposição 4 são tais que para cada $t_1 > t_0$ ${}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}}$ e $K|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}}$ satisfazem as propriedades equivalentes $(p-1)$ e $(p-2)$ dadas no teorema 2 (aqui $\Gamma_{t_0-r}^{t_1} = {}^{t_0-r}\Gamma_{t_0-r}^{t_1}$ dado na definição 1).

Na demonstração dada em [LF] (apêndice A – proposição 2), verificamos que quando f satisfaz (3), os núcleos ${}^{t_0}K$ e K satisfazem as condições dadas no teorema 3 e além disso satisfazem a propriedade $(p-3)$. Aplicando o teorema 3 chegamos então à conclusão desejada.

Assim obtemos os núcleos resolventes ${}^{t_0}R : \Gamma_{t_0-r} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ e $R : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(X)$, onde $\Gamma_{t_0-r} = \{(t, s) \in \mathbf{R}^2 \mid t_0 - r \leq s \leq t\}$ e $\Gamma = \{(t, s) \in \mathbf{R} \mid s \leq t\}$. Esses núcleos são tais que, para $t_1 > t_0$, ${}^{t_0}R|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}} \in G_I^\sigma.SV^u(\Gamma_{t_0-r}^{t_1}, \mathcal{L}(X))$ é o resolvente dado em $(p-2)$ para ${}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}}$ e $R|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}} \in G_I^\sigma.SV^u(\Gamma_{t_0}^{t_1}, \mathcal{L}(X))$ é o resolvente dado em $(p-2)$ para $K|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}}$ e temos então ${}^{t_0}R|_{\Gamma_{t_0}} = R|_{\Gamma_{t_0}}$ (pois ${}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0}} = K|_{\Gamma_{t_0}}$) (ver [LF] cap. II-3).

Proposição 8. Para f e g nas condições da proposição 7, para $t_0 \in \mathbf{R}$, a única solução $x = x(\varphi, f, g) \in G([t_0 - r, \infty[, X)$ da equação (N) para $t \geq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}$ satisfaz:

(ρ_N)

$$\begin{aligned} x(t) = & R(t, t_0)[\varphi(0) - \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t_0, \theta) \varphi(\theta)] + [H(t) - R(t, t_0)H(t_0) - \int_{t_0}^t d_\tau R(t, \tau)H(\tau)] \\ & + \int_{-r}^0 d_\theta [\int_{t_0}^t R(t, \sigma) \eta(\sigma, t_0 + \theta - \sigma) d\sigma - \int_{t_0}^t d_\sigma R(t, \sigma) \mu(\sigma, t_0 + \theta - \sigma) + \mu(t, t_0 + \theta - t)] \varphi(\theta) \end{aligned}$$

para $t \geq t_0$.

Prova. Pelas proposições 7 e 4 vemos que $x(\varphi, f, g)$ é a única solução regradada da equação de Volterra–Stieltjes (K_N) dada na proposição 4. Utilizando a fórmula (ρ) do teorema 2 chegamos em (ρ_N) (ver [LF] teorema II-5-7). ■

Vamos ver agora que, nas condições da proposição 5, uma condição suficiente para que cada um dos núcleos ${}^{t_0}\overline{K}$ (para cada $t_0 \in \mathbf{R}$) e $\overline{K}$, definidos na proposição 5, admita um único resolvente é valer $(\widetilde{3})$ para f e $A(\cdot)^{-1} \in G^+(\mathbf{R}, \mathcal{L}(X))$.

Primeiramente vamos mostrar a

Proposição 9. Para $f, g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ com

$$f(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \varphi(\theta) + H(t) \quad \text{tal que valem } (0)_+, (1) \text{ e } (2)$$

$$g(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \varphi(\theta) \quad \text{tal que valem } (0)_{L_1}, (1) \text{ e } (2)_{L_1}$$

temos que

1) Se f satisfaz $(\widetilde{3})$ para cada $\tilde{t}_0 < t_0$ então $A(t)$ é inversível e bicontínuo.

2) f satisfaz $(\widetilde{3})$ para cada $\tilde{t}_0 < t_0$ com $A(\cdot)^{-1} \in G^+(\mathbf{R}, \mathcal{L}(X))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(t) \text{ é inversível e bicontínuo com } A(\cdot)^{-1} \in G^+(\mathbf{R}, \mathcal{L}(X)) \\ \text{e para cada } \tilde{t}_0 < t_0, \sup_{t \in [\tilde{t}_0, t_0]} SV_{[-r, -r+\epsilon]}[\tilde{\mu}(t, \cdot)] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0 \end{cases}$$

Prova. 2) $(\Leftarrow)$ Nesse caso colocamos $L(t) = A(t)^{-1}$ para $t \in \mathbf{R}$ e teremos $(\widetilde{3})$ para cada $\tilde{t}_0 < t_0$ (repare que teremos sempre $c = 0$).

1) Fixemos $\tilde{t}_0 < t_0$ e sejam $L \in G^+([\tilde{t}_0, t_0], \mathcal{L}(X))$ e $0 \leq c < 1$ dados em $(\widetilde{3})$ para f . Temos $\|L(t).A(t) - I_X\| \leq c \quad \forall t \in [\tilde{t}_0, t_0]$ e então sabemos que $L(t).A(t) \in \mathcal{L}(X)$ será inversível e bicontínuo. Como $L(t)$ é injetor concluímos que $A(t)$ é inversível e bicontínuo $(A(t)^{-1} = [L(t).A(t)]^{-1} \circ L(t) \in \mathcal{L}(X))$.

2) $(\Rightarrow)$ É imediato usando 1). ■

Proposição 10. Para f, g nas condições da proposição 9.

Se f satisfaz $(\widetilde{3})$ para cada $\tilde{t}_0 < t_0$ e ainda se temos $A(\cdot)^{-1} \in G^+(\mathbf{R}, \mathcal{L}(X))$ então os núcleos ${}^{t_0}\overline{K}$ (para cada $t_0 \in \mathbf{R}$), $\overline{K} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X)$ definidos na proposição 5, são tais que para cada $\tilde{t}_0 < t_0$, ${}^{t_0}\overline{K}|_{\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}}$ e $\overline{K}|_{\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}}$, onde $\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0} = {}^{t_0}\Gamma_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}$, satisfazem as propriedades equivalentes $(p-1)$ e $(p-2)$ dadas no teorema 2.

A demonstração da proposição 10 segue os passos da demonstração da proposição 7 e será deixada para o apêndice 1.

Assim obtemos os núcleos resolventes

$$\begin{array}{ccc} {}^{t_0}\overline{R} : & \Gamma^{t_0} & \longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ \overline{R} : & \tilde{\Gamma} & \longrightarrow \mathcal{L}(X) \end{array}$$

onde $\Gamma^{t_0} = \{(t, s) \in \mathbf{R}^2 \mid t \leq s \leq t_0\}$, $\tilde{\Gamma} = \{(t, s) \in \mathbf{R}^2 \mid t \leq s\}$. Esses núcleos são tais que para $\tilde{t}_0 < t_0$

${}^{t_0}\overline{R}|_{\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}} \in G_I^{+\sigma}.SV^u(\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}, \mathcal{L}(X))$ é o resolvente dado em $(p-2)$ para ${}^{t_0}\overline{K}|_{\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}}$ e

$\bar{R}_{|\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}} \in G_I^{+\sigma}.SV^u(\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}, \mathcal{L}(X))$ é o resolvente dado em (p-2) para $\bar{K}_{|\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}}$

e temos então ${}^{t_0}\bar{R}_{|\Gamma^{t_0-r}} = \bar{R}_{|\Gamma^{t_0-r}}$ (pois ${}^{t_0}\bar{K}_{|\Gamma^{t_0-r}} = \bar{K}_{|\Gamma^{t_0-r}}$).

Também no apêndice 1, proposição 5, demonstramos a:

Proposição 11. Para f, g como na proposição anterior, para $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ a única solução $x = x(\varphi, f, g) \in G^+([-\infty, t_0], X)$ da equação (N) para $t \leq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$ (garantida pelo corolário 5.1, pois nesse caso $f_{||-\infty, t_0] \times \mathcal{G}_0^+} \in \tilde{\mathcal{X}}_{t_0}^+$ e $g_{||-\infty, t_0] \times \mathcal{G}_0^+} \in \tilde{Y}_{t_0}$) é tal que (para $t < t_0 - r$):

$(\widetilde{\rho_N})$

$$\begin{aligned} x(t) = & A(t+r)^{-1}[H(t+r) - H(t_0) + \varphi(0)] \\ & + \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1}[H(\tau+r) - H(t_0) + \varphi(0)] \\ & - A(t+r)^{-1} \int_{-r}^0 d_\theta \left[\int_{t+r}^{t_0} \eta(\sigma, t_0 + \theta - \sigma) d\sigma \right. \\ & \quad \left. - \tilde{\mu}(t+r, t_0 + \theta - t - r) + \mu(t_0, \theta) \right] \varphi(\theta) \\ & - \int_{-r}^0 d_\theta \left[\int_t^{t_0-r} d_\sigma \bar{R}(t, \sigma) A(\sigma+r)^{-1} \left[\int_{\sigma+r}^{t_0} \eta(w, t_0 + \theta - w) dw \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \tilde{\mu}(\sigma+r, t_0 + \theta - \sigma - r) + \mu(t_0, \theta) \right] \right] \varphi(\theta) \\ & - \int_{-r}^0 d_\theta \bar{R}(t, t_0 + \theta - r) A(t_0 + \theta)^{-1} \varphi(\theta) + \gamma_\varphi(t) \end{aligned}$$

onde γ_φ está definida na proposição 5 do apêndice 1.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema a seguir, que constitui-se numa extensão do teorema do Cap. 12.8 de [Hale 2], pois nos fornece a fórmula de Variação-das-Constantes de (N) no Espaço de Fase $\mathcal{G}^+$.

Consideremos a equação

$$(N) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - f(t, x_t)) = g(t, x_t) \quad \text{para } t \in \mathbf{R}$$

com $f, g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$

$$\begin{aligned} f(t, \varphi) &= \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \varphi(\theta) + H(t) \\ g(t, \varphi) &= \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \varphi(\theta) \end{aligned}$$

tais que $f \in \tilde{\mathcal{X}}^+$ e $g \in Y$.

Para cada $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$, consideremos a solução global $x = x(t_0, \varphi, f, g) = x(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) \in G^+(\mathbf{R}, X)$ de (N) com $x_{t_0} = \varphi$.

Para $t, t_0 \in \mathbf{R}$, seja $T(t, t_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+)$ o operador de evolução da equação linear homogênea associada a (N) definido por $T(t, t_0)\varphi = x_t(t_0, \varphi, 0, \mu, \eta)$ (ver observação 3.4 e proposição 5.1) e para $p \in X$ seja $\chi_0 p = \chi_{\{0\}} p \in \mathcal{G}^+$, a função dada por

$$\begin{cases} \chi_0 p(\theta) = 0 & -r \leq \theta < 0 \\ \chi_0 p(0) = p \end{cases}$$

e finalmente, definindo para $t, t_0 \in \mathbf{R}$ o operador $U(t, t_0) \in \mathcal{L}(X)$ por $U(t, t_0)p = T(t, t_0)\chi_0 p(0)$ ou seja, $U(t, t_0)p = x(t_0, \chi_0 p, 0, \mu, \eta)(t)$ (assim $T(t, t_0)\chi_0 p = U_t(\cdot, t_0)p \in \mathcal{G}^+$) podemos definir a integral $\int_{t_0}^t d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau) \in \mathcal{G}^+$ no sentido fraco por

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^t d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau) \right)(\theta) &= \int_{t_0}^t (d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau))(\theta) = \\ &= \int_{t_0}^t d_\tau U_t(\theta, \tau) \cdot H(\tau) = \int_{t_0}^t d_\tau U(t + \theta, \tau) H(\tau) \end{aligned}$$

que estará bem definida, como veremos a seguir.

Teorema 4. A solução $x = x(t_0, \varphi, H, \mu, \eta)$ pode ser representada na forma

$$\begin{aligned} \text{(V)} \quad x_t(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) &= T(t, t_0)\varphi - T(t, t_0)\chi_0 H(t_0) + \chi_0 H(t) + \int_{t_0}^t d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau) \\ t &\in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Prova. Temos a solução de (N) $x(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) \in G^+(\mathbf{R}, X)$ que satisfará então a fórmula (ρ_N) para $t \geq t_0$, dada na proposição 8 e também a fórmula $(\tilde{\rho}_N)$ para $t < t_0 - r$, dada na proposição 11.

Para $t, t_0 \in \mathbf{R}$, vamos definir o operador $\kappa(t, t_0) : G^+(\mathbf{R}, X) \rightarrow \mathcal{G}^+$ por

$$\kappa(t, t_0)H = x_t(t_0, 0, H, \mu, \eta) \in \mathcal{G}^+.$$

Das fórmulas (ρ_N) e $(\tilde{\rho}_N)$ concluimos que, para $\theta \in [-r, 0]$,

$$(\kappa(t, t_0)H)(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{se } t + \theta \leq t_0 \\ H(t + \theta) - R(t + \theta, t_0)H(t_0) - \int_{t_0}^{t+\theta} d_\tau R(t + \theta, \tau)H(\tau), & \text{se } t + \theta \geq t_0 \end{cases}$$

para $t \geq t_0$, e

$$(\kappa(t, t_0)H)(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } t + \theta \geq t_0 - r \\ A(t + \theta + r)^{-1}[H(t + \theta + r) - H(t_0)] \\ + \int_{t+\theta}^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t + \theta, \tau)A(\tau + r)^{-1}[H(\tau + r) - H(t_0)] & \text{se } t + \theta < t_0 - r \end{cases}$$

para $t \leq t_0$.

Também das fórmulas (ρ_N) e $(\tilde{\rho}_N)$ vemos que

$$x_t(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) = T(t, t_0)\varphi + \kappa(t, t_0)H.$$

Utilizando também as fórmulas (ρ_N) e $(\tilde{\rho}_N)$ para $\varphi = \chi_0 p$ ($p \in X$) e $H \equiv 0$ temos que

$$\begin{cases} U(t, t_0)p = x(t_0, \chi_0 p, 0, \mu, \eta)(t) = R(t, t_0)p & \text{para } t \geq t_0 \\ U(t, t_0)p = A(t + r)^{-1}p + \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau)A(\tau + r)^{-1}p & \text{para } t < t_0 - r \\ U(t, t_0)p = 0 & \text{para } t_0 - r \leq t < t_0 \end{cases}$$

Então podemos dizer que, para $t \geq t_0$

$$\kappa(t, t_0)H = \chi_0 H(t) - T(t, t_0)\chi_0 H(t_0) - \int_{t_0}^t d_\tau T(t, \tau)\chi_0 H(\tau)$$

e vale (V) para $t \geq t_0$ pois nesse caso

$$\left(\int_{t_0}^t d_\tau T(t, \tau)\chi_0 H(\tau) \right)(\theta) = \int_{t_0}^t d_\tau U(t + \theta, \tau)H(\tau) = \int_{t_0}^t d_\tau R(t + \theta, \tau)H(\tau) =$$

$$= \begin{cases} \int_{t_0}^{t+\theta} d_\tau R(t+\theta, \tau) H(\tau) - H(t+\theta) & \text{se } t_0 \leq t+\theta < t \\ & \text{(ou seja, } \theta \neq 0 \text{ e } t+\theta \geq t_0) \\ 0 & \text{se } t+\theta < t_0 \\ & \text{(ou seja, } \theta \neq 0 \text{ e } t+\theta < t_0) \\ \int_{t_0}^t d_\tau R(t, \tau) H(\tau) & \text{se } \theta = 0 \end{cases}$$

(Supomos aqui $R(t, s) = 0$ para $t < s$.)

Repare agora que, para $t+\theta < t_0 - r$,

$$\begin{aligned} \left(\int_{t+\theta}^{t_0-r} d_\tau T(t, \tau+r) \chi_0 H(\tau+r) \right)(\theta) &= \int_{t+\theta}^{t_0-r} d_\tau U(t+\theta, \tau+r) \cdot H(\tau+r) \\ &= A(t+\theta+r)^{-1} H(t+\theta+r) + \int_{t+\theta}^{t_0-r} d_\tau [A(t+\theta+r)^{-1} \\ &\quad + \int_{t+\theta}^\tau d_\sigma \bar{R}(t+\theta, \sigma) A(\sigma+r)^{-1}] H(\tau+r) \\ &= A(t+\theta+r)^{-1} H(t+\theta+r) + \int_{t+\theta}^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t+\theta, \tau) A(\tau+r)^{-1} H(\tau+r) \end{aligned}$$

pois

$$\begin{cases} U(t+\theta, \tau+r) H(\tau+r) = A(t+\theta+r)^{-1} H(\tau+r) + \int_{t+\theta}^\tau d_\sigma \bar{R}(t+\theta, \sigma) A(\sigma+r)^{-1} H(\tau+r) \\ \quad \text{para } t+\theta < \tau \leq t_0 - r \\ U(t+\theta, \tau+r) H(\tau+r) = 0 \quad \text{quando } t+\theta = \tau \end{cases}$$

Assim, temos que para $t < t_0$ e $\theta \in [-r, 0]$

$$(\kappa(t, t_0)H)(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } t+\theta \geq t_0 - r \\ \left(\int_{t+\theta+r}^{t_0} d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau) \right)(\theta) - (T(t, t_0) \chi_0 H(t_0))(\theta) & \text{se } t+\theta < t_0 - r \end{cases}$$

(Repare que $(T(t, t_0) \chi_0 H(t_0))(\theta) = U(t+\theta, t_0) H(t_0) = A(t+\theta+r)^{-1} H(t_0) + \int_{t+\theta}^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t+\theta, \tau) A(\tau+r)^{-1} \cdot H(t_0)$ se $t+\theta < t_0 - r$.)

Então podemos dizer que, para $t < t_0$,

$\kappa(t, t_0)H = \chi_0 H(t) - T(t, t_0) \chi_0 H(t_0) - \int_{t_0}^t d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau)$, ou seja, que vale (V) para $t < t_0$, pois nesse caso,

quando $\theta \neq 0$ temos $(\chi_0 H(t))(\theta) = 0$ e

$$-(\int_{t_0}^t d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau))(\theta) = \begin{cases} (\int_{t+\theta+r}^{t_0} d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau))(\theta) & \text{se } t + \theta < t_0 - r \\ 0 & \text{se } t + \theta \geq t_0 - r \geq \tau - r \\ (\text{pois } (T(t, \tau) \chi_0 H(\tau))(\theta) = U(t + \theta, \tau) H(\tau) = 0 \\ \text{para } \tau - r \leq t + \theta < t \leq \tau) \end{cases}$$

Repare também que quando $t + \theta \geq t_0 - r$ temos

$$(T(t, t_0) \chi_0 H(t_0))(\theta) = U(t + \theta, t_0) H(t_0) = 0.$$

Quando $\theta = 0$ temos $(\chi_0 H(t))(0) = H(t)$ e

$$-(\int_{t_0}^t d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau))(0) = \begin{cases} -H(t) + (\int_{t+r}^{t_0} d_\tau T(t, \tau) \chi_0 H(\tau))(0) & \text{se } t < t_0 - r \\ (\text{repare que } (T(t, \tau) \chi_0 H(\tau))(0) = U(t, \tau) H(\tau) \\ \text{salta de 0 para } H(t) \text{ quando } \tau \rightarrow t^+) \\ -H(t) & \text{quando } t_0 - r \leq t < t_0 \end{cases}$$

■

Corolário 1. Supondo $H \in C(\mathbf{R}, X)$ temos

$$1) x_t(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) = T(t, t_0) \varphi + \int_{t_0}^t T(t, \tau) \chi_0 dH(\tau) \quad \text{para } t \geq t_0.$$

$$(\text{Aqui } (\int_{t_0}^t T(t, \tau) \chi_0 dH(\tau))(\theta) = \int_{t_0}^t U(t + \theta, \tau) dH(\tau) \quad \text{para } \theta \in [-r, 0]).$$

2) Se também temos $A(\cdot)^{-1} \in C(\mathbf{R}, X)$ então para $t < t_0$ e $\theta \in [-r, 0]$

$$(\kappa(t, t_0) H)(\theta) = \int_t^{t_0} \bar{R}(t + \theta, \tau - r) dA(\tau)^{-1} [H(t_0) - H(\tau)]$$

(supondo aqui $\bar{R}(t, s) = 0$ para $s < t$) e se $t + \theta \neq t_0 - r$,

$$T(t, t_0) \chi_0 p(\theta) = U(t + \theta, t_0) p = \bar{R}(t + \theta, t_0 - r) A(t_0)^{-1} p - \int_{t-r}^{t_0-r} \bar{R}(t + \theta, \tau) d_\tau A(\tau + r)^{-1} p$$

(quando $t + \theta = t_0 - r$, $T(t, t_0) \chi_0 p(\theta) = 0$).

3) Se $A(\cdot)^{-1} = A^{-1}$ é constante com t (como no caso autônomo, por exemplo) temos que vale

$$(\wedge) \quad x_t(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) = T(t, t_0)\varphi + \int_{t_0}^t T(t, \tau)\chi_0 dH(\tau) \quad \text{para } t \in \mathbf{R}$$

Prova. Podemos fazer a integração por partes nas fórmulas de $(\kappa(t, t_0)H)(\theta)$ e de $(T(t, t_0)\chi_0 p)(\theta) = U(t + \theta, t_0)p$ dadas no teorema 4 e usar o fato de $\bar{R}(t, s) = 0$ para $s < t$. ■

Observação 1. Para finalizar o parágrafo, podemos dizer que para a equação (N) temos que para $t, t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$

$$\tau(t, t_0)\varphi = T(t, t_0)\varphi + \kappa(t, t_0)H$$

onde $\tau(t, t_0)\varphi = x_t(t_0, \varphi, H, \mu, \eta)$ é o operador de evolução de (N) dado na definição 5.1 e com isso mostramos que $\forall t, s, t_0 \in \mathbf{R}$ temos $T(t, s) \circ \kappa(s, t_0) = \kappa(t, t_0) - \kappa(t, s)$ pois para $\varphi \in \mathcal{G}^+$ vale $\tau(t, s) \cdot \tau(s, t_0)\varphi = \tau(t, t_0)\varphi$.

Assim $\tau(t, s)[T(s, t_0)\varphi + \kappa(s, t_0)H] = T(t, t_0)\varphi + \kappa(t, t_0)H$, ou seja,
 $T(t, s)[T(s, t_0)\varphi + \kappa(s, t_0)H] + \kappa(t, s)H = T(t, t_0)\varphi + \kappa(t, t_0)H$.

Como $T(t, s)$ é linear e também $T(t, s) \cdot T(s, t_0) = T(t, t_0)$, chegamos ao que queremos. Da proposição 5.1 já concluímos que $\tau(t, t_0) \in C(\mathcal{G}^+, \mathcal{G}^+)$ e $T(t, t_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+)$.

Para $\kappa(t, t_0) : G^+(\mathbf{R}, X) \rightarrow \mathcal{G}^+$ que é claramente linear; vemos que

$\kappa(t_0, t_0) = 0$ e $\kappa(t, t_0)H$ só depende dos valores de H entre t e t_0 e dos teoremas 3.2 e 5.2 concluímos que

$$\kappa(t, t_0) \in \mathcal{L}(G^+(I, X), \mathcal{G}^+) \quad \text{onde } I = [t_0, t] \text{ se } t_0 < t \text{ ou } I = [t, t_0] \text{ se } t < t_0,$$

pois $\|H - \bar{H}\|$ em $G^+(I, X)$ é igual a $\|f - \bar{f}\|_1$ em $\mathcal{X}_I^+ \cap \tilde{\mathcal{X}}_I^+$ (onde evidentemente $f(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta)\varphi(\theta) + H(t)$ e $\bar{f}(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta)\varphi(\theta) + \bar{H}(t)$).

II

ASPECTOS GEOMÉTRICOS, CONJUGAÇÕES DE FLUXOS E TEORIA ESPECTRAL NO ESPAÇO DE FASE $\mathcal{G}^+$

1. O Caso Autônomo

Neste capítulo consideraremos a equação neutra autônoma

$$(N) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - f(x_t)) = g(x_t) \quad t \in \mathbf{R}$$

ou na forma integral, para $t_0 \in \mathbf{R}$

$$x(t) = x(t_0) + f(x_t) - f(x_{t_0}) + \int_{t_0}^t g(x_s) ds, \quad t \in \mathbf{R}$$

com $f, g : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$.

Definição 1. Para $f : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ seja $\bar{f} : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ dada por $\bar{f}(t, \varphi) = f(\varphi)$
 $\forall (t, \varphi) \in \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+$.

Para $k \in \mathbf{N}$ ou $k = \infty$, definimos os espaços vetoriais:

$$\tilde{\mathcal{X}}^k = \{f : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid \bar{f} \in \tilde{\mathcal{X}}^+ \text{ e } \bar{f}|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in \tilde{\mathcal{X}}_{[t_0, t_1]}^k \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbf{R}, t_0 < t_1\}$$

$$Y^k = \{g : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid \bar{g} \in Y \text{ e } \bar{g}|_{[t_0, t_1] \times \mathcal{G}_0^+} \in Y_{[t_0, t_1]}^k \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbf{R}, t_0 < t_1\}$$

(Y definido na observação I-1.4; $\mathcal{X}_{[t_0, t_1]}^k$ e $Y_{[t_0, t_1]}^k$ definidos na observação I-4.1 e $\tilde{\mathcal{X}}^+$ definido no corolário I-5.2).

Assim, para $f : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ temos que $f \in \tilde{\mathcal{X}}^k$ se e somente se valem as propriedades

(0)₊ Fixado $x \in G(\mathbf{R}, X)$, a função $t \in \mathbf{R} \rightarrow f(x_t) \in X$ é regrada e contínua à direita.

(1)^k f é de classe C^k (e temos $f' : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$, etc).

(2)^k $\|f'\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{G}} \|f'(\varphi)\| < \infty$ e para $i = 1, 2, \dots, k$ e $M > 0$ temos que $\exists L_M^i =$
 $= L_M^i(f)$ tal que $\|f^{(i)}(\varphi) - f^{(i)}(\psi)\| \leq L_M^i \cdot \|\varphi - \psi\|$ sempre que $\|\varphi\| \leq M, \|\psi\| \leq M$.

- (3) $\sup_{\varphi \in \mathcal{G}} SV_{[-\epsilon, 0]}[\mu_\varphi] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0$ (onde o núcleo $\mu_\varphi \in SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ é tal que $f'(\varphi) \cdot \Delta\varphi = \int_{-r}^0 d\mu_\varphi(\theta) \Delta\varphi(\theta)$ para $\varphi, \Delta\varphi \in \mathcal{G}$)
- (3) Para $\varphi \in \mathcal{G}$ existe o salto $A_\varphi = \mu_\varphi(-r) - \mu_\varphi(-r^+) \in \mathcal{L}(X)$ e existe $0 \leq c < 1$ e $L \in \mathcal{L}(X)$ injetor, tal que $\|L \circ A_\varphi - I_X\| \leq c \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}$ e $\sup_{\varphi \in \mathcal{G}} SV_{[-r, -r+\epsilon]}[\tilde{\mu}_\varphi] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0$ onde $\tilde{\mu}_\varphi = \mu_\varphi - A_\varphi \chi_{\{-r\}}$, ou seja, $\tilde{\mu}_\varphi(\theta) = \mu_\varphi(\theta)$ para $-r < \theta \leq 0$ e $\tilde{\mu}_\varphi(-r) = \mu_\varphi(-r^+)$.

No caso autônomo, verifica-se facilmente que $(2)^k \Leftrightarrow (2)_{L_1}^k$. Assim, para $g : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ temos que $g \in Y^k$ se e somente se valem as propriedades:

- (0)_{L₁}: Fixado $x \in G(\mathbf{R}, X)$, a função $t \in \mathbf{R} \rightarrow g(x_t) \in X$ é localmente integrável;
- (1)^k e (2)^k descritas acima.

Reparemos que em $\tilde{\mathcal{X}}^0$ e Y^0 temos ainda funções de classe C^1 e se $f \in \tilde{\mathcal{X}}^0$ e $g \in Y^0$ então sabemos que (corolário I-5.2) para cada $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ existe um único $x = x(t_0, \varphi, f, g) \in G^+(\mathbf{R}, X)$ solução de (N) para $t \in \mathbf{R}$ com $x_{t_0} = \varphi$.

Definição 2. Supondo $f \in \tilde{\mathcal{X}}^0$ e $g \in Y^0$, temos o grupo de homeomorfismos de evolução $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$, onde para $t \in \mathbf{R}$ temos

$$\tau(t) : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+ \quad \text{dado por} \quad \tau(t)\varphi = x_t(0, \varphi, f, g).$$

Pela unicidade de solução (N) em $G^+(\mathbf{R}, X)$ temos que para $t_0, t \in \mathbf{R}$

$$\tau(t, t_0) = \tau(t - t_0) \quad (\text{ou seja, } x_t(t_0, \varphi, f, g) = x_{t-t_0}(0, \varphi, f, g))$$

onde $\tau(t, t_0)$ é o operador de evolução (ver definição I-5.1) para a equação autônoma (N), ou seja, (N) com os dados $\bar{f} \in \tilde{\mathcal{X}}^+$ e $\bar{g} \in Y$ (por abuso de linguagem, usamos a mesma letra τ para o operador desta definição). Deste fato decorre que $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ é um grupo

de operadores, pois

$$\begin{cases} \tau(t) \circ \tau(s) = \tau(t+s) & \forall t, s \in \mathbf{R} \\ \tau(0) = I_{\mathcal{G}^+} & (\text{identidade de } \mathcal{G}^+) \\ \tau(t)^{-1} = \tau(-t) & \forall t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

e da proposição I-5.1 concluímos que $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ é um grupo de homeomorfismos.

Observação 1. Para $f \in \tilde{\mathcal{X}}^k \subset \tilde{\mathcal{X}}^0$ e $g \in Y^k \subset Y^0$ temos que

$$\tau(t) : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+ \text{ é de classe } C^k \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

(ver teoremas I-4.2 e I-5.4).

Assim, para $k \geq 1$ temos que $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ é um grupo de difeomorfismos C^k .

Definição 3. Para $p \in X$ seja $\hat{p} = \chi_{[-r,0]} p \in \mathcal{G}^+$ ($\hat{p}(\theta) = p \quad \forall \theta \in [-r,0]$) e sejam $f \in \tilde{\mathcal{X}}^0$, $g \in Y^0$. Dizemos que $\varphi \in \mathcal{G}^+$ é ponto de equilíbrio da equação (N) ou ainda ponto fixo do grupo $\{\tau(t)\}$ se $\tau(t)\varphi = \varphi$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

Vemos facilmente que φ é ponto fixo de (N) se e somente se $\varphi = \hat{p}$ para algum $p \in X$ e $g(\hat{p}) = 0$ (nesse caso a única solução regrada de (N) é a solução com a imagem $\{p\}$).

Se $f \in \tilde{\mathcal{X}}^1$, $g \in Y^1$ e $g(\hat{p}) = 0$ para algum $p \in X$, nós podemos considerar a equação variacional linear de (N) em torno da solução constante ($x(t) = p \quad \forall t \in \mathbf{R}$), dada nos teoremas I-4.2 e I-5.4, que nesse caso ainda será autônoma e será

$$(N)' : \quad y(t) = f'(\hat{p})y_t + \int_{t_0}^t g'(\hat{p})y_s ds - f'(\hat{p})y_{t_0} + y(t_0) \quad \text{para } t \in \mathbf{R}$$

Repare que

$$f \in \tilde{\mathcal{X}}^1 \Rightarrow f'(\hat{p}) \in \tilde{\mathcal{X}}^0$$

$$g \in Y^1 \Rightarrow g'(\hat{p}) \in Y^0$$

e temos então que para cada $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\Delta\varphi \in \mathcal{G}^+$ existe um único $y = y(t_0, \Delta\varphi, f'(\hat{p}), g'(\hat{p})) \in G^+(\mathbf{R}, X)$ solução de $(N)'$ para $t \in \mathbf{R}$ com $y_{t_0} = \Delta\varphi$ e com isso temos para $(N)'$ o grupo de homeomorfismos da definição 2,

$$\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}} \text{ com } T(t) : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+, \quad T(t) \cdot \Delta\varphi = y_t(0, \Delta\varphi, f'(\hat{p}), g'(\hat{p})).$$

Nesse caso, como $(N)'$ é linear, temos que $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ é um grupo de automorfismos de $\mathcal{G}^+$, ou seja, para $t \in \mathbf{R}$, $T(t)$ e $T(t)^{-1} = T(-t) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+)$ (ver observação I-3.4 e proposição I-5.1).

Observação 2. Quando $f \in \tilde{\mathcal{X}}^1$, $g \in Y^1$ e $g(\hat{p}) = 0$ para algum $p \in X$ concluímos então, dos teoremas I-4.2 e I-5.4, que

$$\tau(t)'(\hat{p}) = T(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

2. Equilíbrio Hiperbólico

Recordemos primeiramente a

Definição 1. Um operador $L : E \rightarrow E$ (E espaço de Banach, $L \in \mathcal{L}(E)$) é dito hiperbólico quando seu espectro não intercepta a circunferência de raio 1 dos complexos, ou seja, quando $\sigma(L) \cap S^1 = \emptyset$.

Denotemos por $r_\sigma(L)$ o raio espectral de L .

Proposição 1. Para $L : E \rightarrow E$ automorfismo do espaço de Banach E , são equivalentes:

1) L é hiperbólico

$\Leftrightarrow$

2) Existem E_s , E_u subespaços fechados de E , invariantes por L e L^{-1} com $E = E_s \oplus E_u$ e com $r_\sigma(L_s) < 1$ e $r_\sigma(L_u^{-1}) < 1$ onde $L_s = L|_{E_s}$, $L_u^{-1} = L|_{E_u}^{-1}$.

$\Leftrightarrow$

3) Existem E_s, E_u subespaços fechados de E , invariantes por L e L^{-1} com $E = E_s \oplus E_u$ e uma norma $||| \cdot |||$ equivalente à norma de E e $a \in \mathbf{R}$, $a < 1$ tal que $x \in E_s \Rightarrow |||Lx||| \leq a|||x|||$ $x \in E_u \Rightarrow |||L^{-1}x||| \leq a|||x|||$.

Em caso afirmativo temos a seguinte caracterização de E_s e E_u :

$$E_s = \{x \in E \mid L^n x \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\} = \{x \in E \mid \exists M > 0 \text{ com } \|L^n x\| \leq M, \forall n \in \mathbf{N}\}$$

$$E_u = \{x \in E \mid L^{-n} x \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\} = \{x \in E \mid \exists M > 0 \text{ com } \|L^{-n} x\| \leq M, \forall n \in \mathbf{N}\}$$

Para a demonstração dessa proposição, ver [N].

Para a equação neutra autônoma (N) do §1, com $f \in \tilde{\mathcal{X}}^1$ e $g \in Y^1$ tal que $\exists p \in X$ com $g(\hat{p}) = 0$, ou seja, $\varphi = \hat{p} \in \mathcal{G}^+$ é ponto fixo de (N) , temos a seguinte

Definição 2. Dizemos que $\varphi = \hat{p} \in \mathcal{G}^+$ é ponto fixo hiperbólico (ou equilíbrio hiperbólico) da equação (N) se além de $g(\hat{p}) = 0$ temos que existe $t > 0$ tal que $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+)$ é hiperbólico. ($T(t)$ é o operador de evolução da equação variacional $(N)'$, a linearizada de (N) em torno do ponto fixo $\hat{p}$.)

Proposição 2. Para $\varphi = \hat{p}$ ponto fixo de (N) ($g(\hat{p}) = 0$) temos:

$\hat{p}$ é ponto fixo hiperbólico de (N)

$\Leftrightarrow$

$T(t)$ é automorfismo hiperbólico de $\mathcal{G}^+$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$;

Em caso afirmativo, existem subespaços fechados $\mathcal{G}_s^+$ e $\mathcal{G}_u^+ \subset \mathcal{G}^+$ com $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_s^+ \oplus \mathcal{G}_u^+$, subespaços invariantes por $T(t) \forall t \in \mathbf{R}$ e caracterizados por

$$\mathcal{G}_s^+ = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid T(t)\varphi \rightarrow 0 \text{ } t \rightarrow \infty\}$$

$$\mathcal{G}_u^+ = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid T(t)\varphi \rightarrow 0 \text{ } t \rightarrow -\infty\}.$$

E ainda temos que $\exists K, \alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, tal que

$$\varphi \in \mathcal{G}_s^+ \Rightarrow \|T(t)\varphi\| \leq K e^{-\alpha t} \|\varphi\| \quad \forall t \geq 0$$

$$\varphi \in \mathcal{G}_u^+ \Rightarrow \|T(t)\varphi\| \leq K e^{\alpha t} \|\varphi\| \quad \forall t \leq 0$$

Prova. Como o inverso de um automorfismo hiperbólico também é hiperbólico, para mostrarmos a equivalência do enunciado da proposição, basta mostrarmos que se $T(t_0)$ é hiperbólico para algum $t_0 > 0$ então $T(t)$ será hiperbólico para $\forall t > 0$.

Supondo $T(t_0)$ hiperbólico, seja $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_s^+ \oplus \mathcal{G}_u^+$ com $\mathcal{G}_s^+, \mathcal{G}_u^+$ dados pela proposição 1, ou seja,

$$\mathcal{G}_s^+ = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid T(nt_0)\varphi \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty\}$$

$$\mathcal{G}_u^+ = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid T(-nt_0)\varphi \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty\}$$

Pela continuidade da solução de $(N)'$ em relação ao dado inicial $\varphi = 0 \in \mathcal{G}^+$ para $0 \leq t \leq t_0$ (teorema I-3.2) podemos afirmar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \|\psi\| \leq \delta \Rightarrow \|T(t)\psi\| \leq \varepsilon \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_0, \psi \in \mathcal{G}^+.$$

Se $\varphi \in \mathcal{G}_s^+$ então $\exists n_\delta \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\delta$ temos que $\|T(nt_0)\varphi\| \leq \delta$. Assim, para $t \geq n_\delta t_0$ temos que $t = nt_0 + \xi$ com $n \geq n_\delta$ e $0 \leq \xi < t_0$ e assim $\|T(t)\varphi\| = \|T(\xi)(T(nt_0)\varphi)\| \leq \varepsilon$. Logo, mostramos que:

$$\mathcal{G}_s^+ = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid T(t)\varphi \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty\}$$

Analogamente (usando agora o teorema I-5.2), concluímos que

$$\mathcal{G}_u^+ = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid T(t)\varphi \rightarrow 0 \quad t \rightarrow -\infty\}$$

Vemos então que $\mathcal{G}_s^+$ e $\mathcal{G}_u^+$ são invariantes por $T(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Seja $t > 0$. Vamos mostrar agora que $r_\sigma(T(t)|_{\mathcal{G}_s^+}) < 1$. Para $n \in \mathbb{N}$, temos $nt = mt_0 + \xi$ com $m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \xi < t_0$. Assim,

$$\|T(t)^n\|^{1/n} = \|T(mt_0).T(\xi)\|^{1/n} \leq \|T(\xi)\|^{1/n} \cdot (\|T(t_0)^m\|^{1/m})^{m/n}$$

Mas $\sup_{\xi \in [0, t_0]} \|T(\xi)\| = k < \infty$ pelo Princípio da Limitação Uniforme (pois para cada $\varphi \in \mathcal{G}^+$, $\sup_{\xi \in [0, t_0]} \|T(\xi)\varphi\| < \infty$). Assim

$$\|T(t)^n\|^{1/n} \leq k^{1/n} \cdot (\|T(t_0)^m\|^{1/m})^{m/n}$$

Como $r_\sigma(T(t_0)|_{\mathcal{G}_s^+}) < 1$, existem $a < 1$ e $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m > m_0$, $\|T(mt_0)|_{\mathcal{G}_s^+}\|^{1/m} \leq a$, ou seja,

$$\|T(nt)|_{\mathcal{G}_s^+}\|^{1/n} \leq k^{1/n} \cdot a^{m/n}$$

Tomando o limite superior para $n \rightarrow \infty$ (lembrar que $m/n \rightarrow t/t_0$) temos

$$r_\sigma(T(t)|_{\mathcal{G}_s^+}) \leq 1 \cdot a^{t/t_0} < 1$$

Analogamente mostramos que $r_\sigma(T(-t)|_{\mathcal{G}_u^+}) < 1$ e assim pela proposição 1 vemos que $T(t_0)$ hiperbólico $\Rightarrow T(t)$ hiperbólico.

Finalmente, para $t > 0$, com $t = nt_0 + \xi$, $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in [0, t_0[$ ($t_0 > 0$ fixado), sendo $k = \sup_{\xi \in [0, t_0]} \|T(\xi)\| < \infty$ (pelo P.L.U.) temos que, para $\varphi \in \mathcal{G}_s^+$:

$$\begin{aligned} \|T(t)\varphi\| &\leq \|T(\xi)\| \cdot \|T(t_0)^n \varphi\| \leq k \cdot \|T(t_0)^n \varphi\| \\ &\leq k \cdot \bar{K} \|T(t_0)^n \varphi\| \leq k \bar{K} a^n \|\varphi\| \end{aligned}$$

(onde $\|\cdot\|$ e $a < 1$ são dados na proposição 1 para $T(t_0)$ que é hiperbólico). Assim:

$$\|T(t)\varphi\| \leq k \bar{K} \bar{K} a^n \|\varphi\|$$

e para $\varphi \in \mathcal{G}_u^+$:

$$\|T(-t)\varphi\| \leq \bar{k} \bar{K} \bar{K} a^n \|\varphi\| \quad (\bar{k} = \sup_{\xi \in [0, t_0]} \|T(-\xi)\|)$$

e então podemos encontrar K e $\alpha > 0$ tal que

$$\varphi \in \mathcal{G}_s^+ \Rightarrow \|T(t)\varphi\| \leq K \cdot e^{-\alpha t} \|\varphi\| \quad \forall t \geq 0$$

$$\varphi \in \mathcal{G}_u^+ \Rightarrow \|T(t)\varphi\| \leq K \cdot e^{\alpha t} \|\varphi\| \quad \forall t \leq 0. \quad \blacksquare$$

Observação 1. Se a equação autônoma (N) com $f \in \tilde{\mathcal{X}}^0$ e $g \in Y^0$ tem ponto fixo $\hat{p} \in \mathcal{G}^+$ (para algum $p \in X$) então a equação $(N)_{\hat{p}}$ com $f_{\hat{p}} \in \tilde{\mathcal{X}}^0$ e $g_{\hat{p}} \in Y^0$ dados por

$f_{\hat{p}}(\varphi) = f(\varphi + \hat{p})$ e $g_{\hat{p}}(\varphi) = g(\varphi + \hat{p})$ terá ponto fixo $0 \in \mathcal{G}^+$ (pois $g_{\hat{p}}(0) = g(\hat{p}) = 0$) e mais ainda, essas equações terão os mesmos fluxos em $\mathcal{G}^+$, a menos de uma translação de $\hat{p}$, pois do teorema de existência e unicidade de solução em $G^+(\mathbf{R}, X)$ para (N) e $(N)_{\hat{p}}$ respectivamente, concluímos que

$$x(0, \varphi, f, g) = x(0, \varphi - \hat{p}, f_{\hat{p}}, g_{\hat{p}}) + \hat{p}$$

(aqui $\hat{p}$ é a solução com imagem constante $p \in X$), e então

$$\tau(t)\varphi = \tau_{\hat{p}}(t)[\varphi - \hat{p}] + \hat{p} \quad (\tau_{\hat{p}}(t) \text{ operador de evolução de } (N)_{\hat{p}}).$$

Então, de agora em diante, quando estudarmos a equação autônoma (N) com ponto fixo, não há perda de generalidade em considerarmos o ponto fixo sendo $\varphi = 0 \in \mathcal{G}^+$ (ou seja, considerarmos $g(0) = 0$).

O próximo teorema nos diz que podemos obter conjugações discretas entre o fluxo de uma equação autônoma (N) numa vizinhança de um ponto fixo e o fluxo da equação variacional $(N)'$, a linearizada em torno do ponto fixo, quando o ponto fixo é hiperbólico.

Teorema 1. Seja (N) com $f \in \tilde{\mathcal{X}}^1$ e $g \in Y^1$. Se $0 \in \mathcal{G}^+$ é ponto fixo hiperbólico de (N) então, para cada $t > 0$, existe um homeomorfismo $\Gamma_t : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ com $\Gamma_t - I_{\mathcal{G}^+}$ limitado ($I_{\mathcal{G}^+}$ é a identidade de $\mathcal{G}^+$) e existe W_t vizinhança de 0 em $\mathcal{G}^+$ tal que $\Gamma_t \circ \tau(t) = T(t) \circ \Gamma_t$ em W_t .

A prova desse teorema é imediata a partir de dois lemas que enunciaremos a seguir e cujas demonstrações são encontradas em $[N]$, por exemplo.

Lema 1. Para $L \in \mathcal{L}(E)$, E espaço de Banach, L automorfismo hiperbólico, temos que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall \xi : E \rightarrow E$ contínua, limitada e lipchitziana com $\text{Lip}\xi < \delta$ (aqui $\text{Lip}\xi$ é a constante de Lipchitz de ξ) temos que existe um único $h_\xi : E \rightarrow E$ contínua, com $h_\xi - I_E$ limitado tal que $h_\xi \circ (L + \xi) = L \circ h_\xi$. Temos ainda que h_ξ será homeomorfismo.

Lema 2. Se $\xi : E \rightarrow E$ é de classe C^1 e tal que $\xi(0) = 0$ e $\xi'(0) = 0$ então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists W$ vizinhança de 0 em E e $\tilde{\xi} : E \rightarrow E$ tal que $\tilde{\xi}$ é contínua, limitada e lipchitziana com $\text{Lip} \tilde{\xi} < \varepsilon$ e $\tilde{\xi}|_W = \xi|_W$.

Para a equação autônoma (N) com $f \in \tilde{\mathcal{X}}^1$, $g \in Y^1$ e com ponto fixo hiperbólico $\varphi = 0 \in \mathcal{G}^+$, podemos agora definir, para cada vizinhança de $0 \in \mathcal{G}^+$, as variedades estável e instável do equilíbrio relativas à vizinhança, de maneira natural.

Definição 3. Seja (N) ($f \in \tilde{\mathcal{X}}^1, g \in Y^1$) com ponto fixo hiperbólico $0 \in \mathcal{G}^+$. Para cada vizinhança W de 0 em $\mathcal{G}^+$ definimos os conjuntos

$$\mathcal{S}_W = \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \ \forall t \geq 0 \text{ e } \tau(t)\varphi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}$$

$$\mathcal{U}_W = \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \ \forall t \leq 0 \text{ e } \tau(t)\varphi \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\}$$

que serão chamados respectivamente de variedades estável e instável do equilíbrio 0 na vizinhança W .

O nome “variedades” se justifica a partir do teorema 2, que mostraremos a seguir.

São imediatas as observações: $V \subset W \Rightarrow \mathcal{S}_V \subset \mathcal{S}_W$ e $\mathcal{U}_V \subset \mathcal{U}_W$,

$$\forall W \text{ viz. de } 0 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_W \text{ é invariante por } \tau(t) \ \forall t \geq 0 \\ \mathcal{U}_W \text{ é invariante por } \tau(t) \ \forall t \leq 0 \text{ e} \\ 0 \in \mathcal{S}_W \cap \mathcal{U}_W. \end{array} \right.$$

E para $W \subset W_t$ (para algum $t > 0$, W_t do teorema 1), então $\mathcal{S}_W \cap \mathcal{U}_W = \{0\}$.

Lema 3. Nas hipóteses do teorema 1, para cada $t > 0$, temos $\Gamma_t(0) = 0$ (Γ_t dado no teorema 1).

Prova: Pelo teorema 1, $\Gamma_t(0) = T(t).\Gamma_t(0)$. Como $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_s^+ \oplus \mathcal{G}_u^+$ (proposição 2), temos que $T(t)(\Gamma_t(0))_s = (\Gamma_t(0))_s$ sendo $((\Gamma_t(0))_s)$ a projeção de $\Gamma_t(0)$ em $\mathcal{G}_s^+$, paralela a $\mathcal{G}_u^+$ (lembrar que $\mathcal{G}_s^+$ e $\mathcal{G}_u^+$ são invariantes por $T(t)$).

Mas da proposição 1, existe uma norma $||| |||$ em $\mathcal{G}^+$, equivalente a sua norma natural, que torna $T(t)|_{\mathcal{G}_s^+}$ uma contração. Logo o único ponto fixo de $T(t)|_{\mathcal{G}_s^+}$ será $0 \in \mathcal{G}^+$, ou seja, $(\Gamma_t(0))_s = 0$.

Analogamente $T(t)(\Gamma_t(0))_u = (\Gamma_t(0))_u$ portanto $(\Gamma_t(0))_u = T(-t)(\Gamma_t(0))_u$ mas com relação à norma $||| |||$ nós temos que $T(-t)|_{\mathcal{G}_u^+}$ é contração. Assim $(\Gamma_t(0))_u = 0$.

Logo, $\Gamma_t(0) = (\Gamma_t(0))_s + (\Gamma_t(0))_u = 0$. ■

Teorema 2. Para (N) com $f \in \tilde{\mathcal{X}}^k$, $g \in Y^k$, $k \geq 1$ e com ponto fixo hiperbólico $0 \in \mathcal{G}^+$, vale:

Existe $\delta > 0$ tal que para $W = B_\delta(0)$ (bola de centro $O \in \mathcal{G}^+$ e raio δ) temos:

$$S_W = \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \quad \forall t \geq 0\}$$

$$\text{e} \quad \mathcal{U}_W = \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \quad \forall t \leq 0\}$$

e são gráficos de funções C^{k-1} cujos domínios são respectivamente V^s , V^u vizinhanças de 0 em $\mathcal{G}_s^+$ e $\mathcal{G}_u^+$ e que tangenciam respectivamente $\mathcal{G}_s^+$ e $\mathcal{G}_u^+$ na origem se $k \geq 2$.

Prova:

Supondo $\delta > 0 \mid W = B_\delta(0) \subset W_r$ (Γ_r e W_r dados no teorema 1, para $t = r$), temos que se $\varphi \in W$ com $\tau(t)\varphi \in W \quad \forall t \geq 0$, então $\Gamma_r \tau(nr)\varphi = T(nr)\Gamma_r \varphi \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (provamos isso por indução em n , sabendo que para $n = 1$ a igualdade vem do teorema 1 e que temos sempre $\tau(nr)\varphi \in W \subset W_r \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Então $T(nr)\Gamma_r \varphi \in \Gamma_r W \quad \forall n \in \mathbb{N}$, logo $T(nr)\Gamma_r \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (da proposição 1, pois $T(r)$ é hiperbólica).

Do lema 3 decorre que $\tau(nr)\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mas isso implica que

$$\tau(t)\varphi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{G}^+ \quad \text{e então} \quad \varphi \in S_W.$$

Com raciocínio análogo, provamos a igualdade para $\mathcal{U}_W$.

Dado $\varepsilon > 0$, se tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeno, pelo lema 2 aplicado a $\xi = \tau(r) - T(r)$, obtemos $\text{Lip } \xi < \varepsilon$ em $W = B_\delta(0)$.

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, por um resultado de Pugh ([P] artigo III), sabemos que $\exists \bar{\delta} > 0$ tal que para $0 < \delta < \bar{\delta}$ temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\delta^r &\stackrel{\text{def.}}{=} \{\varphi \in B_\delta(0) \mid \tau(nr)\varphi \in B_\delta(0) \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \tau(r)^{-n}[B_\delta(0)] \\ \text{e } \mathcal{U}_\delta^r &\stackrel{\text{def.}}{=} \{\varphi \in B_\delta(0) \mid \tau(-nr)\varphi \in B_\delta(0) \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \tau(r)^n[B_\delta(0)] \end{aligned}$$

são respectivamente gráficos de funções de domínios $\mathcal{O}_s$ e $\mathcal{O}_u$ vizinhanças abertas de 0 em $\mathcal{G}_s^+$ e $\mathcal{G}_u^+$ respectivamente, as funções são de classe C^{k-1} (pois $\tau(r)$ é de classe C^k e para $\bar{\delta} > 0$ suficientemente pequeno, teremos $\tau(r)^{(i)}$ limitados em $B_\delta(0)$ para $i = 0, 1, \dots, k$ e $\tau(r)^{(k-1)}$ será então uniformemente contínua em $B_\delta(0)$, que são as hipóteses exigidas em [P], artigo III) e os gráficos tangenciam respectivamente $\mathcal{G}_s^+$ e $\mathcal{G}_u^+$ na origem quando $k \geq 2$.

