A PROPRIEDADE DA EXTENSÃO ÚNICA
PARA FUNÇÕES CR

Lúcio Marcos Gonçalves Prado

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: Análise
Orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

- São Paulo, dezembro de 1991 -

À minha mãe D. Rosa
Ao professor e amigo Paulo

PREFÁCIO

Este trabalho foi desenvolvido no período de 1990-1991 e contou com apoio da Universidade de São Paulo para realizá-lo.

Queremos registrar nossos agradecimentos aos membros da CPG do IME-USP e, em particular, à Profa. Helena Maria Ávila de Castro. Não poderíamos, também, deixar de agradecer ao Pró-Reitor de Pós-Graduação, Prof. Oswaldo Ubriaco Lopes, pelo seu importante apoio e incentivo.

Gostaríamos de consignar nossos agradecimentos ao Grupo de Equações Diferenciais Parciais Lineares, em particular, ao Prof. Oscar F. Vilcachagua Erazo por sugestões úteis para realização deste trabalho, também, ao Grupo de Teoria de Funções Generalizadas, principalmente, ao Prof. Alfredo Jorge Aragona Vallejo, por nos permitir frequentar os seminários sob sua direção e por corretos ensinamentos no cursos de V.V.C., pelo incentivo para o término do trabalho, e ao João Toledo, pelas discussões matemáticas muito úteis.

É o momento de não esquecermos de agradecer aos amigos que sempre nos ajudaram nessa travessia.

Lúcia Junqueira, Márcia Salzano, Cássio Shimuta, Artur Tomita, Hugo, Cristina Bonomi, Francisco Rui, Roseli Fernandes, Edu A. Prado e, em especial, a Renatinha Grunberg.

Os amigos de outras batalhas (Co, CPGr), Marcelo Urbano Ferreira, Marcos Alonso Nunes, Moysés Berndt e, em especial, a Rubem Beltrão, com admiração.

Também mais efusivos agradecimentos a todos os professores dos cursos que frequentei, em particular, aos Profs. Sonia Pitta Coelho, Chaim S. Hönig, Antonio Gilioli (em

memória), Elza Gomide, Walter Ferrer e Edison Farah, pelo apoio e confiança.

Em especial, queremos agradecer aos nossos talentosos amigos: Oswaldo Rio Branco de Oliveira, que é responsável pelo nosso ingresso nesta área, ao Antônio Geloneze, pelo apoio fundamental e decisivo, e ao José A. Penna Brage, Odilon O. Luciano e João Carlos Prandini, pelo incentivo.

Por fim, e por isso importante, desejariamos expressar ao Prof. Paulo Cordaro nossos mais sinceros agradecimentos pela escolha do tema da dissertação, bem como por sua competente orientação. Foi uma honra podermos compartilhar da convivência com tão íntegra pessoa, claro - professor e brilhante - pesquisador. Muito obrigado, Paulo.

Encerramos agradecendo ao amigo Walter V. Fernandes pelo excelente trabalho de datilografia.

IME-USP, dezembro de 1991

Lúcio Marcos Gonçalves Prado

RESUMO

Nesta monografia apresentamos um estudo da propriedade da extensão única para funções CR definidas em subvariedades genéricas do espaço complexo. Descrevemos, principalmente, as idéias de M.S. Baouendi e F. Trèves que consistem em introduzir uma condição (*condição $\mathcal{A}$*) para reduzir o estudo ao de funções CR com suporte compacto em um determinado grupo de variáveis, situação à qual a chamada fórmula de aproximação se aplica.

ABSTRACT

In this dissertation we present a study about the unique continuation principle for CR functions defined on generic submanifolds of the complex space. We mainly describe the ideas of M.S. Baouendi e F. Trèves, which consist in introducing a geometric condition (*condition $\mathcal{A}$*) in order to reduce the problem to the situation when the CR functions under study have compact support in a group of variables, a case where it is possible to apply the so called “Approximation Formula”.

CONTEÚDO

Introdução	1
Capítulo I	6
1. Subvariedades Genéricas	6
2. Subvariedades CR	8
3. Estrutura CR	13
4. Genérica <i>versus</i> CR	17
5. Funções CR	18
6. Subvariedades Holomorfas	22
7. O espaço tangente holomorfo	22
8. Transversalidade holomorfa	23
9. Subvariedades Totalmente Reais	28
10. Subvariedades Não-Characterísticas de Variedades Genéricas	30
11. Três Proposições	32
Capítulo II	43
O problema inspirador do artigo de Baouendi e Trèves	43
Capítulo III	50
A <i>condição</i> $\mathcal{A}$	50
Proposição 2 - Hipersuperfícies que satisfazem a <i>condição</i> $\mathcal{A}$	53
Corolário 4 - Subvariedades reais-analíticas em $\mathbb{C}^{n+d}$, não características em $\mathcal{X}$, que satisfazem a <i>condição</i> $\mathcal{A}$	56

Capítulo IV	59
A Propriedade da extensão única	58
O Teorema Principal	59
Corolários do Teorema Principal	72
Conclusão	73
Apêndice A	75
Anulamento de Ordem Infinita	75
Apêndice B	82
Unicidade do Problema de Cauchy	82
Apêndice C	84
Derivadas de Função Lipschitz-Contínua	84
Teorema de Stokes	87
Bibliografia	89

INTRODUÇÃO

O nosso objetivo nesta monografia é o de apresentar um estudo de um típico problema de *extensão única* (localmente) de funções CR que se anulam de ordem infinita sobre subvariedades não-características de variedades genéricas.

Para ilustrarmos do que estamos tratando destaquemos, inicialmente, um problema básico de extensão única.

Seja h uma função holomorfa em uma variedade complexa e conexa M . Então, h será identicamente nula em M se acontecer um dos dois casos:

- (I) $h \equiv 0$ em uma subvariedade real-maximal $\mathcal{X}$ de M (ver Capítulo I e Apêndice B);
- (II) h anula-se de ordem infinita em um único ponto.

É natural perguntarmos se tais propriedades podem ser generalizadas para qualquer estrutura dada pelo subfibrado complexo do fibrado cotangente complexo gerado, localmente, por diferenciais exatas. Numa estrutura desse tipo o papel das funções holomorfas h são desempenhados pelas *soluções*: funções cujas diferenciais são secções do subfibrado acima mencionado.

A resposta a tal pergunta se desdobra em duas partes, a saber:

A unicidade da extensão como no caso (I) generaliza-se para toda estrutura dada por subfibrados como acima mencionados. Essa generalização é obtida graças a *Fórmula de Aproximação* [4]. Não é dispensável dizer que esta linha de problemas é conhecida na literatura como Unicidade do Problema de Cauchy.

Quanto ao caso (II), para generalizá-lo, o primeiro problema é identificar a classe de subvariedades que poderiam desempenhar o papel que os pontos desempenham no caso das variedades complexas. As candidatas naturais são as subvariedades não-características:

são subvariedades Σ cujo subfibrado conormal real $N^*\Sigma$ não intersecciona, a menos da secção zero, o conjunto característico T^0 do subfibrado estrutural. Todavia, não existe nenhuma indicação da validade da unicidade da extensão em subvariedades que são meramente não-característica.

Agora, quanto a gênese deste problema da extensão única o que se pode dizer é que F. Trèves propôs a questão a J.P. Rosay. Rosay demonstrou [11] a validade da extensão única sob as hipóteses de que a variedade base M era uma hipersuperfície real mergulhada no espaço complexo $\mathbb{C}^{n+1}$, de classe C^1 e Σ uma curva obtida pela intersecção transversal de M com uma curva holomorfa em $\mathbb{C}^{n+1}$ (isto é, subvariedade holomorfa de dimensão complexa igual a 1). É claro que a estrutura de M herdada do espaço complexo ambiente é uma estrutura CR. Ressaltemos que para a demonstração da extensão única Rosay formulou e provou um lema central, que é uma forma limite do Teorema do “edge of the wedge”.

Cabe ressaltar que Rosay, em seu artigo, se baseou em primeiro lugar nas extensões holomorfas, na fórmula de Bochner-Martinelli para assim conseguir uma certa aproximação polinomial e em segundo lugar, nos discos analíticos.

O artigo de Baouendi-Trèves, que ora estudamos, generaliza o resultado de Rosay para subvariedades não-características de variedades genéricas em ambiente $\mathbb{C}^N$. No entanto, as técnicas utilizadas pelos autores diferem substancialmente das de Rosay. Com efeito, combinam a “miniversão” da Fórmula de Aproximação [13] com uma mudança de variável por meio de uma condição chamada de *condição $\mathcal{A}$* a qual possibilita a transformação de uma dada solução numa outra, só que agora, suportada num compacto. Esse último ingrediente é uma adaptação do trabalho de Baouendi-Zachmanoglou [3]; aliás, no caso, quando a estrutura de M e a subvariedade Σ são reais-analíticas a extensão única é uma consequência direta do resultado principal do retro-referido artigo.

Nesse trabalho, estudamos importantes classes de subvariedades que satisfazem a condição $\mathcal{A}$ e, por conseguinte, a propriedade da extensão única.

A seguir, para sermos mais específicos enunciamos os resultados principais aqui estudados.

$\mathcal{X}$ é uma subvariedade genérica de $\mathbb{C}^{n+d}$, de classe C^1 , de codimensão real $d \geq 1$; Σ uma subvariedade de dimensão real d de $\mathcal{X}$, também de classe C^1 e igual a intersecção transversal holomorfa de $\mathcal{X}$ com uma subvariedade holomorfa $\mathcal{H}$ de $\mathbb{C}^{n+d}$, com dimensão complexa d .

Teorema: *Seja Σ uma subvariedade que satisfaz a condição $\mathcal{A}$ em cada um dos seus pontos a_0 . Então, Σ tem extensão única no ponto a_0 .*

Condição $\mathcal{A}$: *Seja $a_0 \in \Sigma$.*

Dada qualquer vizinhança aberta V de a_0 em Σ existe uma função holomorfa F e um subconjunto aberto $\mathcal{O}$ de $\mathcal{H}$ contendo V tal que $F(a_0) \neq 0$ e a componente conexa de a_0 no conjunto

$$\{a \in V / F(a) \neq 0\}$$

tem fecho compacto contido em V .

Unicidade da Extensão: *Seja $a_0 \in \Sigma$.*

Σ tem extensão única no ponto $a_0 \in \Sigma$ se:

Dada qualquer vizinhança aberta U de a_0 em $\mathcal{X}$ existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de a_0 em $\mathcal{X}$ tal que

se uma função h CR, lipschitziana-contínua em U anula-se de ordem infinita em $\Sigma \cap U$, então

$$h \equiv 0 \text{ em } V.$$

Quanto à distribuição dos capítulos nesta monografia, ficou:

No capítulo I, definimos subvariedades genéricas CR e em seguida mostramos que esses conceitos coincidem em $\mathbb{C}^N$.

Definimos função CR e damos exemplos que elucidam a natureza desse conceito.

Definimos subvariedades holomorfas e o conceito de transversalidade holomorfa e ao mesmo tempo relacionamos esse conceito com o de transversalidade comum (Thom).

Definimos, também, subvariedades totalmente reais, subvariedades reais-maximais e subvariedades não-características de variedades genéricas.

Por fim, demonstramos três proposições que desempenharão papel fundamental nos capítulos III e IV.

No capítulo II, enunciamos e demonstramos um problema que serve de inspirador para aquele que estamos estudando. Cabe destacar que a solução aqui apresentada faz uso somente de métodos elementares da Análise e que a demonstração se sustenta na técnica desenvolvida por Hans Lewy em seu famoso artigo [9].

No capítulo III, estabelecemos a *condição* $\mathcal{A}$ e estudamos algumas classes importantes de subvariedades que a satisfazem.

No capítulo IV, enunciamos e demonstramos o Teorema Principal do artigo e, evidentemente, deste trabalho.

Gostaríamos de destacar que os enunciados e definições constantes nesta monografia foram “economicamente” adaptados ao problema aqui estudado e que para não haver descontinuidade na exposição preparamos os Apêndices:

(A): Esse Apêndice trata do anulamento de ordem infinita, sempre muito usado, porém não sistematizado na literatura afim;

(B): Enunciamos nesse Apêndice o Teorema de Unicidade de Cauchy para funções holomorfas que se anulam numa subvariedade real-maximal de $\mathbb{C}^N$;

(C): É um Apêndice mais elaborado, pois, lançamos mão da Teoria de Correntes de G. de Rham para obter a derivação exterior de uma forma que é o produto de uma função Lipschitz-contínua por uma forma apenas contínua. Também, nesse Apêndice demonstramos uma variante do Teorema de Stokes para as formas “singulares” mencionadas acima.

Por fim, chegamos às conclusões do presente trabalho.

CAPÍTULO I

Subvariedades Genéricas; Subvariedades Holomorfas; Transversalidade Holomorfa; Subvariedades Totalmente Reais e Subvariedades Não-Characterísticas

1. Subvariedades genéricas

No que segue, admitiremos conhecidos os conceitos: fibrado conormal complexo $CN^*\mathcal{X}$, fibrado cotangente holomorfo $T'^{1,0}$ e fibrado cotangente anti-holomorfo $T'^{0,1}$.

Proposição 1.1: *Dada a subvariedade mergulhada $\mathcal{X}$ de $\mathbb{C}^N$ e de classe C^∞ , seja $a \in \mathcal{X}$, admitamos que existam uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^N$ contendo a e d funções a valores reais $\rho_1, \dots, \rho_d$, de classe C^∞ , tais que:*

$$(i) \mathcal{X} \cap U = \{b \in U \mid \rho_1(b) = \dots = \rho_d(b) = 0\};$$

$$(ii) d\rho_1 \wedge \dots \wedge d\rho_d \neq 0 \text{ em } U.$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

$$(a) \partial\rho_1(a) \wedge \dots \wedge \partial\rho_d(a) \neq 0;$$

$$(b) T'^{0,1}_a \cap CN^*_a\mathcal{X} = 0.$$

Demonstração: (a) $\rightarrow$ (b). Como $\{d\rho_1(a), \dots, d\rho_d(a)\}$ é base de $CN^*_a\mathcal{X}$, seja o vetor $v \in T'^{0,1}_a \cap CN^*_a\mathcal{X}$. Então,

$$v = \sum_{j=1}^d b_j d\rho_j(a) ;$$

o qual pode-se reescrever como:

$$\sum_{j=1}^d b_j \partial \rho_j(a) = v - \sum_{j=1}^d b_j \bar{\partial} \rho_j(a) \in T_a'^{0,1} ,$$

daí decorre que

$$\sum_{j=1}^d b_j \partial \rho_j(a) = 0 ,$$

donde $b_1 = \dots = b_d = 0$. Logo, $v = 0$. Em conclusão,

$$T_a'^{0,1} \cap \mathbb{C} N_a^* \mathcal{X} = 0 .$$

(b) $\rightarrow$ (a). Se

$$\sum_{j=1}^d b_j \partial \rho_j(a) = 0 \quad , \text{ então } \quad \sum_{j=1}^d b_j d \rho_j(a) = \sum_{j=1}^d b_j \bar{\partial} \rho_j(a) .$$

Daí de (b) decorre que

$$\sum_{j=1}^d b_j d \rho_j(a) = 0 ,$$

donde $b_1 = \dots = b_d = 0$. Logo,

$$\partial \rho_1(a) \wedge \dots \wedge \partial \rho_d(a) \neq 0 .$$

□

Definição 1.2: Diz-se que uma subvariedade mergulhada $\mathcal{X}$ de $\mathbb{C}^N$, de classe C^∞ , é uma subvariedade genérica se valem as condições (a) e (b) da proposição anterior em todos os pontos de $\mathcal{X}$.

Escólio 1.3: O conceito de subvariedade genérica é intrínseco.

É suficiente observar a condição (b) da proposição 1.1.

Definição 1.4: O número d chama-se codimensão real de $\mathcal{X}$ e denotamo-o por $\text{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{X} = d$.

2. Subvariedades CR

Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ uma subvariedade de classe C^∞ e dimensão real m . Lembremos que $CT\mathbb{C}^N$ se decompõe como soma direta $CT\mathbb{C}^N = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$, onde $T^{1,0}$ (respectivamente, $T^{0,1}$) é gerado pelos campos vetoriais holomorfos $\frac{\partial}{\partial z}$ (respectivamente, campos vetoriais antiholomorfos ou simplesmente, de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$). Admitamos que a seguinte condição esteja verificada:

$$a \longmapsto \dim_{\mathbb{C}}(CT_a \times \cap T_a^{0,1}) \text{ é constante sobre } \mathcal{X}.$$

Então,

$$\mathcal{V} = \bigcup_{a \in \mathcal{X}} (CT_a \mathcal{X} \cap T_a^{0,1})$$

define um subfibrado vetorial de $CT\mathcal{X}$ chamado de *estrutura CR* sobre $\mathcal{X}$. Nesse caso, diz-se que $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ é uma *subvariedade CR*.

A próxima proposição nos fornece exemplos de subvariedades CR.

Proposição 2.1: *Dada $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ uma hipersuperfície real de classe C^∞ cuja função definidora é $\rho \in C^\infty(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{R})$ com $d\rho \neq 0$ em $\mathcal{X}$. Então, $\mathcal{V} = CT\mathcal{X} \cap T^{0,1}$ define uma estrutura CR sobre $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Seja $a \in \mathcal{X}$. Admitamos, primeiramente, que a função definidora $\rho(z)$ satisfaça $\partial\rho(a)/\partial\bar{z}_{n+1} \neq 0$, pois, caso contrário, faz-se uma permutação de coordenadas para recair no caso inicialmente considerado. Como $\partial\rho(a)/\partial\bar{z}_{n+1} \neq 0$ decorre que existe uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\partial\rho(b)/\partial\bar{z}_{n+1} \neq 0$, para todo $b \in V$. Representemos por $E_j(b)$ os vetores de $\mathbb{C}^{n+1}$, $b \in V$,

$$\left(0, \dots, 0, \frac{\partial\rho(b)}{\partial\bar{z}_{n+1}}, 0, \dots, 0, -\frac{\partial\rho(b)}{\partial\bar{z}_j}\right) \quad \text{para } j : 1, \dots, n$$

É imediato constatar que $E_j(b)$ são $\mathbb{C}$ -linearmente independentes para todo $b \in V$.

Seja L uma seção de $\mathcal{V}$ sobre $V \cap \mathcal{X}$. Então,

$$L = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

Mostraremos, a seguir, que

$$(a_1(b), \dots, a_{n+1}(b)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(b) E_j(b) \quad , \forall b \in V \cap \mathcal{X} .$$

Seja o subespaço de $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$S(b) = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} / \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j}(b) \zeta_j = 0 \right\} ,$$

tem-se três fatos:

- (i) $\dim_{\mathbb{C}} S(b) = n$, $\forall b \in V \cap \mathcal{X}$; porque é núcleo de um funcional linear;
- (ii) o conjunto ordenado $\mathbb{C}$ -linearmente independente $\{E_1(b), \dots, E_n(b)\}$ está em $S(b)$, para todo $b \in V \cap \mathcal{X}$, resulta que $\{E_1(b), \dots, E_n(b)\}$ é uma base de $S(b)$ para todo $b \in V \cap \mathcal{X}$;
- (iii) $(a_1(b), \dots, a_{n+1}(b))$ pertence a $S(b)$, já que $L\rho = 0$ em $V \cap \mathcal{X}$.

Portanto,

$$(a_1(b), \dots, a_{n+1}(b)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(b) E_j(b), \text{ para todo } b \in V \cap \mathcal{X} .$$

Consideremos o conjunto de secções de $\mathcal{V}$ sobre $V \cap \mathcal{X}$

$$\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_{n+1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+1}} \right\}_{1 \leq j \leq n}$$

Então, esse conjunto é $\mathbb{C}$ -linearmente independente pela álgebra linear e gerador, pois

$$a_j = \alpha_j \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_{n+1}} \quad , \text{ para } j = 1, \dots, n$$

e

$$a_{n+1} = -\alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_1} - \alpha_2 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_2} - \dots - \alpha_n \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_n}$$

e substituindo em L , tem-se

$$L = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left[\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_{n+1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+1}} \right]$$

em $V \cap \mathcal{X}$. Assim,

$$\left\{ \frac{\partial \rho(b)}{\partial \bar{z}_{n+1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big|_b - \frac{\partial \rho(b)}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+1}} \Big|_b \right\}_{1 \leq j \leq n}$$

é base de $\mathcal{V}_b$, para todo $b \in V \cap \mathcal{X}$, em particular,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_b = n \quad , \text{ para todo } b \in V \cap \mathcal{X} \quad .$$

Mas, no início da demonstração tomamos $a \in \mathcal{X}$ arbitrário, logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_a = n \quad , \text{ para todo } a \in V \cap \mathcal{X} \quad .$$

Conclui-se, pois, que $\mathcal{V}$ é uma estrutura CR sobre $\mathcal{X}$. □

Antes de dar, propriamente, exemplos, vejamos, em geral, como determinar uma estrutura CR. Existem dois modos:

Modo Extrínscico: Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ uma subvariedade dada pelas funções definidoras $\rho_1, \dots, \rho_d$, globalmente, para simplificar:

$$\mathcal{X} = \{a \in \mathbb{C}^N / \rho_1(a) = \dots = \rho_d(a) = 0\} \quad .$$

Um campo vetorial de $T^{0,1}$ é dado por:

$$L = \sum_{j=1}^N a_j(a) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

e ele está em $\mathcal{V}$ em cada ponto a de $\mathcal{X}$, se

$$\sum_{j=1}^N a_j(a) \frac{\partial \rho_k(a)}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad , \text{ para } k = 1, \dots, d \quad .$$

Modo Intrínstico: Em coordenadas locais em $\mathcal{X}$ com $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{X} = m$, seja

$$L = \sum_{j=1}^m b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad .$$

Para L ser um elemento de $T^{0,1}$ ele precisa anular as funções holomorfas quando restritas a $\mathcal{X}$. Então, sejam $Z_k(x)$ as restrições a $\mathcal{X}$ das k -ésimas funções coordenadas, temos:

$$L \in T^{0,1} \Leftrightarrow LZ_k(x) = 0, \quad \text{para } k = 1, \dots, N \quad .$$

Exemplo: (2.2) Seja $Q \subset \mathbf{C}^2$ dada pela função definidora

$$\rho(w_1, w_2) = \frac{w_2 - \bar{w}_2}{2i} - |w_1|^2 \quad ,$$

precisamente,

$$Q = \{(w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Im} w_2 = |w_1|^2\} \quad .$$

Diz-se Q é a *hiperquádrica* (hipersuperfície real de $\mathbf{C}^2$). Pela proposição 2.1 o subfibrado estrutural $\mathcal{V}$ define uma estrutura CR sobre Q cujo posto é 1. Determinemos o campo gerador de $\mathcal{V}$. Com efeito, se L é um campo vetorial de $T^{0,1}$, então

$$L = \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{w}_1} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{w}_2}$$

o qual para estar em $\mathcal{V}$ deve anular a função definidora. Daí, obtemos:

$$\alpha(-w_1) + \beta\left(-\frac{1}{2i}\right) = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha 2iw_1 \quad .$$

Assim, $\mathcal{V}$ é gerado por

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1} - 2iw_1 \frac{\partial}{\partial \bar{w}_2}$$

Relacionado a esse mesmo exemplo, consideremos $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ a *hiperesfera*

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} .$$

Se L um campo vetorial de $T^{0,1}$, então

$$L = \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} ,$$

donde obtemos que $\mathcal{V}$ é gerado por

$$L = z_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} .$$

Agora, usando a transformação

$$\phi(z_1, z_2) = (w_1, w_2) ,$$

onde $w_1 = \frac{z_2}{1+z_1}$ e $w_2 = \frac{i(1-z_1)}{1+z_1}$, podemos mapear a hiperesfera na hiperquádrica e daí ϕ_*L é múltiplo de

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1} - 2iw_1 \frac{\partial}{\partial \bar{w}_2} .$$

Ainda com relação a esse exemplo, vejamos como determinar, de modo intrínstico, $\mathcal{V}$.

