UMA CARACTERIZAÇÃO DO π_0
DO ESPAÇO DAS
FUNÇÕES DE MORSE ESTÁVEIS
EM VARIEDADES DE DIMENSÃO DOIS

Elizabeth Ferreira Santos

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AC
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: *Topologia Diferencial*
ORIENTADORA: *Profa. Dra. Vera Lúcia Carrara Zanetti*

- São Paulo, fevereiro de 1991 -

E R R A T A

<u>Página</u>	<u>Linha</u>	<u>Onde se lê</u>	<u>Leia-se</u>
7	14	$x_j = 0$	$x_j = \text{constante}$
10	-14	imersão e	imersão injetiva e
10	-8	sobrejetiva ou injetiva	sobrejetiva
28	4	são semelhantes	têm mesmo determinante
36	4	$W \setminus U$	$W \setminus U_0$
36	5	W	$W \setminus \bar{U}$
36	9	vetores cujas	vetores ξ_0 cujas
36	11	$\partial \setminus \partial x_i$	ξ_i
37	-2	W	W' (variedade fechada que con- têm W mergulhada com mesma di- mensão).
37	-1	ξ	ξ' (extensão de ξ a W').
40	7 a 10	eliminar: dadas... estende h_0	
47	-1	$\lambda(0)=0 \quad * \quad t \neq 0$	$\lambda(t)=0 \quad p/ \quad t \leq 0 \quad * \quad t > 0$
51	-3	$\delta' \delta^{-1}$	$\gamma' \gamma^{-1}$
90	-10	$\text{graf}(R_f)) \Rightarrow$	$\text{graf}(R_f)) \quad \text{e}$ $x \in p^2(F \times M \cap \text{graf}(R_f)) \Rightarrow$
93	10	acrescentar: Se $f(\phi_t(b))$ assume valor crítico ver 3) abaixo	
110	5	$f^{-1}(c_i + \epsilon_i^2)$	$f^{-1}(c_i + 2\epsilon_i^2)$
110	7	$g^{-1}(c_i + \epsilon_i^2)$	$g^{-1}(c_i + 2\epsilon_i^2)$
112		substituir por: os difeomorfismos h_j podem ser toma- dos de modo que existam difeomorfismo $\alpha_{i,i+1}: B_{i,i+1} \rightarrow B'_{i,i+1}$ com $g \circ \alpha_{i,i+1} = f$ e tais que $\alpha_{i,i+1} _{A_i \cap B_{i,i+1}} = h_i$ e $\alpha_{i,i+1} _{B_{i,i+1} \cap A_{i+1}} = h_{i+1}$.	

De fato, basta considerar campos pseudo-gradientes ξ e ζ para f e g respectivamente, tais que $\xi(f) = \zeta(g) = 1$ fora de uma vizinhança dos pontos críticos. Os h_j são obtidos por recorrência: dado h_i , obtém-se h_{i+1} no teorema 0.4.7 a partir do difeomorfismo

$\psi_t \eta \phi_{-t}: f^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2_{i+1}) \rightarrow g^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2_{i+1})$ donde
 $t = c_{i+1} - 2\epsilon^2_{i+1} - c_i - 2\epsilon^2$ e $\eta: f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2_i) \rightarrow g^{-1}(c_i + 2\epsilon^2_i)$ é um difeomorfismo isotópico com $h_i|_{f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2_i)}$ e tal que se θ_1 e θ_2 são os mergulhos característicos no nível $c_{i+1} - 2\epsilon^2_i$ tem-se $\eta \phi_{-t} \theta_1 = \psi_{-t} \theta_2$.

Definimos $\alpha_{i,i+1} = \psi^{-1} \alpha \phi$ onde, sendo $I = [c_i + \epsilon^2_i, c_{i+1} - \epsilon^2_{i+1}]$, $\alpha: f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2_i) \times I \rightarrow g^{-1}(c_i + 2\epsilon^2_i) \times I$ é uma isotopia entre $h_i|_{f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2_i)}$ e η tal que

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} (h_i(x), t) & \text{para } t \leq c_i + 3\epsilon^2_i \\ (\eta(x), t) & \text{para } t \geq c_{i+1} - 3\epsilon^2_{i+1} \end{cases}$$

O lema 0.4.6 mostra que $\alpha_{i,i+1}|_{A_i \cap B_{i,i+1}} = h_i$ e

$$\alpha_{i,i+1}|_{B_{i,i+1} \cap A_{i+1}} = h_{i+1}.$$

Conteúdo

Introdução	ii
Capítulo 1 Resultados Básicos	1
1.1 Dois Resultados sobre Funções Contínuas	1
1.2 Funções de Morse	2
1.3 Cobordismo	8
1.4 Estabilidade de Aplicações	15
1.5 Isotopias	20
1.6 Uma Extensão de Difeomorfismos	24
1.7 Transversalidade	28
1.8 Curvas em Variedades de Dimensão 2	29
Capítulo 2 Difeotopias entre Curvas de M	33
2.1 Um Estudo dos Cruzamentos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$	34
2.2 Eliminação de Interseções Transversais de Curvas de M	44
2.3 Uma Difeotopia de M entre Curvas sem Interseção Transversal	62
Capítulo 3 O Teorema Principal	69
3.1 Funções Estável-Equivalentes	69
3.2 O Teorema Principal	70
Capítulo 4 Uma Caracterização das Componentes Conexas de $\mathcal{F}_0(M)$	112
4.1 Grafo de Reeb de uma função de Morse	112
4.2 Conclusões	117
Bibliografia	121

Introdução

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo das componentes conexas do espaço das funções de Morse estáveis, definidas em uma variedade diferenciável M compacta, conexa, sem bordo e de dimensão 2. Denotaremos este espaço por $\mathcal{F}_0(M)$, e, para estudá-lo, utilizaremos a topologia de Whitney.

Em [6], Gutierrez e de Melo realizam o mesmo estudo para o espaço dos campos de vetores de Morse-Smale. A partir das idéias que aparecem no trabalho acima, e da classificação das funções de Morse em variedades de dimensão 2 obtida por Izar, S. A. [8], será feita uma caracterização das componentes conexas do espaço citado.

Com este objetivo, será demonstrado que duas funções de Morse $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ estão na mesma componente conexa de $\mathcal{F}_0(M)$ se, e somente se, existe uma bijeção entre os níveis críticos de f e g de modo que os níveis correspondentes sejam homotópicos, e $f \sim g$ no seguinte sentido: existem difeomorfismos $h : M \rightarrow M$ e $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tornam o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

comutativo.

No capítulo 1 apresentamos os principais resultados básicos utilizados no trabalho. O teorema principal aparece apenas no capítulo 3. No entanto, visando uma melhor compreensão, parte de sua demonstração encontra-se no capítulo 2, cuja omissão, numa primeira leitura, fornecerá mais rapidamente uma visão geral do trabalho.

Agradeço aos professores: Vera Lúcia Carrara Zanetic, por ter sido minha orientadora; Mário Barone Júnior, pela sugestão do tema e por ter sido meu orientador no início da elaboração deste trabalho; e Paulo Ferreira Leite, pelo apoio.

Seguem os meus agradecimentos a todos os colegas que de, alguma forma, me deram seu apoio; em particular: Alegria Gladys Chalon de Oliveira, pela leitura de parte do trabalho e comentários feitos; Cristina de Abreu Suzuki, por ter me ensinado a usar o $\text{\LaTeX}$ e pela ajuda nos acertos finais; João Carlos de Oliveira, pelo tempo

gasto quando surgia alguma dúvida com relação ao $\text{\LaTeX}$; Kunio Okuda pela execução das figuras; Marcelo Adolfo Teixeira da Silva, pela revisão de texto.

Acrescento, ainda, meus agradecimentos à torcida de alunos do curso de Engenharia Elétrica (1989) da Escola Politécnica.

Finalmente, agradeço aos funcionários do Setor de Reprografia pelas cópias feitas e aos funcionários da gráfica pela encadernação.

Peço desculpas às vítimas de meu mau humor dos momentos finais.

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo serão introduzidas algumas notações, definições e propriedades a serem usadas ao longo do trabalho.

A palavra diferenciável será usada significando C^∞ . Um difeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ é uma função diferenciável, inversível e cuja inversa, $f^{-1} : Y \rightarrow X$, é diferenciável. Usaremos o símbolo $C^\infty(X, Y)$ para indicar o espaço de todas as funções diferenciáveis $f : X \rightarrow Y$ com a topologia de Whitney.

As propriedades e definições deste capítulo poderiam ser enunciadas para variedades de dimensão arbitrária. No entanto, para mantermos a notação ao longo do trabalho, nos restringiremos a variedades de dimensão 2. As generalizações, no caso geral, são imediatas e podem ser encontradas na bibliografia citada.

Denotaremos por M uma variedade diferenciável de dimensão 2 com bordo da forma $\partial M = V_0 \dot{\cup} V_1$ (reunião disjunta) ou $\partial M = \emptyset$.

1.1 Dois Resultados sobre Funções Contínuas

Para a obtenção dos resultados do capítulo 2, necessitaremos dos lemas enunciados abaixo, cujas demonstrações podem ser encontradas em [14] e [9], respectivamente.

Lema 1.1.1 *Sejam X_0 um subconjunto fechado de um espaço métrico compacto X e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo local. Se $f|_{X_0}$ for injetora, existirá uma vizinhança W de X_0 de modo que $f|_W$ será injetora.*

□

O lema seguinte fornece-nos condições para que uma aplicação contínua possa ser aproximada por uma diferenciável.

Lema 1.1.2 *Seja $f : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação contínua entre variedades diferenciáveis, diferenciável sobre o subconjunto fechado A de M_1 . Fixado $\varepsilon > 0$, consideremos em M_2 a métrica determinada por algum mergulho $M_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^p$. Então existe $g : M_1 \longrightarrow M_2$ tal que*

- (i) g é diferenciável,
- (ii) g é uma ε -aproximação para f ,
- (iii) $g|_A = f|_A$.

□

1.2 Funções de Morse

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [10] e [11].

Definição 1.2.1 *Um ponto $p \in M$ é um ponto crítico de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ se, em algum sistema de coordenadas (U, φ) em torno de p , $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x}(p) = 0$ e $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y}(p) = 0$. Um tal ponto p é um ponto crítico não degenerado se*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y^2}(p) \end{vmatrix} \neq 0.$$

É fácil ver que se $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x}(p) = 0$ (respectivamente $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y}(p) = 0$) em algum sistema de coordenadas (U, φ) , então $\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x}(p) = 0$ (respectivamente $\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y}(p) = 0$) em qualquer sistema de coordenadas (V, ψ) .

Um valor crítico de f é a imagem de um ponto crítico de f .

Lema 1.2.2 (Lema de Morse) *Se p for um ponto crítico não degenerado de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, então em algum sistema de coordenadas (U, φ) em torno de p ,*

$$f \circ \varphi^{-1}(x, y) = f(p) + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2, \text{ com } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}.$$

Demonstração. (veja [11] lema 2.2 página 6)

□

Com a notação do lema 1.2.2, tem-se que o índice do ponto crítico p de f (notação : $\text{ind}_f(p)$) é dado por :

- (i) $\text{ind}_f(p) = 0$ se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$,

- (ii) $\text{ind}_f(p) = 1$ se $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$,
 (iii) $\text{ind}_f(p) = 2$ se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$.

O corolário a seguir é de verificação imediata.

Corolário 1.2.3 *Se p for um ponto crítico não degenerado para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, então p será um ponto crítico isolado.*

Definição 1.2.4 *Dizemos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse se seus pontos críticos pertencem a $M - \partial M$ e são não degenerados.*

Notação: Indicaremos por $\mathcal{F}(M)$ o espaço de todas as funções de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Segue do corolário 1.2.3 que se M for compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ for de Morse, então f terá apenas um número finito de pontos críticos.

A proposição seguinte será importante pois garantirá que se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ forem duas funções de Morse equivalentes, num sentido a ser precisado mais adiante, então f e g possuirão o mesmo número de pontos críticos.

Proposição 1.2.5 *Se $h : M \rightarrow M$ for um difeomorfismo e se p for um ponto crítico não degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, então $h^{-1}(p)$ será um ponto crítico não degenerado de $f \circ h$ com $\text{ind}_f(p) = \text{ind}_{f \circ h}(h^{-1}(p))$.*

Demonstração. Do fato de p ser um ponto crítico não degenerado de f , segue que existe um sistema de coordenadas locais (U, φ) em torno de p tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(x, y) = f(p) + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2, \quad \forall (x, y) \in \varphi(U) \text{ com } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$$

e

$$\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x}(\varphi(p)) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y}(\varphi(p)) = 0.$$

Temos que $(\varphi \circ h|_{h^{-1}(U)}, h^{-1}(U))$ é um sistema de coordenadas locais em torno de $h^{-1}(p)$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((f \circ h) \circ (\varphi \circ h)^{-1} \right) (\varphi \circ h(h^{-1}(p))) = \frac{\partial}{\partial x} (f \circ \varphi^{-1}) (\varphi(p)) = 0,$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \left((f \circ h) \circ (\varphi \circ h)^{-1} \right) (\varphi \circ h(h^{-1}(p))) = \frac{\partial}{\partial y} (f \circ \varphi^{-1}) (\varphi(p)) = 0,$$

logo $h^{-1}(p)$ é ponto crítico de $f \circ h$.

Para verificar que $\text{ind}_{f \circ h}(h^{-1}(p)) = \text{ind}_f(p)$, basta observar que

$$\begin{aligned}(f \circ h) \circ (\varphi \circ h)^{-1}(x, y) &= f \circ h \circ h^{-1} \circ \varphi^{-1}(x, y) \\ &= f \circ \varphi^{-1}(x, y) \\ &= f(p) + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2.\end{aligned}$$

□

Os lemas 1.2.6 e 1.2.7 visam a obtenção de 1.2.8 e a observação que o segue, que será fundamental na demonstração de 1.4.3.

A demonstração destes dois lemas pode ser encontrada em [10].

Lema 1.2.6 *Se M for compacta e $\partial M = V_0 \cup V_1$, existirá uma função diferenciável $f : M \rightarrow [0, 1]$, sem pontos críticos numa vizinhança de ∂M , tal que $f^{-1}(0) = V_0$ e $f^{-1}(1) = V_1$.*

Demonstração. Sejam $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_k, \varphi_k)$ sistemas de coordenadas locais em M tais que $M \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$. Podemos assumir que nenhum U_i encontra ambos V_0 e V_1 , e que, se $U_i \cap \partial M \neq \emptyset$, a aplicação coordenada $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ leva U_i sobre a intersecção da bola unitária aberta com $\mathbb{R}_+^2$.

Sobre cada conjunto U_i definimos uma aplicação $f_i : U_i \rightarrow [0, 1]$ como segue.

Se $U_i \cap V_0 \neq \emptyset$ (respectivamente $U_i \cap V_1 \neq \emptyset$) faça $f_i = L \circ \varphi_i$, sendo L a aplicação $L(x, y) = y$ (respectivamente $L(x, y) = 1 - y$). Se $U_i \cap \partial M = \emptyset$, faça $f_i \equiv \frac{1}{2}$ em U_i .

Tomemos uma partição da unidade (ξ_i) subordinada ao recobrimento $\{U_i\}$ ¹ e consideremos a aplicação $f : M \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(p) = \sum_{i=1}^k \xi_i(p) f_i(p),$$

considerando $f_i(p) = 0$, $\forall p \in M - U_i$. Segue que f é uma aplicação diferenciável a valores em $[0, 1]$, com $f^{-1}(0) = V_0$ e $f^{-1}(1) = V_1$.

Finalmente, verificaremos que $df \neq 0$ em ∂M . Suponhamos que $q \in V_0$ (respectivamente $q \in V_1$). Então, para algum i , $\xi_i(q) > 0$, e $q \in U_i$. Façamos $\varphi_i(p) = (x(p), y(p))$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^k \overbrace{f_i}^* \frac{\partial \xi_i}{\partial y} + (\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \xi_i \frac{\partial f_i}{\partial y} + \dots + \xi_k \frac{\partial f_k}{\partial y}).$$

¹ver [14] página 20.