Temos então o mesmo resultado para $\mathcal{S}_{\delta/2}^r$ e $\mathcal{U}_{\delta/2}^r$ com abertos $\tilde{\mathcal{O}}_s$ e $\tilde{\mathcal{O}}_u$.

Evidentemente, temos $\mathcal{S}_{\delta/2}^r \subset \mathcal{S}_W \subset \mathcal{S}_\delta^r$ e $\mathcal{U}_{\delta/2}^r \subset \mathcal{U}_W \subset \mathcal{U}_\delta^r$ para $W = B_\delta(0)$ com $\delta > 0$ satisfazendo todas as condições acima.

Logo temos o teorema com $\tilde{\mathcal{O}}_s \subset V^s \subset \mathcal{O}_s$ e $\tilde{\mathcal{O}}_u \subset V^u \subset \mathcal{O}_u$. ■

Nota: No Apêndice 2, mostramos que $\mathcal{S}_W$ e $\mathcal{U}_W$ são de classe C^k .

Terminaremos este parágrafo com um teorema de conjugação global (tipo Hartman–Grobman) entre o fluxo de uma equação autônoma (N) e uma linear hiperbólica $(N)'$, quando (N) é obtida através de uma pequena perturbação nos parâmetros de $(N)'$.

Para obtermos essas perturbações, precisamos definir um novo espaço:

Definição 4. Para $k \geq 0$, definimos

$$\tilde{\mathcal{X}}^k = \{\phi : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \mid \phi \text{ é limitada e satisfaz } (0)_+, (1)^k, (2)^k, (3) \text{ e } \widetilde{(3)}\}$$

onde definimos a propriedade:

(3) Se μ_φ^ϕ é o núcleo que representa $\phi'(\varphi)$, então

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{G}} SV_{[-r, r+\varepsilon]}[\tilde{\mu}_\varphi^\phi] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

onde $\tilde{\mu}_\varphi^\phi$, como na condição (3), é o núcleo μ_φ^ϕ sem o salto em $\theta = -r$, ou seja, $\tilde{\mu}_\varphi^\phi = \mu_\varphi^\phi - \chi_{\{-r\}} A_\varphi^\phi$, onde $A_\varphi^\phi = \mu_\varphi^\phi(-r) - \mu_\varphi^\phi(-r^+) \in \mathcal{L}(X)$.

Definimos $\tilde{Y}^k = \{\phi \in Y^k \mid \phi \text{ é limitada}\}$.

Temos claramente $\tilde{\mathcal{X}}^{k+1} \subset \tilde{\mathcal{X}}^k$, $\tilde{Y}^{k+1} \subset \tilde{Y}^k$ e $\tilde{\mathcal{X}}^k \subset \tilde{Y}^k$ para $k \geq 0$, e esses conjuntos são espaços vetoriais normados com a norma $\|\phi\|_1 = \max\{\|\phi(0)\|, \|\phi'\|\}$ (lembramos que por (2), $\|\phi'\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{G}} \|\phi'(\varphi)\| < \infty$).

Como exemplo de elemento de $\tilde{\mathcal{X}}^k$, tome $X = \mathbf{R}$ e considere $\phi : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$ dado por $\phi(\varphi) = \cos\left(\sum_{i=0}^m A_i \varphi(-r_i)\right) - 1$ para $0 < r_0 < r_1 \dots < r_m = r$, $A_i \in \mathbf{R}$.

Nesse caso, ainda temos $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 0$ e para $\varepsilon > 0$ podemos ter $\|\phi\|_1 < \varepsilon$ se $\sum_{j=0}^m |A_j| < \varepsilon$.

Consideremos a equação $(N)'$ linear:

$$(N)' : \quad x(t) = L_f x_t + x(0) - L_f x_0 + \int_0^t L_g x_s ds \quad t \in \mathbf{R}$$

com $L_f \in \tilde{\mathcal{X}}^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$, $L_g \in Y^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$,

tendo respectivos núcleos $\mu \in G^{-\sigma} SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ e $\eta \in L_1^\sigma SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ (ver cap.I.7 e a parte final do apêndice 1). Também temos:

$$A_0 = \mu(-r) - \mu(-r^+) \in \mathcal{L}(X) \quad \text{e} \quad A_0^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Da proposição 2, se $(N)'$ é hiperbólica, então seu fluxo $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ é um grupo de isomorfismos lineares de $\mathcal{G}^+$, hiperbólicos para $t \neq 0$.

Teorema 3. Consideremos $(N)'$ hiperbólica como acima. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\phi_f \in \tilde{\mathcal{X}}^0$ e $\phi_g \in \tilde{Y}^0$ com $\|\phi_f\|_1 \leq \varepsilon$ e $\|\phi_g\|_1 \leq \varepsilon$ então temos $f \stackrel{\text{def}}{=} L_f + \phi_f$ pertence

a $\tilde{\mathcal{X}}^0$ e $g \stackrel{\text{def.}}{=} L_g + \phi_g$ pertence a Y^0 e existe um único homeomorfismo $\Gamma : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ com $\Gamma - I_{\mathcal{G}^+}$ limitado tal que $T(t)\Gamma = \Gamma\tau(t)$ em $\mathcal{G}^+$ para $\forall t \in \mathbf{R}$, onde $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ é o fluxo da equação (N) dada por f e g .

Prova: Para f estar em $\tilde{\mathcal{X}}^0$ basta mostrar que f satisfaz $(\widetilde{3})$, pois as outras propriedades são satisfeitas por L_f e ϕ_f . Como $\mu_\varphi^f = \mu + \mu_\varphi^{\phi_f}$ e $A_\varphi^f = A_0 + A_\varphi^{\phi_f}$, temos que $\tilde{\mu}_\varphi^f = \tilde{\mu} + \tilde{\mu}_\varphi^{\phi_f}$ e vale que $\sup_{\psi \in \mathcal{G}} SV_{[-r, -r+\varepsilon]}[\tilde{\mu}_\varphi^f] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ (pois isso vale para $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\mu}_\varphi^{\phi_f}$). Temos também que $\|A_0^{-1} \cdot A_\varphi^f - I_X\| = \|A_0^{-1}(A_0 + A_\varphi^{\phi_f}) - I_X\| = \|A_0^{-1} \cdot A_\varphi^{\phi_f}\| \leq \|A_0^{-1}\| \cdot \|A_\varphi^{\phi_f}\| \leq \|A_0^{-1}\| \cdot SV_{[-r, 0]}[\mu_\varphi^{\phi_f}] = \|A_0^{-1}\| \cdot \|\phi_f'(\varphi)\| \leq \|A_0^{-1}\| \cdot \|\phi\|_1 \leq \varepsilon \cdot \|A_0^{-1}\| = c$.

Se tomarmos $\varepsilon < \|A_0^{-1}\|^{-1}$, teremos $c < 1$ e então vale $(\widetilde{3})$ para f .

Assim, $f \in \tilde{\mathcal{X}}^0$ e $g \in Y^0$ definem a equação (N) e seu fluxo $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ de homeomorfismos de $\mathcal{G}^+$. Olhemos (N) como:

$$(N) \quad x(t) = L_f x_t + x(0) - L_f x_0 + \int_0^t L_g x_s ds + \phi_f(x_t) - \phi_f(x_0) + \int_0^t \phi_g(x_s) ds.$$

Segundo o teorema I.7.4 temos que

$$x \text{ é solução de (N) com } x_0 = \varphi \Leftrightarrow x_t = T(t)\varphi + \kappa(t, 0) \cdot (H_\varphi|_{[0, t]}) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

(para $t < 0$ tome $[t, 0]$ ao invés de $[0, t]$) onde $\kappa(t, 0) \in \mathcal{L}(G^+([0, t], X), \mathcal{G}^+)$ é dado para a equação não-homogênea $(N)'_H$ no teorema I.7.4 e observação I.7.1 e $H_\varphi \in G^+(\mathbf{R}, X)$ é definido por $H_\varphi(t) = \phi_f(\tau(t)\varphi) - \phi_f(\varphi) + \int_0^t \phi_g(\tau(s)\varphi) ds$, $t \in \mathbf{R}$.

Assim, temos $\tau(t) = T(t) + \Phi_t$ para $t \in \mathbf{R}$, onde

$$\Phi_t : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+ \text{ é definida por } \Phi_t(\varphi) = \kappa(t, 0)(H_\varphi|_{[0, t]}).$$

Φ_t é então contínua, limitada, pois:

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in \mathcal{G}^+} \|\Phi_t(\varphi)\| &\leq \|\kappa(t, 0)\| \cdot \sup_{\substack{\sigma \in [0, t] \\ \varphi \in \mathcal{G}^+}} \|H_\varphi(\sigma)\| \leq \\ &\leq \|\kappa(t, 0)\| \cdot \left[2 \sup_{\varphi \in \mathcal{G}^+} \|\phi_f(\varphi)\| + |t| \cdot \sup_{\varphi \in \mathcal{G}^+} \|\phi_g(\varphi)\| \right] < \infty, \end{aligned}$$

pois ϕ_f e ϕ_g são limitadas.

Vamos mostrar que para $s \in [0, r]$, Φ_s é Lipchitz.

$$\|\Phi_s \varphi - \Phi_s \psi\| \leq \sup_{t \in [0, r]} \|\kappa(t, 0)\| \cdot \sup_{t \in [0, r]} \|H_\varphi(t) - H_\psi(t)\|.$$

Seja $M > 0$ tal que $\sup_{t \in [0, r]} \|\kappa(t, 0)\| < M$ e $\sup_{t \in [0, r]} \|T(t)\| < M$.

Temos

$$\begin{aligned} \|\Phi_s \varphi - \Phi_s \psi\| &\leq M \cdot \sup_{t \in [0, r]} \|\phi_f(\tau(t)\varphi) - \phi_f(\tau(t)\psi) - \phi_f(\varphi) + \phi_f(\psi) \\ &\quad + \int_0^t [\phi_g(\tau(\sigma)\varphi) - \phi_g(\tau(\sigma)\psi)] d\sigma\| \\ &\leq M \cdot \sup_{t \in [0, r]} (\varepsilon \cdot \|\tau(t)\varphi - \tau(t)\psi\| + \varepsilon \|\varphi - \psi\| + \varepsilon \int_0^t \|\tau(\sigma)\varphi - \tau(\sigma)\psi\| d\sigma) \\ &\leq \varepsilon \cdot M \left(\sup_{t \in [0, r]} \|T(t)(\varphi - \psi) + \Phi_t \varphi - \Phi_t \psi\| + \|\varphi - \psi\| + r \cdot \sup_{t \in [0, r]} \|T(t)(\varphi - \psi) + \Phi_t \varphi - \Phi_t \psi\| \right) \\ &\leq \varepsilon \cdot M((r+1) \sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t \varphi - \Phi_t \psi\| + (r+1)M \cdot \|\varphi - \psi\| + \|\varphi - \psi\|) \\ &\leq \varepsilon \cdot M(r+1) \sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t \varphi - \Phi_t \psi\| + \varepsilon(M + (r+1)M^2) \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Assim

$$\sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t \varphi - \Phi_t \psi\| \leq \varepsilon \cdot M(r+1) \sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t \varphi - \Phi_t \psi\| + \varepsilon(M + (r+1)M^2) \|\varphi - \psi\|,$$

ou seja,

$$\|\Phi_s \varphi - \Phi_s \psi\| \leq \sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t \varphi - \Phi_t \psi\| \leq \frac{\varepsilon(M + (r+1)M^2)}{1 - \varepsilon \cdot M(r+1)} \cdot \|\varphi - \psi\|.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, teremos então $\text{Lip } \Phi_r < \delta$, onde $\delta > 0$ é dado no lema 1 para $T(r)$, que é automorfismo hiperbólico de $\mathcal{G}^+$. Então existe um único $\Gamma = h_{\Phi_r}$ como no lema 1. Em particular, temos $T(r)\Gamma = \Gamma \cdot \tau(r)$.

Para $t \in \mathbf{R}$ fixo, definamos $h_t : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ por $h_t(\varphi) = T(-t)\Gamma\tau(t)\varphi$.

Assim, h_t é contínua e $h_t - I_{\mathcal{G}^+}$ é limitada, pois

$$\|h_t - I_{\mathcal{G}^+}\| \leq \|T(-t)\| \cdot (\|\Gamma - I_{\mathcal{G}^+}\| + \|\Phi_t\|) < \infty$$

e também $T(-r)h_t\tau(r) = T(-r-t)\Gamma\tau(r+t) = T(-t)\Gamma\tau(t) = h_t$.

Logo, $h_t = h_{\Phi_r} = \Gamma$ (pela unicidade afirmada no lema 1).

Como $t \in \mathbf{R}$ é arbitrário, concluímos o teorema, ou seja, $T(t)\Gamma = \Gamma\tau(t)$, $\forall t \in \mathbf{R}$. ■

Observação 2. Para as equações (N) e $(N)'$ do teorema anterior ($f = L_f + \phi_f \in \tilde{\mathcal{X}}^0$, $g = L_g + \phi_g \in Y^0$), se $\phi_g(0) = 0$, 0 será equilíbrio de (N) e então teremos ainda o resultado do teorema 2 para $\mathcal{S}_W$ e $\mathcal{U}_W$, neste caso gráficos de funções lipchitzianas. O raciocínio é o mesmo do teorema 2, só que usamos o teorema 3 (com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno) ao invés do teorema 1, reparando que vale o lema 3 para o homeomorfismo Γ do teorema 3.

Observação 3. Se tomarmos no teorema anterior $\phi_g(0) = 0$ e $\phi'_f(0) = \phi'_g(0) = 0$, então 0 será ponto de equilíbrio de (N) , e $(N)'$ será a linearizada de (N) em torno desse equilíbrio ($f'(0) = L_f$ e $g'(0) = L_g$). Se além disso tomarmos $\phi_f \in \tilde{\mathcal{X}}^1$ e $\phi_g \in \tilde{Y}^1$, teremos que $\tau(t)'(0) = T(t) \forall t \in \mathbf{R}$, pois nesse caso $f \in \tilde{\mathcal{X}}^1$ e $g \in Y^1$.

3. Subespaços complementares invariantes

Vamos considerar aqui a equação $(N)'$ linear autônoma, com dados L_f e L_g como no parágrafo anterior, mas de maneira mais geral, onde L_f não precisa satisfazer $(\widetilde{3})$. Nesse caso, dizemos que $L_f \in \mathcal{X}^0$, onde $\mathcal{X}^k$ para $k \in \mathbf{N}$ é definido do mesmo modo que $\tilde{\mathcal{X}}^k$ no início do §1, mas sem a exigência da propriedade $(\widetilde{3})$. Não temos então garantida a solução para trás de um dado inicial, mas temos o semi-grupo de operadores lineares-contínuos de $\mathcal{G}^+ : \{T(t)\}_{t \geq 0}$, fluxo da equação. Vamos generalizar os resultados da proposição 2.2.

Primeiro tomemos um operador linear-contínuo de um espaço de Banach cujo espectro

não intercepta uma circunferência de raio fixado arbitrariamente, ou seja, para $L \in \mathcal{L}(E)$ temos que $\exists \ell > 0$ tal que $\sigma(L) = \sigma_P(L) \cup \sigma_Q(L)$ onde $\sigma_P(L) = \{\mu \in \sigma(L) \mid |\mu| > \ell\}$ e $\sigma_Q(L) = \{\mu \in \sigma(L) \mid |\mu| < \ell\}$. Nesse caso, sabemos que se tomamos uma curva γ retificável e fechada em $\rho(L)$ (resolvente de L) que deixe $\sigma_P(L)$ em seu interior, a integral $\pi_P = \int_{\gamma} (\lambda - L)^{-1} d\lambda$ define uma projeção contínua em E , e temos os subespaços fechados invariantes por L : $P = \mathcal{R}(\pi_P)$ e $Q = \mathcal{N}(\pi_P)$ e $E = P \oplus Q$, $\sigma(L|_P) = \sigma_P(L)$ e $\sigma(L|_Q) = \sigma_Q(L)$ (para esses resultados, ver [R-N], pg.415).

Proposição 1. Para a equação linear $(N)'$ como no início do parágrafo, temos:

se existe $\alpha \in \mathbf{R}$ e $t_0 > 0$ tal que $\sigma(T(t_0)) \cap \{\mu \in \mathbf{C} \mid |\mu| = e^{\alpha t_0}\} = \emptyset$

então para $\forall t > 0$ temos $\sigma(T(t)) \cap \{\mu \in \mathbf{C} \mid |\mu| = e^{\alpha t}\} = \emptyset$.

Além disso, a projeção $\pi_P = \pi_P^t = \int_{\gamma_t} (\lambda - T(t))^{-1} d\lambda$ não depende do particular $t > 0$ escolhido e com as notações acima temos: $\mathcal{G}^+ = P \oplus Q$, subespaços fechados invariantes pelo fluxo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ com

$$\sigma(T(t)|_P) = \{\mu \in \sigma(T(t)) \mid |\mu| > e^{\alpha t}\}$$

$$\sigma(T(t)|_Q) = \{\mu \in \sigma(T(t)) \mid |\mu| < e^{\alpha t}\}.$$

$T(t)|_P$ é isomorfismo sobre P e o semi-grupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ pode ser estendido para o grupo $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ (ou seja, para dados iniciais em P , a equação $(N)'$ admite uma única solução em $-\infty < t < \infty$).

Finalmente, existem constantes K e $\delta > 0$ tais que

$$\|T(t)|_Q\| \leq K e^{(\alpha - \delta)t} \text{ para } t \geq 0 \text{ e}$$

$$\|T(t)|_P\| \leq K e^{(\alpha + \delta)t} \text{ para } t \leq 0.$$

Prova: Definimos $P = \mathcal{R}(\pi_P^{t_0})$, $Q = \mathcal{N}(\pi_P^{t_0})$, e pela definição de $\pi_P^{t_0}$ vemos que $\pi_P^{t_0}$ e $\pi_Q^{t_0} = I - \pi_P^{t_0}$ comutam com $T(t) \forall t \geq 0$, logo P e Q são invariantes por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Usando a decomposição espectral de $T(t_0)$, vemos que $Q = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid e^{-\alpha n t_0} T(n t_0) \varphi \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$ e que $0 \in \rho(T(t_0)|_P)$, logo podemos definir $T(-n t_0) = T(n t_0)|_P^{-1}$ para

$n \in \mathbf{N}$ e verificamos que $P = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid e^{\alpha n t_0} T(-n t_0) \varphi \longrightarrow 0 \text{ } n \rightarrow \infty\}$.

Definimos para $t \leq 0$ $T(t) = T(n t_0 + t) \circ T(-n t_0) \in \mathcal{L}(P)$ com $n \in \mathbf{N} \mid n t_0 + t > 0$ e vemos facilmente que temos um grupo de isomorfismos lineares em P .

Como na proposição 2.2 (usando o teorema I.3.2) concluimos que

$$Q = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid e^{-\alpha t} T(t) \varphi \longrightarrow 0 \text{ } t \rightarrow \infty\} \text{ e}$$

$$P = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid e^{-\alpha t} T(t) \varphi \longrightarrow 0 \text{ } t \rightarrow -\infty\}.$$

A decomposição espectral de $e^{-\alpha t} T(t)$ e as majorações do enunciado seguem canonicamente da decomposição espectral de $e^{-\alpha t_0} T(t_0)$ como na proposição 2.2. ■

Observação 1. Se $\alpha = 0$ na proposição 1, então $P = \mathcal{G}_u^+$ e $Q = \mathcal{G}_s^+$ da proposição 2.2, e estamos no caso em que $(N)'$ é hiperbólica.

De maneira geral, quando estamos nas hipóteses da proposição 1, podemos dizer que $(N)'$ admite uma dicotomia de ordem α (assim, dicotomia de ordem 0 $\Leftrightarrow$ hiperbólica).

Para cada $H \in G^+(\mathbf{R}, X)$, consideremos a equação linear não homogênea:

$$(N)'_H : x(t) = x(t_0) + L_f x_t - L_f x_{t_0} + \int_{t_0}^t L_g x_s ds + H(t) - H(t_0) \text{ para } t_0, t \in \mathbf{R}, t \geq t_0$$

Aqui $L_f \in \mathcal{X}^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$ e $L_g \in Y^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, X)$.

Pelo que estudamos no parágrafo I.7, para cada $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ temos que existe uma única $x = x(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) \in G^+(\mathbf{R}, X)$ solução de $(N)'_H$ para $t \geq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$ e $x \equiv 0$ em $] -\infty, t_0 - r[$ (aqui μ é o núcleo que representa L_f e η é o núcleo que representa L_g). Esta solução será dada por (segundo o teorema I-7.4 para $t \geq t_0$, onde só utilizamos a fórmula (ρ_N) da proposição I.7.8):

$$(V) \quad x_t(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) = T(t - t_0) \varphi + \kappa(t, t_0) H \text{ para } t \geq t_0$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa(t, t_0) H &= \chi_0 H(t) - T(t - t_0) \chi_0 H(t_0) - \int_{t_0}^t d_\tau T(t - \tau) \chi_0 H(\tau) \\ &= T(t - t_0) \chi_0 (H(t) - H(t_0)) - \int_{t_0}^t d_\tau T(t - \tau) \chi_0 (H(\tau) - H(t)) \text{ p/ } t \geq t_0 \end{aligned}$$

com

$$\left(\int_{t_0}^t d_\tau T(t-\tau) \chi_0 H(\tau) \right)(\theta) = \int_{t_0}^t d_\tau U(t+\theta-\tau) H(\tau) \quad \text{para } \theta \in [-r, 0].$$

Lembremos que, para $p \in X$ e $\theta \in [-r, 0]$,

$$U(t+\theta-t_0)p = (T(t-t_0)\chi_0 p)(\theta) = \begin{cases} R(t+\theta-t_0)p & \text{se } t+\theta \geq t_0 \\ 0 & \text{se } t_0-r \leq t+\theta < t_0. \end{cases}$$

Se L_f satisfaz $(\widetilde{3})$, então temos que vale (V) para $t \in \mathbf{R}$, $\kappa(t, t_0)$ definido como acima para $t, t_0 \in \mathbf{R}$ e ainda

$$U(t+\theta-t_0)p = (T(t-t_0)\chi_0 p)(\theta) = \bar{R}(t+\theta-t_0+r)A^{-1}p \quad \text{se } t+\theta < t_0-r,$$

onde $A = \mu(-r) - \mu(-r^+) \in \mathcal{L}(X)$, $\tilde{\mu} = \mu - A\chi_{\{-r\}}$ são dados em $(\widetilde{3})$ para L_f e

$$R : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{L}(X), \quad \bar{R} :]-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

são os respectivos resolventes dos núcleos:

$$\begin{aligned} K : [0, \infty[&\rightarrow \mathcal{L}(X) & K(t) &= - \int_{-t}^0 \eta(\sigma) d\sigma - \mu(-t) \quad p/ \quad t \geq 0 \\ \bar{K} :]-\infty, 0] &\rightarrow \mathcal{L}(X) & \bar{K}(t) &= A^{-1}(- \int_{-r}^{-t-r} [\eta(\sigma) - \eta(-r)] d\sigma + \tilde{\mu}(-t-r) \\ & & &\quad - \tilde{\mu}(-r) - \chi_{]r, \infty[}(-t)) \quad p/ \quad t \leq 0. \end{aligned}$$

Estes resolventes e núcleos foram estudados em I-7 (proposições I-7.4, I-7.5, I-7.7, I-7.10) considerando aqui que estamos no caso autônomo (ver parte final do Apêndice 1).

Assim temos: $U : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ dado por, para $t \in \mathbf{R}$ e $p \in X$:

$$U(t)p = \begin{cases} R(t)p & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & -r \leq t < 0 \\ \bar{R}(t+r)A^{-1}p & \text{para } t < -r \end{cases}$$

e sabemos que para cada $[a, b] \subset \mathbf{R}$ temos que

$$U_{|[a,b]} \in G^{+\sigma} SV([a,b], \mathcal{L}(X)) = G^{+\sigma}([a,b], \mathcal{L}(X)) \cap SV([a,b], \mathcal{L}(X)).$$

Com o intuito de projetar $x_t(t_0, \varphi, H, \mu, \eta)$ em subespaços fechados invariantes para o fluxo de $(N)'$ (como no caso da proposição 1), temos o seguinte teorema:

Teorema 1. Suponhamos que existem P e Q subespaços fechados de $\mathcal{G}^+$ invariantes pelo fluxo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de $(N)'$ e tais que $\mathcal{G}^+ = P \oplus Q$ com respectivas projeções π_P e π_Q . Para $H \in G^+(\mathbf{R}, X)$, $t_0 \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}^+$ seja $x = x(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) \in G^+([t_0 - r, \infty[, X)$ e sejam, para $\psi \in \mathcal{G}^+$, $\psi_P = \pi_P \psi \in P$ e $\psi_Q = \pi_Q \psi \in Q$. Então

$$(x_t)_Q = T(t - t_0)\varphi_Q + (\chi_0 H(t))_Q - T(t - t_0)(\chi_0 H(t_0))_Q - \int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_Q$$

$$(x_t)_P = T(t - t_0)\varphi_P + (\chi_0 H(t))_P - T(t - t_0)(\chi_0 H(t_0))_P - \int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_P, \forall t \geq t_0.$$

Se L_f satisfaz $(\widetilde{3})$ temos $x(t_0, \varphi, H, \mu, \eta) \in G^+(\mathbf{R}, X)$ e essas fórmulas valem para todo $t \in \mathbf{R}$.

A idéia da prova do teorema 1 foi inspirada pela referência [Hale 3]. Para sua demonstração, vamos precisar de um teorema de representação de operadores lineares contínuos em espaços de funções regradas, devido a Chaim S. Hönl (do tipo dos teoremas I.1.1 e I.7.1) que enunciaremos a seguir e que segue imediatamente dos teoremas 6 e 7 de [H.6] (ver também [H.1], teorema I.5.10).

Teorema 2. Para $[a, b]$ e $[c, d] \subset \mathbf{R}$ seja o espaço vetorial:

$G^{+\sigma} SV_0^u([c, d] \times [a, b], \mathcal{L}(X))$ dos núcleos $K : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tais que vale

$(G^{+\sigma})$: Para cada $s \in [a, b]$ e $p \in X$, a função $K(\cdot, s)p \in G^+([c, d], X)$ e

(SV_0^u) Para cada $t \in [c, d]$, a função $K(t, \cdot) \in SV_0([a, b], \mathcal{L}(X))$,

$(K(t, a) = 0)$ e $SV^u[K] = \sup_{t \in [c, d]} SV[K(t, \cdot)] < \infty$.

Esse espaço é um espaço de Banach com a norma SV^u e a aplicação

$$\mathcal{I} : G^{+\sigma} SV_0^u([c, d] \times [a, b], \mathcal{L}(X)) \rightarrow \mathcal{L}(G_-^+([a, b], X), G^+([c, d], X))$$

(onde $G_-^+([a, b], X) = \{F \in G^+([a, b], X) \mid F(b) = F(b^-)\}$) dada por $(\mathcal{I}K)(F)(t) = \int_a^b d_s K(t, s) F(s)$ é uma isometria do primeiro Banach sobre o segundo ($\|\mathcal{I}K\| = SV^u[K]$) e para $k \in \mathcal{L}(G_-^+([a, b], X), G^+([a, b], X))$ temos que $K = \mathcal{I}^{-1}k$ é dado por

$$K(t, s)p = k(\chi_{[a, s]}p)(t)$$

para $c \leq t \leq d$, $a < s < b$ e $p \in X$.

$$K(t, b)p = k(\chi_{[a, b]}p)(t)$$

Prova do teorema 1. Vamos fazer a prova para a projeção π_Q , sendo a prova para π_P completamente análoga. Como $T(t)$ deixa P e Q invariantes, temos que $T(t) \circ \pi_P = \pi_P \circ T(t)$ e $T(t) \circ \pi_Q = \pi_Q \circ T(t) \forall t \geq t_0$ (e se L_f satisfaz $(\widetilde{3})$, $\forall t \in \mathbb{R}$). Assim, aplicando π_Q na fórmula (V) temos:

$$(x_t)_Q = T(t - t_0)\varphi_Q + (\chi_0 H(t))_Q - T(t - t_0)(\chi_0 H(t_0))_Q - \pi_Q\left(\int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))\right)$$

Como a integral acima não é feita no espaço $\mathcal{G}^+$ e sim em X (para cada $\theta \in [-r, 0]$), a priori nós não sabemos se π_Q comuta com o limite da integral.

1) Supomos $t > t_0$. Chamemos ainda de $H = H_{|[t_0, t]} \in G^+([t_0, t], X)$.

Repare que $G^+([t_0, t], X) = G_-^+([t_0, t], X) \oplus \hat{X}$

onde $G_-^+([t_0, t], X) = \{H \in G^+([t_0, t], X) \mid H(t) = H(t^-)\}$

e $\hat{X} = \{\chi_{\{t\}}p \mid p \in X\} \equiv X$.

Assim $H = H_- + \chi_{\{t\}}(H(t) - H(t^-))$.

Temos $(x_t)_Q = T(t - t_0)\varphi_Q + \pi_Q \kappa(t, t_0).H$ e

$$\pi_Q \kappa(t, t_0)H = \pi_Q \kappa(t, t_0)H_- + \pi_Q \kappa(t, t_0)(\chi_{\{t\}}(H(t) - H(t^-)))$$

$$= \pi_Q \kappa(t, t_0)H_- + (\chi_0(H(t) - H(t^-)))_Q$$

(aplicando (V) a $x_t(t_0, 0, \chi_{\{t\}}(H(t) - H(t^-)), \mu, \eta)$). Mas

$$\pi_Q \kappa(t, t_0)|_{G_-^+([t_0, t], X)} \in \mathcal{L}(G_-^+([t_0, t], X), \mathcal{G}^+) \equiv G^{+\sigma}SV_0^u([-r, 0] \times [t_0, t], \mathcal{L}(X))$$

(pela isometria do teorema 2), ou seja, $\exists R^Q(t_0, t, \cdot, \cdot) \in G^{+\sigma}SV_0^u([-r, 0] \times [t_0, t], \mathcal{L}(X))$ tal que

$$\pi_Q \kappa(t, t_0)H_-(\theta) = \int_{t_0}^t d_\sigma R^Q(t_0, t, \theta, \sigma)H(\sigma) \text{ e } R^Q(t_0, t, \theta, t_0) = 0 \text{ p/ } \theta \in [-r, 0].$$

Vamos mostrar que $R^Q(t_0, t, \theta, \sigma)$ só depende de $t + \theta - \sigma$ quando $\sigma > t_0$.

Como $\kappa(t, t_0)H \equiv 0$ se $H \equiv$ constante, temos que $R^Q(t_0, t, \theta, t) = 0$ para $\theta \in [-r, 0]$.

Tomemos $t_0 < \bar{t}_0 < t$.

Dado $H \in G_-^+([t_0, t], X)$ seja agora $H^0 \in G_-^+([t_0, t], X)$ tal que

$$H^0(\sigma) = 0 \text{ para } t_0 \leq \sigma \leq \bar{t}_0 \text{ e } H^0(\sigma) = H(\sigma) - H(\bar{t}_0) \text{ para } \bar{t}_0 \leq \sigma \leq t$$

Sabemos que $x(t_0, 0, H^0, \mu, \eta) = x(\bar{t}_0, 0, H, \mu, \eta)$ para $\bar{t}_0 \leq \sigma \leq t$

ou seja, $\pi_Q \kappa(t, t_0)H^0 = \pi_Q \kappa(t, \bar{t}_0)H$. Então

$$\int_{t_0}^t d_\sigma R^Q(t_0, t, \theta, \sigma)H^0(\sigma) = \int_{\bar{t}_0}^t d_\sigma R^Q(\bar{t}_0, t, \theta, \sigma)H(\sigma).$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d_\sigma R^Q(t_0, t, \theta, \sigma)H^0(\sigma) &= \int_{\bar{t}_0}^t d_\sigma R^Q(t_0, t, \theta, \sigma)[H(\sigma) - H(\bar{t}_0)] = \\ &= \int_{\bar{t}_0}^t d_\sigma [R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) - \chi_{\{\bar{t}_0\}} R^Q(t_0, t, \theta, \bar{t}_0)(\sigma)]H(\sigma) \end{aligned}$$

Como $H \in G_-^+([\bar{t}_0, t], X)$ é arbitrário e os dois núcleos coincidem em $\sigma = \bar{t}_0$ temos que para $\bar{t}_0 \leq \sigma \leq t$

$$R^Q(\bar{t}_0, t, \theta, \sigma) = R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) - \chi_{\{\bar{t}_0\}} R^Q(t_0, t, \theta, \bar{t}_0)(\sigma)$$

ou seja, $R^Q(\bar{t}_0, t, \theta, \sigma) = R^Q(t_0, t, \theta, \sigma)$ quando $\sigma > \bar{t}_0 > t_0$.

Está bem definido então $R^Q(t, \theta, \sigma) = R^Q(\bar{t}_0, t, \theta, \sigma)$ para $\bar{t}_0 < \sigma \leq t$. Assim

$$R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) = R^Q(t, \theta, \sigma) - \chi_{\{t_0\}} R^Q(t, \theta, t_0)(\sigma), \quad t_0 \leq \sigma \leq t \quad e$$

$$\pi_Q \kappa(t, t_0) H(\theta) = \int_{t_0}^t d_\sigma [R^Q(t, \theta, \sigma) - \chi_{\{t_0\}} R^Q(t, \theta, t_0)(\sigma)] H(\sigma) = \int_{t_0}^t d_\sigma R^Q(t, \theta, \sigma) [H(\sigma) - H(t_0)]$$

(para $H \in G_-^+([t_0, t], X)$).

Consideremos agora $k > 0$ e sejam $\bar{t}_0 = t_0 + k$, $\bar{t} = t + k$ e para $H \in G_-^+([t_0, t], X)$ seja $\bar{H} \in G_-^+([\bar{t}_0, \bar{t}], X)$ dado por $\bar{H}(\sigma + k) = H(\sigma)$, $t_0 \leq \sigma \leq t$.

Sabemos que $x(t_0, 0, H, \mu, \eta)(\sigma) = x(\bar{t}_0, 0, \bar{H}, \mu, \eta)(\sigma + k)$ para $t_0 \leq \sigma \leq t$.

Assim: $\pi_Q \kappa(t, t_0) H = \pi_Q \kappa(\bar{t}, \bar{t}_0) \bar{H}$ e então

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d_\sigma R^Q(t, \theta, \sigma) [H(\sigma) - H(t_0)] &= \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} d_{\bar{\sigma}} R^Q(\bar{t}, \theta, \bar{\sigma}) [\bar{H}(\bar{\sigma}) - \bar{H}(\bar{t}_0)] \\ &= \int_{t_0}^t d_\sigma R^Q(t + k, \theta, \sigma + k) [H(\sigma) - H(t_0)] \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d_\sigma [R^Q(t, \theta, \sigma) - \chi_{\{t_0\}} R^Q(t, \theta, t_0)(\sigma)] H(\sigma) &= \int_{t_0}^t d_\sigma [R^Q(t + k, \theta, \sigma + k) - \\ &\quad \chi_{\{t_0\}} R^Q(t + k, \theta, t_0 + k)(\sigma)] H(\sigma) \end{aligned}$$

Como $H \in G_-^+([t_0, t], X)$ foi arbitrário e os dois núcleos coincidem em $\sigma = t_0$ temos, para $t_0 \leq \sigma \leq t$:

$$R^Q(t, \theta, \sigma) - \chi_{\{t_0\}} R^Q(t, \theta, t_0)(\sigma) = R^Q(t + k, \theta, \sigma + k) - \chi_{\{t_0\}} R^Q(t + k, \theta, t_0 + k)(\sigma)$$

ou seja, para $\sigma \leq t$ $R^Q(t, \theta, \sigma) = R^Q(t + k, \theta, \sigma + k) \quad \forall k > 0$.

Podemos então definir, para $t \geq 0$ e $\theta \in [-r, 0]$: $R^Q(t, \theta) = R^Q(t, \theta, 0)$ e temos que para $\sigma \leq t \in \mathbf{R}$ $R^Q(t, \theta, \sigma) = R^Q(t - \sigma, \theta)$.

Chegamos à seguinte conclusão: para $t > t_0$ e $H \in G^+([t_0, t], X)$ e $\theta \in [-r, 0]$

$$\pi_Q \kappa(t, t_0) H(\theta) = \int_{t_0}^t d_\sigma R^Q(t - \sigma, \theta) [H(\sigma) - H(t_0)] + (\chi_0(H(t) - H(t^-)))_Q(\theta)$$

Pelo teorema 2 temos que para $t_0 < \sigma \leq t$ e $p \in X$

$$R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) p = R^Q(t - \sigma, \theta) p = \pi_Q \kappa(t, t_0) [\chi_{[t_0, \sigma]} p](\theta)$$

e da fórmula (V) para $x_t(t_0, 0, \chi_{[t_0, \sigma]} p, \mu, \eta)$ temos:

$$\begin{aligned} \kappa(t, t_0) [\chi_{[t_0, \sigma]} p] &= \chi_0(\chi_{[t_0, \sigma]} p(t)) - T(t - t_0) \chi_0(\chi_{[t_0, \sigma]} p(t_0)) \\ &\quad - \int_{t_0}^t d_\tau T(t - \tau) \chi_0(\chi_{[t_0, \sigma]} p(\tau)) \\ &= \chi_0(\chi_{[t_0, \sigma]} p(t)) - T(t - t_0) \chi_0 p - \int_{t_0}^\sigma d_\tau T(t - \tau) \chi_0 p \\ &= \chi_0(\chi_{[t_0, \sigma]} p(t)) - T(t - \sigma) \chi_0 p \end{aligned}$$

Temos então para $\sigma < t$ $\kappa(t, t_0) [\chi_{[t_0, \sigma]} p] = -T(t - \sigma) \chi_0 p$

e $\sigma = t$ $\kappa(t, t_0) [\chi_{[t_0, \sigma]} p] = 0$.

Assim $R^Q(t - \sigma, \theta) p = -T(t - \sigma) [\chi_0 p]_Q(\theta)$ para $\sigma < t$ e $R^Q(0, \theta) p = 0$, ou seja,

$$R^Q(t - \sigma, \theta) p = -\tilde{T}(t - \sigma) (\chi_0 p)_Q(\theta) \quad \text{onde } \tilde{T}(t - \sigma) = T(t - \sigma) - \chi_{\{t\}} I(\sigma).$$

Então

$$\begin{aligned} \pi_Q \kappa(t, t_0) H(\theta) &= - \int_{t_0}^t d_\sigma \tilde{T}(t - \sigma) (\chi_0 H(\sigma))_Q(\theta) - \tilde{T}(t - t_0) [\chi_0 H(t_0)]_Q(\theta) \\ &\quad + [\chi_0(H(t) - H(t^-))]_Q(\theta) \\ &= - \int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma) (\chi_0 H(\sigma))_Q(\theta) + \int_{t_0}^t d_\sigma \chi_{\{t\}} I(\sigma) [\chi_0 H(\sigma)]_Q(\theta) \\ &\quad - T(t - t_0) (\chi_0 H(t_0))_Q(\theta) + (\chi_0 H(t))_Q(\theta) - (\chi_0 H(t^-))_Q(\theta) \\ &= (\chi_0 H(t))_Q(\theta) - T(t - t_0) (\chi_0 H(t_0))_Q(\theta) - \int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma) (\chi_0 H(\sigma))_Q(\theta) \end{aligned}$$

ou seja, o teorema vale para $t \geq t_0$.

2) Se L_f satisfaz $(\widetilde{3})$, resta ver o caso $t < t_0$. Supomos $t < t_0$. Chamemos ainda de $H = H|_{[t, t_0]} \in G^+([t, t_0], X)$.

Como em 1), $G^+([t, t_0], X) = G_-^+([t, t_0], X) \oplus \widehat{X}$.

Assim $H = H_- + \chi_{\{t_0\}}(H(t_0) - H(t_0^-))$ e temos

$$\begin{aligned} (x_t)_Q &= T(t - t_0)\varphi_Q + \pi_Q \kappa(t, t_0)H_- + \pi_Q \kappa(t, t_0)(\chi_{\{t_0\}}(H(t_0) - H(t_0^-))) \\ &= T(t - t_0)\varphi_Q + \pi_Q \kappa(t, t_0)H_- - T(t - t_0)(\chi_0(H(t_0) - H(t_0^-)))_Q \end{aligned}$$

(aplicando (V) a $x_t(t_0, 0, \chi_{\{t_0\}}(H(t_0) - H(t_0^-)), \mu, \eta)$).

Do teorema 2 temos que

$$\pi_Q \kappa(t, t_0)|_{G_-^+([t, t_0], X)} \in \mathcal{L}(G_-^+([t, t_0], X), \mathcal{G}^+) \equiv G^{+, \sigma} SV_0^u([-r, 0] \times [t, t_0], \mathcal{L}(X))$$

ou seja, $\exists R^Q(t_0, t, \cdot, \cdot) \in G^{+, \sigma} SV_0^u([-r, 0] \times [t, t_0], \mathcal{L}(X))$ tal que

$$\pi_Q \kappa(t, t_0)H_-(\theta) = \int_t^{t_0} d_\sigma R^Q(t_0, t, \theta, \sigma)H(\sigma) \text{ com } R^Q(t_0, t, \theta, t) = 0 \text{ p/ } \theta \in [-r, 0]$$

Como $\kappa(t, t_0)H \equiv 0$ se $H \equiv \text{constante}$, temos que $R^Q(t_0, t, \theta, t_0) = 0$ para $\theta \in [-r, 0]$.

Tomemos $t < \overline{t_0} < t_0$.

Dado $H \in G_-^+([t, \overline{t_0}], X)$ seja agora $H^0 \in G_-^+([t, t_0], X)$ tal que

$$H^0(\sigma) = 0 \text{ para } \overline{t_0} \leq \sigma \leq t_0 \text{ e } H^0(\sigma) = H(\sigma) - H(\overline{t_0}) \text{ para } t \leq \sigma \leq \overline{t_0}$$

Sabemos que $x(t_0, 0, H^0, \mu, \eta) = x(\overline{t_0}, 0, H, \mu, \eta)$ para $t - r \leq \sigma \leq \overline{t_0}$ (pois para $\overline{t_0} \leq \sigma \leq t_0$ temos $x(t_0, 0, H^0, \mu, \eta)(\sigma) = x(\sigma) = f'(0)x_\sigma + \int_{t_0}^\sigma g'(0)x_s ds + H^0(\sigma) - H^0(t_0)$, logo $x(t_0, 0, H^0, \mu, \eta)(\sigma) = 0$ para $\overline{t_0} - r \leq \sigma \leq t_0$ pois 0 é a única solução regradada da equação $(N)'_{H^0}$ acima. Assim, para $t \leq \sigma \leq \overline{t_0}$ vemos que $x(t_0, 0, H^0, \mu, \eta)$ e $x(\overline{t_0}, 0, H, \mu, \eta)$ satisfazem a mesma equação $(N)'_H$ com o mesmo valor inicial $x_{\overline{t_0}} = 0$. Logo devem coincidir em $t - r \leq \sigma \leq \overline{t_0}$, ou seja,

$$\pi_Q \kappa(t, t_0)H^0 = \pi_Q \kappa(t, \overline{t_0})H.$$

Então $\int_t^{t_0} d_\sigma R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) H^0(\sigma) = \int_t^{\bar{t}_0} d_\sigma R^Q(\bar{t}_0, t, \theta, \sigma) H(\sigma)$; mas

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} d_\sigma R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) H^0(\sigma) &= \int_t^{\bar{t}_0} d_\sigma R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) [H(\sigma) - H(\bar{t}_0)] = \\ &= \int_t^{\bar{t}_0} d_\sigma [R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) - \chi_{\{\bar{t}_0\}} R^Q(t_0, t, \theta, \bar{t}_0)(\sigma)] H(\sigma) \end{aligned}$$

(isso vale, pois $H(\bar{t}_0) = H(\bar{t}_0^-)$).

Como $H \in G_-^+([t, \bar{t}_0], X)$ é arbitrário e os dois núcleos coincidem em $\sigma = t$ temos que, para $t \leq \sigma \leq \bar{t}_0$, $R^Q(\bar{t}_0, t, \theta, \sigma) = R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) - \chi_{\{\bar{t}_0\}} R^Q(t_0, t, \theta, \bar{t}_0)(\sigma)$, ou seja, $R^Q(\bar{t}_0, t, \theta, \sigma) = R^Q(t_0, t, \theta, \sigma)$ para $\sigma < \bar{t}_0 < t_0$. Está bem definido então $R^Q(t, \theta, \sigma) = R^Q(\bar{t}_0, t, \theta, \sigma)$ para $\bar{t}_0 > \sigma \geq t$. Assim

$$R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) = R^Q(t, \theta, \sigma) - \chi_{\{t_0\}} R^Q(t, \theta, t_0)(\sigma) \quad t \leq \sigma \leq t_0 \text{ e}$$

$$\pi_Q \kappa(t, t_0) H(\theta) = \int_t^{t_0} d_\sigma [R^Q(t, \theta, \sigma) - \chi_{\{t_0\}} R^Q(t, \theta, t_0)(\sigma)] H(\sigma) = \int_t^{t_0} d_\sigma R^Q(t, \theta, \sigma) [H(\sigma) - H(t_0)]$$

(para $H \in G_-^+([t, t_0], X)$).

Chegamos à seguinte conclusão: para $t < t_0$ e $H \in G^+([t, t_0], X)$ e $\theta \in [-r, 0]$

$$\pi_Q \kappa(t, t_0) H(\theta) = \int_t^{t_0} d_\sigma R^Q(t, \theta, \sigma) [H(\sigma) - H(t_0)] - T(t - t_0) (\chi_0(H(t_0) - H(t_0^-)))_Q(\theta).$$

Do teorema 2 temos que para $t < \sigma < t_0$ e $p \in X$

$$R^Q(t_0, t, \theta, \sigma) p = R^Q(t, \theta, \sigma) p = \pi_Q \kappa(t, t_0) [\chi_{[t, \sigma]} p](\theta)$$

e da fórmula (v) para $x_t(t_0, 0, \chi_{[t, \sigma]} p, \mu, \eta)$ temos:

$$\begin{aligned} \kappa(t, t_0) [\chi_{[t, \sigma]} p] &= \chi_0(\chi_{[t, \sigma]} p(t)) - T(t - t_0) (\chi_0(\chi_{[t, \sigma]} p(t_0))) + \int_t^{t_0} d_\tau T(t - \tau) \chi_0(\chi_{[t, \sigma]} p(\tau)) \\ &= \chi_0 p + \int_t^\sigma d_\tau T(t - \tau) \chi_0 p = T(t - \sigma) \chi_0 p. \end{aligned}$$

Assim, $R^Q(t, \theta, \sigma) p = T(t - \sigma) (\chi_0 p)_Q(\theta)$ para $\sigma > t$ e $R^Q(t, \theta, t) p = 0$, ou seja, $R^Q(t, \theta, \sigma) p = \tilde{T}(t - \sigma) (\chi_0 p)_Q(\theta)$ para $\sigma \geq t$ onde $\tilde{T}(t - \sigma) = T(t - \sigma) - \chi_{\{t\}} I(\sigma)$.

Então

$$\begin{aligned}
\pi_Q \kappa(t, t_0) H(\theta) &= \int_t^{t_0} d_\sigma R^Q(t, \theta, \sigma) H(\sigma) - R^Q(t, \theta, t_0) H(t_0^-) + T(t - t_0)(\chi_0 H(t_0^-))_Q(\theta) \\
&\quad - T(t - t_0)(\chi_0 H(t_0))_Q(\theta) \\
&= \int_t^{t_0} d_\sigma \tilde{T}(t - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_Q(\theta) - T(t - t_0)(\chi_0 H(t_0))_Q(\theta) \\
&= \int_t^{t_0} d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_Q(\theta) - \int_t^{t_0} d_\sigma \chi_{\{t\}} I(\sigma)[\chi_0 H(\sigma)]_Q(\theta) \\
&\quad - T(t - t_0)(\chi_0 H(t_0))_Q(\theta) \\
&= \int_t^{t_0} d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_Q(\theta) + (\chi_0 H(t))_Q(\theta) - T(t - t_0)(\chi_0 H(t_0))_Q(\theta)
\end{aligned}$$

e está demonstrado o teorema. ■

Definição 1. Nas hipóteses do teorema 1, vamos definir os núcleos

$$R^P \text{ e } R^Q : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X) \text{ por}$$

$$R^P(t)p = T(t)(\chi_0 p)_P(0) \quad \text{e} \quad R^Q(t)p = T(t)(\chi_0 p)_Q(0), \text{ para } t \geq 0 \text{ e } p \in X.$$

Se $0 \in \rho(T(t)|_P) \quad \forall t \geq 0$ (como no caso da proposição 1), podemos estender $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ para $-\infty < t < \infty$ como um grupo de isomorfismos de P e então estender $R^P : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$. Caso L_f satisfaça $(\widetilde{\mathbf{3}})$, temos R^P e $R^Q : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$.

No que segue, quando nos referimos a $R^Q(t)$ para $t < 0$, é porque estamos supondo que L_f satisfaz $(\widetilde{\mathbf{3}})$. Quando nos referimos a $R^P(t)$ para $t < 0$, estamos supondo só a hipótese mais fraca de que $0 \in \rho(T(t)|_P) \quad \forall t \geq 0$.

Observação 2. Observa-se facilmente que, para $t \in \mathbf{R}$ e $p \in X$,

$$R^P(t)p + R^Q(t)p = U(t)p = T(t)(\chi_0 p)(0) = \begin{cases} R(t)p & p/ t \geq 0 \\ 0 & p/ -r \leq t < 0 \\ \bar{R}(t+r)A^{-1}p & p/ t < -r \end{cases}$$

ou seja, $R^P(t) + R^Q(t) = U(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$

(em particular $R^P(0) + R^Q(0) = I_X$ e $R^P(\theta) + R^Q(\theta) = 0$ para $-r \leq \theta < 0$).

Também

$$\begin{aligned} R^P(t+\theta)p &= T(t+\theta)(\chi_0 p)_P(0) = T(t)(\chi_0 p)_P(\theta) \\ R^Q(t+\theta)p &= T(t)(\chi_0 p)_Q(\theta) \end{aligned} \quad t \in \mathbf{R}, \theta \in [-r, 0]$$

E para cada $[a, b] \subset \mathbf{R}$ temos que $R_{[[a, b]]}^P, R_{[[a, b]]}^Q \in G^{+\sigma}SV([a, b], \mathcal{L}(X))$.

De fato, para cada $p \in X$, $R^P(\cdot)p$ é a solução regradada de $(N)'$ com dado inicial $(\chi_0 p)_P \in P \subset \mathcal{G}^+$ e $R^Q(\cdot)p$ é a solução regradada de $(N)'$ com dado inicial $(\chi_0 p)_Q \in Q \subset \mathcal{G}^+$; logo $R^P(\cdot)p, R^Q(\cdot)p \in G^+(\mathbf{R}, X)$. Pela definição de semi-variação em $[a, b]$ chega-se facilmente a:

$$SV_{[a, b]}[R^Q] \leq \|\pi_Q\|.SV_{[a-r, b]}[U]$$

$$SV_{[a, b]}[R^P] \leq \|\pi_P\|.SV_{[a-r, b]}[U]$$

Finalmente podemos então dizer que, para $H \in G^+(\mathbf{R}, X)$, $t_0, t \in \mathbf{R}$ e $\theta \in [-r, 0]$:

$$\int_{t_0}^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0 H(\sigma))_P(\theta) = \int_{t_0}^t d_\sigma R^P(t-\sigma+\theta)H(\sigma)$$

e

$$\int_{t_0}^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0 H(\sigma))_Q(\theta) = \int_{t_0}^t d_\sigma R^Q(t-\sigma+\theta)H(\sigma)$$

Temos agora a seguinte generalização do teorema 1, cap.12, §9 de [Hale 2].