Como $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \ni (w_1, s) \mapsto (w_1, s + i|w_1|^2)$ é um mergulho em $\mathbb{C}^2$ que parametriza Q .

Então, nessas coordenadas, tem-se

$$L = \alpha \frac{\partial}{\partial w_1} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{w}_1} + \gamma \frac{\partial}{\partial s}$$

que para estar em $T^{0,1}$ deve anular as funções coordenadas w_1, w_2 de $\mathbb{C}^2$ quando restritas a Q , i.e.:

$$\text{se } w_1|_Q = w_1 \quad \text{e} \quad w_2|_Q = s + i|w_1|^2 ,$$

então

$$Lw_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

e

$$L(s + i|w_1|^2) = 0 \Leftrightarrow \gamma = -i\beta w_1 .$$

Logo, $\mathcal{V}$ é gerado por

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1} - iw_1 \frac{\partial}{\partial s}$$

que é a forma mais conhecida do famoso *operador de (Hans) Lewy*.

Por conseguinte, qualquer das equivalências vistas produz uma *subvariedade* CR de $\mathbb{C}^2$. A propósito, algumas vezes, diz-se que essa estrutura é a *estrutura de Lewy*.

3. Estrutura CR

A estrutura de Lewy, $\mathcal{V}$, nos permite destacar um conceito muito útil.

Como no exemplo (2.2), se

$$L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - iz \frac{\partial}{\partial s}$$

é o campo de Lewy, então as restrições a Q das funções coordenadas holomorfas z e w

$$Z = z = x + iy \quad \text{e} \quad W = s + i|z|^2$$

são soluções, independentes, do operador de Lewy, isto é,

$$(a) \quad LZ = 0 \text{ e } LW = 0;$$

$$(b) \quad dZ \wedge dW \neq 0 \text{ em } \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Esse fato vale, em geral, como veremos na proposição que segue.

Inicialmente, designemos por n a dimensão da estrutura CR $\mathcal{V}$ e por m a dimensão de $\mathcal{V}^\perp$; em conseqüência, $m + n = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{X}$. Introduzamos, agora, uma definição que, posteriormente, será retomada quando tratarmos de subvariedades não-características. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura CR sobre $\mathcal{X}$. O *conjunto característico* T_a^0 de $\mathcal{V}_a$ é definido para

cada $a \in \mathcal{X}$ como

$$T_a^0 = (\text{Re } \mathcal{V}_a)^\perp, \quad \perp \text{ em relação a } T_a^* \mathcal{X},$$

onde $\text{Re } \mathcal{V}_a$ denota a parte real dos vetores da estrutura CR $\mathcal{V}$. Um fato notável é que, no caso de estrutura CR, o conjunto característico é um subfibrado vetorial de $T^* \mathcal{X}$. Além disso, verifica-se que $\dim T^0 = m - n = d$, onde o número d é a codimensão da estrutura CR $\mathcal{V}$.

Proposição 3.1: *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ uma subvariedade CR de codimensão d e de classe C^∞ . Então, as funções coordenadas holomorfas restritas à $\mathcal{X}$ são soluções, independentes, dos operadores tangenciais de Cauchy-Riemann.*

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ a estrutura CR sobre $\mathcal{X}$ de codimensão d . Sejam $a \in \mathcal{X}$ e o “pull-back”

$$r : CT_a^* \mathbb{C}^N \rightarrow CT_a^* \mathcal{X}.$$

Então, pode-se restringir r ao subespaço dos covetores holomorfos $T_a'^{1,0}$, isto é,

$$r : T_a'^{0,1} \rightarrow CT_a^* \mathcal{X}.$$

Mostraremos, a seguir, que $r(T_a'^{1,0}) = \mathcal{V}_a^\perp$ em relação a $CT_a^* \mathcal{X}$.

(a) $r(T_a'^{1,0}) \subseteq \mathcal{V}_a^\perp$. Se $r(\omega) \in r(T_a'^{1,0})$, então para todo $v \in CT_a \mathcal{X}$:

$$\langle r(\omega), v \rangle = \langle \omega, v \rangle,$$

em particular,

$$\langle r(\omega), v \rangle = \langle \omega, v \rangle = 0$$

para todo $v \in \mathcal{V}_a = CT_a \mathcal{X} \cap T_a^{0,1}$, resulta que $r(\omega) \in \mathcal{V}_a^\perp$. Logo, $r(T_a'^{1,0}) \subseteq \mathcal{V}_a^\perp$.

(b) Primeiro, observemos que $\mathcal{V}_a^\perp \subseteq r(T_a'^{1,0})$ é equivalente a $r(T_a'^{1,0})^\perp \subseteq \mathcal{V}_a$ em relação a $CT_a \mathcal{X}$.

Para todos os vetores $v \in CT_a\mathcal{X}$ e $\omega \in T_a'^{1,0}$, tem-se

$$\langle \omega, v \rangle = \langle r(\omega), v \rangle ,$$

em particular, para os vetores $v \in r(T_a'^{1,0})^\perp$

$$\langle \omega, v \rangle = \langle r(\omega), v \rangle = 0 ,$$

decorre, por dualidade, que $v \in T_a^{0,1}$; em conseqüência, $v \in \mathcal{V}_a$. Conclui-se, pois, que

$$r(T_a'^{1,0})^\perp \subseteq \mathcal{V}_a .$$

Portanto, por (a) e (b) segue que

$$r(T_a'^{1,0}) = \mathcal{V}_a^\perp .$$

Mostraremos, agora, que $T_a'^{1,0}$ é $\mathbb{C}$ -isomorfo a $\mathcal{V}_a^\perp$. Com efeito, como a codimensão da estrutura CR é d segue que a $\dim \mathcal{V}_a^\perp = N$. Mas, a dimensão de $T_a'^{1,0}$, também, é N . Logo, o “pull-back”, que é sobrejetor,

$$r : T_a'^{1,0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_a^\perp$$

é um $\mathbb{C}$ -isomorfismo. Agora, como a é um ponto arbitrário de $\mathcal{X}$, segue-se que

$$r : T'^{1,0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}^\perp$$

é um $\mathbb{C}$ -isomorfismo de fibrados.

Finalmente, sejam $z_1, \dots, z_N$ funções coordenadas holomorfas de $\mathbb{C}^N$. Então, elas quando restritas à $\mathcal{X}$ são soluções, enquanto seus diferenciais $dz_1, \dots, dz_N$ são linearmente independentes. Desde que r um $\mathbb{C}$ -isomorfismo entre $T'^{1,0}$ e $\mathcal{V}^\perp$ segue que $r(dz_1), \dots, r(dz_N)$ é uma $\mathbb{C}$ -base de co-vetores de $\mathcal{V}^\perp$, ou melhor dizendo,

$d(z_1|_{\mathcal{X}}), \dots, d(z_N|_{\mathcal{X}})$ é uma $\mathbb{C}$ -base de $\mathcal{V}^\perp$. Conclui-se, pois, que $z_1|_{\mathcal{X}}, \dots, z_N|_{\mathcal{X}}$ são soluções, independentes, dos operadores tangenciais de Cauchy-Riemann. $\square$

Cabe, ainda, dizer que a proposição que acabamos de demonstrar é útil para demonstrar-se o teorema que segue.

Examinando a estrutura CR de Lewy observamos que a facilidade no seu estudo é oriunda do fato de que, no sistema de coordenadas holomorfo $\{z, w\}$ de $\mathbb{C}^2$, $\mathcal{X}$ é representada como gráfico da aplicação

$$t = \varphi(z, s) = |z|^2 \quad \text{com}$$

$$\varphi(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad d\varphi(0, 0) = 0 ;$$

precisamente,

$$\mathcal{X} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 / t = |z|^2\} ,$$

onde denotamos $z = x + iy$ e $w = s + it$.

Felizmente, essa situação é a regra quando trata-se de subvariedade CR mergulhada em $\mathbb{C}^N$, como deixa claro o teorema que segue.

Teorema 3.2: *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ uma subvariedade CR de codimensão e de classe C^∞ . Então, para cada $a \in \mathcal{X}$ existe um sistema de coordenadas holomorfas $(U; z_1, \dots, z_{N-d}, w_1, \dots, w_d)$ de $\mathbb{C}^N$, centrado em a e existem d funções*

$$t_k = \varphi_k(z, s) , \quad k = 1, \dots, d ,$$

definidas numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^{2N-d}$, de classe C^∞ , e satisfazendo

$$\varphi_k(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad d\varphi_k(0, 0) = 0 \quad , k = 1, \dots, d ,$$

tal que

$$\mathcal{X} \cap U = \{(z, w) \in U / t_k = \varphi_k(z, s), k = 1, \dots, d\} ,$$

onde denotamos $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, N - d$ e $w_k = s_k + it_k$, $k = 1, \dots, d$.

Demonstração: Por tratar-se do Teorema dos Geradores Locais com “nova roupagem” para estrutura CR, omitiremos a demonstração. Para os interessados, uma demonstração, por sinal mais geral, encontra-se em [4] (pg. 42). $\square$

4. Genérica versus CR

Pode parecer à primeira vista quando estudamos subvariedades genéricas e subvariedades CR mergulhadas em $\mathbb{C}^N$ que os conceitos genérico e CR são distintos, entretanto, constaremos, no que segue, que esses conceitos são os mesmos.

Proposição 4.1: *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ uma subvariedade de codimensão d e de classe C^∞ . Então, $\mathcal{X}$ é uma subvariedade genérica se, e somente se $\mathcal{X}$ é uma subvariedade CR.*

Demonstração:

(a) Primeiramente, para cada $a \in \mathcal{X}$, fixado, definamos a aplicação linear λ como

$$\lambda(\zeta) = \left(\sum_{j=1}^N \zeta_j \frac{\partial \rho_1(a)}{\partial \bar{z}_j}, \dots, \sum_{j=1}^N \zeta_j \frac{\partial \rho_d(a)}{\partial \bar{z}_j} \right),$$

onde $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^N$. Por hipótese, $\partial \rho_1(a) \wedge \dots \wedge \partial \rho_d(a) \neq 0$, implicando que o subespaço $V = \text{Ker } \lambda$ tem dimensão complexa $N - d$. Seja, agora, $\mathcal{V}_a = T_a^{0,1} \cap CT_a \mathcal{X}$ e consideremos uma nova aplicação linear

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_a \\ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) &\longmapsto \sum_{j=1}^N \zeta_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big|_a \end{aligned}$$

que é, pelo modo extrínseco, um isomorfismo; por conseguinte, $\mathcal{V}_a$ tem dimensão complexa $N - d$. Ora, $a \in \mathcal{X}$ era arbitrário, logo, segue, por definição, que $\mathcal{V}$ é uma estrutura CR

sobre $\mathcal{X}$.

(b) Seja $\mathcal{V}$ a estrutura CR sobre $\mathcal{X}$. Então, podemos aplicar o Teorema 3.2, para, localmente, descrever $\mathcal{X}$ pelas funções definidoras:

$$\rho_k(z, w) = t_k - \varphi_k(z, s), \text{ onde } \varphi_k(0, 0) = 0 \text{ e } d\varphi_k(0, 0) = 0, k = 1, \dots, d$$

Daí,

$$\partial \rho_k = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \rho_k}{\partial z_j} dz_j + \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial \rho_k}{\partial w_\ell} dw_\ell$$

que calculada na origem produz:

$$\partial \rho_k(0) = \frac{i}{2} \delta_{k,\ell} dw_\ell, k, \ell : 1, \dots, d.$$

Resulta que

$$\partial \rho_1(0) \wedge \dots \wedge \partial \rho_d(0) = \left(\frac{i}{2}\right)^d dw_1 \wedge \dots \wedge dw_d \neq 0$$

na origem e, portanto, numa vizinhança. Como a vizinhança considerada é arbitrária, conclui-se, pois, que $\mathcal{X}$ é genérica. □

5. Funções CR

O conceito de função CR generaliza o de função holomorfa como deixa claro os exemplos que seguem.

Definição 5.1: Dada uma subvariedade $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ de classe C^∞ e com estrutura CR $\mathcal{V}$, seja $U \subseteq \mathcal{X}$ um conjunto aberto. Então, $f \in C^0(U, \mathbb{C})$ diz-se que é uma função CR em U se para toda C^∞ -secção L de $\mathcal{V}$ sobre U acontecer de $Lf = 0$ em U (no sentido de distribuição). Em certas ocasiões, referem-se a f dizendo apenas que f é solução da estrutura CR dada.

Exemplos:

(5.2) Seja f uma função holomorfa definida num conjunto aberto Ω de $\mathbb{C}^N$. Então, para cada campo vetorial L de $T^{0,1}$ sobre Ω , tem-se

$$Lf = 0 \quad \text{em } \Omega .$$

Agora, consideremos o conjunto aberto relativo $\tilde{\Omega} = \Omega \cap \mathcal{X}$, onde $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ é uma subvariedade CR. Então, $f|_{\tilde{\Omega}}$ é solução, pois, tem-se

$$L_{\tilde{\Omega}}(f|_{\tilde{\Omega}}) = Lf = 0$$

para todo $L_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{V}_{\tilde{\Omega}}$.

Conclui-se, pois, que as restrições de funções holomorfas a abertos relativos de $\mathcal{X}$ são funções CR.

(5.3) Neste exemplo denota-se a variável complexa por $w = x + iy$ e por $\lambda(w) = w^{\frac{3}{2}}$ o ramo principal em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy/y \leq 0\}$ da correspondente aplicação multivalente.

É fácil verificar (p. ex. coordenadas polares) que valem:

$$\lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \Omega}} \lambda(w) = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \Omega}} \frac{\partial \lambda}{\partial x}(w) = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \Omega}} \frac{\partial \lambda}{\partial y}(w) = 0$$

e

$$\lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \Omega}} \left| \frac{d^2 \lambda}{dw^2}(w) \right| = +\infty .$$

Daí estendendo λ e suas derivadas parciais primeiras até a origem, tem-se

$$\lambda \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^1(\Omega \sqcup \{0\}) .$$

Consideremos a estrutura de Lewy gerada pelo campo

$$L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - iz \frac{\partial}{\partial s} .$$

É claro que $W(z, s) = s + i|z|^2$ é uma solução. Advém que se pode definir uma outra solução

$$u(z, s) = (s + i|z|^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{em } \mathbb{C} \times \mathbb{R} .$$

Evidentemente, por construção, tem-se

$$u \in C^\infty((\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}) .$$

Contudo, na origem, verifica-se que:

$$\lim_{(z,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial \lambda(W(z, s))}{\partial x} = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \Omega}} \frac{\partial \lambda(w)}{\partial x} = 0 ,$$

analogamente,

$$\lim_{(z,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial \lambda(W(z, s))}{\partial y} = \lim_{(z,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial \lambda(W(z, s))}{\partial s} = 0$$

e, ainda,

$$\lim_{(z,s) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\partial^2 \lambda(z, s)}{\partial s^2} \right| = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \Omega}} \left| \frac{d^2 \lambda(w)}{dw^2} \right| = +\infty .$$

Decorre que $u \in C^1(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$.

Mostraremos, a seguir, que u é solução.

Como $Lu \in C^0(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ e $Lu = 0$ em $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ segue, por densidade e continuidade, que

$$Lu = 0 \quad \text{em } \mathbb{C} \times \mathbb{R} ,$$

i.e., u é solução da estrutura de Lewy.

Ou seja, esse exemplo nos diz que existe função CR que não é restrição de nenhuma função holomorfa.

O próximo exemplo será útil no capítulo II.

(5.4) Seja o aberto $\tilde{\Omega} = e^{i\pi/4}\Omega$, onde $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy | y \leq 0\}$. Então, podemos definir a função holomorfa em Ω

$$H(w) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\zeta}w}} ,$$

onde $\zeta = e^{-i\pi/4}$ e $\sqrt{\cdot}$ é o ramo principal. Escrevendo $w = \rho e^{i\theta}$, tem-se $\sqrt{\zeta}w = \sqrt{\rho}e^{i(\frac{\theta-\pi/4}{2})}$. Assim,

$$|H(w)| = e^{-\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos(\frac{\theta-\pi/4}{2})} .$$

Se $\theta \in [0, \pi]$, então $-\frac{\pi}{8} \leq \frac{\theta-\pi/4}{2} \leq \frac{3\pi}{8}$ e, portanto,

$$\cos\left(\frac{\theta-\pi/4}{2}\right) \geq \lambda > 0 .$$

Resulta que

$$|H(w)| \leq e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}} .$$

Usando essa última estimativa, observamos que tanto H como todas as suas derivadas parciais anulam-se em $w = 0$. Logo,

H é de classe C^∞ no semiplano superior fechado.

$$H \in C^\infty(S^+)$$

Novamente, vamos considerar a estrutura de Lewy. Como vimos $W(z, s) = s + i|z|^2 \in S^+$ e é solução. Daí pode-se definir

$$u(z, s) = H(s + i|z|^2) ,$$

que, evidentemente, é de classe C^∞ em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ e, forçosamente, u e suas derivadas parciais anulam-se no ponto $(0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, i.e., u anula-se de ordem infinita no ponto $(0, 0)$.

[Apêndice A]

Agora, usando argumento semelhante ao do exemplo anterior, conclui-se, pois, que u é, também, solução da estrutura de Lewy.

6. Subvariedades Holomorfas

Definição 6.1: O subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathbb{C}^N$ é uma subvariedade holomorfa de codimensão complexa d se para cada ponto $a \in \mathcal{H}$ existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^N$ de a e existe um conjunto $h_1, \dots, h_d$ de funções holomorfas em U tal que

$$(a) \mathcal{H} \cap U = \{z \in U / h_1(z) = \dots = h_d(z) = 0\};$$

$$(b) dh_1 \wedge \dots \wedge dh_d \neq 0 \text{ em } U.$$

Note que a condição (b) pode ser substituída por

$$(b') dh_1(a) \wedge \dots \wedge dh_d(a) \neq 0.$$

Exemplo (6.2): $\mathcal{H} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 / f(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_3 - 1 = 0 \text{ e } g(z_1, z_2, z_3) = z_2 = 0\}$.

Tem-se:

$$\partial f = z_3 dz_1 + z_1 dz_3; \quad \partial g = dz_2,$$

logo,

$$\partial f \wedge \partial g = z_3 dz_1 \wedge dz_2 - z_1 dz_2 \wedge dz_3 \neq 0 \text{ em } \mathcal{H}.$$

A propósito, $\mathcal{H}$ chama-se *hipérbole*.

7. O espaço tangente holomorfo

Consideraremos, agora, um outro tipo, particular e importante, de espaço tangente a uma subvariedade $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$. Ele desempenha papel fundamental no conceito de transversalidade.

Definição 7.1: O espaço tangente holomorfo a $\mathcal{X}$ no ponto a é o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial

$$T_a \mathcal{X} := T_a^{1,0} \cap CT_a \mathcal{X}.$$

Exemplo (7.2): No caso em que $\mathcal{H}$ é uma subvariedade holomorfa, tem-se

$${}^cT_a\mathcal{H} = T_a\mathcal{H} ,$$

onde ${}^cT_a\mathcal{H} = \{v : v \text{ são derivações em } \mathcal{O}(a)\}$.

8. Transversalidade holomorfa

Definição 8.1: Diz-se que duas subvariedades $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ de $\mathbb{C}^N$, de classe C^∞ , têm uma intersecção transversal holomorfa no ponto $a \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ se:

$$T_a^{1,0} = T_a\mathcal{X}_1 + T_a\mathcal{X}_2 .$$

Se isso valer para todo $a \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ diz-se, simplesmente, que $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ têm intersecção transversal holomorfa e denotamos por

$$\mathcal{X}_1 \mathbin{\mathbb{H}} \mathcal{X}_2 .$$

Proposição 8.2: Se $\mathcal{X}_1 \mathbin{\mathbb{H}} \mathcal{X}_2$ no ponto a , então $\mathcal{X}_1 \mathbin{\mathbb{T}} \mathcal{X}_2$ no ponto a .