Mas $f_i(z)$ tem o mesmo valor, 0, (respectivamente 1) para todo i e

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n \xi_i = 0.$$

Portanto, em q , a soma $(*)$ é zero. As derivadas $\frac{\partial f_i}{\partial y}(q)$ são iguais a 1 (respectivamente -1) e verifica-se facilmente que as derivadas $\frac{\partial f_j}{\partial y}(q)$ têm o mesmo sinal que $\frac{\partial f_i}{\partial y}(q)$, $j = 1, 2, \dots, k$. Portanto, $\frac{\partial f}{\partial y}(q) \neq 0$. Segue que $df \neq 0$ em ∂M , e, portanto, $df \neq 0$ numa vizinhança de ∂M . □

Lema 1.2.7 *Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma aplicação C^2 , sendo U aberto no $\mathbb{R}^2$, então, para quase todas as aplicações lineares $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, a função $f+L$ terá apenas pontos críticos não degenerados (a expressão “para quase todas” significa exceto para um conjunto que tem medida zero em $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$).*

Demonstração. (ver [10], lema A, M. Morse) □

Se M for compacta, poderemos construir uma base para a topologia de Whitney em $C^\infty(M, \mathbb{R})$ como segue: ²

Sejam $0 < r < \infty$, $f \in C^r(M, \mathbb{R})$, (U, φ) um sistema de coordenadas locais em M e $K \subset U$ um conjunto compacto. Fixado $0 < \varepsilon \leq \infty$, definimos uma vizinhança básica

$$N^r(f, (U, \varphi), K, \varepsilon)$$

como sendo o conjunto das aplicações $g \in C^r(M, \mathbb{R})$ tais que

$$(1) \quad \|D^k(f \circ \varphi^{-1})(x, y) - D^k(g \circ \varphi^{-1})(x, y)\| < \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in \varphi(K), \quad k = 0, \dots, r.$$

Os conjuntos $N^r(f, (U, \varphi), K, \varepsilon)$ formam uma base para uma topologia em $C^r(M, \mathbb{R})$. A topologia de Whitney em $C^\infty(M, \mathbb{R})$ é definida como a reunião das topologias induzidas pela inclusão $C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^r(M, \mathbb{R})$ para r finito.

Teorema 1.2.8 *Se M for compacta e $\partial M = \emptyset$, $\mathcal{F}(M)$ será um subconjunto aberto e denso de $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Demonstração. (Ver [10] teorema 2.7.)

²ver [7] páginas 34 - 35

Sejam $(U_1, h_1), \dots, (U_k, h_k)$, um recobrimento finito de M por vizinhanças coordenadas e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Podemos encontrar facilmente conjuntos compactos $C_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, k$ tais que $C_1, C_2, \dots, C_k$ cubram M .

$\mathcal{F}(M)$ é aberto em $C^\infty(M, \mathbb{R})$:

Sendo f uma função de Morse, decorre de (1) que qualquer função numa vizinhança conveniente $N_i = N^2(f, (U_i, h_i), C_i, \varepsilon_i)$ de f em $C^\infty(M, \mathbb{R})$ não possui ponto crítico degenerado em C_i .

Portanto, qualquer função na vizinhança

$$N = N_1 \cap \dots \cap N_k$$

de f não possui ponto crítico degenerado em

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k = M.$$

$\mathcal{F}(M)$ é denso em $C^\infty(M, \mathbb{R})$:

Seja $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$ uma função diferenciável tal que $\lambda = 1$ numa vizinhança de C_1 e $\lambda = 0$ numa vizinhança de $M - U_1$. Para quase todas as aplicações lineares $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$f_1(p) = f(p) + \lambda(p)L(h_1(p))$$

tem apenas pontos críticos não degenerados em $C_1 \subset U_1$, pelo (lema 1.2.7).

Observe-se que f_1 difere de f apenas num conjunto compacto

$$K = \text{supp } \lambda \subset U_1.$$

Fazendo

$$L(x, y) = ax + by,$$

note-se que

$$f_1 \circ h_1^{-1}(x, y) - f \circ h_1^{-1}(x, y) = (\lambda \circ h_1^{-1}(x, y))(ax + by)$$

para todo $(x, y) \in h_1(K)$. Segue que é possível escolher a e b suficientemente pequenos de modo que

$$\begin{aligned} & \left| f_1 \circ h_1^{-1}(x, y) - f \circ h_1^{-1}(x, y) \right| < \varepsilon_1, \\ & \left| \frac{\partial}{\partial x} (f_1 \circ h_1^{-1})(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} (f \circ h_1^{-1})(x, y) \right| < \varepsilon_1, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y}(f_1 \circ h_1^{-1})(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}(f \circ h_1^{-1})(x, y) \right| < \varepsilon_1,$$

e

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f_1 \circ h_1^{-1})(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f \circ h_1^{-1})(x, y) \right| < \varepsilon_1 \quad \forall (x, y) \in h_1(K).$$

Obtemos, assim, uma função $f_1 \in N_1$ que possui apenas pontos críticos não degenerados em C_1 .

Repetindo todo o processo com f_1 , obtemos uma função f_2 em N_2 que possui apenas pontos críticos não degenerados em C_2 . Podemos supor que $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$. Automaticamente, f_2 possui apenas pontos críticos não degenerados em N_1 . Finalmente, obteremos uma função

$$f_k \in N_k \subset N_{k-1} \cdots \subset N_1 \subset N$$

que possui apenas pontos críticos não degenerados em

$$\bigcup_{i=1}^k C_k = M$$

□

Observação: Com a construção do teorema 1.2.8 e o lema 1.2.6, prova-se também, que se M for compacta com bordo $\partial M = V_0 \dot{\cup} V_1$, $\mathcal{F}(M)$ será aberto e denso em $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Definição 1.2.9 Dizemos que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse estável se f é injetora quando restrita ao conjunto de seus pontos críticos.

Notação: Indicaremos por $\mathcal{F}_0(M)$ o conjunto de todas as funções de Morse estáveis definidas em M .

O lema 1.2.10, a seguir, garante que se M for compacta, $\mathcal{F}_0(M)$ será denso em $\mathcal{F}(M)$. Este resultado será usado na demonstração da proposição 1.4.3.

Lema 1.2.10 Se M for compacta e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com pontos críticos $p_1, \dots, p_k$, então, dada uma vizinhança aberta N de f , existirá uma função de Morse estável $g \in N$ com os mesmos pontos críticos de f ³.

Demonstração. Note-se que sendo M compacta, podemos supor que $Im(f) = [0, 1]$. Suponha que $f(p_1) = f(p_2)$. Construímos uma função diferenciável

$$\lambda : M \longrightarrow [0, 1]$$

³ver [10], lema 2.8.

tal que $\lambda = 1$ numa vizinhança U de p_1 e $\lambda = 0$ fora de uma vizinhança maior N , sendo

$$\overline{N} \subset M - \partial M \text{ e } p_i \notin \overline{N} \text{ se } i \neq 1.$$

Tomemos $\varepsilon_1 > 0$ de modo que

$$f_0 = f + \varepsilon_1 \lambda$$

tenha valores em $[0, 1]$ e

$$f_0(p_1) \neq f_0(p_i), \text{ se } i \neq 1.$$

Consideremos uma métrica Riemanniana para M e tomemos c e c' de modo que $0 < c \leq |\nabla f|$ no conjunto compacto

$$K = \overline{\{0 < \lambda < 1\}}$$

e $|\nabla \lambda| \leq c'$ em K .

Seja $0 < \varepsilon_2 < \min\{\varepsilon_1, \frac{c}{c'}\}$. Então

$$f_1 = f + \varepsilon_2 \lambda$$

será ainda uma função de Morse,

$$f_1(p_1) \neq f_1(p_i) \text{ para } i \neq 1,$$

e f_1 tem os mesmos pontos críticos de f . Pois em K ,

$$|\nabla(f + \varepsilon_2 \lambda)| \geq |\nabla f| - |\varepsilon_2 \nabla \lambda| > c - \varepsilon_2 c' > 0$$

e fora de K , $|\nabla \lambda| = 0$, portanto $|\nabla f_1| = |\nabla f|$. Continuando indutivamente, obtemos uma função de Morse $g \in N$ que separa todos os pontos críticos. Isto completa a demonstração.

□

1.3 Cobordismo

Na demonstração do teorema principal, mais precisamente nos resultados a serem obtidos no capítulo 2, utilizaremos, repetidas vezes, a obtenção de uma variedade M a partir de outras duas M_1 e M_2 através da identificação dos pontos de determinados abertos $N_1 \subset M_1 - \partial M_1$ e $N_2 \subset M_2 - \partial M_2$. E para concluir a demonstração, no final do capítulo 3, o seguinte resultado será utilizado: se M for uma variedade diferenciável, compacta, com $\partial M = V_0 \cup V_1$ e se existir uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sem pontos críticos, com $\text{Im}(f) = [0, 1]$, $f^{-1}(0) = V_0$ e $f^{-1}(1) = V_1$, então M será difeomorfa a $V_0 \times [0, 1]$. Esta seção visa demonstrar estes resultados.

Novamente nos restringiremos à variedades de dimensão dois, apesar destes resultados serem verdadeiros em variedades de dimensão arbitrária (ver, por exemplo, [10]) e da demonstração no caso geral ser essencialmente a mesma.

Definição 1.3.1 *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Um campo de vetores X sobre M é um campo pseudo-gradiente para f se:*

- (i) $X(f) > 0$ no complementar do conjunto dos pontos críticos de f , e
- (ii) *dado qualquer ponto crítico p de f , existem coordenadas (x, y) dadas por um sistema de coordenadas (U, φ) em torno de p tais que*

$$f \circ \varphi^{-1}(x, y) = f(p) + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}, \text{ com } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$$

e X tem coordenadas $(\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 y)$ em U .

Lema 1.3.2 *Para toda função de Morse $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre uma variedade compacta M , existe um campo pseudo-gradiente X .*

Demonstração. Para simplificar, assumiremos que f tem apenas um ponto crítico, sendo o caso geral semelhante.

Pelo lema de Morse (lema 1.2.2), existe um sistema de coordenadas locais (U_0, φ) em torno de p tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(x, y) = f(p) + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2, \quad \forall (x, y) \in \varphi(U_0), \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}.$$

Seja U uma vizinhança aberta de p tal que $\overline{U} \subset U_0$. Qualquer ponto $p' \in M - U_0$ não é ponto crítico de f . Segue do teorema da função implícita que existe um sistema de coordenadas locais (V, ψ) em torno de p' tal que

$$f \circ \psi^{-1}(x', y') = f(p) + x', \quad \forall (x', y') \in \psi(V).$$

Usando isto e o fato de que $M - U_0$ é compacto, encontramos sistemas de coordenadas locais $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_k, \varphi_k)$ tais que

- (i) $M - U_0 \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$,
- (ii) $U \cap U_i = \emptyset, \quad i = 1, \dots, k, \quad \text{e}$
- (iii) $f \circ \varphi_i^{-1}(x_i, y_i) = f(p) + x_i, \quad \forall (x_i, y_i) \in U_i, \quad i = 1, \dots, k.$

Em U_0 existe um campo de vetores cujas coordenadas são $(\varepsilon'_1 x, \varepsilon'_2 y)$, $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2 \in \{-1, 1\}$, com $\varepsilon'_1 \leq \varepsilon'_2$, e em U_i existe o campo de vetores $\frac{\partial}{\partial x_i}$ com coordenadas $(1, 0)$, $i = 1, \dots, k$.

Usando uma partição da unidade subordinada ao recobrimento $U_0, U_1, \dots, U_k$, obtemos um campo de vetores X em M . Segue que X é o campo pseudo-gradiente procurado. $\square$

Pode-se demonstrar que, dado um campo pseudo-gradiente X para f , existe uma métrica riemaniana sobre M tal que $X = \nabla f$.

Definição 1.3.3 *Suponhamos M compacta. Para cada $f \in \mathcal{F}(M)$, seja μ_f o número de pontos críticos de f . O número $\mu_M = \min\{\mu_f / f \in \mathcal{F}(M)\}$ denomina-se número de Morse de M .*

Teorema 1.3.4 *Se M for compacta, $\partial M = V_0 \cup V_1$ e $\mu_M = 0$, então M será difeomorfa ao produto $V_0 \times [0, 1]$.*

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow [0, 1]$ uma função de Morse sem pontos críticos, com $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$ e seja X um campo pseudo-gradiente para f . Sobre M tem-se $X(f) > 0$, de onde multiplicando-se X em cada ponto pelo número real positivo $\frac{1}{X(f)}$, podemos assumir que $X(f) \equiv 1$ em M .

Se p é um ponto qualquer em ∂M e (U_0, φ_0) é um sistema de coordenadas locais em torno de p com $\varphi_0(U_0)$ aberto no semi-espaco $y \geq 0$, então

$$f \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

se estende a uma função diferenciável g definida num subconjunto aberto U do $\mathbb{R}^2$. O campo X expresso nestas coordenadas também se estende a U . Logo o teorema da existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias ⁴ se aplica localmente a M .

Seja

$$\varphi : [a, b] \rightarrow M$$

uma curva integral qualquer para o campo de vetores X . Então

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi) = X(f) \equiv 1,$$

portanto

$$f(\varphi(t)) = t + \text{constante}.$$

⁴ver [16], pág. 209

Fazendo a mudança de parâmetros,

$$\psi(s) = \varphi(s - \text{constante}),$$

obtemos uma curva integral que satisfaz

$$f(\psi(s)) = s.$$

Cada curva integral pode ser estendida de modo único a um intervalo maximal, o qual, visto que M é compacta, deve ser $[0, 1]$. Portanto, para cada $y \in M$ existe uma única curva integral maximal

$$\psi_y : [0, 1] \longrightarrow M$$

que passa por y e satisfaz

$$f(\psi_y(s)) = s.$$

Além disso, $\psi_y(s)$ é diferenciável como uma função das variáveis y e s .

O difeomorfismo procurado

$$h : V_0 \times [0, 1] \longrightarrow M$$

será dado por

$$h(y_0, s) = \psi_{y_0}(s),$$

com

$$h^{-1}(y) = (\psi_y(0), f(y)).$$

□

Dizemos que uma subvariedade $N \subset M - \partial M$, fechada, conexa e de dimensão 1 tem dois lados em M se existe uma vizinhança W de N em M tal que $W - N$ possui duas componentes conexas.

Corolário 1.3.5 *Suponhamos M compacta.*

- (i) *Se $\partial M \neq \emptyset$, existirá uma vizinhança de ∂M (chamada vizinhança colarinho) difeomorfa a $\partial M \times [0, 1]$.*
- (ii) *Se toda componente de uma subvariedade N de M for compacta e tiver dois lados, existirá uma vizinhança de N em M difeomorfa a $N \times]-1, 1[$ (chamada vizinhança “bicollar”) de tal modo que N corresponda a $N \times \{0\}$.*

Demonstração. Demonstraremos apenas (i), a demonstração de (ii) é semelhante e pode ser encontrada em [10], páginas 23 - 24.

Decorre do lema 1.2.6 a existência de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, tal que $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$ e $df \neq 0$ numa vizinhança U de ∂M . Então f é uma função de Morse em $f^{-1}([0, \frac{\varepsilon}{2}])$, sendo $\varepsilon > 0$ um limitante inferior para f no compacto $M - U$. Portanto, $f^{-1}([0, \frac{\varepsilon}{2}])$ é difeomorfa a $V_0 \times [0, 1[$ (pelo teorema 1.3.4). Analogamente, $f^{-1}([\frac{\varepsilon}{2}, 1])$ é difeomorfa a $V_1 \times [0, 1[$, donde segue o resultado. $\square$

O corolário seguinte afirma que duas funções de Morse sem pontos críticos sobre variedades difeomorfas são essencialmente a mesma função.

Corolário 1.3.6 *Se $f_i : M_i \rightarrow [0, 1]$, $i = 0, 1$, forem funções de Morse sem pontos críticos definidas nas variedades de dimensão 2, com $\partial M_i = V_0^i \cup V_1^i$, $i = 0, 1$, $f_i^{-1}(0) = V_0^i$ e $f_i^{-1}(1) = V_1^i$, então existirá um difeomorfismo $h : M_0 \rightarrow M_1$ tal que $f_0 = f_1 \circ h$.*

Demonstração. Segue do teorema 1.3.4 a existência de difeomorfismos

$$h_j : V_j^i \times [0, 1] \rightarrow M_i, \quad i = 0, 1, \quad j = 0, 1$$

com $f_i \circ h_j(x, t) = t$.