Teorema 3. Se existem constantes $K, \alpha \in \mathbf{R}$ e $\delta > 0$ tais que:

$$\varphi \in Q \Rightarrow \|T(t)\varphi\| \leq K e^{(\alpha-\delta)t} \|\varphi\| \quad \forall t \geq 0$$

$$\varphi \in P \Rightarrow \|T(t)\varphi\| \leq K e^{(\alpha+\delta)t} \|\varphi\| \quad \forall t \leq 0$$

Então $\exists K_1, K_2, K_3$ e $K_4 > 0$ tais que:

$$1) \|R^Q(t)\| \leq K_1 e^{(\alpha-\delta)t} \text{ para } t \geq 0 \text{ e } \|R^P(t)\| \leq K_1 e^{(\alpha+\delta)t} \text{ para } t \leq 0.$$

$$2) SV_{[t-r,t]}[R^Q] \leq K_2 e^{(\alpha-\delta)t} \text{ para } t \geq 0 \text{ e } SV_{[t,t+r]}[R^P] \leq K_2 e^{(\alpha+\delta)t} \text{ para } t \leq 0.$$

$$3) \text{ Se } \alpha = 0, \text{ então } SV_{[t,\infty]}[R^Q] \leq K_3 e^{-\delta t} \text{ para } t \geq 0 \text{ e } SV_{[-\infty,t]}[R^P] \leq K_3 e^{\delta t} \text{ para } t \leq 0.$$

4) Se $\dim X < \infty$, temos, para $0 < \delta' < \delta$:

$$\int_t^\infty dSV_{[0,s]}[R^Q] e^{-(\alpha-\delta')s} \leq K_4 e^{(\delta'-\delta)t} \text{ para } t \geq 0 \text{ e}$$

$$\int_{-\infty}^t dSV_{[0,s]}[R^P] e^{-(\alpha+\delta')s} \leq K_4 e^{(\delta-\delta')t} \text{ para } t \leq 0.$$

Prova. 1) Para $t \geq 0$ e $p \in X$ temos: $R_t^Q(\cdot)p = T(t)(\chi_0 p)_Q$.

$$\text{Assim } \|R_t^Q(\cdot)p\| \leq K e^{(\alpha-\delta)t} \|(\chi_0 p)_Q\| \leq K e^{(\alpha-\delta)t} \|\pi_Q\| \cdot \|p\| \text{ para } t \geq 0.$$

$$\text{Assim } \forall p \in X, t \geq 0 \quad \|R^Q(t)p\| = \|R_t^Q(0)p\| \leq \|R_t^Q(\cdot)p\| \leq K \|\pi_Q\| e^{(\alpha-\delta)t} \|p\|.$$

$$\text{Logo } \|R^Q(t)\| \leq K \|\pi_Q\| e^{(\alpha-\delta)t} \text{ para } t \geq 0.$$

$$\text{Analogamente para } R^P(t) \text{ teremos: } \|R^P(t)\| \leq K \|\pi_P\| e^{(\alpha+\delta)t} \text{ para } t \leq 0.$$

2) I) Seja $\mathcal{H} = \{H \in G^+([0, \infty[, X) \mid \|H\| \leq 1 \text{ e } H(t) = \text{cte. para } t \geq r\}$.

Para $H \in \mathcal{H}$ e $t \geq r$ temos que $x(0, 0, H, \mu, \eta)(t) = x(0, x_r(0, 0, H, \mu, \eta), 0, \mu, \eta)(t - r)$,

ou seja, $x_t(0, 0, H, \mu, \eta) = T(t - r)x_r(0, 0, H, \mu, \eta)$.

$$\text{Assim } \|(x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_Q\| = \|T(t - r)(x_r(0, 0, H, \mu, \eta))_Q\|$$

$$\leq K e^{(\alpha-\delta)(t-r)} \|(x_r(0, 0, H, \mu, \eta))_Q\| \leq K \|\pi_Q\| e^{(\alpha-\delta)(t-r)} \|x_r(0, 0, H, \mu, \eta)\|.$$

Mas:

$$\|x_r(0, 0, H, \mu, \eta)\| = \|\kappa(r, 0)H\| \leq \overline{K} \cdot \|H\| \leq \overline{K}.$$

$$\text{Assim } \|(x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_Q\| \leq K\bar{K}\|\pi_Q\|e^{(\alpha-\delta)(t-r)}$$

Do teorema 1 chegamos a:

$$(x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_Q = T(t)(\chi_0(H(t) - H(0)))_Q - \int_0^t d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0(H(\sigma) - H(t)))_Q$$

e para $\theta \in [-r, 0]$

$$\begin{aligned} (x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_Q(\theta) &= R^Q(t + \theta)(H(t) - H(0)) - \int_0^t d_\sigma R^Q(t + \theta - \sigma)[H(\sigma) - H(t)] \\ &= R^Q(t + \theta)(H(r) - H(0)) - \int_0^r d_\sigma R^Q(t + \theta - \sigma)[H(\sigma) - H(r)] \end{aligned}$$

Assim, para $t \geq r$, temos (pelo teorema I-1.1):

$$\begin{aligned} SV_{[t-r, t]}[R^Q] &= SV_{[0, r]}[R^Q(t - \cdot)] \equiv \sup_{H \in \mathcal{H}} \left\| \int_0^r d_\sigma R^Q(t - \sigma)H(\sigma) \right\| \\ &\leq \sup_{H \in \mathcal{H}} \left\| \int_0^r d_\sigma R^Q(t - \sigma)[H(\sigma) - H(r)] - R^Q(t)[H(r) - H(0)] \right\| \\ &\quad + \sup_{H \in \mathcal{H}} \|R^Q(t - r)H(r)\| + \sup_{H \in \mathcal{H}} \|R^Q(t)H(0)\| \\ &= \sup_{H \in \mathcal{H}} \|(x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_Q(0)\| + \|R^Q(t - r)\| + \|R^Q(t)\| \\ &\leq K\bar{K}\|\pi_Q\|e^{(\alpha-\delta)(t-r)} + K_1e^{(\alpha-\delta)(t-r)} + K_1e^{(\alpha-\delta)t} \leq K_2e^{(\alpha-\delta)t} \end{aligned}$$

Se K_2 for suficientemente grande conseguimos então

$$SV_{[t-r, t]}[R^Q] \leq K_2e^{(\alpha-\delta)t} \quad \text{para } t \geq 0.$$

II) Seja agora $\mathcal{H} = \{H \in G^+(-\infty, 0], X) \mid \|H\| \leq 1 \text{ e } H(t) = \text{cte. para } t \leq -r\}$.

Para $H \in \mathcal{H}$ e $t \leq -r$ temos que $x(0, 0, H, \mu, \eta)(t) = x(0, x_{-r}(0, 0, H, \mu, \eta), 0, \mu, \eta)(t+r)$,

ou seja, $x_t(0, 0, H, \mu, \eta) = T(t+r)x_{-r}(0, 0, H, \mu, \eta)$.

$$\text{Assim, } \|(x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_P\| = \|T(t+r)(x_{-r}(0, 0, H, \mu, \eta))_P\|$$

$$\leq Ke^{(\alpha+\delta)(t+r)}\|(x_{-r}(0, 0, H, \mu, \eta))_P\| \leq K\|\pi_P\|e^{(\alpha+\delta)(t+r)}\|x_{-r}(0, 0, H, \mu, \eta)\|$$

Mas:

$$\|x_{-r}(0, 0, H, \mu, \eta)\| = \|\kappa(-r, 0)H\| \leq \bar{K} \|H\| \leq \bar{K}.$$

$$\text{Assim } \|(x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_P\| \leq K \bar{K} \|\pi_P\| e^{(\alpha+\delta)(t+r)}.$$

Do teorema 1 chegamos a

$$(x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_P = T(t)(\chi_0(H(t) - H(0)))_P - \int_0^t d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0(H(\sigma) - H(t)))_P$$

e para $\theta \in [-r, 0]$

$$\begin{aligned} (x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_P(\theta) &= R^P(t + \theta)(H(t) - H(0)) - \int_0^t d_\sigma R^P(t + \theta - \sigma)(H(\sigma) - H(t)) \\ &= R^P(t + \theta)(H(-r) - H(0)) - \int_0^{-r} d_\sigma R^P(t + \theta - \sigma)(H(\sigma) - H(-r)) \end{aligned}$$

Assim, para $t \leq -r$ temos (pelo teorema I-1.1):

$$\begin{aligned} SV_{[t, t+r]}[R^P] &= SV_{[-r, 0]}[R^P(t - \cdot)] \equiv \sup_{H \in \mathcal{H}} \left\| \int_{-r}^0 d_\sigma R^P(t - \sigma)H(\sigma) \right\| \leq \\ &\leq \sup_{H \in \mathcal{H}} \left\| \int_{-r}^0 d_\sigma R^P(t - \sigma)(H(\sigma) - H(-r)) + R^P(t)(H(-r) - H(0)) \right\| \\ &\quad + \sup_{H \in \mathcal{H}} \|R^P(t)H(0)\| + \sup_{H \in \mathcal{H}} \|R^P(t+r)H(-r)\| \\ &= \sup_{H \in \mathcal{H}} \|(x_t(0, 0, H, \mu, \eta))_P(0)\| + \|R^P(t)\| + \|R^P(t+r)\| \\ &\leq K \bar{K} \|\pi_P\| e^{(\alpha+\delta)(t+r)} + K_1 e^{(\alpha+\delta)t} + K_1 e^{(\alpha+\delta)(t+r)} \leq \bar{K}_2 e^{(\alpha+\delta)t} \end{aligned}$$

Se K_2 do item I) for suficientemente grande, teremos então:

$$SV_{[t, t+r]}[R^P] \leq K_2 e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{para } t \leq 0.$$

3) Se $\alpha = 0$, temos, para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} SV_{[t, \infty]}[R^Q] &\leq \sum_{j=0}^{\infty} SV_{[t+jr, t+(j+1)r]}[R^Q] \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} K_2 e^{-\delta(t+(j+1)r)} = \frac{K_2 e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} e^{-\delta t} \end{aligned}$$

e para $t \leq 0$:

$$\begin{aligned} SV_{]-\infty, t]}[R^P] &\leq \sum_{j=0}^{\infty} SV_{[t-(j+1)r, t-jr]}[R^P] \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} K_2 e^{\delta(t-(j+1)r)} = \frac{K_2 e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} e^{\delta t} \end{aligned}$$

4) Supondo $\dim X < \infty$, temos bem definido $\int_a^b dSV_{[0, s]}[R^{P, Q}]f(s)$, para f regrada.

Tomemos $0 < \delta' < \delta$. Para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} dSV_{[0, s]}[R^Q] e^{-(\alpha - \delta')s} &\leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t+(mr-r)}^{t+mr} dSV_{[0, s]}[R^Q] e^{-(\alpha - \delta')s} \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{\delta' mr} e^{\delta' t} e^{-\alpha t} e^{-\alpha mr} \max\{1, e^{\alpha r}\} \left(SV_{[0, t+mr]}[R^Q] - SV_{[0, t+mr-r]}[R^Q] \right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{\delta' mr} e^{\delta' t} e^{-\alpha t} e^{-\alpha mr} \max\{1, e^{\alpha r}\} SV_{[t+mr-r, t+mr]}[R^Q] \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{\delta' mr} e^{\delta' t} e^{-\alpha t} e^{-\alpha mr} \max\{1, e^{\alpha r}\} K_2 e^{(\alpha - \delta)(t+mr)} \\ &= K_2 \max\{1, e^{\alpha r}\} \left(\sum_{m=1}^{\infty} [e^{-(\delta - \delta')r}]^m \right) e^{(\delta' - \delta)t} = K_4 e^{(\delta' - \delta)t}. \end{aligned}$$

Analogamente, para $t \leq 0$, mostramos que

$$\int_{-\infty}^t dSV_{[0, s]}[R^P] e^{-(\alpha + \delta')s} \leq K_4 e^{(\delta - \delta')t} \quad \blacksquare$$

4. A equação característica na teoria espectral

Estamos em condições agora de generalizar, para o contexto das funções regradas contínuas à direita, os resultados obtidos por D. Henry em [Henry 1] e [Henry 2] para uma ampla classe de EDFNs lineares.

Fazemos então aqui $X = E^n$ o espaço euclidiano n -dimensional real ou complexo ($E = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

Assim, $\mathcal{L}(E^n)$ é o espaço das matrizes $n \times n$ com valores em E .

Reparemos que neste caso $SV([-r, 0], \mathcal{L}(E^n)) = BV([-r, 0], \mathcal{L}(E^n))$ o espaço das aplicações de $[-r, 0]$ em $\mathcal{L}(E^n)$ que têm a variação limitada. Neste espaço, a variação é uma semi-norma equivalente à semi-variação.

Consideremos a EDFN linear:

$$(N) \quad \frac{d}{dt} D x_t = L x_t \quad D, L \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+, E^n)$$

definidos por $D\varphi = \varphi(0) - L_f(\varphi) = \varphi(0) - \int_{-r}^0 d\mu(\theta)\varphi(\theta)$ e $L\varphi = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\varphi(\theta)$ onde $\mu, \eta \in G^-BV_0([-r, 0], \mathcal{L}(E^n))$ e μ é tal que

$$\int_{-r}^0 d\mu(\theta)\varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi(-r_k) + \int_{-r}^0 A(\theta)\varphi(\theta)d\theta \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}^+$$

com $0 < r_k \leq r$ para $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty$, $\sum_{r_k \leq \varepsilon} |A_k| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ e $A \in L_p([-r, 0], \mathcal{L}(E^n))$ para algum $p > 1$ (esta exigência, e não somente A integrável, ficará clara a partir do teorema 3).

Verificamos facilmente que nesta situação temos:

$$L_f \in \mathcal{X}^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, E^n) \quad \text{e} \quad L \in Y^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, E^n)$$

e como vimos no parágrafo anterior, temos então o semi-grupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares e contínuos de $\mathcal{G}^+$, fluxo da equação (N).

Com a parcela de saltos do núcleo μ , formamos a equação a diferenças:

$$(D)_0 \quad x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x(t - r_k) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{L}_f(x_t); \quad t \geq 0$$

ou seja, $D^0 x_t = 0$, onde

$$D^0 \varphi = \varphi(0) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi(-r_k) = \varphi(0) - \int_{-r}^0 d\overline{\mu}(\theta)\varphi(\theta)$$

$$\text{com} \quad \overline{\mu}(\theta) = - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_{]-\infty, -r_k]}(\theta) \quad \theta \in [-r, 0].$$

$(D)_0$ é então uma equação do tipo $(\hat{N})$ da observação I-1.3, com $\bar{\mu} \in G^-BV_0([-r, 0], \mathcal{L}(E^n))$ e $\bar{L}_f \in \mathcal{X}^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, E^n)$.

Temos então o semi-grupo $\{T^0(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares e contínuos de $\mathcal{G}_{D^0}^+$, fluxo da equação $(D)_0$ onde

$$\mathcal{G}_{D^0}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}(D^0) = \{\varphi \in \mathcal{G}^+ \mid D^0\varphi = 0\}$$

Observação 1. Como $\mu(\theta) = \bar{\mu}(\theta) + \int_0^\theta A(\sigma)d\sigma$ para $-r \leq \theta \leq 0$, são equivalentes:

- (i) L_f satisfaz $(\widetilde{3})$
- (ii) $\bar{L}_f$ satisfaz $(\widetilde{3})$
- (iii) $\exists k \mid r_k = r$, $\sum_{r_k=r} A_k$ é inversível e bicontínuo e $\sum_{r-\varepsilon \leq r_k < r} |A_k| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$.

Em caso afirmativo, temos as extensões dos fluxos de (N) e $(D)_0$ respectivamente para os grupos de operadores $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{T^0(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Observação 2. $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}^+$ é invariante por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\mathcal{C}_{D^0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}(D^0) \cap \mathcal{C}$ é invariante por $\{T^0(t)\}_{t \geq 0}$.

Em [Hale 2], cap.12.3, Hale nos dá uma projeção contínua $\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{D^0}$ tal que $\Psi = I_{\mathcal{C}} - \Phi D^0$, onde $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, $\phi_i \in \mathcal{C}$, é tal que $D^0\Phi = I$ (aqui I é a matriz identidade $n \times n$ e $I_{\mathcal{C}}$ é a identidade de $\mathcal{C}$).

Assim, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{D^0} \oplus \mathcal{N}(\Psi)$, onde $\dim \mathcal{N}(\Psi) = n$ ($\mathcal{N}(\Psi) = \mathcal{R}(\Phi D^0)$ tem como base $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$).

Colocando $\varphi^{D^0} = \Psi\varphi$, temos para $\varphi \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^{D^0} + \Phi D^0\varphi = \varphi^{D^0} + \sum_{i=1}^n (D^0\varphi)_i \phi_i \\ &= \varphi^{D^0} + \sum_{i=1}^n (\varphi(0)_i - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}_i(\theta)\varphi(\theta))\phi_i \end{aligned}$$

onde $(D^0\varphi)_i$ é a i -ésima componente do vetor $D^0\varphi \in E^n$ e $\bar{\mu}_i(\theta)$ é a i -ésima linha da matriz $\bar{\mu}(\theta)$.

Assim, $\bar{\mu}_i \in G^-BV_0([-r, 0], (E^n)')$.

Para $\varphi \in \mathcal{G}^+$ também vale que $D^0(\varphi - \Phi D^0\varphi) = 0$, logo temos Ψ estendido para $\mathcal{G}^+$ e vale para φ a decomposição acima. Temos $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_{D^0}^+ \oplus \mathcal{N}(\Psi)$ ($\mathcal{N}(\Psi)$ é o mesmo, ou seja, $\mathcal{N}(\Psi) \subset \mathcal{C}$ e $\dim \mathcal{N}(\Psi) = n$).

Henry consegue em [Henry 1] e [Henry 2] uma descrição completa do espectro dos operadores $T^0(t)|_{\mathcal{C}_{D^0}}$ e $T(t)|_{\mathcal{C}}$ para $t \geq 0$, usando o gerador infinitesimal A^0 de $\{T^0(t)|_{\mathcal{C}_{D^0}}\}_{t \geq 0}$ e A de $\{T(t)|_{\mathcal{C}}\}_{t \geq 0}$.

Cada fluxo acima forma um semi-grupo fortemente contínuo (para cada $\varphi \in \mathcal{C}_{D^0}$ temos que a função $t \in \mathbf{R}_+ \rightarrow T^0(t)\varphi \in \mathcal{C}_{D^0}$ é contínua e para cada $\varphi \in \mathcal{C}$ a função $t \in \mathbf{R}^+ \rightarrow T(t)\varphi \in \mathcal{C}$ é contínua) e admite um gerador infinitesimal fechado de domínio denso em $\mathcal{C}_{D^0}$ e $\mathcal{C}$ respectivamente.

Para o espectro desses geradores, temos:

$$\sigma(A^0) = P_\sigma(A^0) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \det H(\lambda) = 0\}$$

$$\sigma(A) = P_\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \det \Delta(\lambda) = 0\}$$

onde $\det H(\lambda) = 0$ e $\det \Delta(\lambda) = 0$ são as equações características respectivas de $(D)_0$ e de (N) , sendo:

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= I - \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda r_k} = D^0(e^{\lambda \cdot} I) \\ \text{e } \Delta(\lambda) &= \lambda H(\lambda) - \lambda \int_{-r}^0 A(\theta) e^{\lambda \theta} d\theta - \int_{-r}^0 d\eta(\theta) e^{\lambda \theta} \\ &= \lambda D(e^{\lambda \cdot} I) - L(e^{\lambda \cdot} I). \end{aligned}$$

Henry mostra então que:

$$\sigma(T^0(t)|_{\mathcal{C}_{D^0}}) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(A^0)}} \setminus \{0\} \quad \text{q.s. em } t \geq 0$$

e que $T(t)|_{\mathcal{C}} - T^0(t) \circ \Psi|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é um operador compacto para cada $t \geq 0$ e juntando estes fatos, conclui que

$$\sigma(T(t)|_{\mathcal{C}}) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(A)}} \setminus \{0\} \quad \text{q.s. em } t \geq 0.$$

Apesar de os fluxos de $(D)_0$ e (N) não serem fortemente contínuos e portanto não podermos estender os geradores infinitesimais para domínios densos em $\mathcal{G}_{D_0}^+$ e $\mathcal{G}^+$ respectivamente, nosso objetivo aqui é mostrar que os resultados citados acima são ainda válidos respectivamente em $\mathcal{G}_{D_0}^+$ e $\mathcal{G}^+$, ou seja, que

$$\sigma(T^0(t)) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(A^0)}} \setminus \{0\} \quad \text{q.s. em } t \geq 0,$$

que $T(t) - T^0(t) \circ \Psi : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ é um operador compacto para cada $t \geq 0$ e que, por fim:

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(A)}} \setminus \{0\} \quad \text{q.s. em } t \geq 0.$$

Seja $\mathcal{E}^+ \subset \mathcal{G}^+$ o subespaço denso de $\mathcal{G}^+$ formado pelas funções escadas, ou seja:

$$\mathcal{E}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \varphi \in \mathcal{G}^+ \mid \varphi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{[\theta_i, 0]} \text{ para algum } k \in \mathbb{N}^*, c_i \in E^n \right. \\ \left. \text{e } -r \leq \theta_i \leq 0 \text{ para } i = 1, \dots, k \right\}$$

Abreviando $G^-BV_0 = G^-BV_0([-r, 0], (E^n)'),$ temos:

Lema 1. Para cada $\varphi \in \mathcal{E}^+$, existe $\varphi_m \in \mathcal{C}$ para $m \in \mathbb{N}$, tal que $\varphi_m(0) = \varphi(0)$, $\|\varphi_m\| = \|\varphi\| \quad \forall m \in \mathbb{N}$ e ainda

$$\int_{-r}^0 d\alpha(\theta) \varphi_m(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\theta) \varphi(\theta) \quad \forall \alpha \in G^-BV_0.$$

Prova: Podemos, sem perda de generalidade, supor $E^n = E$ (ou seja, $n = 1$), pois de outro modo, fazemos o raciocínio coordenada por coordenada:

1) Se $\varphi = \chi_{[\theta, 0]} \in \mathcal{E}^+ \quad (-r \leq \theta \leq 0)$.

Caso $\theta = -r$, tomamos $\varphi_m = \varphi \equiv 1$ e caso $\theta \neq -r$, para $m > \frac{1}{r + \theta}$, tomamos

$$\varphi_m(\beta) = \chi_{[\theta, 0]}^{(m)}(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } -r \leq \beta \leq \theta - \frac{1}{m} \\ m(\beta - \theta + \frac{1}{m}) & \text{se } \theta - \frac{1}{m} \leq \beta \leq \theta \\ 1 & \text{se } \theta \leq \beta \leq 0 \end{cases}$$

Temos, para $\alpha \in G^-BV_0$, que

$$\begin{aligned} \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \chi_{[\theta,0]}^{(m)}(\beta) &= \int_{\theta-\frac{1}{m}}^{\theta} d\alpha(\beta) [m(\beta - \theta)] - \alpha(\theta - \frac{1}{m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\alpha(\theta) = \\ &= \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \chi_{[\theta,0]}(\beta) \end{aligned}$$

pois

$$\left| \int_{\theta-\frac{1}{m}}^{\theta} d\alpha(\beta) [m(\beta - \theta)] \right| \leq \text{Var}_{[\theta-\frac{1}{m}, \theta]}[\alpha] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

2) Para $\varphi \in \mathcal{E}^+$, de maneira geral, $\varphi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{[\theta_i,0]}$.

Tomamos $\varphi_m = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{[\theta_i,0]}^{(m)} \in \mathcal{C}$ e teremos:

$$\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi_m(\beta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi(\beta) = - \sum_{i=1}^k c_i \alpha(\theta_i) \quad \forall \alpha \in G^-BV_0.$$

Pela maneira como nós construímos $\varphi_m \in \mathcal{C}$, nós vamos ter

$$\varphi_m(0) = \varphi(0) \quad \text{e} \quad \|\varphi_m\| = \|\varphi\|.$$

■

Lema 2. Para $\varphi \in \mathcal{G}^+$, temos que se $\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi(\beta) = 0 \quad \forall \alpha \in G^-BV_0$, então $\varphi(\theta) = 0$ para $-r \leq \theta < 0$.

Prova: Raciocinando nas coordenadas, podemos supor $E^n = E$.

Se para $\theta \neq 0$ temos $\varphi(\theta) \neq 0$, então $\exists \delta > 0 \mid \varphi(\theta + t) \neq 0$ para $0 \leq t \leq \delta$. Tome $\alpha = \chi_{[-r, \theta + \delta/2]}$ e teremos $\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi(\beta) = -\varphi(\theta + \frac{\delta}{2}) \neq 0$. Absurdo. ■

Lema 3. Para $\varphi \in \mathcal{E}^+$, sejam $\varphi_m \in \mathcal{C}$ para $m \in \mathbb{N}$ como no lema 1. Então $\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi_m^{D^0}(\beta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi^{D^0}(\beta) \quad \forall \alpha \in G^-BV_0$ (onde $\varphi^{D^0} = \Psi\varphi$, como na observação 2) e ainda $\varphi_m^{D^0}(0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi^{D^0}(0)$.

Prova: $\varphi_m^{D^0} = \varphi_m - \sum_{i=1}^n (\varphi_m(0)_i - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}_i(\theta) \varphi_m(\theta)) \phi_i$ como na observação 2. Assim, para $\alpha \in G^-BV_0$,

$$\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi_m^{D^0}(\beta) = \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi_m(\beta) - \sum_{i=1}^n (\varphi_m(0)_i - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}_i(\theta) \varphi_m(\theta)) \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \phi_i(\beta).$$

Lembrando que $\varphi_m(0)_i = \varphi(0)_i$ e que $\bar{\mu}_i \in G^-BV_0$, temos:

$$\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi_m^{D^0}(\beta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \varphi^{D^0}(\beta).$$

Temos também

$$\begin{aligned} \varphi_m^{D^0}(0) &= \varphi_m(0) - \sum_{i=1}^n (\varphi_m(0)_i - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}_i(\theta) \varphi_m(\theta)) \phi_i(0) \\ &= \varphi(0) - \sum_{i=1}^n (\varphi(0)_i - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}_i(\theta) \varphi_m(\theta)) \phi_i(0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi^{D^0}(0) \end{aligned}$$

■

Reparemos que $\mathcal{E}_{D^0}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(\mathcal{E}^+)$ é denso em $\mathcal{G}_{D^0}^+$.

Lema 4. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_{D^0}^+, \mathcal{G}^+)$ com $(T\varphi)(\theta) = \int_{-\bar{r}}^0 d_\beta K(\theta - \beta) \varphi(\beta)$, onde temos $-r \leq -\bar{r} < 0$ e $K \in G^+BV([-\bar{r}, \bar{r}], \mathcal{L}(E^n))$; então, para $\alpha \in G^-BV_0$, existe $\tilde{\alpha} \in G^-BV_0$ tal que

$$\int_{-r}^0 d\alpha(\theta) (T\varphi)(\theta) = \int_{-r}^0 d\tilde{\alpha}(\beta) \varphi(\beta).$$

Prova: $\int_{-r}^0 d\alpha(\theta) \int_{-\bar{r}}^0 d_\beta K(\theta - \beta) \varphi(\beta) = \int_{-\bar{r}}^0 d_\beta \left[\int_{-r}^0 d\alpha(\theta) K(\theta - \beta) \right] \varphi(\beta)$
(pelo teorema 2.4 de [H3]). Assim:

$$\int_{-r}^0 d\alpha(\theta) (T\varphi)(\theta) = \int_{-r}^0 d\tilde{\alpha}(\beta) \varphi(\beta) \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\beta) &= \int_{-r}^0 d\alpha(\theta) K(\theta - \beta) - \int_{-r}^0 d\alpha(\theta) K(\theta) & \text{para } \beta \in [-\bar{r}, 0] \\ \text{e } \tilde{\alpha}(\beta) &= \tilde{\alpha}(-\bar{r}) & \text{para } -r \leq \beta \leq -\bar{r}. \end{aligned}$$

Fazendo $\alpha(t) = \alpha(-r)$ para $t \leq -r$ e $\alpha(t) = 0$ para $t \geq 0$ temos que, para $\beta \in [-r, 0]$, $\tilde{\alpha}(\beta) = \int_{-r}^{\beta} d_u \alpha(u + \beta) K(u)$ -cte. e do teorema 2.4 de [H3] concluimos que $\tilde{\alpha} \in G^- BV_0$.

Observação 3. Pela fórmula (ρ_N) da proposição I-7.8, temos que, para $\varphi \in \mathcal{G}_{D^0}^+$, a solução de $(D)_0$ para $t \geq 0$ com $x_0 = \varphi$ será dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-r}^0 d_\beta \left[\int_0^t d_\sigma R(t - \sigma) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_{]-\infty, -r_k]}(\beta - \sigma) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_{]-\infty, -r_k]}(\beta - t) \right] \varphi(\beta) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-r}^0 d_\beta \left[\int_0^{r+\beta} d_\sigma R(t - \sigma) \chi_{]-\infty, -r_k]}(\beta - \sigma) - R(t - \beta - r) \chi_{]-\infty, -r_k]}(-r) \right] A_k \varphi(\beta) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-r}^0 d_\beta \left[\int_{-r}^{\beta} d_\sigma R(t - \beta + \sigma) \chi_{]-\infty, -r_k]}(\sigma) + R(t - \beta - r) \right] A_k \varphi(\beta). \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$(\rho_{D^0}) : \quad x(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-r_k}^0 d_\beta R(t - \beta - r_k) A_k \varphi(\beta), \quad t \geq 0.$$

onde o resolvente $R : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(E^n)$ tal que $R(t) = 0$ para $t < 0$, $R(0) = I$, $R|_{[a,b]} \in G^+ BV([a,b], \mathcal{L}(E^n))$ é exatamente a matriz fundamental X dada no lema 3.4 de [Henry 1], pois R é a única solução de (R^*) e (R_*) do teorema I.7.2, que para a equação $(D)_0$ se torna a equação satisfeita por X no lema 3.4 de [Henry 1].

Temos válido para $R = X$ o lema 3.5 de [Henry 1], ou seja, se para $\alpha \in \mathbf{R}$ tivermos algum $\delta > 0$ tal que $\det H(\lambda) \neq 0$ para $|\operatorname{Re} \lambda - \alpha| \leq \delta$, então teremos a decomposição $X(t) = X^P(t) + X^Q(t)$ (caso $\alpha = 0$, temos $X(t) = X^P(t) + X^Q(t) + \text{cte}$) com X^P podendo ser estendido para $t \leq 0$ e com as majorações:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_{[t-r,t]}[X^Q] &\leq M e^{(\alpha-\delta)t} \quad \text{para } t \geq 0 \\ \text{e } \operatorname{Var}_{[t-r,t]}[X^P] &\leq M e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{para } t \leq 0 \end{aligned}$$

para alguma constante M .

Vamos estender o teorema 3.1 de [Henry 1]:

Teorema 1. Suponha $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que existe $\delta > 0$ com

$$\det H(\lambda) \neq 0 \quad \text{para} \quad |\operatorname{Re} \lambda - \alpha| \leq \delta.$$

Então $\mathcal{G}_{D^0}^+ = P \oplus Q$, soma direta de subespaços fechados invariantes por $\{T^0(t)\}_{t \geq 0}$.

Podemos estender $\{T^0(t)|_P\}_{t \geq 0}$ de maneira única para $-\infty < t < \infty$ como um grupo de operadores em P .

Por fim, existe constante M' tal que

$$\begin{aligned} \|T^0(t)|_Q\| &\leq M' e^{(\alpha-\delta)t} \quad \text{para } t \geq 0 \\ \text{e } \|T^0(t)|_P\| &\leq M' e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{para } t \leq 0 \end{aligned}$$

Prova: Como temos $X_{[-b,b]}^P \in G^+BV([-b,b], \mathcal{L}(E^n))$ e $X_{[0,b]}^Q \in G^+BV([0,b], \mathcal{L}(E^n))$ $\forall b > 0$; temos então, para $\varphi \in \mathcal{G}_{D^0}^+$, bem definido $y(t)$, solução de $(D)_0$ dada pela fórmula (ρ_{D^0}) da observação 3. Podemos definir também:

$$y^{P,Q}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-r_k}^0 d_{\beta} X^{P,Q}(t - \beta - r_k) A_k \varphi(\beta), \quad t \geq 0.$$

No caso de y^P , podemos tomar $-\infty < t < \infty$.

Da observação 3, seguem as majorações:

$$(*) \quad \begin{cases} \|y^Q(t)\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \right) M e^{(\alpha-\delta)t} \|\varphi\| & \text{para } t \geq 0 \\ \|y^P(t)\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \right) M e^{(\alpha+\delta)t} \|\varphi\| & \text{para } t \leq 0 \end{cases}$$

Definamos $T^0(t)^P \varphi = y_t^P$ para $t \in \mathbf{R}$ e $T^0(t)^Q \varphi = y_t^Q$ para $t \geq r$.

Caso $\overline{L_f}$ satisfaça $(\widetilde{3})$ (ver observação 1), temos $y(t)$ bem definido para $t \in \mathbf{R}$ e podemos definir $y^Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) - y^P(t)$ para $t \leq 0$ e também $T^0(t)^Q \varphi = y_t^Q$ para $t \in \mathbf{R}$.

Pelas majorações acima, vemos que $T^0(t)^{P,Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_{D^0}^+, \mathcal{G}^+)$.

Seja $\pi_P \stackrel{\text{def}}{=} T^0(0)^P \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_{D^0}^+, \mathcal{G}^+)$.

Conforme o teorema 3.1 de [Henry 1], temos:

$$\pi_P|_{\mathcal{C}_{D^0}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{D^0}) \quad \text{e é projeção.}$$

Vamos mostrar que $\pi_P \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_{D^0}^+)$ e é projeção.

Começemos com as escadas. Seja $\varphi \in \mathcal{E}^+$,

$$\varphi = \varphi^{D^0} + \sum_{i=1}^n \left(\varphi(0)_i - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}_i(\theta) \varphi(\theta) \right) \phi_i \quad (\text{observação 2}).$$

Sejam $\varphi_m \in \mathcal{C}$, $\varphi_m^{D^0} \in \mathcal{C}_{D^0}$ como no lema 1 e lema 3.

Afirmamos que $\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \pi_P(\varphi_m^{D^0})(\beta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \pi_P(\varphi^{D^0})(\beta)$, $\forall \alpha \in G^-BV_0$.

Isso pois $\pi_P = \sum_{k=1}^{\infty} T_k$ onde $T_k \varphi^{D^0}(\theta) = - \int_{-r_k}^0 d_\beta X^P(\theta - \beta - r_k) A_k \varphi^{D^0}(\beta)$, ou seja, T_k está nas hipóteses do lema 4 e $\|T_k\| \leq \bar{M}|A_k|$. Logo, o resultado do lema 4 se estende para π_P e temos a convergência acima $\forall \alpha \in G^-BV_0$.

Agora temos: $\pi_P \varphi_m^{D^0}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (T_k \varphi_m^{D^0})(\theta)$ e $[T_k(\cdot)](\theta) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_{D^0}^+, E^n)$ (para $\theta \in [-r, 0]$) com cada componente representada por um núcleo em G^-BV_0 (veja a fórmula de T_k acima).

Logo $(T_k \varphi_m^{D^0})(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (T_k \varphi^{D^0})(\theta)$.

Pelo lema 1, $\|\varphi_m\| = \|\varphi\|$ e então $\|\varphi_m^{D^0}\| \leq \|\Psi\| \cdot \|\varphi\| \quad \forall m \in \mathbb{N}$ e como $\sum_{k=1}^N T_k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \pi_P$ em $\mathcal{L}(\mathcal{G}_{D^0}^+, \mathcal{G}^+)$, temos que

$$(\pi_P \varphi_m^{D^0})(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\pi_P \varphi^{D^0})(\theta),$$

em particular $(\pi_P \varphi_m^{D^0})(0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\pi_P \varphi^{D^0})(0)$.

Assim

$$\begin{aligned} 0 &= D^0(\pi_P \varphi_m^{D^0}) = \pi_P \varphi_m^{D^0}(0) - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}(\beta) (\pi_P \varphi_m^{D^0})(\beta) \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\pi_P \varphi^{D^0})(0) - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}(\beta) \pi_P \varphi^{D^0}(\beta) = D^0(\pi_P \varphi^{D^0}) \end{aligned}$$

Logo, $\pi_P \varphi^{D^0} \in \mathcal{G}_{D^0}^+$ e então $\pi_P(\mathcal{E}_{D^0}^+) \subset \mathcal{G}_{D^0}^+$; como $\overline{\mathcal{E}_{D^0}^+} = \mathcal{G}_{D^0}^+$, temos que $\pi_P \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_{D^0}^+)$.

Tendo agora sentido $\pi_P^2 \varphi^{D^0}$ e raciocinando como acima, temos:

$$\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \pi_P^2 \varphi_m^{D^0}(\beta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\beta) \pi_P^2 \varphi^{D^0}(\beta) \quad \forall \alpha \in G^- BV_0.$$

Ora, $\pi_P^2 \varphi_m^{D^0} = \pi_P \varphi_m^{D^0}$ (π_P é projeção em $\mathcal{C}_{D^0}$) e assim $\int_{-r}^0 d\alpha(\beta) [\pi_P^2 - \pi_P](\varphi^{D^0})(\beta) = 0$ $\forall \alpha \in G^- BV_0$ e pelo lema 2 concluímos que $\pi_P^2 \varphi^{D^0}(\theta) = \pi_P \varphi^{D^0}(\theta)$ para $-r \leq \theta < 0$ e então

$$\begin{aligned} D^0(\pi_P^2 \varphi^{D^0}) &= (\pi_P^2 \varphi^{D^0})(0) - \int_{-r}^0 d\bar{\mu}(\theta) (\pi_P^2 \varphi^{D^0})(\theta) \\ &= (\pi_P^2 \varphi^{D^0})(0) - (\pi_P \varphi^{D^0})(0) + D^0(\pi_P \varphi^{D^0}). \end{aligned}$$

Mas $D^0(\pi_P \varphi^{D^0}) = D^0(\pi_P^2 \varphi^{D^0}) = 0$ ($\mathcal{G}_{D^0}^+$ é invariante por π_P); logo $\pi_P^2 \varphi^{D^0}(0) = \pi_P \varphi^{D^0}(0)$ completando a prova de que $\pi_P^2 = \pi_P$ em $\mathcal{E}_{D^0}^+$.

Como $\overline{\mathcal{E}_{D^0}^+} = \mathcal{G}_{D^0}^+$, concluímos que π_P é projeção em $\mathcal{G}_{D^0}^+$.

Temos então os subespaços fechados de $\mathcal{G}_{D^0}^+$,

$$P = \mathcal{R}(\pi_P) \quad \text{e} \quad Q = \mathcal{N}(\pi_P) \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_{D^0}^+ = P \oplus Q.$$

Vamos mostrar agora que $T^0(t)\pi_P = \pi_P T^0(t) = T^0(t)^P$ em $\mathcal{G}_{D^0}^+$ para $t \geq 0$.

Começemos outra vez com $\varphi \in \mathcal{E}^+$ e $\varphi_m \in \mathcal{C}$ para $m \in \mathbb{N}$ como no lema 1. Do teorema 3.1 de [Henry 1] temos que

$$T^0(t)\pi_P \varphi_m^{D^0}(\theta) = \pi_P T^0(t)\varphi_m^{D^0}(\theta) = T^0(t)^P \varphi_m^{D^0}(\theta) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall \theta \in [-r, 0]$$

e cada expressão dessas converge quando $m \rightarrow \infty$ para a respectiva expressão com φ^{D^0} no lugar de $\varphi_m^{D^0}$ (mostramos uma convergência dessas do mesmo modo como mostramos anteriormente que $\pi_P \varphi_m^{D^0}(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \pi_P \varphi^{D^0}(\theta)$, lembrando que $\pi_P = \sum_{k=1}^{\infty} T_k$, $T^0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{T}_k$ com T_k e $\widetilde{T}_k$ nas hipóteses do lema 4 e ainda $\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\| \leq \overline{M} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ e o mesmo para $\sum_{k=1}^{\infty} \|\widetilde{T}_k\|$).

Concluímos então que $T^0(t)\pi_P = \pi_P T^0(t) = T^0(t)^P$ em $\mathcal{E}_{D^0}^+$ e, por densidade, em $\mathcal{G}_{D^0}^+$ para $t \geq 0$.

Para $t \in \mathbf{R}$ também obtemos

$$0 = D^0(T^0(t)^P \varphi_m^{D^0}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} D^0(T^0(t)^P \varphi^{D^0}),$$

o que nos permite definir $T^0(t) = T^0(t)^P$ em P para $t \leq 0$ e obter o grupo de isomorfismos $\{T^0(t)|_P\}_{t \in \mathbf{R}}$, pois quando temos a continuação da solução de (N) em toda a reta, esta continuação se dá de maneira única (ver [Henry 4] para esse resultado).

Facilmente obtemos $T^0(t)\pi_Q = \pi_Q T^0(t) = T^0(t)^Q$ para $t \geq r$, pois $\pi_Q = I_{\mathcal{G}^+} - \pi_P$.

Caso $\overline{L_f}$ satisfaça $(\widetilde{3})$ (ver observação 1), vamos ter essas igualdades para π_P e π_Q em $-\infty < t < \infty$.

Com isso terminamos o teorema, visto que as majorações exponenciais para $T^0(t)|_P$ para $t \leq 0$ e $T^0(t)|_Q$ para $t \geq 0$ seguem das igualdades acima e das respectivas majorações em $(*)$. ■

Nota: Os subespaços $P \cap \mathcal{C}_{D^0}$ e $Q \cap \mathcal{C}_{D^0}$ estão caracterizados no teorema 3.1 de [Henry 1], em função dos auto-espaços generalizados associados aos auto-valores do gerador infinitesimal A^0 .

Estendemos agora o teorema 3.2 de [Henry 1].

Teorema 2. Suponha $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{Re } \lambda \mid \det H(\lambda) = 0\}$ não vazio. Então para $t \geq 0$ temos:

$$\overline{\{e^{\lambda t} \mid \det H(\lambda) = 0\}} \subset \sigma(T^0(t)) \subset \{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{Z}\} \cup \{0\}.$$

Se $\alpha \in \overline{Z}$ e $\mathcal{G}_{D^0}^+ = P \oplus Q$, a decomposição dada no teorema 1, então:

$$\sigma(T^0(t)|_P) \subset \{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{Z} \text{ e } \xi > \alpha\}$$

e

$$\sigma(T^0(t)|_Q) \subset \{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{Z} \text{ e } \xi < \alpha\}$$

Se Z é vazio, então $\sigma(T^0(t)) = \{0\}$ para $t > 0$ e de fato $T^0(t) = 0$ para $t \geq rn$.

Prova: Segue os passos do teorema 3.2 de [Henry 1]. Lembrar que para $\varphi \in \mathcal{E}^+$, tomando $\varphi_m \in \mathcal{C}$ como no lema 1, temos que $(T^0(t)\varphi_m^{D^0})(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (T^0(t)\varphi^{D^0})(\theta)$. Assim, $T^0(t)|_{\mathcal{C}_{D^0}} = 0 \Rightarrow T^0(t) = 0$.

Com as majorações do teorema 1, chegamos às inclusões desejadas para $\sigma(T^0(t)|_P)$ e $\sigma(T^0(t)|_Q)$, como no teorema 3.2 de [Henry 1] e, do mesmo modo, chegamos ao final das conclusões, lembrando que $\sigma(T^0(t)) = \sigma(T^0(t)|_P) \cup \sigma(T^0(t)|_Q)$. ■

Convém reparar que se $\overline{L_f}$ satisfaz $(\widetilde{3})$, então do teorema 2 segue que Z é não-vazio.

Observação 4. Do teorema 2 e do teorema 5.1 de [Henry 2] temos que $\sigma(T^0(t)) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(A^0)}} \setminus \{0\}$ q.s. em $t \geq 0$.

Passando agora para a equação (N) do início do parágrafo, generalizemos primeiramente o lema 4.1 de [Henry 1].

Lema 5. $T(t) - T^0(t) \circ \Psi : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ é operador compacto para cada $t \geq 0$.

Prova: Análoga à do lema 4.1 de [Henry 1], lembrando que $\mathcal{R}(I_{\mathcal{G}^+} - \Psi)$ tem dimensão finita (ver observação 2). ■

Se tivéssemos o resultado $P_\sigma(T(t)) = P_\sigma(T(t)|_{\mathcal{C}}) = e^{t\sigma(A)}$ (esta última igualdade aparece no teorema 4.1 de [Henry 1]), poderíamos generalizar o teorema 4.1 de [Henry 1], que é o nosso objetivo. Como não temos, *a priori*, a primeira igualdade acima, vamos ter que analisar mais a fundo a equação (N) .

Observação 5. Vamos transformar a fórmula (ρ_N) da proposição I.7.8 numa forma mais interessante.

Para o caso autônomo temos, para $\varphi \in \mathcal{G}^+$ e $t \geq 0$:

$$(\rho_N): \quad \begin{aligned} x(t) = R(t)D\varphi - \int_{-r}^0 d\beta \left(\int_0^t d_\sigma R(t-\sigma) \mu(\beta-\sigma) - \mu(\beta-t) \right) \varphi(\beta) \\ + \int_{-r}^0 d\beta \left(\int_0^t R(t-\sigma) \eta(\beta-\sigma) d\sigma \right) \varphi(\beta) \end{aligned}$$

e vale:

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^0 d\beta \left(\int_0^t d_\sigma R(t-\sigma) \mu(\beta-\sigma) - \mu(\beta-t) \right) \varphi(\beta) = \\ & = \int_{-r}^0 d\beta \left(\int_0^{r+\beta} d_\sigma R(t-\sigma) \mu(\beta-\sigma) - R(t-\beta-r) \mu(-r) \right) \varphi(\beta) = \\ & = \int_{-r}^0 d\beta \left(\int_{-r}^\beta d_\sigma R(t-\sigma-r) \mu(\beta-\sigma-r) \right) \varphi(\beta) - \int_{-r}^0 d\beta R(t-\beta-r) \mu(-r) \varphi(\beta) \\ & \text{(teorema 2.6 de [H3])} \\ & = - \int_{-r}^0 d_\sigma R(t-\sigma-r) \left[\int_\sigma^0 d\beta \mu(\beta-\sigma-r) \varphi(\beta) + \mu(-r) \varphi(\sigma) \right] \\ & \quad - \int_{-r}^0 d_\sigma R(t-\sigma-r) \mu(-r) \varphi(\sigma) \\ & = \int_{-r}^0 d_\sigma R(t-\sigma-r) \int_\sigma^0 d\beta \mu(\beta-\sigma-r) \varphi(\beta). \end{aligned}$$

E vale também:

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^0 d\beta \left(\int_0^t R(t-\sigma) \eta(\beta-\sigma) d\sigma \right) \varphi(\beta) = \\ & \text{(teorema 2.4 de [H3])} \\ & = \int_0^t \left[\int_{-r}^0 d\beta R(t-\sigma) \eta(\beta-\sigma) \varphi(\beta) \right] d\sigma = \\ & = \int_0^t R(t-\sigma) \left(\int_{-r}^0 d\beta \eta(\beta-\sigma) \varphi(\beta) \right) d\sigma = \\ & = \int_0^r R(t-\sigma) \left(\int_{-r+\sigma}^0 d\beta \eta(\beta-\sigma) \varphi(\beta) \right) d\sigma = \\ & = \int_{-r}^0 R(t-\sigma-r) \left(\int_\sigma^0 d\beta \eta(\beta-\sigma-r) \varphi(\beta) \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Assim temos, para $t \geq 0$:

$$(\rho_N): \quad \begin{aligned} x(t) = R(t)D\varphi - \int_{-r}^0 d\beta R(t-\beta-r) \left(\int_\beta^0 d_\sigma \mu(\sigma-\beta-r) \varphi(\sigma) \right) \\ + \int_{-r}^0 R(t-\beta-r) \left(\int_\beta^0 d_\sigma \eta(\sigma-\beta-r) \varphi(\sigma) \right) d\beta \end{aligned}$$

Observação 6. No contexto deste parágrafo, o resolvente $R : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(E^n)$ tal que $R(t) = 0$ para $t < 0$, $R(0) = I$ e $R|_{[a,b]} \in G^+BV([a,b], \mathcal{L}(E^n))$ é exatamente a matriz fundamental X , dada no teorema 4.3 de [Henry 1], pois ambas são a única solução de (N) para $t \geq 0$, com dado inicial $\chi_0 I$.

Temos válido então para $R = X$ o teorema 4.3 de [Henry 1], ou seja, se para $\alpha \in \mathbf{R}$ tivermos $\delta > 0$ tal que $\det \Delta(\lambda) \neq 0$ para $|\operatorname{Re} \lambda - \alpha| \leq \delta$ então temos a decomposição $X(t) = X^P(t) + X^Q(t)$, $X|_{[a,b]}^{P,Q} \in G^+BV([a,b], \mathcal{L}(E^n))$, com X^P podendo ser estendido para $-\infty < t < \infty$ e com as majorações:

$$\|X_t^Q\| \leq \overline{M} e^{(\alpha-\delta)t}, \operatorname{Var}_{[t-r,t]}[X^Q] \leq M e^{(\alpha-\delta)t} \text{ p/ } t \geq 0$$

e

$$\|X_t^P\| \leq \overline{M} e^{(\alpha+\delta)t}, \operatorname{Var}_{[t-r,t]}[X^P] \leq M e^{(\alpha+\delta)t} \text{ p/ } t \leq 0.$$

Para $\varphi \in \mathcal{G}^+$, temos a solução de (N), $x = x(0, \varphi)$ para $t \geq 0$ com $x_0 = \varphi$ e podemos definir então, nas hipóteses do teorema 4.3 de [Henry 1], para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} x^{P,Q}(t) = X^{P,Q}(t)D\varphi - \int_{-r}^0 d_\beta X^{P,Q}(t - \beta - r) \int_\beta^0 d_\sigma \mu(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) \\ + \int_{-r}^0 X^{P,Q}(t - \beta - r) \int_\beta^0 d_\sigma \eta(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\beta \end{aligned}$$

e $T(t)^{P,Q} \varphi = x_t^{P,Q}$ para $t \geq r$ com $x^P(t)$ e $T(t)^P$ podendo ser estendidos para $-\infty < t < \infty$.

Definimos $\pi_P = T(0)^P$. Com as majorações acima, concluímos que $T(t)^P$, $\pi_P \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+)$ para $t \in \mathbf{R}$.

Teorema 3. Nas condições acima, ou seja, existe $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\delta > 0$ tal que $\det \Delta(\lambda) \neq 0$ para $|\operatorname{Re} \lambda - \alpha| \leq \delta$, temos que: $\pi_{P|C}$ é projeção contínua de C e, definido $P' = \mathcal{R}(\pi_{P|C})$ e $Q' = \mathcal{N}(\pi_{P|C})$ temos: $C = P' \oplus Q'$ e esses subespaços são invariantes por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e temos ainda: $T(t)\pi_{P|C} = T(t)|_{P'}^P$ para $t \in \mathbf{R}$.

Nota: P' e Q' são os subespaços caracterizados no teorema 4.2 de [Henry 1] e $\pi_{P|C}$ é a projeção E dada nesse mesmo teorema.

Antes da prova, vamos precisar de um lema:

Lema 6. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ (complexo) e $\mu \in BV_0([-r, 0], \mathcal{L}(E^n))$, temos:

$$\int_{-r}^0 e^{-\lambda\beta} e^{-\lambda r} \int_{\beta}^0 d_{\sigma} \mu(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\beta = \int_{-r}^0 d\mu(z) \int_z^0 e^{\lambda(z-\xi)} \varphi(\xi) d\xi$$

para $\forall \varphi \in \mathcal{G}^+$.