Demonstração: Evidentemente, é suficiente mostrar que:

$$T_a\mathbb{C}^N \subseteq T_a\mathcal{X}_1 + T_a\mathcal{X}_2 .$$

Com efeito, seja v um vetor arbitrário de $T_a\mathbb{C}^N$. Então,

$$v = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_a + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_a = \underbrace{\sum_{j=1}^N (a_j + ib_j) \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_a}_w + \underbrace{\sum_{j=1}^N (a_j - ib_j) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big|_a}_{\bar{z}} .$$

Como $\mathcal{X}_1 \mathbin{\mathbb{H}} \mathcal{X}_2$ no ponto a é:

$$T_a^{1,0} = T_a^{1,0} \cap CT_a\mathcal{X}_1 + T_a^{1,0} \cap CT_a\mathcal{X}_2 ,$$

tem-se

$$w = u_1 + u_2 ,$$

onde $u_1 \in T_a^{1,0} \cap CT_a \mathcal{X}_1$ e $u_2 \in T_a^{1,0} \cap CT_a \mathcal{X}_2$. Portanto,

$$v = u_1 + u_2 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = u_1 + \bar{u}_1 + u_2 + \bar{u}_2 ,$$

onde $u_1 + \bar{u}_1 \in T_a \mathcal{X}_1$ e $u_2 + \bar{u}_2 \in T_a \mathcal{X}_2$, isto é, $v \in T_a \mathcal{X}_1 + T_a \mathcal{X}_2$. Assim,

$$T_a \mathbb{C}^N \subseteq T_a \mathcal{X}_1 + T_a \mathcal{X}_2 .$$

□

Contra-exemplo (8.3): Em geral, a recíproca da proposição 8.2 é falsa, como vamos constatar abaixo.

Sejam $\mathbb{C}^4$, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{H}$ dadas por:

$\mathbb{C}^4$: os elementos serão denotados por (z_1, z_2, w_1, w_2) ;

$\mathcal{X} : \{(z_1, z_2; w_1, w_2) \in \mathbb{C}^4 | \rho_1 = \text{Im } w_1 = 0, \rho_2 = \text{Im } w_2 = 0\}$

$\mathcal{H} = \{(z_1, z_2, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^4 | h_1 = w_1 + z_1 = 0, h_2 = w_2 + iz_1 = 0\}$

É fácil verificar que:

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{H} = \{(0, z_2, 0, 0) / z_2 \in \mathbb{C}\} .$$

(a) Mostremos que $\mathcal{X} \not\subset \mathcal{H}$.

Com efeito, como $\mathcal{X}$ é dada por $t_1 = t_2 = 0$, tem-se

$$T\mathcal{X} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2} \right\rangle ,$$

enquanto

$$T\mathcal{H} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right\rangle .$$

Determinemos uma base para $T\mathcal{H}$. Como

$$\mathcal{H} : \begin{cases} w_1 + z_1 = 0 \\ w_2 + iz_1 = 0 \end{cases} .$$

Então, para

$$L = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2} + c \frac{\partial}{\partial w_1} + d \frac{\partial}{\partial w_2} ,$$

tem-se

$$L(w_1 + z_1) = c + a = 0$$

$$L(w_2 + iz_1) = d + ia = 0 ,$$

donde

$$L = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2} - a \frac{\partial}{\partial w_1} - ia \frac{\partial}{\partial w_2} .$$

Daí fazendo $a = 0, b = 1$ e $a = 1, b = 0$, tem-se

$$\mathcal{TH} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_2}; \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial w_1} - i \frac{\partial}{\partial w_2} \right\rangle .$$

Observemos que $\mathcal{TX} + \mathcal{TH}$ tem dimensão exatamente 3, enquanto a dimensão de $T^{1,0}$ é 4. Logo,

$$\mathcal{X} \not\cap \mathcal{H} .$$

(b) Mostremos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}$.

Com efeito, uma base real para $\mathcal{TH}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial t_1} ; \\ L_2 &= \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} ; \\ L_3 &= \frac{\partial}{\partial x_2} ; \\ L_4 &= \frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Observemos que $\mathcal{TX} + \mathcal{TH} = TC^4$, pois, $\dim(\mathcal{TX} + \mathcal{TH}) = 8$. Logo,

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{H} .$$

Todavia, quando $\mathcal{X}$ é uma hipersuperfície real e $\mathcal{H}$ é uma curva complexa (i.e., uma *subvariedade holomorfa de dimensão complexa 1*), a recíproca da proposição 8.2 é verdadeira.

Proposição 8.4: *Sejam $\mathcal{X}$ uma hipersuperfície real, de classe C^∞ , e $\mathcal{H}$ uma curva complexa em $\mathbb{C}^N$.*

Se $\mathcal{X} \nmid \mathcal{H}$, então $\mathcal{X} \nmid \mathcal{H}$.

Demonstração: Lembrando que o conceito de transversalidade holomorfa é um conceito pontual, então é suficiente verificá-lo em algum ponto $a \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}$.

Agora, $\mathcal{X}$ é uma hipersuperfície real, logo, pela proposição 2.1, é CR. Aplicando o Teorema 3.2 para o ponto $a \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}$, tem-se um sistema de coordenadas holomorfo $(U; z_1, \dots, z_{N-1}, w)$ de $\mathbb{C}^N$ centrado em a e, a função

$$t = \varphi(z, s)$$

definida numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^{2N-1}$, de classe C^∞ , e satisfazendo

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad d\varphi(0, 0) = 0$$

tal que

$$\mathcal{X} \cap U = \{(z, w) \in U / t = \varphi(z, s)\} ,$$

onde denotamos $\begin{cases} z_j = x_j + iy_j, j = 1, \dots, N-1 \\ w = s + it \end{cases}$.

Determinemos $T_0\mathcal{X}$ e $\mathcal{T}_0\mathcal{X}$:

$$T_0\mathcal{X} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{N-1}}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle ,$$

enquanto

$$\mathcal{T}_0\mathcal{X} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{N-1}} \right\rangle .$$

Consideremos a curva complexa $\mathcal{H}$ parametrizada pela função holomorfa:

$$\zeta \in \mathbb{C} \mapsto h(\zeta) \in \mathbb{C}^N$$

com $h(0) = 0$. Determinemos $T_0\mathcal{H}$ e $T_0\mathcal{H}$

$$\mathcal{T}\mathcal{H} = \left\langle \frac{dh_1}{d\zeta}(0) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \frac{dh_{N-1}}{d\zeta}(0) \frac{\partial}{\partial z_{N-1}} + \frac{dh_N(0)}{d\zeta} \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle ,$$

enquanto para determinar $T_0\mathcal{H}$, seja a aplicação

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\operatorname{Re} h_1, \operatorname{Im} h_1, \dots, \operatorname{Re} h_N, \operatorname{Im} h_N) ,$$

onde $\zeta = u + iv$. Então

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\partial \operatorname{Re} h_1(0)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \operatorname{Im} h_1(0)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial \operatorname{Re} h_{N-1}(0)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_{N-1}} \\ &\quad + \frac{\partial \operatorname{Im} h_{N-1}(0)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y_{N-1}} + \frac{\partial \operatorname{Im} h_N(0)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \operatorname{Im} h_N(0)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \\ V_2 &= \frac{\partial \operatorname{Re} h_1(0)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \operatorname{Im} h_1(0)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial \operatorname{Re} h_{N-1}(0)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_{N-1}} \\ &\quad + \frac{\partial \operatorname{Im} h_{N-1}(0)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y_{N-1}} + \frac{\partial \operatorname{Re} h_N(0)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \operatorname{Im} h_N(0)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Decorre que

$$T_0\mathcal{H} = \langle V_1, V_2 \rangle .$$

Por hipótese, $T_0\mathbb{C}^N = T_0\mathcal{X} + T_0\mathcal{H}$, logo

$$\frac{\partial \operatorname{Im} h_N(0)}{\partial u} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \operatorname{Im} h_N(0)}{\partial v} \neq 0 .$$

Suponhamos, então, que seja $\frac{\partial \operatorname{Im} h_N(0)}{\partial u} \neq 0$, então, pela holomorfia, $\frac{dh_N(0)}{d\zeta} \neq 0$. Decorre, então, que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{N-1}} \right\rangle \sqcup \left\langle \frac{dh_1(0)}{d\zeta} \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \frac{dh_N(0)}{d\zeta} \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle$$

gera $T_0^{1,0}$, i.e.:

$$T_0^{1,0} = \mathcal{T}_0\mathcal{X} + \mathcal{TH} .$$

□

9. Subvariedades Totalmente Reais

Proposição 9.1: *Sejam $\mathcal{X}$ uma subvariedade de $\mathbb{C}^N$ de classe C^∞ e $T^{1,0}$ a estrutura fibrada de $\mathbb{C}^N$. Então, para cada $a \in \mathcal{X}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $CT_a^*\mathbb{C}^N = T_a'^{1,0} + CN_a^*\mathcal{X}$;
- (b) $\mathcal{T}_a\mathcal{X} = T_a^{1,0} \cap CT_a\mathcal{X} = 0$;
- (c) $T_a^{0,1} \cap CT_a\mathcal{X} = 0$.

Demonstração: Por dualidade, tem-se que: $CT^*\mathbb{C}^N = T'^{1,0} + CN^*\mathcal{X}$ é equivalente a $T_{|\mathcal{X}}^{0,1} \cap CT\mathcal{X} = 0$ que, por sua vez, é equivalente a $\mathcal{T}\mathcal{X} = T_{|\mathcal{X}}^{1,0} \cap CT\mathcal{X} = 0$. □

Definição 9.2: *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ como na proposição 9.1. Então, se valer as afirmações (a), (b) e (c), diz-se que $\mathcal{X}$ é uma subvariedade totalmente real.*

Proposição 9.3: *Sejam $\mathcal{X}$ uma subvariedade de $\mathbb{C}^N$ de classe C^∞ e $T'^{1,0}$ a estrutura fibrada de $\mathbb{C}^N$. Então, para cada $a \in \mathcal{X}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $CT_a^*\mathbb{C}^N = T_a'^{1,0} \oplus CN_a^*\mathcal{X}$;
- (b) $CT_a\mathbb{C}^N = T_a^{0,1} \oplus CT_a\mathcal{X}$.

Demonstração: (a) é dual de (b) e vice-versa. □

Definição 9.4: *Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ como na proposição 9.3. Então, se valer as afirmações (a) e (b), diz-se que $\mathcal{X}$ é uma subvariedade real-maximal.*

Escólio 9.5: Se $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ é uma subvariedade totalmente real de $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{X} = N$, então $\mathcal{X}$ é uma subvariedade real-maximal.

Por ser totalmente real, então $CT_a^* \mathbb{C}^N = T_a'^{1,0} + CN_a^* \mathcal{X}$. Daí, $2N = \dim(T_a'^{1,0} + CN_a^* \mathcal{X}) = \dim T_a'^{1,0} + \dim CN_a^* \mathcal{X} - \dim(T_a'^{1,0} \cap CN_a^* \mathcal{X})$, logo, $\dim(T_a'^{1,0} \cap CN_a^* \mathcal{X}) = 0$. Decorre que

$$CT_a^* \mathbb{C}^N = T_a'^{1,0} \oplus CN_a^* \mathcal{X} .$$

Ou seja,

$\mathcal{X}$ é real-maximal.

Exemplos:

(9.6) Sejam $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N + i0$ subvariedades reais de $\mathbb{C}^N$. Como $y_1 = \dots = y_N = 0$, então os campos tangentes a $\mathcal{X}$ são do tipo

$$L = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in CT\mathcal{X} .$$

Logo,

$$T^{1,0} \cap CT\mathcal{X} = 0 ,$$

isto é, $\mathcal{X}$ são totalmente reais.

(9.7) Sejam $\mathcal{X} \subseteq 0 + i\mathbb{R}^N$ subvariedades reais de $\mathbb{C}^N$. Como $x_1 = \dots = x_N = 0$, então os campos tangentes a $\mathcal{X}$ são do tipo

$$L = \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \in CT\mathcal{X} .$$

Logo,

$$T^{1,0} \cap CT\mathcal{X} = 0 ,$$

isto é, $\mathcal{X}$ são totalmente reais.

Contra-exemplos:

(9.8) Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ a subvariedade real dada por:

$$\mathcal{X} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 / \operatorname{Re} w = \operatorname{Im} w = 0\} .$$

Então,

$$T^{1,0} \cap CT\mathcal{X} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle \cap \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \neq 0 ,$$

isto é, $\mathcal{X}$ não é totalmente real.

Exemplos:

(9.9) Se nos exemplos (9.6) e (9.7) as subvariedades reais $\mathcal{X}$ têm $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{X} = N$, então elas são reais-maximais.

10. Subvariedades Não-Characterísticas de Variedades Genéricas

Iniciamos este parágrafo lembrando que se $\mathcal{V}$ é o subfibrado estrutural sobre $\mathcal{X}$, então o conjunto característico, T^0 , é dado por:

$$T^0 = (\operatorname{Re} \mathcal{V})^\perp \text{ em relação } T^*\mathcal{X} .$$

No caso de $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ uma subvariedade CR de codimensão d , então $\mathcal{V} = T^{0,1} \cap CT\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{X}$. Decorre que

$$T^0 = [\operatorname{Re}(\mathcal{V})]^\perp = [\operatorname{Re}(T^{0,1} \cap CT\mathcal{X})]^\perp$$

em relação a $T^*\mathcal{X}$.

Proposição 10.1: *Sejam $\mathcal{X}$ uma subvariedade CR de codimensão d , de classe C^∞ , e Σ uma subvariedade de $\mathcal{X}$, também de classe C^∞ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $N^*\Sigma \cap T_{|\Sigma}^0 = 0$;
- (b) $T\mathcal{X}_{|\Sigma} = T\Sigma + \text{Re}(T^{0,1} \cap CT\mathcal{X})$.

Demonstração: Sabemos que $N^*\Sigma = T\Sigma^\perp$ em relação a $T^*\mathcal{X}|_\Sigma$ e $T_{|\Sigma}^0 = \text{Re}[T^{0,1} \cap CT\mathcal{X}]^\perp$ também em relação a $T^*\mathcal{X}|_\Sigma$.

Logo, por dualidade (a) $\Leftrightarrow$ (b). $\square$

Definição 10.2: Sejam $\mathcal{X}$ e Σ como na proposição 10.1. Então, se valer as afirmações (a) e (b) diz-se que Σ é uma subvariedade não-característica de $\mathcal{X}$.

Exemplo (10.3): Se $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ está com sua estrutura complexa canônica, então toda subvariedade Σ de $\mathcal{X}$ é não característica em $\mathcal{X}$.

Contra-exemplo (10.4): Considerando $\mathcal{X}$ e $\Sigma = \mathcal{X} \frown \mathcal{H}$ como no exemplo (8.3), tem-se

$$T\Sigma = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right\rangle ,$$

enquanto

$$\text{Re}(T^{0,1} \cap CT\mathcal{X}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right\rangle .$$

Logo, $\dim(T\Sigma + \text{Re}(T^{0,1} \cap CT\mathcal{X})) = 4$, todavia, $\dim T\mathcal{X} = 6$. Isto é, $\Sigma = \mathcal{X} \frown \mathcal{H}$ é uma subvariedade característica.

Escólio 10.5: Quando Σ é não-característica em uma subvariedade $\mathcal{X}$ como na proposição 10.1, então tem-se um limitante inferior para a dimensão de Σ , a saber, $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma \geq d$.

Usando a condição (b) da proposição 10.1 o resultado segue. $\square$

11. Três Proposições

Nas próximas três proposições, integraremos as informações dos parágrafos anteriores. Essas três terão papel fundamental nos Capítulos III e IV.

Antes de fazer qualquer coisa, gostaríamos de frisar que estamos preocupados com resultados locais, de modo que nossos argumentos serão efetuados sobre um ponto “central” de uma subvariedade real $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^{n+d}$. É claro que após troca de coordenadas esse ponto “central” será a origem de $\mathbb{C}^{n+d}$.

Proposição 11.1: *Sejam $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^{n+d}$ uma subvariedade genérica, de classe C^∞ , e $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^{n+d}$ uma subvariedade holomorfa tais que $\text{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{X} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = d$.*

Se $\mathcal{X} \not\cap \mathcal{H}$ num ponto a , então existe um sistema de coordenadas holomorfo $(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_d)$ numa certa vizinhança, da origem, aberta em $\mathbb{C}^{n+d}$ tal que $\mathcal{H}$ estará definida pela equação $z = 0$, enquanto $\mathcal{X}$ estará definida pela equação:

$$(a) \quad t_k = \varphi_k(z, s) \quad , k = 1, \dots, d \quad ,$$

onde φ_k 's são funções de classe C^∞ definidas numa vizinhança, da origem, aberta em $\mathbb{R}^{2n+d}$ a valores em $\mathbb{R}$ e satisfazendo:

$$(b) \quad \varphi_k(0, 0) = 0 \quad , \quad d\varphi_k(0, 0) = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, d \quad .$$

Demonstração:

(A) Dividiremos a demonstração em três fases.

Primeira: Se $a \in \mathcal{X} \not\cap \mathcal{H}$, então $a \in \mathcal{X}'$. Mas, $\mathcal{X}$ é uma subvariedade genérica (CR), logo, pode-se aplicar o Teorema 3.2, isto é, existe um sistema local de coordenadas holomorfo $(U; z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_d)$, centrado em a e existem d funções reais

$$t_k = \varphi_k(z, s) \quad , k = 1, \dots, d$$

definidas numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^{2N-d}$, de classe C^∞ , e satisfazendo:

$$\varphi_k(0,0) = 0 \quad , d\varphi_k(0,0) = 0 \quad , k = 1, \dots, d$$

tal que

$$\mathcal{X} \cap U = \{(z, w) \in U \mid t_k = \varphi_k(z, s) \quad , k = 1, \dots, d\} .$$

Nesse sistema de coordenadas holomorfo as funções definidoras de $\mathcal{H}$ na vizinhança U , serão as funções holomorfas h_j , $1 \leq j \leq n$ tais que

$$\mathcal{H} \cap U = \{(z, w) \in U \mid h_1(z, w) = \dots = h_n(z, w) = 0\} .$$

Além disso, $\mathcal{X}$ é transversal holomorfa a $\mathcal{H}$.

Segunda: Mostraremos, a seguir, que, na vizinhança da origem, $\mathcal{H}$ é gráfico da aplicação holomorfa $z = g(w)$. Como $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}$ na origem, tem-se

$$T_0^{1,0} = \underbrace{T_0^{1,0} \cap CT_0\mathcal{X}}_{\mathcal{T}_0\mathcal{X}} + \underbrace{T_0^{1,0} \cap CT_0\mathcal{H}}_{\mathcal{T}_0\mathcal{H}} .$$

Mas, $\mathcal{T}_0\mathcal{X} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\rangle$ e como $\mathcal{T}_0\mathcal{H}$ tem dimensão complexa d , então, necessariamente,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_d} \right\rangle = \mathcal{T}_0\mathcal{H} .$$

Mas,

$$\bigcap_{\ell=1}^n \text{Ker } \partial h_\ell(0) = \mathcal{T}_0\mathcal{H} ,$$

logo,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_d} \right\rangle \in \text{Ker } \partial h_\ell(0) \quad , \ell = 1, \dots, n .$$

Assim, para que $L \in T_0^{1,0}$, i.e. ,

$$L = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^d b_k \frac{\partial}{\partial w_k}$$

seja em elemento da base de $\mathcal{T}_0\mathcal{H}$ devemos ter, necessariamente, $a_j = 0$, para $j = 1, \dots, n$, e isso só acontece se:

$$\det \left[\frac{\partial h}{\partial z}(0) \right] \neq 0$$

De fato,

$$0 = \partial h_\ell(0)(L) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial h_\ell}{\partial z_j}(0) \quad , \ell = 1, \dots, n .$$

Então, $a_j = 0$, $j = 1, \dots, n$ se, e somente se

$$\det \left[\frac{\partial h}{\partial z}(0) \right] \neq 0 .$$

Trataremos, agora, de determinar a aplicação g . Como $\mathcal{H}$ é dada pela equação definidora holomorfa $h(z, w)$ e $\partial h(0)/\partial z$ tem posto n , então pelo Teorema da Função Implícita (caso holomorfo) *existem* vizinhanças abertas: U_1 do 0 em $\mathbb{C}^d$ e V do 0 em $\mathbb{C}^n$ e a aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} g : U_1 &\longrightarrow V \\ w &\longmapsto z = g(w) \end{aligned}$$

tal que

$$h(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = g(w) \quad \text{em } U_1 \times V .$$

Assim, mostramos que na vizinhança da origem $U_1 \times V \subset \mathbb{C}^{n+d}$, $\mathcal{H}$ é gráfico da aplicação holomorfa g .

Para encerrar: vamos fazer uma nova mudança de coordenadas de modo biholomorfo, localmente:

$$\begin{aligned} U_1 \times V \subset \mathbb{C}^{n+d} &\xrightarrow{\lambda} \tilde{U}_1 \times \tilde{V} \subset \mathbb{C}^{n+d} \\ (z, w) &\longmapsto (z - g(w), w) , \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{cases} z^\# = z - g(w) \\ w^\# = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = z^\# + g(w^\#) \\ w = w^\# \end{cases} .$$

Resulta daí que

$$\lambda^{-1}(z^\#, w^\#) = (z^\# + g(w^\#), w^\#) = (z, w) .$$

Logo, λ é um biholomorfismo e, conseqüentemente, $d\lambda(0)$ é um isomorfismo. Vejamos, a seguir, como ficam as aplicações definidoras de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{H}$ na vizinhança da origem desse novo sistema de coordenadas holomorfo. Nesse novo sistema de coordenadas, a subvariedade holomorfa $\mathcal{H}$ é dada, na vizinhança da origem, automaticamente, pela equação

$$z^\# = 0 ,$$

enquanto que para se determinar a equação definidora de $\mathcal{X}$ numa vizinhança da origem precisamos aplicar o Teorema da Função Implícita.