Se $k : V_0^0 \rightarrow V_1^1$ é um difeomorfismo entre as componentes conexas V_0^0 de ∂M_0 e V_1^1 de ∂M_1 , definimos

$$h = h_1 \circ (k, 1) \circ h_0^{-1}.$$

Tem-se $f_0 = f_1 \circ h$.

De fato,

$$\begin{aligned} f_1 \circ h(y) &= f_1 \circ h_1 \circ (k, 1) \circ h_0^{-1}(y) \\ &= f_1 \circ h_1 \circ (k, 1)(\psi_y(0), f_0(y)) \\ &= f_1 \circ h_1(k \circ \psi_y(0), f_0(y)) \\ &= f_0(y). \end{aligned}$$

No teorema 1.3.7, a seguir, veremos como obter uma variedade $\overline{M}$ a partir de outras duas, M_1 e M_2 , pela identificação de pontos em vizinhanças colarinho de ∂M_1 e ∂M_2 .⁵

Teorema 1.3.7 *Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis conexas, compactas, com $\partial M_1 \neq \emptyset$ e $\partial M_2 \neq \emptyset$. Sejam N_1 uma componente conexa de uma vizinhança*

⁵Este teorema é uma adaptação do teorema 1.4 página 2 de [10]

colarinho de ∂M_1 e N_2 uma componente conexa de uma vizinhança colarinho de ∂M_2 . Se $h : N_1 - \partial N_1 \rightarrow N_2 - \partial N_2$ for um difeomorfismo, então existirá uma estrutura diferenciável para $\overline{M} = (M_1 - \partial M_1) \cup_h (M_2 - \partial M_2)$, $(M_1 - \partial M_1) \cup_h (M_2 - \partial M_2) = [(M_1 - \partial M_1) \dot{\cup} (M_2 - \partial M_2)]/\sim$, sendo $p \in (M_1 - \partial M_1) \sim q \in (M_2 - \partial M_2) \leftrightarrow q = h(p)$, de modo que as inclusões naturais $j_0 : M_1 - \partial M_1 \rightarrow \overline{M}$ e $j'_0 : M_2 - \partial M_2 \rightarrow \overline{M}$ sejam difeomorfismos na imagem.

Demonstração. Os abertos

$$j_0(M_1 - \partial M_1)$$

e

$$j'_0(M_2 - \partial M_2)$$

cobrem $\overline{M} = (M_1 - \partial M_1) \cup_h (M_2 - \partial M_2)$. Consideremos a estrutura usual em $M_1 - \partial M_1$ e em $M_2 - \partial M_2$.

Seja $j_1 : (M_1 - \partial M_1) \cup (M_2 - \partial M_2) \rightarrow (M_1 - \partial M_1) \cup_h (M_2 - \partial M_2) = \overline{M}$ dada por

$$j_1(x) = \begin{cases} j_0(x) & \text{se } x \in M_1 \\ j'_0(x) & \text{se } x \in M_2 \end{cases}.$$

Diremos que $U \subset (M_1 - \partial M_1) \cup_h (M_2 - \partial M_2)$ é aberto se, e somente se $j_1^{-1}(U) = (M_1 - \partial M_1) \cup (M_2 - \partial M_2)$ for aberto.

Isto define uma topologia em $\overline{M}$:

(1) Seja

$$U = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha,$$

onde $U_\alpha \subset \overbrace{(M_1 - \partial M_1) \dot{\cup} (M_2 - \partial M_2)}^{\overline{M}}$ é aberto, $\forall \alpha \in \Gamma$.

Temos que

$$j_1^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} j_1^{-1}(U_\alpha)$$

é aberto em $(M_1 - \partial M_1) \cup (M_2 - \partial M_2)$.

Portanto U é aberto em $\overline{M}$;

(2) Seja

$$U = \bigcap_{j=1}^n U_j$$

onde $U_j \subset (M_1 - \partial M_1) \cup_h (M_2 - \partial M_2)$ é aberto, $j = 1, 2, \dots, n$. O conjunto

$$j_1^{-1}(U) = \bigcap_{j=1}^n j_1^{-1}(U_j)$$

é aberto em $(M_1 - \partial M_1) \cup (M_2 - \partial M_2)$.

Portanto U é aberto em $(M_1 - \partial M_1) \cup_h (M_2 - \partial M_2) = \overline{M}$.

Logo, temos uma topologia, e mais, j_0 e j'_0 são homeomorfismos.

Para cada sistema de coordenadas locais (U, φ) em $M_1 - \partial M_1$, temos o sistema de coordenadas locais $(j_0(U), \varphi \circ j_0^{-1})$ em $j_0(M_1 - \partial M_1)$, e, para cada sistema de coordenadas locais (V, ψ) em $M_2 - \partial M_2$, temos o sistema de coordenadas locais $(j'_0(V), \psi \circ j'^{-1}_0)$ em $j'_0(M_2 - \partial M_2)$.

A reunião dos abertos $j_0(U)$ e $j'_0(V)$ cobrem $j_0(M_1 - \partial M_1)$ e $j'_0(M_2 - \partial M_2)$ e, portanto, cobrem $\overline{M}$.

$\varphi \circ j_0^{-1}$ e $\psi \circ j'^{-1}_0$ são homeomorfismos sobre abertos de $\mathbb{R}^2$:

Suponhamos que

$$U' = j_0(U), \quad U \subset M_1 - \partial M_1$$

e

$$U' = j'_0(V), \quad V \subset M_2 - \partial M_2.$$

A aplicação

$$(\varphi \circ j_0^{-1}) \circ (\psi \circ j'^{-1}_0)^{-1} : \psi \circ j'^{-1}_0(U') \longrightarrow \varphi \circ j_0^{-1}(U')$$

satisfaz

$$(\varphi \circ j_0^{-1}) \circ (\psi \circ j'^{-1}_0)^{-1} = \varphi \circ (j_0^{-1} \circ j'_0) \circ \psi^{-1} \stackrel{*}{=} \varphi \circ h \circ \psi.$$

Basta verificarmos a igualdade $(*)$ para termos que $(\varphi \circ j_0^{-1}) \circ (\psi \circ j'^{-1}_0)^{-1}$ é um difeomorfismo.

Vamos verificar que vale $(*)$, ou melhor, que $j_0^{-1} \circ j'_0 = h$:

Se

$$p \in j_0(M_1 - \partial M_1) \cap j'_0(M_2 - \partial M_2),$$

então

$$p = j_0(a) = j'_0(b)$$

para algum $a \in M_1 - \partial M_1$ e algum $b \in M_2 - \partial M_2$. Logo $b = h(a)$, ou seja,

$$h^{-1} \circ (j'_0{}^{-1}(p)) = j_0^{-1}(p).$$

Então

$$h^{-1}(j'_0{}^{-1}(j_0(a))) = j_0^{-1}(j_0(a)) = a$$

e, portanto,

$$j'_0{}^{-1} \circ j_0(a) = h(a).$$

□

1.4 Estabilidade de Aplicações

Definição 1.4.1 (i) *Sejam $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dizemos que f é equivalente a g (notação : $f \sim g$), se existem difeomorfismos $h : M \longrightarrow M$ e $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tornam o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

comutativo.

(ii) *Dizemos que $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ é estável se existe uma vizinhança W_f de f em $C^\infty(M, \mathbb{R})$ de modo que toda $g \in W_f$ é equivalente a f .*

É fácil ver que (i) define uma relação de equivalência em $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Tendo em vista a demonstração da proposição 1.4.3, que será fundamental na demonstração do teorema principal, faz-se necessária uma outra definição de estabilidade de funções, a qual é equivalente a 1.4.1 no caso em que M é compacta, a saber:

Definição 1.4.2 (i) *Seja*

$$\pi : T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

a projeção canônica, e seja

$$\omega : M \longrightarrow T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

diferenciável. Então ω é um campo de vetores ao longo de f , se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \\ \omega \nearrow & & \searrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

comuta. Denotaremos por $C_f^\infty(M, T\mathbb{R})$ o conjunto dos campos de vetores ao longo de f .

(ii) *f é infinitesimalmente estável se, para todo campo de vetores ω ao longo de f , existem campos de vetores s em M e t em $\mathbb{R}$ tais que*

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial s} + t \circ f.$$

Nas definições 1.4.1 e 1.4.2, assim como na proposição 1.4.3 a seguir, poderíamos considerar, a menos de algumas adaptações, $f, g : M \longrightarrow N$, sendo M e N variedades de dimensões arbitrárias.⁶

Proposição 1.4.3 *Se M for compacta, então $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ será estável se, e somente se, for uma função de Morse estável.*

Demonstração. Note-se que, sendo M compacta, podemos supor que $\text{Im} f = [0, 1]$. Vamos supor, inicialmente, que f seja estável. Então existe uma vizinhança W_f de f em $C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que toda $g \in W_f$ é equivalente a f . Contudo, pelo teorema 1.2.8 e observação que o acompanha, $\mathcal{F}(M)$ é um subconjunto denso de $C^\infty(M, \mathbb{R})$, logo existe uma $g \in W_f$ tal que $g \in \mathcal{F}(M)$. Levando em conta 1.2.10, podemos supor que $g \in \mathcal{F}_0(M)$. É de fácil verificação⁷ que

$$\text{se } f \sim g \text{ e } g \in \mathcal{F}_0(M), \text{ então } f \in \mathcal{F}_0(M).$$

⁶Ver [4].

⁷Basta usar os difeomorfismos da definição 1.4.1

Temos, portanto, que se f é estável, então f é uma função de Morse estável.

Para demonstrar a recíproca, utilizaremos a estabilidade infinitesimal.

Seja $\omega \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Com as hipóteses dadas sobre f , veremos como resolver a equação

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial s} + t \circ f. \quad (*)$$

Visto que f é uma função de Morse e M é compacta, existe apenas um número finito de pontos críticos de f . Escolhemos t de modo que $t \circ f(x) = \omega(x)$ para todo ponto crítico x de f . Para resolver $(*)$, é suficiente resolver

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial s} \quad (**)$$

para cada $\omega \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $\omega(x) = 0$ sempre que x for um ponto crítico de f , pois ω em $(**)$ pode ser tomado como $\omega - t \circ f$ de $(*)$. Dado um tal ω , construiremos o campo de vetores s .

Em torno de cada ponto $p \in M$, escolhemos uma vizinhança aberta U_p como segue:

- (i) se p é um ponto regular, escolhemos U_p de modo que $(df)_q \neq 0$ para todo $q \in U_p$. Escolhemos um campo de vetores s^p em U_p de modo que $(df)(s^p) \neq 0$ em U_p ,
- (ii) se p é um ponto crítico, então escolhemos U_p como sendo uma vizinhança coordenada com aplicação coordenada $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f \circ \varphi_p^{-1}(x, y) = f(p) + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2, \quad \text{com } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}.$$

A coleção $\{U_p\}_{p \in M}$ forma uma cobertura aberta de M . Visto que M é compacta, existe uma subcobertura finita $\{U_i\}_{i=1}^m$ correspondendo a $p_1, \dots, p_m$. Seja $\rho_1, \dots, \rho_m$ uma partição da unidade subordinada a este recobrimento. Tomaremos campos de vetores s^i em M ($1 \leq i \leq m$) como segue:

- (i) se p_i é um ponto regular, então fazemos

$$s_i(x, y) = \begin{cases} \frac{\omega(x, y) \rho_i(x, y) s^{p_i}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial s^{p_i}}(x, y)} & \text{em } U_{p_i} \\ 0 & \text{fora de } U_{p_i} \end{cases}$$

- (ii) se p_i é um ponto crítico, então $\omega(p_i) = 0$, e existem funções diferenciáveis h_1 e h_2 nas coordenadas de U_i dado acima, tais que

$$\rho_i \omega = h_1 x + h_2 y.$$

Além disso, h_1 e h_2 possuem suporte compacto em U_i visto que $\rho_i \omega$ também possui.

Seja

$$s_i = \frac{\varepsilon_1 h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\varepsilon_2 h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \text{ em } U_i.$$

Finalmente, definimos

$$s = s_1 + \cdots + s_n.$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial s_n}.$$

Se p_i é um ponto regular,

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \begin{cases} \frac{\omega \rho_i \frac{\partial f}{\partial s_i}}{\frac{\partial f}{\partial s_i}} & \text{em } U_i \\ 0 & \text{fora de } U_i \end{cases} = \begin{cases} \omega \rho_i & \text{em } U_i \\ 0 & \text{fora de } U_i \end{cases} = \rho_i \omega,$$

visto que ρ_i é zero fora de U_i .

Se p_i é um ponto crítico,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s_i} &= \begin{cases} \frac{\varepsilon_1 h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (c + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2) + \frac{\varepsilon_2 h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (c + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2) & \text{em } U_i \\ 0 & \text{fora de } U_i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varepsilon_1^2 h_1 x + \varepsilon_2^2 h_2 y & \text{em } U_i \\ 0 & \text{fora de } U_i \end{cases} \\ &= \begin{cases} h_1 x + h_2 y & \text{em } U_i \\ 0 & \text{fora de } U_i \end{cases} \\ &= \rho_i \omega. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \rho_1 \omega + \cdots + \rho_m \omega = \omega \sum_{i=1}^m \rho_i = \omega.$$

□

Proposição 1.4.4 *Se $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ forem funções de Morse equivalentes e se $h : M \longrightarrow M$ e $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ forem difeomorfismos nas condições da definição 1.4.1, teremos:*

- (i) *se $k' > 0$, então $\text{ind}_f(p) = \text{ind}_g(h(p))$;*
- (ii) *se $k' < 0$, então $\text{ind}_g(h(p)) = 2 - \text{ind}_f(p)$.*

Demonstração. Verifiquemos inicialmente, que $\text{ind}_{k \circ f}(p) = \text{ind}_g h(p)$

Seja (U, φ) uma carta de Morse para $k \circ f$ em torno de p . Temos, portanto, $k \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = k \circ f(p) + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2$, com $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$.

$(h(U), \varphi \circ h^{-1})$ é uma carta em $h(p)$, relativamente à qual tem-se,

$$\begin{aligned} g \circ (\varphi \circ h^{-1})^{-1}(x, y) &= g \circ h \circ \varphi^{-1}(x, y) \\ &= k \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) \\ &= k \circ f(p) + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2, \end{aligned}$$

de onde

$$\text{ind}_{k \circ f}(p) = \text{ind}_g h(p).$$

Agora, basta verificarmos:

- (a) *se $k' > 0$, então $\text{ind}_f(p) = \text{ind}_{k \circ f}(p)$, e*
- (b) *se $k' < 0$, então $\text{ind}_{k \circ f}(p) = 2 - \text{ind}_f(p) = \begin{cases} 2 & \text{se } \text{ind}_f(p) = 0, \\ 1 & \text{se } \text{ind}_f(p) = 1, \\ 0 & \text{se } \text{ind}_f(p) = 2. \end{cases}$*

Pela regra da cadeia, $H(k \circ f)_p = k'(f(p))H(f)_p$. Portanto é suficiente considerar os casos em que $k = 1_{\mathbb{R}}$ ou $k = -1_{\mathbb{R}}$. O resultado segue imediatamente.

□

1.5 Isotopias

O estudo das componentes conexas de $\mathcal{F}_0(M)$ será feito através de caminhos em $\mathcal{F}_0(M)$, obtidos via isotopias. Daí a importância da abordagem deste assunto neste capítulo. Nesta seção não há necessidade de restrição na dimensão das variedades.

Definição 1.5.1 Dizemos que uma aplicação diferenciável $F : M \times [0, 1] \longrightarrow M$ é uma difeotopia se satisfaz:

- (i) para cada $t \in [0, 1]$ a aplicação $F_t : M \longrightarrow M$ dada por $F_t(x) = F(x, t)$ é um difeomorfismo,
- (ii) $F_0 = 1_M$.

Definição 1.5.2 O difeomorfismo $h : M \longrightarrow N$ é diferenciavelmente isotópico a $k : M \longrightarrow N$, se existe uma aplicação diferenciável

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow N,$$

tal que $F_0(x) = h(x)$, $F_1(x) = k(x)$, $\forall x$ e para cada $t \in [0, 1]$, a aplicação $F_t : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo (em particular, se $M = N$ e $F_0 = 1_M$, temos uma difeotopia).