Prova: Ambos os membros são operadores lineares e contínuos em $\varphi \in \mathcal{G}^+$. Basta mostrar de modo rotineiro que eles coincidem em funções tipo $\varphi = \chi_{[c,d]} p$ (para $-r \leq c < d \leq 0$, $p \in E^n$). ■

Prova do teorema 3: Como $\mu(\theta) = \bar{\mu}(\theta) + \bar{\bar{\mu}}(\theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_{]-\infty, -r_k]}(\theta) + \int_0^{\theta} A(\sigma) d\sigma$, obtemos, para $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^P(t) &= X^P(t) D\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-r_k}^0 d_{\sigma} X^P(t - \sigma - r_k) A_k \varphi(\sigma) - \\ &\quad - \int_{-r}^0 d_{\beta} X^P(t - \beta - r) \int_{\beta}^0 A(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\sigma + \\ &\quad + \int_{-r}^0 X^P(t - \beta - r) \int_{\beta}^0 d_{\sigma} \eta(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\beta. \end{aligned}$$

Tomando φ suficientemente lisa, vamos ter que a função

$$\beta \in [-r, 0] \longrightarrow \int_{\beta}^0 A(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\sigma = \int_{-r}^{-r-\beta} A(\sigma) \varphi(\sigma + \beta + r) d\sigma \text{ é de classe } C^1$$

(φ vai estar num subespaço denso de $\mathcal{C}$) e por integração por partes obtemos:

$$\begin{aligned} x^P(t) = & X^P(t)D\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} X^P(t-r_k)A_k\varphi(0) + X^P(t)\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi(-r_k) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-r_k}^0 X^P(t-\sigma-r_k)A_k\varphi'(\sigma)d\sigma \\ & + X^P(t) \int_{-r}^0 A(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma + \int_{-r}^0 X^P(t-\beta-r) \frac{d}{d\beta} \left(\int_{\beta}^0 A(\sigma-\beta-r)\varphi(\sigma)d\sigma \right) d\beta \\ & + \int_{-r}^0 X^P(t-\beta-r) \int_{\beta}^0 d_{\sigma}\eta(\sigma-\beta-r)\varphi(\sigma)d\beta \quad \text{para } t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Em [Henry 1] teorema 4.3, Henry mostra que

$$X^P(t) = \overline{X}^P(t) \text{ q.s. em } t \in \mathbf{R} \text{ e } X^Q(t) = \overline{X}^Q(t) \text{ q.s para } t \geq 0,$$

onde:

$$\begin{aligned} \overline{X}^P(t) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} d\lambda \text{ e} \\ \overline{X}^Q(t) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\ell_j}^{\alpha + i\ell_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} d\lambda \text{ p/ } t \in \mathbf{R} \\ \text{e } \overline{X}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}^P(t) + \overline{X}^Q(t) = \frac{1}{2}(X(t) + X(t^-)) \end{aligned}$$

(para $t \geq 0$, $\overline{X}(t)$ é a anti-transformada de Laplace de $\Delta(\lambda)^{-1}$, que por sua vez é a transformada de Laplace de $X(t)$).

Os contornos C_j são retângulos, dados no teorema 4.3 de [Henry 1], com linhas verticais $\text{Re } \lambda = \alpha$ (ou $\alpha + \delta'$ se $\alpha = 0$), $\text{Re } \lambda = \gamma$ (onde γ é tal que se $\det \Delta(\lambda) = 0$ então $\text{Re } \lambda < \gamma$) e as horizontais $\text{Im } \lambda = \pm \ell_j$, $\ell_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ e são tais que $\det \Delta(\lambda) \neq 0$ para $\lambda \in C_j$ e $\det H(\lambda)$ é uniformemente afastado de zero em C_j , $\forall j \in \mathbf{N}$ (ver lema 3.3 e observação após o teorema 4.1 de [Henry 1]).

Vai ser fundamental de agora em diante, a hipótese de que $A \in L_p([-r, 0], \mathcal{L}(E^n))$ para algum $p > 1$. A partir desse fato obtemos que

$$\int_{\text{Re } \lambda = \alpha} |\Delta(\lambda)^{-1} - \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1}| d\lambda < \infty$$

(este resultado me foi comunicado pessoalmente por D. Henry).

Primeiramente mostremos que $\overline{X}^{P,Q}$ são funções regradas de t .

Temos:

$$|\overline{X}^Q(t + \varepsilon_1) - \overline{X}^Q(t + \varepsilon_2)| \leq \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} |e^{\lambda \varepsilon_1} - e^{\lambda \varepsilon_2}| |\Delta(\lambda)^{-1} - \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1}| d\lambda \\ + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} e^{\lambda(t+\varepsilon_1)} \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} e^{\lambda(t+\varepsilon_2)} \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1} d\lambda \right| \xrightarrow{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} 0$$

Esta última parcela vai para zero, pois no lema 3.5 de [Henry 1] foi mostrado que a função $t \in \mathbf{R} \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} e^{\lambda t} \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1} d\lambda$ é localmente de variação limitada, logo regradada.

Temos também que $\overline{X}^P = \overline{X} - \overline{X}^Q$ é regradada.

A fórmula de $x^P(t)$, para $t \in \mathbf{R}$, fica:

$$x^P(t) = X^P(t)\varphi(0) - \sum_{k=1}^{\infty} X^P(t - r_k) A_k \varphi(0) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-r_k}^0 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} e^{-\lambda \sigma} e^{-\lambda r_k} \Delta(\lambda)^{-1} A_k \varphi'(\sigma) d\lambda d\sigma \\ + \int_{-r}^0 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} e^{-\lambda \beta} e^{-\lambda r} \Delta(\lambda)^{-1} \frac{d}{d\beta} \left(\int_{\beta}^0 A(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\sigma \right) d\lambda d\beta \\ + \int_{-r}^0 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} e^{-\lambda \beta} e^{-\lambda r} \Delta(\lambda)^{-1} \int_{\beta}^0 d_{\sigma} \eta(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\sigma d\beta.$$

As funções $\beta \in [-r, 0] \rightarrow \int_{C_j} e^{\lambda t} e^{-\lambda \beta} e^{-\lambda r} \Delta(\lambda)^{-1} d\lambda$ são uniformemente limitadas para $j \in \mathbf{N}$.

Isso pois $\left| \int_{\alpha - i\ell_j}^{\alpha + i\ell_j} e^{\lambda t} e^{-\lambda \beta} e^{-\lambda r} \Delta(\lambda)^{-1} d\lambda \right| \leq \left| \int_{\alpha - i\ell_j}^{\alpha + i\ell_j} e^{\lambda t} e^{-\lambda \beta} e^{-\lambda r} \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1} d\lambda \right| + \\ + \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} |\Delta(\lambda)^{-1} - \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1}| \cdot e^{\alpha(t-\beta-r)} d\lambda$ e $\left| \int_{\alpha - i\ell_j}^{\alpha + i\ell_j} e^{\lambda t} e^{-\lambda \beta} e^{-\lambda r} \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1} d\lambda \right|$ é uniformemente limitado em $\beta \in [-r, 0]$, $j \in \mathbf{N}$, pois para $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ temos que existem $X_i \in \mathcal{L}(E^n)$ e constantes reais γ_i tais que $H(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i e^{\lambda \gamma_i}$ com $\sum_{i=1}^{\infty} |X_i| e^{\alpha \gamma_i} < \infty$ (ver lema 3.5 de [Henry 1]) e $e^{-\alpha s} \int_{\alpha - i\ell_j}^{\alpha + i\ell_j} e^{\lambda s} \lambda^{-1} d\lambda$ é uniformemente limitada para $s \in \mathbf{R}$ e $j \in \mathbf{N}$.

Vale o mesmo para as integrais $\int_{\gamma - i\ell_j}^{\gamma + i\ell_j}$, $j \in \mathbf{N}$. Para as integrais nas arestas horizontais de C_j , usamos o fato de $\Delta(\lambda)^{-1} = \lambda^{-1} H(\lambda)^{-1} + \mathcal{O}(|\lambda|^{-1})$ e que as integrais

de $e^{\lambda(t-\beta-r)}\lambda^{-1}H(\lambda)^{-1}$ nos segmentos $\text{Im } \lambda = \pm\ell_j$ são $\mathcal{O}(1/\ell_j)$ (ver lemas 3.3 e 3.5 de [Henry 1]).

Assim, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e em seguida o Teorema de Fubini nas integrais da fórmula de $x^P(t)$, para $t \in \mathbf{R}$, e obter:

$$\begin{aligned}
x^P(t) &= X^P(t)\varphi(0) - \sum_{k=1}^{\infty} X^P(t-r_k)A_k\varphi(0) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \int_{-r_k}^0 e^{-\lambda\sigma} e^{-\lambda r_k} [A_k \varphi'(\sigma)] d\sigma d\lambda \\
&+ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \int_{-r}^0 e^{-\lambda\beta} e^{-\lambda r} \left[\frac{d}{d\beta} \int_{\beta}^0 A(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\sigma \right] d\beta d\lambda \\
&+ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \int_{-r}^0 e^{-\lambda\beta} e^{-\lambda r} \int_{\beta}^0 d_{\sigma} \eta(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\beta d\lambda \\
&= X^P(t)\varphi(0) - \sum_{k=1}^{\infty} X^P(t-r_k)A_k\varphi(0) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} e^{-\lambda r_k} A_k \varphi(0) d\lambda - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} A_k \varphi(-r_k) d\lambda + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \lambda A_k \int_{-r_k}^0 e^{-\lambda\sigma} e^{-\lambda r_k} \varphi(\sigma) d\sigma d\lambda \\
&- \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \int_{-r}^0 A(\sigma) \varphi(\sigma) d\sigma d\lambda \\
&+ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \int_{-r}^0 \lambda e^{-\lambda\beta} e^{-\lambda r} \int_{\beta}^0 A(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\sigma d\beta d\lambda \\
&+ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \int_{-r}^0 e^{-\lambda\beta} e^{-\lambda r} \int_{\beta}^0 d_{\sigma} \eta(\sigma - \beta - r) \varphi(\sigma) d\beta d\lambda
\end{aligned}$$

(aqui usamos o fato de $\int_{C_j} e^{\lambda(t+\theta)} \Delta(\lambda)^{-1} d\lambda$ ser uniformemente limitada em $\theta \in [-r, 0]$ e $j \in \mathbf{N}$, a convergência dominada para a integral $\int_{-r}^0 \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{C_j} e^{\lambda(t+\theta)} \Delta(\lambda)^{-1} d\lambda d\bar{\mu}(\theta) \varphi(0)$ depois de uma integração por partes e finalmente o teorema de Fubini).

Finalmente, aplicando o lema 6, chegamos em:

$$x^P(t) = (X^P(t) - \bar{X}^P(t) - \sum_{k=1}^{\infty} X^P(t - r_k)A_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{X}^P(t - r_k)A_k)\varphi(0) \\ + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \left[D\varphi + \int_{-r}^0 (\lambda d\mu(z) + d\eta(z)) \int_z^0 e^{\lambda(z-\xi)} \varphi(\xi) d\xi \right] d\lambda$$

para $t \in \mathbf{R}$. Para abreviar a notação, temos:

$$x^P(t) = Z(t).\varphi(0) + y^P(t) \quad \text{onde} \\ y^P(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda \quad \text{p/ } t \in \mathbf{R}, \quad \text{com} \\ \ell(\lambda, \varphi) = D\varphi + \int_{-r}^0 (\lambda d\mu(z) + d\eta(z)) \int_z^0 e^{\lambda(z-\xi)} \varphi(\xi) d\xi.$$

Repare que $Z(t)\varphi(0) \in c_0(\mathbf{R}, E^n)$, o conjunto de funções regradas cujos limites laterais são nulos. No teorema 2.1 de [Henry 1], obtemos uma fórmula para $(\lambda - \mathbf{A})^{-1}\varphi(\theta)$ ($\mathbf{A}$ o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$) e dessa fórmula concluímos que, para $\theta \in [-r, 0]$:

$$y^P(\theta) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} (\lambda - \mathbf{A})^{-1} \varphi(\theta) d\lambda.$$

Pelo teorema 4.2 de [Henry 1], temos que esse operador linear do segundo membro coincide com a projeção E dada nesse teorema, num subespaço denso de $\mathcal{C}$. Logo, esse operador é contínuo na soma dos subespaços densos (o do teorema 4.2 de [Henry 1] e o nosso subespaço denso das funções lisas). Com isso, y_0^P como função de φ coincide com E no subespaço denso de $\mathcal{C}$ em que estamos trabalhando.

$$\text{Calculemos } Dy_t^P = y^P(t) - \int_{-r}^0 d\mu(\theta) y^P(t + \theta) = \\ = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda - \int_{-r}^0 d\mu(\theta) \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda(t+\theta)} \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda.$$

Vamos mostrar que $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda(t+\theta)} \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda$ é uniformemente limitada em $\theta \in [-r, 0]$ e $j \in \mathbf{N}$ e então vamos poder aplicar a Convergência Dominada e o teorema de Fubini no cálculo acima.

Para isso, basta ver que:

$$\left| \int_{-r}^0 d\eta(z) \int_z^0 e^{\lambda(z-\xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| \leq \text{Var}_{[-r,0]}[\eta] \cdot \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

e que

$$\begin{aligned} \int_{-r}^0 \lambda d\mu(z) \int_z^0 e^{\lambda(z-\xi)} \varphi(\xi) d\xi &= \int_{-r}^0 d\mu(z) \int_z^0 d\xi (-e^{\lambda(z-\xi)}) \varphi(\xi) = \\ &= \int_{-r}^0 d\mu(z) \left[-e^{\lambda z} \varphi(0) + \varphi(z) + \int_z^0 e^{\lambda(z-\xi)} \varphi'(\xi) d\xi \right] = \\ &= - \int_{-r}^0 d\mu(z) e^{\lambda z} \varphi(0) + \int_{-r}^0 d\mu(z) \varphi(z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) = \\ &= \lambda^{-1} \Delta(\lambda) \varphi(0) - \varphi(0) + \lambda^{-1} \int_{-r}^0 d\eta(\sigma) e^{\lambda \sigma} \varphi(0) + \int_{-r}^0 d\mu(z) \varphi(z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \end{aligned}$$

Pela limitação uniforme que mostramos anteriormente, concluímos então essa que queremos agora.

Assim:

$$\begin{aligned} Dy_t^P &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} [I - \int_{-r}^0 d\mu(\theta) e^{\lambda \theta}] \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda t} D(e^{\lambda \cdot}) \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\int_0^t Ly_s^P ds = \int_0^t \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} e^{\lambda(s+\theta)} \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda ds.$$

Pelo Fubini, trocamos as primeiras integrais e pela limitação de $\int_{C_j} e^{\lambda(s+\theta)} \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda$ uniforme em $s \in [0, t]$ e $j \in \mathbb{N}$ também trocamos o limite e as integrais internas e obtemos:

$$\int_0^t Ly_s^P ds = \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) e^{\lambda \theta} \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda.$$

Do que já vimos anteriormente, podemos afirmar que $\int_{C_j} \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) e^{\lambda \theta} \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda$ é uniformemente limitada em $\theta \in [-r, 0]$ e $j \in \mathbb{N}$. Com isso chegamos a:

$$\int_0^t Ly_s^P ds = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) L(e^{\lambda \cdot}) \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda.$$

Assim:

$$\begin{aligned} Dy_t^P - Dy_0^P - \int_0^t Ly_s^P ds &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \Delta(\lambda) \cdot \Delta(\lambda)^{-1} \ell(\lambda, \varphi) d\lambda \\ &= 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Então y_t^P é a solução de (N) com dado inicial $y_0^P = E\varphi \in \mathcal{C}$ (para φ no conjunto denso de $\mathcal{C}$ de funções lisas). Do teorema 4.2 de [Henry 1] concluímos que $y_t^P \in \mathcal{C}$ para $t \in \mathbf{R}$.

Ora, $x^P(t) = Z(t)\varphi(0) + y^P(t)$ para $t \in \mathbf{R}$, com x^P contínua à direita e y^P contínua. Concluímos então que $Z \equiv 0$ (lembre que Z tem os limites laterais nulos).

Assim, chegamos que $T(t)\pi_P\varphi = T(t)^P\varphi$ para φ num conjunto denso de $\mathcal{C}$. Logo, $T(t)\pi_P|_{\mathcal{C}} = T(t)^P|_{\mathcal{C}}$ para $t \in \mathbf{R}$. (Lembrar que $\pi_P = E$ é a projeção contínua dada no teorema 4.2 de [Henry 1] que comuta com $T(t)|_{\mathcal{C}}$ para $t \geq 0$). ■

Podemos generalizar agora esses resultados para as funções de $\mathcal{G}^+$. Para as convergências que faremos a seguir, é fundamental o fato de ambos os núcleos μ e η serem contínuos à esquerda.

Teorema 4. Nas condições do teorema 3, ou seja, existe $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\delta > 0$ tal que $\det \Delta(\lambda) \neq 0$ para $|\operatorname{Re} \lambda - \alpha| \leq \delta$ temos: π_P , definido na observação 6, é uma projeção contínua de $\mathcal{G}^+$ e, definindo, $P = \mathcal{R}(\pi_P)$ e $Q = \mathcal{N}(\pi_P)$ temos $\mathcal{G}^+ = P \oplus Q$ subespaços fechados invariantes por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $P \cap \mathcal{C} = P'$ e $Q \cap \mathcal{C} = Q'$ do teorema anterior.

Podemos estender $\{T(t)|_P\}_{t \geq 0}$ para $-\infty < t < \infty$ como um grupo de isomorfismos de P .

Por fim, existe constante M tal que

$$\|T(t)|_Q\| \leq M e^{(\alpha-\delta)t} \text{ p/ } t \geq 0 \quad \text{e} \quad \|T(t)|_P\| \leq M e^{(\alpha+\delta)t} \text{ p/ } t \leq 0.$$

Prova: Das fórmulas de $x^{P,Q}(t)$ e das majorações de $X^{P,Q}$ e de suas variações (ver

observação 6), concluímos que para alguma constante M' temos:

$$\|x^Q(t)\| \leq M'e^{(\alpha-\delta)t} \|\varphi\| \quad \text{p/ } t \geq 0$$

$$\text{e } \|x^P(t)\| \leq M'e^{(\alpha+\delta)t} \|\varphi\| \quad \text{p/ } t \leq 0$$

e teremos então uma constante M tal que

$$\|T(t)^Q\| \leq M e^{(\alpha-\delta)t} \quad \text{p/ } t \geq r \quad \text{e} \quad \|T(t)^P\| \leq M e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{p/ } t \leq 0,$$

onde $T(t)^{P,Q}$ foram definidos na observação 6.

Se L_f satisfaz $(\widetilde{3})$ (ver observação 1), temos $x(t)$ bem definido para $t \in \mathbf{R}$ e podemos definir $x^Q(t) = x(t) - x^P(t)$ para $t \leq 0$ e $T(t)^Q \varphi = x_t^Q$ para $t \in \mathbf{R}$.

Observemos também que $T(t)^{P,Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+)$ e $T(t)^P + T(t)^Q = T(t)$ para $t \geq 0$ (ou p/ $t \in \mathbf{R}$ se L_f satisfaz $(\widetilde{3})$).

Vamos mostrar que π_P é projeção e que para $t \geq 0$ temos $\pi_P T(t) = T(t) \pi_P = T(t)^P$ para $\varphi \in \mathcal{G}^+$.

Do teorema 3, vimos que isso é válido em $\mathcal{C}$. O raciocínio para essa generalização é análogo ao do teorema 1.

Notemos que o lema 4 continua válido se tomarmos $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+)$.

Assim, para $\varphi \in \mathcal{E}^+$ (escada), pelo lema 1, $\exists \varphi_m \in \mathcal{C}$, $m \in \mathbf{N}$, com $\int_{-r}^0 d\alpha(\theta) \varphi_m(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\theta) \varphi(\theta) \quad \forall \alpha \in G^- BV_0$.

Temos então que $\pi_P \varphi_m(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \pi_P \varphi(\theta)$ para $-r \leq \theta \leq 0$. Para ver isso, basta analisar a convergência em cada parcela de $\pi_P \varphi_m(\theta)$, como no teorema 1.

Também temos: $\int_{-r}^0 d\alpha(\theta) \pi_P \varphi_m(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\theta) \pi_P \varphi(\theta) \quad \forall \alpha \in G^- BV_0$ (aqui utilizamos o lema 4 de maneira iterada em cada parcela de $\pi_P \varphi_m(\theta)$).

A partir disso, mostra-se então que

$$\pi_P^2 \varphi_m(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \pi_P^2 \varphi(\theta) \quad \text{p/ } -r \leq \theta \leq 0$$

(analisando cada parcela de $\pi_P^2 \varphi_m(\theta)$).

Pelo teorema 3 temos que $\pi_P^2 \varphi_m = \pi_P \varphi_m$, logo, concluímos que $\pi_P^2 = \pi_P$ para $\varphi \in \mathcal{E}^+$.

Por densidade, temos que $\pi_P^2 = \pi_P$ em $\mathcal{G}^+$. Assim, temos os subespaços fechados $P = \mathcal{R}(\pi_P)$ e $Q = \mathcal{N}(\pi_P)$, $\mathcal{G}^+ = P \oplus Q$.

Do mesmo modo, concluímos que:

$$\begin{aligned} & T(t)\varphi_m(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} T(t)\varphi(\theta) \quad \text{p/ } t \geq 0 \text{ e } -r \leq \theta \leq 0 \\ & \int_{-r}^0 d\alpha(\theta)T(t)\varphi_m(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 d\alpha(\theta)T(t)\varphi(\theta) \quad \forall t \geq 0, \alpha \in G^-BV_0 \\ & \text{e } T(t)^P \varphi_m(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} T(t)^P \varphi(\theta) \quad \text{p/ } t \in \mathbf{R} \text{ e } -r \leq \theta \leq 0. \end{aligned}$$

Como $\varphi_m \in \mathcal{C}$, do teorema 3 temos que:

$$\pi_P T(t)\varphi_m(\theta) = T(t)\pi_P \varphi_m(\theta) = T(t)^P \varphi_m(\theta) \quad \text{p/ } t \geq 0 \text{ e } -r \leq \theta \leq 0$$

e dos resultados acima conclui-se que cada expressão dessas converge quando $m \rightarrow \infty$ para a respectiva expressão com φ no lugar de φ_m e temos então:

$$\pi_P T(t) = T(t)\pi_P = T(t)^P \text{ em } \mathcal{E}^+ \text{ e por densidade em } \mathcal{G}^+ \text{ para } t \geq 0.$$

Para $t \in \mathbf{R}$ também obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= D(T(t)^P \varphi_m) - D(\pi_P \varphi_m) - \int_0^t L(T(s)^P \varphi_m) ds \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} D(T(t)^P \varphi) - D(\pi_P \varphi) - \int_0^t L(T(s)^P \varphi) ds. \end{aligned}$$

Essa convergência se obtém usando de maneira iterada o lema 4 (ou o teorema 2.4 de [H3]).

Isso nos permite definir $T(t) = T(t)^P$ em P para $t \leq 0$ e obter o grupo de isomorfismos $\{T(t)|_P\}_{t \in \mathbf{R}}$, pois quando temos a continuação da solução de (N) em toda a reta, esta continuação se dá de maneira única (ver [Henry 4]).

Obtemos facilmente agora que $T(t)\pi_Q = \pi_Q T(t) = T(t)^Q$ para $t \geq r$, pois $\pi_Q = I_{\mathcal{G}^+} - \pi_P$.

Caso L_f satisfaça $(\widetilde{3})$ (ver observação 1), vamos ter essas igualdades para π_P e π_Q em $t \in \mathbf{R}$.

As majorações exponenciais para $T(t)|_P$ $t \leq 0$ e $T(t)|_Q$ $t \geq 0$ ficam então evidentes. ■

Na observação 3.1, nós definimos, para $\alpha \in \mathbf{R}$, o conceito de EDFN linear com dicotomia de ordem α .

Corolário 1. Para a equação (N) deste parágrafo temos, para $\alpha \in \mathbf{R}$:

(N) admite dicotomia de ordem $\alpha \Leftrightarrow \{\exists \delta > 0 \mid |\operatorname{Re} \lambda - \alpha| \leq \delta \Rightarrow \det \Delta(\lambda) \neq 0\}$.

Em particular, temos que (N) é hiperbólica se e somente se $\exists \delta > 0 \mid \det \Delta(\lambda) \neq 0$ para $|\operatorname{Re} \lambda| \leq \delta$.

Prova: Sai direto da proposição 3.1 e do teorema 4.

Observação 7. O teorema 4.3 de [Henry 1] pode ser então generalizado, pois para $\alpha \in \mathbf{R}$ nas hipóteses do teorema 4, teremos $\mathcal{G}^+ = P \oplus Q$ dados no teorema 4 e então podemos aplicar o teorema 3.1 para cada $H \in G^+(\mathbf{R}, E^n)$ e $t_0 \in \mathbf{R}$, considerando a equação não-homogênea $(N)_H$ para $t \geq t_0$. Repare que a definição 3.1, observação 3.2 e teorema 3.3, neste caso, nos dão os resultados do teorema 4.3 de [Henry 1], pois $R^P = X^P$ e $R^Q = X^Q$.

Para o espectro de $T(t)$, $t \geq 0$, temos o:

Teorema 5. Suponha $W \stackrel{\text{def}}{=} \{\operatorname{Re} \lambda \mid \det \Delta(\lambda) = 0\}$ não vazio. Então para $t \geq 0$ temos:

$$\overline{\{e^{\lambda t} \mid \det \Delta(\lambda) = 0\}} \subset \sigma(T(t)) \subset \{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{W}\} \cup \{0\}.$$

Se $\alpha \notin \overline{W}$ e $\mathcal{G}^+ = P \oplus Q$ a decomposição dada no teorema 4, então:

$$\begin{aligned} \sigma(T(t)|_P) &\subset \{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{W} \text{ e } \xi > \alpha\} \\ \text{e } \sigma(T(t)|_Q) &\subset \{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{W} \text{ e } \xi < \alpha\} \quad p/ \ t \geq 0. \end{aligned}$$

Se W é vazio, então $\sigma(T(t)) = \{0\}$ para $t > 0$ e de fato $T(t) = 0$ para $t \geq rn$.

Prova: Segue os passos do teorema 3.2 de [Henry 1], como no caso do teorema 2, utilizando agora as majorações dadas no teorema 4. ■

No teorema 2 obtivemos esse resultado para a equação $(D)_0$. Pelo fato de $\det H(\lambda)$ ser uma função quase-periódica em cada reta vertical do plano complexo, foi possível concluir (ver [Henry 2]) que $\{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{Z}\} = \overline{\{e^{\lambda t} \mid \det H(\lambda) = 0\}}$ quase sempre em $t \geq 0$ (ver definição de Z no teorema 2).

Não temos um resultado desse tipo para o conjunto de círculos $\{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{W}\}$, mas ainda assim vamos provar que $\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)} \setminus \{0\}$ q.s. em $t \geq 0$.

Dizemos que um auto-valor de um operador T é normal se é um ponto isolado de $\sigma(T)$ e a dimensão de seu auto-espço generalizado é finita. Denotemos por $\sigma_e(T)$ o espectro essencial de um operador T , que inclui o espectro residual, o contínuo e os auto-valores não-normais. O complemento de $\sigma_e(T)$ nos complexos é o conjunto aberto $\tilde{\rho}(T)$ de pontos normais de T , que é a união do resolvente de T com os auto-valores normais de T .

Teorema 6. Para $t > 0$, temos: $\sigma_e(T(t)) \subset \{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{Z}\} \cup \{0\}$.

Prova: Seja, como no teorema 4.1 de [Henry 1], $\alpha < \beta$ tal que $[\alpha, \beta] \cap \overline{Z} = \emptyset$ e seja

$$I_t = \{\mu \mid e^{\alpha t} < |\mu| < e^{\beta t}\}.$$

Do teorema 2 temos que $I_t \subset \rho(T^0(t))$, logo $I_t \subset \rho(T^0(t) \circ \Psi)$, onde Ψ é a projeção $\mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{G}_{D^0}^+$ dada na observação 2. Utilizando um resultado de I.C. Gohberg e M.G. Krein na versão do lema 4.2 de [Henry 1] e o lema 5 deste parágrafo, concluímos que

$$\text{ou } I_t \subset \tilde{\rho}(T(t)) \text{ ou } I_t \subset P_\sigma(T(t)).$$

Suponhamos, por absurdo, que $I_t \subset P_\sigma(T(t))$. Do teorema 5, concluímos que $]\alpha, \beta[\subset \overline{W}$, o que significa que na faixa $\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$ nós temos uma quantidade

não finita de zeros de $\det \Delta(\lambda)$ e podemos formar uma seqüência de zeros de $\det \Delta(\lambda)$, $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda_j \leq \beta$ e $|\lambda_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$. Os zeros de $\det \Delta(\lambda)$, nessa situação, são assintóticos aos zeros de $\det H(\lambda)$ (ver observação após o teorema 4.1 de [Henry 1]) e nesse caso teríamos $\overline{Z} \cap [\alpha, \beta] \neq \emptyset$, absurdo. Então $I_t \subset \tilde{\rho}(T(t))$, o que prova o teorema. ■

Observação 8. Do teorema 1 de [Henry 2] temos:

$$\{\mu \mid |\mu| = e^{\xi t}, \xi \in \overline{Z}\} \subset \overline{\{e^{\lambda t} \mid \det H(\lambda) = 0\}},$$

quase sempre em $t \geq 0$ e

$$\overline{\{e^{\lambda t} \mid \det H(\lambda) = 0\}} \subset \overline{\{e^{\lambda t} \mid \det \Delta(\lambda) = 0\}},$$

quase sempre em $t \geq 0$. Assim,

$$\sigma_e(T(t)) \subset \overline{e^{t\sigma(A)}} \cup \{0\} \text{ q.s. em } t \geq 0.$$

Vamos agora analisar os auto-valores normais de $T(t)$.

Teorema 7. Se μ é auto-valor normal de $T(t_0)$ para algum $t_0 > 0$, então μ é auto-valor normal de $T(t_0)|_{\mathcal{C}}$.

Prova: Suponhamos μ auto-valor normal de $T(t_0)$, para $t_0 > 0$. Por ser auto-valor normal, a dimensão do núcleo de $\mu - T(t_0)$, o espaço das auto-funções, é finita. Seja $m = \dim \mathcal{N}(\mu - T(t_0))$, seja $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ uma base de $\mathcal{N}(\mu - T(t_0))$ e seja Φ o vetor coluna formado por $\phi_1, \dots, \phi_m$. Temos $\phi_i \in \mathcal{G}^+$, $i = 1, \dots, m$, mas vamos mostrar que na verdade elas são contínuas.

Temos: $\mathcal{N}(\mu - T(t_0))$ é invariante por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, pois para $\phi \in \mathcal{N}(\mu - T(t_0))$, temos:

$$(\mu - T(t_0))T(t)\phi = T(t)(\mu - T(t_0))\phi = 0.$$

Seja $B(t)$, para $t \geq 0$, a matriz $m \times m$ de escalares tal que $T(t)\Phi = B(t).\Phi$.

Temos: $B(t+s)\Phi = T(t+s)\Phi = T(t)T(s)\Phi = T(t).B(s)\Phi = B(s)T(t)\Phi = B(s).B(t)\Phi$

$\forall t, s \geq 0$.

Para $\phi \in \mathcal{N}(\mu - T(t_0))$, temos $\phi = \alpha\Phi$ para algum vetor $\alpha \in E^m$. Assim $T(t)\phi = \alpha B(t)\Phi$ para $t \geq 0$ e a solução de (N) com dado inicial ϕ será $x(\phi)(t) = \alpha B(t)\Phi(0)$. Para $\theta \in [-r, 0]$, temos $x(\phi)(t + \theta) = \alpha B(t)\Phi(\theta)$ e em particular $x(\phi)(t - r) = \alpha B(t)\Phi(-r)$. Assim, para $t \in [0, r]$ temos $\phi(t - r) = x(\phi)(t - r) = \alpha B(t)\Phi(-r)$.

Vamos mostrar que ϕ é contínua à esquerda em $t - r \in]-r, 0]$. Isso será suficiente para termos $\phi \in \mathcal{C}$.

Repare que a função $t \in [0, r] \rightarrow B(t)\Phi(-r) = (\phi_1(t - r), \dots, \phi_m(t - r)) \in (E^n)^m$ é regradada, logo só tem um número no máximo enumerável de pontos de descontinuidade. Assim, para $t \in]0, r]$, podemos encontrar $s \in]0, t]$ tal que $B(\cdot)\Phi(-r)$ seja contínua em s .

Para $\eta > 0$ arbitrário, $\exists \delta > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \delta$ temos

$$\|B(s - \varepsilon)\Phi(-r) - B(s)\Phi(-r)\| \leq \frac{\eta}{\|\alpha\| \cdot \|B(t - s)\|}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \|\phi(t - r - \varepsilon) - \phi(t - r)\| &= \|\alpha B(t - \varepsilon)\Phi(-r) - \alpha B(t)\Phi(-r)\| \\ &= \|\alpha B(t - s)[B(s - \varepsilon)\Phi(-r) - B(s)\Phi(-r)]\| \leq \eta. \end{aligned}$$

Logo $\phi \in \mathcal{C}$ e então $\mathcal{N}(\mu - T(t_0)) \subset \mathcal{C}$. ■

Observação 9. Da observação 8 e do teorema 7, chegamos à conclusão desejada desde o início do parágrafo, pois usando o fato de $P_\sigma(T(t)|_{\mathcal{C}}) = e^{t\sigma(\mathbf{A})}$ (ver teorema 4.1 de [Henry 1]) temos: $\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(\mathbf{A})}} \setminus \{0\}$ q.s. em $t \geq 0$.

Vamos encerrar o parágrafo generalizando o lema 12.9.1 e o teorema 12.9.1 dados em

[Hale 2] para a EDFN linear autônoma (N) com dados gerais: $L_f \in \mathcal{X}^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, E^n)$ e $L_g \in Y^0 \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_0^+, E^n)$.

Sabemos que a condição $(0)^c$ é necessariamente satisfeita no caso autônomo e que então $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}^+$ é invariante pelo fluxo de (N) : $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Proposição 1. Se a solução $x \equiv 0$ de (N) é uniformemente assintoticamente estável em $\mathcal{C}$, então ela é exponencialmente assintoticamente estável em $\mathcal{G}^+$.

Prova: Do lema 12.9.1 de [Hale 2], concluímos que $x \equiv 0$ é exponencialmente assintoticamente estável em $\mathcal{C}$ e a matriz fundamental X satisfaz

$$\|X(t)\| \leq K e^{-\alpha t} \quad \text{e} \quad \text{Var}_{[t-r, t]}[X] \leq K e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

para certa constante $K, \alpha > 0$.

A matriz fundamental é o resolvente R da equação (N) , a única solução regrada contínua à direita com dado inicial $\chi_0 I$. Usando a fórmula (ρ_N) da proposição I.7.8 na forma simplificada da observação 5 e as majorações da matriz fundamental acima, encontramos constante $\bar{K}$ tal que $\|x(t)\| \leq \bar{K} e^{-\alpha t} \|\varphi\|$, ou seja, $\|T(t)\| \leq \bar{K} e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$. ■

Com o mesmo raciocínio do lema 12.9.1 de [Hale 2] temos o:

Corolário 2. Se existem constantes $K, \alpha \in \mathbf{R}$ tais que $\|T(t)|_{\mathcal{C}}\| \leq K e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$ então existe constante $\bar{K}$ tal que $\|T(t)\| \leq \bar{K} e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$.

Consideremos agora a equação não-linear

$$(N)_{F,G} \quad \frac{d}{dt}(x(t) - L_f x_t - F(x_t)) = L_g x_t + G(x_t) \quad \text{para } t \geq 0$$

com $F, G : \mathcal{G}^+ \rightarrow E^n$ satisfazendo $(0)^+$ e tal que existe $v : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ com $v(\sigma) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0^+} 0$ tal que

$$\|\varphi\| \leq \sigma \Rightarrow \|G(\varphi)\| \leq v(\sigma)\|\varphi\| \quad \text{e} \quad \|F(\varphi)\| \leq v(\sigma)\|\varphi\|.$$

Vamos ainda supor condições suficientes sobre F e G que garantam a existência e unicidade do problema de valor inicial; por exemplo, que $F \in \mathcal{X}^0$ e $G \in Y^0$.

Vamos generalizar o teorema 12.9.1 de [Hale 2] e para o caso da equação (N) ser a do início deste parágrafo, o teorema 6.1 de [Henry 1].

Teorema 8. Se para (N) tivermos $\|T(t)|_C\| \leq Ke^{-\alpha t}$, $\forall t \geq 0$ para algumas constantes $K, \alpha > 0$; então a solução $x \equiv 0$ da equação $(N)_{F,G}$ dada acima é exponencialmente assintoticamente estável em $\mathcal{G}^+$.

Nota: Se (N) está nas condições do início deste parágrafo, então podemos supor como hipótese que $\det \Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda \leq -\alpha$ para algum $\alpha > 0$ e usar a teoria espectral para concluir a hipótese do teorema.

Prova do teorema 8. Da proposição 1, existe $\bar{K}$ tal que $\|T(t)\| \leq \bar{K}e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$.

Pela fórmula (V) do teorema I.7.4, revista para o caso autônomo no parágrafo anterior, temos que:

$$x = x(0, \varphi) \in G^+([-r, \infty[, E^n) \text{ é solução de } (N)_{F,G} \text{ p/ } t \geq 0$$

se e somente se x satisfaz:

$$x_t = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-\sigma)\chi_0 G(x_\sigma) + T(t)\chi_0(F(x_t) - F(\varphi)) - \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)\chi_0(F(x_\sigma) - F(x_t)).$$

Escolhamos $0 < \alpha' < \alpha$. Para $\delta > 0$, $\exists \varepsilon(\delta) > 0$ tal que se $\|x_s\| \leq \varepsilon(\delta)$ ($0 \leq s \leq t$) então: $\|F(x_s)\| \leq \delta\|x_s\|$ e $\|G(x_s)\| \leq \delta\|x_s\|$. Nesse caso:

$$\begin{aligned} \|x_t\| &\leq \bar{K}e^{-\alpha't}\|\varphi\| + \int_0^t \bar{K}e^{-\alpha'(t-s)}\delta\|x_s\|ds + \bar{K}e^{-\alpha't}(\delta\|x_t\| + \delta\|\varphi\|) \\ &+ \int_0^t d_\sigma BV_{[0,\sigma]}[X(t-\cdot)]\delta(\|x_\sigma\| + \|x_t\|) \end{aligned}$$

Do teorema 3.3, existe K_3 e K_4 tais que:

$$\begin{aligned} \|x_t\|e^{\alpha't} &\leq \bar{K}\|\varphi\| + \delta \int_0^t \bar{K}e^{\alpha's}\|x_s\|ds + \bar{K}\delta\|x_t\| + \bar{K}\delta\|\varphi\| \\ &+ \delta \int_0^t d_\sigma BV_{[0,\sigma]}[X(t-\cdot)]e^{\alpha't}\|x_\sigma\| + \delta K_3\|x_t\|. \end{aligned}$$

Para $U(t) = \sup_{0 \leq \xi \leq t} \{\|x_\xi\|e^{\alpha'\xi}\}$ temos:

$$\begin{aligned} \|x_t\|e^{\alpha't} &\leq (\bar{K} + \bar{K}\delta)\|\varphi\| + \bar{K}\delta \int_0^t U(s)ds + \\ &+ (\bar{K}\delta + K_3\delta)U(t) + \delta \int_0^t d_\sigma BV_{[0,\sigma]}[X(t-\cdot)](e^{\alpha'(t-\sigma)}U(\sigma)) \\ &\leq (\bar{K} + \bar{K}\delta)\|\varphi\| + \bar{K}\delta \int_0^t U(s)ds + (\bar{K}\delta + K_3\delta)U(t) + \delta K_4U(t) \end{aligned}$$

Assim

$$U(t) \leq (\bar{K} + \bar{K}\delta)\|\varphi\| + \bar{K}\delta \int_0^t U(s)ds + \delta(\bar{K} + K_3 + K_4)U(t).$$

Escolhemos $\delta > 0$ | $\delta(\bar{K} + K_3 + K_4) = c < 1$. Assim:

$$U(t) \leq \frac{\bar{K} + \bar{K}\delta}{1-c}\|\varphi\| + \frac{\bar{K}\delta}{1-c} \int_0^t U(s)ds$$

e por Gromwall: $U(t) \leq \frac{\bar{K} + \bar{K}\delta}{1-c}e^{\frac{\bar{K}\delta}{1-c}t}\|\varphi\|$, logo, $\|x(t)\| \leq \frac{\bar{K} + \bar{K}\delta}{1-c}e^{(\frac{\bar{K}\delta}{1-c}-\alpha')t}\|\varphi\|$.

Para δ tal que $\frac{\bar{K}\delta}{1-c} < \alpha'$ e para $\|\varphi\|$ suficientemente pequena temos o teorema. ■

III

A EQUAÇÃO FUNCIONAL A DIFERENÇAS NO ESPAÇO DE FASE L_2

1. A Equação (D) no contexto L_2 . Existência, unicidade e dependência contínua da solução em relação aos parâmetros

Se trocarmos a norma do sup. ($\|\cdot\|_\infty$) em $\mathcal{G}^+$ por uma norma $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p < \infty$) o comportamento do grupo de operadores de evolução da equação autônoma (N) em relação a $t \in \mathbb{R}$ será muito mais regular, pois uma norma dada por uma integral suaviza os saltos que a solução da equação possa dar, o que não acontece com a norma do supremo.

Vamos estudar aqui uma classe particular de equação autônoma ($\hat{N}$) (ver observação I-1.3) formada de equações a diferenças sem parte singular, no espaço de fase L_2 (que é o fecho de $\mathcal{G}^+$ na norma $\|\cdot\|_2$). Como foi dito na introdução deste trabalho, para os operadores de evolução da linearizada de uma tal equação temos uma boa teoria espectral devida a Daniel Henry (ver [Henry 3]) e vamos então tirar proveito desse fato.

Continuamos considerando X espaço de Banach e $r > 0$.

Seja $L_2 = L_2([-r, 0], X)$, seja $k \in \mathbb{N}^*$ e $0 < r_1 < r_2 \dots < r_k = r$.

Consideremos a equação

$$(D) \quad x(t) = f(x(t-r_1) \dots x(t-r_k)) + \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta \quad \text{q.s em } t \geq 0$$

com dado inicial $x_0 = \varphi \in L_2$.

Tomamos $f : X^k \rightarrow X$, $g : X \rightarrow X$ e $a : [-r, 0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tais que

1) f é de classe C^1 com $f' = [D_1 f \dots D_k f] : X^k \rightarrow \mathcal{L}(X^k, X)$ tal que

$$\|D_j f\| = \sup_{(p_1, \dots, p_k) \in X^k} \|D_j f(p_1, \dots, p_k)\| < \infty \quad j = 1, \dots, k.$$

2) g é de classe C^1 com $\|g'\| = \sup_{p \in X} \|g'(p)\| < \infty$

3) $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$, ou seja, $\|a\|_1 = \int_{-r}^0 |a(\theta)|d\theta < \infty$.

Vamos ver que nesse caso o problema está bem posto no contexto L_2 , pois:

Proposição 1. Fixado $T > 0$. Para $x \in L_2([-r, T], X)$ temos:

1) A função $\tilde{f}_x : [0, T] \rightarrow X$ definida quase sempre por:

$$\tilde{f}_x(t) = f(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) \quad (\text{q.s. em } t \in [0, T])$$

é de quadrado integrável e temos $\tilde{f} \in C(L_2([-r, T], X), L_2([0, T], X))$.

2) A função $\tilde{g}_x : [0, T] \rightarrow X$ definida quase sempre por

$$\tilde{g}_x(t) = \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t + \theta))d\theta \quad (\text{q.s. em } t \in [0, T])$$

é de quadrado integrável e temos $\tilde{g} \in C(L_2([-r, T], X), L_2([0, T], X))$.

Prova. 1) Se $x \in C([-r, T], X)$ sabemos que $\tilde{f}_x \in C([0, T], X) \subset L_2([0, T], X)$. Vamos ver que $\tilde{f} \in C(C_{L_2}([-r, T], X), L_2([0, T], X))$ (onde $C_{L_2}([-r, T], X)$ é $C([-r, T], X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_2$). Para $x, y \in C_{L_2}([-r, T], X)$ e $0 \leq t \leq T$ temos:

$$\begin{aligned} & |f(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) - f(y(t - r_1), \dots, y(t - r_k))| = \\ & = \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^k D_j f(\xi x(t - r_1) + (1 - \xi)y(t - r_1), \dots, \xi x(t - r_k) + (1 - \xi)y(t - r_k)) \right. \\ & \quad \left. \cdot (x(t - r_j) - y(t - r_j))d\xi \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^k \|D_j f\| \cdot |x(t - r_j) - y(t - r_j)|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular da norma $\|\cdot\|_2$ em $L_2([0, T], X)$ temos:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_x - \tilde{f}_y\|_2 & \leq \sum_{j=1}^k \|D_j f\| \cdot \|x(\cdot - r_j) - y(\cdot - r_j)\|_{L_2([0, T], X)} \\ & = \sum_{j=1}^k \|D_j f\| \cdot \|x - y\|_{L_2([-r_j, T - r_j], X)} \\ & \leq \left(\sum_{j=1}^k \|D_j f\| \right) \|x - y\|_{L_2([-r, T], X)} \end{aligned}$$

Assim $\tilde{f} \in C(C_{L_2}([-r, T], X), L_2([0, T], X))$ e por extensão contínua ao fecho de $C_{L_2}([-r, T], X)$ temos $\tilde{f} \in C(L_2([-r, T], X), L_2([0, T], X))$.

2) Se $x \in C([-r, T], X)$ então $g \circ x \in C([-r, T], X)$, logo $\|g \circ x\|_\infty < \infty$ e para cada $t \in [0, T]$ a função $\theta \in [-r, 0] \rightarrow a(\theta)g(x(t+\theta)) \in X$ é integrável. Então $\tilde{g}_x$ está bem definida e é contínua em $t \in [0, T]$, pois

$$a(\theta)g(x(t \pm \frac{1}{n} + \theta)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(\theta)g(x(t + \theta)) \text{ q.s. em } \theta \in [-r, 0]$$

do teorema da convergência dominada segue então que $\tilde{g}_x(t \pm \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_x(t)$.

Vamos ver que $\tilde{g} \in C(C_{L_2}([-r, T], X), L_2([0, T], X))$.

Para $x, y \in C_{L_2}([-r, T], X)$ e $0 \leq t \leq T$ temos:

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_x(t) - \tilde{g}_y(t)| &= \left| \int_{-r}^0 a(\theta)[g(x(t+\theta)) - g(y(t+\theta))]d\theta \right| \\ &= \left| \int_{-r}^0 a(\theta) \int_0^1 g'(\xi x(t+\theta) + (1-\xi)y(t+\theta))(x(t+\theta) - y(t+\theta))d\xi d\theta \right| \\ &\leq \|g'\| \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot |x(t+\theta) - y(t+\theta)|d\theta \end{aligned}$$

Por uma generalização da desigualdade triangular da norma $\|\cdot\|_2$ de funções em $L_2([0, T], X)$ (de soma de funções para uma integral de funções indexadas em $\theta \in [-r, 0]$) temos:

$$\|\tilde{g}_x - \tilde{g}_y\|_2 \leq \|g'\| \cdot \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot \|x - y\|_{L_2([-r, T], X)}d\theta$$

ou seja, $\tilde{g} \in C(C_{L_2}([-r, T], X), L_2([0, T], X))$ e por extensão contínua ao fecho de $C_{L_2}([-r, T], X)$ temos $\tilde{g} \in C(L_2([-r, T], X), L_2([0, T], X))$.

Assim, dizemos que $x \in L_2^{\text{loc}}([-r, \infty[, X)$ é solução de (D) para $t \geq 0$ com dado inicial $\varphi \in L_2$ se $x_0 = \varphi$ em L_2 e para cada $T > 0$ temos $x|_{[0, T]} = \tilde{f}_x + \tilde{g}_x$ em $L_2([0, T], X)$ (ou seja, q.s. em $0 \leq t \leq T$).

Exemplo 1. $f \in \mathcal{L}(X^k, X)$, $g \in \mathcal{L}(X)$, $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$. Este é o caso linear.

Aqui temos: $f(p_1, \dots, p_k) = \sum_{j=1}^k A_j p_j$ para $(p_1, \dots, p_k) \in X^k$

com $A_j \in \mathcal{L}(X)$ ($j = 1, \dots, k$) e então $D_j f(p_1, \dots, p_k) = A_j \quad \forall (p_1, \dots, p_k) \in X^k$

e $\|D_j f\| = \|A_j\| < \infty$ para $j = 1, \dots, k$.

Também temos $\|g'\| = \|g\|$ e $\int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta = \int_{-r}^0 A(\theta)x(t+\theta)d\theta$ onde $A(\theta) = a(\theta) \circ g \in \mathcal{L}(X)$ com $\int_{-r}^0 \|A(\theta)\|d\theta \leq \|g\| \int_{-r}^0 |a(\theta)|d\theta$. Nesse caso temos a equação linear

$$(D): \quad x(t) = \sum_{j=1}^k A_j x(t-r_j) + \int_{-r}^0 A(\theta)x(t+\theta)d\theta \quad \text{q.s. em } t \geq 0.$$

Definição 1. Sejam

$$\mathcal{X}_1 = \{f : X^k \rightarrow X \mid f \text{ é de classe } C^1 \text{ e } \|D_j f\| < \infty \quad j = 1, \dots, k\}$$

$$\mathcal{X}_2 = \{g : X \rightarrow X \mid g \text{ é de classe } C^1 \text{ e } \|g'\| < \infty\}$$

$\mathcal{X}_1$ é espaço de Banach com a norma $\|f\| = \max\{|f(0, \dots, 0)|, \|D_1 f\|, \dots, \|D_k f\|\}$ e para $(p_1, \dots, p_k) \in X^k$ temos

$$\begin{aligned} |f(p_1, \dots, p_k)| &\leq |f(0, \dots, 0)| + |f(p_1, \dots, p_k) - f(0, 0, \dots, 0)| \\ &\leq |f(0, \dots, 0)| + \sum_{j=1}^k \|D_j f\| \cdot |p_j| \\ &\leq (1 + \sum_{j=1}^k |p_j|) \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

$\mathcal{X}_2$ é um espaço de Banach com a norma $\|g\| = \max\{|g(0)|, \|g'\|\}$ e para $p \in X$ temos $|g(p)| \leq (1 + |p|) \cdot \|g\|$.

Teorema 1. (Existência e unicidade de solução de (D) em $L_2^{\text{loc}}([-r, \infty[, X)$ com dado inicial em L_2). Dados $f \in \mathcal{X}_1$, $g \in \mathcal{X}_2$ e $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ temos que para cada $\varphi \in L_2$ existe uma única solução de (D) para $t \geq 0$.

$$x = x(\varphi, f, g, a) \in L_2^{\text{loc}}([-r, \infty[, X) \quad \text{tal que} \quad x_0 = \varphi.$$

Prova. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r_1$ e $\|g'\| \cdot \int_{-\varepsilon}^0 |a(\theta)|d\theta < 1$.

Para $\varphi \in L_2$ seja $E_\varphi^1 = \{x \in L_2([-r, \varepsilon], X) \mid x_0 = \varphi\}$ e

$$T_1 : E_\varphi^1 \rightarrow E_\varphi^1 \text{ definido por } \begin{cases} (T_1 x)_0 = \varphi \\ T_1 x|_{[0, \varepsilon]} = \tilde{f}_x + \tilde{g}_x \in L_2([0, \varepsilon], X) \end{cases} \quad (\text{conforme proposição 1}).$$

Repare que E_φ^1 é um subespaço fechado de $L_2([-r, \varepsilon], X)$.

Para $x, y \in E_\varphi^1$ temos para quase todo $t \in [0, \varepsilon]$

$$\begin{aligned} |T_1 x(t) - T_1 y(t)| &\leq |\tilde{f}_x(t) - \tilde{f}_y(t)| + \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot |g(x(t+\theta)) - g(y(t+\theta))| d\theta \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^0 |a(\theta)| \cdot |g(x(t+\theta)) - g(y(t+\theta))| d\theta \leq \|g'\| \cdot \int_{-\varepsilon}^0 |a(\theta)| \cdot |x(t+\theta) - y(t+\theta)| d\theta \end{aligned}$$

(pois $|\tilde{f}_x(t) - \tilde{f}_y(t)| \stackrel{\text{q.s.}}{=} |f(\varphi(t-r_1), \dots, \varphi(t-r_k)) - f(\varphi(t-r_1), \dots, \varphi(t-r_k))| = 0$ q.s. em $0 \leq t \leq \varepsilon$ e $\int_{-r}^{-\varepsilon} |a(\theta)| \cdot |g(x(t+\theta)) - g(y(t+\theta))| d\theta = \int_{-r}^{-\varepsilon} |a(\theta)| \cdot |g(\varphi(t+\theta)) - g(\varphi(t+\theta))| d\theta = 0$ q.s. em $0 \leq t \leq \varepsilon$).

Assim:

$$\|T_1 x - T_1 y\|_2 = \|T_1 x - T_1 y\|_{L_2([0, \varepsilon], X)} \leq \|g'\| \cdot \int_{-\varepsilon}^0 |a(\theta)| d\theta \cdot \|x - y\|_2.$$

Logo, T_1 é contração em E_φ^1 . O ponto fixo $x^1 \in E_\varphi^1$ de T_1 será a única solução de (D) em $L_2([-r, \varepsilon], X)$ com $x_0^1 = \varphi$.