Seja $\rho^\#(z^\#, s, t) = \rho \circ \lambda^{-1}(z^\#, s, t) = t - \varphi(z^\# + g(w), s)$ na vizinhança da origem.

Então, a aplicação $\rho^\#$ é de classe C^∞ e satisfaz a equação:

$$\rho^\#(z^\#, w) = \rho^\#(z^\#, s, t) = t - \varphi(z^\# + g(w), s) = 0 .$$

Calculemos $d\rho^\#$.

Seja $G(z^\#, w) = (z^\# + g(w), s)$. Então,

$$(\varphi_\ell \circ G)(z^\#, w) = \varphi_\ell(z^\# + g(w), s) \quad , \ell = 1, \dots, d .$$

Observemos que pela regra da cadeia, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial z_k^\#} & \frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial \bar{z}_k^\#} & \frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial w_{k'}} & \frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial \bar{w}_{k'}} \end{array} \right)_{\substack{1 \leq \ell, k' \leq d \\ 1 \leq k \leq n}} \\
&= \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial z_k} \circ G & \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial \bar{z}_k} \circ G & \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial w_{k'}} \circ G & \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial \bar{w}_{k'}} \circ G \end{array} \right)_{\substack{1 \leq \ell, k' \leq d \\ 1 \leq k \leq n}} \\
&\times \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial G_j}{\partial z_k^\#} & \frac{\partial G_j}{\partial w_{k'}} & \frac{\partial G_j}{\partial \bar{z}_k^\#} & \frac{\partial G_j}{\partial \bar{w}_{k'}} \\ \frac{\partial \bar{G}_j}{\partial z_k^\#} & \frac{\partial \bar{G}_j}{\partial w_{k'}} & \frac{\partial \bar{G}_j}{\partial \bar{z}_k^\#} & \frac{\partial \bar{G}_j}{\partial \bar{w}_{k'}} \end{array} \right)_{\substack{1 \leq j \leq n+d \\ 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq k' \leq d}} .
\end{aligned}$$

Decorre que

$$d\rho^\#(z^\#, w) = \left(\left(-\frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial z_k^\#} \right) \left(-\frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial \bar{z}_k^\#} \right) \left(-\frac{i}{2} \delta_{\ell k'} - \frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial w_{k'}} \right) \left(\frac{i}{2} \delta_{\ell k'} - \frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial \bar{w}_{k'}} \right) \right)_{\substack{1 \leq \ell, k' \leq d \\ 1 \leq k \leq n}}$$

que calculada na origem, tem-se

$$d\rho^\#(0, 0) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -\frac{i}{2} \delta_{\ell k'} & \frac{i}{2} \delta_{\ell k'} \end{array} \right)_{1 \leq \ell, k' \leq d}$$

e daí

$$\frac{\partial \rho_\ell^\#}{\partial t_{k'}}(0) = \frac{\partial(\varphi_\ell \circ G)}{\partial t_{k'}}(0) = \delta_{\ell k'}, \quad 1 \leq \ell, k' \leq d,$$

isto é,

$$\frac{\partial \rho^\#}{\partial t}(0) = I_{d \times d}.$$

Ora, estamos nas hipóteses do Teorema da Função Implícita, logo, existem vizinhanças abertas: $U^\#$ de 0 em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^d$ e $V^\#$ de 0 em $\mathbb{R}^d$ e uma aplicação de classe C^∞

$$\begin{aligned}
\varphi^\# : U^\# &\rightarrow V^\# \\
(z^\#, s) &\mapsto t = \varphi^\#(z^\#, s)
\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\rho^\#(z^\#, w) = \rho^\#(z^\#, s, t) = 0 \text{ se, e somente se } t = \varphi^\#(z^\#, s).$$

Assim, a equação $t = \varphi^\#(z^\#, s)$ é a equação definidora de $\mathcal{X}$ na vizinhança da origem nas novas coordenadas. Resta mostrar que $\varphi^\#$ satisfaz o item (b) da proposição. É o que faremos agora.

$$(i) \rho^\#(0, 0) = 0 \Rightarrow 0 = \varphi^\#(0, 0);$$

$$(ii) d\varphi^\#(0, 0) = 0.$$

Com efeito,

$$d\varphi^\#(0, 0) = - \left[\frac{\partial \rho^\#}{\partial t}(0) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \rho^\#}{\partial(z^\#, \bar{z}^\#, s)}(0) \right] = 0 ,$$

pois,

$$\left[\frac{\partial \rho^\#}{\partial(z^\#, \bar{z}^\#, s)}(0) \right] = 0 ,$$

como é fácil ver na matriz de $d\rho^\#(0, 0)$.

Para concluir a demonstração, basta tomar uma vizinhança, suficientemente pequena, para valer todos os resultados acima. $\square$

(B) Reciprocamente, por hipótese, podemos representar as subvariedades $\mathcal{X}$ e $\mathcal{H}$ pelas funções definidoras:

$$\mathcal{X} : \rho_k(z, s, t) = t_k - \varphi_k(z, s) \quad , k = 1, \dots, d ;$$

$$\mathcal{H} : h_j(z, w) = z_j \quad , j = 1, \dots, n .$$

É claro que é suficiente mostrar que

$$T_0^{1,0} \subseteq T_0^{1,0} \cap CT_0\mathcal{X} + T_0^{1,0} \cap CT_0\mathcal{H} .$$

Seja L um vetor arbitrário de $T_0^{1,0}$, tem-se

$$L = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^d b_k \frac{\partial}{\partial w_k} .$$

É imediato verificar que:

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_0^{1,0} \cap CT_0\mathcal{X}$$

e

$$\sum_{k=1}^d b_k \frac{\partial}{\partial w_k} \in T_0^{1,0} \cap CT_0 \mathcal{H} .$$

Logo,

$$T_0^{1,0} = T_0^{1,0} \cap CT_0 \mathcal{X} + T_0^{1,0} \cap CT_0 \mathcal{H} ,$$

isto é,

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{H} \text{ na origem.}$$

□

Proposição 11.2: *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{H}$ como na proposição 11.1. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{H}$ são transversalmente holomorfas, então $\Sigma = \mathcal{X} \cap \mathcal{H}$ é não-característica em $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Se $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}$, então, pela proposição 8.2, $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}$. Decorre que $\Sigma = \mathcal{X} \cap \mathcal{H}$ é uma subvariedade de $\mathbb{C}^{n+d}$ cuja $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma = d$.

Mostraremos, a seguir, que Σ é não-característica. Seja a um ponto arbitrário de Σ . Então, pela proposição 11.1, *existe* um sistema local de coordenadas holomorfo $(U; z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_d)$ centrado em a e existem d funções de classe C^∞ φ_k 's tal que

$$\mathcal{X} \cap U : t_k = \varphi_k(z, s) \quad , k = 1, \dots, d ;$$

$$\varphi_k(0, 0) = 0 \quad , \quad d\varphi_k(0, 0) = 0 \quad , k = 1, \dots, d ;$$

$$\mathcal{H} \cap U : z = 0 .$$

Tratemos, agora, de determinar $N_0^* \Sigma$ e T_0^0 . É fácil ver que:

$$T_0 \Sigma = \left\langle \frac{\partial}{\partial s_1} |_0, \dots, \frac{\partial}{\partial s_d} |_0 \right\rangle$$

e

$$T_0^* \mathcal{X} = \langle (dx_1)_0, \dots, (dx_n)_0, (dy_1)_0, \dots, (dy_n)_0, (ds_1)_0, \dots, (ds_d)_0 \rangle .$$

(A): $N_0^* \Sigma = (T_0 \Sigma)^\perp$ em relação a $T_0^* \mathcal{X}$, logo,

$$N_0^* \Sigma = \langle (dx_1)_0, \dots, (dx_n)_0, (dy_1)_0, \dots, (dy_n)_0 \rangle .$$

(B): Como $\mathcal{X}$ é genérica (CR), então

$$\mathcal{V}_0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} |_0, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} |_0 \right\rangle ,$$

logo,

$$\text{Re}(\mathcal{V}_0) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} |_0, \frac{\partial}{\partial y_1} |_0 \dots \frac{\partial}{\partial x_n} |_0, \frac{\partial}{\partial y_n} |_0 \right\rangle .$$

Daí, por definição, $T_0^0 = (\text{Re } \mathcal{V}_0)^\perp$ em relação a $T_0^* \mathcal{X}$. Assim,

$$T_0^0 = \langle (ds_1)_0, \dots, (ds_d)_0 \rangle .$$

Confrontando (A) e (B), conclui-se que

$$N_0^* \Sigma \cap T_0^0 = 0 .$$

Isto é, Σ é não-característica no ponto a .

Mas recorde: o ponto $a \in \Sigma$ era arbitrário. Logo, todo ponto de Σ é não-característico.

Em suma, Σ é uma subvariedade não-característica de $\mathcal{X}$. □

Escólio 11.3: $\Sigma = \mathcal{X} \frown \mathcal{H}$, então ela não contém nenhuma subvariedade não-característica de dimensão, estritamente, menor do que d .

É suficiente observar que a $\dim \Sigma = d$ e qualquer subvariedade de dimensão estritamente menor do que d não pode ser não-característica - Escólio 10.5.

Proposição 11.4: *Seja $\mathcal{X}$ uma subvariedade genérica de $\mathbb{C}^{n+d}$, de classe C^∞ e $\text{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{X} = d$. Seja $\Sigma \subset \mathcal{X}$ uma subvariedade real analítica de $\mathbb{C}^{n+d}$ não-característica*

em $\mathcal{X}$ e $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma = d$. Então, dado $a \in \Sigma$ existem $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}^{n+d}$, vizinhança de a em $\mathbb{C}^{n+d}$ e $\mathcal{H}_a \subseteq \mathcal{O}$ holomorfa, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_a = d$, $\mathcal{H}_a \sqcup \mathcal{X}$ tais que $\mathcal{H}_a \cap \mathcal{X} = \mathcal{O} \cap \Sigma$.

Demonstração: Seja $a \in \mathcal{X}$. Então, existe um sistema de coordenadas holomorfo $(U; z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_d)$ centrado em a e existe uma aplicação φ de classe C^1 tal que

$$\mathcal{X} \cap U : t = \varphi(z, s)$$

$$\varphi(0, 0) = 0 \quad , \quad d\varphi(0, 0) = 0 \quad .$$

Por sua vez, Σ sendo uma subvariedade real-analítica de $\mathbb{C}^{n+d}$, então existe uma vizinhança coordenada da origem de Σ contida em U e parametrizada por $\psi(\tau) = (\lambda(\tau), \mu(\tau))$ a qual é real-analítica e definida numa vizinhança aberta da origem em $\mathbb{R}^d$ com $\psi(0) = 0$. Denotamos por $\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda$, $\lambda_2 = \operatorname{Im} \lambda$ e $\mu_1 = \operatorname{Re} \mu$, $\mu_2 = \operatorname{Im} \mu$.

$$\mu_2(\tau) = \varphi(\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \mu_1(\tau))$$

e, além disso,

$$\frac{\partial \mu_2(0)}{\partial \tau_k} = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, d \quad ,$$

pois, $d\varphi(0) = 0$.

Agora, uma base para $T_0\Sigma$ é dada por

$$\left\{ \frac{\partial \psi(0)}{\partial \tau_k} \right\}_{1 \leq k \leq d}$$

e como $T_0\Sigma \subset T_0\mathcal{X}$, tem-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_k}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{1j}}{\partial \tau_k}(0) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{2j}}{\partial \tau_k}(0) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_0 + \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial \mu_{1\ell}}{\partial \tau_k}(0) \frac{\partial}{\partial s_\ell} \Big|_0 \quad , \quad k = 1, \dots, d \quad .$$

Mas, por hipótese, Σ é não-característica em $\mathcal{X}$, portanto, não-característica no ponto 0. ou seja,

$$T_0\mathcal{X} = T_0\Sigma + \operatorname{Re}(T_0^{0,1} \cap CT_0\mathcal{X}) \quad .$$

Como $\text{Re}(T_0^{0,1} \cap \mathbb{C}T_0\mathcal{X}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0, \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_0 \right\rangle_{1 \leq i \leq n}$, decorre que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s_k} \Big|_0 \right\}_{1 \leq k \leq d}$$

é parte de uma base de $T_0\Sigma$; por conseguinte, existem escalares não todos nulos A_{km} tal que:

$$\sum_{k=1}^d \sum_{\ell=1}^d A_{km} \frac{\partial \mu_{1\ell}}{\partial \tau_k}(0) \frac{\partial}{\partial s_\ell} \Big|_0 = \frac{\partial}{\partial s_m} \Big|_0, \quad m = 1, \dots, d,$$

ou,

$$\sum_{\ell=1}^d \left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial \mu_{1\ell}}{\partial \tau_k}(0) A_{km} \right) \frac{\partial}{\partial s_\ell} \Big|_0 = \frac{\partial}{\partial s_m} \Big|_0, \quad m = 1, \dots, d,$$

daí, combinando com $\partial \mu_2(0)/\partial \tau_k = 0$, $k = 1, \dots, d$, advém que:

$$\mathcal{J}_\mu(0) = \det \left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau}(0) \right) \neq 0.$$

Tratemos de estudar μ .

Com efeito, como μ é uma aplicação real-analítica, então podemos estendê-la para uma aplicação holomorfa $w = \mu(\mathcal{T})$ (denotando $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_d) \in \mathbb{C}^d$ e a extensão, ainda, por μ). Ora, μ é uma aplicação holomorfa de uma vizinhança do 0, aberta em $\mathbb{C}^d$, a valores em $\mathbb{C}^d$, com $\mathcal{J}_\mu(0) \neq 0$, logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa (caso holomorfo) existem vizinhanças abertas de $\mathbb{C}^d$ tal que podemos resolver com relação a equação $w = \mu(\mathcal{T})$, ou seja, $\mathcal{T} = \mu^{-1}(w)$. Agora, da mesma maneira que μ , estendo λ para um aberto de $\mathbb{C}^d$. Assim, estamos em condições de definir uma nova aplicação holomorfa

$$g = \lambda \circ \mu^{-1}.$$

Como conseqüência, podemos definir uma subvariedade holomorfa, $\mathcal{H}_0$, numa certa vizinhança aberta da origem $U \subset \mathbb{C}^{n+d}$:

$$\mathcal{H}_0 = \{(z, w) \in U \mid h_1(z, w) = z_1 - g_1(w) = \dots = h_n(z, w) = z_n - g_n(w) = 0\}$$

com

$$\partial h_1 \wedge \cdots \wedge \partial h_n \neq 0 \quad \text{em } U .$$

Além disso, Σ , próxima da origem, está contida em $\mathcal{H}_0$. De fato, como a parametrização de Σ é dada por $(\lambda(\tau), \mu(\tau))$, então, próximo da origem, $(\lambda(\tau), \mu(\tau)) = (z, w)$ satisfaz a equação:

$$g(w) = \lambda \circ \mu^{-1}(w) = \lambda \circ \mu^{-1}(\mu(\tau)) = \lambda \circ (\mu^{-1} \circ \mu(\tau)) = \lambda(\tau) = z ,$$

isto é, próximo da origem $\Sigma \subset \mathcal{H}_0$.

Para terminar, mostremos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_0 = \Sigma$ na proximidade da origem de $\mathbb{C}^{n+d}$. Para tanto, devemos fazer a mesma mudança de variável que fizemos na demonstração da proposição 11.1 (A)

$$\begin{cases} z^\# = z - g(w) \\ w^\# = w \end{cases} .$$

Como consequência, próximo da origem, a equação de $\mathcal{X}$ é, essencialmente, a mesma do início da demonstração, enquanto que a equação de $\mathcal{H}_0$ reduz-se à $z^\# = 0$. Portanto, novamente, pela proposição 11.1 (B) deduzimos que, na vizinhança da origem,

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{H}_0 = \Sigma.$$

□

CAPÍTULO II

Estudaremos neste capítulo o problema que motivou o artigo:

“Unicidade da extensão em variedades CR e em estruturas hipo-analíticas” por Bao-vendi & Trèves - 1988

Introdução 1: Seja $M = \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, onde anotaremos os elementos de M por pares ordenados (z, s) .

Equipemos M com a estrutura de Hans Lewy, i.e., consideremos M equipado com o subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ gerado pelo campo de Lewy:

$$L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - iz \frac{\partial}{\partial s}.$$

Como vimos, a estrutura de Lewy é a estrutura CR, induzida sobre a hiperquádrica.

O Problema 2: *Seja u uma função que satisfaz as seguintes condições na vizinhança aberta da origem $U = D_{\epsilon_0}(0) \times]-b, b[$ ($\epsilon_0 > 0$, $b > 0$):*

(a) $u \in C^\infty(U)$;

(b) $Lu \equiv 0$;

(c) u anula-se de ordem infinita no conjunto (eixo s) $\cap U =]-b, b[$, i.e., para todo $N \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_N > 0$ tal que $|u(z, s)| \leq C_N |z|^N$, $\forall z \in D_{\epsilon_0}(0)$.

Então, $u \equiv 0$.

Notemos que é imprescindível que a solução u se anule de ordem infinita no eixo s (ou pedaço dele) como mostram os exemplos.

Exemplos:

(2.3) Seja $u(z, s) = z^n (n > 1)$. Então, $(1^\circ) u \in C^\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$; $(2^\circ) L(z^n) = 0$.

Entretanto, não vale a hipótese (c).

(2.4) Seja $u(z, s) = H(s + i|z|^2)$ como no exemplo 5.4. Então, $(1^\circ) u \in C^\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$, $(2^\circ) Lu = 0$ e $(3^\circ) u$ anula-se de ordem infinita somente na origem de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Uma solução do problema 2

Parte I

Seja u uma função que satisfaz as hipóteses (a), (b) e (c) acima. Dado o aberto

Definamos as funções U_j em H por:

$$U_j(w) = U_j(s, t) = \int_{|z|=\sqrt{z}} u(z, s) z^j dz, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z},$$

onde $w = s + it$.

Mostremos que as U_j são funções holomorfas em H , i.e.:

$$(a) \quad U_j \in C^1(H) \quad ; (b) \quad \frac{\partial U_j}{\partial \bar{w}} \equiv 0 \quad \text{em } H.$$

(a) A verificação da continuidade das funções U_j e de suas derivadas parciais são aplicações rotineiras dos Teoremas da Teoria de Integração de Lebesgue (ou Riemann).

(b) (●) Calculamos $\frac{\partial U_j}{\partial s}$.

$$\frac{\partial U_j}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int_{|z|=\sqrt{t}} u(z, s) z^j dz \stackrel{!}{=} \int_{|z|=\sqrt{t}} \frac{\partial u}{\partial s}(z, s) z^j dz .$$

(●●) Calculamos $\frac{\partial U_j}{\partial t}$.

Aplicamos o Teorema de Stokes à função U_j na coroa:

$$U_j(s, t) = \int_{|z|=\sqrt{t}} u(z, s) z^j dz = \int_{a < |z| < \sqrt{t}} d[u(z, s) z^j] \wedge dz + \underbrace{\int_{|z|=a} u(z, s) z^j dz}_{I_j = I_j(s)} ,$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$.

Calculemos o 1º termo do 2º membro da fórmula acima:

$$\begin{aligned} \int_{a < |z| < \sqrt{t}} (\partial + \bar{\partial})(u(z, s) z^j) \wedge dz &= \int_{a < |z| < \sqrt{t}} \partial[u(z, s) z^j] \wedge dz + \int_{a < |z| < \sqrt{t}} \bar{\partial}[u(z, s) z^j] \wedge dz \\ &= 0 + \int_{a < |z| < \sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[u(z, s) z^j] d\bar{z} \wedge dz = \int_{a < |z| < \sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[u(z, s) z^j] d\bar{z} \wedge dz \\ &= \int_{a < |z| < \sqrt{t}} \left[\frac{\partial u(z, s)}{\partial \bar{z}} z^j + u(z, s) \frac{\partial z^j}{\partial \bar{z}} \right] d\bar{z} \wedge dz = \int_{a < |z| < \sqrt{t}} \frac{\partial u(z, s)}{\partial \bar{z}} z^j d\bar{z} \wedge dz . \end{aligned}$$

Observemos que:

$$d\bar{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2idx \wedge dy = 2i\rho d\rho \wedge d\theta ,$$

↓ [derivando sob o sinal]

onde $z = \rho e^{i\theta}$ com $\begin{cases} a \leq \rho < \sqrt{t} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$, daí,

$$\int_{a < |z| < \sqrt{t}} \frac{\partial u(z, s)}{\partial \bar{z}} z^j d\bar{z} \wedge dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_a^{\sqrt{t}} \frac{\partial u(\rho e^{i\theta}, s)}{\partial \bar{z}} [\rho e^{i\theta}]^j 2i\rho d\rho \right] d\theta .$$

Portanto,

$$U_j(s, t) = 2i \int_0^{2\pi} \left[\int_a^{\sqrt{t}} \frac{\partial u(\rho e^{i\theta}, s)}{\partial \bar{z}} [\rho e^{i\theta}]^j \rho d\rho \right] d\theta + \mathcal{I}_j .$$

Derivando com relação à t :

$$\frac{\partial U_j}{\partial t}(s, t) = 2i \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \left[\int_a^{\sqrt{t}} \frac{\partial u(\rho e^{i\theta}, s)}{\partial \bar{z}} \rho^j e^{i\theta j} \rho d\rho \right] d\theta ,$$

que derivando, pela regra da cadeia, sob o sinal de integração, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial t}(s, t) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(\sqrt{t}e^{i\theta}, s) (\sqrt{t}e^{i\theta})^{j-1} i\sqrt{t}e^{i\theta} d\theta \stackrel{1}{=} \\ &= \int_{|z|=\sqrt{t}} \frac{\partial u(z, s)}{\partial \bar{z}} z^{j-1} dz , \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial \bar{w}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_j}{\partial s} + i \frac{\partial U_j}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{|z|=\sqrt{t}} \left(\frac{\partial u(z, s)}{\partial s} z^j + i \frac{\partial u(z, s)}{\partial \bar{z}} z^{j-1} \right) dz \right] = \\ &= \frac{i}{2} \left[\int_{|z|=\sqrt{t}} \left(-iz \frac{\partial u(z, s)}{\partial s} + \frac{\partial u(z, s)}{\partial \bar{z}} z^{j-1} \right) dz \right] = 0 \end{aligned}$$

pela hipótese (b).