Lema 1.5.3 Se $h : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ for um difeomorfismo que preserva orientação, então h será diferenciavelmente isotópico à identidade.

Demonstração. Basta considerar a isotopia

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

dada por

$$F(x, t) = (1 - t)x + th(x).$$

Para provar que cada $F_t : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ é um difeomorfismo, basta observar que $F'_t = 1 - t + th'(x) > 0$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall t \in [0, 1]$ e F_t é sobrejetora, para todo t em $[0, 1]$. O resultado segue da regra de derivada da função inversa.

□

Lema 1.5.4 (Lema de Homogeneidade) *Suponhamos M conexa. Se y e z forem pontos interiores de M , então existirá um difeomorfismo $h : M \rightarrow M$ diferenciavelmente isotópico à identidade e tal que $h(y) = z$.*⁸

Demonstração. Construiremos, inicialmente, uma isotopia diferenciável de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, a qual

- (i) deixa fixos todos os pontos fora da bola unitária, e
- (ii) desloca a origem a qualquer ponto desejado da bola unitária aberta.

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que satisfaz:

$$\varphi(x, y) > 0, \text{ para } \|(x, y)\| < 1;$$

$$\varphi(x, y) = 0, \text{ para } \|(x, y)\| \geq 1$$

(por exemplo, seja $\varphi(x, y) = \lambda(1 - \|(x, y)\|^2)$, onde $\lambda(t) = 0$, para $t \leq 0$ e $\lambda(t) = \exp(-\frac{1}{t})$, para $t > 0$).

Fixado qualquer vetor unitário $c = (c_1, c_2) \in S^1$, consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c_1 \varphi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = c_2 \varphi(x, y) \end{cases}$$

Para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, o sistema de equações acima tem uma única solução $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, definida em $\mathbb{R}$, satisfazendo a condição inicial $\alpha(0) = (x_1, x_2)$.

Denotaremos esta solução por $\alpha(t) = F_t(x_1, x_2)$. Segue do teorema de existência e unicidade para equações diferenciais⁹ que:

- (i) $F_t(x_1, x_2)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e depende diferenciavelmente de t e (x_1, x_2) ,
- (ii) $F_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$,
- (iii) $F_{s+t}(x_1, x_2) = F_s \circ F_t(x_1, x_2)$.

⁸Ver [12].

⁹Ver, por exemplo, [16].

Portanto, cada $F_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo.

Fazendo t variar, vemos que cada F_t é diferenciavelmente isotópico à identidade por uma isotopia que deixa fixos todos os pontos fora da bola unitária. Com uma escolha conveniente de c e t , o difeomorfismo F_t irá levar a origem a qualquer ponto desejado da bola unitária aberta.

Consideremos agora a variedade conexa M . Dizemos que dois pontos de M são “isotópicos”, se existe uma isotopia diferenciável levando um no outro. Isto é claramente uma relação de equivalência. Se y é um ponto interior, então ele tem uma vizinhança difeomorfa a $\mathbb{R}^2$; portanto, os argumentos acima mostram que todo ponto suficientemente próximo a y é isotópico a y . Ou seja, cada “classe de isotopia” de pontos no interior de M é um conjunto aberto, e o interior de M é particionado em classes de isotopia abertas e disjuntas. Mas o interior de M é conexo; portanto, existe apenas uma classe de isotopia.

□

Observação: Seja α uma curva qualquer de y a z em M . Da compacidade de α segue que existem pontos $y_0 = y, y_1, \dots, y_n = z$ de modo que y_{i-1} e y_i pertençam a uma vizinhança coordenada em M difeomorfa a $\mathbb{R}^2$, para $i = 1, \dots, n$. Podemos construir o difeomorfismo h e a difeotopia correspondente de h por composição de difeotopias que levam y_0 a y_1 , y_1 a y_2 , $\dots$, y_{n-1} a $y_n = z$, respectivamente, fixos fora dessas vizinhanças. Dessa construção, decorre que o traço de y pela difeotopia composta é uma curva homotópica a α . Usaremos esse fato na demonstração do teorema principal.

Seja agora $Diff(M) \subset C^\infty(M)$ o subespaço dos difeomorfismos de M com a topologia de Whitney. É consequência imediata da construção de tal topologia ¹⁰ que $Diff(M)$ é aberto em M . Dado $h \in Diff(M)$ suficientemente próximo de 1_M , podemos supor que h pertence à componente conexa de 1_M em $Diff(M)$. Logo, existe uma aplicação contínua $H_t : M \times [0, 1] \longrightarrow M$ tal que $H_0 = 1_M$, $H_1 = h$ e $H_t : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo para todo t em $[0, 1]$. Como H é diferenciável em $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$, podemos aproximar H por uma função diferenciável $F : M \times [0, 1] \longrightarrow M$ tal que $F = H$ em $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$, pelo lema 1.1.2. Se tomarmos F suficientemente próxima de H então, como H_t é um difeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$ e $[0, 1]$ é compacto, podemos tomar F de modo que $F_t : M \longrightarrow M$ seja um difeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$. Assim h é difeotópico a 1_M .

¹⁰Ver 1.2

Analogamente, o espaço $PL([0, 1], M)$ dos mergulhos diferenciáveis de $[0, 1]$ em M é aberto em $C^\infty([0, 1], M)$ com a topologia de Whitney. Assim, dados $\alpha, \gamma \in PL([0, 1], M)$ numa vizinhança fixada de γ , existe uma aplicação contínua $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $F_0 = \alpha$, $F_1 = \gamma$ e $F_t \in PL([0, 1], M)$, $\forall t \in [0, 1]$ e portanto α e γ são homotópicas. Cada F_t pertence à vizinhança fixada de γ , assim, para todo arco $\gamma([t_0, t_1])$ contido em uma vizinhança coordenada de M , com $\alpha|_{[t_0, t_1]} = \gamma|_{[t_0, t_1]}$, podemos supor que a homotopia F_t é fixa para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Denotando por $Diff^+(M)$ o subespaço de $Diff(M)$ dos difeomorfismos que preservam orientação, temos que $Diff^+(M)$ é aberto em $C^\infty(M)$.

Em [2] tem-se que $Diff^+(S^1 \times [0, 1])$ é conexo. Vamos verificar que

$$Diff^+(S^1 \times [0, 1], S^1 \times \{1\}) = \{h \in Diff^+(S^1 \times [0, 1]) / h|_{S^1 \times \{1\}} = 1_{S^1 \times \{1\}}\}$$

é conexo.

Sejam D o disco de raio 2 e D_0 o disco de raio 1 centrados na origem e identifiquemos $S^1 \times [0, 1]$ com a coroa $1 \leq \|(x, y)\| \leq 2$. Conforme [2]¹¹ temos a seguinte fibração localmente trivial¹²

$$Diff^+(D) \rightarrow PL(D_0, D),$$

$$h \in Diff^+(D) \mapsto h|_{D_0} \in PL(D_0, D)$$

com fibra

$$Diff^+(S^1 \times [0, 1], S^1 \times \{1\})$$

e sua sequência exata de homotopia

$$\begin{aligned} \rightarrow \pi_1(Diff^+(S^1 \times [0, 1], S^1 \times \{1\})) &\rightarrow \pi_1(Diff^+(D)) \xrightarrow{\alpha} \pi_1(PL(D_0, D)) \\ \xrightarrow{\delta} \pi_0(Diff^+(S^1 \times [0, 1], S^1 \times \{1\})) &\rightarrow \pi_0(Diff^+(D)) \end{aligned}$$

Temos que¹³

$$\pi_0(Diff^+(D)) = 0,$$

$$\pi_1(PL(D_0, D)) \approx \pi_1(Diff^+(D), Diff^+(S^1 \times [0, 1], S^1 \times \{1\}))$$

e

¹¹ver teorema 1 do §1, 3^o item do §2 e corolário 2 do teorema 4 do §5, apêndice.

¹²se $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação contínua entre espaços topológicos, dizemos que p é uma fibração localmente trivial, se para todo $x_0 \in B$, existe uma vizinhança V de x_0 tal que $p^{-1}(V)$ é homeomorfa a $V \times p^{-1}(x_0)$ de forma compatível com as projeções de V .

¹³ver [2].

$$\pi_1(PL(D_0, D)) \approx \pi_1(SO_2) = \mathbb{Z}$$

Queremos mostrar que α é sobrejetora, de onde concluimos que

$$\pi_0(Diff^+(S^1 \times [0, 1]), S^1 \times \{1\}) = 0.$$

Sejam

$$h : (S^1 \times [0, 1]) \times [0, 1] \longrightarrow S^1 \times [0, 1]$$

e

$$k : (S^1 \times [0, 1]) \times [0, 1] \longrightarrow S^1 \times [0, 1]$$

dados por

$$h(x, y, t) = (x \cos 2\pi t - y \sin 2\pi t, x \sin 2\pi t + y \cos 2\pi t)$$

e

$$k(x, y, t) = (x \cos(2\pi(1 - y)t) - y \sin(2\pi(1 - y)t), x \sin 2\pi(1 - y)t + y \cos 2\pi(1 - y)t)$$

Temos que $h(x, y, t) = (x, y)$ se $t = 0, 1$, $k(x, y, t) = (x, y)$ se $y = 1$ ou $t = 0$ e $k(x, y, t) = h(x, y, t)$ se $y = 0$.

Então $H : (S^1 \times [0, 1]) \times [0, 1] \longrightarrow S^1 \times [0, 1]$ dada por

$$H(x, y, t) = h_t \circ k_t^{-1}(x, y)$$

é tal que

$$H(x, y, 0) = (x, y),$$

$$H(x, 0, t) = (x, 0), \quad \forall t,$$

$$H(x, 1, t) = h_t(x, 1), \quad \forall t$$

e

$$H(x, 1, 1) = (x, 1).$$

Podemos assumir que $[h] \in \pi_1(Diff^+(D))$, obtendo $\alpha([h]) = [H] \in \pi_1(PL(D_0, D))$, logo, $\alpha([h]) = 1$ e, portanto, α é sobrejetora.

1.6 Uma Extensão de Difeomorfismos

O lema 1.6.1 abaixo será usado na construção de uma isotopia de M que faz os valores críticos de f e g coincidirem (lema 3.2.2).

Lema 1.6.1 *Dados números reais a_1, a_2, a'_1, a'_2 tais que $0 < a_1 < a_2 < 1$ e $0 < a'_1 < a'_2 < 1$ e dados difeomorfismos $h_0 : [0, a_1] \rightarrow [0, a'_1]$ e $h_1 : [a_2, 1] \rightarrow [a'_2, 1]$ que preservam a orientação (isto é, possuem derivada positiva), existe um difeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que estende h_0 e h_1 .*

Demonstração. Como h_0 é contínua, dado $0 < \varepsilon' < \frac{a'_2 - a'_1}{4}$, existe $\delta' > 0$ tal que $h_0([a_1 - \delta', a_1]) = [a'_1 - \varepsilon', a'_1]$, com δ' tal que $a_1 + \delta' < a_2$.

Existe uma extensão $\bar{h}_0$ de h_0 a $[0, a_1 + \delta']$ dada por :

$$\bar{h}_0(a_1 + x) = a'_1 + [a'_1 - h_0(a_1 - x)] = 2a'_1 - h_0(a_1 - x), \text{ se } 0 < x < \delta'.$$

É imediato que $\bar{h}_0$ é um difeomorfismo de $[0, a_1 + \delta']$ em $[0, a'_1 + \varepsilon']$ que estende h_0 .

Analogamente, o difeomorfismo h_1 admite uma extensão

$$\bar{h}_1 : [a_2 - \delta'', 1] \rightarrow [a'_2 - \varepsilon'', 1].$$

Se $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\bar{h}_0 : [0, a_1 + \delta_1] \rightarrow [0, a'_1 + \varepsilon]$$

e

$$\bar{h}_1 : [a_2 - \delta_2, 1] \rightarrow [a'_2 - \varepsilon, 1]$$

são extensões de h_0 e h_1 , respectivamente. Sejam

$$\bar{h}'_0 : [0, a_1 + \delta_1] \rightarrow [0, +\infty[$$

e

$$\bar{h}'_1 : [a_2 - \delta_2, 1] \rightarrow [0, +\infty[$$

as derivadas de $\bar{h}_0$ e $\bar{h}_1$, respectivamente, $\bar{h}'_0(a_1) = a$ e $\bar{h}'_1(a_2) = b$.

Seja $k : [a_1, a_2] \rightarrow [0, +\infty[$ uma função diferenciável tal que

$$k(a_1) = a, \quad k(a_2) = b \text{ e } \int_{a_1}^{a_2} k(t)dt < \varepsilon.$$

Se $\{\alpha_i\}_{i=0}^2$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $[0, a_1 + \delta_1[, [a_1, a_2[, [a_2 - \delta_2, 1]$ de $[0, 1]$, a função

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Figura 1.1: Gráfico de g

dada por

$$f(t) = \alpha_0(t)\bar{h}'_0(t) + \alpha_1(t)k(t) + \alpha_2(t)\bar{h}'_1(t)$$

é diferenciável e estritamente positiva, portanto

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

é um difeomorfismo de $[0, 1]$ em $Im(g)$.

Também g estende h_0 , pois, para $x \leq a_1$,

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \bar{h}'_0(t)dt = \bar{h}_0(x)$$

para $x \geq a_2$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^{a_2} f(t)dt + \int_{a_2}^x f(t)dt \\ &= \int_0^{a_2} f(t)dt + \int_{a_2}^x \bar{h}'_1(t)dt \\ &= \int_0^{a_2} f(t)dt + \bar{h}_1(x) - a'_2 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 \int_0^{a_2} f(t)dt &= \int_0^{a_1} f(t)dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt \\
 &= a'_1 + \int_{a_1}^{a_2} \alpha_0(t)\bar{h}'_0(t)dt \\
 &\quad + \int_{a_1}^{a_2} \alpha_1(t)k(t)dt \\
 &\quad + \int_{a_1}^{a_2} \alpha_2(t)\bar{h}'_1(t)dt \\
 &< a'_1 + \bar{h}_0(a_1 + \delta_1) - \bar{h}_0(a_1) + \varepsilon \\
 &\quad + \bar{h}_1(a_2) - \bar{h}_1(a_2 - \delta_2) \\
 &< a'_1 + 3\varepsilon \\
 &< a'_2
 \end{aligned}$$

Logo, para $x \geq a_2$, $g(x) = \bar{h}_1(x) - c$ com $c > 0$.

Seja $\lambda : [0, 1] \longrightarrow [0, c]$ uma função diferenciável tal que

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq a_1 \\ c, & \text{para } t \geq a_2 \end{cases}$$

e $0 \leq \lambda(t) \leq c$, para $a_1 \leq t \leq a_2$.

A aplicação $h : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dada por $h(t) = g(t) + \lambda(t)$ é um difeomorfismo que estende h_0 e h_1 .

Figura 1.2: Gráfico de h

Raciocinando de forma análoga e utilizando os difeomorfismos h_2 e h_3 que são as restrições de $1_{\mathbb{R}}$ a $[2, +\infty[$ e $] - \infty, -2]$, respectivamente, estende-se h a um difeomorfismo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

□

1.7 Transversalidade

Sejam M e N variedades diferenciáveis, $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $Z \subset N$ uma subvariedade. Podemos supor que M e N sejam variedades com bordo, desde que $Z \subset N - \partial N$ e $f_{-1}(Z) \cap \partial M = \emptyset$.

Definição 1.7.1 *Seja K um subconjunto de M . Dizemos que f é transversal a Z ao longo de K (notação: $f \pitchfork_K Z$) se*

$$Im(df_x) + T_y(Z) = T_y(N), \quad \forall x \in K.$$

Em particular, quando $K = f^{-1}(Z)$, dizemos simplesmente que f é transversal a Z .

Um dos resultados importantes sobre transversalidade a ser usado no capítulo 3 será enunciado no teorema 1.7.2, cuja demonstração pode ser encontrada em [5], página 28 e [7], página 22 teorema 3.3.

Teorema 1.7.2 *Se f for transversal a Z , então $f^{-1}(Z)$ será uma subvariedade de M .*

Demonstração. (ver bibliografia acima.)