Definindo $E_\varphi^2 = \{x \in L_2([-r, 2\varepsilon], X) \mid x_t = x_t^1 \text{ para } 0 \leq t \leq \varepsilon\}$ subespaço fechado de $L_2([-r, 2\varepsilon], X)$ e

$$T_2 : E_\varphi^2 \rightarrow E_\varphi^2 \text{ por } \begin{cases} (T_2 x)_t = x_t^1 & \text{para } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ (T_2 x)_{|[\varepsilon, 2\varepsilon]} = (\tilde{f}_x + \tilde{g}_x)_{|[\varepsilon, 2\varepsilon]} \in L_2([\varepsilon, 2\varepsilon], X) \end{cases}$$

Do mesmo modo que para T_1 , concluímos que T_2 é contração em E_φ^2 e terá então um único ponto fixo $x^2 \in E_\varphi^2$ (a única solução de (D) em $L_2([-r, 2\varepsilon], X)$ com $x_0 = \varphi$). Por recorrência, então, conseguimos para cada $m \in \mathbb{N}^*$, a única solução de (D) em $L_2([-r, m\varepsilon], X)$ como sendo o ponto fixo $x^m \in E_\varphi^m$ da contração $T_m : E_\varphi^m \rightarrow E_\varphi^m$ onde $E_\varphi^m = \{x \in L_2([-r, m\varepsilon], X) \mid x_t = x_t^{m-1} \text{ para } 0 \leq t \leq (m-1)\varepsilon\}$ e

$$T_m \text{ é definida por } \begin{cases} (T_m x)_t = x_t^{m-1} & \text{para } 0 \leq t \leq (m-1)\varepsilon \\ (T_m x)_{|[(m-1)\varepsilon, m\varepsilon]} = (\tilde{f}_x + \tilde{g}_x)_{|[(m-1)\varepsilon, m\varepsilon]}. \end{cases}$$

Convém reparar que $x_{|[-r, \overline{m}\varepsilon]}^m = x^{\overline{m}}$ para $\overline{m} \leq m$.

Temos então o teorema demonstrado. ■

Observação 1. Para $f \in \mathcal{X}_1$, $g \in \mathcal{X}_2$ e $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$

podemos definir para $\varphi \in \mathcal{G}^+ \subset L_2$ a função $\mathcal{F}(\varphi) = f(\varphi(r_1), \dots, \varphi(-r_k)) + \int_{-r}^0 a(\theta)g(\varphi(\theta))d\theta$

(o que não poderia ser feito de maneira geral para $\varphi \in L_2$).

Vemos que $\mathcal{F} : \mathcal{G}^+ \rightarrow X$ é de classe C^1 e tal que, para $\varphi, \Delta\varphi \in \mathcal{G}^+$,

$$\mathcal{F}'(\varphi).\Delta\varphi = \sum_{j=1}^k D_j f(\varphi(-r_1), \dots, \varphi(-r_k)).\Delta\varphi(-r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta).g'(\varphi(\theta)).\Delta\varphi(\theta)d\theta$$

$$\text{e } \|\mathcal{F}'\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{G}^+} \sup_{\substack{\Delta\varphi \in \mathcal{G}^+ \\ \|\Delta\varphi\|_\infty \leq 1}} \|\mathcal{F}'(\varphi)\Delta\varphi\| \leq \sum_{j=1}^k \|D_j f\| + \|g'\| \int_{-r}^0 |a(\theta)|d\theta < \infty$$

e o núcleo $\mu_\varphi \in SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ que representa $\mathcal{F}'(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^+, X)$ é dado por

$$\mu_\varphi(\theta) = -\sum_{j=1}^k D_j f(\varphi(-r_1), \dots, \varphi(-r_k)).\chi_{[-r, -r_j]}(\theta) + \int_0^\theta a(\sigma)g'(\varphi(\sigma))d\sigma \in \mathcal{L}(X).$$

Vemos que $\mathcal{F}$ satisfaz (1), (2) e (3) (dadas em I-1 e também em II-1). $\mathcal{F}$ satisfaz também (0)₊, pois para cada $T > 0$ temos que, fixado $x \in G^+([-r, T], X)$, verificamos que $\tilde{f}_x \in G^+([0, T], X)$ e $g \circ x \in G^+([-r, T], X)$ e para $t \in [0, T]$

$$\tilde{g}_x(t) = \int_{-r}^0 a(\theta)g \circ x(t+\theta)d\theta = \int_{t-r}^t a(\sigma-t)g \circ x(\sigma)d\sigma.$$

Colocando $a(\theta) = 0$ para $\theta < -r$ temos

$$\tilde{g}_x(t) = \int_{-r}^t a(\sigma-t)g \circ x(\sigma)d\sigma = \int_{-r}^t d_\sigma A(t, \sigma)g \circ x(\sigma)$$

$$\text{onde } A(t, \sigma) = \int_{-r}^\sigma a(\theta-t)d\theta - \int_{-r}^0 a(\theta)d\theta = -\int_\sigma^t a(\theta-t)d\theta = -\int_{\sigma-t}^0 a(\theta)d\theta$$

para $0 \leq t \leq T$ e $-r \leq \sigma \leq t$.

Definindo $A(t, \sigma) = A(0, \sigma-t)$ $-r \leq \sigma \leq t \leq 0$ vamos constatar que

$A \in C_0^\sigma.SV^u(-r, \Gamma_{-r}^T, \mathcal{L}(X))$ (ver definição I-7.1 e também proposição I-7.3) (repare que $\sup_{-r \leq t \leq T} SV_{[-r, t]}[A(t, \cdot)] \leq \int_{-r}^0 |a(\theta)| d\theta$).

Segundo o teorema 2.9 de [H-3] concluímos então que $\tilde{g}_x \in C([0, T], X)$.

Então $\mathcal{F} = F(f, g, a) \in \mathcal{X}^+$ (definido na observação I-2.5).

Assim, a nossa equação (D) na verdade é a equação a diferenças

$$(D) \quad x(t) = \mathcal{F}(x_t) \quad \text{para } t \geq 0$$

quando restrita ao contexto das funções regradas.

Pelo teorema I-2.1 e observação I-2.5 podemos afirmar que para cada $\varphi \in \mathcal{G}^+ \subset L_2$ existe um único $x \in G^+([-r, \infty[, X) \subset L_2^{\text{loc}}([-r, \infty[, X)$ solução de (D) para $t \geq 0$ com $x_0 = \varphi$. Assim, nesse caso, a única solução de (D) em $L_2^{\text{loc}}([-r, \infty[, X)$ com $x_0 = \varphi$, dada no teorema 1, é também de $G^+([-r, \infty[, X)$.

Como $\mathcal{F}$ também satisfaz $(0)_c$ da observação I-2.4 temos que $\mathcal{F} \in \mathcal{X}^c$ e então se $\varphi \in \mathcal{C} \subset L_2$ e ainda é tal que $\varphi(0) = \mathcal{F}(\varphi)$, teremos que a única solução de (D) para $t \geq 0$ em $L_2^{\text{loc}}([-r, \infty[, X)$ com $x_0 = \varphi$, dada no teorema 1, será uma função contínua.

Teorema 2. (*Dependência contínua da solução (D) em relação aos seus parâmetros*).

Fixado $T > 0$, a aplicação

$$\begin{aligned} L_2 \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times L_2([-r, 0], \mathcal{L}(X)) &\longrightarrow L_2([-r, T], X) \\ (\varphi, f, g, a) &\longrightarrow x(\varphi, f, g, a)|_{[-r, T]} \end{aligned}$$

dada no teorema 1, é contínua.

Prova. Vamos mostrar que ela é contínua em $(\varphi, f, g, a) \in L_2 \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times L_2([-r, 0], \mathcal{L}(X))$.

Seja $\delta > 0$, $\delta < \frac{1}{2}$, e tomemos $(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a}) \in L_2 \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times L_2([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ tal que $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 < \delta$, $\|f - \bar{f}\| < \delta$, $\|g - \bar{g}\| < \delta$, $\|a - \bar{a}\|_1 < \delta$.

Seja $M > 0$ tal que $\|\varphi\|_2 < M$, $\|f\| < M$, $\|g\| < M$, $\|a\|_1 < M$, $\|x\|_2^{[-r, T]} < M$ e também $\|\bar{\varphi}\|_2 < M$, $\|\bar{f}\| < M$, $\|\bar{g}\| < M$ e $\|\bar{a}\|_1 < M$ para $\forall \delta$, $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, onde

aqui chamamos $x = x(\varphi, f, g, a)$ e $\bar{x} = x(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a})$ e $\|x\|_2^{[-r, T]}$ é a norma $\|\cdot\|_2$ da função no intervalo indicado.

Tomando $0 \leq t \leq \tau < r_1$ temos q.s. em t

$$\begin{aligned} x(t) - \bar{x}(t) &= f(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k)) - \bar{f}(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k)) \\ &\quad + \bar{f}(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k)) - \bar{f}(\bar{x}(t-r_1), \dots, \bar{x}(t-r_k)) \\ &\quad + \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta - \int_{-r}^0 a(\theta)\bar{g}(x(t+\theta))d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^0 a(\theta)\bar{g}(x(t+\theta))d\theta - \int_{-r}^0 \bar{a}(\theta)\bar{g}(x(t+\theta))d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^0 \bar{a}(\theta)\bar{g}(x(t+\theta))d\theta - \int_{-r}^0 \bar{a}(\theta)\bar{g}(\bar{x}(t+\theta))d\theta \end{aligned}$$

Assim, q.s. em t ($0 \leq t \leq \tau$)

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &\leq (1 + \sum_{j=1}^k |x(t-r_j)|) \|f - \bar{f}\| + \sum_{j=1}^k \|D_j \bar{f}\| |x(t-r_j) - \bar{x}(t-r_j)| \\ &\quad + \int_{-r}^0 |a(\theta)|(1 + |x(t+\theta)|) \|g - \bar{g}\| d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| (1 + |x(t+\theta)|) \|\bar{g}\| d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^0 |\bar{a}(\theta)| \|\bar{g}'\| |x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)| d\theta \\ &\leq \delta + \delta \cdot \sum_{j=1}^k |\varphi(t-r_j)| + M \cdot \sum_{j=1}^k |\varphi(t-r_j) - \bar{\varphi}(t-r_j)| \\ &\quad + M\delta + \delta \int_{-r}^0 |a(\theta)| |x(t+\theta)| d\theta \\ &\quad + \delta M + M \cdot \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| |x(t+\theta)| d\theta \\ &\quad + M \cdot \int_{-r}^{\tau} |\bar{a}(\theta)| |\varphi(t+\theta) - \bar{\varphi}(t+\theta)| d\theta + \|\bar{g}\| \cdot \int_{-r}^0 |\bar{a}(\theta)| |x(t+\theta) - \bar{x}(t+\theta)| d\theta \end{aligned}$$

Tomando então a norma $\| \cdot \|_2$ de $x - \bar{x}$ em $[0, \tau]$ teremos:

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}_2^{[0, \tau]} &\leq \delta\sqrt{\tau} + \delta \sum_{j=1}^k \|\varphi\|_2^{[-r_j, -r_j + \tau]} + M \sum_{j=1}^k \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2^{[-r_j, -r_j + \tau]} \\ &\quad + M\delta\sqrt{\tau} + \delta \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot \|x\|_2^{[\theta, \theta + \tau]} d\theta \\ &\quad + M\delta\sqrt{\tau} + M \cdot \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| \cdot \|x\|_2^{[\theta, \theta + \tau]} d\theta \\ &\quad + M \cdot \int_{-r}^{-\tau} |\bar{a}(\theta)| \cdot \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2^{[\theta, \theta + \tau]} d\theta + \|\bar{g}\| \cdot \int_{-r}^0 |\bar{a}(\theta)| \cdot \|x - \bar{x}\|_2^{[\theta, \theta + \tau]} d\theta \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, \tau]} &\leq \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \|x - \bar{x}\|_2^{[0, \tau]} \\ &\leq \delta + \sqrt{\tau} \cdot \delta + \delta \sum_{j=1}^k \|\varphi\|_2 + M \sum_{j=1}^k \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + 2M\delta\sqrt{\tau} \\ &\quad + \delta \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot \|x\|_2^{[-r, \tau]} d\theta + M \cdot \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| \cdot \|x\|_2^{[-r, \tau]} d\theta \\ &\quad + M \cdot \int_{-r}^{-\tau} |\bar{a}(\theta)| \cdot \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 d\theta + \|\bar{g}\| \int_{-r}^0 |\bar{a}(\theta)| \cdot \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, \tau]} d\theta \\ &\leq (1 + \sqrt{\tau} + kM + kM + 2M\sqrt{\tau} + M^2 + M^2 + M^2)\delta \\ &\quad + (\|\bar{g}\| \cdot \int_{-r}^0 |\bar{a}(\theta)| d\theta) \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, \tau]} \\ &\leq (1 + \sqrt{\tau} + 2kM + 2M\sqrt{\tau} + 3M^2)\delta + (\|\bar{g}\| + \frac{1}{2}) \left(\int_{-r}^0 |a(\theta)| d\theta + \delta \right) \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, \tau]} \end{aligned}$$

Tomemos então $\tau > 0 \mid 0 < \tau < r_1, \frac{T}{\tau} \in \mathbb{N}^*$ e ainda $\int_{-r}^0 |a(\theta)| d\theta < \frac{1}{4(\|\bar{g}\| + \frac{1}{2})}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, se tomamos $\delta_1 > 0$ com $\delta_1 < \frac{1}{2}$, $\delta_1 < \frac{1}{4(\|\bar{g}\| + \frac{1}{2})}$ e

$$\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2(1 + \sqrt{\tau} + 2kM + 2M\sqrt{\tau} + 3M^2)} \quad \text{teremos que} \quad \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, \tau]} < \varepsilon$$

sempre que $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 < \delta_1$, $\|f - \bar{f}\| < \delta_1$, $\|g - \bar{g}\| < \delta_1$ e $\|a - \bar{a}\|_1 < \delta_1$.

Vamos agora usar a indução sobre $j \in \{1, 2, \dots, T/\tau\}$.

Supondo por indução que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_j > 0$ tal que se $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 < \delta_j$, $\|f - \bar{f}\| < \delta_j$, $\|g - \bar{g}\| < \delta_j$ e $\|a - \bar{a}\|_1 < \delta_j$ então $\|x - \bar{x}\|_2^{[-r, j\tau]} < \varepsilon$ e tendo mostrado isso para $j = 1$, vamos mostrar agora que essa hipótese de indução implica na propriedade válida para $j + 1$. Tomemos então $\varepsilon > 0$.

Seja $\tilde{\varphi} = x_{j\tau} \in L_2$ ($\tilde{\varphi}(\theta) = x(\theta + j\tau)$ para $\theta \in [-r, 0]$).

Como $\tau > 0$ só depende de $g \in \mathcal{X}_2$ e de $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$, podemos afirmar que existe $\tilde{\delta}_1 > 0$ (e podemos tomar $\tilde{\delta}_1 < \varepsilon/2$) tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } \|\tilde{\varphi} - \bar{\varphi}\|_2 < \tilde{\delta}_1, \|f - \bar{f}\| < \tilde{\delta}_1, \|g - \bar{g}\| < \tilde{\delta}_1 \text{ e } \|a - \bar{a}\|_1 < \tilde{\delta}_1 \\ &\text{então } \|x(\tilde{\varphi}, f, g, a) - x(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a})\|_2^{[-r, \tau]} < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução, $\exists \delta_j > 0$ (e tomamos $\delta_j < \tilde{\delta}_1$) tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } \|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta_j, \|f - \bar{f}\| < \delta_j, \|g - \bar{g}\| < \delta_j, \|a - \bar{a}\|_1 < \delta_j, \\ &\text{então } \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, j\tau]} < \tilde{\delta}_1 \end{aligned}$$

Para $\bar{\varphi} \in L_2$ nessas condições (ou seja, $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 < \delta_j$) se chamamos $\tilde{\varphi} = \bar{x}_{j\tau} \in L_2$ ($\tilde{\varphi}(\theta) = \bar{x}(\theta + j\tau)$ para $\theta \in [-r, 0]$) vemos que

$$\|\tilde{\varphi} - \bar{\varphi}\|_2 = \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+j\tau, j\tau]} \leq \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, j\tau]} < \tilde{\delta}_1$$

Como $\|f - \bar{f}\| < \delta_j < \tilde{\delta}_1$, $\|g - \bar{g}\| < \delta_j < \tilde{\delta}_1$ e $\|a - \bar{a}\|_1 < \delta_j < \tilde{\delta}_1$ temos que

$$\|x(\tilde{\varphi}, f, g, a) - x(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a})\|_2^{[-r, \tau]} = \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+j\tau, \tau+j\tau]} < \varepsilon/2$$

(A igualdade acima vem da unicidade da solução em L_2 , ou seja,

$$\begin{aligned} x(\tilde{\varphi}, f, g, a)(t) &= x(\varphi, f, g, a)(t + j\tau) = x(t + j\tau) \text{ e} \\ x(\tilde{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a})(t) &= x(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a})(t + j\tau) = \bar{x}(t + j\tau) \end{aligned}$$

$$\text{Então } \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, (j+1)\tau]} \leq \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, j\tau]} + \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+j\tau, (j+1)\tau]} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Está provada a indução e portanto o teorema. ■

2. A solução para trás

Para termos a solução de (D) para $t \leq 0$, colocamos, além da condição 1) do parágrafo anterior, mais uma condição para f :

(1) Existe $L \in \mathcal{L}(X)$ injetor e $c \in [0, 1[$ tal que

$\forall (p_1, \dots, p_k) \in X^k$ temos $\|I_X - L \circ D_k f(p_1, \dots, p_k)\| \leq c$

Definição 1. Seja $\tilde{\mathcal{X}}_1 = \{f \in \mathcal{X}_1 \mid f \text{ satisfaz } (\widetilde{1})\}$, que é um aberto de $\mathcal{X}_1$.

Teorema 1. Dados $f \in \tilde{\mathcal{X}}_1$, $g \in \mathcal{X}_2$ e $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ temos que para cada $\varphi \in L_2$ existe uma única solução de (D) para $t \leq 0$, $x = x(\varphi, f, g, a) \in L_2^{\text{loc}}([-\infty, 0], X)$ com $x_0 = \varphi$.

(Nesse caso, estamos dizendo que $x(t) = f(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k)) + \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta$ q.s. para $t \leq 0$.)

Prova. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r_k - r_{k-1} = r - r_{k-1}$ e $\|g'\| \cdot \int_{-r}^{-r+\varepsilon} |a(\theta)|d\theta < \frac{1-c}{\|L\|}$ (c e L dados em $(\widetilde{1})$ para f).

Para $\varphi \in L_2$ seja $\tilde{E}_\varphi^1 = \{x \in L_2([-r-\varepsilon, 0], X) \mid x_0 = \varphi\}$ subespaço fechado de $L_2([-r-\varepsilon, 0], X)$ e $\tilde{T}_1 : \tilde{E}_\varphi^1 \rightarrow \tilde{E}_\varphi^1$ definido por

$$\begin{cases} (\tilde{T}_1 x)_0 = \varphi \\ \tilde{T}_1 x(t-r) = x(t-r) - L[f(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k)) + \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta - \varphi(t)] \\ \text{q.s. em } -\varepsilon \leq t \leq 0 \end{cases}$$

(Ou seja, $(\tilde{T}_1 x)_{-r|[-\varepsilon, 0]} = (x_{-r})_{[-\varepsilon, 0]} - L \circ (\tilde{f}_x + \tilde{g}_x - \varphi|_{[-\varepsilon, 0]})$ em $L_2([-\varepsilon, 0], X)$.)

Para $x, y \in \tilde{E}_\varphi^1$ temos que para quase todo $t \in [-\varepsilon, 0]$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 x(t-r) - \tilde{T}_1 y(t-r) &= x(t-r) - y(t-r) - L.[f(\varphi(t-r_1), \dots, x(t-r)) \\ &\quad - f(\varphi(t-r_1), \dots, y(t-r)) + \int_{-r}^{-r-t} a(\theta)(g(x(t+\theta)) - g(y(t+\theta)))d\theta] \\ &= x(t-r) - y(t-r) - L.[\int_0^1 D_k f(\varphi(t-r_1), \dots, \varphi(t-r_{k-1}), \xi x(t-r) + (1-\xi)y(t-r)). \\ &\quad \cdot (x(t-r) - y(t-r))d\xi + \int_{-r}^{-r-t} a(\theta)(g(x(t+\theta)) - g(y(t+\theta)))d\theta] \\ &= \int_0^1 [I_X - LD_k f(\varphi(t-r_1), \dots, \xi x(t-r) + (1-\xi)y(t-r))](x(t-r) - y(t-r))d\xi \\ &\quad - L. \int_{-r}^{-r-t} a(\theta)(g(x(t+\theta)) - g(y(t+\theta)))d\theta \end{aligned}$$

assim, quase sempre em $t \in [-\varepsilon, 0]$,

$$|\tilde{T}_1 x(t-r) - \tilde{T}_1 y(t-r)| \leq c|x(t-r) - y(t-r)| + \|L\| \cdot \|g'\| \cdot \int_{-r}^{-r+\varepsilon} |a(\theta)| \cdot |x(t+\theta) - y(t+\theta)| d\theta$$

E tomando $\|\cdot\|_2$ em $[-\varepsilon, 0]$ temos:

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_1 x - \tilde{T}_1 y\|_2 &= \|\tilde{T}_1 x - \tilde{T}_1 y\|_2^{[-r-\varepsilon, -r]} \leq c\|x - y\|_2^{[-r-\varepsilon, -r]} \\ &\quad + \|L\| \cdot \|g'\| \cdot \int_{-r}^{-r+\varepsilon} |a(\theta)| \cdot \|x - y\|_2^{[-\varepsilon+\theta, \theta]} d\theta \\ &\leq (c + \|L\| \cdot \|g'\| \cdot \int_{-r}^{-r+\varepsilon} |a(\theta)| d\theta) \cdot \|x - y\|_2 \end{aligned}$$

Logo $\tilde{T}_1$ é contração em $\tilde{E}_\varphi^1$. O ponto fixo $x^1 \in \tilde{E}_\varphi^1$ de $\tilde{T}_1$ será a única solução de (D) para $-\varepsilon \leq t \leq 0$ em $L_2([-r-\varepsilon, 0], X)$ com $x_0^1 = \varphi$.

Definindo $\tilde{E}_\varphi^2 = \{x \in L_2([-r-2\varepsilon, 0], X) \mid x_t = x_t^1 \text{ para } -\varepsilon \leq t \leq 0\}$ subespaço fechado de $L_2([-r-2\varepsilon, 0], X)$ e $\tilde{T}_2 : \tilde{E}_\varphi^2 \rightarrow \tilde{E}_\varphi^2$ por

$$\begin{cases} (\tilde{T}_2 x)_t = x_t^1 & \text{para } -\varepsilon \leq t \leq 0 \\ (\tilde{T}_2 x)(t-r) = x(t-r) - L[f(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k)) + \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta - x^1(t)] \\ \text{q.s. em } -2\varepsilon \leq t \leq -\varepsilon \end{cases}$$

Vemos que q.s. em $-2\varepsilon \leq t \leq -\varepsilon$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2 x(t-r) &= x(t-r) - L[f(x^1(t-r_1), \dots, x^1(t-r_{k-1}), x(t-r)) \\ &\quad + \int_{-r}^{-r-t-\varepsilon} a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta + \int_{-r-t-\varepsilon}^0 a(\theta)g(x^1(t+\theta))d\theta - x^1(t)] \end{aligned}$$

Do mesmo modo que para $\tilde{T}_1$ concluímos que $\tilde{T}_2$ é contração em $\tilde{E}_\varphi^2$ e terá então um único ponto fixo $x^2 \in \tilde{E}_\varphi^2$ (a única solução de (D) para $-2\varepsilon \leq t \leq 0$ em $L_2([-r-2\varepsilon, 0], X)$ com $x_0 = \varphi$).

Por recorrência então, conseguimos para cada $m \in \mathbb{N}^*$, a única solução de (D) para $-m\varepsilon \leq t \leq 0$ em $L_2([-r-m\varepsilon, 0], X)$ com $x_0 = \varphi$, como sendo o ponto fixo $x^m \in \tilde{E}_\varphi^m$ da contração $\tilde{T}_m : \tilde{E}_\varphi^m \rightarrow \tilde{E}_\varphi^m$

onde $\tilde{E}_\varphi^m = \{x \in L_2([-r-m\varepsilon, 0], X) \mid x_t = x_t^{m-1} \text{ para } -(m-1)\varepsilon \leq t \leq 0\}$ e

$$\begin{cases} (\tilde{T}_m x)_t = x_t^{m-1} & \text{para } -(m-1)\varepsilon \leq t \leq 0 \\ (\tilde{T}_m x)(t-r) = x(t-r) - L[f(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k)) + \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta - x^{m-1}(t)] \\ \text{q.s. em } -m\varepsilon \leq t \leq -(m-1)\varepsilon \end{cases}$$

Convém reparar que $x_{[-r-\bar{m}\varepsilon, 0]}^{\bar{m}} = x^{\bar{m}}$ para $\bar{m} \leq m$.

Temos então o teorema demonstrado. ■

Observação 1. Dados $f \in \tilde{\mathcal{X}}_1$, $g \in \mathcal{X}_2$, $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ e $\varphi \in L_2$, existe um único $x = x(\varphi, f, g, a) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$ solução de (D) para $t \in \mathbf{R}$ com $x_0 = \varphi$.

Observação 2. Para f, g, a como na observação anterior, se tomamos $\mathcal{F} : \mathcal{G}^+ \rightarrow X$ definido na observação 1.1, vemos que nesse caso $\mathcal{F}$ satisfaz, além das propriedades mencionadas na observação 1.1, a propriedade $(\widetilde{3})$; ou seja, $\mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{X}}^0$ (ver definição II-1.1).

Isso pois $A_\varphi = \mu_\varphi(-r) - \mu_\varphi(-r^+) = -D_k f(\varphi(-r_1), \dots, \varphi(-r_k)) \in \mathcal{L}(X)$ e a propriedade $(\widetilde{1})$ deste parágrafo implicará em $(\widetilde{3})$.

Assim, podemos afirmar que se $\varphi \in \mathcal{G}^+ \subset L_2$ então $x(\varphi, f, g, a) \in G^+(\mathbf{R}, X) \subset L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$ do mesmo modo se $\varphi \in \mathcal{C} \subset \mathcal{G}^+ \subset L_2$ e ainda $\varphi(0) = \mathcal{F}(\varphi)$ então temos $x(\varphi, f, g, a) \in C(\mathbf{R}, X) \subset G^+(\mathbf{R}, X) \subset L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$.

Teorema 2. (Continuidade da solução para trás em relação aos parâmetros.)

Fixado $T < 0$, a aplicação

$$\begin{aligned} L_2 \times \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \mathcal{X}_2 \times L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X)) &\longrightarrow L_2([-r+T, 0], X) \\ (\varphi, f, g, a) &\longrightarrow x(\varphi, f, g, a)|_{[T-r, 0]} \end{aligned}$$

dada no teorema 1 é contínua.

Prova. Vamos mostrar que ela é contínua em $(\varphi, f, g, a) \in L_2 \times \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \mathcal{X}_2 \times L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$.

Seja $M > 0$ tal que quando $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 < \delta$, $\|f - \bar{f}\| < \delta$, $\|g - \bar{g}\| < \delta$, $\|a - \bar{a}\|_1 < \delta$, sempre que $0 < \delta < \frac{1}{2}$, tenhamos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2 < M, \|\bar{\varphi}\|_2 < M, \|f\| < M, \|\bar{f}\| < M, \|g\| < M, \\ \|\bar{g}\| < M, \|a\|_1 < M, \|\bar{a}\|_1 < M, \text{ e } \|x\|_2^{[T-r, 0]} < M \end{aligned}$$

onde aqui chamamos $x = x(\varphi, f, g, a)$, $\bar{x} = x(\bar{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a})$ e $\|x\|_2^{[T-r, 0]}$ é a norma $\|\cdot\|_2$ da função no interval indicado.

Tomando $-r + r_{k-1} < \tau \leq t \leq 0$ temos q.s. em t

$$\begin{aligned} x(t) - \bar{x}(t) &= \bar{f}(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) \\ &\quad - \bar{f}(\bar{x}(t - r_1), \dots, \bar{x}(t - r_k)) + \gamma(t) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= f(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) - \bar{f}(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) \\ &\quad + \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t + \theta))d\theta - \int_{-r}^0 \bar{a}(\theta)\bar{g}(\bar{x}(t + \theta))d\theta \end{aligned}$$

(q.s. em t), ou seja:

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \bar{\varphi}(t) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{k-1} D_j \bar{f}(\xi x(t - r_1) + (1 - \xi)\bar{x}(t - r_1), \dots, \xi x(t - r_k) \\ &\quad + (1 - \xi)\bar{x}(t - r_k)) \cdot (\varphi(t - r_j) - \bar{\varphi}(t - r_j)) d\xi \\ &\quad + \int_0^1 D_k \bar{f}(\xi x(t - r_1) + (1 - \xi)\bar{x}(t - r_1), \dots, \xi x(t - r_k) \\ &\quad + (1 - \xi)\bar{x}(t - r_k)) \cdot (x(t - r) - \bar{x}(t - r)) d\xi + \gamma(t) \\ 0 &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{k-1} D_j \bar{f}(\dots) (\varphi(t - r_j) - \bar{\varphi}(t - r_j)) d\xi - (\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)) \\ &\quad + \int_0^1 D_k \bar{f}(\dots) (x(t - r) - \bar{x}(t - r)) d\xi + \gamma(t) \end{aligned}$$

assim q.s. em t ($-r + r_{k-1} < \tau \leq t \leq 0$)

$$\begin{aligned} x(t - r) - \bar{x}(t - r) &= L \cdot \int_0^1 \sum_{j=1}^{k-1} D_j \bar{f}(\dots) (\varphi(t - r_j) - \bar{\varphi}(t - r_j)) d\xi - L(\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)) + \\ &\quad + \int_0^1 [I_X - L \cdot D_k f(\dots)] (x(t - r) - \bar{x}(t - r)) d\xi \\ &\quad + L \cdot \int_0^1 [D_k f(\dots) - D_k \bar{f}(\dots)] (x(t - r) - \bar{x}(t - r)) d\xi + L \cdot \gamma(t) \end{aligned}$$

assim q.s. em t

$$\begin{aligned} |x(t - r) - \bar{x}(t - r)| &\leq \|L\| \sum_{j=1}^{k-1} \|D_j \bar{f}\| \cdot |\varphi(t - r_j) - \bar{\varphi}(t - r_j)| + \|L\| \cdot |\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| + \\ &\quad + c \cdot |x(t - r) - \bar{x}(t - r)| + \|L\| \cdot \|D_k f - D_k \bar{f}\| \cdot |x(t - r) - \bar{x}(t - r)| + \|L\| \cdot |\gamma(t)| \end{aligned}$$

(c e L dados em $(\widetilde{1})$ para f) e

$$\begin{aligned} |\gamma(t)| &\leq (1 + \sum_{j=1}^k |x(t - r_j)|) \|f - \bar{f}\| + \int_{-r}^0 |a(\theta)| |g(x(t + \theta)) - \bar{g}(x(t + \theta))| d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| |\bar{g}(x(t + \theta))| d\theta + \int_{-r}^0 |\bar{a}(\theta)| |\bar{g}(x(t + \theta)) - \bar{g}(\bar{x}(t + \theta))| d\theta \end{aligned}$$

assim q.s. em t

$$\begin{aligned} |x(t - r) - \bar{x}(t - r)| &\leq \|L\| \cdot M \sum_{j=1}^{k-1} |\varphi(t - r_j) - \bar{\varphi}(t - r_j)| + \|L\| \cdot |\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| \\ &\quad + (c + \|L\| \cdot \delta) |x(t - r) - \bar{x}(t - r)| + \|L\| \delta + \|L\| \delta \cdot \sum_{j=1}^k |x(t - r_j)| \\ &\quad + M \|L\| \cdot \delta + \|L\| \cdot \delta \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot |x(t + \theta)| d\theta \\ &\quad + M \|L\| \cdot \delta + \|L\| M \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| \cdot |x(t + \theta)| d\theta \\ &\quad + \|L\| \cdot M \int_{-r-\tau}^0 |\bar{a}(\theta)| \cdot |\varphi(t + \theta) - \bar{\varphi}(t + \theta)| d\theta \\ &\quad + \|L\| \cdot \|\bar{g}\| \cdot \int_{-r}^{-r-\tau} |\bar{a}(\theta)| \cdot |x(t + \theta) - \bar{x}(t + \theta)| d\theta \end{aligned}$$

Se tomamos $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ e ainda $\delta < \frac{\hat{c} - c}{\|L\|}$, onde fixamos $\hat{c}$ com $c < \hat{c} < 1$, vamos obter q.s. em $\tau \leq t \leq 0$:

$$\begin{aligned} |x(t - r) - \bar{x}(t - r)| &\leq \frac{\|L\| \cdot M}{1 - \hat{c}} \sum_{j=1}^{k-1} |\varphi(t - r_j) - \bar{\varphi}(t - r_j)| \\ &\quad + \frac{\|L\|}{1 - \hat{c}} |\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| + \frac{(2M + 1) \|L\| \delta}{1 - \hat{c}} \\ &\quad + \frac{\|L\| \cdot \delta}{1 - \hat{c}} \sum_{j=1}^k |x(t - r_j)| + \frac{\|L\| \cdot \delta}{1 - \hat{c}} \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot |x(t + \theta)| d\theta \\ &\quad + \frac{\|L\| \cdot M}{1 - \hat{c}} \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| \cdot |x(t + \theta)| d\theta \\ &\quad + \frac{\|L\| \cdot M}{1 - \hat{c}} \int_{-r-\tau}^0 |\bar{a}(\theta)| \cdot |\varphi(t + \theta) - \bar{\varphi}(t + \theta)| d\theta \\ &\quad + \frac{\|L\| \cdot \|\bar{g}\|}{1 - \hat{c}} \cdot \int_{-r}^{-r-\tau} |\bar{a}(\theta)| \cdot |x(t + \theta) - \bar{x}(t + \theta)| d\theta \end{aligned}$$

Tomando então a norma $\| \cdot \|_2$ de $(x - \bar{x})_{[r-r, -r]}$ temos:

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|_2^{[r-r, -r]} &\leq \frac{\|L\| \cdot M}{1 - \hat{c}} \sum_{j=1}^{k-1} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2^{[\tau-r_j, -r_j]} + \frac{\|L\|}{1 - \hat{c}} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2^{[\tau, 0]} + \frac{(2M+1)\|L\|\delta}{1 - \hat{c}} \cdot \sqrt{-\tau} \\ &+ \frac{\|L\|\delta}{1 - \hat{c}} \sum_{j=1}^k \|x\|_2^{[\tau-r_j, r_j]} + \frac{\|L\|\delta}{1 - \hat{c}} \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot \|x\|_2^{[\tau+\theta, \theta]} d\theta \\ &+ \frac{\|L\|M}{1 - \hat{c}} \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| \cdot \|x\|_2^{[\tau+\theta, \theta]} d\theta + \frac{\|L\|M}{1 - \hat{c}} \int_{-r-\tau}^0 |\bar{a}(\theta)| \cdot \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2^{[\tau+\theta, \theta]} d\theta \\ &+ \frac{\|L\| \cdot \|\bar{g}\|}{1 - \hat{c}} \int_{-r}^{-r-\tau} |\bar{a}(\theta)| \cdot \|x - \bar{x}\|_2^{[\tau+\theta, \theta]} d\theta \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|_2^{[r-r, 0]} &\leq \|x - \bar{x}\|_2^{[r-r, -r]} + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 \\ &\leq \delta + \frac{M\|L\|}{1 - \hat{c}} \sum_{j=1}^{k-1} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \frac{\|L\|}{1 - \hat{c}} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \frac{(2M+1)\|L\|\delta}{1 - \hat{c}} \sqrt{-\tau} \\ &+ \frac{\|L\|\delta}{1 - \hat{c}} \sum_{j=1}^k \|x\|_2 + \frac{\|L\|\delta}{1 - \hat{c}} \int_{-r}^0 |a(\theta)| d\theta \cdot \|x\|_2 + \frac{\|L\|M}{1 - \hat{c}} \int_{-r}^0 |a(\theta) - \bar{a}(\theta)| d\theta \cdot \|x\|_2 \\ &+ \frac{M\|L\|}{1 - \hat{c}} \int_{-r-\tau}^0 |\bar{a}(\theta)| d\theta \cdot \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \frac{\|\bar{g}\| \cdot \|L\|}{1 - \hat{c}} \int_{-r}^{-r-\tau} |\bar{a}(\theta)| d\theta \cdot \|x - \bar{x}\|_2^{[\tau-r, 0]} \\ &\leq (1 + \frac{M\|L\|}{1 - \hat{c}} (k-1) + \frac{\|L\|}{1 - \hat{c}} + \frac{(2M+1)\|L\|}{1 - \hat{c}} \sqrt{-\tau} + \frac{\|L\|M}{1 - \hat{c}} k + \frac{3\|L\| \cdot M^2}{1 - \hat{c}}) \delta \\ &+ \frac{\|L\|}{1 - \hat{c}} (\|g\| + \frac{1}{2}) (\int_{-r}^{-r-\tau} |a(\theta)| d\theta + \delta) \cdot \|x - \bar{x}\|_2^{[\tau-r, 0]} \end{aligned}$$

Tomemos então $\tau < 0 \mid -\tau < r - r_{k-1}$, $\frac{T}{\tau} \in \mathbb{N}^*$ e ainda

$$\int_{-r}^{-r-\tau} |a(\theta)| d\theta < \frac{1 - \hat{c}}{4\|L\|(\|g\| + \frac{1}{2})}.$$

Assim dado $\varepsilon > 0$, se tomamos $\delta_1 > 0$ com $\delta_1 < \frac{1}{2}$, $\delta_1 < \frac{\hat{c}-c}{\|L\|}$,

$$\delta_1 < \frac{1 - \hat{c}}{4\|L\|(\|g\| + 1/2)} \quad \text{e} \quad \delta_1 < \frac{\varepsilon}{2(1 + \frac{2kM\|L\| + \|L\| + (2M+1)\|L\|\sqrt{-\tau} + 3\|L\|M^2}{1 - \hat{c}})}$$

teremos que $\|x - \bar{x}\|_2^{[\tau-r, 0]} < \varepsilon$ sempre que $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 < \delta_1$, $\|f - \bar{f}\| < \delta_1$, $\|g - \bar{g}\| < \delta_1$ e $\|a - \bar{a}\|_1 < \delta_1$.

Vamos agora usar a indução sobre $j \in \{1, 2, \dots, T/\tau\}$, supondo por indução que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_j > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 < \delta_j, \|f - \bar{f}\| < \delta_j, \|g - \bar{g}\| < \delta_j \text{ e } \|a - \bar{a}\|_1 < \delta_j \\ &\text{então } \|x - \bar{x}\|_2^{[j\tau-r, 0]} < \varepsilon \end{aligned}$$

e tendo mostrado isso para $j = 1$, vamos mostrar agora que essa hipótese de indução implica na propriedade válida para $j + 1$. Tomemos então $\varepsilon > 0$.

Seja $\tilde{\varphi} = x_{j\tau} \in L_2$. Como $\tau < 0$ é independente de $\varphi \in L_2$ (repare que nesse caso $\tau < 0$ depende de f, g e a), podemos afirmar que existe $\tilde{\delta}_1 > 0$ (e podemos tomar $\tilde{\delta}_1 < \varepsilon/2$) tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } \|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}\|_2 < \tilde{\delta}_1, \|f - \bar{f}\| < \tilde{\delta}_1, \|g - \bar{g}\| < \tilde{\delta}_1 \text{ e } \|a - \bar{a}\|_1 < \tilde{\delta}_1 \\ &\text{então } \|x(\tilde{\varphi}, f, g, a) - x(\tilde{\varphi}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a})\|_2^{[\tau-r, 0]} < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução, $\exists \delta_j > 0$ (e tomamos $\delta_j < \tilde{\delta}_1$) tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } \|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta_j, \|f - \bar{f}\| < \delta_j, \|g - \bar{g}\| < \delta_j \text{ e } \|a - \bar{a}\|_1 < \delta_j \\ &\text{então } \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+j\tau, 0]} < \tilde{\delta}_1 \end{aligned}$$

Para $\bar{\varphi} \in L_2$ nessas condições (ou seja, $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 < \delta_j$) se chamamos $\tilde{\tilde{\varphi}} = \bar{x}_{j\tau} \in L_2$ vemos que

$$\|\tilde{\varphi} - \tilde{\tilde{\varphi}}\|_2 = \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+j\tau, j\tau]} \leq \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+j\tau, 0]} < \tilde{\delta}_1$$

e como $\|f - \bar{f}\| < \delta_j < \tilde{\delta}_1$, $\|g - \bar{g}\| < \delta_j < \tilde{\delta}_1$ e $\|a - \bar{a}\|_1 < \delta_j < \tilde{\delta}_1$ temos que

$$\|x(\tilde{\varphi}, f, g, a) - x(\tilde{\tilde{\varphi}}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{a})\|_2^{[\tau-r, 0]} = \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+(j+1)\tau, j\tau]} < \varepsilon/2$$

(A igualdade acima vem da unicidade da solução para trás em L_2 .)

Então

$$\|x - \bar{x}\|_2^{[-r+(j+1)\tau, 0]} \leq \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+(j+1)\tau, j\tau]} + \|x - \bar{x}\|_2^{[-r+j\tau, 0]} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Está provada a indução e portanto o teorema. ■

Definição 2. O operador de evolução $\tau(t)$.

Supondo $f \in \tilde{\mathcal{X}}_1$, $g \in \mathcal{X}_2$, $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$, definimos para cada $t \in \mathbf{R}$ o operador

$$\begin{aligned}\tau(t): L_2 &\longrightarrow L_2 \\ \varphi &\longrightarrow \tau(t)\varphi = x_t(\varphi, f, g, a)\end{aligned}$$

onde $x(\varphi, f, g, a) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$ é dado na observação 1.

E temos um grupo de operadores (pelos teoremas 1.1 e 1), ou seja

$$\begin{cases} \tau(t) \circ \tau(s) = \tau(t+s) & \forall t, s \in \mathbf{R} \\ \tau(0) = I_{L_2} \\ \tau(t)^{-1} = \tau(-t) & \forall t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Dos teoremas 1.2 e 2 concluímos a

Proposição 1. $\tau(t) \in C(L_2, L_2) \quad \forall t \in \mathbf{R}$, ou seja, $\tau(t)$ é contínuo em $\varphi \in L_2$.

Assim, $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ é um grupo de homeomorfismos de L_2 .

Observação 3.

$$\begin{aligned}\tau(t)(\mathcal{G}^+) &\subset \mathcal{G}^+ \\ &\forall t \in \mathbf{R} \\ \text{e } \tau(t)(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) &\subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \{\varphi \in \mathcal{C} \mid \varphi(0) = \mathcal{F}(\varphi)\}$ ($\mathcal{F}: \mathcal{G}^+ \rightarrow X$ definida na observação 1.1), conforme observação 2.

E finalmente se $f \in \mathcal{L}(X^k, X)$ e $g \in \mathcal{L}(X)$ então $\tau(t) \in \mathcal{L}(L_2)$.

3. A equação linear e teoremas de conjugação de fluxos.

Vamos considerar a equação linear (D) dada no exemplo 1.1.

No caso, $f \in \mathcal{L}(X^k, X)$, $f(p_1, \dots, p_k) = \sum_{j=1}^k A_j p_j$ com $A_j \in \mathcal{L}(X)$.

Vemos facilmente que $f \in \tilde{\mathcal{X}}_1$ se e somente se A_k é inversível e $A_k^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Neste caso, temos o fluxo linear $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$, grupo de isomorfismos lineares de L_2 .

Podemos considerar, nestas condições, para cada $H \in L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$, a equação linear não homogênea:

$$(D)_H \quad x(t) = \sum_{j=1}^k A_j x(t - r_j) + \int_{-r}^0 A(\theta) x(t + \theta) d\theta + H(t) \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R}$$

Por raciocínio análogo aos anteriores, podemos concluir que temos a existência e unicidade da solução em $L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$ para cada dado inicial $(t_0, \varphi) \in \mathbf{R} \times L_2$, e dependência contínua da solução em relação a $H|_{[a,b]} \in L_2([a,b], X)$ em cada intervalo compacto $[a,b]$; ou seja, os teoremas 1.1, 1.2, 2.1 e 2.2 facilmente se verificam com a inclusão de H nos parâmetros da equação.

Ainda temos (tomando $t_0 = 0$) $x(\varphi, H) = x(\varphi, 0) + x(0, H) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$, e portanto $x_t(\varphi, H) = T(t)\varphi + \kappa(t)H|_{[0,t]}$, onde $\kappa(t) \in \mathcal{L}(L_2([0,t], X), L_2)$.

Para a equação (D) não necessariamente linear, como no parágrafo anterior (ou seja, $f \in \tilde{\mathcal{X}}_1$ e $g \in \mathcal{X}_2$), se tivermos $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ e $g(0) = 0$, então $\varphi = 0 \in L_2$ é ponto de equilíbrio de (D) e definimos a equação linear $(D)'$ que será a equação linearizada de (D) em torno do equilíbrio $\varphi = 0$ como sendo:

$$(D)' \quad y(t) = \sum_{j=1}^k A_j y(t - r_j) + \int_{-r}^0 A(\theta) y(t + \theta) d\theta \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R}$$

onde $A_j = Df_j(0, 0, \dots, 0)$, $A(\theta) = a(\theta).g'(0)$ $j = 1, \dots, k$, $\theta \in [-r, 0]$.

Repare que neste caso vamos ter A_k inversível e bicontínuo. Seja $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ o fluxo de $(D)'$.

Dizemos que $0 \in L_2$ é equilíbrio hiperbólico de (D) se além de equilíbrio temos que existe $t_0 > 0$ tal que $T(t_0) \in \mathcal{L}(L_2)$ é operador hiperbólico de L_2 (ver definição II.2.1 e proposição II.2.1).

Proposição 1. Para $0 \in L_2$ equilíbrio de (D) temos:

0 é equilíbrio hiperbólico $\Leftrightarrow \forall t \neq 0$, $T(t)$ é automorfismo hiperbólico de L_2 .

Em caso afirmativo, existem subespaços fechados L_2^s e $L_2^u \subset L_2$ com $L_2 = L_2^s \oplus L_2^u$, subespaços invariantes por $T(t) \forall t \in \mathbf{R}$ e caracterizados por

$$L_2^s = \{\varphi \in L_2 \mid T(t)\varphi \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\}$$

$$L_2^u = \{\varphi \in L_2 \mid T(t)\varphi \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\}$$

E ainda temos que $\exists K, \alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0$, tal que

$$\varphi \in L_2^s \Rightarrow \|T(t)\varphi\| \leq K e^{-\alpha t} \|\varphi\| \quad \forall t \geq 0$$

$$\varphi \in L_2^u \Rightarrow \|T(t)\varphi\| \leq K e^{\alpha t} \|\varphi\| \quad \forall t \leq 0$$

Prova. É idêntica à prova da proposição II-2.2, trocando $\mathcal{G}^+$ por L_2 e usando os teoremas 1.2 e 2.2. Repare também que para cada $t_0 > 0$ e cada $\varphi \in L_2$ temos $\sup_{\xi \in [0, t_0]} \|T(\xi)\varphi\|_2 \leq \|y(\varphi)\|_2^{[-r, t_0]} < \infty$, onde $y(\varphi)$ é a solução de $(D)'$ com função inicial φ . Assim, podemos usar o Princípio da Limitação Uniforme e concluir que $\sup_{\xi \in [0, t_0]} \|T(\xi)\| < \infty$. ■

Veremos agora dois teoremas de conjugação entre fluxos de equações (D) . O primeiro teorema conjuga de maneira global o fluxo de uma equação linear hiperbólica $(D)_0$ com o fluxo de qualquer equação não linear (D) cujos parâmetros f e g são pequenas perturbações dos parâmetros lineares de $(D)_0$ (análogo ao teorema II.2.3 no respectivo contexto). O segundo teorema, válido para o caso de X ser um espaço de Hilbert, considera uma equação geral (D) com equilíbrio hiperbólico $0 \in L_2$ e conjuga o fluxo de (D) com o fluxo da sua linearizada $(D)'$, não de maneira global mas num conjunto de funções regradas com norma do sup. pequena. (Lembremos que $\mathcal{G}^+ \subset L_2$ é um subespaço denso e invariante pelo fluxo dessas equações, conforme observações 1.1 e 2.2.)

Teorema 1. Consideremos a equação linear hiperbólica:

$$(D)_0 \quad y(t) = \sum_{j=1}^k A_j y(t - r_j) + \int_{-r}^0 A(\theta) y(t + \theta) d\theta \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R}$$

com $A_j \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, \dots, k$, $A_k^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e $A(\theta) = a(\theta).L_g$,
onde $a \in L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ e $L_g \in \mathcal{L}(X)$.

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que

se $\phi_f : X^k \rightarrow X$ e $\phi_g : X \rightarrow X$ são de classe C^1 , limitadas, e ainda

$$\|\phi'_f(p_1, \dots, p_k)\| < \varepsilon \text{ e } \|\phi'_g(p)\| < \varepsilon \quad \forall p_1, p_2, \dots, p_k, p \in X$$

então existe um único homeomorfismo $h : L_2 \rightarrow L_2$ com $h - I_{L_2}$ limitado, que
conjuga o fluxo $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ de $(D)_0$ com o fluxo $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ de (D) , equação
definida por:

$$(D) \quad x(t) = \sum_{j=1}^k A_j x(t - r_j) + \phi_f(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) + \int_{-r}^0 a(\theta)[L_g + \phi_g]x(t + \theta)d\theta$$

q.s. em $t \in \mathbf{R}$,

ou seja, $T(t)h = h\tau(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$.

Prova: Notemos primeiramente que para $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \|A_k^{-1}\|^{-1}$ temos que o fluxo
 $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ está bem definido, pois o parâmetro $f = L_f + \phi_f$ da equação (D) (onde
aqui evidentemente $L_f \in \mathcal{L}(X^k, X)$) é tal que $L_f(p_1, \dots, p_k) = \sum_{j=1}^k A_j p_j$, satisfaz a
condição $(\widetilde{1})$ do parágrafo 2. Basta tomar $L = A_k^{-1}$ e verificar que:

$$\begin{aligned} \|I - A_k^{-1} D_k f(p_1, \dots, p_k)\| &= \|I - A_k^{-1}(A_k + D_k \phi_f(p_1, \dots, p_k))\| \\ &= \|A_k^{-1} \cdot D_k \phi_f(p_1, \dots, p_k)\| \leq \|A_k^{-1}\| \cdot \|\phi'_f(p_1, \dots, p_k)\| \leq \|A_k^{-1}\| \cdot \varepsilon = c < 1. \end{aligned}$$

Olhemos (D) como:

$$(D) \quad x(t) = \sum_{j=1}^k A_j x(t - r_j) + \int_{-r}^0 A(\theta)x(t + \theta)d\theta + H_\varphi(t) \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R}$$

onde para $\varphi \in L_2$ definimos

$$H_\varphi(t) = \phi_f(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) + \int_{-r}^0 a(\theta)\phi_g(x(t + \theta))d\theta \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R}$$

com $x_t = \tau(t)\varphi$.

Da proposição 1.1 temos que $H_\varphi \in L_2^{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$ e temos a identidade

$$\begin{aligned}\tau(t)\varphi &= T(t)\varphi + \kappa(t).H_{\varphi|_{[0,t]}} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \text{ ou seja, p/ } t \in \mathbf{R} \\ \tau(t) &= T(t) + \Phi_t \quad \text{com } \Phi_t : L_2 \rightarrow L_2 \text{ contínua, limitada, pois} \\ \sup_{\varphi \in L_2} \|\Phi_t(\varphi)\|_2 &\leq \|\kappa(t)\|. \sup_{\varphi \in L_2} \|H_{\varphi|_{[0,t]}}\|_2 < \infty\end{aligned}$$

(pois para $\sigma \in [0, t]$ temos $H_\varphi(\sigma) \stackrel{\text{q.s.}}{\leq} \|\phi_f\| + \|a\|_1 \cdot \|\phi_g\|$

$$\text{logo } \|H_\varphi\|_2^{[0,t]} \leq (\|\phi_f\| + \|a\|_1 \cdot \|\phi_g\|) \cdot \sqrt{|t|}.)$$

Vamos mostrar que para $s \in [0, r]$ temos que Φ_s é Lipchitz.