Portanto, as funções U_j são holomorfas em H .

Parte II

Mostremos que $U_j \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.

$$\uparrow \quad i\sqrt{t}e^{i\theta}d\theta = dz$$

Utilizaremos aqui a hipótese (c).

Seja

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup U_j(s, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \int_{|z|=\sqrt{t}} u(z, s) z^j dz =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \int_0^{2\pi} u(\sqrt{t}e^{i\theta}, s) (\sqrt{t}e^{i\theta})^j i \sqrt{t}e^{i\theta} d\theta .$$

Como vale $|u(z, s)| \leq C_N |z|^N$ em $D_{e_0}(0)$ temos: para todo N , existe $C_N > 0$ tal que $|u(\sqrt{t}e^{i\theta}, s)| \leq C_N (\sqrt{t})^N$. Daí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \left| \int_0^{2\pi} u(\sqrt{t}e^{i\theta}, s) (i\sqrt{t}e^{i\theta})^j i \sqrt{t}e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \int_0^{2\pi} |u(\sqrt{t}e^{i\theta}, s)| (\sqrt{t})^{j+1} d\theta \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \int_0^{2\pi} C_N (\sqrt{t})^N (\sqrt{t})^{j+1} d\theta = 0 . \end{aligned}$$

Logo, o limite de $U_j(s, t)$ existe quando $t = 0^+$ e é igual a zero, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U_j(s, t) = 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } s \in]-b, b[.$$

Daí, podemos estender *continuamente* as funções U_j para o conjunto $] -b, b[$, i.e.:

$$U_j(s, 0) = 0, \text{ para todo } s \in]-b, b[, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} .$$

Parte III

Pela parte I as funções U_j são holomorfas em H e pela parte II elas são contínuas em $] - b, b[$. Assim, podemos aplicar o Princípio de Simetria (Reflexão) de Schwarz.

Com efeito, seja $H^* = \{w \in \mathbb{C} | w \in \overline{H}\}$ o conjunto simétrico de H . Definamos para cada $j \in \mathbb{Z}$ a função V_j sobre H^* por:

$$V_j(w) = \overline{U_j(\overline{w})}, \text{ para todo } w \in H^*,$$

além disso, $V_j(s, 0) = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Então,

(i) para todo j as funções V_j são holomorfas em H^* ;

(ii) $h_j : H \sqcup] - b, b[\sqcup H^* \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por:

$$h_j(w) = \begin{cases} U_j(w) & , \text{ se } w \in H \sqcup] - b, b[\\ V_j(w) & , \text{ se } w \in H^* \end{cases}$$

é a única extensão holomorfa de U_j , para cada $j \in \mathbb{Z}$, à $H \sqcup] - b, b[\sqcup H^*$.

Como cada h_j se anula em $] - b, b[$, e uma função holomorfa só pode ter zeros isolados, a não ser que seja a função nula, concluímos que:

$$\begin{cases} \text{para todo } j \in \mathbb{Z}, \\ \text{para todo } w \in H \sqcup] - b, b[\sqcup H^* . \end{cases} \quad h_j(s, t) = h_j(w) = 0, \quad \text{ou}, \quad h_j \equiv 0$$

Em particular, concluímos que:

$$U_j \equiv 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}, \text{ i.e.,}$$

$$\int_{|z|=\sqrt{t}} u(z, s) z^j dz = 0, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}$$

Parte IV

Mostremos que $u(z, s) = 0$ numa vizinhança aberta de $] - b, b[$.

Seja qualquer $(z_0, s_0) \in U = D_{\epsilon_0}(0) \times] - b, b[$. Então, existem $t_0 \geq 0$ e $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ tal que:

$$z_0 = \sqrt{t_0} e^{i\theta_0} .$$

Seja $\lambda_0(\theta) = u(\sqrt{t_0}e^{i\theta}, s_0)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Desenvolvendo em série de Fourier a função λ_0 obtemos:

$$\sum_{j=-n}^n c_j[\lambda_0] e^{i\theta j} \xrightarrow{\text{u.a.}} \lambda_0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty ,$$

pois, λ_0 é uma função periódica de período 2π e de classe C^∞ .

(Note que é suficiente que λ_0 seja $C^2_{(2\pi)}([-\pi, \pi])$).

Ou melhor escrito:

$$\lambda_0(\theta) \stackrel{\text{u.a.}}{=} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j[\lambda_0] e^{i\theta j} \text{ em } [-\pi, \pi] ,$$

onde os coeficientes de Fourier para todo $j \in \mathbb{Z}$ são dados por:

$$c_j[\lambda_0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_0(\theta) e^{-i\theta j} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sqrt{t_0}e^{i\theta}, s_0) e^{-i\theta j} d\theta = 0 .$$

De fato, pela parte III, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|z|=\sqrt{t_0}} u(z, s_0) z^j dz = \int_{-\pi}^{\pi} u(\sqrt{t_0}e^{i\theta}, s_0) (\sqrt{t_0})^{j+1} i e^{i\theta(j+1)} d\theta \\ &= \underbrace{i(\sqrt{t_0})^{j+1}}_{\neq 0} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sqrt{t_0}e^{i\theta}, s_0) e^{i\theta(j+1)} d\theta , \end{aligned}$$

daí decorre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_0(\theta) e^{i\theta(j+1)} d\theta = 0, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z} ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_0(\theta) e^{i\theta j} d\theta = 0, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z} .$$

Logo,

$$\lambda_0(\theta) = u(\sqrt{t_0}e^{i\theta}, s_0) = 0 ,$$

para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$, em particular, $u(\sqrt{t_0}e^{i\theta_0}, s_0) = u(z_0, s_0) = 0$. Mas, (z_0, s_0) era um ponto arbitrário de $U = D_\epsilon(0) \times]-b, b[$. Logo,

$$u(z, s) = 0, \text{ para todo } (z, s) \in U .$$

□

CAPÍTULO III

A Condição $\mathcal{A}$

No presente capítulo $\mathcal{X}$ denotará sempre uma subvariedade genérica de classe C^∞ de $\mathbb{C}^{n+d}$ e Σ subvariedade de $\mathcal{X}$ de classe C^∞ tal que $\text{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{X} = \dim_{\mathbb{R}} \Sigma = d$.

Nós sempre estaremos submetidos à hipótese de que:

“existe uma subvariedade holomorfa $\mathcal{H}$ de $\mathbb{C}^{n+d}$ com $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = d$ cuja intersecção com $\mathcal{X}$ é holomorficamente transversal e igual a Σ .”

Aqui vai a condição central do trabalho.

Condição $(\mathcal{A})$

Dizemos que uma subvariedade Σ satisfaz a condição $\mathcal{A}$ no ponto $a_0 \in \Sigma$ se o que segue é verdade:

Dada qualquer vizinhança aberta V de a_0 em Σ existe uma função holomorfa F em subconjunto aberto $\mathcal{O}$ de $\mathcal{H}$ contendo V , tal que $F(a_0) \neq 0$ e cuja componente conexa de a_0 do conjunto

$$\{a \in V / F(a) \neq 0\}$$

tem fecho compacto contido em V .

Escólio 1: *A condição $\mathcal{A}$ é invariante por biholomorfismos locais (mudanças de coordenadas holomorfas).*

Seja H um biholomorfismo local de uma vizinhança aberta em $\mathbb{C}^{n+d}$ $a_0 \in \Sigma$ em uma vizinhança aberta em $\mathbb{C}^{n+d}$ de $H(a_0) = b_0 \in H(\Sigma)$.

Suponhamos que Σ satisfaz a *condição* $\mathcal{A}$ no ponto a_0 e mostremos que $H(\Sigma)$ (na proximidade de b_0) satisfaz a *condição* $\mathcal{A}$ no ponto b_0 .

Com efeito, seja qualquer vizinhança aberta W de b_0 em $H(\Sigma)$. Então, como H é um biholomorfismo $V = H^{-1}(W)$ é uma vizinhança aberta de a_0 em Σ . Mas, Σ satisfaz a *condição* $\mathcal{A}$ no ponto a_0 , i.e. : *existe* F função holomorfa em um subconjunto aberto $\mathcal{O}$ de $\mathcal{H}$ tal que $F(a_0) \neq 0$ e cuja componente conexa de a_0 do conjunto

$$\{a \in V / F(a) \neq 0\}$$

tem fecho compacto contido em V , i.e., $\overline{C_{a_0}} \subset V$.

Definamos a função holomorfa $G = F \circ H^{-1}$ no conjunto aberto $\mathcal{O}' = H(\mathcal{O})$ que, evidentemente, contém W .

$$G(b_0) = F \circ H^{-1}(b_0) = F(a_0) \neq 0$$

e a componente conexa de b_0 do conjunto

$$\{b \in W / G(b) \neq 0\}$$

é

$$C_{b_0} = H(C_{a_0})$$

cujo fecho é compacto, pois,

$$\overline{C_{b_0}} = \overline{H(C_{a_0})} = H(\overline{C_{a_0}})$$

e como $\overline{C_{a_0}} \subset V$ isso implica que $\overline{C_{b_0}} \subset W$; o que mostra que $H(\Sigma)$ na vizinhança de b_0 satisfaz a *condição* $\mathcal{A}$. □

Faremos uma simplificação que nos ajudará quando da verificação de que uma subvariedade Σ satisfaz a *condição* $\mathcal{A}$ num de seus pontos.

Seja $a_0 \in \Sigma$. Então, pela proposição 11.1, existe um sistema local de coordenadas $(U; z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_d)$ em C^{n+d} , centrado em a_0 tal que:

$$\mathcal{H} \cap U : z = 0 \quad ((\text{subconj. do } w\text{-espaço})$$

$$\mathcal{X} \cap U : t = \varphi(z, s) \quad c/ \quad \varphi(0, 0) = 0 \quad , \quad d\varphi(0, 0) = 0$$

decorre que

$$\Sigma \cap U : t = \varphi(0, s) .$$

Inicialmente, reparemos que ao invés de tomarmos qualquer vizinhança aberta da origem, podemos tomar um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em $\Sigma \cap U$:

$$\mathcal{F}_0 = \{V_\epsilon \subset \Sigma \cap U / \text{ para todo } \epsilon > 0 \quad , \quad \epsilon \rightarrow 0\} ,$$

onde $V_\epsilon = \{w \in C^d / \text{ existe } s \in \mathbb{R}^d , \quad |s| < 2\epsilon, \text{ tal que } w = s + i\varphi(0, s)\}$.

Depois, seja a subvariedade $\Sigma \cap U$ satisfazendo a *condição* $\mathcal{A}$ na origem. Então, dada qualquer vizinhança $V_\epsilon \in \mathcal{F}_0$ *existe* uma função holomorfa $F(w)$ definida num aberto $\mathcal{O}$ de $\mathcal{H} \cap U$ contendo $\overline{V}_\epsilon$ tal que:

- (i) $F(0) \neq 0$;
- (ii) a componente conexa do conjunto

$$\{w \in V_\epsilon / F(w) \neq 0\}$$

tem fecho compacto contido em V_ϵ .

Agora, em vista de que $\Sigma \cap U$ e $\text{Re}(\Sigma \cap U)$ (parte real em C^d) são difeomorfias através dos C^∞ -difeomorfismos $\theta(s) = s + i\varphi(0, s)$ e $\text{Re} \Big|_{\Sigma \cap U}$, para verificar (ii) basta que o fecho da componente conexa da origem do conjunto

$$\{s \in \mathbb{R}^d / |s| < 2\epsilon \quad , \quad F(s + i\varphi(0, s)) \neq 0\}$$

tenha fecho compacto contido na bola

$$\{s \in \mathbb{R}^d / |s| < 2\epsilon\} .$$

Proposição 2: *Se $d = 1$ a subvariedade Σ de $\mathcal{X}$ satisfaz a condição $\mathcal{A}$ em todo ponto.*

Demonstração: Tomemos a função:

$$F(w) = [w - \epsilon - i\varphi(0, \epsilon)][w + \epsilon - i\varphi(0, -\epsilon)] .$$

Para cada $0 < \epsilon \rightarrow 0$ fixado $F(w)$ é uma função holomorfa ($d = 1$) em $\mathcal{H}$ (w-plano). Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= F(s + i\varphi(0, s)) = [(s - \epsilon) + i(\varphi(0, s) - \varphi(0, \epsilon))] \\ &\quad [(s + \epsilon) + i(\varphi(0, s) - \varphi(0, -\epsilon))] \quad \Leftrightarrow s \pm \epsilon \end{aligned}$$

A componente conexa do 0 do conjunto

$$\{s \in \mathbb{R} / |s| < 2\epsilon \quad , \quad F(s + i\varphi(0, s)) \neq 0\}$$

é o intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$, cujo fecho é compacto, i.e., $[-\epsilon, \epsilon]$ e está contido no intervalo $]-2\epsilon, 2\epsilon[$; mostramos que Σ satisfaz a condição $\mathcal{A}$ na origem que na verdade representa qualquer ponto de Σ . □

“A próxima proposição é de interesse quando $d > 1$ ”

Proposição 3: *Suponhamos que $\varphi(0, s)$ seja uma função real-analítica na variável s em alguma bola $\{s \in \mathbb{R}^d / |s| < \epsilon_0\}$. Então, Σ satisfaz a condição $\mathcal{A}$ na origem.*

Demonstração: Em primeiro lugar, suponhamos que $\varphi(0, s) = 0$ se $|s| < \epsilon_0$. Então, para cada $\epsilon > 0$ com $\epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$ consideremos a função:

$$F(w) = \epsilon^2 - (w_1^2 + \cdots + w_d^2) .$$

Fixemos uma vizinhança V_ϵ arbitrária do sistema de vizinhanças de 0 (logo, ϵ está fixado).

Temos:

(i) $F(w)$ é uma função holomorfa no w -espaço, i.e., em $\mathcal{H}$, pois, é um polinômio de várias variáveis complexas;

$$(ii) F(0) = \epsilon^2 \neq 0;$$

$$(iii) F(s) = \epsilon^2 - (s_1^2 + \cdots + s_d^2) = \epsilon^2 - |s|^2 = 0 \Leftrightarrow |s| = \epsilon .$$

Assim, a componente conexa do 0 do conjunto

$$\{s \in \mathbb{R}^d / |s| < 2\epsilon \quad , \quad F(s) \neq 0\}$$

é a bola aberta $\{s \in \mathbb{R}^d / |s| < \epsilon\}$ cujo fecho é a bola fechada (E.V.N.)

$$\{s \in \mathbb{R}^d / |s| \leq \epsilon\}$$

que por sua vez está contida na bola aberta $\{s \in \mathbb{R}^d / |s| < 2\epsilon\} \subset \{s \in \mathbb{R}^d / |s| < \epsilon_0\}$. Ou seja, nesse caso vale a *condição A*.

Em segundo lugar, consideremos o caso geral.

Σ em $\mathbb{C}^d$ é dada por: $w = s + i\varphi(0, s)$ com $\varphi(0, s)$ real-analítica em $\{s \in \mathbb{R}^d / |s| < \epsilon_0\}$.

Definamos a aplicação holomorfa no aberto $\mathcal{O} \supset \{s \in \mathbb{R}^d / |s| < \epsilon_0\}$

$$\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^d \xrightarrow{H} \mathbb{C}^d$$

$$S \longrightarrow H(S) = S + i\varphi(0, S)$$

onde $S = s + i\tau$ (para obter a extensão holomorfa precisamos que φ seja real-analítica).

Derivando:

$$H'(S) = I + i \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, S)$$

em particular, $H'(0) = I$, logo, estamos nas hipóteses do Teorema da Função Inversa no caso holomorfo. Então, *existe* uma vizinhança aberta, suficientemente pequena, da origem

$\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ e uma única aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} G : \mathcal{O}' \subseteq \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ w &\longmapsto G(w) \end{aligned}$$

que satisfaz:

- (i) $G(0) = 0$;
- (ii) $w = H(G(w))$, i.e.,

$$w = G(w) + i\varphi(0, G(w)) \quad \text{em } \mathcal{O}' .$$

Além disso, de $G(H(S)) = S$ deduzimos que $G(s + i\varphi(0, s)) \equiv s$, para todo $s \in \mathcal{O}' \cap \{s \in \mathbb{R}^d / |s| < \epsilon\}$, o que mostra que a mudança holomorfa de variável (biholomorfismo local):

$$(z, w) \longmapsto (z, G(w)) \quad , \text{ i.e. , } \quad \begin{cases} z^\# = z \\ w^\# = G(w) \end{cases}$$

preserva $\mathcal{H}$ e transforma Σ no espaço real $\mathbb{R}^d$. Assim, em $\mathcal{O}'$ podemos tomar

$$\tilde{s}_k = \operatorname{Re} G_k(s + i\varphi(z, s)) \quad , \quad k = 1, \dots, d$$

como coordenadas em $\mathbb{R}^d$, em consequência,

$$w^\# = G(s + i\varphi(z, s)) = \tilde{s} + i\tilde{\varphi}(z, \tilde{s}) ,$$

que tem as mesmas propriedades de

$$w = s + i\varphi(z, s) .$$

De fato:

(1^o) $\tilde{\varphi}(z, \tilde{s})$ é real-analítica, pois, é composição de aplicações reais analíticas ;

(2^o) existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\{\tilde{s} \in \mathbb{R}^d / |\tilde{s}| < \epsilon_0\} \subset G(\mathcal{O}')$.

Temos:

$$i\tilde{\varphi}(0, \tilde{s}) + \operatorname{Re} G(s + i\varphi(0, s)) = G(s + i\varphi(0, s)) \equiv s \in \mathbb{R}^d$$

e isso implica que $\tilde{\varphi}(0, \tilde{s}) = 0$ em $\{\tilde{s} \in \mathbb{R}^d / |\tilde{s}| < \epsilon_0\}$. Em particular, $\tilde{\varphi}(0, 0) = 0$ e $d\tilde{\varphi}(0, 0) = 0$.

Assim, reduzimos o caso geral ao primeiro caso através de mudanças de coordenadas dadas pelo biholomorfismo local $(z, w) \mapsto (z, g(w))$. Mas, a *condição* $\mathcal{A}$ é invariante por biholomorfismo local, portanto, no caso geral, Σ também satisfaz a *condição* $\mathcal{A}$ na origem. $\square$

Corolário 4: *Seja $\Sigma \subset \mathcal{X}$ uma subvariedade real analítica de $\mathbb{C}^{n+d}$, com $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma = d$. Se Σ é não-característica em $\mathcal{X}$, então Σ satisfaz a condição $\mathcal{A}$ em cada um de seus pontos.*

Demonstração: Com efeito, pela proposição 11.4, chegamos a conclusão que para cada $a \in \Sigma$ existem $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}^{n+d}$, vizinhança de a em $\mathbb{C}^{n+d}$ e $\mathcal{H}_a \subseteq \mathcal{O}$ subvariedade holomorfa, $\dim \mathcal{H}_a = d$, com $\mathcal{H}_a \nparallel \mathcal{X}$ tais que $\mathcal{H}_a \cap \mathcal{X} = \mathcal{O} \cap \Sigma$. Nessas condições, podemos aplicar a proposição 11.1 para representar as subvariedades nas novas coordenadas holomorfas centradas em a da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_a \cap U : z = 0$$

$$\mathcal{X} \cap U : t = \varphi(z, s) \quad \text{com } \varphi(0, 0) = 0, \quad d\varphi(0, 0) = 0$$

decorre que

$$\Sigma \cap U : t = \varphi(0, s) .$$

Observe que se necessário contraio U de tal maneira que $U \subset \mathcal{O}$.

Agora, a hipótese de que Σ é uma subvariedade real-analítica implica que $\varphi(0, s)$ é uma aplicação real-analítica em alguma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^d$, logo, podemos aplicar a proposição 3, anterior, para obter este corolário. $\square$

Escólio 5: Podemos, facilmente, produzir exemplos de subvariedades Σ totalmente reais com dimensão real d de $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ (com $d > 1$) que satisfazem a condição $\mathcal{A}$ sem serem reais analíticas.

Por exemplo, suponhamos que Σ está definida pelas equações:

$$t = \varphi(0, s)$$

e que

$$\varphi(0, s) = (\psi_1(s_1), \dots, \psi_d(s_d))$$

Com construção análoga a da proposição 2 podemos tomar para cada $\epsilon > 0$ a vizinhança V_ϵ do 0 em Σ .

Temos:

$$F(w) = \prod_{k=1}^d [w_k - \epsilon - i\psi_k(\epsilon)][w_k + \epsilon - i\psi_k(-\epsilon)]$$

que é uma função holomorfa em $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$. Além disso,

$$\begin{aligned} F(s + i\varphi(0, s)) &= \prod_{k=1}^d [s_k + i\psi_k(s_k) - \epsilon - i\psi_k(\epsilon)][s_k + i\psi_k(s_k) + \epsilon - i\psi_k(-\epsilon)] = 0 \\ &\Leftrightarrow s = \pm \epsilon . \end{aligned}$$

Tomando-se o polidisco com centro no 0 e raio ϵ , $P(0; \epsilon)$, como sendo a componente conexa do 0, temos:

$$\overline{P(0; \epsilon)} \subset B_{2\epsilon}(0) ;$$

mostrando que a condição $\mathcal{A}$ vale. □

CAPÍTULO IV

O Teorema Principal

No presente capítulo demonstraremos o Teorema Principal.