□

O teorema 1.7.3, a ser enunciado, será fundamental na demonstração do teorema principal. Antes, definimos

$$\pitchfork_K(M, N; Z) = \{f \in C^\infty(M, N) / f \pitchfork_K Z\}.$$

e

$$\pitchfork(M, N; Z) = \pitchfork_M(M, N; Z)$$

Teorema 1.7.3 *Se Z for fechado em N , então $\mathring{\cap}(M, N; Z)$ será aberto e denso em $C^\infty(M, N)$. Além disso, se $K \subset M$ for fechado e $f \mathring{\cap}_K Z$, poderemos tomar $g \in \mathring{\cap}(M, N, Z)$ em qualquer vizinhança de f , tal que $g \equiv f$ em K .*

Demonstração. Ver [9], teorema 1.35 página 22.

□

Observemos que se $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ forem curvas regulares não fechadas, $\gamma(0) \neq \tilde{\gamma}(0)$ e $\gamma(1) \neq \tilde{\gamma}(1)$, então teremos que $K = \gamma(0) \cup \gamma(1)$ e $Z = \text{Im} \tilde{\gamma}$ serão fechados em M , como duas subvariedades de M . Segue do teorema 1.7.3 que $\mathring{\cap}([0, 1], M; Z)$ é aberto e denso em $C^\infty(M, M)$ e que existe $\tilde{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow M$, com $\tilde{\gamma}_1 \in \mathring{\cap}([0, 1], M, Z)$ tão próxima de $\tilde{\gamma}$ como desejarmos e, portanto, curva simples e fechada, com $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}(0)$ e $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}(1)$.

1.8 Curvas em Variedades de Dimensão 2

Para proceder às construções do capítulo 2 os resultados abaixo, extraídos de [3], serão úteis.

Teorema 1.8.1 *Se uma curva simples e fechada $S \subset M$ for homotópica a zero, então S será o bordo de um disco $D \subset M$.*

Demonstração. Se M é a esfera S^2 , então este é o teorema de Schoenflies. Caso contrário, podemos assumir que M é simplesmente conexa pois, caso não fosse, obteríamos o disco D como projeção de um disco D' no recobrimento universal de M .

Supondo M simplesmente conexa, podemos assumir que S é um subcomplexo de alguma triangulação de M . Segue que S é homólogo a zero. Seja C a cadeia tal que $\partial C = S$. A reunião dos 2-simplexos em C é uma subvariedade compacta N de M e $\partial N = S$.

N não pode ser a faixa de Möbius pois, caso fosse, poderíamos construir um duplo recobrimento de M colando duas cópias de $M - N$. Portanto N deve ser um disco pois, caso contrário, existiria uma curva simples não separante δ com dois lados em N e poderíamos construir o recobrimento cíclico de M gerado por δ .

Teorema 1.8.2 *Sejam $f_0, f_1 : S^1 \rightarrow M$ mergulhos disjuntos tais que $f_0(S^1)$ tem dois lados em M . Se f_0 e f_1 forem homotópicas entre si mas não forem homotópicas a 0, existirá um cilindro em M , com bordo $f_0(S^1) \cup f_1(S^1)$. Além disso, o mergulho $\varphi : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow M$ pode ser tomado de modo que $\varphi(x, 0) = f_0(x)$ e $\varphi(x, 1) = f_1(x)$.*

Demonstração. Seja $h : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow M - (\partial M \cup f_1(S^1))$ um mergulho tal que $h(x, 0) = f_0(x)$. Tomamos $M - h(S^1 \times]-1, 1[)$ e identificamos $h(S^1 \times \{-1\})$ a um ponto P_{-1} e $h(S^1 \times \{1\})$ a um ponto P_1 . Se $f_0(S^1)$ separa M , obtemos duas variedades de dimensão 2, M_{-1} e M_1 com $P_{-1} \in M_{-1}$ e $P_1 \in M_1$ ¹⁴.

Figura 1.3: M_{-1} e M_1 no caso em que $f_0(S^1)$ separa M .

¹⁴ver figura 1.3

Se $f_0(S^1)$ não separa M , obtemos uma variedade conexa de dimensão 2, a qual denotaremos por M_1 e faremos $M_{-1} = \emptyset$. Seja

$$p : M - h(S^1 \times]-1, 1[) \longrightarrow M_1 \cup M_{-1}$$

a identificação. Sem perda de generalidade podemos supor que $f_1(S^1) \subset p^{-1}(M_1)$.

Definimos $F : M \longrightarrow M_1$ pondo $F = p$ em $p^{-1}(M_1)$. Se $f_0(S^1)$ separa M , definimos $F(M - p^{-1}(M_1)) = P_1$ (ver figura 1.3). Se $f_0(S^1)$ não separa M , definimos $F \circ h(x, t) = \omega(t)$, onde ω é um caminho em M_1 ligando P_{-1} a P_1 .

Figura 1.4: M_1 no caso em que $f_0(S^1)$ não separa M .

Então $F \circ f_0$ representa a classe de conjugação trivial em $\pi_1(M_1)$. Segue das hipóteses que $F \circ f_1 \simeq 0 : S^1 \longrightarrow M_1$.

Portanto $F(f_1(S^1))$ é o bordo de um disco em M_1 . Decorre do fato de serem f_0 e f_1 homotópicas que este disco contém apenas um dos pontos P_{-1} e P_1 , donde segue a existência de um cilindro em M com bordo $f_0(S^1)$ e $f_1(S^1)$. Se este cilindro não fornecer a aplicação F desejada, ele fornecerá uma homotopia entre f_0 e $f_1 \circ g$, sendo g uma rotação de S^1 em torno de um diâmetro. Temos que f_0 é homotópica a $f_0 \circ g$. Escolhemos um ponto fixo de g como o ponto base em S^1 e sua imagem por f_0 como o ponto base em M . Temos que f_0 representa um elemento $\alpha \in \pi_1(M, *)$. A homotopia $f_0 \simeq f_0 \circ g$ fornece-nos um elemento β tal que $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}$. Segue das hipóteses que M não é o plano projetivo. Portanto M é uma garrafa de Klein (ver [3] lema 2.3).

Mas $f_0(S^1)$ não separa M pois, caso contrário, α estaria no centro de $\pi_1(M)$. Portanto o complementar do cilindro obtido acima é outro cilindro. Este segundo cilindro é aquele que satisfaz o lema.

Teorema 1.8.3 *Se $f_0(S^1) \cap f_1(S^1) \neq \emptyset$ e consistir de um número finito de pontos, então existirá um disco D em M cujo bordo consiste de um arco em $f_0(S^1)$ e um arco em $F_1(S^1)$, com $\overset{\circ}{D} \cap f_0(S^1) = \emptyset$ e $\overset{\circ}{D} \cap f_1(S^1) = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $p : \tilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento com grupo fundamental cíclico gerado por $\tilde{f}_0 : S^1 \rightarrow \tilde{M}$, um levantamento de f_0 , isto é, $\tilde{M} - \partial \tilde{M}$ é homeomorfo ao cilindro aberto $S^1 \times \mathbb{R}$. Seja $\tilde{f}_1 \simeq \tilde{f}_0$ o levantamento de $f_1 \simeq f_0$. Ambos $\tilde{f}_0(S^1)$ e $\tilde{f}_1(S^1)$ separam $\tilde{M}$ pois, caso contrário, seriam homotópicos a zero.

Sendo $f_0(S^1) \cap f_1(S^1) \neq \emptyset$, deve existir um arco A em $p^{-1}f_1(S^1)$ tal que $A \cap \tilde{f}_0(S^1) = \partial A$. Então A junto com um arco B em $\tilde{f}_0(S^1)$ formam o bordo de um disco D em $\tilde{M}$. Todas as componentes de $D \cap p^{-1}f_1(S^1)$ são arcos com suas extremidades em B . Sem perda de generalidade podemos trocar A pelo mais interno destes arcos. Então $\overset{\circ}{D} \cap p^{-1}f_1(S^1) = \emptyset$. Semelhantemente, encontramos um arco C em $p^{-1}f_0(S^1)$, de modo que um subarco de A juntamente com C formam o bordo de um disco $E \subset D$ tal que $\overset{\circ}{E} \cap p^{-1}f_0(S^1) = \emptyset$ e $\overset{\circ}{E} \cap p^{-1}f_1(S^1) = \emptyset$ ¹⁵.

Figura 1.5: O disco E .

Temos que $f_0(S^1) \cap f_1(S^1)$ contém mais do que um ponto, visto que contém $p(\partial A)$. Logo $p|_{\partial E}$ é injetora e, portanto, $p|_E$ é injetora¹⁶. De onde segue o resultado.

¹⁵ver figura 1.5 .

¹⁶Ver [3] lema 1.6

Capítulo 2

Difeotopias entre Curvas de M

Sejam $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse equivalentes, $h : M \longrightarrow M$ e $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ difeomorfismos tais que $g = k \circ f \circ h^{-1}$. Tomemos um ponto crítico p de f de índice 1 e denotemos por $q = h(p)$ o ponto crítico correspondente de g , $V(f, p)$ a componente conexa de $f^{-1}(f(p))$ que contém p e $V(g, q)$ a componente conexa de $g^{-1}(g(q))$ que contém q .

Tendo em vista a demonstração do teorema principal veremos neste capítulo que, se $p = q$ e $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow M$ forem curvas regulares (lembramos que uma curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ é regular se α é diferenciável e $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$), orientadas, simples, fechadas e homotópicas entre si, com $Im\gamma \subset V(f, p)$, $Im\tilde{\gamma} \subset V(g, p)$,

$$\gamma(0) = p \quad \text{e} \quad \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t), \quad \forall t \in [0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1],$$

para algum $\varepsilon_0 > 0$ e algum $\varepsilon_1 > 0$ com $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < 1$,

$$\gamma(\varepsilon_0) = \tilde{\gamma}(\varepsilon_0) = a_0 \neq a_1 = \gamma(\varepsilon_1) = \tilde{\gamma}(\varepsilon_1),$$

$$\tilde{\gamma}(t) = h(\gamma(t)), \quad \forall t \in [0, 1]$$

e, $\gamma([\varepsilon_0, \varepsilon_1])$ e $\tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1])$ se cruzarem apenas em um número finito de pontos $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$, $\varepsilon_0 < t_1 < \dots < t_n < \varepsilon_1$, sendo a interseção transversal, existirá uma difeotopia

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow M,$$

que satisfaz $F_1 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Sejam $\alpha, \tilde{\alpha} : [0, 1] \longrightarrow M$ curvas regulares, simples e fechadas com $Im\alpha \subset V(f, p)$, $Im\tilde{\alpha} \subset V(g, p)$, $Im\alpha \cap Im\gamma = \{p\}$, $Im\tilde{\alpha} \cap Im\tilde{\gamma} = \{p\}$, $Im\alpha \cup Im\gamma = V(f, p)$, $Im\tilde{\alpha} \cup Im\tilde{\gamma} = V(g, p)$ e $h(\alpha(t)) = \tilde{\alpha}(t), \forall t \in [0, 1]$. Suporemos α e $\tilde{\alpha}$ homotópicas e, no caso em que γ e $\tilde{\gamma}$ não são homotópicas a zero, que ou a homotopia de γ a $\tilde{\gamma}$ é fixa em p ou $\alpha = \tilde{\alpha}$.

Usando o fato que a relação de difeotopia em M é uma relação de equivalência, procederemos da seguinte forma:

- (i) Através de difeotopias de M , modificaremos $\tilde{\gamma}$ eliminando as interseções em $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$. Ou seja, obteremos uma curva da forma

$$F_1 \circ \tilde{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow M,$$

sendo

$$F_1 : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

uma difeotopia que satisfaz

$$(F_1 \circ \tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1])) \cap \gamma([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) = \{a_0, a_1\}$$

e

$$F_1 \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma} \text{ em } [0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1].$$

- (ii) Construiremos uma difeotopia

$$G : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

tal que

$$G_1 \circ (F_1 \circ \tilde{\gamma}) = \gamma$$

e $G_1 \circ F_1$ é a identidade fora de uma vizinhança de γ .

Antes de passar à construção dessas difeotopias, precisamos verificar de que modo se dão os cruzamentos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$. Para isso, usaremos os resultados de 1.8 .

2.1 Um Estudo dos Cruzamentos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$

Sejam $k, l \in \mathbb{R}$ com $k < f(p) < l$ tais que $f(p)$ é o único valor crítico de f em $[k, l]$ e seja W a componente conexa de $f^{-1}([k, l])$ que contém p . Temos que $W - Im\gamma$ possui duas componentes conexas e, portanto, $Im\gamma$ possui dois lados em M . Analogamente, verifica-se que $Im\tilde{\gamma}$ possui dois lados em M . Observe-se que h não troca essas componentes.

Temos dois casos a considerar:

- (1) γ e $\tilde{\gamma}$ não são homotópicas a zero.

Por uma homotopia regular F_t de $\tilde{\gamma}$ (isto é, uma homotopia $F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M$ tal que $F_0 = \tilde{\gamma}$ e F_t é uma curva regular para cada $t \in [0, 1]$) podemos obter uma nova curva $\tilde{\gamma}_1$ tal que

$$\tilde{\gamma}_1([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) \cap \gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) = \emptyset \text{ ou } \{p\}$$

e $\tilde{\gamma}_1$ é transversal a γ^{-1} .

Temos uma das situações abaixo:

(i) γ e $\tilde{\gamma}_1$ possuem n interseções transversais;

Figura 2.1: $\tilde{\gamma}_1([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) \cap \gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) = \emptyset$.

(ii) γ e $\tilde{\gamma}_1$ se cruzam transversalmente em $n + 1$ pontos, sendo uma interseção em p .

Figura 2.2: $\tilde{\gamma}_1([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) \cap \gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) = \{p\}$.

Vamos analisar o caso (i):

Temos que γ e $\tilde{\gamma}_1$ se cruzam transversalmente em n pontos $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$.

Se $n = 0$, decorre do teorema 1.8.2 a existência de um cilindro A em M , cujo bordo é $Im\gamma \cup Im\tilde{\gamma}_1$ e a existência de uma homotopia $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $F(t, 0) = \gamma(t)$ e $F(t, 1) = \tilde{\gamma}_1(t)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Figura 2.3: Cilindro A cujo bordo é $Im\gamma \cup Im\tilde{\gamma}_1$.

¹pois $PL([0, 1], M)$ é aberto em $C^\infty([0, 1], M)$.

Segue que existe um disco em M com bordo $\gamma([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \cup \tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1])$. De fato, seja D o fêcho da componente conexa de $M - \gamma([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \cup \tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1])$ que não contém p . Se $A \supset D$, segue do teorema de Schoenflies que D é um disco. Suponhamos que $A \subset \overline{M - D}$.

Se a homotopia de γ a $\tilde{\gamma}$ é fixa em p , tomemos uma curva $\tilde{\gamma}_0$, obtida de $\tilde{\gamma}_1$ por uma pequena homotopia regular de modo que $Im\tilde{\gamma}_0 \cap Im\gamma = \{p\}$; segue que $\tilde{\gamma}_0$ e γ representam o mesmo elemento $a \in \pi_1(M, p)$. Escolhendo uma curva δ conveniente (por exemplo, identifiquemos A com $S^1 \times [0, 1]$, $Im\gamma$ com $S^1 \times \{0\}$ e $Im\tilde{\gamma}$, com $S^1 \times \{1\}$ e tomemos uma curva δ_1 tal que $Im\delta_1 = \{p_i\} \times [0, 1]$ e uma curva δ_2 tal que $\delta_2(0) = \{p_i\} \times \{1\}$ e $\delta_2(1) = \{p_i\} \times \{0\}$. Tomemos δ uma curva tal que $Im\delta = Im\delta_1 \cup Im\delta_2$ com $Im\delta - \{p_i\} \subset M - D$, como na figura 2.4, representante de um elemento $b \in \pi_1(M, p)$, $b \neq a$, temos que γ também representa $b^{-1}ab$. Logo $a^{-1}b^{-1}ab = 1$ e portanto $M - D$ é um toro com um disco removido cujo bordo é $\gamma([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \cup \tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1])$. Concluimos que γ e $\tilde{\gamma}$ não são homotópicas em $\overline{M - D}$ e, portanto, são homotópicas em D . Por serem $\gamma|_{[\varepsilon_0, \varepsilon_1]}$ e $\tilde{\gamma}|_{[\varepsilon_0, \varepsilon_1]}$ curvas simples, fechadas, sem auto-interseções e homotópicas, segue que D é um disco.