Seja $M > 0$ tal que $\sup_{t \in [0, r]} \|\kappa(t)\| \leq M$, $\|T(r)\| \leq M$, $\|a\|_1 \leq M$, $k \leq M$ e suponhamos $1 - 2\varepsilon M^2 > 0$.

Para $0 \leq t \leq r$ temos:

$$\|\Phi_t\varphi - \Phi_t\psi\|_2 \leq M \cdot \|H_\varphi - H_\psi\|_2^{[0,r]}$$

e

$$\begin{aligned}H_\varphi(t) - H_\psi(t) &\stackrel{\text{q.s.}}{=} \phi_f(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) - \phi_f(\bar{x}(t - r_1), \dots, \bar{x}(t - r_k)) \\ &\quad + \int_{-r}^0 a(\theta)(\phi_g(x(t + \theta)) - \phi_g(\bar{x}(t + \theta)))d\theta\end{aligned}$$

onde $x_t = \tau(t)\varphi$ e $\bar{x}_t = \tau(t)\psi$ para $0 \leq t \leq r$.

Assim, raciocinando como na proposição 1.1:

$$\begin{aligned}|H_\varphi(t) - H_\psi(t)| &\stackrel{\text{q.s.}}{\leq} \sum_{j=1}^k \|D_j \phi_f\| \cdot |x(t - r_j) - \bar{x}(t - r_j)| \\ &\quad + \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot \|\phi'_g\| \cdot |x(t + \theta) - \bar{x}(t + \theta)| d\theta\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|H_\varphi - H_\psi\|_2^{[0,r]} &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^k \|x - \bar{x}\|_2^{[-r_j, r-r_j]} + \varepsilon \int_{-r}^0 |a(\theta)| \cdot \|x - \bar{x}\|_2^{[\theta, r+\theta]} d\theta \\
&\leq \varepsilon k \cdot \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, r]} + \varepsilon \|a\|_1 \cdot \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, r]} \\
&\leq 2\varepsilon M \|x - \bar{x}\|_2^{[-r, r]} \\
&\leq 2\varepsilon M (\|\varphi - \psi\|_2 + \|\tau(r)\varphi - \tau(r)\psi\|_2) \\
&\leq 2\varepsilon M (\|\varphi - \psi\|_2 + \|T(r)(\varphi - \psi)\|_2 + \|\Phi_r\varphi - \Phi_r\psi\|_2) \\
&\leq 2\varepsilon M ((M+1)\|\varphi - \psi\|_2 + \sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t\varphi - \Phi_t\psi\|_2).
\end{aligned}$$

Assim

$$\sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t\varphi - \Phi_t\psi\|_2 \leq 2\varepsilon M^2 (M+1) \|\varphi - \psi\|_2 + 2\varepsilon M^2 \sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t\varphi - \Phi_t\psi\|_2$$

e

$$\|\Phi_s\varphi - \Phi_s\psi\|_2 \leq \sup_{t \in [0, r]} \|\Phi_t\varphi - \Phi_t\psi\|_2 \leq \frac{2\varepsilon M^2 (M+1)}{1 - 2\varepsilon M^2} \cdot \|\varphi - \psi\|_2.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, teremos então $\text{Lip } \Phi_r < \delta$, sendo $\delta > 0$ dado no lema II.2.1 para o automorfismo hiperbólico $T(r)$. Então, pelo lema II.2.1, existe um único $h : L_2 \rightarrow L_2$ homeomorfismo com $h - I_{L_2}$ limitado e tal que $T(r)h = h\tau(r)$.

Raciocinando como no final do teorema II.2.3 concluiremos que $T(t)h = h\tau(t) \forall t \in \mathbf{R}$.

■

Definição 1. Para uma equação geral (D) ($f \in \tilde{\mathcal{X}}_1$ e $g \in \mathcal{X}_2$) com equilíbrio $0 \in L_2$ e para cada vizinhança W de 0 em L_2 , definimos os conjuntos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_W &= \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \forall t \geq 0 \text{ e } \tau(t)\varphi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\} \\
\mathcal{U}_W &= \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \forall t \leq 0 \text{ e } \tau(t)\varphi \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\},
\end{aligned}$$

que são chamados respectivamente de conjunto estável e instável do equilíbrio 0 na vizinhança W . São imediatas as observações: $V \subset W \Rightarrow \mathcal{S}_V \subset \mathcal{S}_W$ e $\mathcal{U}_V \subset \mathcal{U}_W$.

$\mathcal{S}_W$ é invariante por $\tau(t)$ para $t \geq 0$ e $\mathcal{U}_W$ é invariante por $\tau(t)$ para $t \leq 0$ e $0 \in \mathcal{S}_W \cap \mathcal{U}_W$, $\forall W$ vizinhança de 0 .

Teorema 2. Para equações (D) e $(D)_0$ como no teorema 1 ($f = L_f + \phi_f \in \tilde{\mathcal{X}}_1$ e $g = L_g + \phi_g \in \mathcal{X}_2$), se $\phi_f(0, \dots, 0) = 0$ e $\phi_g(0) = 0$, então $0 \in L_2$ é equilíbrio de (D) e existe $\delta > 0$ tal que para $W = B_\delta(0)$ (bola de centro $0 \in L_2$ e raio δ) e $\mathcal{S}_W$ e $\mathcal{U}_W$ da definição 1 temos:

$$\mathcal{S}_W = \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \forall t \geq 0\}$$

$$\mathcal{U}_W = \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \forall t \leq 0\}$$

e são gráficos de funções lipchitzianas cujos domínios são respectivamente V^s e V^u vizinhanças de 0 em L_2^s e L_2^u , que são os subespaços de L_2 dados na proposição 1 para a equação $(D)_0$.

Nota 1: Podemos neste caso chamar $\mathcal{S}_W$ e $\mathcal{U}_W$ respectivamente de variedade estável e instável do equilíbrio 0 na vizinhança W . Se estamos no caso em que $(D)_0$ é estável ($L_2^u \equiv 0$) ou no caso em que $(D)_0$ é totalmente instável ($L_2^s \equiv 0$) podemos então concluir que o equilíbrio 0 de (D) é estável ou respectivamente totalmente instável.

Nota 2: Se $\phi'_f(0, \dots, 0) = 0$ e $\phi'_g(0) = 0$, então $(D)_0$ é a linearizada de (D) em torno de $\varphi = 0 \in L_2$. $\varphi = 0$ será então equilíbrio hiperbólico de (D) .

Prova: Segue os passos da observação II.2.2, usando, ao invés do teorema II.2.3, o teorema 1 deste parágrafo, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para a aplicação do raciocínio citado no teorema II.2.2. Notemos que vale para o homeomorfismo h do teorema 1 o resultado do lema II.2.3. ■

Para o segundo teorema de conjugação, vamos considerar X um espaço de Hilbert.

Vamos precisar de um lema:

Lema 1. Sejam X espaço de Hilbert, $G : X^\ell \rightarrow X$ de classe C^1 ($\ell \in \mathbb{N}^*$ arbitrário),

com $G(0) = 0$ e $G'(0) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\bar{\delta} > 0$ e $\phi_g : X^\ell \rightarrow X$ de classe C^1 tais que $\phi_g(p) = G(p)$ para $p \in X^\ell$ com $\|p\| \leq \bar{\delta}$ e ainda $\sup_{p \in X} \|\phi_g(p)\| < \varepsilon$ e $\sup_{p \in X} \|\phi'_g(p)\| < \varepsilon$.

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \bar{\delta} > 0 \mid \|p\| < 2\bar{\delta} \Rightarrow \begin{cases} \|G(p)\| < \varepsilon/5 \\ \|G'(p)\| < \varepsilon/5 \end{cases}$.

Definamos $\phi_g : X^\ell \rightarrow X$ por $\phi_g(p) = G(\lambda(\|p\|) \cdot \frac{p}{\|p\|})$ para $p \neq 0$ e $\phi_g(0) = 0$ onde $\lambda : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ é definida por $\lambda(t) = t$ para $0 \leq t \leq \bar{\delta}$, λ de classe C^1 com $|\lambda'(t)| \leq 1$ e $0 \leq \lambda(t) < 2\bar{\delta}$

e $\lambda(t) = 0$ para $t > 5\bar{\delta}$.

Assim, para $\|p\| < \bar{\delta}$ temos $\phi_g(p) = G(p)$. Logo, ϕ_g é de classe C^1 em X^ℓ .

Para $p \in X^\ell$ temos:

$$\|\lambda(\|p\|) \frac{p}{\|p\|}\| = \lambda(\|p\|) < 2\bar{\delta}$$

logo

$$\|\phi_g(p)\| < \varepsilon/5 \quad \forall p \in X^\ell.$$

Repare que para $\|p\| > 5\bar{\delta}$ temos $\phi_g(p) = 0$.

Agora:

1º) Para $\|p\| < \bar{\delta}$ temos $\phi'_g(p) = G'(p) \Rightarrow \|\phi'_g(p)\| < \varepsilon/5$

2º) Para $\|p\| \geq \bar{\delta}$ temos:

$$\phi'_g(p)(\cdot) = G'(\lambda(\|p\|) \cdot \frac{p}{\|p\|}) \cdot [\lambda'(\|p\|) \cdot \|p\|'(\cdot) \frac{p}{\|p\|} + \lambda(\|p\|) \cdot (-\frac{\|p\|'(\cdot)p}{\|p\|^2} + \frac{I_{X^\ell}(\cdot)}{\|p\|})]$$

Assim

$$\|\phi'_g(p)\| \leq \frac{\varepsilon}{5} (1 + 2\bar{\delta}(\frac{1}{\bar{\delta}} + \frac{1}{\bar{\delta}})) = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Nota: Neste lema é essencial que X seja Hilbert para termos $\| \cdot \| : X^\ell \rightarrow \mathbf{R}_+$ diferenciável fora de $p = 0$.

Teorema 3. Para X espaço de Hilbert, consideremos a equação geral (D) ($f \in \tilde{\mathcal{X}}_1$, $g \in \mathcal{X}_2$) com equilíbrio hiperbólico $\varphi = 0 \in L_2$. Sejam $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ e $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ os fluxos de (D) e da linearizada $(D)'$ em torno do equilíbrio $\varphi = 0$, respectivamente.

Então existe um homeomorfismo $h : L_2 \rightarrow L_2$ com $h - I_{L_2}$ limitada e tal que para cada $s > 0$, $\exists \delta > 0$ | se $\varphi \in \mathcal{G}^+ \subset L_2$ e $\|\varphi\|_\infty < \delta$ então $T(t)h\varphi = h\tau(t)\varphi$ para $t \in [-s, s]$.

Prova: Sejam $F = f - f'(0, \dots, 0) : X^k \rightarrow X$ e $G = g - g'(0) : X \rightarrow X$. Temos $F(0, \dots, 0) = 0$, $F'(0, \dots, 0) = 0$, $G(0) = 0$, $G'(0) = 0$ e F e G são de classe C^1 . Então para $\varepsilon > 0$, podemos aplicar o lema 1 em F e G e obter $\bar{\delta}, \bar{\bar{\delta}} > 0$ e $\phi_f : X^k \rightarrow X$, $\phi_g : X \rightarrow X$ funções de classe C^1

$$\begin{aligned} \text{com } \phi_f(p_1, \dots, p_k) &= F(p_1, \dots, p_k) \text{ para } \|(p_1, \dots, p_k)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \|p_i\|^2} < \bar{\delta} \\ \text{e } \phi_g(p) &= G(p) \text{ para } \|p\| < \bar{\bar{\delta}} \end{aligned}$$

e ainda ϕ_f, ϕ_g limitados e $\|\phi'_f(p_1, \dots, p_k)\| \leq \varepsilon$ e $\|\phi'_g(p)\| \leq \varepsilon \quad \forall p_1, \dots, p_k, p \in X$.

Podemos tomar $\bar{\bar{\delta}}\sqrt{k} < \bar{\delta}$.

Se escolhermos $\varepsilon > 0$ dado no teorema 1 para a equação hiperbólica $(D)'$, teremos, pelo teorema 1, um único homeomorfismo $h : L_2 \rightarrow L_2$ com $h - I_{L_2}$ limitado que conjuga o fluxo $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ de $(D)'$ com o fluxo $\{\tilde{\tau}(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ da equação $(\widetilde{D})$ definida por:

$$\begin{aligned} (\widetilde{D}) : \quad x(t) &= \sum_{j=1}^k D_j f(0, \dots, 0) x(t - r_j) + \phi_f(x(t - r_1), \dots, x(t - r_k)) \\ &\quad + \int_{-r}^0 a(\theta) [g'(0) + \phi_g](x(t + \theta)) d\theta \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

ou seja, $T(t)h = h\tilde{\tau}(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$.

Como sabemos (observação 1.1 e 2.2), o subespaço $\mathcal{G}^+ \subset L_2$ é invariante por $\{\tau(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ e para cada $s > 0$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$, a solução de (D) $x(\varphi)|_{[-s, s]} \in G^+([-s - r, s], X)$ é contínua em relação a $\varphi \in \mathcal{G}^+$. Da continuidade da solução em $\varphi = 0 \in \mathcal{G}^+$ temos que existe $\delta > 0$ tal que se $\varphi \in \mathcal{G}^+$ e $\|\varphi\|_\infty < \delta$ temos que

$$\|x(\varphi)(t+\theta)\| < \bar{\delta} \text{ para } t \in [-s, s] \text{ e } \theta \in [-r, 0]$$

$$\text{e } \sqrt{\sum_{i=1}^k \|x(\varphi)(t_i)\|^2} < \bar{\delta}\sqrt{k} < \bar{\delta} \text{ para } t_1, \dots, t_k \in [-s-r, s].$$

Logo, para $\varphi \in \mathcal{G}^+$ com $\|\varphi\|_\infty < \delta$ a equação $(\widetilde{D})$ é a equação (D) para $t \in [-s, s]$, pois neste caso:

$$\Sigma D_j f(0, \dots, 0)x(t-r_j) + \phi_f(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k)) = f(x(t-r_1), \dots, x(t-r_k))$$

$$\text{e } (g'(0) + \phi_g)(x(t+\theta)) = g(x(t+\theta)).$$

Assim temos neste caso que $T(t)h\varphi = h\tilde{\tau}(t)\varphi = h\tau(t)\varphi$. ■

D. Henry em [Henry 3] estabeleceu uma relação natural entre o espectro de cada operador de evolução $T(t)$ da equação linear (D) do início do parágrafo e suas raízes características.

Supondo X espaço de Hilbert sobre o corpo dos complexos e $a : [-r, 0] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ contínua por partes, temos os seguintes resultados em [Henry 3] para a equação (D) linear:

Teorema 4. $\{T(t) \in \mathcal{L}(L_2) \mid t \in \mathbf{R}\}$ é um C^0 -grupo (grupo de operadores fortemente contínuo), ou seja, para cada $\Delta\varphi \in L_2$ e $t \in \mathbf{R}$, temos

$$\lim_{s \rightarrow t} T(s)\Delta\varphi = T(t)\Delta\varphi.$$

Prova. [Henry 3] – (Lema 2 e Teorema 1). (No lema 2 de [Henry 3] basta substituir $[-r, t_0]$ por $[\tilde{t}_0 - r, t_0]$ com $\tilde{t}_0 < 0$ e considerar $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$).

Teorema 5. O gerador infinitesimal do grupo $\{T(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$

$$G : D(G) \rightarrow L_2 \text{ definido por } G\varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t}$$

é dado por $G\varphi = \varphi'$ para $\varphi \in D(G) \subset L_2$,

$$\text{onde } D(G) = \{\varphi \in W_2^{(1)} \mid \varphi(0) = \sum_{j=1}^k A_j \varphi(-r_j) + \int_{-r}^0 A(\theta) \varphi(\theta) d\theta\} \subset L_2$$

(Recordemos que $W_2^{(1)} = \{\varphi : [-r, 0] \rightarrow X \mid \varphi \text{ é absolutamente contínua e } \varphi' \in L_2\}$.)

Prova. [Henry 3] – (Teorema 2).

Seja, para $\lambda \in \mathbf{C}$, $H(\lambda) = I - \sum_{j=1}^k A_j e^{-\lambda r_j} - \int_{-r}^0 A(\theta) e^{\lambda \theta} d\theta \in \mathcal{L}(X)$. Dizemos que $\lambda \in \mathbf{C}$ é raiz característica de (D) se $\text{Ker } H(\lambda) \neq \{0\}$.

Vemos que $x(t) = e^{\lambda t} p$ (para $p \in X$, $p \neq 0$) é solução de (D) se e somente se $\lambda \in \mathbf{C}$ é raiz característica de (D) .

Desses teoremas, Henry conclui os

Corolário 1. $P_\sigma(G) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \text{Ker } H(\lambda) \neq \{0\}\}$.

($P_\sigma(G)$ é o espectro pontual de G , seus auto-valores.)

Caso $\dim X < \infty$, isso equivale a dizer que $P_\sigma(G) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid h(\lambda) = \det H(\lambda) = 0\}$.

Corolário 2. Se existe $H(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ então $\lambda \in \rho(G)$ ($\rho(G)$ é o resolvente de G) e para $\alpha \in \mathbf{R}$, $\exists c_\alpha \in \mathbf{R} \mid$ se $\text{Re } \lambda \geq \alpha$ e $H(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então

$$\|(\lambda - G)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2)} \leq c_\alpha \|H(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Desses corolários nós podemos concluir que se $\dim X < \infty$, então $\sigma(G) = P_\sigma(G)$ ($\sigma(G)$ é o espectro total de G , $\sigma(G) = \mathbf{C} \setminus \rho(G)$).

Ainda em [Henry 3] temos:

Lema 2. Se $A_j, A(\theta) \in \mathcal{L}(X)$ são operadores compactos (para $j = 1, \dots, k$, $\theta \in [-r, 0]$) então para cada $\lambda \in \mathbf{C}$, $I - H(\lambda)$ é um operador compacto.

Teorema 6. Suponha $A_j, A(\theta)$ operadores compactos (para $j = 1, 2, \dots, k$ e $\theta \in [-r, 0]$).

Para qualquer $\alpha \in \mathbf{R}$ e $t \in \mathbf{R}$, temos:

$$\sigma(T(t)) \cap \{|z| \geq e^{\alpha t}\} = \overline{e^{t \cdot P_\sigma(G)}} \cap \{|z| \geq e^{\alpha t}\}$$

Prova. Para $t > 0$ é o teorema 3 de [Henry 3].

Para $t = 0$ $\sigma(I_{L_2}) = \{e^0\} = \{1\}$.

Para $t < 0$, temos

$$\begin{aligned} z &\in \sigma(T(t)) \text{ com } |z| \geq e^{\alpha t} \\ \Leftrightarrow z^{-1} &\in \sigma(T(-t)) \text{ com } |z^{-1}| \geq e^{\bar{\alpha}(-t)} \text{ (para } \bar{\alpha} \text{ conveniente).} \\ \Leftrightarrow z^{-1} &\in \overline{e^{-tP_\sigma(\sigma)}} \text{ com } |z^{-1}| \geq e^{\bar{\alpha}(-t)} \\ \Leftrightarrow z &\in \overline{e^{tP_\sigma(\sigma)}} \text{ com } |z| \geq e^{\alpha t} \end{aligned}$$

(Lembrar que para um automorfismo L e $z \neq 0$ temos $z \in \rho(L) \Leftrightarrow z^{-1} \in \rho(L^{-1})$, pois $(z - L)^{-1} = z^{-1}L^{-1}(L^{-1} - z^{-1})^{-1}$.)

Teorema 7. Supondo $A_j, A(\theta)$ operadores compactos ($j = 1, \dots, k$ e $\theta \in [-r, 0]$), definimos

$$\ell(s) = \sup_{\operatorname{Re} \lambda = s} r_\sigma(I - H(\lambda)) \quad (\text{onde } r_\sigma(I - H(\lambda)) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|(I - H(\lambda))^n\|^{1/n})$$

é o raio espectral de $I - H(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$.

Se $I - H(\lambda) \neq 0$ então $\ell: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função positiva estritamente decrescente, contínua e log-convexa ($\log \ell(s)$ é convexa).

Prova. [Henry 3]-(Teorema 4).

Terminamos este parágrafo caracterizando o equilíbrio hiperbólico de (D) .

Proposição 2. Se estamos nas condições do teorema 6, podemos dizer que

$$0 \text{ é equilíbrio hiperbólico de } (D) \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \mid P_\sigma(G) \cap \{|\operatorname{Re} \lambda| < \delta\} = \emptyset$$

Prova. Sai do teorema 6.

4. Diferenciabilidade da solução em relação ao dado inicial $\varphi \in L_2$.

Para estudar a diferenciabilidade da solução de (D) em relação $\varphi \in L_2$, nós vamos precisar particularizar a equação (D). A função f não pode deixar de ser linear. Um contra-exemplo (devido ao Professor Ivo Vrtoc da Universidade de Praga) mostra que para uma $f \in \mathcal{X}_1$ não-linear, mesmo de classe C^∞ com todas as derivadas limitadas, nós não temos a diferenciabilidade da solução (e equivalentemente dos operadores de evolução) em relação a $\varphi \in L_2$.

Contra-exemplo 1. Consideremos $X = \mathbf{R}$, $r = 1$, $k = 1$ e $g \equiv 0$.

Temos a equação (D) $x(t) = f(x(t-1))$.

Para $t = 1$ temos então $\tau(1) : L_2 \rightarrow L_2$, $\tau(1)\varphi = x_1(\varphi) = f \circ \varphi \in L_2$.

Se $\tau(1)$ é diferenciável, é fácil ver que para $\varphi, \Delta\varphi \in C_{L_2}$ (contínuas com a norma $\|\cdot\|_2$) nós teremos $(\tau(1)'(\varphi).\Delta\varphi)(\theta) \stackrel{\text{q.s.}}{=} f'(\varphi(\theta))\Delta\varphi(\theta)$ e de maneira geral se $\tau(1)$ é diferenciável, nós devemos ter

$$\lim_{\|\Delta\varphi\|_2 \rightarrow 0} \frac{\|\tau(1)(\varphi + \Delta\varphi) - \tau(1)\varphi - (\tau(1)'\varphi)\Delta\varphi\|_2}{\|\Delta\varphi\|_2} = 0$$

Vamos ver que esse limite não é zero para o caso onde $f(x) = \arctan x$ (uma função C^∞ com todas as derivadas limitadas) e $\varphi \equiv 0$.

Pelo que vimos, quando tomamos $\Delta\varphi \in C_{L_2}$ nós devemos ter, se $\tau(1)$ é diferenciável, que $(\tau(1)'.0).\Delta\varphi = \Delta\varphi$.

Tomemos $\varepsilon_n > 0$ $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e definamos

$$\Delta\varphi_n(\theta) = \begin{cases} \varepsilon_n \cdot n \sqrt{\frac{3n}{2}} (\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) & \text{para } \theta \in [-\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, -\frac{1}{2}] \\ \varepsilon_n n \sqrt{\frac{3n}{2}} (-\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) & \text{para } \theta \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

Temos $\Delta\varphi_n \in C_{L_2}$ e $\|\Delta\varphi_n\|_2 = \varepsilon_n$.

Se $\tau(1)$ é diferenciável, devemos ter então

$$I_n = \frac{\|\tau(1)\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_n\|_2}{\|\Delta\varphi_n\|_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } I_n^2 &= \frac{\|\tau(1)\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_n\|_2^2}{\|\Delta\varphi_n\|_2^2} = \frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{-1}^0 [\arctan(\Delta\varphi_n(\theta)) - \Delta\varphi_n(\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{-\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{-\frac{1}{2}} [\arctan(\varepsilon_n n \sqrt{\frac{3n}{2}}(\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{n})) - \varepsilon_n n \sqrt{\frac{3n}{2}}(\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{n})]^2 d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} [\arctan(\varepsilon_n n \sqrt{\frac{3n}{2}}(-\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{n})) - \varepsilon_n n \sqrt{\frac{3n}{2}}(-\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{n})]^2 d\theta \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{\arctan(\varepsilon_n \sqrt{\frac{3n}{2}}\tau)}{\varepsilon_n \sqrt{n}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\tau \right]^2 d\tau \end{aligned}$$

Se $\varepsilon_n \sqrt{n} \rightarrow \infty$ então $I_n^2 \rightarrow \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \tau^2 d\tau = 1$.

Logo, o operador de evolução $\tau(1) : L_2 \rightarrow L_2$ não pode ser derivável (no sentido de Fréchet) nesse exemplo.

Definição 1. Vamos considerar então a equação

$$(D)^* \quad x(t) = \sum_{j=1}^k A_j x(t - r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta) g(x(t + \theta)) d\theta \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R}$$

onde agora temos $A_j \in \mathcal{L}(X)$ $j = 1, \dots, k$, $g \in \mathcal{X}_2^1$ e $a \in L_\infty([-r, 0], \mathcal{L}(X))$ com

$$\mathcal{X}_2^1 = \{g \in \mathcal{X}_2 \mid g \text{ é de classe } C^2 \text{ e } \|g''\| < \infty\}$$

$(D)^*$ é um caso particular de (D) com

$$f \in \mathcal{L}(X^k, X) \subset \mathcal{X}_1 \quad (\text{ver exemplo 1.1})$$

$$g \in \mathcal{X}_2^1 \subset \mathcal{X}_2 \quad \text{e} \quad a \in L_\infty([-r, 0], \mathcal{L}(X)) \subset L_1([-r, 0], \mathcal{L}(X)).$$

Teorema 1. Para $A_j \in \mathcal{L}(X)$ $j = 1, 2, \dots, k$, $g \in \mathcal{X}_2^1$ e $a \in L_\infty([-r, 0], \mathcal{L}(X))$.

Fixado $t_1 > 0$, a aplicação

$$\begin{aligned} T : L_2 \times L_2([0, t_1], X) &\longrightarrow L_2([0, t_1], X) \\ (\varphi, x) &\longrightarrow T(\varphi, x) \end{aligned}$$

dada por

$$T(\varphi, x)(t) \stackrel{\text{q.s.}}{=} \sum_{j=1}^k A_j x(t - r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta) g(x(t + \theta)) d\theta \quad \text{q.s. em } t \in [0, t_1]$$

(onde aqui consideramos $x_0 = \varphi$) é de classe C^1 .

Prova. Basta mostrar que $T^*(\varphi, x)(t) \stackrel{\text{q.s.}}{=} \int_{-r}^0 a(\theta) g(x(t + \theta)) d\theta$ é de classe C^1 , pois para a parte linear o resultado é evidente.

Para $0 \leq t \leq r$ temos que

$$T^*(\varphi, x)(t) \stackrel{\text{q.s.}}{=} \int_{-r}^{-t} a(\theta) g(\varphi(t + \theta)) d\theta + \int_{-t}^0 a(\theta) g(x(t + \theta)) d\theta$$

e, se $t_1 > r$, para $r \leq t \leq t_1$

$$T^*(\varphi, x)(t) \stackrel{\text{q.s.}}{=} \int_{-r}^0 a(\theta) g(x(t + \theta)) d\theta \quad (\text{não depende de } \varphi).$$

Vamos mostrar que T^* é de classe C^1 em relação a $\varphi \in L_2$. A demonstração de que T^* é de classe C^1 em relação a $x \in L_2([0, t_1], X)$ é completamente análoga.

O candidato para

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi(t) &\stackrel{\text{q.s.}}{=} \int_{-r}^{-t} a(\theta) g'(\varphi(t + \theta)) \Delta \varphi(t + \theta) d\theta \quad \text{q.s. em } t \in [0, r] \\ \text{e } \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi(t) &\stackrel{\text{q.s.}}{=} 0 \quad \text{para } t \geq r, \end{aligned}$$

como era de se esperar.

Para $0 \leq t \leq r$ temos:

$$\begin{aligned} |T^*(\varphi + \Delta \varphi, x)(t) - T^*(\varphi, x)(t) - \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi(t)| &\stackrel{\text{q.s.}}{=} \\ &= \left| \int_{-r}^{-t} a(\theta) [g(\varphi(t + \theta) + \Delta \varphi(t + \theta)) - g(\varphi(t + \theta)) - g'(\varphi(t + \theta)) \Delta \varphi(t + \theta)] d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|g''\| \int_{-r}^{-t} |a(\theta)| \cdot |\Delta \varphi(t + \theta)|^2 d\theta \leq \frac{1}{2} \|g''\| \cdot \|a\|_\infty \|\Delta \varphi\|_2^2 \end{aligned}$$

Assim

$$\|T^*(\varphi + \Delta\varphi, x) - T^*(\varphi, x) - \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi\|_2^{[0, t_1]} \leq \frac{1}{2} \|g''\| \cdot \|a\|_\infty \|\Delta\varphi\|_2^2 \cdot \sqrt{r}$$

e temos

$$\lim_{\|\Delta\varphi\|_2 \rightarrow 0} \frac{\|T^*(\varphi + \Delta\varphi, x) - T^*(\varphi, x) - \frac{\partial T^*(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi\|_2}{\|\Delta\varphi\|_2} = 0$$

e realmente

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} : L_2 \times L_2([0, t_1], X) \rightarrow \mathcal{L}(L_2, L_2([0, t_1], X))$$

dado por

$$\frac{\partial T(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi(t) \stackrel{\text{q.s.}}{=} \sum_{j=1}^k A_j \Delta\varphi(t - r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta) g'(\varphi(t + \theta)) \Delta\varphi(t + \theta) d\theta$$

para $0 \leq t \leq t_1$ (onde aqui colocamos $\Delta\varphi(s) = 0$, $\varphi(s) = 0$ para $s > 0$) é a derivada de Fréchet de $T(\varphi, x)$ em relação a $\varphi \in L_2$.

Falta mostrar que $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ é contínua (repare que $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ é independente de $x \in L_2([0, t_1], X)$).

Temos

$$\left\| \frac{\partial T(\varphi, x)}{\partial \varphi} - \frac{\partial T(\psi, x)}{\partial \varphi} \right\| = \sup_{\substack{\Delta\varphi \in L_2 \\ \|\Delta\varphi\|_2 \leq 1}} \left\| \frac{\partial T(\varphi, x)}{\partial \varphi} \Delta\varphi - \frac{\partial T(\psi, x)}{\partial \varphi} \Delta\varphi \right\|_2^{[0, t_1]}.$$

Para $0 \leq t \leq r$ temos:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial T(\varphi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi(t) - \frac{\partial T(\psi, x)}{\partial \varphi} \Delta\varphi(t) \right| \stackrel{\text{q.s.}}{=} \left| \int_{-r}^{-t} a(\theta) [g'(\varphi(t + \theta)) - g'(\psi(t + \theta))] \Delta\varphi(t + \theta) d\theta \right| \\ & \leq \|g''\| \cdot \|a\|_\infty \int_{-r}^{-t} |\varphi(t + \theta) - \psi(t + \theta)| \cdot |\Delta\varphi(t + \theta)| d\theta \leq \|g''\| \cdot \|a\|_\infty \|\varphi - \psi\|_2 \|\Delta\varphi\|_2. \end{aligned}$$

(Cauchy-Schwartz)

Assim:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial T(\varphi, x)}{\partial \varphi} \Delta\varphi - \frac{\partial T(\psi, x)}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi \right\|_2^{[0, t_1]} \leq \|g''\| \cdot \|a\|_\infty \|\varphi - \psi\|_2 \|\Delta\varphi\|_2 \sqrt{r} \\ \text{e } & \left\| \frac{\partial T(\varphi, x)}{\partial \varphi} - \frac{\partial T(\psi, x)}{\partial \varphi} \right\| \leq \|g''\| \cdot \|a\|_\infty \sqrt{r} \cdot \|\varphi - \psi\|_2 \end{aligned}$$

Teorema 2. Fixado $t_1 > 0$.

A solução de $(D)^*$ (nas condições da definição 1).

$$\begin{aligned} x : L_2 &\longrightarrow L_2([-r, t_1], X) \\ \varphi &\longrightarrow x(\varphi) = x(\varphi, f, g, a)|_{[-r, t_1]} \end{aligned}$$

é de classe C^1 em relação ao dado inicial $\varphi \in L_2$

e $\frac{\partial x}{\partial \varphi} : L_2 \rightarrow \mathcal{L}(L_2, L_2([-r, t_1], X))$ é tal que para $\varphi, \Delta\varphi \in L_2$ a função $y = \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi) \cdot \Delta\varphi \in L_2([-r, t_1], X)$ é a única solução em $L_2([-r, t_1], X)$ da equação variacional linear (em torno da solução de $(D)^*$ $x(\varphi) \in L_2([-r, t_1], X)$)

$$(D)^* \begin{cases} y(t) = \sum_{j=1}^k A_j y(t - r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta) g'(x(t + \theta)) y(t + \theta) d\theta & \text{q.s. para } 0 \leq t \leq t_1 \\ y_0 = \Delta\varphi \end{cases}$$

Prova. Tomemos $\varepsilon > 0 \mid 0 < \varepsilon < r_1$ e $\|g'\| \cdot \int_{-\varepsilon}^0 |a(\theta)| d\theta < 1$.

1) Se $0 < t_1 \leq \varepsilon$.

Para a aplicação T definida no teorema 1, podemos dizer que

$$\|T(\varphi, x) - T(\varphi, y)\|_2 \leq \|g'\| \int_{-\varepsilon}^0 |a(\theta)| d\theta \cdot \|x - y\|_2$$

(conforme teorema 1.1).

Logo $T(\varphi, \cdot) : L_2([-r, t_1], X) \rightarrow L_2([-r, t_1], X)$ é uma família de contrações uniforme em relação a $\varphi \in L_2$. Pelo teorema 1 sabemos que T é de classe C^1 . Logo, o ponto fixo de $T(\varphi, \cdot)$ será de classe C^1 em relação ao parâmetro $\varphi \in L_2$ (ver [Hal: 4], cap.2).

A solução de $(D)^*$ em $L_2([-r, t_1], X)$ é tal que $x(\varphi)|_{[0, t_1]}$ é o ponto fixo de $T(\varphi, \cdot)$ e $x_0(\varphi) = \varphi$. Logo ela é de classe C^1 em relação a $\varphi \in L_2$.

Isso implica que o operador de evolução $\tau(t) : L_2 \rightarrow L_2$ para $0 \leq t \leq t_1 \leq \varepsilon$ é de classe C^1 pois $\tau(t) = \Gamma_t \circ x$ (Γ_t é o operador linear-contínuo que leva x em $x_t \in L_2$).

2) Se $t_1 > 0$ é qualquer.

Afirmamos que $\tau(t_1)$ é de classe C^1 , pois $\tau(t_1) = \tau(\varepsilon)^n \cdot \tau(\sigma)$ com $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sigma < \varepsilon$ e $t_1 = n\varepsilon + \sigma$ e sabemos da parte 1) que $\tau(\varepsilon)$ e $\tau(\sigma)$ são de classe C^1 .

A solução de $(D)^* : x : L_2 \rightarrow L_2([-r, t_1], X)$ é então de classe C^1 em relação a $\varphi \in L_2$, pois

$$x(\varphi) = \left[\sum_{j=0}^m \gamma_j \circ \tau(t_1 - jr) + \gamma_{m+1} \right](\varphi)$$

onde m é o maior natural tal que $t_1 - mr > 0$ e

$$\gamma_j : L_2 \rightarrow L_2([-r, t_1], X) \quad (j = 0, 1, \dots, m+1)$$

são as funções lineares-contínuas definidas por

$$\begin{cases} \gamma_j \psi(t) = \psi(t - t_1 + jr) & \text{q.s. em } t \in [t_1 - (j+1)r, t_1 - jr] \\ \gamma_j \psi(t) = 0 & \text{q.s. em } t \in [-r, t_1] \setminus [t_1 - (j+1)r, t_1 - jr] \end{cases}$$

para $j = 0, 1, \dots, m$, e

$$\begin{cases} \gamma_{m+1} \psi(t) = \psi(t) & \text{q.s. em } t \in [-r, t_1 - (m+1)r] \\ \gamma_{m+1} \psi(t) = 0 & \text{q.s. em } t \in [t_1 - (m+1)r, t_1] \end{cases}$$

Falta mostrar que $y = \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi) \cdot \Delta \varphi$ é a única solução de $(D)^{**}$ em $L_2([-r, t_1], X)$.

A existência e unicidade de solução de $(D)^{*'}$ em $L_2([-r, t_1], X)$ a gente mostra como no teorema 1.1. Apesar de $(D)^{*'}$ não ser autônoma, já vimos que o problema é bem posto, ou seja, no teorema 1, vimos que a função

$$x \in L_2([-r, t_1], X) \rightarrow \tilde{g}_x^t \in \mathcal{L}(L_2([-r, t_1], X), L_2([0, t_1], X))$$

dada por

$$\tilde{g}_x^t y(t) \stackrel{\text{q.s.}}{=} \int_{-r}^0 a(\theta) g'(x(t+\theta)) y(t+\theta) d\theta$$

está bem definida e é contínua.

Como

$$|g'(x(t+\theta))y(t+\theta)| \leq \|g'\| \cdot |y(t+\theta)|$$

podemos usar as mesmas contrações do teorema 1.1 para provar a existência e unicidade de solução de $(D)^{**}$ em $L_2([-r, t_1], X)$.

Como

$$x(\varphi)|_{[0,t_1]} = T(\varphi, x(\varphi)|_{[0,t_1]}),$$

derivando ambos os membros em relação a $\varphi \in L_2$ e aplicando a $\Delta\varphi \in L_2$, obtemos:

$$y|_{[0,t_1]} = \frac{\partial T(\varphi, x(\varphi))}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi + \frac{\partial T(\varphi, x(\varphi))}{\partial x} y|_{[0,t_1]},$$

ou seja,

$$y(t) \stackrel{\text{q.s.}}{=} \sum_{j=1}^k A_j y(t - r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta) g'(x(t + \theta)) y(t + \theta) d\theta \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \text{com } y_0 = \Delta\varphi. \blacksquare$$

A solução para trás de $(D)^*$ também é diferenciável.

Observação 1. Para termos a solução para trás em $(D)^*$ nós precisamos que

$f \in \mathcal{L}(X^k, X) \cap \widetilde{\mathcal{X}}_1$, e isso é equivalente a

$$f \in \mathcal{L}(X^k, X) \quad \text{e} \quad A_k = D_k f \in \mathcal{L}(X) \quad \text{é inversível com } A_k^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

(e daí podemos tomar na condição $(\widetilde{1})$, $L = A_k^{-1}$ e $c = 0$) (ver proposição I-7.9).

Teorema 3. Para $A_j \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, \dots, k$ com $A_k^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $g \in \mathcal{X}_2^1$ e $a \in L_\infty([-r, 0], \mathcal{L}(X))$.

Fixado $\tilde{t}_0 < 0$, a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{T} : L_2 \times L_2([\tilde{t}_0 - r, -r], X) &\longrightarrow L_2([\tilde{t}_0 - r, -r], X) \\ (\varphi, x) &\longrightarrow \tilde{T}(\varphi, x) \end{aligned}$$

dada por

$$\tilde{T}(\varphi, x)(t - r) \stackrel{\text{q.s.}}{=} x(t - r) - A_k^{-1} \left[\sum_{j=1}^k A_j x(t - r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta) g(x(t + \theta)) d\theta - x(t) \right]$$

q.s. em $t \in [\tilde{t}_0, 0]$ (onde aqui consideramos $x_0 = \varphi$) é de classe C^1 .

Prova. A prova é idêntica à prova do teorema 1. (Basta mostrar que $\tilde{T}^*(\varphi, x)(t-r) \stackrel{q.s.}{=} A_k^{-1} \cdot \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta$ é de classe C^1 , e assim por diante.)

Teorema 4. Fixado $\tilde{t}_0 < 0$.

A solução de $(D)^*$ (nas condições da definição 1 e da observação 1)

$$\begin{aligned} x : L_2 &\longrightarrow L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X) \\ \varphi &\longrightarrow x(\varphi) = x(\varphi, f, g, a)|_{[\tilde{t}_0 - r, 0]} \end{aligned}$$

é de classe C^1 em relação ao dado inicial $\varphi \in L_2$, e $\frac{\partial x}{\partial \varphi} : L_2 \rightarrow \mathcal{L}(L_2, L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X))$ é tal que para $\varphi, \Delta\varphi \in L_2$ a função $y = \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi) \cdot \Delta\varphi \in L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$ é a única solução em $L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$ da equação variacional linear (em torno da solução de $(D)^*$, $x(\varphi) \in L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$)

$$(D)^* \begin{cases} y(t) = \sum_{j=1}^k A_j y(t-r_j) + \int_{-r}^0 a(\theta)g'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta \text{ q.s. para } \tilde{t}_0 \leq t \leq 0 \\ y_0 = \Delta\varphi \end{cases}$$

Prova. Tomemos $\varepsilon > 0 \mid \varepsilon < r_k - r_{k-1} = r - r_{k-1}$ e $\|g'\| \cdot \int_{-r}^{-r+\varepsilon} |a(\theta)|d\theta < \frac{1}{\|A_k^{-1}\|}$.

1) Se $-\varepsilon \leq \tilde{t}_0 < 0$.

Para a aplicação $\tilde{T}$ definida no teorema 3, podemos dizer que

$$\|\tilde{T}(\varphi, x) - \tilde{T}(\varphi, y)\|_2 \leq (\|A_k^{-1}\| \cdot \|g'\| \cdot \int_{-r}^{-r+\varepsilon} |a(\theta)|d\theta) \cdot \|x - y\|_2$$

(conforme teorema 2.1, onde aqui temos $L = A_k^{-1}$ e $c = 0$).

Logo, $\tilde{T}(\varphi, \cdot) : L_2([\tilde{t}_0 - r, -r], X) \rightarrow L_2([\tilde{t}_0 - r, -r], X)$ é uma família de contrações uniforme em relação a $\varphi \in L_2$. Pelo teorema 3, sabemos que $\tilde{T}$ é de classe C^1 . Logo, o ponto fixo de $\tilde{T}(\varphi, \cdot)$ será de classe C^1 em relação ao parâmetro $\varphi \in L_2$ (ver [Hale 4], cap. 2).

A solução de $(D)^*$ em $L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$ é tal que $x(\varphi)|_{[\tilde{t}_0 - r, -r]}$ é o ponto fixo de $\tilde{T}(\varphi, \cdot)$ e $x_0(\varphi) = \varphi$. Logo, ela é de classe C^1 em relação a $\varphi \in L_2$. Isso implica que

o operador de evolução $\tau(t) : L_2 \rightarrow L_2$ para $-\varepsilon \leq \tilde{t}_0 \leq t \leq 0$ é de classe C^1 , pois $\tau(t) = \Gamma_t \circ x$ (Γ_t como no teorema 2).

2) Se $\tilde{t}_0 < 0$ é qualquer.

Afirmamos que $\tau(\tilde{t}_0)$ é de classe C^1 , pois $\tau(\tilde{t}_0) = \tau(-\varepsilon)^n \tau(\sigma)$, com $n \in \mathbb{N}$, $-\varepsilon < \sigma \leq 0$ e $\tilde{t}_0 = -n\varepsilon + \sigma$ e pela parte 1) temos que $\tau(-\varepsilon)$ e $\tau(\sigma)$ são de classe C^1 .

Concluimos, então, que a solução de $(D)^* x : L_2 \rightarrow L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$ é de classe C^1 em relação a $\varphi \in L_2$ por um raciocínio análogo ao do teorema 2.

$(x(\varphi)) = [\sum_{j=0}^m \tilde{\gamma}_j \circ \tau(\tilde{t}_0 + rj) + \tilde{\gamma}_{m+1}](\varphi)$, onde m é o maior natural tal que $\tilde{t}_0 + mr < 0$ e as $\tilde{\gamma}_j : L_2 \rightarrow L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$ para $j = 0, 1, \dots, m+1$, lineares-contínuas definidas convenientemente).

Falta então mostrar que $y = \frac{\partial x(\varphi)}{\partial \varphi} \Delta \varphi$ é a única solução de $(D)^{*'} em $L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$.$

Análogo ao que foi comentado no teorema 2 sobre a existência e unicidade de solução de $(D)^{*}$

em $L_2([-r, t_1], X)$, podemos dizer que, apesar de $(D)^{*}$ não ser autônoma, o fato de $|g'(x(t + \theta))y(t + \theta)| \leq \|g'\| \cdot |y(t + \theta)|$ (q.s. em $\tilde{t}_0 \leq t \leq 0$) faz com que possamos nos utilizar das mesmas contrações do teorema 2.1 para provar a existência e unicidade de solução de $(D)^{*}$ em $L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$.

Quando derivamos ambos os membros de $x(\varphi)|_{[\tilde{t}_0 - r, -r]} = \tilde{T}(\varphi, x(\varphi)|_{[\tilde{t}_0 - r, -r]})$ e de $x_0 = \varphi$ em relação a $\varphi \in L_2$ e aplicamos em $\Delta \varphi \in L_2$ nós chegamos à conclusão de que y satisfaz $(D)^{*}$ em $L_2([\tilde{t}_0 - r, 0], X)$. ■

Tomemos $(D)^*$ como na definição 1 e observação 1.

O grupo de operadores de evolução $\tau(t) : L_2 \rightarrow L_2$ para $t \in \mathbb{R}$ da definição 2.2 será nesse caso um grupo de difeomorfismos de L_2 (teoremas 2 e 4).

Suponhamos agora que $g(0) = 0$.

Assim, $x(0) = 0 \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$ e $\varphi = 0 \in L_2$ será equilíbrio de $(D)^*$. $(\tau(t).0 = 0$,

$\forall t \in \mathbf{R}$).

A equação variacional linear de $(D)^*$ em torno do equilíbrio $\varphi = 0$ será a equação linear autônoma:

$$(D)_0^{*'} : \quad y(t) = \sum_{j=1}^k A_j y(t - r_j) + \int_{-r}^0 A(\theta) y(t + \theta) d\theta \quad \text{q.s. em } t \in \mathbf{R}$$

onde $A(\theta) = a(\theta).g'(0) \in \mathcal{L}(X)$ para $\theta \in [-r, 0]$.

Nesse caso, $(D)_0^{*'}$ é um caso particular de equação $(D)^*$ e teremos o seu grupo de operadores de evolução $T(t) : L_2 \rightarrow L_2$ para $t \in \mathbf{R}$, conforme a definição 2.2 e que, segundo proposição 2.1 e observação 2.3, é um grupo de isomorfismos lineares de L_2 ($T(t) \in \mathcal{L}(L_2)$ com $T(t)^{-1} = T(-t) \in \mathcal{L}(L_2)$).

Observação 2. Dos teoremas 2 e 4 nós concluímos que

$$\tau(t)'(0) = T(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Teorema 5. Para $(D)^*$ temos:

Se $0 \in L_2$ é equilíbrio hiperbólico de $(D)^*$, então, para cada $t > 0$, existe um homeomorfismo $\Gamma_t : L_2 \rightarrow L_2$ com $\Gamma_t - I_{L_2}$ limitado (I_{L_2} é identidade de L_2) e existe W_t vizinhança de 0 em L_2 tal que $\Gamma_t \circ \tau(t) = T(t) \circ \Gamma_t$ em W_t .

Prova. É idêntica à prova do teorema II-2.1, usando os lemas II-2.1 e II-2.2. Troca-se $\mathcal{G}^+$ por L_2 e usa-se a observação 2.

Lema 1. Nas hipóteses do teorema 5, para cada $t > 0$ temos $\Gamma_t(0) = 0$.

Prova. Idêntica à do lema II-2.3.

Observação 3. Para $(D)^*$ tal que $0 \in L_2$ é equilíbrio hiperbólico, vale que para

$W \subset W_t$ (W vizinhança do 0 em L_2 e W_t dados no teorema 5 para algum $t > 0$) temos que $S_W \cap \mathcal{U}_W = \{0\}$ (S_W e $\mathcal{U}_W$ dados na definição 3.1).

Teorema 6. Para $(D)^*$ com equilíbrio hiperbólico $0 \in L_2$, temos:

Existe $\delta > 0$ tal que para $W = B_\delta(0)$ (bola de centro $0 \in L_2$ e raio δ) temos:

$$S_W = \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \quad \forall t \geq 0\}$$

$$\text{e } \mathcal{U}_W = \{\varphi \in W \mid \tau(t)\varphi \in W \quad \forall t \leq 0\}$$

e são gráficos de funções lipchitzianas cujos domínios são respectivamente V^s e V^u vizinhanças de 0 em L_2^s e L_2^u .

(S_W e $\mathcal{U}_W$ dados na definição 3.1 e L_2^s e L_2^u dados na proposição 3.1 para $(D)_0^{*'}.$)

Prova: É idêntica à prova do Teorema II.2.2 usando o lema 1. ■

Como consequência imediata do teorema 6, do teorema 3.6 e corolário 3.1, temos os corolários:

Corolário 1. Se $(D)_0^{*'}$ é estável, ou seja, se $r_\sigma(T(t)) < 1$ para $t > 0$ (e daí $L_2^s \equiv L_2$ e $L_2^u \equiv 0$), então o equilíbrio $0 \in L_2$ de $(D)^*$ é estável. Se estamos nas condições do teorema 3.6, isso acontece se existe $\delta > 0$ tal que todas as raízes características de $(D)_0^{*'}$ têm parte real menor ou igual a $-\delta$.

Corolário 2. Se $(D)_0^{*'}$ é totalmente instável, ou seja, se $r_\sigma(T(t)) < 1$ para $t < 0$ (e daí $L_2^s \equiv 0$ e $L_2^u \equiv L_2$), então o equilíbrio $0 \in L_2$ de $(D)^*$ é totalmente instável. Se estamos nas condições do teorema 3.6, isso acontece se existe $\delta > 0$ tal que todas as raízes características de $(D)_0^{*'}$ têm parte real maior ou igual a δ .

APÊNDICE 1

A Equação do Tipo Neutro Linear para $t \leq t_0$ vista como Equação de Volterra-Stieltjes

Dados $r > 0$ e X espaço de Banach, fixado $t_0 \in \mathbf{R}$, seja, como em I-7, a equação linear

$$(N): \quad \frac{d}{dt}(x(t) - f(t, x_t)) = g(t, x_t) \quad \text{para } t \leq t_0$$

para $f, g: \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$

com $f(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \varphi(\theta) + H(t)$

e $g(t, \varphi) = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \varphi(\theta) \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+$

f e g satisfazendo as condições dadas na proposição I-7.5, ou seja,

para g valem $(0)_{L_1}$, (1) e $(2)_{L_1}$

para f valem $(0)_+$, (1) , (2) e temos bem definido $A(t) = \mu(t, -r) - \mu(t, -r^+)$.

$A(t)$ inversível e bicontínuo, $\forall t \in \mathbf{R}$.

Seja $\tilde{\mu}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X)$ dado por $\tilde{\mu}(t, \theta) = \mu(t, \theta)$ para $\theta > -r$ e $\tilde{\mu}(t, \theta) = \mu(t, -r^+)$ para $\theta \leq -r$.