Introdução 1: Como antes $\mathcal{X}$ será uma subvariedade genérica de $\mathbb{C}^{n+d}$, de classe C^∞ , de codimensão real $d \geq 1$; Σ será uma subvariedade de dimensão real d de $\mathcal{X}$, também, de classe C^∞ e igual a intersecção transversal holomorfa de $\mathcal{X}$ com uma subvariedade holomorfa $\mathcal{H}$ de $\mathbb{C}^{n+d}$, com $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = d$.

Em resumo:

$\mathcal{X}$ e Σ são de classe C^∞ ;

$\text{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{X} = \dim_{\mathbb{R}} \Sigma = d \geq 1$;

$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = d$ e $\mathcal{X} \cap \mathcal{H} = \Sigma$.

Definição 2: Seja $a_0 \in \Sigma$. Dizemos que vale a propriedade da extensão única para Σ no ponto a_0 , se o que segue é verdade:

“Dada qualquer vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de a_0 em $\mathcal{X}$ existe uma vizinhança aberta V de a_0 com $V \subset \mathcal{U}$ em $\mathcal{X}$ tal que:

Se uma função h é Lipschitz-contínua, CR em $\mathcal{U}$ e anula-se de ordem infinita em $\Sigma \cap \mathcal{U}$, então

$$h \equiv 0 \quad \text{em} \quad V."$$

Teorema Principal 3: *Se Σ satisfaz a condição $\mathcal{A}$ em um dos seus pontos a_0 , então vale a propriedade da extensão única para Σ no ponto a_0 .*

Demonstração:

Parte I: Seja $a_0 \in \Sigma$, onde Σ satisfaz a condição $\mathcal{A}$. Então, pela proposição 11.1, podemos adotar um sistema local de coordenadas holomorfas $(U; z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_d)$ em $\mathbb{C}^{n+d}$, centrado em a_0 , tal que:

$$\mathcal{H} \cap U : z = 0 \quad (\text{subconjunto do } w\text{-espaço})$$

$$\mathcal{X} \cap U : t = \varphi(z, s) \quad \text{com } \varphi(0, 0) = 0, d\varphi(0, 0) = 0,$$

decorre que,

$$\Sigma \cap U : t = \varphi(0, s).$$

Sejam U_1 uma bola aberta de $\mathbb{C}^n$ centrada na origem e U_2 uma bola aberta de $\mathbb{R}^d$ centrada também na origem, tal que o conjunto $\overline{U}_1 \times \overline{U}_2$ esteja contido em U e seja domínio da aplicação φ .

Seja $\theta(s) = s + i\varphi(0, s)$ um difeomorfismo C^∞ definido em $U \cap (\mathbb{R}^d + i0)$ cujo inverso é $\text{Re}|_{\Sigma \cap U}$. Então, $\theta(\overline{U}_2) = \overline{V}$ é uma vizinhança da origem em $\Sigma \cap U$.

Como, nas novas coordenadas, $\Sigma \cap U$ satisfaz a condição $\mathcal{A}$ na origem, seja V a vizinhança dada acima. Então, existe uma função holomorfa definida num aberto $\mathcal{O}$ de $\mathcal{H} \cap U \subset \mathbb{C}^d$ contendo $\overline{V}$ tal que: $F(0) \neq 0$ e a componente conexa do conjunto aberto

$$\{w \in V / F(w) \neq 0\}$$

tem fecho compacto contido em V ;

ou reformulando em termos do capítulo III,

a componente conexa da origem do conjunto aberto em $\mathbb{R}^d$

$$\{s \in \mathbb{R}^d / s \in U_2, F(s + i\varphi(0, s)) \neq 0\}$$

tem como fecho um subconjunto compacto (conexo) K de U_2 .

Cabe ressaltar que, sendo $\mathbb{R}^d$ um espaço topológico localmente conexo, a componente conexa em questão é um conjunto aberto. Assim, K é uma *vizinhança compacta e conexa da origem em $\mathbb{R}^d$* .

Mostraremos, a seguir, que $F(s + i\varphi(0, s)) = 0$, para todo $s \in F_r K$.

Com efeito, suponhamos, por contraposição, que exista $s_0 \in F_r K$ tal que $F(s_0 + i\varphi(0, s_0)) \neq 0$. Ora, $F(s + i\varphi(0, s))$ é uma função contínua em U_2 , logo, existe uma vizinhança aberta conexa de s_0 $W \subset U_2$ tal que, para todo $s \in W$, $F(s + i\varphi(0, s)) \neq 0$. Mas, $W \cap K \neq \emptyset$, logo, $W \sqcup K$ é conexo que contém $0 \in \mathbb{R}^d$. Em suma, $W \sqcup K$ é um conjunto conexo tal que:

$$F(s + i\varphi(0, s)) \neq 0 \quad , \text{ para todo } s \in W \sqcup K$$

e isso está em contraposição com o fato de que K é a componente conexa dada pela condição $\mathcal{A}$. Assim, como $s_0 \in F_r K$ era arbitrário, segue que

$$F(s + i\varphi(0, s)) = 0 \quad , \text{ para todo } s \in F_r K \quad .$$

Parte II: Dada a seguinte equação

$$z = F(s + i\varphi(z, s))\zeta$$

que é equivalente a

$$z - F(s + i\varphi(z, s))\zeta = 0 \quad ,$$

cuja função associada é

$$\mathcal{F}(\zeta, s, z) = z - F(s + i\varphi(z, s))\zeta \quad ,$$

onde tomaremos como domínio um conjunto aberto que contém $\mathbb{C}^n \times \overline{U}_2 \times \overline{U}_1$. É fácil verificar que:

(i) $\mathcal{F}$ é de classe C^∞ ; $\mathcal{F}(0, s_0, 0) = 0$, para todo $s_0 \in \overline{U}_2$;

(ii) a matriz jacobiana em relação às variáveis (x, y) nos pontos $(0, s_0, 0)$, $s_0 \in \overline{U}_2$ é a matriz *identidade*.

Assim, de (i) e (ii) decorre que podemos aplicar o Teorema da Função Implícita para resolver a equação na variável z .

Com efeito, para todo $(0, s_0, 0)$, $s_0 \in \overline{U}_2$ existem $\epsilon'(s_0) > 0$, $\epsilon''(s_0) > 0$, e uma função $G_{s_0}(\zeta, s)$ de classe C^∞

$$B'_{\epsilon'(s_0)}(0, s_0) \subset C^n \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{G_{s_0}} B''_{\epsilon''(s_0)}(0) \subset C^n$$

$$(\zeta, s) \longmapsto z = G_{s_0}(\zeta, s) ,$$

com a seguinte propriedade:

se $(\zeta, s, z) \in B'_{\epsilon'(s_0)}(0, s_0) \times B''_{\epsilon''(s_0)}(0)$, então $\mathcal{F}(\zeta, s, z) = 0$ se, e somente se,

$$z = G_{s_0}(\zeta, s) .$$

Decorre da construção acima, que

$$\left\{ B'_{\epsilon'(s_0)}(0, s_0) \right\}_{s_0 \in \overline{U}_2}$$

constitui um recobrimento aberto do conjunto compacto $\{0\} \times \overline{U}_2$, logo, existe $\{s_1, \dots, s_k\} \subset \overline{U}_2$ tal que

$$\left\{ B'_{\epsilon'(s_j)}(0, s_j) \right\}_{1 \leq j \leq k}$$

recobre $\{0\} \times \overline{U}_2$.

Consideremos o conjunto aberto

$$\Omega = \bigsqcup_{j=1}^k B'_{\epsilon'(s_j)}(0, s_j) .$$

Então, para cada j está associada uma função solução

$$G_{s_j} : B'_{\epsilon'(s_j)}(0, s_j) \longrightarrow B''_{\epsilon''(s_j)}(0) \quad , j = 1, \dots, k$$

as quais, usando a unicidade do Teorema da Função Implícita, podem ser coladas para gerar uma função de classe C^∞

$$\begin{aligned} G : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\zeta, s) &\longmapsto z = G(\zeta, s) \end{aligned}$$

que satisfaz

$$G(\zeta, s) - F(s + i\varphi(G(\zeta, s), s))\zeta = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad z = G(\zeta, s) .$$

De agora em diante, denotaremos por Δ polidisco, suficientemente pequeno, centrado na origem e contido em $\mathbb{C}^n$ (na variável ζ) de maneira que $\overline{\Delta} \times \overline{U}_2 \subset \Omega$.

Mostraremos, a seguir, que

$$G(0, s) \equiv 0, \text{ para todo } s \in U_2;$$

$$G(\zeta, s) \equiv 0, \text{ para todo } \zeta \in \Delta \text{ e para todo } s \in F_r K.$$

De fato, ou quando $\zeta = 0$ ou $F(s + i\varphi(0, s)) = 0$, para todo $s \in F_r K$ a equação $\mathcal{F}(\zeta, s, z) = 0$ tem como solução $z = 0$ e, daí, pela unicidade do Teorema da Função Implícita seguem os resultados acima.

Parte III: Observemos que a vizinhança $\Delta \times U_2$ (considerada como subconjunto aberto do (ζ, s) - espaço $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^d$) é *difeomorfa* a uma subvariedade genérica $\mathcal{X}_0$ de $\mathbb{C}^{n+d}$ via a aplicação:

$$(\xi, \eta, s) \longmapsto (\zeta, \tau) ,$$

onde $\zeta = \eta + i\xi$, $\tau = s + i\psi(\zeta, s)$ ¹ e $\varphi(\zeta, s) = \psi(G(\zeta, s), s)$. É claro que a subvariedade $\mathcal{X}_0$ é de classe C^∞ e $\text{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_0 = d$.

¹ Observe que no caso em que estivermos trabalhando com subvariedades de classe C^1 a aplicação $\tau = s + i\psi(\zeta, s)$ é apenas de classe C^1 .

Seja, agora, $h(z, s)$ uma função Lipschitz-contínua, CR em $U_1 \times U_2$ e anulando-se de ordem infinita em $z = 0$. Fazendo o “pull-back” de h a $\Delta \times U_2$,

$$H(\zeta, s) = h(G(\zeta, s), s) ,$$

temos que:

(i) H é uma função CR com relação a estrutura CR em $\Delta \times U_2$.

De fato, como $z_1, \dots, z_n, w_1 = s_1 + i\varphi_1(z, s), \dots, w_d = s_d + i\varphi_d(z, s)$ são soluções dos campos tangenciais antiholomorfos e cujas diferenciais são linearmente independentes, então o conjunto $\{dz_1, \dots, dz_n, dw_1, \dots, dw_d\}$ forma uma base do ortogonal de $T^{0,1} \cap CT\mathcal{X}$ em $U_1 \times U_2$. Agora, por hipótese, h é uma função CR em $U_1 \times U_2$, i.e., $dh(L) = 0$, para todo $L \in T^{0,1} \cap CT\mathcal{X}$ em $U_1 \times U_2$, logo,

$$dh = \sum_{j=1}^n a_j(z, s) dz_j + \sum_{k=1}^d b_k(z, s) dw_k .$$

Seja a aplicação

$$\lambda : (\zeta, s) \in \Delta \times U_2 \rightarrow (G(\zeta, s), s) .$$

Fazendo o “pull-back” a $\Delta \times U_2$ de dh , temos:

$$\lambda^*(dh) = \sum_{j=1}^n a_j(\lambda(\zeta, s)) \lambda^* dz_j + \sum_{k=1}^d b_k(\lambda(\zeta, s)) \lambda^* dw_k ,$$

ou seja,

$$dH = \sum_{j=1}^n a_j(\lambda(\zeta, s)) d(z_j \circ \lambda) + \sum_{k=1}^d b_k(\lambda(\zeta, s)) d(w_k \circ \lambda);$$

mas, $w_k \circ \lambda = \tau_k$, $k = 1, \dots, d$ e $z_j \circ \lambda = G_j$, $j = 1, \dots, n$. Como

$$G(\zeta, s) = F(s + i\varphi(G(\zeta, s), s))\zeta$$

afirmamos que G_j são *soluções* da estrutura CR em $\Delta \times U_2$ gerada pelos diferenciais (exteriores) das funções $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, $\tau_1 = s_1 + i\varphi_1(G(\zeta, s), s), \dots, \tau_d = s_d + i\varphi_d(G(\zeta, s), s)$.

De fato, F é a função holomorfa dada pela *condição* $\mathcal{A}$ e τ_j são soluções, logo, $F(\tau_j)$, também, são soluções; por outro lado, as ζ_j 's também são soluções. Como produto de soluções são soluções, segue que G_j 's são soluções da estrutura CR em $\Delta \times U_2$.

Em resumo, dH se escreve como combinação linear de $d\zeta_j$ e $d\tau_k$, ou seja, H é uma função CR.

(ii) H é Lipschitz-contínua em $\Delta \times U_2$.

De fato, como $G \in C^\infty(\overline{\Delta} \times \overline{U}_2)$, então G_j 's têm derivadas limitadas e como $\Delta \times U_2$ é convexo podemos aplicar a Desigualdade do Valor Médio a cada segmento em $\Delta \times U_2$.

$$\begin{aligned} |H(\zeta, s) - H(\zeta', s')| &= |h(G(\zeta, s), s) - h(G(\zeta', s'), s')| \\ &\leq L|G(\zeta, s) - G(\zeta', s')| \leq \mathcal{L}|(\zeta, s) - (\zeta', s')|, \end{aligned}$$

para todo $(\zeta, s), (\zeta', s') \in \Delta \times U_2$.

(iii) Quanto a H anular-se de ordem infinita, surge um novo aspecto: a função H anula-se de ordem infinita não somente em $\zeta = 0$, para todo $s \in U_2$ mas, também, quando $s \in F_r K$, para todo $\zeta \in \Delta$.

De fato, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$ e $K^\# \subset\subset \Delta \times U_2$ arbitrários, seja $G(K^\#) \subset\subset U_1 \times U_2$. Então, como h anula-se de ordem infinita em $z = 0$, i.e., para todo $N \in \mathbb{Z}_+$ e $\mathcal{K} \subset\subset U_1 \times U_2$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|h(z, s)| \leq C_N |z|^N, \text{ para todo } (z, s) \in \mathcal{K},$$

temos:

$$|H(\zeta, s)| \leq C_N |G(\zeta, s)|^N, \text{ para todo } (\zeta, s) \in K^\#.$$

Mas, pela Desigualdade do Valor Médio em $K^\#$, valem:

$$|G(\zeta, s)| \leq C' |\zeta|$$

e

$$|G(\zeta, s)| \leq C''|s - s_0| \quad , \text{ para todo } s_0 \in F_r K \quad ,$$

logo,

$$|G(\zeta, s)| \leq C''d(s, F_r K) \quad .$$

Das desigualdades acima seguem as afirmações constantes em (iii).

Parte IV: Usando o fato de que $H(\zeta, s)$ anula-se de ordem infinita em $\Delta \times F_r K$ podemos definir a aplicação:

$$\widetilde{H}(\zeta, s) = \begin{cases} H(\zeta, s), & \text{se } (\zeta, s) \in \Delta \times K \\ 0, & \text{se } (\zeta, s) \in \Delta \times (U_2 \setminus K) \end{cases} \quad .$$

É claro que $\widetilde{H}$ é uma função CR, Lipschitz-contínua e anula-se de ordem infinita em $\Delta \times F_r K$ e em $\zeta = 0$, para todo $s \in U_2$.

Assim, se tivermos $\widetilde{H}(\zeta, s) \equiv 0$ em $\Delta \times U_2$ decorre que $H(\zeta, s) \equiv 0$ em $\Delta \times K$, ou seja,

$$h(G(\zeta, s), s) \equiv 0 \text{ em } \Delta \times K \quad ,$$

em particular, em $\Delta \times \overset{\circ}{K}$.

Em suma, $h(z, s) \equiv 0$ na imagem de $\Delta \times \overset{\circ}{K}$ pela aplicação $\lambda : (\zeta, s) \mapsto (G(\zeta, s), s)$ que como vimos é um difeomorfismo de $\Delta \times \overset{\circ}{K}$ sobre alguma vizinhança aberta de $U_1 \times U_2$.

Portanto, só resta demonstrar que $\widetilde{H}$ é identicamente nula em $\Delta \times U_2$ para, assim, terminar a demonstração do Teorema em tela. $\square$

A demonstração do Teorema principal estará completa após a demonstração dos dois Lemas abaixo.

Lema I: “Se Δ e U_2 forem suficientemente pequenos, então qualquer função H , CR, Lipschitz-contínua, definida em $\Delta \times U_2$, que se anula de ordem infinita em $\zeta = 0$ e, além

disso, satisfaz $H(\zeta, s) \equiv 0$, para todo $(\zeta, s) \in \Delta \times U_2$, $s \notin K$, para algum subconjunto compacto K de U_2 , precisa, necessariamente, anular-se em $\Delta \times U_2$."

Esse Lema será consequência do que segue.

Lema II: "Seja $f(\zeta, s)$ uma função CR, Lipschitz-contínua em $\Delta \times U_2$ que se anula para todo $(\zeta, s) \in \Delta \times (U_2 \setminus K)$. Então, a integral

$$\int_{U_2} f d\tau = \int_{U_2} f(\zeta, s) \det[I + \psi_s(\zeta, s)] ds$$

é uma função holomorfa de ζ em Δ ."

Demonstraremos, a seguir, que o Lema II implica no Lema I.

Demonstração:

Parte I

(i) Escolhamos U_2 , suficientemente pequeno, tal que $\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, s) \| < \frac{1}{2}$, para todo $s \in \overline{U}_2$. Com efeito, como $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, s)$ é contínua em $\overline{U}_2$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, 0) = 0$, então dado $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe uma vizinhança aberta (*bola*), centrada na origem U_2 , tal que

$$\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, s) \| < \frac{1}{2} \quad , \text{ para todo } s \in \overline{U}_2 ;$$

(ii) Escolhamos Δ , suficientemente pequeno, tal que $\| \frac{\partial \psi}{\partial s}(\zeta, s) \| < \frac{3}{4}$, para todo $(\zeta, s) \in \Delta \times U_2$. Com efeito, como $\frac{\partial \psi}{\partial s}(\zeta, s)$ é contínua, logo, uniformemente contínua em $\overline{U}_2$, temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(0, s) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(G(0, s), s) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, s) \quad , \text{ para todo } s \in \overline{U}_2 ,$$

então, dado $\epsilon = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ existe um polidisco Δ tal que

$$\| \frac{\partial \psi}{\partial s}(\zeta, s) - \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, s) \| < \frac{1}{4} \quad , \text{ para todo } \zeta \in \Delta \text{ e para todo } s \in \overline{U}_2$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \psi}{\partial s}(\zeta, s) \right\| < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \text{ para todo } (\zeta, s) \in \Delta \times \overline{U}_2. \quad (\uparrow)$$

Parte II

Aplicamos o Lema II à função

$$f(\zeta, s) := E_\nu(\tau_0; \zeta, s) \widetilde{H}(\zeta, s),$$

onde τ_0 é um ponto arbitrário (mas fixado) em $\mathbb{C}^d$

$$\text{e} \quad \nu \geq 1, \quad E_\nu(\tau_0, \zeta, s) := \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\nu \langle \tau_0 - \tau(\zeta, s) \rangle^2}$$

para todo $(\zeta, s) \in \Delta \times U_2$ e para todo $\tau_0 \in \mathbb{C}^d$, onde $\langle \cdot \rangle^2$ denota: $\langle z \rangle^2 = z_1^2 + \cdots + z_n^2$.

$$\widetilde{I}_\nu(\tau_0, \zeta) := \int_{U_2} E_\nu(\tau_0; \zeta, s) \widetilde{H}(\zeta, s) \det[\tau_s(\zeta, s)] ds,$$

onde $\tau_s(\zeta, s) = \frac{\partial \tau}{\partial s}(\zeta, s) = I + i\psi_s(\zeta, s)$.

Mostremos que $f(\zeta, s)$ é CR, Lipschitz-contínua em $\Delta \times U_2$ e anula-se para todo $(\zeta, s) \in \Delta \times (U_2 \setminus K)$.

(i) $f(\zeta, s)$ anula-se em $\Delta \times (U_2 \setminus K)$, pois, $\widetilde{H}(\zeta, s)$, por definição, anula-se em $\Delta \times (U_2 \setminus K)$;

(ii) $f(\zeta, s)$ é CR, pois, $E_\nu(\tau_0; \zeta, s)$ é a composição de uma função holomorfa com solução, logo, solução. $\widetilde{H}(\zeta, s)$ é solução. Então, como produto de solução é solução, segue que $f(\zeta, s)$ é solução, i.e., $f(\zeta, s)$ é uma função CR;

(iii) $f(\zeta, s)$ é Lipschitz-contínua, já que ela é o produto do fator de decrescimento gaussiano pela função Lipschitz-contínua $\widetilde{H}(\zeta, s)$.

Parte III

↑ Observação: Essa estimativa da derivada é usada para demonstrar o Lema da pg. 68.

Pela parte II, estamos nas hipóteses do Lema II. Logo, para todo $\nu \geq 1$, para cada $\tau_0 \in \mathbb{C}^d$ (fixo)

$$\tilde{I}_\nu(\tau_0; \zeta)$$

é uma *função holomorfa* em Δ .

Mostremos $\tilde{I}_\nu(\tau_0; \zeta)$ anula-se de ordem infinita em $\zeta = 0$.