Figura 2.4: A curva δ .

Se $\alpha \equiv \tilde{\alpha}$ então $Im\tilde{\gamma} \cap Im\alpha = \{p\}$ e, como $p \in M - D$, segue que α tem um arco próximo de p contido em $M - D$ e sendo $Im\alpha \cap \partial D = \emptyset$, tem-se que $Im\alpha \subset M - D$. Seja A_1 o fêcho da componente conexa de $M - (Im\tilde{\gamma} \cup Im\tilde{\gamma}_1)$ que não contém pontos de A em seu interior. Segue da construção de $\tilde{\gamma}_1$ que A_1 é um cilindro em M . Logo $(A - \partial A) \cup (A_1 - Im\tilde{\gamma}) = M - D$ é um cilindro aberto em M . Decorre de $h(Im\gamma) = Im\tilde{\gamma}$ que $h(D - \partial D) \cap (A_1 - \partial A_1) \neq \emptyset$ e de $Im\tilde{\gamma} \cap Im\alpha = \{p\}$ segue que $h(Im\tilde{\gamma}) \cap Im\alpha = h(Im\tilde{\gamma}) \cap Im\tilde{\alpha} = \{p\}$ e $h \circ \tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \cap Im\alpha = \emptyset$.

Não podemos ter $h \circ \tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \subset \overset{\circ}{D}$ pois, caso contrário, teríamos

$$h(Im\hat{\alpha}) = Im\alpha \subset h(\overset{\circ}{D})$$

o que acarretaria $Im\tilde{\alpha} = Im\alpha \subset \overset{\circ}{D}$. Logo $h \circ \tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \subset M - \overset{\circ}{D}$ e portanto $h(\overset{\circ}{D}) \subset M - D$. Segue que $h(\overset{\circ}{D})$ é um disco aberto e portanto $\overset{\circ}{D}$ é um disco aberto.

Logo os arcos $\gamma([\varepsilon_0, \varepsilon_1])$ e $\tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1])$ formam o bordo de um disco D em M , como na figura abaixo:

Figura 2.5: $\gamma([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \cup \tilde{\gamma}([\varepsilon_0, \varepsilon_1])$.

Se $n > 0$, decorre do teorema 1.8.3 a existência de arcos de γ e $\tilde{\gamma}_1$ que formam o bordo de um disco $D_1 \subset M$ com $\overset{\circ}{D}_1 \cap Im\gamma = \emptyset$ e $\overset{\circ}{D}_1 \cap Im\tilde{\gamma}_1 = \emptyset$. Podemos tomar estes arcos com extremidades $\gamma(t_{i-1})$ e $\gamma(t_i)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que isto não seja possível. Então os arcos citados acima possuem extremidades $\gamma(t_n)$ e $\gamma(t_1)$. Neste caso podemos deformar a curva $\tilde{\gamma}_1$ a uma curva $\tilde{\gamma}_2$ de modo a eliminar as interseções em $\gamma(t_n)$ e $\gamma(t_1)$, como na figura abaixo:

Figura 2.6: Eliminação das Interseções $\gamma(t_n)$ e $\gamma(t_1)$.

Se $n = 2$, obtemos, pelo teorema 1.8.2, um cilindro em M cujo bordo é $Im\gamma \cup Im\tilde{\gamma}_2$. Podemos, então, deformar $\tilde{\gamma}_2$ a uma nova curva que só encontra $Im\gamma$ em p , a qual juntamente com $Im\gamma$ formam o bordo de um disco aberto, de onde concluímos que

$Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ são da forma abaixo ²:

Figura 2.7: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ no caso $n = 2$.

e portanto temos um disco D determinado pelos arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ obtendo uma contradição.

Se $n \geq 2$, existem arcos de γ e $\tilde{\gamma}_2$ que formam o bordo de um disco $D_2 \subset M$ com $\overset{\circ}{D}_2 \cap Im\gamma = \emptyset$ e $\overset{\circ}{D}_2 \cap Im\tilde{\gamma}_2 = \emptyset$. Analogamente, se estes arcos tiverem extremidades $\gamma(t_{n-1})$ e $\gamma(t_2)$, conclui-se que existe um disco D em M determinado pelos arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$.

Figura 2.8: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ no caso $n > 2$.

Vamos analisar o caso (ii):

²basta voltar a $\tilde{\gamma}$ através das mesmas deformações.

Temos que $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}_1$ se cruzam transversalmente em $n+1$ pontos, a saber, $p, \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$. Segue do teorema 1.8.3 que $n+1 \geq 2$ e existe um disco D_1 cujo bordo é formado pelos arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}_1$ de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ ou de p a $\gamma(t_1)$ ou de $\gamma(t_n)$ a p .

Suponhamos que não exista um disco de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$. Então existe um disco D de p a $\gamma(t_1)$ (ou de $\gamma(t_n)$ a p , análogo)³.

Se $n=1$, por uma homotopia regular F_t de $\tilde{\gamma}_1$, obtemos uma curva $\tilde{\gamma}_2$ tal que $Im\tilde{\gamma}_1 \cap Im\tilde{\gamma}_2 = \emptyset$. Decorre do teorema 1.8.2 a existência de um cilindro em M com bordo $Im\gamma \cup Im\tilde{\gamma}_2$

Figura 2.9: Eliminação das Interseções em p e $\gamma(t_1)$.

de onde se conclui, como anteriormente, que $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ são da forma

Figura 2.10: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$.

Se $n \geq 1$, através de uma homotopia regular de $\tilde{\gamma}_1$, obtemos uma curva $\tilde{\gamma}_2$ tal que $Im\tilde{\gamma}_2$ cruza $Im\gamma$ transversalmente em $n-1$ pontos $\gamma(t_2), \dots, \gamma(t_n)$, de modo que os arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}_2$ de $\gamma(t_n)$ a $\gamma(t_2)$ formam o bordo de um disco D_2 em M .

Repetindo o mesmo argumento do caso (i), conclui-se que existe um disco D em M cujo bordo é formado pelos arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ o que contradiz nossa hipótese de que não existe tal disco.

Em resumo, no caso (ii) temos uma das situações a seguir, se $n > 0$:

³pela construção de $\tilde{\gamma}_1$.

- (a) Se $n > 1$, existe um disco D cujo bordo é formado pelos arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ para algum i ;
- (b) Se $n = 1$, temos dois discos como na figura abaixo:

Figura 2.11:

(2) γ e $\tilde{\gamma}$ são homotópicas a zero.

Vamos verificar que, também neste caso, existe um disco em M cujo bordo é a reunião de um arco de $Im\gamma$ com um arco de $Im\tilde{\gamma}$, o qual podemos tomar com extremidades $\gamma(t_{i-1})$ e $\gamma(t_i)$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ou $\gamma(\varepsilon_0)$ e $\gamma(t_1)$, ou $\gamma(t_1)$ e $\gamma(\varepsilon_1)$ ou $\gamma(\varepsilon_0)$ e $\gamma(\varepsilon_1)$.

Temos que $Im\gamma$ é o bordo de um disco $D \subset M$ e $Im\tilde{\gamma}$ é o bordo do disco $D_1 = h(D)$.

Se $n = 0$, então $Im\gamma \cap Im\tilde{\gamma} = \gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1])$.

Suponhamos, por absurdo, que $\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D}_1 = \emptyset$. Sejam $Im\alpha$ e $Im\tilde{\alpha}$ os outros arcos de $V(f, p_i)$ e de $V(g, p_i)$, respectivamente. Decorre de $Im\gamma \cap Im\alpha = \{p_i\}$ que ou $Im\alpha - \{p_i\} \subset \overset{\circ}{D}$ ou $Im\alpha \cap \overset{\circ}{D}_1 \neq \emptyset$.

Figura 2.12:

Não pode ocorrer $Im\alpha - \{p_i\} \subset \overset{\circ}{D}$ pois, caso contrário, teríamos

$$Im\tilde{\alpha} - \{p_i\} = h(Im\alpha - \{p_i\}) \subset h(\overset{\circ}{D}) = \overset{\circ}{D}_1$$

e, no entanto, $Im\alpha$ e $Im\tilde{\alpha}$ coincidem em um arco que contém p_i no interior.

O caso $Im\alpha \cap \overset{\circ}{D}_1 \neq \emptyset$ também não pode ocorrer. De fato, caso ocorresse, $Im\alpha$ teria um arco com o ponto p_i em seu interior, contido em $\overset{\circ}{D}_1$ e, conseqüentemente, $Im\tilde{\alpha}$ também teria um arco com estas propriedades ⁴, de onde concluiríamos que $Im\tilde{\alpha} - \{p_i\} \subset \overset{\circ}{D}_1$ e obteríamos a contradição $Im\alpha - \{p_i\} = h^{-1}(Im\tilde{\alpha} - \{p_i\}) \subset \overset{\circ}{D}$.

Logo $\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D}_1 \neq \emptyset$ e portanto $D \subset D_1$ ou $D_1 \subset D$.

Figura 2.13: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$.

Se $n \geq 0$, tomemos uma vizinhança aberta U de p_i tal que $\gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1])$ a divide em dois abertos disjuntos U' e U'' com

$$U \cap \overset{\circ}{D} = U'$$

e

$$U \cap (Im\gamma \cup Im\tilde{\gamma}) = \gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]).$$

Segue que $\overset{\circ}{D}_1 \cap U = U'$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que $\overset{\circ}{D}_1 \cap U \neq U'$. Segue da construção de U que $\overset{\circ}{D}_1 \cap U = U''$. Podemos supor, diminuindo U , se necessário, que $h(U') = U''$.

(i) Se $Im\alpha \cap U' \neq \emptyset$, então $Im\alpha \cap U \subset U'$ ⁵ e $Im\tilde{\alpha} \cap U \subset U''$ o que é um absurdo pois $Im\alpha$ e $Im\tilde{\alpha}$ coincidem em um arco que contém p_i no interior.

(ii) Se $Im\alpha \cap U'' \neq \emptyset$, então $Im\alpha \cap U \subset U''$ ⁶ e como $U'' = h(U')$, devemos ter $Im\tilde{\alpha} \cap U \subset U'$. De forma análoga a (i), chega-se a um absurdo.

Sendo $Im\alpha \cap Im\gamma = \{p_i\}$, não ocorre nenhuma situação diferente de (1) e (2). Portanto, por absurdo, $\overset{\circ}{D}_1 \cap U = U'$.

⁴pois $Im\alpha$ e $Im\tilde{\alpha}$ coincidem em um arco que contém o ponto p_i em seu interior.

⁵decorre do fato de que $Im\alpha \cap Im\gamma = \emptyset$.

⁶decorre do fato de que $Im\alpha \cap Im\gamma = \emptyset$.

Suponhamos $n \geq 2$.

Vamos verificar, inicialmente, que se $n = 2$ e os arcos de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ formam o bordo de um disco $D_2 \subset M$ e se o arco de $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ estiver contido em $M - \overset{\circ}{D}$, então $\gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) \cap D_2 = \emptyset$.

Nas condições acima, temos que os arcos de $Im\tilde{\gamma}$ de a_0 a $\gamma(t_1)$ e de $\gamma(t_2)$ a a_1 estão contidos em D . Segue que os arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de a_0 a $\gamma(t_1)$ formam o bordo de um disco $D' \subset D$, os arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_2)$ a a_1 formam o bordo de um disco $D'' \subset D$ e $D_1 = D_2 \cup D' \cup D''$. Logo $D_2 \subset D_1$.

Suponhamos, por absurdo, que $\gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) \cap D_2 \neq \emptyset$. Segue que $\gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]) \subset D_2$ ⁷ e $D_2 \subset M - \overset{\circ}{D}$ (por construção). Logo $D_2 \cap U \subset U''$, absurdo pois $D_2 \cap U \subset D_1 \cap U = U'$.

Figura 2.14:

Suponhamos que o arco de $Im\tilde{\gamma}$ de a_0 a $\gamma(t_j)$, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ tenha interior contido em $\overset{\circ}{D}$ ⁸, então o arco de $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_j)$ a $\gamma(t_k)$ tem interior fora de D para algum $k \in \{1, \dots, n\}$. Se $n > 2$, existe um i tal que os arcos de $Im\gamma$ e de $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ formam o bordo de um disco $D_2 \subset D$. Se $n = 2$ então os arcos de $Im\gamma$ e de $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ formam o bordo de um disco contido em D_1 .

De fato, se $n \geq 2$, existe $r \in \{1, \dots, n\}$ tal que o arco de $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_k)$ a $\gamma(t_r)$ não cruza o arco de $Im\gamma$ determinado por estes pontos e está contido em $\overset{\circ}{D}$. Se $t_k \neq t_{r-1}$ e $t_k \neq t_{r+1}$, então existe t_{k_1} entre t_k e t_r tal que $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ se cruzam em $\gamma(t_{k_1})$ e, portanto, existe $k_2 \in \{1, \dots, n\}$ tal que o arco de $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_{k_1})$ a $\gamma(t_{k_2})$ não cruza o arco de $Im\gamma$ determinado por estes pontos. Observe-se que sendo $\tilde{\gamma}$ uma curva simples, então t_{k_2} pertence ao intervalo entre t_k e t_r . Obtivemos, assim, um arco de $Im\tilde{\gamma}$ cujo interior está contido no interior do disco determinado pelos arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de

⁷pois $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ não se cruzam transversalmente neste arco.

⁸se este arco tiver interior contido em $M - D$ procede-se de forma análoga.

$\gamma(t_k)$ a $\gamma(t_r)$. Procedendo indutivamente, obtemos o mais interno destes arcos o qual satisfaz a propriedade desejada.

Figura 2.15: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$.

Se $n = 2$, então $j = 1$.

Suponhamos, por absurdo, que $j > 1$. Então existe j_1 entre ε_0 e j tal que γ e $\tilde{\gamma}$ se cruzam transversalmente em $\gamma(t_{j_1})$. Segue que existe j_2 tal que o arco de $\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_{j_1})$ a $\gamma(t_{j_2})$ está contido no interior de D e $j_2 \neq j$ ⁹. Absurdo, pois $n = 2$.

O próximo cruzamento de γ e $\tilde{\gamma}$ só pode ser em $\gamma(t_2)$ e o arco de $\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ pertence a $M - \overset{\circ}{D}$. Segue que os arcos de γ e de $\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ formam o bordo de um disco contido em $D_1 - \overset{\circ}{D}$.

Figura 2.16: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$.

Se o arco de $Im\tilde{\gamma}$ de a_0 a $\gamma(t_j)$, para algum j tem interior fora de $\overset{\circ}{D}$, procede-se de forma análoga.

⁹decorre do fato de ser $\tilde{\gamma}$ uma curva simples.

Concluimos que se $n \geq 2$, então existe i tal que os arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ formam o bordo de um disco em M e este disco não encontra $\gamma([0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1])$.

Seja então $n = 1$. Sobram apenas duas possibilidades:

(i) O arco de $Im\tilde{\gamma}$ de a_0 a $\gamma(t_1)$ tem interior contido em $\overset{\circ}{D}$.

Neste caso, os arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de a_0 a $\gamma(t_1)$ formam o bordo de disco contido em D .

Figura 2.17: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$.

(ii) O arco de $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a a_1 tem interior contido em $\overset{\circ}{D}$.

Neste caso, os arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_1)$ a a_1 formam o bordo de um disco contido em D .

Figura 2.18: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$.

2.2 Eliminação de Interseções Transversais de Curvas de M

Fixemos $t_{i-1}, t_i \in [0, 1]$ tais que os arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ formam o bordo de um disco D em M tal que $\overset{\circ}{D} \cap Im\gamma = \emptyset$ e $\overset{\circ}{D} \cap Im\tilde{\gamma} = \emptyset$. Sejam

$$C = \gamma([t_{i-1} - \varepsilon_i, t_i + \varepsilon_i]) \subset M$$

com $0 < \varepsilon_i < \min\{t_{i-1} - t_{i-2}, t_{i+1} - t_i\}$, $c = \gamma(t_{i-1})$ e $d = \gamma(t_i)$.