Vamos relacionar a equação (N) com a equação de Volterra-Stieltjes $(\bar{K}_N)$ dada na proposição I-7.5. Para $t \leq t_0$ temos

$$(N) \quad \begin{aligned} x(t) - \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) x(t + \theta) - H(t) &= x(t_0) - \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t_0, \theta) x(t_0 + \theta) - H(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{-r}^0 d_\theta \eta(\tau, \theta) x(\tau + \theta) d\tau \end{aligned}$$

$$(N) \quad \begin{aligned} x(t) - \int_{t-r}^t d_s \mu(t, s-t) x(s) + \int_t^{t_0} \int_{\tau-r}^\tau d_s \eta(\tau, s-\tau) x(s) d\tau + \int_{t_0-r}^{t_0} d_s \mu(t_0, s-t_0) x(s) \\ = H(t) - H(t_0) + x(t_0) \end{aligned}$$

$$(N) \quad x(t) - \int_{t-r}^{t_0} d_s [\mu(t, s-t) - \mu(t_0, s-t_0)] x(s) + \int_t^{t_0} \int_{t-r}^{t_0} d_s \eta(\tau, s-\tau) x(s) d\tau \\ = x(t_0) + H(t) - H(t_0)$$

Como em [LF] (proposições II-1.8, II-1.9 e II-1.10), concluímos a:

Proposição 1. (Fórmula de Bray) Para $t \leq t_0$ vale:

$$\int_t^{t_0} \int_{t-r}^{t_0} d_s \eta(\tau, s-\tau) x(s) d\tau = \int_{t-r}^{t_0} d_s \int_t^{t_0} \eta(\tau, s-\tau) d\tau \cdot x(s) \quad \forall x \in G([t-r, t_0], X)$$

Assim, pensando em $x \in G^+([-\infty, t_0], X)$, temos, para $t \leq t_0$:

$$(N): x(t) - x(t_0) + \int_{t-r}^{t_0} d_s \left[\int_t^{t_0} \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \mu(t, s-t) + \mu(t_0, s-t_0) \right] x(s) = H(t) - H(t_0).$$

$$\text{Como } \mu(t, s-t) = \tilde{\mu}(t, s-t) + A(t) \chi_{] - \infty, -r]}(s-t)$$

$$\text{e para } t < t_0 \text{ temos: } x(t) = \int_{t-r}^{t_0} d_s (\chi_{]t, t_0]}(s)) x(s)$$

temos para $t < t_0$:

$$(N) \quad A(t)x(t-r) - x(t_0) + \int_{t-r}^{t_0} d_s \left[\int_t^{t_0} \eta(\tau, s-\tau) d\tau \right. \\ \left. - \tilde{\mu}(t, s-t) + \mu(t_0, s-t_0) + \chi_{]t, t_0]}(s) \right] x(s) = H(t) - H(t_0)$$

Supondo $x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}^+$ chegamos a:

$$(N) \quad x(t-r) + \int_{t_0}^{t-r} d_s [-A(t)^{-1} \cdot \left(\int_t^{t_0} \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \tilde{\mu}(t, s-t) + \mu(t_0, s-t_0) + \chi_{]t, t_0]}(s) \right)] x(s) = \overline{F}(t-r)$$

onde $\overline{F}(t-r) = A(t)^{-1} [H(t) - H(t_0) + \varphi(0)]$ para $t < t_0$.

Assim, podemos dizer que para $x \in G^+([-\infty, t_0], X)$

x satisfaz (N) para $t \leq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}^+$ se e somente se

$$x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}^+ \text{ e } x(t) + \int_{t_0}^t d_s {}^{t_0} \overline{K}(t, s) x(s) = \overline{F}(t) \text{ para } t < t_0 - r$$

onde

$${}^{t_0} \overline{K}(t, s) = -A(t+r)^{-1} \left(\int_{t+r}^{t_0} \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \tilde{\mu}(t+r, s-t-r) + \mu(t_0, s-t_0) + \chi_{]t+r, t_0]}(s) \right)$$

para $t < t_0 - r$ e $t \leq s \leq t_0$.

Definimos, então, o núcleo normalizado na diagonal: ${}^{t_0}\overline{K} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X)$ por

$${}^{t_0}\overline{K}(t, s) = {}^{t_0}\overline{\overline{K}}(t, s) - {}^{t_0}\overline{\overline{K}}(t, t) \text{ para } t < t_0 - r \text{ e } t \leq s \leq t_0$$

$$\text{e } {}^{t_0}\overline{K}(t, s) = 0 \quad \text{caso contrário.}$$

E temos então demonstrada a proposição I-7.5.

Supondo agora

$$A(\cdot)^{-1} \in G^+(\mathbf{R}, \mathcal{L}(X))$$

temos que os núcleos ${}^{t_0}\overline{K} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X)$ (para cada $t_0 \in \mathbf{R}$) definidos acima, e o núcleo $\overline{K} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(X)$, definido por

$$\begin{aligned} \overline{K}(t, s) = & -A(t+r)^{-1} \left(\int_{t+r}^{s+r} [\eta(\tau, s-\tau) - \eta(\tau, -r)] d\tau - \tilde{\mu}(t+r, s-t-r) \right. \\ & \left. + \tilde{\mu}(t+r, -r) + \chi_{[t+r, \infty[}(s) \right) \quad \text{p/ } t \leq s \end{aligned}$$

$$\text{e } \overline{K}(t, s) = 0 \quad \text{p/ } t \geq s$$

são tais que, para cada $\tilde{t}_0 < t_0$

$${}^{t_0}\overline{K}|_{{}^{t_0}\Gamma_{\tilde{t}_0}^{t_0}} \text{ e } \overline{K}|_{{}^{t_0}\Gamma_{\tilde{t}_0}^{t_0}} \in G_0^{+\sigma}.SV^u({}^{t_0}\Gamma_{\tilde{t}_0}^{t_0}, \mathcal{L}(X))$$

(Verifica-se isso diretamente, com o auxílio das proposições I-7.2 e I-7.3).

Repare também que ${}^{t_0}\overline{K}(t, s) = \overline{K}(t, s)$ para $t \leq s \leq t_0 - r$.

Proposição 2. (Proposição I-7.10).

Para $f, g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ com

$$\begin{aligned} f(t, \varphi) &= \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) \varphi(\theta) + H(t) \\ g(t, \varphi) &= \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \varphi(\theta) \end{aligned}$$

tal que para cada $t_0 \in \mathbf{R}$

$$f|_{]-\infty, t_0] \times \mathcal{G}_0^+} \in \tilde{\mathcal{X}}_{t_0}^+ \quad \text{e} \quad g \in Y$$

e ainda

$$A(\cdot)^{-1} \in G^+(\mathbf{R}, \mathcal{L}(X))$$

temos que para cada $\tilde{t}_0 < t_0$ o núcleo ${}^{t_0}\overline{K}$ definido acima é tal que vale:

a') Para cada $c \in]\tilde{t}_0 - r, t_0]$, $\exists \delta > 0 \mid \sup_{c-\delta \leq t < c} SV_{[t, c]}[{}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot)] < 1$

b') Para cada $d \in [\tilde{t}_0 - r, t_0[$, $\exists \delta > 0 \mid \sup_{d \leq t < d+\delta} SV_{[t, d+\delta]}[{}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot)] < 1$.

e ainda vale a propriedade (p-3), ou seja, $\forall t \in]\tilde{t}_0 - r, t_0]$ o operador $I_X - {}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot)$ é inversível e bicontínuo.

Assim sendo, como a') e b') implicam naturalmente nas propriedades a) e b) do teorema I-7.3, temos que, pelo teorema I-7.3, as propriedades (p-1), (p-2) e (p-3) são equivalentes. A conclusão final é que para ${}^{t_0}\overline{K}|_{\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}}$ temos um resolvente em $G_I^{+\sigma}SV^u(\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}, \mathcal{L}(X))$ garantido por (p-2) do teorema I-7.2 e pela proposição I-7.6. (Lembrar aqui que $\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0} = {}^{t_0}\Gamma_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}$ dado na proposição I-7.1.)

Prova. Sejam $\tilde{t}_0 < t_0$

Para $c \in]t_0 - r, t_0]$ a') é óbvio (basta tomar $\delta > 0 \mid c - \delta > t_0 - r$ e aí ${}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot) \equiv 0$ para $c - \delta \leq t < d$).

Para $c \in]\tilde{t}_0 - r, t_0 - r]$, tomando $\delta > 0$, $\delta < r$ e $c - \delta > \tilde{t}_0 - r$ temos que para

$$c - \delta \leq t < c \text{ e } t \leq s < c:$$

$$\begin{aligned} {}^{t_0}\overline{K}(t, s) &= \overline{K}(t, s) = -A(t+r)^{-1} \left(\int_{t+r}^{s+r} [\eta(\tau, w-\tau) - \eta(\tau, -r)] d\tau \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mu}(t+r, s-t-r) + \tilde{\mu}(t+r, -r) + \chi_{[t+r, t_0]}(s) \right) \\ &= -A(t+r)^{-1} \left(\int_{t+r}^{c+r} [\eta(\tau, s-\tau) - \eta(\tau, -r)] d\tau - \tilde{\mu}(t+r, s-t-r) + \tilde{\mu}(t+r, -r) \right) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} SV_{[t, c]}[{}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot)] &\leq SV_{[t, c]}[{}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot)] = \\ &= \sup_{d \in \mathcal{D}_{[t, c]}} \sup_{\substack{p_i \in X \\ \|p_i\| \leq 1}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [-A(t+r)^{-1} \left(\int_{t+r}^{c+r} [\eta(\tau, s_i - \tau) - \eta(\tau, s_{i-1} - \tau)] d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{\mu}(t+r, s_i - t - r) + \tilde{\mu}(t+r, s_{i-1} - t - r) \right)] p_i \right\| \\ &\leq \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup_{\substack{p_i \in X \\ \|p_i\| \leq 1}} M \cdot \left(\int_{t+r}^{c+r} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\eta(\tau, s_i - \tau) - \eta(\tau, s_{i-1} - \tau)] p_i \right\| d\tau \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{i=1}^{|d|} (\tilde{\mu}(t+r, s_i - t - r) - \tilde{\mu}(t+r, s_{i-1} - t - r)) p_i \right\| \right) \\ &\quad \text{(onde } M = \sup_{t \in [\tilde{t}_0 - r, t_0 - r]} \|A(t+r)^{-1}\|) \\ &\leq M \cdot \left(\int_{t+r}^{c+r} m_g(\tau) d\tau + SV_{[-r, c-t-r]}[\tilde{\mu}(t+r, \cdot)] \right) \quad (m_g \text{ dado em (2)}_{L_1} \text{ p/ } g) \\ &\leq M \cdot \left(\int_{c+r-\delta}^{c+r} m_g(\tau) d\tau + SV_{[-r, -r+\delta]}[\tilde{\mu}(t+r, \cdot)] \right) \end{aligned}$$

Podemos então tomar $\delta > 0 \mid \int_{c+r-\delta}^{c+r} m_g(\tau) d\tau < \frac{1}{2M}$ e $SV_{[-r, -r+\delta]}[\tilde{\mu}(t+r, \cdot)] < \frac{1}{2M}$,
 $\forall t \in [\tilde{t}_0 - r, t_0 - r]$ (pela condição (3)) e temos a').

Do mesmo modo, para $d \in [t_0 - r, t_0]$, b') é óbvio (basta tomar $\delta > 0 \mid d + \delta < t_0$ e
 aí ${}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot) \equiv 0$ para $d \leq t < d + \delta$).

Para $d \in [\tilde{t}_0 - r, t_0 - r]$, tomando $\delta > 0$, $\delta < r$ e $d + \delta < t_0 - r$, vem que para
 $d \leq t < d + \delta$ e $t \leq s < d + \delta$

$${}^{t_0}\overline{K}(t, s) = \overline{K}(t, s) = -A(t+r)^{-1} \left[\int_{t+r}^{d+r+\delta} [\eta(\tau, s-\tau) - \eta(\tau, -r)] d\tau - \tilde{\mu}(t+r, s-t-r) + \tilde{\mu}(t+r, -r) \right]$$

e analogamente concluímos que

$$SV_{[t, d+\delta]}[{}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot)] \leq M \left(\int_{d+r}^{d+r+\delta} m_g(\tau) d\tau + SV_{[-r, -r+\delta]}[\tilde{\mu}(t+r, \cdot)] \right)$$

e podemos tomar $\delta > 0$ tal que $\sup_{d \leq t < d+\delta} SV_{[t, d+\delta]}[{}^{t_0}\overline{K}(t, \cdot)] < 1$ e vale b').

Pelo teorema I-7.3, temos que para ${}^{t_0}\overline{K}_{|\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}}$ as propriedades $(p-1)$, $(p-2)$ e $(p-3)$ são equivalentes.

Mas vale $(p-3)$ para ${}^{t_0}\overline{K}_{|\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}}$, pois vamos mostrar que ${}^{t_0}\overline{K}(t^{\cdot}, t) = 0$.

Para cada $p \in X$, temos ${}^{t_0}\overline{K}(t^{\cdot}, t)p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} {}^{t_0}\overline{K}(t-\varepsilon, t)p$ e se $t_0 - r < t \leq t_0$ temos que ${}^{t_0}\overline{K}(t-\varepsilon, t) = 0$ para ε suficientemente pequeno.

Para $t \leq t_0 - r$,

$${}^{t_0}\overline{K}(t^{\cdot}, t)p =$$

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} -A(t-\varepsilon+r)^{-1} \left(\int_{t-\varepsilon+r}^{t+r} [\eta(\tau, t-\tau) - \eta(\tau, -r)] p d\tau - [\tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, \varepsilon-r) - \tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, -r)] p \right) & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -A((t+r)^{-})^{-1} & 0 & 0 \end{array}$$

e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, -r+\varepsilon) + \tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, -r)]p = 0$, pois:

$$\begin{aligned} \|[\tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, -r+\varepsilon) - \tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, -r)]p\| &\leq \|\tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, -r+\varepsilon) - \tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, -r)\| \cdot \|p\| \\ &\leq \|p\| SV_{[-r-r+\varepsilon]}[\tilde{\mu}(t-\varepsilon+r, \cdot)] \leq \|p\| \sup_{\tilde{t}_0-r \leq t \leq t_0-r} SV_{[-r, -r+\varepsilon]}[\tilde{\mu}(t+r, \cdot)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0 \text{ por } \widetilde{(3)}. \end{aligned}$$

■

De modo análogo ao que foi feito em [LF] cap. II-3, obtemos os núcleos resolventes

$${}^{t_0}\overline{R} : \Gamma^{t_0} \rightarrow \mathcal{L}(X) \quad \text{e} \quad \overline{R} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

$$(\Gamma^{t_0} = \{(t, s) \in \mathbf{R}^2 \mid t \leq s \leq t_0\} \quad \text{e} \quad \tilde{\Gamma} = \{(t, s) \in \mathbf{R}^2 \mid t \leq s\})$$

tais que para $\tilde{t}_0 < t_0$

$${}^{t_0}\overline{R}_{|\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}} \in G_I^{+\sigma} SV^u(\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}_0-r}^{t_0}, \mathcal{L}(X))$$

é o resolvente dado em (p-2) para ${}^{t_0}\bar{K}|_{\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}}$ e

$$\bar{R}|_{\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}} \in G_I^{+\sigma} SV^u(\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}, \mathcal{L}(X))$$

é o resolvente dado em (p-2) para $\bar{K}|_{\tilde{\Gamma}_{t_0-r}^{t_0}}$,

e temos então

$${}^{t_0}\bar{R}|_{\Gamma^{t_0-r}} = \bar{R}|_{\Gamma^{t_0-r}} \quad (\text{pois } {}^{t_0}\bar{K}|_{\Gamma^{t_0-r}} = \bar{K}|_{\Gamma^{t_0-r}}).$$

Vamos aplicar a fórmula (R^*) do teorema I-7.2 nesses resolventes. Temos:

Proposição 3.

$$(\bar{R}-1) \quad {}^{t_0}\bar{R}(t, s) = I_X \quad \text{para } t_0 - r \leq t \leq s \leq t_0 \quad (I_X \text{ é a identidade de } X)$$

$$(\bar{R}-2) \quad \begin{aligned} & {}^{t_0}\bar{R}(t, s) - I_X + A(t+r)^{-1} \left[\int_{t+r}^{t_0} \int_{\sigma-r}^s d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) d\sigma \right. \\ & \left. - \int_t^s d_\tau [\tilde{\mu}(t+r, \tau - t - r) - \mu(t_0, \tau - t_0)] {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) \right] = 0 \\ & \text{p/ } t < t_0 - r \leq s \leq t + r \end{aligned}$$

$$(\bar{R}-3) \quad \begin{aligned} & {}^{t_0}\bar{R}(t, s) - I_X + A(t+r)^{-1} \left[{}^{t_0}\bar{R}(t+r, s) + \int_{t+r}^{t_0} \int_{\sigma-r}^s d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) d\sigma \right. \\ & \left. - \int_t^s d_\tau [\tilde{\mu}(t+r, \tau - t - r) - \mu(t_0, \tau - t_0)] {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) \right] = 0 \\ & \text{p/ } \max\{t_0 - r, t + r\} < s \leq t_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{R} - 4) \quad & \bar{R}(t, s) - I_X + A(t+r)^{-1} \left[\int_{t+r}^{s+r} \int_{\sigma-r}^s d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \bar{R}(\tau, s) d\sigma \right. \\
& \left. - \int_t^s d_\tau \tilde{\mu}(t+r, \tau - t - r) \bar{R}(\tau, s) \right] = 0 \\
& p/ \ t \leq s \leq \min\{t_0 - r, t + r\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{R} - 5) \quad & \bar{R}(t, s) - I_X + A(t+r)^{-1} \cdot [\bar{R}(t+r, s) + \int_{t+r}^{s+r} \int_{\sigma-r}^s d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \bar{R}(\tau, s) d\sigma \\
& - \int_t^s d_\tau \tilde{\mu}(t+r, \tau - t - r) \bar{R}(\tau, s)] = 0 \\
& p/ \ t + r < s \leq t_0 - r
\end{aligned}$$

Prova. Substituímos ${}^{t_0}\bar{K}$ em (R^*) (dada no teorema I-7.2).

Na região de $(\bar{R} - 1)$ temos ${}^{t_0}\bar{K}(t, s) = 0$.

Na região de $(\bar{R} - 2)$ e $(\bar{R} - 3)$ temos:

$$\begin{aligned}
(R^*) \quad & {}^{t_0}\bar{R}(t, s) - I_X + \int_t^{t_0-r} d_\tau (A(t+r)^{-1} \left[\int_{t+r}^{\tau+r} [\eta(\sigma, \tau - \sigma) - \eta(\sigma, -r)] d\sigma \right. \\
& \left. - \tilde{\mu}(t+r, \tau - t - r) + \chi_{[t+r, t_0]}(\tau) \right]) {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) + \int_{t_0-r}^s d_\tau (A(t+r)^{-1} \left[\int_{t+r}^{t_0} [\eta(\sigma, \tau - \sigma) - \eta(\sigma, -r)] d\sigma \right. \\
& \left. - \tilde{\mu}(t+r, \tau - t - r) + \mu(t_0, \tau - t_0) + \chi_{[t+r, t_0]}(\tau) \right]) {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) \\
& = 0
\end{aligned}$$

Vale a fórmula de Bray (proposição 1):

$$A(t+r)^{-1} \cdot \int_{t_0-r}^s d_\tau \int_{t+r}^{t_0} \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma \cdot {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) = A(t+r)^{-1} \int_{t+r}^{t_0} \int_{t_0-r}^s d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) d\sigma$$

e também temos (pela fórmula de Bray):

$$\begin{aligned}
& A(t+r)^{-1} \int_t^{t_0-r} d\tau \int_{t+r}^{\tau+r} \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma. {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) \\
&= A(t+r)^{-1} \int_t^{t_0-r} d\tau \int_{t+r}^{t_0} \eta(\sigma, \tau - \sigma) \cdot \chi_{[t+r, \tau+r]}(\sigma) d\sigma. {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) \\
&= A(t+r)^{-1} \int_{t+r}^{t_0} \left(\int_t^{t_0-r} d\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \chi_{[t+r, \tau+r]}(\sigma) \right) \cdot {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) d\sigma = \\
&= A(t+r)^{-1} \int_{t+r}^{t_0} \left[\int_{\sigma-r}^{t_0-r} d\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) + \eta(\sigma, -r) \cdot {}^{t_0}\bar{R}((\sigma - r)^-, s) \right] d\sigma
\end{aligned}$$

Para $(\bar{R} - 4)$ e $(\bar{R} - 5)$ (onde ${}^{t_0}\bar{R}(t, s) = \bar{R}(t, s)$), temos:

$$\begin{aligned}
(R^*) \quad & \bar{R}(t, s) - I_X + \int_t^s d\tau [A(t+r)^{-1} \left(\int_{t+r}^{\tau+r} (\eta(\sigma, \tau - \sigma) - \eta(\sigma, -r)) d\sigma \right. \\
& \quad \left. - \tilde{\mu}(t+r, \tau - t - r) + \chi_{[t+r, t_0]}(\tau) \right)] \bar{R}(\tau, s) = 0
\end{aligned}$$

e aí usamos que:

$$\begin{aligned}
& A(t+r)^{-1} \int_t^s d\tau \int_{t+r}^{\tau+r} \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma \cdot \bar{R}(\tau, s) = \\
&= A(t+r)^{-1} \int_{t+r}^{s+r} \left[\int_{\sigma-r}^s d\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \cdot \bar{R}(\tau, s) + \eta(\sigma, -r) \cdot \bar{R}((\sigma - r)^-, s) \right] d\sigma
\end{aligned}$$

Para o que distingue $(\bar{R} - 2)$ de $(\bar{R} - 3)$ e $(\bar{R} - 4)$ de $(\bar{R} - 5)$ lembramos que

$$\begin{aligned}
& \int_t^s d\tau \chi_{[t+r, t_0]}(\tau) {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) = 0 \quad \text{se } t \leq s \leq t+r \\
& \text{e } \int_t^s d\tau \chi_{[t+r, t_0]}(\tau) {}^{t_0}\bar{R}(\tau, s) = {}^{t_0}\bar{R}(t+r, s) \quad \text{se } t+r < s
\end{aligned}$$

A fórmula (R_*) do teorema I-7.2, no nosso caso, nos dá a:

Proposição 4.

$$(\bar{R} - 6) \quad {}^{t_0}\bar{R}(t, s) = I_X \quad \text{para } t_0 - r \leq t \leq s \leq t_0$$

($\bar{R} - 7$)

$$\begin{aligned}
& {}^{t_0}\bar{R}(t, s) - I_X + A(t+r)^{-1} \cdot \int_{t+r}^{t_0} [\eta(\sigma, s-\sigma) - \eta(\sigma, -r)] d\sigma \\
& + \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1} \int_{\tau+r}^{t_0} [\eta(\sigma, s-\sigma) - \eta(\sigma, -r)] d\sigma \\
& - A(t+r)^{-1} [\tilde{\mu}(t+r, s-t-r) - \tilde{\mu}(t+r, -r) - \mu(t_0, s-t_0) + \mu(t_0, -r)] \\
& - \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1} [\tilde{\mu}(\tau+r, s-\tau-r) - \tilde{\mu}(\tau+r, -r) - \mu(t_0, s-t_0) + \mu(t_0, -r)] = \\
& = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_0 - r \leq s \leq t+r \\ -A(t+r)^{-1} - \int_t^{s-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1} & \text{para } \max\{t_0 - r, t+r\} < s \leq t_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

($\bar{R} - 8$)

$$\begin{aligned}
& \bar{R}(t, s) - I_X + A(t+r)^{-1} \int_{t+r}^{s+r} [\eta(\sigma, s-\sigma) - \eta(\sigma, -r)] d\sigma \\
& + \int_t^s d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1} \cdot \int_{\tau+r}^{s+r} [\eta(\sigma, s-\tau) - \eta(\sigma, -r)] d\sigma \\
& - A(t+r)^{-1} [\tilde{\mu}(t+r, s-t-r) - \tilde{\mu}(t+r, -r)] \\
& - \int_t^s d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1} [\tilde{\mu}(\tau+r, s-\tau-r) - \tilde{\mu}(\tau+r, -r)] = \\
& = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq s \leq \min\{t_0 - r, t+r\} \\ -A(t+r)^{-1} - \int_t^{s-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1} & \text{para } t+r < s \leq t_0 - r \end{cases}
\end{aligned}$$

Prova. Substituimos ${}^{t_0}\bar{K}$ em (R_*) .

Para $(\bar{R} - 7)$, lembramos que

$$\int_t^s d_\tau {}^{t_0}\bar{R}(t, \tau) {}^{t_0}\bar{K}(\tau, s) = \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) {}^{t_0}\bar{K}(\tau, s) \quad \text{p/ } t < t_0 - r \leq s \leq t_0$$

pois

$${}^{t_0}\bar{K}(\tau, s) = 0 \text{ p/ } t_0 - r \leq \tau \leq s \text{ e } {}^{t_0}\bar{R}(t, \tau) = \bar{R}(t, \tau) \text{ p/ } t \leq \tau \leq t_0 - r$$

e para $(\bar{R} - 8)$ lembramos que ${}^{t_0}\bar{R}(t, \tau) = \bar{R}(t, \tau)$ para $t \leq \tau \leq s \leq t_0 - r$.

Para $(\bar{R} - 7)$ ainda temos que para $t < t_0 - r \leq s \leq t + r$

$$A(t+r)^{-1}\chi_{]t+r, t_0]}(s) = 0 \text{ e } \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1}\chi_{]r+r, t_0]}(s) = 0$$

E para $\max\{t_0 - r, t + r\} < s \leq t_0$

$$A(t+r)^{-1}\chi_{]t+r, t_0]}(s) = A(t+r)^{-1} \text{ e } \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1}\chi_{]r+r, t_0]}(s) = \int_t^{s-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1}$$

E para $(\bar{R} - 8)$ tem que, para $t \leq s \leq \min\{t_0 - r, t + r\}$

$$A(t+r)^{-1}\chi_{]t+r, t_0]}(s) = 0 \text{ e } \int_t^s d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1}\chi_{]r+r, t_0]}(s) = 0$$

Mas para $t + r < s \leq t_0 - r$

$$A(t+r)^{-1}\chi_{]t+r, t_0]}(s) = A(t+r)^{-1} \text{ e } \int_t^s d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1}\chi_{]r+r, t_0]}(s) = \int_t^{s-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1} . \quad \blacksquare$$

Estamos em condições de demonstrar a

Proposição 5. Para $f, g : \mathbf{R} \times \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X$ nas condições da proposição 2, para $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$, a única solução $x = x(\varphi, f, g) \in G^+([-\infty, t_0], X)$ da equação (N) para $t \leq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$ (garantida pelo corolário I-5.1) é tal que:

$$\begin{aligned} ((\widetilde{\rho_N})) : \\ x(t) = A(t+r)^{-1}[H(t+r) - H(t_0) + \varphi(0)] \\ + \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1}[H(\tau+r) - H(t_0) + \varphi(0)] \\ + \int_{t_0-r}^{t_0} d_\tau {}^{t_0}\bar{R}(t, \tau) \varphi(\tau - t_0) \quad \text{p/ } t < t_0 - r \end{aligned}$$

ou, colocando essa fórmula só em termos de $\bar{R}$:

$(\widetilde{\rho_N})$:

$$\begin{aligned} x(t) = & A(t+r)^{-1}[H(t+r) - H(t_0) + \varphi(0)] + \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t, \tau) A(\tau+r)^{-1}[H(\tau+r) \\ & - H(t_0) + \varphi(0)] \\ & - A(t+r)^{-1} \cdot \int_{-r}^0 d_\theta \left[\int_{t+r}^{t_0} \eta(\sigma, t_0 + \theta - \sigma) d\sigma - \tilde{\mu}(t+r, t_0 + \theta - t - r) + \mu(t_0, \theta) \right] \varphi(\theta) \\ & - \int_{-r}^\theta d_\theta \left[\int_t^{t_0-r} d_\sigma \bar{R}(t, \sigma) A(\sigma+r)^{-1} \cdot \left[\int_{\sigma+r}^{t_0} \eta(w, t_0 + \theta - w) dw - \tilde{\mu}(\sigma+r, t_0 + \theta - \sigma - r) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu(t_0, \theta) \right] \right] \varphi(\theta) \\ & - \int_{-r}^0 d_\theta \bar{R}(t, t_0 + \theta - r) A(t_0 + \theta)^{-1} \varphi(\theta) + \gamma_\varphi(t) \end{aligned}$$

para $t < t_0 - r$.

Aqui definimos

$$\begin{cases} \gamma_\varphi(t) = A(t+r)^{-1} \varphi((t+r-t_0)^-) & \text{p/ } t_0 - 2r < t < t_0 - r \\ \gamma_\varphi(t) = - \int_t^{t_0-2r} d_\sigma \bar{R}(t, \sigma) A(\sigma+r)^{-1} \cdot \varphi(-r) & \text{p/ } t \leq t_0 - 2r \end{cases}$$

e colocamos $\bar{R}(t, s) = 0$ para $s < t$.

Prova. Das proposições I-7.5 e I-7.10, demonstradas aqui no apêndice, concluimos que $x(\varphi, f, g)$ é a única solução regradada da equação de Volterra-Stieltjes $(\bar{K}_N)$ dada na proposição I-7.5. Vamos utilizar então a fórmula (ρ) do teorema I-7.2, para $t \leq t_0$ (podemos tomar $\tilde{t}_0$ arbitrário, $\tilde{t}_0 < t_0$ e tomarmos a fórmula (ρ) para $\tilde{t}_0 \leq t \leq t_0$).

Teremos

$$x(t) = \bar{F}(t) + {}^{t_0}\bar{R}(t, t_0)[\varphi(0) - \bar{F}(t_0)] - \int_{t_0}^t d_\tau {}^{t_0}\bar{R}(t, \tau) \bar{F}(\tau) \quad \text{p/ } t \leq t_0$$

e daí vem $((\widetilde{\rho_N}))$. Lembrando que

$$\bar{F}(t) = \varphi(t - t_0) \quad \text{para } t_0 - r \leq t \leq t_0, \text{ e}$$

$$\bar{F}(t) = A(t+r)^{-1}[H(t+r) - H(t_0) + \varphi(0)] \quad \text{para } t < t_0 - r,$$

e também que

$${}^{t_0}\bar{R}(t, \tau) = \bar{R}(t, \tau) \text{ para } t \leq \tau \leq t_0 - r.$$

Para obtermos $(\widetilde{\rho_N})$, substituímos ${}^{t_0}\bar{R}(t, \tau)$ de $((\widetilde{\rho_N}))$ pelo seu valor dado em $(\bar{R} - 7)$ da proposição 4 (pois estamos no caso $t < t_0 - r$ e $t_0 - r \leq \tau \leq t_0$). Lembrar que a parcela $-\int_t^{\tau-r} d_\sigma \bar{R}(t, \sigma) A(\sigma + r)^{-1}$ só aparece em $(\bar{R} - 7)$ quando $\max\{t_0 - r, t + r\} < \tau \leq t_0$ e assim teremos em $(\widetilde{\rho_N})$ a parcela:

$$-\int_{t_0-r}^{t_0} d_\tau \left[\int_t^{\tau-r} d_\sigma \bar{R}(t, \sigma) A(\sigma + r)^{-1} \chi_{] \max\{t_0-r, t+r\}, t_0]}(\tau) \right] \varphi(\tau - t_0)$$

que vale, se $t_0 - r < t + r$

$$\begin{aligned} & -\int_{t+r}^{t_0} d_\tau \bar{R}(t, \tau - r) A(\tau)^{-1} \varphi(\tau - t_0) = -\int_{t-t_0+r}^0 d_\theta \bar{R}(t, t_0 + \theta - r) A(t_0 + \theta)^{-1} \varphi(\theta) = \\ & = -\int_{-r}^0 d_\theta \bar{R}(t, t_0 + \theta - r) A(t_0 + \theta)^{-1} \varphi(\theta) + A(t + r)^{-1} \varphi((t + r - t_0)^-) \end{aligned}$$

e se $t \leq t_0 - 2r$ essa parcela vale:

$$\begin{aligned} & -\int_{t_0-r}^{t_0} d_\tau \left[\int_t^{\tau-r} d_\sigma \bar{R}(t, \sigma) A(\sigma + r)^{-1} \right] \varphi(\tau - t_0) - \int_t^{t_0-2r} d_\sigma \bar{R}(t, \sigma) A(\sigma + r)^{-1} \varphi(-r) \\ & = -\int_{-r}^0 d_\theta \bar{R}(t, t_0 + \theta - r) A(t_0 + \theta)^{-1} \varphi(\theta) - \int_t^{t_0-2r} d_\sigma \bar{R}(t, \sigma) A(\sigma + r)^{-1} \varphi(-r). \end{aligned}$$

(Para mostrarmos isso, usamos um raciocínio análogo ao da proposição 1.) ■

O Caso Autônomo Linear

As coisas se simplificam um pouco para o caso autônomo.

Nesse caso temos:

$$(N) : \quad \frac{d}{dt}(x(t) - L(x_t) - H(t)) = g(x_t) \text{ para } t \leq t_0$$

$$\text{com } L, g : \mathcal{G}_0^+ \rightarrow X \quad L(\varphi) = \int_{-r}^0 d\mu(\theta) \varphi(\theta), \quad g(\varphi) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \varphi(\theta)$$

e definimos $f(t, \varphi) = L(\varphi) + H(t)$.

Segundo a proposição I-7.2,

$$f \text{ satisfaz } (0)_+, (1) \text{ e } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \in G^{-\sigma} SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)) \\ \text{e } H \in G^+(\mathbf{R}, X) \end{cases}$$

(Aqui $G^{-\sigma} SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)) = G^{-\sigma}([-r, 0], \mathcal{L}(X)) \cap SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)).$)

Utilizando a proposição I-7.3,

$$g \text{ satisfaz } (0)_{L_1}, (1) \text{ e } (2)_{L_1} \Leftrightarrow \eta \in L_1^\sigma SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)) .$$

Tomemos então os núcleos

$$\mu \in G^{-\sigma} SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)) \text{ e } \eta \in L_1^\sigma SV_0([-r, 0], \mathcal{L}(X)) \text{ e } H \in G^+(\mathbf{R}, X).$$

Estendemos os núcleos μ e η de maneira constante para $\theta \geq 0$ e $\theta \leq -r$. Temos também

$$A = \mu(-r) - \mu(-r^+) \in \mathcal{L}(X) \text{ e } \tilde{\mu} = \mu - A\chi_{]-\infty, -r]} \in G^{-\sigma} SV_0(\mathbf{R}, \mathcal{L}(X))$$

e segundo a proposição I-7.9,

$$f \text{ satisfaz } (\widetilde{3}) \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ é inversível e } A^{-1} \in \mathcal{L}(X) \\ SV_{[-r, -r+\varepsilon]}[\tilde{\mu}] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \end{cases}$$

Em caso afirmativo, temos válidas então todas as proposições anteriores e teremos, para $t_0 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} {}^{t_0}\overline{K}(t, s) &= -A^{-1} \left(\int_{t+r}^{t_0} [\eta(s-\tau) - \eta(-r)] d\tau - \tilde{\mu}(s-t-r) + \tilde{\mu}(-r) + \mu(s-t_0) \right. \\ &\quad \left. - \mu(-r) + \chi_{]r, t_0-t]}(s-t) \right) \\ &\quad \text{para } t < t_0 - r, \ t \leq s \leq t_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{K}(t, s) &= -A^{-1} \left(\int_{t+r}^{s+r} [\eta(s-\tau) - \eta(-r)] d\tau - \tilde{\mu}(s-t-r) + \tilde{\mu}(-r) + \chi_{]r, \infty[}(s-t) \right) \\ &= A^{-1} \left(\int_{s-t-r}^{-r} [\eta(\sigma) - \eta(-r)] d\sigma + \tilde{\mu}(s-t-r) - \tilde{\mu}(-r) - \chi_{]r, \infty[}(s-t) \right) \\ &\quad \text{para } t \leq s \end{aligned}$$

Podemos então definir $\bar{K} : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ (por abuso de linguagem) por:

$$\begin{cases} \bar{K}(w) = A^{-1}(\int_{-w-r}^{-r} [\eta(\sigma) - \eta(-r)] d\sigma + \tilde{\mu}(-w-r) - \tilde{\mu}(-r) - \chi_{]r, \infty[}(-w)) \\ \text{se } w \leq 0 \\ \text{e } \bar{K}(w) = 0 \quad \text{se } w \geq 0 \end{cases}$$

e teremos $\bar{K}(t, s) = \bar{K}(t-s)$. (Assim, para cada $b < 0$, $\bar{K}|_{[b, \infty[} \in G^{+\sigma}SV_0([b, \infty[, \mathcal{L}(X))$.)

Olhando a fórmula (R^*) do teorema I-7.2, satisfeita com a unicidade por $\bar{R}$ quando o núcleo é $\bar{K}$, vemos que $\bar{R}$ também só depende da diferença $w = t - s$, ou seja:

$$\text{temos } \bar{R}(t, s) = \bar{R}(t - s) \quad (\text{por abuso de linguagem})$$

$$\text{com } \bar{R} : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(X), \quad \bar{R}(0) = I_X, \quad \bar{R}(w) = 0 \quad \text{para } w > 0$$

Para esse caso, a proposição 5 se transforma em:

Proposição 6. Para as condições do caso autônomo linear descritas acima, para $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ temos que a única solução regrada $x = x(\varphi, f, g) \in G^+([-\infty, t_0], X)$ da equação (N) para $t \leq t_0$ com $x_{t_0} = \varphi$ (garantida pelo corolário I-5.1) é dada por:

$(\widetilde{\rho_N})_a :$

$$\begin{aligned} x(t) = & \bar{R}(t - t_0 + r)A^{-1}[\varphi(0) - \int_{-r}^0 d\mu(\theta)\varphi(\theta)] \\ & - \int_{-r}^0 d_\theta \bar{R}(t - t_0 - \theta + r)A^{-1}\varphi(\theta) + \gamma_\varphi(t) \\ & + [A^{-1}H(t+r) - \bar{R}(t - t_0 + r)A^{-1}H(t_0) + \int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t - \tau)A^{-1}H(\tau + r)] \\ & + \int_{-r}^0 d_\theta [- \int_t^{t_0-r} \bar{R}(t - \sigma)A^{-1}\eta(t_0 + \theta - \sigma - r)d\sigma \\ & + \int_t^{t_0-r} d_\sigma \bar{R}(t - \sigma)A^{-1}\tilde{\mu}(t_0 + \theta - \sigma - r) + A^{-1}\tilde{\mu}(t_0 + \theta - t - r)]\varphi(\theta) \end{aligned}$$

para $t < t_0 - r$,

onde aqui temos:

$$\begin{cases} \gamma_\varphi(t) = A^{-1}\varphi((t+r-t_0)^-) \quad \text{para } t_0 - 2r < t < t_0 - r \\ \gamma_\varphi(t) = A^{-1}\varphi(-r) - \bar{R}(t - t_0 + 2r)A^{-1}\varphi(-r) \quad \text{para } t \leq t_0 - 2r \end{cases}$$

Prova. $(\widetilde{\rho_N})_a$ é a fórmula $(\widetilde{\rho_N})$ da proposição 5 aplicada a esse caso.

Lembrar que nesse caso

$$\int_t^{t_0-r} d_\tau \bar{R}(t-\tau)A^{-1}[-H(t_0)+\varphi(0)] = \bar{R}(t-t_0+r)A^{-1}[-H(t_0)+\varphi(0)] - A^{-1}[-H(t_0)+\varphi(0)]$$

e também

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0-r} d_\sigma \bar{R}(t-\sigma)A^{-1} \int_{\sigma+r}^{t_0} \eta(t_0+\theta-w)dw &= A^{-1} \int_{t+r}^{t_0} \eta(t_0+\theta-w)dw \\ &+ \int_t^{t_0-r} \bar{R}(t-\sigma)A^{-1}\eta(t_0+\theta-\sigma-r)d\sigma \end{aligned}$$

(usando a integração por partes); e ainda

$$\int_t^{t_0-r} d_\sigma \bar{R}(t-\sigma)A^{-1}\mu(\theta) = \bar{R}(t-t_0+r)A^{-1}\mu(\theta) - A^{-1}\mu(\theta)$$

e quando $t \leq t_0 - 2r$,

$$\gamma_\varphi(t) = - \int_t^{t_0-2r} d_\sigma \bar{R}(t-\sigma)A^{-1}\varphi(-r) = A^{-1}\varphi(-r) - \bar{R}(t-t_0+2r)A^{-1}\varphi(-r). \quad \blacksquare$$

APÊNDICE 2

As variedades estável e instável do Equilíbrio Hiperbólico

Vamos melhorar o teorema II.2.2 obtendo, para o equilíbrio hiperbólico, a diferenciabilidade C^k das variedades estável e instável (e não somente C^{k-1} como no teorema II.2.2) de uma maneira construtiva.

Consideremos primeiramente a EDFN autônoma (N) com $f \in \tilde{\mathcal{X}}^1$ e $g \in Y^1$ com ponto fixo $0 \in \mathcal{G}^+$ ($g(0) = 0$).

Podemos escrever (N) do seguinte modo: para $t_0 \in \mathbf{R}$:

$$x(t) = x(t_0) + f'(0)x_t - f'(0)x_{t_0} + \int_{t_0}^t g'(0)x_s ds + H_x(t) - H_x(t_0)$$

onde temos então $H : G^+(\mathbf{R}, X) \rightarrow G^+(\mathbf{R}, X)$ $H_x(t) = H_x^f(t) + H_x^g(t)$, onde

$$H_x^f(t) = f(x_t) - f'(0)x_t \text{ e } H_x^g(t) = \int_0^t [g(x_s) - g'(0)x_s] ds, \text{ para } t \in \mathbf{R}.$$

Repare que $H_x^f \in G^+(\mathbf{R}, X)$ e $H_x^g \in C(\mathbf{R}, X)$.

Proposição 1. Para $x \in G^+(\mathbf{R}, X)$, $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi \in \mathcal{G}^+$ temos a seguinte equivalência:

1) x é solução de (N) com $x_{t_0} = \varphi$

$\Leftrightarrow$

2) $\otimes \quad x_t = T(t - t_0)\varphi + \int_{t_0}^t T(t - \sigma)\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma)d\sigma +$
 $+ T(t - t_0)\chi_0(f(x_t) - f(x_{t_0}) - f'(0)x_t + f'(0)x_{t_0})$
 $- \int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma)\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)x_\sigma + f'(0)x_t) \text{ para } t \in \mathbf{R}.$

Prova. $(\Rightarrow)$ Se $x \in G^+(\mathbf{R}, X)$ é solução de (N) com $x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{G}^+$ então tomando $H = H_x \in G^+(\mathbf{R}, X)$, vemos que x é solução de $(N)'_H$ e satisfaz à fórmula (V) dada no início do cap.II §3, ou seja, $x_t = T(t - t_0)\varphi + \kappa(t, t_0)H_x^f + \kappa(t, t_0)H_x^g$ para $t \in \mathbf{R}$.

Utilizando a integração por partes na parcela $\kappa(t, t_0)H_x^g$, como no corolário I-7.1, chegamos na fórmula $\otimes$ da nossa proposição.

($\Leftarrow$) Se $x \in G^+(\mathbf{R}, X)$ satisfaz $\otimes$ para $t \in \mathbf{R}$ então x satisfaz a fórmula (V) para $H = H_x = H_x^f + H_x^g$ dado acima, ou seja, $x_t = T(t - t_0)\varphi + \kappa(t, t_0)H_x$. Assim, x é solução da equação $(N)'_{H_x}$ mas $(N)'_{H_x} = (N)$ e também temos $x_{t_0} = \varphi$. ■

De agora em diante até o fim do parágrafo, vamos considerar $0 \in \mathcal{G}^+$ como sendo ponto fixo hiperbólico de (N) . Temos então a decomposição $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_s^+ \oplus \mathcal{G}_u^+$.

Para esse caso mostramos a:

Proposição 2. a) Seja $x \in G^+(\mathbf{R}, X)$ limitada para $t \geq 0$. São equivalentes:

1) x é solução de (N)

$\Leftrightarrow$

$$2) \text{ vale } \otimes_+ \left\{ \begin{array}{l} (x_t)_u = \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_{t+\sigma}) - g'(0)x_{t+\sigma}))_u d\sigma \\ \quad - \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)))_u \\ (x_t)_s = T(t - t_0)\varphi_s + \int_{t_0}^t T(t - \sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma \\ \quad + T(t - t_0)(\chi_0(f(x_t) - f(x_{t_0}) - f'(0)(x_t - x_{t_0})))_s \\ \quad - \int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_s \quad \forall t \in \mathbf{R} \end{array} \right.$$

para algum $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi_s \in \mathcal{G}_s^+$.

b) Seja $x \in G^+(\mathbf{R}, X)$ limitada para $t \leq 0$. São equivalentes:

1) x é solução de (N)

$\Leftrightarrow$

$$2) \text{ vale } \otimes_- \left\{ \begin{array}{l} (x_t)_u = T(t - t_0)\varphi_u + \int_{t_0}^t T(t - \sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_u d\sigma \\ \quad + T(t - t_0)(\chi_0(f(x_t) - f(x_{t_0}) - f'(0)(x_t - x_{t_0})))_u \\ \quad - \int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_u \\ (x_t)_s = \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_{t+\sigma}) - g'(0)x_{t+\sigma}))_s d\sigma \\ \quad - \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)))_s \quad \forall t \in \mathbf{R} \end{array} \right.$$

para algum $t_0 \in \mathbf{R}$ e $\varphi_u \in \mathcal{G}_u^+$.

Prova. a) ($\Rightarrow$) Se x é solução de (N) então x é solução de $(N)'_H$ com $H = H_x = H_x^f + H_x^g$ dada na proposição 1. Para cada escolha de $t_0 \in \mathbf{R}$ teremos $\varphi_u = (x_{t_0})_u \in \mathcal{G}_u^+$ e $\varphi_s = (x_{t_0})_s \in \mathcal{G}_s^+$.

Usando o teorema II.3.1 para obter as projeções de x_t em $\mathcal{G}_s^+$ e $\mathcal{G}_u^+$, após fazer a integração por partes na integral

$$\begin{aligned} (\int_{t_0}^t d_\sigma T(t-\sigma) \pi_s \chi_0 H_x^g(\sigma))(\theta) &= \int_{t_0}^t d_\sigma R^s(t-\sigma+\theta) H_x^g(\sigma) \\ &= R^s(\theta) H_x^g(t) - R^s(t-t_0+\theta) H_x^g(t_0) - \int_{t_0}^t R^s(t-\sigma+\theta) dH_x^g(\sigma), \end{aligned}$$

que $\pi_s \kappa(t, t_0) H_x^g = \int_{t_0}^t T(t-\sigma) (\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma$ e o análogo para a projeção de $\kappa(t, t_0) H_x^g$ em $\mathcal{G}_u^+$ obtemos:

$$\begin{aligned} (x_t)_u &= T(t-t_0)\varphi_u + \int_{t_0}^t T(t-\sigma) (\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_u d\sigma \\ &\quad + T(t-t_0) (\chi_0(f(x_t) - f(x_{t_0}) - f'(0)(x_t - x_{t_0})))_u \\ &\quad - \int_{t_0}^t d_\sigma T(t-\sigma) (\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (x_t)_s &= T(t-t_0)\varphi_s + \int_{t_0}^t T(t-\sigma) (\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma \\ &\quad + T(t-t_0) (\chi_0(f(x_t) - f(x_{t_0}) - f'(0)(x_t - x_{t_0})))_s \\ &\quad - \int_{t_0}^t d_\sigma T(t-\sigma) (\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_s \end{aligned}$$

Como x é limitada quando $\sigma \rightarrow \infty$ temos que para $t \in \mathbf{R}$, existe $M_t > 0$ tal que $\|\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma)\| = \|g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma\| \leq M_t$ para $\sigma \geq t$
 $\|\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t))\| = \|f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)\| \leq M_t$ para $\sigma \geq t$
e também $\|x_\sigma\| \leq M_t$ para $\sigma \geq t$.

Da proposição II.2.2 temos que $\exists K, \alpha > 0 \mid \|T(t-t_0)|_{\mathcal{G}_u^+}\| \leq K e^{\alpha(t-t_0)}$ para $t < t_0$.

Assim vemos que

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \|T(t-t_0)[\varphi_u + (\chi_0(f(x_t) - f(x_{t_0}) - f'(0)(x_t - x_{t_0})))_u]\| = 0$$

pois $\|\varphi_u\| = \|\pi_u x_{t_0}\| \leq \|\pi_u\|.M_t$ para $t_0 \geq t$

e $\|(\chi_0(f(x_t) - f(x_{t_0}) - f'(0)(x_t - x_{t_0})))_u\| \leq \|\pi_u\|.M_t$ para $t_0 \geq t$

Basta então mostrar que para $\theta \in [-r, 0]$ as duas integrais

$$\int_{t_0}^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_u(\theta) d\sigma \quad \text{e}$$

$$\int_{t_0}^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_u(\theta) \quad \text{convergem quando } t_0 \rightarrow \infty$$

uniformemente em relação a $\theta \in [-r, 0]$.

Para $t_2 > t_1 > \bar{t} > t$ temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_u(\theta) d\sigma \right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} K e^{\alpha(t-\sigma)} \|\pi_u\| \cdot M_t d\sigma \\ &\leq K \|\pi_u\| \cdot M_t \int_{\bar{t}}^{\infty} e^{\alpha(t-\sigma)} d\sigma = K \|\pi_u\| \cdot M_t \frac{e^{\alpha(t-\bar{t})}}{\alpha}, \end{aligned}$$

logo, o Critério de Cauchy se aplica a esta integral.

Do mesmo modo:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_1}^{t_2} d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_u(\theta) \right| = \\ &= \left| \int_{t_1}^{t_2} d_\sigma R^u(t-\sigma+\theta)(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)) \right| \leq SV_{[t+\theta-t_2, t+\theta-t_1]}[R^u] \cdot M_t \\ &\leq SV_{]-\infty, t-\bar{t}]}[R^u] \cdot M_t \leq K_3 e^{\alpha(t-\bar{t})} \quad (\text{pelo teorema II.3.3}) \end{aligned}$$

e o Critério de Cauchy também se aplica a esta integral.

Fazemos então o limite quando $t_0 \rightarrow \infty$ no 2º membro da projeção $(x_t)_u$ (pois t_0 é arbitrário) e chegamos em $\otimes_+$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in G^+(\mathbf{R}, X)$ limitada quando $t \rightarrow \infty$ tal que para algum $(t_0, \varphi_s) \in \mathbf{R} \times \mathcal{G}_s^+$ vale $\otimes_+$. Observe que as integrais impróprias em $\otimes_+$ realmente convergem, para x limitada, quando $\sigma \rightarrow \infty$ como já foi mostrado na 1ª. parte.

$$\begin{aligned} \text{Chamemos de } \varphi_u &= (x_{t_0})_u = \int_{\infty}^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_{t_0+\sigma}) - g'(0)x_{t_0+\sigma}))_u d\sigma \\ &- \int_{\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_{t_0+\sigma}) - f(x_{t_0}) - f'(0)(x_{t_0+\sigma} - x_{t_0})))_u = \\ &= \int_{\infty}^{t_0} T(t_0 - \sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_u d\sigma - \int_{\infty}^{t_0} d_\sigma T(t_0 - \sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f'(0)x_\sigma))_u + \\ &+ (\chi_0(f(x_{t_0}) - f'(0)x_{t_0}))_u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vamos mostrar que } T(t - t_0)\varphi_u &= \int_{\infty}^{t_0} T(t - \sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_u d\sigma \\ &- \int_{\infty}^{t_0} d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f'(0)x_\sigma))_u + T(t - t_0)(\chi_0(f(x_{t_0}) - f'(0)x_{t_0}))_u. \end{aligned}$$

Isso porque a convergência das integrais (pelo que vimos na 1a. parte) se dá uniformemente em $\theta \in [-r, 0]$, ou seja, $\int_a^{t_0} d_\sigma T(t_0 - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_u \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \int_\infty^{t_0} d_\sigma T(t_0 - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_u$ na norma de $\mathcal{G}^+$, quando $H \in G^+(\mathbf{R}, X)$ for limitado para $\sigma \rightarrow \infty$. Assim podemos passar $T(t - t_0)$ para dentro das integrais, se valer que $T(t - t_0) \int_a^{t_0} d_\sigma T(t_0 - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_u = \int_a^{t_0} d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))_u$ para $\forall a \in \mathbf{R}$. Da observação I-7.1 e da fórmula (v) nós concluímos que os operadores $\kappa_1, \kappa_2 : G^+([t_0, a], X) \rightarrow \mathcal{G}^+$ dados por

$$\begin{aligned}\kappa_1 H &= T(t - t_0) \cdot \int_a^{t_0} d_\sigma T(t_0 - \sigma)(\chi_0 H(\sigma)) \\ \kappa_2 H &= \int_a^{t_0} d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0 H(\sigma))\end{aligned}$$

são lineares e contínuos ($\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{L}(G^+([t_0, a], X), \mathcal{G}^+)$). Facilmente se verifica que eles coincidem em funções características: $H = \chi_{[c, d[} p$ (para $p \in X$, $[c, d[\subset [t_0, a]$), logo $\kappa_1 \equiv \kappa_2$. Usando o teorema II.3.1 e o fato de $T(t - t_0)$ e π_u comutarem nós chegamos à conclusão que queremos.