Com efeito, $\tilde{I}_\nu(\tau_0; \nu)$ é de classe C^∞ ;

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_\nu(\tau_0; \zeta)| &\leq \int_{U_2} |E_\nu(\tau_0; \zeta, s) \tilde{H}(\zeta, s) \det[\tau_s(\zeta, s)]| ds \\ &\leq \|g_\nu\|_\infty \int_K |\tilde{H}(\zeta, s)| ds, \end{aligned}$$

onde $g_\nu(\zeta, s) = E_\nu(\tau_0; \zeta, s) \det[\tau_s(\zeta, s)]$ é uma função contínua. Mas, $\tilde{H}(\zeta, s)$ anula-se de ordem infinita em $\zeta = 0$, i.e., para todo $N \in \mathbb{Z}^+$, para todo $K' \subset\subset \Delta \times U_2$ existe $C_N > 0$ tal que $|\tilde{H}(\zeta, s)| \leq C_N |\zeta|^N$, para todo $(\zeta, s) \in K'$. Seja, para todo N , para todo $K'' \subset\subset \Delta$, $K' = K'' \times K \subset\subset \Delta \times U_2$. Então, existe C_N

$$|\tilde{I}_\nu(\tau_0; \zeta)| \leq C_N \|g_\nu\|_\infty \text{vol}(K) |\zeta|^N,$$

i.e., $\tilde{I}_\nu(\tau_0; \zeta)$ anula-se de ordem infinita em $\zeta = 0$.

Assim, $\tilde{I}_\nu(\tau_0, \zeta)$ é uma função holomorfa que se anula de ordem infinita em $\zeta = 0$, logo,

$$\tilde{I}_\nu(\tau_0, \zeta) = 0,$$

para todo $\zeta \in \Delta$, para todo $\nu \geq 1$ e para todo $\tau_0 \in \mathbb{C}^d$.

Parte IV

Introduzimos um Lema que possibilita concluir o resultado desejado.

Lema: *Seja $\tilde{H} \in C^0(\overline{\Delta} \times \overline{U}_2)$ com $\text{supp} \tilde{H} \subseteq \Delta \times K$, K compacto na bola U_2 . Então,*

$$\tilde{I}_\nu(\tau(\zeta, s_0), \zeta) \longrightarrow \tilde{H}(\zeta, s_0) \quad \text{em } C^0(\overline{\Delta} \times \overline{U}_2).$$

Demonstração: Uma demonstração, por sinal geral, encontra-se em [4] (pg. 46). A propósito aqui que usamos as estimativas que aparecem na parte I. $\square$

Parte V

Combinando a parte III com a parte IV segue que

$$\widetilde{H}(\zeta, s) \equiv 0 \text{ em } \overline{\Delta} \times \overline{U}_2 . \quad \square$$

Demonstraremos a seguir o Lema II.

Demonstração:

Parte I: Pelo Teorema de Hartogs, é suficiente mostrar que a integral

$$\int_{U_2} f d\tau$$

é separadamente holomorfa em cada variável ζ_j ($j = 1, \dots, n$).

Seja o polidisco Δ , $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$; e fixemos, arbitrariamente, os $\zeta_j^0, \zeta_j^0 \in \Delta_j$ para $j \neq i$, assim, podemos definir:

$$\begin{aligned} \Delta_i \times U_2 &\xrightarrow{\lambda} \Delta \times U_2 \\ (\zeta_i, s) &\longmapsto (\zeta_1^0, \dots, \zeta_{i-1}^0, \zeta_i, \zeta_{i+1}^0, \dots, \zeta_n^0; s) \\ \Delta_i \times U_2 &\xrightarrow{\lambda^* f} \mathbb{C} \\ (\zeta_i, s) &\longmapsto (f \circ \lambda)(\zeta_i, s) \end{aligned}$$

(i) $f \circ \lambda$ é Lipschitz-contínua, porque é restrição de uma função Lipschitz-contínua;

(ii) $f \circ \lambda$ é CR.

Com efeito, como f é CR em $\Delta \times U_2$, podemos escrever:

$$df = \sum_{j=1}^n a_j(\zeta, s) d\zeta_j + \sum_{k=1}^d b_k(\zeta, s) d\tau_k .$$

Fazendo o “pull-back”, temos:

$$\begin{aligned}\lambda^*(df) &= \sum_{j=1}^n a_j(\lambda(\zeta_i, s))d(\zeta_j \circ \lambda) + \sum_{k=1}^d b_k(\lambda(\zeta_i, s))d(\tau_k \circ \lambda) . \\ d(f \circ \lambda) &= a_i(\lambda(\zeta_i, s))d(\zeta_i \circ \lambda) + \sum_{k=1}^d b_k(\lambda(\zeta_i, s))d(\tau_k \circ \lambda) .\end{aligned}$$

o que mostra $f \circ \lambda$ é CR em $\Delta_i \times U_2$.

Parte II: Em virtude da parte I, consideraremos $n = 1$; Δ é um disco centrado na origem no ζ -plano e anotaremos $f \circ \lambda$ apenas por f .

No que segue, usaremos a seguinte fórmula:

$$d[f d\zeta \wedge d\tau] = df \wedge d\zeta \wedge d\tau , \quad \downarrow$$

onde $d\tau = d\tau_1 \wedge \cdots \wedge d\tau_d$.

No que segue, para mostrarmos que

$$\int_{U_2} f d\tau$$

é holomorfa, utilizaremos o Teorema de Morera.

Seja $\gamma \subset \Delta$ uma curva simples, fechada, de classe C^∞ , orientada no sentido positivo e chamemos de Ω seu interior. Então, podemos aplicar o Teorema de Stokes (Apêndice C) para

$$df \wedge d\zeta \wedge d\tau \quad \text{em } \Omega \times U_2$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \times U_2} d(f \wedge d\zeta \wedge d\tau) &= \int_{\Omega \times U_2} df \wedge d\zeta \wedge d\tau \\ &= \int_{\partial(\Omega \times U_2)} f d\zeta \wedge d\tau = \int_{\Omega \times \partial U_2} f d\zeta \wedge d\tau + \int_{\gamma \times U_2} f d\zeta \wedge d\tau \\ &= \int_{\gamma \times U_2} f d\zeta \wedge d\tau ,\end{aligned}$$

↓ Notemos que, tal fórmula carece de justificação, o que fazemos no Apêndice C, quando f é uma função Lipschitz-contínua enquanto os coeficientes da d -forma $d\tau$ são, apenas, de classe C^0 .

porque, $f \equiv 0$ em $\Omega \times \partial U_2$.

Por outro lado, pelo fato de que f é uma função CR, df é combinação linear das formas $d\zeta$ e $d\tau$, logo, $d(f \wedge d\zeta \wedge d\tau) = df \wedge d\zeta \wedge d\tau$ é a forma nula.

Conclusão:

$$\int_{\gamma \times U_2} f d\zeta \wedge d\tau = 0 .$$

Escrevamos a última integral em coordenadas.

Com efeito, seja a parametrização do bordo $\gamma \times U_2$:

$$\gamma : t \in [a, b] \rightarrow \gamma(t) \quad \text{e}$$

$$C_\zeta : U_2 \longrightarrow \{\zeta\} \times U_2 \quad , \text{ para } \zeta \in \Delta$$

$$s \longmapsto (\zeta, s)$$

$$(\gamma \times C_\zeta)(t, s) = (\gamma(t), C_\zeta(s)) .$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma \times U_2} f \wedge d\zeta \wedge d\tau = \int_{[a, b] \times U_2} (\gamma \times C_\zeta)^* f \wedge d\zeta \wedge d\tau \\ &= \int_{[a, b] \times U_2} (f \circ \gamma \times C_\zeta)(t, s) d\zeta(\gamma \times C_\zeta(t, s)) \wedge d\tau_1(\gamma \times C_\zeta(t, s)) \wedge \cdots \wedge d\tau_d(\gamma \times C_\zeta(t, s)) \\ &\stackrel{(I)}{=} \int_{[a, b] \times U_2} f(\gamma(t), s) \gamma'(t) \det[I + \psi_s(\gamma(t), s)] ds dt \stackrel{(II)}{=} \\ &= \int_{[a, b]} \left[\int_{U_2} f(\gamma(t), s) \det[I + \psi_s(\gamma(t), s)] ds \right] \gamma'(t) dt \\ &= \int_{[a, b]} g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_\gamma g(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

((I) orientação positiva, ((II) Fubini), onde $g(\zeta) = \int_{U_2} f(\zeta, s) \det[I + \psi_s(\zeta, s)] ds$ é, evidentemente, contínua em Δ , pois, $f \equiv 0$ quando $s \notin K$.

Conclusão: g é uma função contínua em Δ

com

$$\int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0 ,$$

para toda curva γ , simples, fechada e de classe C^1 . Então, pelo Teorema de Morera, a função

$$g(\zeta) = \int_{\tilde{v}_2} f(\zeta, s) \det[I + \psi_s(\zeta, s)] ds$$

é holomorfa em Δ ; encerrando, assim, a demonstração do Lema em tela. $\square$

Corolário 4: *Seja $\mathcal{X}$ uma hipersuperfície em C^{n+1} e Σ a intersecção transversal de $\mathcal{X}$ com a curva holomorfa $\mathcal{H}$. Então, vale a propriedade da extensão única para Σ em cada um de seus pontos.*

Demonstração: Combine o Teorema Principal com as proposições 8.4 - cap. I e 2 - cap. III. $\square$

Corolário 5: *Seja $\mathcal{X}$ uma subvariedade genérica de C^{n+d} de codimensão real d . Seja Σ uma subvariedade não característica de $\mathcal{X}$ de dimensão real d que é subvariedade real-analítica de C^{n+d} . Então, vale a propriedade da extensão única para Σ em cada um de seus pontos.*

Demonstração: Combine o Teorema Principal com o Corolário 4 - cap. III. $\square$

CONCLUSÃO

Começamos por ressaltar que as variedades e subvariedades de classe C^∞ , consideradas neste trabalho, na verdade poderiam ser de classe C^1 , todavia, nesse caso, deveríamos aplicar nos argumentos, onde usamos a Fórmula de Aproximação, aquela fórmula válida à classe C^1 [13]. Assim, nada perdemos em considerarmos variedades e subvariedades como de classe C^∞ .

Agora, quanto ao Teorema Principal, que acabamos de demonstrar, ele admite generalização para variedades “abstratas” $\mathcal{X}$, de classe C^1 e equipadas com uma *estrutura hipo-analítica*. No entanto, nesse caso, a *condição* $\mathcal{A}$ é vertida para essa situação e passa-se a chamar de *condição* $\mathcal{B}$. Quanto as demonstrações, elas são bem mais simples por serem decorrência dos resultados aqui apresentados e não as incluímos para não haver quebra de continuidade na exposição.

Queremos, também, deixar registrado que um artigo, [8], escrito por H. Jacobowitz (apareceu após a publicação do artigo de Baouendi-Trèves) apresenta um exemplo de uma subvariedade totalmente real que *não satisfaz a Condição* $\mathcal{A}$ na origem em Σ . Todavia, não se sabe, ainda, se vale ou não a propriedade da extensão única. Pois, para instigar ainda mais o leitor, podemos ter a extensão única em Σ num ponto a_0 mesmo que não possamos provar que Σ satisfaz a *condição* $\mathcal{A}$ em a_0 . Com efeito, assumamos que $\mathcal{X}$ seja uma subvariedade CR e satisfaça a seguinte propriedade em $a_0 \in \mathcal{X}$:

“Dada qualquer vizinhança aberta U de a_0 em $\mathcal{X}$ existe uma vizinhança aberta $\mathcal{O}$ de a_0 em $\mathbb{C}^{n+d}$ tal que $\mathcal{O} \cap \mathcal{X} \subset U$ e tal que o que segue é verdade:

Para cada função h , Lipschitz-contínua, CR em U , existe uma função holomorfa H

em $\mathcal{O}$ tal que

$$H|_{\mathcal{O} \cap \mathcal{X}} = h|_{\mathcal{O} \cap \mathcal{X}} \quad "$$

Um caso em que a condição acima é satisfeita é quando a forma Levi de $\mathcal{X}$ tem no *mínimo um autovalor negativo* em todo vetor cotangente característico a $\mathcal{X}$ no ponto a_0 ([2], Cor. 6.1). Enfatizamos que, nesse caso, a propriedade da extensão única decorre de (II) Introdução, pg. 1.

Diante disso, gostaríamos de frisar que respostas à questão de unicidade nessa sub-variedade apresentada por Jacobowitz, talvez, poderão levar a uma melhor compreensão sobre a *necessidade* ou não da *condição $\mathcal{A}$* nos problemas de extensão única.

Enfim, temos uma questão que permanece em aberto.

APÊNDICE A / Anulamento de Ordem Infinita

Definição 1: Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+d}$ aberto, $F \subseteq \Omega$ fechado relativo, seja $u \in C^0(\Omega)$.

Diz-se que u se anula de ordem infinita em F se dados $K \subset\subset \Omega$, $N \in \mathbb{Z}_+$, tem-se:

$$\sup_{q \in K} \frac{|u(q)|}{d(q, F)^N} < \infty ,$$

onde d é a distância euclidiana.

Lema 2: $u \in C^0(\Omega)$ anula-se de ordem infinita em F se, e somente se, todo ponto $p \in F$ possui uma vizinhança U_p tal que, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$, tem-se

$$\sup_{q \in U_p} \frac{|u(q)|}{d(q, F)^N} < \infty .$$

(Note que é equivalente tomar $p \in F$ ou $p \in \Omega$, pois, F é fechado)

Demonstração: (a) Suponhamos que u se anula de ordem infinita em F e seja $p \in F$. Sendo Ω localmente compacto, logo, existe uma vizinhança relativamente compacta de p , $U_p \subset\subset \Omega$. Então, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$ tem-se:

$$\sup_{q \in U_p} \frac{|u(q)|}{d(q, F)^N} < \infty .$$

(b) Admitamos que, para todo $p \in \Omega$, existe uma vizinhança U_p tal que, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$, tem-se:

$$\sup_{q \in U_p} \frac{|u(q)|}{d(q, F)^N} < \infty .$$

Sejam dados $K \subset\subset \Omega$ e $N \in \mathbb{Z}_+$, arbitrários. Então, para cada $p \in K$, existe uma vizinhança aberta de p , U_p , tal que

$$\sup_{q \in U_p} \frac{|u(q)|}{d(q, F)^N} < \infty .$$

Mas a família $\{U_p\}_{p \in K}$ forma uma cobertura aberta de K , logo, existe uma subcobertura finita $\{U_{p_i}\}_{1 \leq i \leq n}$. Portanto,

$$\sup_{q \in U_{p_i}} \frac{|u(q)|}{d(q, F)^N} < M_i \quad , \quad \text{para } i : 1, \dots, n \quad ,$$

donde decorre que

$$\sup_{q \in K} \frac{|u(q)|}{d(q, F)^N} < \infty \quad .$$

Teorema 3: *Sejam $u \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+d}$ aberto, $F \subseteq \Omega$ subvariedade mergulhada de dimensão n e de classe C^∞ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *u anula-se de ordem infinita em F ;*
- (b) *Todas as derivadas de u anulam-se em F .*

Demonstração: Seja $p \in F$. Então, existe $U_p \subset \subset \Omega$ aberta convexa contendo p e um difeomorfismo $\Psi : U_p \rightarrow B$ (B : bola aberta centrada na origem de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_d) = (x, t)$, centradas em p) tais que:

- (i) $\Psi \in C^\infty(\overline{U_p})$
- (ii) Ψ, Ψ^{-1} , são lipschitzianas
- (iii) $\Psi(U_p \cap F) = \{(x, 0)\}$

Ilustração

Mostraremos, a seguir, que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que:

$$d(q, F) \leq c_2 |t| \quad \text{e} \quad c_1 |t| \leq d(q, F \cap U_p) \quad ,$$

onde $q = \Psi^{-1}(x, t)$.

Com efeito, seja $q^* = \Psi^{-1}(x, 0)$. Então, tem-se

$$d(q, F) \leq |q - q^*| = |\Psi^{-1}(x, t) - \Psi^{-1}(x, 0)| \leq c_2 |t| .$$

Por outro lado, seja $q' \in F \cap U_p$, arbitrário, $q' = \Psi^{-1}(x', 0)$. Então, tem-se:

$$|t| \leq |(x, t) - (x', 0)| = |\Psi(q) - \Psi(q')| \leq \frac{1}{c_1} |q - q'| ,$$

donde $c_1 |t| \leq |q - q'|$, para todo $q' \in F \cap U_p$. Portanto,

$$c_1 |t| \leq d(q, F \cap U_p) .$$

Vamos, agora, propriamente à demonstração do Teorema.

Inicialmente, designemos por:

$$u^\#(x, t) = u(\Psi^{-1}(x, t)) .$$

Parte A

Mostraremos, a seguir, que

$$(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{u^\#(x, t)}{|t|^N} \quad \text{é limitada em } B \quad \text{para todo } N \in \mathbb{Z}_+ .$$

Com efeito, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$, para todo $(x, t) \in B$, tem-se:

$$\frac{|u^\#(x, t)|}{|t|^N} = \frac{|u(q)|}{|t|^N} \leq c_2^N \frac{|u(q)|}{d(q, F)^N} .$$

Daí segue (b) pela Fórmula de Taylor.

Vejam os como.

Fixemos um vetor arbitrário $(x, t) \in B$. Definamos a função

$$u^*(\tau) = u(x, \tau t)$$

com $\tau \in \mathcal{J}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, tal que $\tau t \in B$.

Como é fácil ver u^* satisfaz a condição (a) do Teorema. Logo, $u^*(0) = 0$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado seja verdadeiro para $u^{*(\alpha)}(0) = 0$, para todo $\alpha < N \in \mathbb{Z}_+$. Tem-se, por Taylor centrado na origem, que

$$u^*(\tau) = u^*(0)\tau^N + R(0, \tau) ,$$

ou,

$$\frac{u^*(\tau)}{\tau^N} = u^*(0) + \frac{R(0, \tau)}{\tau^N} .$$

Resulta que $u^{*(N)}(0) = 0$. Logo, por indução,

$$u^{*(N)}(0) = 0 \quad , \quad \text{para todo } N \in \mathbb{Z}_+ .$$

Apliquemos esse último resultado.

Seja qualquer $N \in \mathbb{Z}_+$. Então, para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $|\alpha| = N$, tem-se:

$$0 = u^{*(N)}(0) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d} \frac{\partial^\alpha u^\#}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_d^{\alpha_d}}(x, 0) .$$

Mas esse polinômio é homogêneo, logo, a identidade acima vale para todo $t \in \mathbb{R}^d$. Daí , pelo princípio de Identidade de polinômios, tem-se:

$$\frac{\partial^\alpha u^\#}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_d^{\alpha_d}}(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{Z}_+^d .$$

Parte B - Recíproca

Mostraremos, a seguir, que

$$(b) \Rightarrow \sup_{q \in U_p} \frac{|u(q)|}{d(q, F \cap U_p)^N} < \infty .$$

Com efeito, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$, para todo $(x, t) \in B$, tem-se:

$$\frac{|u(q)|}{d(q, F \cap U_p)^N} \leq \frac{1}{c_1^N} \frac{|u^\#(x, t)|}{|t|^N} < M < \infty ,$$

onde essa última desigualdade é consequência da fórmula de Taylor tomada radialmente em cada ponto $(x, 0) \in B$.

De fato, sejam $N \in \mathbb{Z}_+$ e $(x, 0) \in B$, tem-se:

$$\begin{aligned} u^\#(x, t) &= \sum_{|\alpha| \leq n-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha u^\#(x, 0) [(x, t) - (x, 0)]^\alpha + \\ &+ \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha u^\#(\xi) [(x, t) - (x, 0)]^\alpha, \end{aligned}$$

onde $\xi \in [(x, t), (x, 0)] \subset B$.

Mas, por (b), resulta

$$u^\#(x, t) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha u^\#(\xi) (0, t)^\alpha.$$

Dai

$$|u^\#(x, t)| \leq |t|^N \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha u^\#(\xi)|.$$

Como $\partial^\alpha u^\# \in L^\infty(\overline{B})$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, segue que

$$|u^\#(x, t)| \leq |t|^N \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} \|\partial^\alpha u^\#\| = c_N |t|^N.$$

Observando que (x, t) é um ponto arbitrário de B , tem-se

$$\frac{|u^\#(x, t)|}{|t|^N} \leq c_N, \quad \text{para todo } (x, t) \in B.$$

Para encerrar a demonstração do Teorema ainda carecemos do próximo Lema.

Lema 4: *Existe uma vizinhança $V_p \subset \Omega$ tal que:*

$$d(q, F \cap U_p) = d(q, F) \quad , \quad \text{para todo } q \in V_p.$$

Demonstração: Suponha, por absurdo, que não exista tal vizinhança V_p tal que

$$d(q, F \cap U_p) = d(q, F) \quad , \quad \text{para todo } q \in V_p$$

Então, como

$$d(q, F) \leq d(q, F \cap U_p) \quad , \quad \text{para todo } q \in U_p$$

teremos:

$$\exists q_j \in U_p \quad , \quad q_j \rightarrow p : d(q_j, F) \leq d(q_j, F \cap U_p)$$

e, conseqüentemente,

$$\exists q_j^* \in F : d(q_j, F) \leq |q_j - q_j^*| < d(q_j, F \cap U_p) \quad .$$

com

$$q_j^* \in F \setminus (F \cap U_p)$$

e

$$|q_j^*| \leq \max_{q \in \bar{U}_p} d(q, F \cap U_p) + \sup_{j \in \mathbf{N}} |q_j| < \infty \quad .$$

Portanto,

$$\exists q_{j_k}^* \rightarrow q_0 \in \overline{F \setminus (F \cap U_p)}$$

daí ,

$$|q_{j_k} - q_{j_k}^*| < d(q_{j_k}, F \cap U_p) \quad .$$

Fazendo $k \rightarrow +\infty$

$$0 < |p - q_0| \leq d(p, F \cap U_p) \quad . \text{ Absurdo!}$$

Conclui-se, pois, que existe V_p tal que

$$d(q, F \cap U_p) = d(q, F) \quad , \quad \text{para todo } q \in V_p \quad .$$

Para terminar este apêndice, deixamos um exemplo que mostra o fato de que u , definida num aberto Ω , pode anular-se de ordem infinita em F , fechado em Ω , todavia isso não implica que u tenha extensão C^∞ a Ω .