Reparametrizando $\tilde{\gamma}$, se necessário, talvez invertendo a orientação, podemos admitir que

$$\hat{\gamma}(t_{i-1}) = \gamma(t_{i-1}), \quad \hat{\gamma}(t_i) = \gamma(t_i)$$

e $C' = \hat{\gamma}([t_{i-1} - \varepsilon_i, t_i + \varepsilon_i])$ não contém outros cruzamentos de $Im\gamma$ e $Im\hat{\gamma}$.

Sejam $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ números reais, $C_0 = [a_1, a_4] \times \{0\}$ e $C'_0 = C'_{\bar{f}}$, curvas em $\mathbb{R}^2$, sendo

$$\bar{f} : [a_1, a_4] \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável que satisfaz

$$\bar{f}(a_2) = \bar{f}(a_3) = 0,$$

$$\bar{f}(x) > 0, \quad \forall x \in]a_2, a_3[$$

e

$$\bar{f}(x) < 0, \quad \forall x \in [a_1, a_2[\cup]a_3, a_4].$$

E seja

$$\varphi_0 : C_0 \cup C'_0 \longrightarrow C \cup C' \subset M$$

dada por

$$\varphi_0(x, y) = \begin{cases} \gamma \circ \alpha \circ \pi(x, y) & \text{se } (x, y) \in C_0 \\ \hat{\gamma} \circ \alpha \circ \pi(x, y) & \text{se } (x, y) \in C'_0, \end{cases}$$

sendo

$$\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

a projeção $\pi(x, y) = x$ e

$$\alpha : [a_1, a_4] \longrightarrow [0, 1]$$

um difeomorfismo que satisfaz

$$\alpha([a_1, a_2]) = [t_{i-1} - \varepsilon_i, t_{i-1}],$$

$$\alpha([a_3, a_4]) = [t_i, t_i + \varepsilon_i],$$

$$\alpha(a_2) = t_{i-1},$$

e

$$\alpha(a_3) = t_i$$

(a existência deste difeomorfismo é garantida pelo lema 1.6.1).

 Figura 2.19: $\varphi_0 : C_0 \cup C'_0 \longrightarrow C \cup C'$.

Segue que

$$[a_2, a_3] \times \{0\} \cup \{(x, \bar{f}(x)) / x \in [a_2, a_3]\}$$

é o bordo de uma região $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfa ao disco unitário. Vamos verificar que é possível estender φ_0 a um difeomorfismo φ_1 de uma região $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ difeomorfa ao disco unitário em $\varphi_1(D_1) \subset M$, com $D_0 \subset D_1 - \partial D_1$.

Primeiro estenderemos φ_0 a um difeomorfismo

$$\varphi : N_0 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \varphi(N_0) = N \subset M,$$

sendo N_0 uma vizinhança aberta de ∂D_0 em $\mathbb{R}^2$ homeomorfa a um anel.

Os lemas 2.2.1 e 2.2.2 são adaptações para o nosso caso dos lemas 6.7 e 6.8, páginas 73 a 78 de [10].

Lema 2.2.1 *Para alguma vizinhança aberta N_0 de ∂D_0 , homeomorfa a um anel podemos estender $\varphi_0|_{N_0 \cap (C_0 \cup C'_0)}$ a um mergulho $\varphi : N_0 \longrightarrow M$ de modo que $\varphi^{-1}(C) = N_0 \cap C_0$ e $\varphi^{-1}(C') = N_0 \cap C'_0$.*

Demonstração. Demonstraremos no lema 2.1.2 que existe uma métrica riemaniana $\langle, \rangle$ em M satisfazendo:

- (i) na conexão associada C e C' são curvas geodésicas de M ;
- (ii) existem vizinhanças coordenadas N_c e N_d em torno de c e d nas quais a métrica é a métrica euclidiana e de modo que $N_c \cap C, N_c \cap C', N_d \cap C$ e $N_d \cap C'$ são segmentos de reta.

Fixemos uma tal métrica em M e consideremos $\tau(c), \tau(d), \tau'(c), \tau'(d)$ os vetores unitários tangentes aos arcos C e C' (orientados de c a d), em c e d .

Figura 2.20: Os campos $\tau(p), \tau'(p), \tau(q)$ e $\tau'(q)$.

Visto que C é um espaço contrátil, o fibrado sobre ele de vetores ortogonais a C é trivial. Usando este fato, constroi-se um campo de vetores unitários ao longo de C , ortogonal a C e igual ao transporte paralelo de $\tau'(c)$ e de $-\tau'(d)$ ao longo de $N_c \cap C$ e $N_d \cap C$ respectivamente.

Sendo $C \subset M$ uma subvariedade compacta, segue que C tem uma vizinhança tubular $\pi : N_0 \rightarrow C$ em M , a qual é equivalente ao fibrado normal de C em M ¹⁰.

Com efeito, considere a norma $\| \cdot \|$ e a distância $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ induzidas pela métrica riemaniana $\langle, \rangle$ escolhida. Sejam

$$E = \{ \vec{v} / \vec{v} \in T_a M \text{ e } \vec{v} \perp i_*(T_a C) \text{ para algum } a \in C \},$$

$$E_\epsilon = \{ \vec{v} \in E / \|\vec{v}\| < \epsilon \},$$

e

$$U_\epsilon = \{ u \in M / d(u, C) < \epsilon \}$$

¹⁰ver [15], página 9-61 teorema 20

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a aplicação exponencial $\exp$ está definida em E_ε .

Afirmamos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\exp : E_\varepsilon \longrightarrow U_\varepsilon$ é um difeomorfismo.

De fato, seja $V \subset E$ o conjunto dos pontos regulares de $\exp$. Então $V \supset C$ (considerado como um subconjunto de E via seção nula). Visto que $\exp$ é injetora em $C \subset V$, segue do lema 1.1.1 que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a aplicação $\exp$ é injetora e, portanto, é um difeomorfismo de E_ε sobre U_ε ¹¹.

Segue da construção de $\exp$ que $\exp(E_\varepsilon) = U_\varepsilon$, escolhamos $u \in U_\varepsilon$ qualquer e $a \in C$ tal que $d(a, u) < d(x, u)$, $\forall x \in C$. Se $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ é a geodésica de comprimento $< \varepsilon$ com $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = u$, temos que γ é perpendicular a C em a . Isto significa que $u = \exp\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right)$ com $\frac{d\gamma}{dt}(0) \in E_\varepsilon$.

Semelhantemente estenda $\varphi_0|_{C'_0}$ a um mergulho de uma vizinhança de C'_0 usando um campo de vetores unitários ao longo de C'_0 ortogonal a C'_0 , o qual ao longo de $N_c \cap C'$ e $N_d \cap C'$ consiste do transporte paralelo de $\tau(c)$ e $-\tau(d)$ respectivamente, escolhendo $\varepsilon > 0$ de modo que

$$E \cap E' \subset N_c \cup N_d,$$

sendo

$$E = \{\vec{v}/\vec{v} \in T_a M \quad \text{e} \quad \vec{v} \perp i_*(T_a C) \quad \text{para algum } a \in C\}$$

e

$$E' = \{\vec{v}/\vec{v} \in T_a M \quad \text{e} \quad \vec{v} \perp i_*(T_a C') \quad \text{para algum } a \in C'\}.$$

Usando propriedade (ii) da métrica em M , vemos que os mergulhos coincidem em uma vizinhança de $C_0 \cap C'_0$ contida em $N_c \cup N_d$ e portanto definem um mergulho

$$\varphi : V \longrightarrow M,$$

sendo V uma vizinhança aberta de ∂D_0 homeomorfa a um anel, tal que

$$\varphi^{-1}(C) = V \cap C_0$$

e

$$\varphi^{-1}(C') = V \cap C'_0.$$

Pelo lema 1.1.2, podemos tomar φ diferenciável e, como $\varphi|_{C_0 \cup C'_0} = \varphi_0$, é injetora, existe uma vizinhança menor $N_0 \subset \overline{N}_0 \subset V$ de $C_0 \cup C'_0$ tal que $\varphi|_{N_0}$ é injetora, pelo lema 1.1.1.

Como $\overline{N}_0$ é compacto, $\varphi|_{N_0} : N_0 \longrightarrow \varphi(N_0) = N$ é um difeomorfismo.

¹¹Lembremos que $\exp_a$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de $0 \in T_a M$.

Lema 2.2.2 *Existe uma métrica riemaniana em M tal que*

- (i) *Na conexão associada C e C' são curvas geodésicas de M ;*
- (ii) *Existem vizinhanças coordenadas N_c e N_d em torno de c e d respectivamente, nas quais a métrica é a métrica euclidiana e de modo que $N_c \cap C, N_c \cap C', N_d \cap C$ e $N_d \cap C'$ são segmentos de reta.*

Demonstração. Sabemos que C e C' se cruzam transversalmente nos pontos c e d . Sejam $(W_1, h_1), \dots, (W_m, h_m)$ sistemas de coordenadas locais em M tais que

- (i) $C \cup C' \subset \bigcup_{i=1}^m W_i$, $c \in W_1$, $d \in W_2$, $c \notin W_i, i \neq 1$, $d \notin W_j, j \neq 2$,
- (ii) Existem vizinhanças coordenadas disjuntas N_c e N_d de c e d respectivamente, com

$$N_c \subset \overline{N}_c \subset W_1,$$

$$N_d \subset \overline{N}_d \subset W_2,$$

$$N_c \cap W_j = \emptyset, \quad j = 2, \dots, m,$$

e

$$N_d \cap W_j = \emptyset, \quad j = 3, \dots, m;$$

(iii)

$$h_i(W_i \cap C) \subset \mathbb{R} \times 0$$

e

$$h_i(W_i \cap C') \subset 0 \times \mathbb{R}, \quad i = 1, 2$$

são segmentos de reta.

Sejam $(\xi_i)_{1 \leq i \leq m}$ uma partição da unidade subordinada ao recobrimento $(W_i)_{1 \leq i \leq m}$ de $C \cup C'$ e

$$\langle, \rangle = \sum_{i=1}^m \xi_i \langle, \rangle_i$$

a métrica riemaniana em $W_0 = W_1 \cup \dots \cup W_m$ obtida colando as métricas $\langle, \rangle_i$ em W_i induzidas por h_i , $i = 1, \dots, m$.

Observe que, devido a (ii), esta métrica é a euclidiana em N_c e N_d .

Com esta métrica construímos vizinhanças tubulares abertas T e T' de C e C' em W_0 usando a aplicação exponencial.

Escolhendo-as suficientemente pequenas, podemos assumir que

$$T \cap T' \subset N_c \cup N_d$$

e que

$$h_1(T \cap T' \cap N_c) =] - \varepsilon, \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}^2$$

e

$$h_2(T \cap T' \cap N_d) =] - \varepsilon, \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}^2,$$

para algum $\varepsilon > 0$.

Seja $A : T \rightarrow T$ a involução diferenciável ($A^2 = A \circ A = Id$), que é a aplicação antípoda em cada fibra de T . Defina uma nova métrica riemanniana $\langle, \rangle_A$ em T por

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_A = \frac{1}{2}(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle A_*\vec{v}, A_*\vec{w} \rangle).$$

É imediato que, com respeito a métrica $\langle, \rangle_A$, (ii) e (iii) se verificam. Verifiquemos, então, (i):

$$\begin{aligned} \langle A_*\vec{v}, A_*\vec{w} \rangle_A &= \frac{1}{2}(\langle A_*\vec{v}, A_*\vec{w} \rangle + \langle A_*^2\vec{v}, A_*^2\vec{w} \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle A_*\vec{v}, A_*\vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) \\ &= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_A, \end{aligned}$$

logo A é uma isometria, e portanto leva geodésicas em geodésicas.

Seja ω uma geodésica em T tangente a C em algum ponto $z \in C$. Visto que $A(x) = x$, $\forall x \in C$, segue que $A(\omega)$ e ω são geodésicas com o mesmo vetor tangente em $A(z) = z$. Pela unicidade das geodésicas, A é a identidade em ω . Portanto $\omega \subset C$, o que prova que C é uma curva geodésica de T .

Semelhantemente defina uma nova métrica $\langle, \rangle_{A'}$ em T' . Segue da propriedade (ii) e da forma de $T \cap T'$, que as métricas $\langle, \rangle_A$ e $\langle, \rangle_{A'}$ coincidem com a métrica euclidiana em $T \cap T'$ e portanto juntas definem uma métrica em $T \cup T'$. Estendendo para M a restrição desta métrica a um conjunto aberto O , com

$$C \cup C' \subset O \subset \overline{O} \subset T \cup T',$$

obtemos uma métrica em M satisfazendo (i), (ii) e (iii).

□

Vamos, agora, estender

$$\varphi|_{N_0} : N_0 \rightarrow N = \varphi(N_0) \subset M$$

a um difeomorfismo

$$\varphi_1 : D_1 \rightarrow D = \varphi(D_1) \subset M,$$

sendo D_1 difeomorfo ao disco unitário, com $D_0 \subset \overset{\circ}{D}_1$. (lembramos que $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ é o disco limitado por $C_0 \cup C'_0$)

Sejam

$$0 < r_0 < r_2,$$

$$A'_1 = \{(x, y)/r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\},$$

$$S'_0 = \{(x, y)/x^2 + y^2 = r_0^2\},$$

$$S'_2 = \{(x, y)/x^2 + y^2 = r_2^2\}$$

e

$$N'_0 = \{(x, y)/(r_0 - \varepsilon)^2 < x^2 + y^2 < (r_2 + \varepsilon)^2\},$$

sendo $\varepsilon > 0$ tal que $r_0 - \varepsilon > 0$.

Pelo teorema de classificação das superfícies ¹², existe um difeomorfismo $\eta_1 : N'_0 \rightarrow \eta_1(N'_0) \subset N_0$. Podemos supor que $\partial D_0 \subset \eta_1(N'_0)$, $\eta_1^{-1}(\partial D_0) \subset B(0, r_2)$, $\eta_1(S'_0) \subset \overset{\circ}{D}_0$ e que existe $r_1 > 0$ de modo que $r_0 < r_1 < r_2$ e o conjunto $S'_1 = \{(x, y)/x^2 + y^2 = r_1^2\}$ esteja contido em $\eta_1^{-1}(N_0)$ e no interior da região limitada por $\eta_1^{-1}(C_0 \cap N_0) \cup \eta_1^{-1}(C'_0 \cap N_0)$.

Figura 2.21: O aberto $\eta_1(N'_0)$.

Sejam

$$S_0 = \eta_1(S'_0),$$

$$S_1 = \eta_1(S'_1)$$

e

$$S_2 = \eta_1(S'_2).$$

Denotemos por η o difeomorfismo $\eta_1|_{A'_1} : A'_1 \rightarrow A_1 = \eta_1(A'_1)$ ¹³.

¹²ver [17].

¹³ver fig. 2.22.

 Figura 2.22: Curvas S_0, S_1 e S_2 .

Observe-se que S_1 é o bordo de um disco $B_1 \subset \overset{\circ}{D}_0$ e, pelo teorema de classificação das superfícies ¹⁴, existe um difeomorfismo

$$h : B'_1 \longrightarrow B_1,$$

sendo B'_1 o disco de raio r_1 e centro $(0, 0)$.

A aplicação $\varphi|_{S_1} : S_1 \longrightarrow M$ é um difeomorfismo na imagem $S = \varphi(S_1) \subset A = \varphi(A_1)$, $S \cap (C \cup C') = \emptyset$ (pois $S_1 \cap (C_0 \cup C'_0) = \emptyset$) e existe um difeomorfismo $k : B'_1 \longrightarrow D \subset M$, sendo $\partial D = S$ (pois sendo C homotópica a C' , segue que S é homotópica a zero).