Então vemos que $x_t = (x_t)_u + (x_t)_s$ satisfaz $\otimes$ dado na proposição 1 onde tomamos $\varphi = \varphi_u + \varphi_s$. Da proposição 1 então concluímos que x é solução de (N).

b) O raciocínio aqui é completamente análogo ao do item a), mostrando que para $\theta \in [-r, 0]$ as integrais

$$\begin{aligned}& \int_{t_0}^t T(t - \sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s(\theta) d\sigma \quad \text{e} \\& \int_{t_0}^t d_\sigma T(t - \sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_s(\theta) \\& = \int_{t_0}^t d_\sigma R^s(t + \theta - \sigma)(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)) \quad \text{convergem quando } t_0 \rightarrow -\infty\end{aligned}$$

e que convergem uniformemente com relação a $\theta \in [-r, 0]$. ■

Estamos prontos para mostrar que quando $f \in \tilde{\mathcal{X}}^k$ e $g \in Y^k$ ($k \in \mathbf{N}^*$ ou $k = \infty$), as variedades locais estável e instável do ponto fixo hiperbólico $0 \in \mathcal{G}^+$, dadas na definição II.2.3, para vizinhanças apropriadas da origem, são na verdade de classe C^k . Precisamos definir alguns espaços:

Definição 1. Temos os seguintes espaços de Banach com a norma do supremo

$$\begin{aligned}\beta_+ &= \{z : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathcal{G}^+ \mid z \text{ é limitada}\}, & \beta_- &= \{z : \mathbf{R}_- \rightarrow \mathcal{G}^+ \mid z \text{ é limitada}\} \\ \beta_+^u &= \{z : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathcal{G}_u^+ \mid z \text{ é limitada}\}, & \beta_-^u &= \{z : \mathbf{R}_- \rightarrow \mathcal{G}_u^+ \mid z \text{ é limitada}\} \\ \beta_+^s &= \{z : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathcal{G}_s^+ \mid z \text{ é limitada}\}, & \beta_-^s &= \{z : \mathbf{R}_- \rightarrow \mathcal{G}_s^+ \mid z \text{ é limitada}\}.\end{aligned}$$

Repare que $\beta_+ = \beta_+^u \oplus \beta_+^s$ e $\beta_- = \beta_-^u \oplus \beta_-^s$.

$$\begin{aligned}\text{Sejam também } \hat{\beta}_+ &= \{x \in G^+([-r, \infty[, X) \mid x \text{ é limitada}\} \\ \hat{\beta}_- &= \{x \in G^+(-\infty, 0], X) \mid x \text{ é limitada}\}\end{aligned}$$

Temos as isometrias canônicas $\mathcal{I}_+ : \hat{\beta}_+ \rightarrow \beta_+$ e $\mathcal{I}_- : \hat{\beta}_- \rightarrow \beta_-$ dadas por $\mathcal{I}_+ x(t) = x_t$ para $t \geq 0$ e $\mathcal{I}_- x(t) = x_t$ para $t \leq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Sejam então } \bar{\beta}_+ &= \mathcal{I}_+ \hat{\beta}_+ \subset \beta_+ \text{ subespaço fechado de } \beta_+ \\ \text{e } \bar{\beta}_- &= \mathcal{I}_- \hat{\beta}_- \subset \beta_- \text{ subespaço fechado de } \beta_-\end{aligned}$$

(então $\hat{\beta}_+ \equiv \bar{\beta}_+$ e $\hat{\beta}_- \equiv \bar{\beta}_-$).

Usaremos, sem perigo de confusão, a notação $(\)_s$, $(\)_u$ para projetar tanto elementos de $\mathcal{G}^+$ em $\mathcal{G}_s^+$, $\mathcal{G}_u^+$ respectivamente, bem como para projetar elementos de β^+ em β_+^s e β_+^u , respectivamente.

Teorema 1. (As variedades locais estável e instável do ponto fixo hiperbólico de (N))

Seja (N) autônoma com $f \in \tilde{\mathcal{X}}^k$ e $g \in Y^k$ ($k \in \mathbf{N}^*$ ou $k = \infty$), $g(0) = 0$ sendo $0 \in \mathcal{G}^+$ ponto fixo hiperbólico de (N) . Com as notações anteriores temos:

a) Existe uma vizinhança aberta V_0 de 0 em $\mathcal{G}_s^+$ e uma bola aberta W_0 de $(0, 0)$ em $\beta_+ \equiv \beta_+^u \times \beta_+^s$ tal que para cada $\varphi_s \in V_0$ existe uma única solução de (N) , $x = x^{\varphi_s} \in \hat{\beta}_+$ tal que $((\mathcal{I}_+ x)_u, (\mathcal{I}_+ x)_s) \equiv \mathcal{I}_+ x \in W_0$, $(x_0)_s = \varphi_s$ e $\mathcal{S} \cap (\mathcal{G}_u^+ \times V_0)$ é uma variedade de classe C^k tangente a $\mathcal{G}_s^+$ em 0 , onde $\mathcal{S} = \{x_t^{\varphi_s} \in \mathcal{G}^+ : t \geq 0 \text{ e } \varphi_s \in V_0\}$. Além disso, $\mathcal{S}$ é invariante pelo fluxo de (N) para $t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t^{\varphi_s} = 0$ para toda $\varphi_s \in V_0$, ou seja, $\mathcal{S}$ é a variedade local estável de 0 .

b) Existe uma vizinhança aberta U_0 de 0 em $\mathcal{G}_u^+$ e uma bola aberta M_0 de $(0, 0)$ em $\beta_- \equiv \beta_-^u \times \beta_-^s$ tal que para cada $\varphi_u \in U_0$ existe uma única solução de (N) , $x = x^{\varphi_u} \in \hat{\beta}_-$ tal que $((\mathcal{I}_-x)_u(\mathcal{I}_-x)_s) \equiv \mathcal{I}_-x \in M_0$ e $(x_0)_u = \varphi_u$ e $\mathcal{U} \cap (U_0 \times \mathcal{G}_s^+)$ é uma variedade C^k tangente a $\mathcal{G}_u^+$ em 0, onde $\mathcal{U} = \{x_t^{\varphi_u} \in \mathcal{G}^+ : t \leq 0 \text{ e } \varphi_u \in U_0\}$. Além disso, $\mathcal{U}$ é invariante pelo fluxo de (N) para $t \leq 0$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} x_t^{\varphi_u} = 0$ para toda $\varphi_u \in U_0$, ou seja, $\mathcal{U}$ é a variedade local instável de 0.

Observação.

Em a), obtemos a função $u_0 : V_0 \subset \mathcal{G}_s^+ \rightarrow \mathcal{G}_u^+$ dada por $u_0(\varphi_s) = (x_0^{\varphi_s})_u$ (assim $x^{\varphi_s} = x(0, \varphi_s + u_0\varphi_s, f, g)|_{[-r, \infty[}$). E u_0 é de classe C^k .

Definindo

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{x_0^{\varphi_s} \equiv (u_0\varphi_s, \varphi_s) \in \mathcal{G}^+ \equiv \mathcal{G}_u^+ \times \mathcal{G}_s^+ \mid \varphi_s \in V_0\},$$

temos $\mathcal{S} \cap (\mathcal{G}_u^+ \times V_0) = \tilde{\mathcal{S}}$, que é o gráfico da função u_0 .

Em b), obtemos a função $v_0 : U_0 \subset \mathcal{G}_u^+ \rightarrow \mathcal{G}_s^+$ dada por $v_0(\varphi_u) = (x_0^{\varphi_u})_s$ (assim $x^{\varphi_u} = x(0, \varphi_u + v_0(\varphi_u), f, g)|_{[-\infty, 0]}$). E v_0 é de classe C^k .

Definindo

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{x_0^{\varphi_u} \equiv (\varphi_u, v_0\varphi_u) \in \mathcal{G}^+ \equiv \mathcal{G}_u^+ \times \mathcal{G}_s^+ \mid \varphi_u \in U_0\},$$

temos: $\mathcal{U} \cap (U_0 \times \mathcal{G}_s^+) = \tilde{\mathcal{U}}$, que é o gráfico da função v_0 .

Prova. a) Definamos a função $\mathcal{H}: \beta_+^u \times \widehat{\beta}_+ \times \mathcal{G}_s^+ \longrightarrow \beta_+^u \times \overline{\beta}_+$
 $(U, x, \varphi_s) \longrightarrow (\mathcal{F}(U, x, \varphi_s), G(U, x, \varphi_s))$

onde para $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U, x, \varphi_s)(t) &= U(t) - \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_{t+\sigma}) - g'(0)x_{t+\sigma}))_u d\sigma \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)))_u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(U, x, \varphi_s)(t) &= x_t - \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_{t+\sigma}) - g'(0)x_{t+\sigma}))_u d\sigma \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)))_u \\ &\quad - T(t)\varphi_s - T(t)(\chi_0(f(x_t) - f(x_0) - f'(0)(x_t - x_0)))_s \\ &\quad - \int_0^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma \\ &\quad + \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_s \\ &= x_t - T(t)[\varphi_s + \varphi_u(x)] - T(t)(\chi_0(f(x_t) - f(x_0) - f'(0)(x_t - x_0))) \\ &\quad - \int_0^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma \\ &\quad + \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_s\end{aligned}$$

onde

$$\varphi_u(x) = \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_u - \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_0) - f'(0)(x_\sigma - x_0)))_u$$

Da proposição 2 vemos que todas as integrais impróprias acima existem, ou seja, convergem quando $x \in \widehat{\beta}_+$.

Para mostrar que $\mathcal{H}$ está bem definida temos que mostrar que

$$\mathcal{F}(U, x, \varphi_s) \in \beta_+^u \quad \text{e} \quad G(U, x, \varphi_s) \in \overline{\beta}_+.$$

Do teorema II.3.1 concluímos que

$\int_{t_0}^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma)-g'(0)x_\sigma))_s d\sigma$ e $\int_{t_0}^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma)-f(x_t)-f'(0)(x_\sigma-x_t)))_s$ pertencem a $\mathcal{G}_s^+$ para cada $t_0, t \in \mathbf{R}$ enquanto que

$\int_{t_0}^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma)-g'(0)x_\sigma))_u d\sigma$ e $\int_{t_0}^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma)-f(x_t)-f'(0)(x_\sigma-x_t)))_u$

pertencem a $\mathcal{G}_u^+$ para cada $t_0, t \in \mathbf{R}$. Da proposição 2 vimos que a convergência das integrais $\int_{t_0}^t \rightarrow \int_\infty^t$ quando $t_0 \rightarrow \infty$ se dá uniformemente em $\theta \in [-r, 0]$; como $\mathcal{G}_u^+$ é um subespaço fechado de $\mathcal{G}^+$ temos que as integrais $\int_\infty^0$ da definição de $\mathcal{F}(U, x, \varphi_s)(t)$ pertencem a $\mathcal{G}_u^+$, ou seja, $\mathcal{F}(U, x, \varphi_s)(t) \in \mathcal{G}_u^+ \quad \forall t \geq 0$.

Vamos mostrar que as integrais todas são limitadas para $t \geq 0$. Temos:

Seja $M > 0$ tal que $\|g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma\| \leq M$,

$$\|f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)\| \leq M$$

$$\text{e } \|x_\sigma\| \leq M \quad \text{para } \sigma, t \geq 0.$$

Então

$$\left\| \int_\infty^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_{t+\sigma}) - g'(0)x_{t+\sigma}))_u d\sigma \right\| \leq \int_0^\infty K.e^{-\alpha\sigma} \|\pi_u\|.M d\sigma = \frac{K.\|\pi_u\|.M}{\alpha}$$

(K e α da proposição II.2.2)

$$\left\| \int_0^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma \right\| \leq \int_0^t K.e^{-\alpha(t-\sigma)} \|\pi_s\|.M.d\sigma \leq \frac{K.\|\pi_s\|.M}{\alpha}$$

Para $\theta \in [-r, 0]$

$$\begin{aligned} \int_\infty^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)))_u(\theta) &= \\ &= \int_\infty^0 d_\sigma R^u(\theta - \sigma)(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_s(\theta) &= \\ = \int_0^t d_\sigma R^s(t+\theta-\sigma)(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)) \end{aligned}$$

Assim

$$\| \int_{-\infty}^0 d_{\sigma} T(-\sigma) (\chi_0(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)))_u \| \leq SV_{[-\infty, 0]}[R^u].M \leq K_3 M$$

e

$$\| \int_0^t d_{\sigma} T(t - \sigma) (\chi_0(f(x_{\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{\sigma} - x_t)))_s \| \leq SV_{[-r, \infty]}[R^s].M < \infty$$

(do teorema II.3.3).

Como $T(t)\varphi_s$ e $T(t)(\chi_0(f(x_t) - f(x_0) - f'(0)(x_t - x_0)))_s$ também são limitados para $t \geq 0$ concluímos que $\mathcal{F}(U, x, \varphi_s) \in \beta_+^u$ e $G(U, x, \varphi_s) \in \beta_+$.

Pela fórmula (V) (do teorema I-7.4 e do cap.II §3) sabemos que a solução $y \in G^+([-r, \infty[, X)$ da equação linear não homogênea $(N)'_H$ com $y_0 = \varphi_s + \varphi_u(x)$ onde H é dado por $H(t) = f(x_t) - f'(0)x_t + \int_0^t (g(x_{\sigma}) - g'(0)x_{\sigma})d\sigma$ será exatamente $y_t = x_t - G(U, x, \varphi_s)(t)$ para $t \geq 0$.

Então $G(U, x, \varphi_s) = \mathcal{I}_+(x - y) \in \bar{\beta}_+$ e $\mathcal{H}$ está bem definida.

Por simples substituição constatamos que $\mathcal{F}(0, 0, 0) = 0$ e $G(0, 0, 0) = 0$.

Vamos mostrar que $\mathcal{H}$ é de classe C^k em $(U, x) \in \beta_+^u \times \hat{\beta}_+$.

Temos de fato

$$\mathcal{F}(U, x, \varphi_s) = U - \phi_g(x) + \phi_f(x)$$

$$G(U, x, \varphi_s) = \mathcal{I}_+x - T(\cdot)\varphi_s - \ell(x) - \phi_g(x) + \phi_f(x) - \psi_g(x) + \psi_f(x)$$

onde para $t \geq 0$

$$\phi_g(x)(t) = \int_{-\infty}^0 T(-\sigma) (\chi_0(g(x_{t+\sigma}) - g'(0)x_{t+\sigma}))_u d\sigma \quad (\phi_g(x) \in \beta_+^u)$$

$$\phi_f(x)(t) = \int_{-\infty}^0 d_{\sigma} T(-\sigma) (\chi_0(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)))_u \quad (\phi_f(x) \in \beta_+^u)$$

$$\ell(x)(t) = T(t) (\chi_0(f(x_t) - f(x_0) - f'(0)(x_t - x_0)))_s \quad (\ell(x) \in \beta_+^s)$$

$$\psi_g(x)(t) = \int_0^t T(t - \sigma) (\chi_0(g(x_{\sigma}) - g'(0)x_{\sigma}))_s d\sigma \quad (\psi_g(x) \in \beta_+^s)$$

$$\psi_f(x)(t) = \int_0^t d_{\sigma} T(t - \sigma) (\chi_0(f(x_{\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{\sigma} - x_t)))_s \quad (\psi_f(x) \in \beta_+^s)$$

Vemos claramente que $\mathcal{H} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é C^∞ em $U \in \beta_+^u$. Falta mostrar que $\ell, \phi_g, \phi_f, \psi_g, \psi_f : \hat{\beta}_+ \rightarrow \beta_+$ são de classe C^k .

É suficiente mostrar que as parcelas $\bar{\ell}, \bar{\phi}_g, \bar{\phi}_f, \bar{\psi}_g, \bar{\psi}_f : \hat{\beta}_+ \rightarrow \beta_+$ são de classe C^k , onde $\bar{\ell}(x)(t) = T(t)(\chi_0(f(x_t)))_s$

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_g(x)(t) &= \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_{t+\sigma})))_u d\sigma, \quad \bar{\phi}_f(x)(t) = \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_{t+\sigma})))_u \\ \bar{\psi}_g(x)(t) &= \int_0^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma)))_s d\sigma, \quad \bar{\psi}_f(x)(t) = \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma)))_u\end{aligned}$$

pois o raciocínio para as outras parcelas de $\ell, \phi_g, \phi_f, \psi_g, \psi_f$ respectivamente será o mesmo.

Vamos usar a indução em $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Supondo então que temos a i -ésima derivada

$$\bar{\ell}^{(i)}, \bar{\phi}_g^{(i)}, \bar{\phi}_f^{(i)}, \bar{\psi}_g^{(i)}, \bar{\psi}_f^{(i)} : \hat{\beta}_+ \rightarrow \mathcal{M}^i(\hat{\beta}_+^i, \beta_+)$$

$$\text{onde } \mathcal{M}^0(\hat{\beta}_+^0, \beta_+) = \beta_+, \mathcal{M}^1(\hat{\beta}_+, \beta_+) = \mathcal{L}(\hat{\beta}_+, \beta_+)$$

$$\text{e } \mathcal{M}^i(\hat{\beta}_+^i, \beta_+) = \mathcal{L}(\hat{\beta}_+, \mathcal{M}^{i-1}(\hat{\beta}_+^{i-1}, \beta_+))$$

é o espaço das aplicações i -lineares contínuas de $\hat{\beta}_+^i = \hat{\beta}_+ \times \hat{\beta}_+ \times \dots \times \hat{\beta}_+$ em β_+ e

que essa derivada é dada por, para $x \in \hat{\beta}_+$, $\Delta x_1, \dots, \Delta x_i \in \hat{\beta}_+$ (quando $i \neq 0$) e $t \geq 0$

$$\bar{\ell}^{(i)}(x)[\Delta x_1 \dots \Delta x_i](t) = T(t)\pi_s \chi_0(f^{(i)}(x_t)[\Delta x_{1_t} \dots \Delta x_{i_t}]),$$

$$\bar{\phi}_g^{(i)}(x)[\Delta x_1 \dots \Delta x_i](t) = \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)\pi_u \chi_0(g^{(i)}(x_{t+\sigma})[\Delta x_{1_{t+\sigma}} \dots \Delta x_{i_{t+\sigma}}])d\sigma,$$

$$\bar{\phi}_f^{(i)}(x)[\Delta x_1 \dots \Delta x_i](t) = \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)\pi_u \chi_0(f^{(i)}(x_{t+\sigma})[\Delta x_{1_{t+\sigma}} \dots \Delta x_{i_{t+\sigma}}]),$$

$$\bar{\psi}_g^{(i)}(x)[\Delta x_1 \dots \Delta x_i](t) = \int_0^t T(t-\sigma)\pi_s \chi_0(g^{(i)}(x_\sigma)[\Delta x_{1_\sigma} \dots \Delta x_{i_\sigma}])d\sigma \text{ e}$$

$$\bar{\psi}_f^{(i)}(x)[\Delta x_1 \dots \Delta x_i](t) = \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)\pi_s \chi_0(f^{(i)}(x_\sigma)[\Delta x_{1_\sigma} \dots \Delta x_{i_\sigma}]).$$

Repare que isso é verdade para $i = 0$ por definição dessas funções.

Mostraremos então que temos a $(i+1)$ -ésima derivada dessas funções e que elas satisfazem fórmulas semelhantes.

Na verdade mostraremos que as funções dadas pela fórmula acima para $i+1$, que por comodidade já chamaremos de $\bar{\ell}^{(i+1)}, \bar{\phi}_g^{(i+1)}, \bar{\phi}_f^{(i+1)}, \bar{\psi}_g^{(i+1)}, \bar{\psi}_f^{(i+1)} : \hat{\beta}_+ \rightarrow$

$\mathcal{M}^{i+1}(\widehat{\beta}_+^{i+1}, \beta_+)$, satisfazem os limites de Fréchet:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\ell}^{(i)}(x + \Delta x) - \bar{\ell}^{(i)}(x) - \bar{\ell}^{(i+1)}(x) \cdot \Delta x\|}{\|\Delta x\|} \\ &= \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\phi}_g^{(i)}(x + \Delta x) - \bar{\phi}_g^{(i)}(x) - \bar{\phi}_g^{(i+1)}(x) \cdot \Delta x\|}{\|\Delta x\|} \\ &= \text{etc.} \end{aligned}$$

Lembremos que a norma no numerador de cada limite é a norma de $\mathcal{M}^i(\widehat{\beta}_+^i, \beta_+)$, dada por, para $z \in \mathcal{M}^i(\widehat{\beta}_+^i, \beta_+)$,

$$\begin{aligned} \|z\| &= \sup_{t \geq 0} \|z(t)\| \quad \text{se } i = 0 \\ \text{e} \quad \|z\| &= \sup_{\substack{\Delta x_j \in \widehat{\beta}_+ \\ \|\Delta x_j\| \leq 1 \\ j=1,2,\dots,i}} \sup_{t \geq 0} \|z(\Delta x_1 \dots \Delta x_i)(t)\| \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} &\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\ell}^{(i)}(x + \Delta x) - \bar{\ell}^{(i)}(x) - \bar{\ell}^{(i+1)}(x) \cdot \Delta x\|}{\|\Delta x\|} = \\ &= \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Delta x_j \in \widehat{\beta}_+ \\ \|\Delta x_j\| \leq 1 \\ j=1,\dots,i}} \sup_{t \geq 0} \frac{\|T(t)\pi_s \chi_0 [(f^{(i)}(x_t + \Delta x_t) - f^{(i)}(x_t) - f^{(i+1)}(x_t) \Delta x_t) [\Delta x_{1_t} \dots \Delta x_{i_t}]]\|}{\|\Delta x\|} \\ &\leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} K \cdot e^{-\alpha t} \|\pi_s\| \frac{\|f^{(i)}(x_t + \Delta x_t) - f^{(i)}(x_t) - f^{(i+1)}(x_t) \Delta x_t\|}{\|\Delta x\|} \\ &\leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} K \cdot \|\pi_s\| \frac{\|\int_0^1 (f^{(i+1)}(x_t + \xi \Delta x_t) - f^{(i+1)}(x_t)) \Delta x_t d\xi\|}{\|\Delta x\|} \\ &\leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} K \|\pi_s\| \frac{L_M^{(i+1)}(f) \cdot \frac{1}{2} \|\Delta x\| \cdot \|\Delta x\|}{\|\Delta x\|} = 0. \end{aligned}$$

Usamos acima que $f \in \tilde{\mathcal{X}}^k \subset \tilde{\mathcal{X}}^{i+1}$ e usamos $(2)^{i+1}$ com $M > 0$ tal que $\|x + \xi \Delta x\| < M$ para $0 \leq \xi \leq 1$ e $\|\Delta x\|$ pequeno.

Temos também:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\phi}_g^{(i)}(x + \Delta x) - \bar{\phi}_g^{(i)}(x) - \bar{\phi}_g^{(i+1)}(x) \cdot \Delta x\|}{\|\Delta x\|} = \\
& = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Delta x_j \in \widehat{\beta}_+ \\ \|\Delta x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, i}} \sup_{t \geq 0} \frac{\left\| \int_{-\infty}^0 T(-\sigma) \pi_u \chi_0 [(g^{(i)}(x_{t+\sigma} + \Delta x_{t+\sigma}) - g^{(i)}(x_{t+\sigma}) \right. \\
& \quad \left. - g^{(i+1)}(x_{t+\sigma}) \Delta x_{t+\sigma}) (\Delta x_{1t+\sigma} \dots \Delta x_{it+\sigma})] d\sigma \right\|}{\|\Delta x\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \int_0^\infty K e^{-\alpha \sigma} \|\pi_u\| \frac{\|g^{(i)}(x_{t+\sigma} + \Delta x_{t+\sigma}) - g^{(i)}(x_{t+\sigma}) - g^{(i+1)}(x_{t+\sigma}) \Delta x_{t+\sigma}\| d\sigma}{\|\Delta x\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} K \cdot \|\pi_u\| \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha \sigma} L_M^{(i+1)}(g) \cdot \frac{1}{2} \frac{\|\Delta x\| \cdot \|\Delta x\|}{\|\Delta x\|} d\sigma \\
& = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} K \cdot \|\pi_u\| \cdot \frac{1}{2} L_M^{(i+1)}(g) \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \|\Delta x\| = 0
\end{aligned}$$

Usamos acima que $g \in Y^k \subset Y^{i+1}$ e usamos (2)ⁱ⁺¹ com $M > 0$ como no outro caso.

Temos ainda:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\phi}_f^{(i)}(x + \Delta x) - \bar{\phi}_f^{(i)}(x) - \bar{\phi}_f^{(i+1)}(x) \cdot \Delta x\|}{\|\Delta x\|} = \\
& = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Delta x_j \in \widehat{\beta}_+ \\ \|\Delta x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, i}} \sup_{t \geq 0} \frac{\left\| \int_{-\infty}^0 d\sigma T(-\sigma) \pi_u \chi_0 [(f^{(i)}(x_{t+\sigma} + \Delta x_{t+\sigma}) - f^{(i)}(x_{t+\sigma}) \right. \\
& \quad \left. - f^{(i+1)}(x_{t+\sigma}) \Delta x_{t+\sigma}) (\Delta x_{1t+\sigma} \dots \Delta x_{it+\sigma})] \right\|}{\|\Delta x\|} \\
& = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Delta x_j \in \widehat{\beta}_+ \\ \|\Delta x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, i}} \sup_{t \geq 0} \sup_{\theta \in [-r, 0]} \frac{\left\| \int_{-\infty}^0 d\sigma R^u(\theta - \sigma) [(f^{(i)}(x_{t+\sigma} + \Delta x_{t+\sigma}) - f^{(i)}(x_{t+\sigma}) \right. \\
& \quad \left. - f^{(i+1)}(x_{t+\sigma}) \Delta x_{t+\sigma}) (\Delta x_{1t+\sigma} \dots \Delta x_{it+\sigma})] \right\|}{\|\Delta x\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \sup_{\theta \in [-r, 0]} SV_{[-\infty, 0]}[R^u] \sup_{\sigma \geq 0} \frac{\|f^{(i)}(x_{t+\sigma} + \Delta x_{t+\sigma}) - f^{(i)}(x_{t+\sigma}) - f^{(i+1)}(x_{t+\sigma}) \cdot \Delta x_{t+\sigma}\|}{\|\Delta x\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} SV_{[-\infty, 0]}[R^u] \cdot L_M^{(i+1)}(f) \cdot \frac{1}{2} \|\Delta x\| = 0 \quad (SV_{[-\infty, 0]}[R^u] < \infty \text{ pelo teorema II.3.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\psi}_g^{(i)}(x + \Delta x) - \bar{\psi}_g^{(i)}(x) - \bar{\psi}_g^{(i+1)}(x) \cdot \Delta x\|}{\|\Delta x\|} = \\
& = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Delta x_j \in \widehat{\beta}_+ \\ \|\Delta x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, i}} \sup_{t \geq 0} \frac{\|\int_0^t T(t-\sigma) \pi_s \chi_o((g^{(i)}(x_\sigma + \Delta x_\sigma) - g^{(i)}(x_\sigma) \\
& \quad - g^{(i+1)}(x_\sigma) \Delta x_\sigma)(\Delta x_{1_\sigma} \dots \Delta x_{i_\sigma})) d\sigma\|}{\|\Delta x\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \int_0^t K e^{-\alpha(t-\sigma)} \|\pi_s\| \cdot \frac{\|g^{(i)}(x_\sigma + \Delta x_\sigma) - g^{(i)}(x_\sigma) - g^{(i+1)}(x_\sigma) \Delta x_\sigma\|}{\|\Delta x\|} d\sigma \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} K \|\pi_s\| \cdot L_M^{(i+1)}(g) \cdot \frac{1}{2} \|\Delta x\| \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\psi}_f^{(i)}(x + \Delta x) - \bar{\psi}_f^{(i)}(x) - \bar{\psi}_f^{(i+1)}(x) \cdot \Delta x\|}{\|\Delta x\|} = \\
& = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Delta x_j \in \widehat{\beta}_+ \\ \|\Delta x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, i}} \sup_{t \geq 0} \sup_{\theta \in [-r, 0]} \frac{\|\int_0^t d_\sigma R^s(t + \theta - \sigma)[(f^{(i)}(x_\sigma + \Delta x_\sigma) - f^{(i)}(x_\sigma) \\
& \quad - f^{(i+1)}(x_\sigma) \Delta x_\sigma)(\Delta x_{1_\sigma} \dots \Delta x_{i_\sigma})]\|}{\|\Delta x\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \sup_{\theta \in [-r, 0]} SV_{[-r, t+\theta]}[R^s] \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \frac{\|f^{(i)}(x_\sigma + \Delta x_\sigma) - f^{(i)}(x_\sigma) - f^{(i+1)}(x_\sigma) \Delta x_\sigma\|}{\|\Delta x\|} \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} SV_{[-r, \infty]}[R^s] \cdot L_M^{(i+1)}(f) \cdot \frac{1}{2} \cdot \|\Delta x\| = 0.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que $\bar{\ell}^{(i+1)}, \bar{\phi}_g^{(i+1)}, \bar{\phi}_f^{(i+1)}, \bar{\psi}_g^{(i+1)}, \bar{\psi}_f^{(i+1)}: \widehat{\beta}_+ \rightarrow \mathcal{M}^{(i+1)}(\widehat{\beta}_+^{(i+1)}, \beta_+)$ são contínuas.

Mostremos que elas são contínuas em $x \in \widehat{\beta}_+$. Temos:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \|\bar{\ell}^{(i+1)}(x + \Delta x) - \bar{\ell}^{(i+1)}(x)\| = \\
& = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Delta x_j \in \widehat{\beta}_+ \\ \|\Delta x_j\| \leq 1 \\ j=1, \dots, i+1}} \sup_{t \geq 0} \|T(t) \pi_s \chi_o((f^{(i+1)}(x_t + \Delta x_t) - f^{(i+1)}(x_t))(\Delta x_{1_t} \dots \Delta x_{(i+1)_t}))\| \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} K e^{-\alpha t} \|\pi_s\| \cdot \|f^{(i+1)}(x_t + \Delta x_t) - f^{(i+1)}(x_t)\| \\
& \leq \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} K \cdot \|\pi_s\| \cdot L_M^{(i+1)}(f) \cdot \|\Delta x\| = 0.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo como nos limites anteriores e como neste último, podemos mostrar que:

$$\begin{aligned}\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \|\bar{\phi}_g^{(i+1)}(x + \Delta x) - \bar{\phi}_g^{(i+1)}(x)\| &= 0 \\ \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \|\bar{\phi}_f^{(i+1)}(x + \Delta x) - \bar{\phi}_f^{(i+1)}(x)\| &= 0 \\ \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \|\bar{\psi}_g^{(i+1)}(x + \Delta x) - \bar{\psi}_g^{(i+1)}(x)\| &= 0 \\ \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \|\bar{\psi}_f^{(i+1)}(x + \Delta x) - \bar{\psi}_f^{(i+1)}(x)\| &= 0\end{aligned}$$

Com isso, terminamos a indução e temos que

$$\ell, \phi_g, \phi_f, \psi_g, \psi_f: \hat{\beta}_+ \rightarrow \beta_+ \text{ são de classe } C^k.$$

Assim, $\mathcal{H} = (\mathcal{F}, G)$ é de classe C^k em $(U, x) \in \beta_+^u \times \hat{\beta}_+$.

Reparemos que para $x, \Delta x \in \hat{\beta}_+$ e $t \geq 0$ temos:

$$\begin{aligned}\ell'(x)\Delta x(t) &= T(t)\pi_s\chi_0(f'(x_t)\Delta x_t - f'(x_0)\Delta x_0 - f'(0)(\Delta x_t - \Delta x_0)) \\ \phi'_g(x)\Delta x(t) &= \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)\pi_u\chi_0(g'(x_{t+\sigma})\Delta x_{t+\sigma} - g'(0)\Delta x_{t+\sigma})d\sigma \\ \phi'_f(x)\Delta x(t) &= \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)\pi_u\chi_0(f'(x_{t+\sigma})\Delta x_{t+\sigma} - f'(x_t)\Delta x_t - f'(0)(\Delta x_{t+\sigma} - \Delta x_t)) \\ \psi'_g(x)\Delta x(t) &= \int_0^t T(t-\sigma)\pi_s\chi_0(g'(x_\sigma)\Delta x_\sigma - g'(0)\Delta x_\sigma)d\sigma \\ \psi'_f(x)\Delta x(t) &= \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)\pi_s\chi_0(f'(x_\sigma)\Delta x_\sigma - f'(x_t)\Delta x_t - f'(0)(\Delta x_\sigma - \Delta x_t))\end{aligned}$$

e por verificação direta concluímos que quando $x = 0 \in \hat{\beta}_+$ temos

$$\ell'(0) = \phi'_g(0) = \phi'_f(0) = \psi'_g(0) = \psi'_f(0) = 0.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (U, x)}(0, 0, 0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}(0, 0, 0)}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{F}(0, 0, 0)}{\partial x} \\ \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial U} & \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial x} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} I_{\beta_+^u} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_+ \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_{\beta_+^u} & 0 \\ 0 & I_{\bar{\beta}_+} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Estamos em condições de aplicar o Teorema da Função Implícita em $\mathcal{H}$, ou seja, podemos dizer que

Existe uma vizinhança aberta V_0 de 0 em $\mathcal{G}_s^+$ e uma vizinhança aberta $\widehat{W}_0$ de $(0,0)$ em $\beta_+^u \times \widehat{\beta}_+$ tal que para cada $\varphi_s \in V_0$ existe um único $(U, x) = (U^{\varphi_s}, x^{\varphi_s}) \in \widehat{W}_0$ tal que $\mathcal{H}(U^{\varphi_s}, x^{\varphi_s}, \varphi_s) = (0,0)$. Pela proposição 1 temos que $G(U, x, \varphi_s) = 0 \Leftrightarrow x$ é solução de (N) para $t \geq 0$ com $x_0 = \varphi_s + \varphi_u(x)$.

Então para cada $\varphi_s \in V_0$ existe uma única solução de (N) limitada para $t \geq 0$, $x = x^{\varphi_s}$ com $(x_0^{\varphi_s})_s = \varphi_s$ e $((\mathcal{I}_+ x)_u, x) \in \widehat{W}_0$ (pela proposição 2, repare que $U(t) = (x_t)_u$ para $t \geq 0$).

Essa solução se estende da maneira única para $t \in \mathbb{R}$.

Seja $W_0 \subset \beta_+^u \times \beta_+^s$ definido por

$$\begin{aligned} W_0 &= \{(U, V) \in \beta_+^u \times \beta_+^s \mid U + V \notin \overline{\beta}_+ \text{ ou } (U + V \in \overline{\beta}_+ \text{ e } (U, \mathcal{I}_+^{-1}(U + V)) \in \widehat{W}_0)\} \\ &= \{(U, V) \in \beta_+^u \times \beta_+^s \mid (U + V \in \overline{\beta}_+ \Rightarrow (U, \mathcal{I}_+^{-1}(U + V)) \in \widehat{W}_0)\} \end{aligned}$$

Claramente $(0,0) \in W_0$. Vamos mostrar que W_0 é aberto em $\beta_+^u \times \beta_+^s$.

Sejam $(U_n, V_n) \in \beta_+^u \times \beta_+^s \setminus W_0$ para $n \in \mathbb{N}$ uma seqüência tal que $(U_n, V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (U, V)$ em $\beta_+^u \times \beta_+^s$. Como $(U_n, V_n) \notin W_0$ temos que $U_n + V_n \in \overline{\beta}_+$ e $(U_n, \mathcal{I}_+^{-1}(U_n + V_n)) \notin \widehat{W}_0$. Logo (U, V) é tal que

$$U_n + V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U + V \in \overline{\beta}_+ \quad (\overline{\beta}_+ \text{ é subespaço fechado de } \beta_+)$$

$$(U_n, \mathcal{I}_+^{-1}(U_n + V_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (U, \mathcal{I}_+^{-1}(U + V)) \notin \widehat{W}_0 \quad (\widehat{W}_0 \text{ é aberto em } \beta_+^u \times \widehat{\beta}_+)$$

Assim $(U, V) \notin W_0$, o que mostra que W_0 é aberto.

Para $\varphi_s \in V_0$ temos $((\mathcal{I}_+ x^{\varphi_s})_u, x^{\varphi_s}) \in \widehat{W}_0$ e então $((\mathcal{I}_+ x^{\varphi_s})_u, (\mathcal{I}_+ x^{\varphi_s})_s) \in W_0$.

Por outro lado, se tivéssemos uma outra solução de (N) , $\bar{x} \in \widehat{\beta}_+$ com $(\bar{x}_0)_s = \varphi_s$ e $((\mathcal{I}_+ \bar{x})_u, (\mathcal{I}_+ \bar{x})_s) \in W_0$ teríamos que $((\mathcal{I}_+ \bar{x})_u, \bar{x}) \in \widehat{W}_0$, o que faz com que tenhamos $\bar{x} = x^{\varphi_s}$ (existe uma única $x^{\varphi_s} \in \widehat{\beta}_+$ nestas condições).

Finalmente podemos considerar W_0 como sendo uma bola aberta de $\beta_+ \equiv \beta_+^u \times \beta_+^s$, pois sendo a função implícita de classe C^k (pois $\mathcal{H}$ é de classe C^k) e a aplicação que

leva $(U, x) \in \beta_+^u \times \widehat{\beta}_+$ em $(U, (\mathcal{I}_+ x)_s) \in \beta_+^u \times \beta_+^s$ linear e contínua, temos que a imagem inversa de uma bola aberta de β_+ contida em W_0 por essa composta que vai de V_0 em W_0 seria um aberto contido em V_0 (basta chamar então de W_0 a essa bola e de V_0 a esse aberto do domínio).

Com isso obtemos a função $u_0 : V_0 \subset \mathcal{G}_s^+ \rightarrow \mathcal{G}_u^+$ dada por

$$u_0(\varphi_s) = (x_0^{\varphi_s})_u = U^{\varphi_s}(0)$$

que é de classe C^k , pois a função implícita é de classe C^k .

$$u_0(0) = U^0(0) = 0 \text{ e}$$

$$u_0(\varphi_s) = \gamma_0 \cdot U^{\varphi_s} = \gamma_0(\phi_g(x^{\varphi_s}) + \phi_f(x^{\varphi_s}))$$

(onde $\gamma_0 : \beta_+^u \rightarrow \mathcal{G}_u^+$ é a avaliação linear-contínua de $U \in \beta_+^u$ em $t = 0$ e usamos acima o fato de $\mathcal{F}(U^{\varphi_s}, x^{\varphi_s}, \varphi_s) = 0$).

$$\text{Logo } u'_0(\varphi_s) = \gamma_0 \cdot \phi'_g(x^{\varphi_s}) \cdot \frac{dx^{\varphi_s}}{d\varphi_s} + \gamma_0 \cdot \phi'_f(x^{\varphi_s}) \cdot \frac{dx^{\varphi_s}}{d\varphi_s}.$$

Quando $\varphi_s = 0$ sabemos que $x^{\varphi_s} = 0$ e já vimos que $\phi'_g(0) = 0$ e $\phi'_f(0) = 0$, logo $u'_0(0) = 0$.

Assim $\widetilde{\mathcal{S}}$ definido na Observação do nosso teorema, como sendo o gráfico da função $u_0 : V_0 \subset \mathcal{G}_s^+ \rightarrow \mathcal{G}_u^+$ tangencia $\mathcal{G}_s^+$ na origem e é difeomorfo de classe C^k a V_0 e portanto à bola unitária de $\mathcal{G}_s^+$.

Tomemos agora $\mathcal{S}$ definido na hipótese a) do teorema. Obviamente $\widetilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S} \cap (\mathcal{G}_u^+ \times V_0)$. Mostremos que $\mathcal{S} \cap (\mathcal{G}_u^+ \times V_0) \subset \widetilde{\mathcal{S}}$.

Seja $((x_t^{\varphi_s})_u, (x_t^{\varphi_s})_s) \in \mathcal{S} \cap (\mathcal{G}_u^+ \times V_0)$ para algum $t \geq 0$ e $\varphi_s \in V_0$. Tudo o que temos que mostrar é que $u_0((x_t^{\varphi_s})_s) = (x_t^{\varphi_s})_u$. Mas a função $y \in \widehat{\beta}_+$ definida por $y(\sigma) = x(t + \sigma)$ satisfaz (N) pois (N) é autônoma e temos $((\mathcal{I}_+ y)_u, (\mathcal{I}_+ y)_s) \in W_0$ pois $\|y\| \leq \|x\|$ em $\widehat{\beta}_+ \subset \beta_+$ e W_0 é uma bola aberta de β_+ vista como aberto de $\beta_+^u \times \beta_+^s$.

Assim para $\psi_s = (x_t^{\varphi_s})_s \in V_0$ temos que $y = x^{\psi_s} \in \widehat{\beta}_+$ e $u_0(\psi_s) = (y_0)_u$, ou seja, $u_0((x_t^{\varphi_s})_s) = (x_t^{\varphi_s})_u$. Portanto,

$$\mathcal{S} \cap (\mathcal{G}_u^+ \times V_0) = \widetilde{\mathcal{S}}.$$

Vamos finalizar o item a) mostrando que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t^{\varphi_s} = 0$.

Restringiremos $\mathcal{H}$ a $\beta_+^u \times \hat{\beta}_+^0 \times \mathcal{G}_s^+$ onde $\hat{\beta}_+^0 = \{x \in \hat{\beta}_+ \mid x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}$ é subespaço fechado de $\hat{\beta}_+$. Seja $\bar{\beta}_+^0 = \mathcal{I}_+(\hat{\beta}_+^0) \subset \bar{\beta}_+$.

Vamos mostrar que $\mathcal{H}(\beta_+^u \times \hat{\beta}_+^0 \times \mathcal{G}_s^+) \subset \beta_+^u \times \bar{\beta}_+^0 \equiv \beta_+^u \times \hat{\beta}_+^0$, ou seja, que $\lim_{t \rightarrow \infty} G(U, x, \varphi_s)(t) = 0$ se $x \in \hat{\beta}_+^0$.

Ora, $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_t - T(t)\varphi_s - T(t)[\chi_0(f(x_t) - f(x_0) - f'(0)(x_t - x_0))]_s) = 0$

pois $\|f(x_t) - f(x_0) - f'(0)(x_t - x_0)\| \leq M$ e $\|T(t)|_{\mathcal{G}_s^+}\| \leq Ke^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$

Resta mostrar que

$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_g(x)(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_f(x)(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_g(x)(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_f(x)(t) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists T > 0$ | para $\sigma > T$ temos $\|g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma\| < \varepsilon$. Assim, para $t > T$,

$$\begin{aligned} \|\phi_g(x)(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^0 T(-\sigma)(\chi_0(g(x_{t+\sigma}) - g'(0)x_{t+\sigma}))_u d\sigma \right\| \\ &= \left\| \int_{-\infty}^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_u d\sigma \right\| \\ &\leq \int_{-\infty}^t Ke^{\alpha(t-\sigma)} \|\pi_u\| \cdot \|g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma\| d\sigma \leq \|\pi_u\| \cdot K \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Temos também para $T > 0$ suficientemente grande, que para $\sigma > T$ e $t > T$

$$\|f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)\| < \varepsilon$$

Assim, para $t > T$

$$\begin{aligned} \|\phi_f(x)(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^0 d_\sigma T(-\sigma)(\chi_0(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)))_u \right\| \\ &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \left\| \int_{-\infty}^0 d_\sigma R^u(\theta - \sigma)(f(x_{t+\sigma}) - f(x_t) - f'(0)(x_{t+\sigma} - x_t)) \right\| \\ &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \left\| \int_{-\infty}^t d_\sigma R^u(t + \theta - \sigma)(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)) \right\| \\ &\leq SV_{[-\infty, 0]}[R^u] \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando $t > T$

$$\begin{aligned}
\|\psi_g(x)(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma \right\| \leq \\
&\leq \left\| \int_0^T T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma \right\| + \left\| \int_T^t T(t-\sigma)(\chi_0(g(x_\sigma) - g'(0)x_\sigma))_s d\sigma \right\| \\
&\leq \int_0^T K e^{-\alpha(t-\sigma)} \|\pi_s\| M d\sigma + \int_T^t K e^{-\alpha(t-\sigma)} \|\pi_s\| \cdot \varepsilon d\sigma \\
&= K.M \|\pi_s\| \left(\frac{e^{-\alpha(t-T)}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) + K \|\pi_s\| \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha(t-T)}}{\alpha} \right) \varepsilon \\
&\leq \frac{K.M \|\pi_s\|}{\alpha} (\varepsilon + \varepsilon) + \frac{K \|\pi_s\|}{\alpha} \cdot \varepsilon,
\end{aligned}$$

se tomarmos $t > \bar{t}$ tal que $e^{-\alpha(\bar{t}-T)} < \varepsilon$ e $e^{-\alpha \bar{t}} < \varepsilon$.

Finalmente, para $t > T$

$$\begin{aligned}
\|\psi_f(x)(t)\| &= \left\| \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_s \right\| \leq \\
&\leq \sup_{\theta \in [-r, 0]} \left\| \int_0^T d_\sigma R^s(t+\theta-\sigma)(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)) \right\| \\
&\quad + \sup_{\theta \in [-r, 0]} \left\| \int_T^t d_\sigma R^s(t+\theta-\sigma)(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)) \right\| \\
&\leq SV_{[t-T-r, t]}[R^s].M + SV_{[-r, \infty]}[R^s].\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > \frac{T+r}{r}$, ou seja, $t - nr < t - T - r$ temos

$$\begin{aligned}
SV_{[t-T-r, t]}[R^s] &\leq SV_{[t-nr, t]}[R^s] \leq \sum_{j=0}^{n-1} SV_{[t-(j+1)r, t-jr]}[R^s] \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} K_2 e^{-\alpha(t-jr)} \leq \bar{K} e^{-\alpha t} \quad (\text{pelo teorema II.3.3}).
\end{aligned}$$

Se tomarmos então $t > \bar{t}$ tal que $e^{-\alpha \bar{t}} < \varepsilon$ teremos

$$\left\| \int_0^t d_\sigma T(t-\sigma)(\chi_0(f(x_\sigma) - f(x_t) - f'(0)(x_\sigma - x_t)))_s \right\| \leq \bar{K} M \varepsilon + SV_{[-r, \infty]}[R^s].\varepsilon$$

Conclusão:

$$\text{temos} \quad \mathcal{H}_{|\beta_+^u \times \widehat{\beta}_+^0 \times \mathcal{G}_s^+} : \beta_+^u \times \widehat{\beta}_+^0 \times \mathcal{G}_s^+ \rightarrow \beta_+^u \times \bar{\beta}_+^0.$$

Fazendo todo o raciocínio para aplicar o Teorema da Função Implícita nessa restrição de $\mathcal{H}$ encontramos por fim uma vizinhança $\widetilde{V}_0$ de 0 em $\mathcal{G}_s^+$ e $\widetilde{W}_0$ vizinhança de $(0,0)$ em $\beta_+^u \times \widehat{\beta}_+^0 \subset \beta_+^u \times \widehat{\beta}_+$ tal que para cada $\varphi_s \in \widetilde{V}_0$ existe um único $x \in \widehat{\beta}_+^0$ solução de (N) com $((\mathcal{I}_+x)_u, x) \in \widetilde{W}_0$ e $(x_0)_s = \varphi_s$. Podemos tomar $\widetilde{W}_0 \subset \widehat{W}_0$ (pois se tomamos um aberto de $\beta_+^u \times \widehat{\beta}_+^0$ contendo $(0,0)$ e contido em $\widetilde{W}_0 \cap \widehat{W}_0$ a imagem inversa desse aberto pela função implícita, que é de classe C^k , será um aberto contido em $\widetilde{V}_0$). Para $\varphi_s \in V_0 \cap \widetilde{V}_0$ a única função $x^{\varphi_s} \in \widehat{\beta}_+$ solução de (N) com $((\mathcal{I}_+x^{\varphi_s})_u, x^{\varphi_s}) \in \widehat{W}_0$ e $(x_0^{\varphi_s})_s = \varphi_s$ será então a única função $x \in \widehat{\beta}_+^0$ solução de (N) com $((\mathcal{I}_+x)_u, x) \in \widetilde{W}_0 \subset \widehat{W}_0$ e $(x_0)_s = \varphi_s$.

Assim, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t^{\varphi_s} = 0$.

b) A prova do item b) é completamente análoga à do item a) e será omitida.

A nova função $\mathcal{H} : \beta_-^s \times \widehat{\beta}_- \times \mathcal{G}_u^+ \rightarrow \beta_-^s \times \overline{\beta}_-$ será simétrica à do item a), tomando $t \leq 0$, trocando sempre ∞ por $-\infty$ e π_u por π_s e π_s por π_u .

Essa nova $\mathcal{H}$ se encaixa nas hipóteses do teorema da Função Implícita e aplicando o teorema a essa $\mathcal{H}$ nós obtemos o item b) depois de fazer todas as observações que foram feitas no item a) de maneira simétrica (trocando sempre ∞ por $-\infty$, π_u por π_s , π_s por π_u , $t \geq 0$ por $t \leq 0$, usando a parte b) da proposição 2 ao invés da parte a), etc.). ■

BIBLIOGRAFIA

- [Hale 1] Hale, J. *Ordinary Differential Equations*. Weley, 1969.
- [Hale 2] Hale, J. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, 1977.
- [Hale 3] Hale, J. and Cruz, M.A. *Asymptotic Behavior of Neutral Functional Differential Equations*.
- [Hale 4] Hale, J. and Chow, S.N. *Methods of Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1982.
- [H,M,O] Hale, J., Magalhães, L.T. and Oliva, W.M. *An introduction to infinite dimensional dynamical systems: geometric theory*. New York, Springer, 1977, 365 p. (Applied Mathematical Sciences, 3).
- [Henry 1] Henry, D. *Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations*. Journal of Differential Equations 15 (106-128), 1974.
- [Henry 2] Henry, D. *A property of the exponential function*. Publ.Mat. UAB (Universitat Autònoma de Barcelona), vol.31, nº 1, artigo 5 - Bellaterra, abril 1987.
- [Henry 3] Henry, D. *A difference Equation*. (manuscrito a publicar).
- [Henry 4] Henry, D. *Small solutions of linear autonomous*. FDEs, J. Differential Equations 8 (1970).
- [H1] Hömig, C.S. *Volterra-Stieltjes Integral Equations: Functional Analytic Methods, Linear Constraints*. Amsterdam, North-Holland, 1975 (North-Holland Mathematics Studies, 16).
- [H2] Hömig, C.S., Gomes Neto, J.B., Cardassi, Carmen Silvia. *A generalization of the Gronwall Inequality*. 10º Seminário Brasileiro de Análise, 1979 - SBM - p.147-161.
- [H3] Hömig, C.S. *Equations Integrales generalisées et applications*. Probl. Mathématiques d'Orsay, Exposé n.5, 1981-82.
- [H4] Hömig, C.S. *Volterra-Stieltjes Integral Equations*. Proceedings of the São Carlos Conference, 1979, Springer Lectures Notes in Mathematics, 799, p.173-216.

- [H5] Hönig, C.S. *The Resolvent of a Linear Volterra–Stieltjes Integral Equation*. Atas do 11º Seminário Brasileiro de Análise, 1980, SBM, p.361-381.
- [H6] Hönig, C.S. *Fredholm–Stieltjes Integral Equations I*. Analysis y sus aplicaciones, IV Escuela Latinoamericana de Matematica. Lima, 1979, p.126-160.
- [IC] Camargo, I. *Second-Order Retarded Functional Differential Equations: Generic Properties*. Advanced Topics in the Theory of Dynamical Systems. Notes and reports in mathematics in science and engineering, vol. 6, 51-73. Academic Press, 1989.
- [JO] Oliveira, J.C. *The generic $\mathcal{G}_1$ -property for a class NFDE's*. Journal of Differential Equations, 31(3): 329-336, 1979.
- [LF] Fichmann, L. *Equações integrais de Volterra–Stieltjes e Equações do tipo neutro*. Tese de mestrado, IME-USP, 1984.
- [M-P] Mallet-Paret, J. *Generic periodic solutions of functional differential equations*. Journal of Differential Equations, 25(2): 163-183, 1977.
- [N] Nitecki, Z. *Differentiable Dynamics - An introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms*. The M.J.T. Press - Cambridge, Massachussets and London, 1971.
- [O] Oliva, W.M. *Functional Differential Equations on compact manifolds and an approximation theorem*. Journal of Differential Equations, 5(3): 483-496, 1969.
- [P] Palis Jr., J. *Seminário de Sistemas Dinâmicos*. IMPA, 1971.
- [R-N] Riez, F. and Nagy, B. *Functional Analysis*, Ungar, New York, 1955.
- [S] Schwabik, S. *A survey of some new results for regulated functions*. 28º Seminário Brasileiro de Análise, 1988, SBM, p.201-209.