Exemplo 5: Dados $\Omega = \mathbb{R}$, $F = \{0\}$.

Seja $u(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cos(e^{\frac{1}{x^2}}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$. Então,

(i) u anula-se de ordem infinita em F ;

(ii) $u \in C^0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega \setminus F)$.

APÊNDICE B / Unicidade do Problema de Cauchy

O Teorema que segue é, altamente, não trivial, pois, para demonstrá-lo precisamos da *fórmula de aproximação*.

Não é dispensável dizer que o enunciado deste Teorema já estará adaptado às nossas necessidades, no entanto, devo esclarecer que este teorema comporta uma versão mais abrangente, onde a variedade “ambiente” é real e seu subfibrado estrutural $\mathcal{V}$ localmente integrável, enquanto a solução u é uma distribuição.

Teorema (Unicidade do Problema de Cauchy)

Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N$ uma subvariedade real-maximal. Se $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $u|_{\mathcal{X} \cap \Omega} \equiv 0$, então $u \equiv 0$ numa vizinhança de $\mathcal{X}$ contida em Ω .

Demonstração: A demonstração, por sinal mais geral, pode ser encontrada em ([4] (pg.62)) . □

Exemplos: (1) Seja $\mathcal{X} = \{z \in \mathbb{C}^N / \text{Im } z = 0\}$. Então, $\mathcal{X}$ é real-maximal.

Se $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ tal que $u|_{\mathbb{R}^N} \equiv 0$, então, pelo Teorema acima, $u \equiv 0$ numa vizinhança de $\mathbb{R}^N$, daí, pelo princípio da identidade, u é a função identicamente nula em $\mathbb{C}^N$.

(2) Dada $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\Psi(0) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) = 0 .$$

Seja $\mathcal{X} = \{z \in \mathbb{C}^N / \text{Im } z = \Psi(x)\}$. Então, $\mathcal{X}$ é real-maximal numa vizinhança da origem. Para ver, basta usar a proposição 9.1 (c) combinada com a perturbação da identidade e observar o Escólio 9.5 .

Sendo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ um aberto tal que contém a origem e $\mathcal{X} \cap \Omega$ é real-maximal, seja $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ com $u|_{\mathcal{X} \cap \Omega} \equiv 0$. Então, pelo Teorema acima, $u \equiv 0$ em uma vizinhança de $\mathcal{X}$ dentro de Ω .

APÊNDICE C / Derivadas de Função Lipschitz-Contínua e Teorema de Stokes

Neste Apêndice, as coordenadas de $\mathbb{R}^N$ serão denotadas por $(x_1, \dots, x_N)$, enquanto o operador translação será denotado por T_h . Precisamente,

$$(T_h f)(x) = f(x - h) ,$$

onde h é um vetor de $\mathbb{R}^N$.

Proposição 1: *Seja f uma função (complexa) Lipschitz-contínua em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Então, f admite como derivadas $\partial f / \partial x_i$ (no sentido da teoria de distribuição) funções $g_i \in L^\infty(\Omega)$ ([12], pg.188).*

Demonstração: Seja qualquer aberto U , $U \subset\subset \Omega$. Escolhamos um aberto $V \subset\subset \Omega$, $U \subset\subset V \subset\subset \Omega$ e um $\delta > 0$ satisfazendo as condições:

(i) $\delta < d(\overline{U}, \partial\Omega)$;

(ii) para todo $h = (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0)$ com $|h| < \delta$ e para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$, tem-se:

$$T_h \varphi \in C_c^\infty(V) .$$

Então, para cada h , como acima, tem-se:

$$\underbrace{\left\langle \frac{T_{-h}f - f}{h_i}, \varphi \right\rangle}_{\text{em } U} \stackrel{!}{=} \underbrace{\left\langle f, \frac{T_h \varphi - \varphi}{h_i} \right\rangle}_{\text{em } V} \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(U)$$

¹

Designemos $\frac{T_{-h}f - f}{h_i}$ por T_h . Então,

$$| \langle T_h, \varphi \rangle | \leq L \| \varphi \|_{L^1(U)} ,$$

¹ (†): mudança de variável.

por densidade de $C_c^\infty(U)$ em $L^1(U)$, decorre

$$| \langle T_h, \psi \rangle | \leq L \|\psi\|_{L^1(U)} ,$$

para todo $\psi \in L^1(U)$.

Resulta, então, que

$$\|T_h\| \leq L .$$

Deixando h variar, tem-se uma família $\{T_h\}$, uniformemente limitada, no dual forte de $L^1(U)$. Daí, pelo Teorema de Alaoglu-Bourbaki, ([6], pg. 268) existe uma seqüência $(h_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_*}$ com

$$h_\nu \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \nu \rightarrow +\infty$$

tal que

$$T_{h_\nu} \xrightarrow{w} \lambda \in (L^1(U))'$$

quando $\nu \rightarrow +\infty$.

Agora, pelo Teorema de Riesz, ([14], pg.214), existe uma função $g_i \in L^\infty(U)$, não-negativa, tal que

$$(i) \quad \lambda(\Psi) = \int_U g_i(x) \Psi(x) dx , \text{ para toda } \Psi \in L^1(U);$$

$$(ii) \quad \|\lambda\| = \|g_i\|_{L^\infty(U)} .$$

Mas, então,

$$\langle T_{h_\nu}, \psi \rangle \longrightarrow \langle g_i, \psi \rangle , \quad \text{para toda } \psi \in L^1(U) ,$$

quando $\nu \rightarrow +\infty$. Em particular, para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$, tem-se:

$$\begin{array}{ccc} \langle T_{h_\nu}, \varphi \rangle & \longrightarrow & \langle g_i, \varphi \rangle \\ \downarrow & & \\ \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \rangle & & \end{array} ,$$

quando $\nu \rightarrow +\infty$. Daí, pela unicidade do limite, resulta que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \langle g_i, \varphi \rangle \quad , \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(U) \quad ,$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i \in L^\infty(U)$$

Além disso, como $\|T_{h_\nu}\| \leq L$ implica que $\|\lambda\| \leq L$, resulta que

$$\|g_i\|_{L^\infty(U)} = \|\lambda\| \leq L \quad .$$

Finalmente, observemos que para todo $U \subset\subset \Omega$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^\infty(U) \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(U)} \leq L \quad .$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega)$$

e

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L \quad .$$

□

Passemos, agora, a justificar o uso do Teorema de Stokes neste contexto ora estudado.

Denotamos por $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)$ a soma de espaços de correntes de grau $0, 1, \dots, N$.

Proposição 2: *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto, f uma função Lipschitz-contínua em Ω e w uma C^1 -forma em Ω . Considere a corrente sobre Ω $\alpha = f dw$ (forma contínua). Então, $d\alpha = df \wedge dw$.*

Demonstração: Sejam $U \subset\subset \Omega$ aberto, arbitrário. Então, existe uma seqüência de formas com coeficientes $C_c^\infty(\Omega)$, $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}_*}$, tal que $w_j \rightarrow w$ em $C^1(\overline{U})$.

Sejam $\alpha_j = f dw_j$, $j \in \mathbb{N}_*$. Então,

$$\alpha_j = f dw_j \longrightarrow \alpha = f dw \quad \text{em } C^0(\overline{U}) .$$

Como o operador derivada exterior (cobordo) d é contínuo em $\mathcal{D}'$ ([5], §11 - pg. 45), tem-se

$$d\alpha_j = d(f dw_j) \longrightarrow d\alpha = d(f dw) \quad \text{em } \mathcal{D}' .$$

Por outro lado, pela fórmula da diferenciação do produto ([5], pg. 46), tem-se

$$d\alpha_j = df \wedge dw_j \quad (\text{porque } d^2 w_j = 0) .$$

Mas, pela proposição 1, $df \in L^\infty(\overline{U}, \Lambda^1)$. Logo,

$$d\alpha_j = df \wedge dw_j \longrightarrow df \wedge dw \quad \text{em } L^\infty(\overline{U}) \quad \text{e, portanto, em } \mathcal{D}' .$$

Observando os dois limites acima, pela unicidade, segue que

$$d\alpha = df \wedge dw \quad \text{em } U .$$

Mas, $U \subset\subset \Omega$ é arbitrário, logo,

$$d\alpha = df \wedge dw \quad \text{em } \Omega .$$

□

Vejamos uma variante do Teorema de Stokes.

Teorema de Stokes 3: Dada w uma forma diferenciável de classe C^1 e grau $N - 2$ em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, seja f uma função Lipschitz-contínua (a valores complexos) em Ω . Se $V \subset\subset \Omega$ com bordo $\partial \overline{V}$ de classe C^1 , então

$$\int_{\partial \overline{V}} f dw = \int_{\overline{V}} df \wedge dw .$$

Demonstração: Seja $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}_*}$ uma seqüência de $(N-2)$ -formas com coeficientes $C^\infty_C(\Omega)$ tal que $w_j \rightarrow w$ em $C^1(\overline{V})$. Para cada $j \in \mathbb{N}_*$, designemos por $\alpha_j = f dw_j$ as $(N-1)$ -formas em Ω . Seja $\alpha_j = \xi_j + i\eta_j$, onde ξ_j e η_j são reais. Então, ξ_j e η_j são Lipschitz-contínua em $\overline{V}$, logo, absolutamente contínuas em $\overline{V}$. Agora, separadamente, tanto para ξ_j como para η_j demonstra-se o Teorema de Stokes seguindo pari-passo a demonstração apresentada em ([10], pg. 489), só que no lugar onde é usado o Teorema Fundamental do Cálculo (Riemann) usamos o Teorema de Lebesgue ([7], pg. 285) já que no nosso caso, o “pull-back” das formas ξ_j e η_j têm coeficientes absolutamente contínuos no cubo K que lá aparece. Enfim, combinando os resultados, tem-se:

$$\int_{\partial \overline{V}} f dw_j = \int_{\overline{V}} df \wedge dw_j \quad , \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_* .$$

Mas, sabemos, como na proposição 2 acima, que:

$$\alpha_j \longrightarrow \alpha \quad \text{em } C^0(\overline{V})$$

e

$$d\alpha_j \longrightarrow d\alpha \quad \text{em } L^\infty(\overline{V})$$

Logo, pelo T.C.D. Lebesgue, segue que

$$\int_{\partial \overline{V}} f dw = \int_{\overline{V}} df \wedge dw .$$

□

BIBLIOGRAFIA

- [1] M.S. Baouendi and F. Trèves. Unique continuation in CR manifolds and hypo-analytic structures. *Arkiv för Matematik*. Vol. 26 (1988), N^o 1 p. 21-40.
- [2] M.S. Baouendi, C.H. Chang, F. Trèves. Microlocal hypo-analyticity and extension of CR functions. *J. Diff. Geom.* 18 (1983), 331-391.
- [3] M.S. Baouendi and E.C. Zachmanoglou. Unique continuation of solutions of partial differential equations and inequalities from manifolds of any dimension. *Duke Mathematical Journal*. Vol. 45, N^o 1 (1978). p. 1-13.
- [4] P. Cordaro. Sistemas de campos vetoriais complexos. *Notas de Curso da VIII Escola Latino-Americana de Matemática*. Rio de Janeiro (1986).
- [5] G. de Rham. Differentiable Manifolds. *Springer-Verlag, Berlin* (1984).
- [6] C.S. Hönl. Análise funcional e aplicações. Vol. I. *Publicações do IMEUSP* (1970).
- [7] E. Hewitt and K. Stromberg. Real and abstract analysis. *Springer-Verlag, New York* (1965).
- [8] H. Jacobowitz. On the intersection of varieties with a totally real submanifold. *Proc. Am. Math. Soc.* 101 (1987), p. 127-130.
- [9] H. Lewy. An example of smooth linear partial differential equation without solutions. *Ann. of Math.* 66 (1957), p. 155-158.
- [10] E.L. Lima. Curso de análise vol. 2. *IMPA, Rio de Janeiro* (1985).
- [11] J.P. Rosay. Sur un problème d'unicité pour les fonctions CR. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 302, Série I, N^o 1 (1986), p. 9-11.
- [12] L. Schwartz. Theorie des distributions. *Hermann, Paris* (1966).
- [13] F. Trèves. Hypoanalytic structures. *Princeton University Press, Princeton, N.J.* (1991) (a aparecer).
- [14] F. Trèves. Topological vector spaces, distributions and kernels. *Academic Press, New York* (1967).

Errata

Nomenclatura: b = baixo; a = alto

pg.	lin.	para	leia
Capítulo I			
3	1b	$h \equiv$ em	$h \equiv 0$ em
4	2a	genéricas CR	genéricas e CR
6	3a	C^∞	C^∞ e codimensão real d
6	3b	, seja o vetor	todo vetor se expressa como
7	4b	intrínstico	intrínseco
8	6a	$\dim_{\mathbb{C}}(CT_a X \cap T_a^{0,1})$	$\dim_{\mathbb{C}}(CT_a \chi \cap T_a^{0,1})$
8	1b	$\left(0, \dots, 0, \frac{\partial \rho(b)}{\partial \bar{z}_{n+1}}, 0, \dots, 0, \frac{-\partial \rho(b)}{\partial \bar{z}_j}\right)$	$\left(0, \dots, 0, \frac{\partial \rho(b)}{\partial \bar{z}_{n+1}}, 0, \dots, 0, \frac{-\partial \rho(b)}{\partial \bar{z}_j}\right)$ ↑ posição j
10	5b	Extrínstico	Extrínseco
11	3a	Intrínstico	Intrínseco
11	7a	coordenadas	coordenadas holomorfas
11	8b	Diz-se	Diz-se que
11	7b	posto 1	dimensão das fibras é 1
12	8b	Q . Então	Q . nessas
12	6a	$L = z_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}$	$L = z_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}$
12	3a	Se L	Se L é
12	9b	intrínstico	intrínseco
14	9a	Cauchy-Riemann	Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ ($1 \leq j \leq N$)
14	6b	$\langle w, v \rangle$	$\langle w, v \rangle$, onde w é a restrição a $CT_a \chi$.
14	14a	$r : T'^{0,1} \rightarrow CT_a \chi$	$r : T'^{1,0} \rightarrow CT_a \chi$
15	4b	Finalmente.	Finalmente, vamos demonstrar que se $z_1, \dots, z_n$ são as funções ...

pg.	lin.	para	leia
16	15a	codimensão e	codimensão d e
16	1b	$t_k = \varphi(z, s)$	$t_k = \varphi_k(z, s)$
18	6a	$\partial\rho_k = \sum^N$	$\partial\rho_k = \sum^{N-d}$
20	2b	Ω	$\tilde{\Omega}$
20	7a	$\lim_{(z,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial\lambda(W(z,s))}{\partial x}$	$\lim_{(z,s) \rightarrow (0,0)} \lambda(W(z,s)) = \lim_{(z,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial\lambda(W(z,s))}{\partial x}$
20	11a	$\left \frac{\partial^2 \lambda(z,s)}{\partial s^2} \right $	$\left \frac{\partial^2 \lambda(W(z,s))}{\partial s^2} \right $
22	8a	$\mathcal{H}\{(z_1, z_2, z_3) \dots$	$\mathcal{H} = \{(z_1, z_2, z_3) \dots$
22	4a	$\mathcal{H} \sqcup U$	$\mathcal{H} \cap U$
23	3b	$\underbrace{\quad}_w \quad \underbrace{\quad}_{\bar{w}}$	$\underbrace{\quad}_w \quad \underbrace{\quad}_{\bar{w}}$
23	3a	cTH	${}^cT\mathcal{H}$
23	7b	$\chi_1 _{\mathbb{T}}\chi_2$	Transversal no sentido de Thom
24	8b	$\chi _{\mathbb{T}}H$	$\chi _{\mathbb{T}}\mathcal{H}$
25	6b	$L_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial t_1}$	$L_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}$
27	9a	$\frac{\partial \operatorname{Im} h_N(0)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial s}$	$\frac{\partial \operatorname{Re} h_N(0)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial s}$
27	4a	$T\mathcal{H}$	$\mathcal{T}_0\mathcal{H}$
28	11a	se valer	se valerem
28	2b	se valer	se valerem
28	4a	$T^{1.0}$	$T'^{1.0}$
30	1a	contra-exemplos	contra-exemplo
32	5a	$\mathbb{C}^{n+a}$	$\mathbb{C}^{n+d}$
32	7b	falta	Recíprocamente, se χ está definida na vizinhança da origem pela equação acima, então χ e o w -espaço (definido por $z = 0$) tem uma intersecção transversal holomorfa .

pg.	lin.	para	leia
33	1a	$\mathbb{R}^{2N-d}$	$\mathbb{R}^{2n+d}$
36	6a	$\left(-\frac{\partial(\varphi_t \circ G)}{\partial z^\#}\right)$	$\left(-\frac{\partial(\varphi_t \circ G)}{\partial z_k^\#}\right)$
36	10a	$\frac{\partial \rho_t^\#(0)}{\partial t_{k'}}(0) = \frac{\partial(\varphi_t \circ G)}{\partial t_{k'}} = \delta_{\ell k'}$	$\frac{\partial \rho_t^\#(0)}{\partial t_{k'}}(0) = \delta_{\ell k'}$
38	8a	não-característica em X	não-característica em χ e $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma =$
40	4a	classe C^1	classe C^∞
40	4b	$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{2j}}{\partial T_k}(0) \frac{\partial}{\partial y_j}$	$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{2j}}{\partial T_k}(0) \frac{\partial}{\partial y_j}$
41	7b	relação a	relação a T

Capítulo II

43	3a	Baovendi	Baouendi
44	6b	$\int_{ z =\sqrt{z}} u(z, s) z^j dz$	$\int_{ z =\sqrt{t}} u(z, s) z^j dz$
45	4a	$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \int_{ z =\sqrt{t}} u(z, s) z^j dz$	$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{ z =\sqrt{t}} u(z, s) z^j dz$
45	7b	$j \in \mathbb{Z}_+$	$j \in \mathbb{Z}$
46	5b	$\int_{ z =\sqrt{t}} \left(-iz \frac{\partial u(z, s)}{\partial s} + \frac{\partial u(z, s)}{\partial \bar{z}} z^{j-1}\right) dz$	$\int_{ z =\sqrt{t}} \left(-iz \frac{\partial u(z, s)}{\partial s} + \frac{\partial u(z, s)}{\partial \bar{z}}\right) z^{j-1} dz$
46	6a	Derivando com relação a t :	Derivando (regra da cadeia) sob o sinal de integração na variável t , temos:
46	8a	que derivando ...	(sem efeito)
46	rodapé	↓	↓
47	7b	$\left \int_0^{2\pi} u(\sqrt{t} e^{i\theta}, s) (i\sqrt{t} e^{i\theta})^j \dots \right $	$\left \int_0^{2\pi} u(\sqrt{t} e^{i\theta}, s) (\sqrt{t} e^{i\theta})^j \dots \right $
48		$U = D_{\epsilon_0(0) \times]-b, b[}$ Então existem $t_0 \geq 0 \dots$	Seja $(0, s) \in \{0\} \times]-b, b[$. Então, $u(0, s) = 0$, pois u anula-se de ordem ∞ em $] - b, b[$. $U = D_{\epsilon_0(0) \times]-z_0 \neq 0$. Então, existem $t_0 > 0 \dots$

pg.	lin.	para	leia
Capítulo III			
51	1a	$\mathbb{C}^{n+d} a_0 \in \Sigma$	$\mathbb{C}^{n+d}$ de $a_0 \in \Sigma$
52	7b	conexa do	conexa do 0
55	9a	$\{s \in \mathbb{R}^d \setminus s < \epsilon\}$	$\{s \in \mathbb{R}^d \setminus s < \epsilon_0\}$
55	12a	Σ no espaço real $\mathbb{R}^d$	Σ num subconjunto do espaço real $\mathbb{R}^d$
55	12a	em $\mathcal{O}'$	em $G(\mathcal{O}')$
56	6a	$(z, g(\omega))$	$(z, G(\omega))$
56	11b	$\dim \mathcal{H}_a = d$	$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_a = d$
57	5b	$s = \pm \epsilon$	$s_k = \pm \epsilon$
Capítulo IV			
59	7b	holomorfa	holomorfa F
59	6b	conexa do	conexa do 0
60	7a	$F(s_0 + i\varphi(0, s))$	$F(s_0 + i\varphi(0, s_0))$
62	2b	$\varphi(\zeta, s) = \psi(G(\zeta, s), s)$	$\psi(\zeta, s) = \varphi(G(\zeta, s), s)$
62	6a	$G(\zeta, s)$ — etc ...	$z - F(s + i\varphi(z, s))\zeta = 0 \Leftrightarrow z = G(\zeta, s)$
64	3a	estrutra	estrutura
65	2b	H	$\tilde{H}$
66	1a	$H(\zeta, s)$	$\tilde{H}(\zeta, s)$
68	6a	$\tilde{I}_{\nu}(\tau_0, \nu)$	$\tilde{I}_{\nu}(\tau_0, \zeta)$
71	9a e 10a	C_{ζ} : etc.	tornar sem efeito
71	11a	$(\gamma \times C_{\zeta})(t, s)$	$(\gamma \times I)(t, s) := (\gamma(t), s)$
71	12a	$(\gamma \times C_{\zeta})^*$	$(\gamma \times I)^*$
71	13a	$\gamma \times C_{\zeta}$	$\gamma \times I$