Temos, até aqui, difeomorfismos:

$$\varphi : A_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \varphi(A_1) = A \subset M,$$

$$h : B'_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow B_1 \subset \mathbb{R}^2,$$

$$k : B'_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset M,$$

$$\eta : A'_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow A_1 \subset \mathbb{R}^2,$$

satisfazendo:

$$h(S'_2) = S_1,$$

$$k(S'_2) = S,$$

$$\eta(S'_1) = S_1,$$

$$\eta(S'_2) = S_2,$$

e

$$\eta(S'_0) = S_0$$

 Figura 2.23: O difeomorfismo η

Definimos uma relação de equivalência $\sim$ em $(A'_1 - S'_0) \cup \overset{\circ}{B}_1$ pondo

$$p \in (A'_1 - S'_0) \sim q \in \overset{\circ}{B}_1 \iff q = h^{-1}(\eta(p)).$$

Seja $\overline{B} = (A'_1 - S'_0) \cup_{h^{-1} \circ \eta} \overset{\circ}{B}_1$, isto é, $\overline{B} = ((A'_1 - S'_0) \dot{\cup} \overset{\circ}{B}_1) / \sim$

Pelo teorema 1.3.7, existe uma estrutura diferenciável em $\overline{B}$, tal que as inclusões naturais

$$j_0 : (A'_1 - S'_0) \longrightarrow \overline{B},$$

e

$$j'_0 : \overset{\circ}{B}_1 \longrightarrow \overline{B}$$

são difeomorfismos na imagem, e

$$j_0'^{-1} \circ j_0 = h^{-1} \circ \eta.$$

A função

$$H : \overline{B} \longrightarrow (A_1 - S_0) \cup \overset{\circ}{B}_0 = U$$

definida por

¹⁴ver [17].

$$H(p) = \begin{cases} \eta(j_0^{-1}(p)) & \text{se } p \in j_0(A'_1) \text{ e } r_1 < |j_0^{-1}(p)| \leq r_2 \\ h(j_0'^{-1}(p)) & \text{se } p \in j_0'(\overset{\circ}{B}_1) \end{cases}$$

é um difeomorfismo, porque se

$$p \in j_0((A'_1 - S'_0)) \cap j_0'(\overset{\circ}{B}_1),$$

então $p = j_0(a) = j_0'(b)$ para algum $a \in (A'_1 - S'_0)$ e algum $b \in \overset{\circ}{B}_1$, e, portanto

$$b = j_0'^{-1} \circ j_0(a) = h^{-1} \circ \eta(a),$$

ou seja,

$$h(j_0'^{-1}(p)) = \eta(j_0^{-1}(p))$$

Por outro lado, seja

$$D_2 = (A'_1 - S'_0) \cup \overset{\circ}{B}_1$$

o disco aberto no $\mathbb{R}^2$ de raio r_2 e centro $(0,0)$. A aplicação

$$\mu : D^2 \longrightarrow \overline{B}$$

definida por:

$$\mu(x) = \begin{cases} j_0(x), & \text{se } x \in (A'_1 - S'_0) \\ j_0'(h^{-1}(\eta(x))), & \text{se } x \in \overset{\circ}{B}_1, \end{cases}$$

é um difeomorfismo, porque se $x \in (A'_1 - S'_0) \cap \overset{\circ}{B}_1$,

$$j_0(x) = j' \circ (h^{-1} \circ \eta(x)),$$

uma vez que $j_0^{-1} \circ j_0(x) = h^{-1} \circ \eta(x)$.

Analogamente, se $B = (A'_1 - S'_0) \cup_{k^{-1} \circ \varphi \circ \eta} \overset{\circ}{B}_1$ com a estrutura diferenciável dada por 1.3.7, as inclusões naturais

$$j : (A'_1 - S'_0) \longrightarrow \overset{\circ}{B}$$

e

$$j' : \overset{\circ}{B}_1 \longrightarrow \overset{\circ}{B}$$

são difeomorfismos na imagem e

$$j'^{-1} \circ j = k^{-1} \circ \varphi \circ \eta.$$

Se

$$K : \overset{\circ}{B} \longrightarrow D \cup \varphi(A_1 - S_0)$$

é dada por

$$K(p) = \begin{cases} \varphi \circ \eta(j^{-1}(p)) & \text{se } p \in j((A'_1 - S'_0)) \text{ e } r_1 < |j^{-1}(p)| \leq r_2 \\ k(j'^{-1}(p)) & \text{se } p \in j'(\overset{\circ}{B}_1) \end{cases}$$

então K é um difeomorfismo.

Figura 2.24: O difeomorfismo K

Se $p \in j_0(A'_1 - S'_0) \cap j'_0(\overset{\circ}{B}_1)$, então

$$p = j_0(a) = j'_0(b),$$

para algum $a \in (A'_1 - S'_0)$, e algum $b \in \overset{\circ}{B}_1$. Logo

$$b = k^{-1} \circ \varphi \circ \eta(a)$$

e

$$k(b) = \varphi \circ \eta(a),$$

ou seja,

$$k(j_0'^{-1}(p)) = \varphi \circ \eta(j_0^{-1}(p)).$$

Do mesmo modo, a aplicação

$$\nu : D_2 \longrightarrow \overset{\circ}{B},$$

dada por:

$$\nu(x) = \begin{cases} j(a) & \text{se } x \in (A'_1 - S'_0) \\ j'(k^{-1}(\varphi \circ \eta(x))), & \text{se } x \in \overset{\circ}{B}_1 \end{cases}$$

é um difeomorfismo, pois se $x \in (A'_1 - S'_0) \cap \overset{\circ}{B}_1$, então $j(x) = j'(k^{-1}(\varphi \circ \eta(x)))$.
Segue que a aplicação

$$\varphi_1 : D_1 = (A_1 - S_0) \cup \overset{\circ}{B}_0 \longrightarrow M,$$

dada por

$$\varphi_1 = K \circ \nu \circ \mu^{-1} \circ H^{-1}$$

é um difeomorfismo de D_1 em $\varphi_1(D_1)$, tal que

$$\varphi_1|_{(A_1 - S_0)} = \varphi,$$

logo $\varphi_1(C_0) = C$, e $\varphi_1(C'_0) = C'$.

De fato,

$$\begin{aligned} H^{-1}(A_1 - S_0) &= j_0 \circ \eta^{-1}(A_1 - S_0) \\ &= j_0(A'_1 - S'_0) \end{aligned}$$

e, em $j_0(A'_1 - S'_0)$,

$$\nu \circ \mu^{-1} = j \circ j_0^{-1},$$

logo

$$\begin{aligned} K \circ \nu \circ \mu^{-1} \circ H^{-1}|_{A_1 - S_0} &= K \circ j \circ (H \circ j_0)^{-1}|_{A_1 - S_0} \\ &= \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1}|_{A_1 - S_0} \\ &= \varphi|_{A_1 - S_0}. \end{aligned}$$

Construiremos, agora, uma difeotopia de M que elimina as duas interseções transversais entre C e C' .

Seja

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável, satisfazendo:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha(t) = \frac{1}{4} & \text{se } |t| \leq 1, \\ \alpha(t) = 0 & \text{se } |t| \geq 2, \\ \alpha'(t) > 0 & \text{se } -2 < t < -1 \\ \text{e} \\ \alpha'(t) < 0 & \text{se } 1 < t < 2 \end{cases}$$

Se

$$K = \max_{t \in \mathbb{R}} |\alpha'(t)|,$$

então dado $r > 0$ é fácil ver que a função $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\beta(t) = \alpha\left(\frac{t}{r}\right)$$

é diferenciável e satisfaz:

$$(2) \quad \begin{cases} \beta(t) = 1 & \text{se } |t| \leq r, \\ \beta(t) = 0 & \text{se } |t| \geq 2r, \\ \beta'(t) > 0 & \text{se } -2r < t < -r, \\ \beta'(t) < 0 & \text{se } r < t < 2r \\ \text{e} \\ |\beta'(t)| < \frac{K}{r} & \forall t. \end{cases}$$

Tomemos $r \geq 1$ de modo a obter $|\beta'(t)| < 1$, $\forall t$. Suponhamos que $|\bar{f}(x)| < \min\{(\frac{3}{20})^2, r\}$, $\forall x \in [a_1, a_4]$ ¹⁵, identifiquemos $[a_1, a_4]$ com $[-2, 2]$ e $[a_2, a_3]$ com $[-1, 1]$.

¹⁵ $\bar{f}$ está definida no início de 2.1.

A aplicação

$$G : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definida por

$$(3) \quad G_t(x, y) = (x, y - 2t\alpha(x)\beta(y)(\frac{1}{4}\alpha(x) + \bar{f}(x)))$$

é uma difeotopia do $\mathbb{R}^2$ satisfazendo ¹⁶

$$G_t(x, y) = (x, y) \text{ se } |x| \geq 2 \text{ ou } |y| \geq 2r,$$

e

$$G_1(x, \bar{f}(x)) = (x, \bar{f}_1(x)),$$

sendo $\bar{f}_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{f}_1(x) = (1 - 2\alpha(x))\bar{f}(x) - \frac{1}{2}(\alpha(x))^2.$$

Resolvendo a equação do segundo grau em $\alpha(x)$

$$\frac{1}{2}(\alpha(x))^2 + 2\alpha(x)\bar{f}(x) - \bar{f}(x) = 0,$$

vemos que

$$\bar{f}_1(x) = 0 \text{ se, e somente se, } \alpha(x) = -2\bar{f}(x) \pm \sqrt{4(\bar{f}(x))^2 + 2\bar{f}(x)}. \quad (*)$$

Vamos verificar que $\alpha(x) \neq -2\bar{f}(x) \pm \sqrt{4(\bar{f}(x))^2 + 2\bar{f}(x)} \quad \forall x \in [-2, 2]$:

Em primeiro lugar, devemos ter

$$4(\bar{f}(x))^2 + 2\bar{f}(x) \geq 0.$$

Se $-2 \leq x < -1$ ou $1 < x \leq 2$, então

$$\bar{f}(x) < 0$$

e

$$4(\bar{f}(x))^2 + 2\bar{f}(x) = (4\bar{f}(x) + 2)\bar{f}(x) < 0,$$

pois $4\bar{f}(x) + 2 > 4(-(\frac{3}{20})^2) + 2 > 0$.

Logo devemos procurar soluções para a igualdade (*) no intervalo $[-1, 1]$. Temos:

¹⁶A verificação de que G_t é um difeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$ fica simples se usamos que G_t é bijetora e diferenciável. Para verificar que G_t é injetora, basta observar que $g(y) = y - 2t\alpha(x)\beta(y)(\frac{1}{4}\alpha(x) + \bar{f}(x))$ é estritamente crescente, calculando sua derivada e usando que $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \alpha(x) \leq \frac{1}{4}$ e $\beta'(y) < 1$, $\forall y$.

(1) Se $x = \pm 1$, então $-2\bar{f}(x) \pm \sqrt{4(\bar{f}(x))^2 + 2\bar{f}(x)} = 0 \neq \alpha(x) = \frac{1}{4}$,

(2) $-2\bar{f}(x) - \sqrt{4(\bar{f}(x))^2 + 2\bar{f}(x)} < 0$, $\forall x \in]-1, 1[$, logo

$$\alpha(x) \neq -2\bar{f}(x) - \sqrt{4(\bar{f}(x))^2 + 2\bar{f}(x)} \quad \forall x \in]-1, 1[,$$

(3)

$$\begin{aligned} -2\bar{f}(x) + \sqrt{4(\bar{f}(x))^2 + 2\bar{f}(x)} &= -2\bar{f}(x) + \sqrt{\bar{f}(x)}\sqrt{4\bar{f}(x) + 2} \\ &= \sqrt{\bar{f}(x)}(-2\sqrt{\bar{f}(x)} + \sqrt{4\bar{f}(x) + 2}) \\ &< \sqrt{\bar{f}(x)}\sqrt{4\bar{f}(x) + 2} \\ &< \sqrt{\bar{f}(x)}\sqrt{4\left(\frac{3}{20}\right)^2 + 2} \\ &= \sqrt{\bar{f}(x)}\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + 2} \\ &= \frac{\sqrt{209}}{10}\sqrt{\bar{f}(x)} \\ &< \frac{\sqrt{209}}{10} \frac{3}{20} \\ &< \frac{1}{4} \\ &= \alpha(x), \quad \forall x \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Resumindo, temos que

$$\bar{f}_1(x) \neq 0, \quad \forall x \in [-2, 2]$$

e

$$\bar{f}_1(x) = \bar{f}(x) \text{ se } |x| \geq 2.$$

Logo

$$G_1(D_1 \cap C'_0) \cap C_0 = \emptyset$$

ou seja, G é uma difeotopia que elimina as duas interseções transversais entre C_0 e C'_0 .

Através de um difeomorfismo do $\mathbb{R}^2$, podemos supor que

$$\overset{\circ}{D}_0 \subset [-2, 2] \times [-2r, 2r] \subset \overset{\circ}{D}_1.$$

Segue que a aplicação

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow M,$$

definida por

$$F_t(\omega) = \begin{cases} \varphi \circ G_t \circ \varphi^{-1}(\omega) & \text{se } \omega \in D = \varphi(D_1) \\ \omega & \text{se } \omega \in M - D \end{cases}$$

é uma difeotopia de M que elimina duas interseções transversais de $\gamma([0, 1]) \cap \tilde{\gamma}([0, 1])$.

Figura 2.25: Eliminação de duas interseções transversais de $\gamma([0, 1]) \cap \tilde{\gamma}([0, 1])$.

Após repetir este procedimento um número finito de vezes, chegaremos a uma das situações abaixo:

- (i) $Im\gamma$ cruza $Im\tilde{\gamma}$ transversalmente em apenas um ponto;

Figura 2.26: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$.

- (ii) γ e $\tilde{\gamma}$ não possuem interseção transversal.

Figura 2.27: $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$.

Caso ocorra (i) ¹⁷, tomemos números reais $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ e consideremos uma função

$$\bar{f}_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

¹⁷O caso (ii) será analisada em 2.3 .

diferenciável, com

$$|\bar{f}_2(x)| < \min\left\{\frac{1}{2}, r\right\}, \quad \forall x \in [a_1, a_5],$$

$$\bar{f}_2(x) = 0 \text{ se } x \leq a_2 \text{ ou } x \geq a_4,$$

$$\bar{f}_2(x) > 0 \text{ se } x \in]a_2, a_3[,$$

e

$$\bar{f}_2(x) < 0 \text{ se } x \in]a_3, a_4[.$$

Seja U uma vizinhança coordenada de $a_0 = \gamma(\varepsilon_0) = \tilde{\gamma}(\varepsilon_0)$ em M , com difeomorfismo coordenado

$$\psi : U \longrightarrow B_{\bar{r}},$$

sendo $B_{\bar{r}} \subset \mathbb{R}^2$ um disco de centro em $(-1, 0)$ e raio $\bar{r} < \min\{a_2 - a_1, a_3 - a_2\}$. Observe-se que $B_{\bar{r}} \cap (C_0 \cup C'_0)$ não contém a interseção transversal de $C_0 \cap C'_0$, onde $C_0 = [a_1, a_5] \times \{0\}$ e $C'_0 = G_{\tilde{f}_2}$. Suponhamos que $\psi(U \cap \text{Im} \gamma) = C_0$ e $\psi(U \cap \text{Im} \tilde{\gamma}) = C'_0$.

Seja

$$G : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

a difeotopia dada por ¹⁸

$$G_t(x, y) = (x, y - 2t\alpha_1(x)\beta(y)\bar{f}_2(x)),$$

onde $\alpha_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que satisfaz

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = 1 & \text{se } a_2 - r_1 \leq x \leq a_2 + r_1 \\ \alpha_1(t) = 0 & \text{se } x \leq a_2 - 2r_1 \text{ ou } x \geq a_2 + 2r_1 \\ \alpha'_1(t) > 0 & \text{se } a_2 - 2r_1 < x < a_2 - r_1 \\ \alpha'_1(t) < 0 & \text{se } a_2 + r_1 < x < a_2 + 2r_1 \end{cases}$$

sendo $r_1 > 0$ tal que $a_1 < a_2 - 2r_1$ e $a_3 > a_2 + 2r_1$.

Temos que

$$G_t(x, y) = (x, y) \text{ se } |x| \geq 2 \text{ ou } |y| \geq 2r,$$

A menos de um difeomorfismo, podemos considerar

$$[a_2 - 2r_1, a_2 + 2r_1] \times [-2r, 2r] \subset B_{\bar{r}}. \quad (**)$$

¹⁸Para verificar que G_t é difeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$, basta observar que $g(y) = y - 2t\alpha(x)\beta(y)\bar{f}_1(x)$ é injetora.

Segue que a aplicação G_1 leva o gráfico de $\bar{f}_2$ no gráfico da função

$$\bar{f}_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\bar{f}_3(x) = [1 - 2\alpha(x)]\bar{f}_2(x),$$

que satisfaz:¹⁹

$$\bar{f}_3(x) = \bar{f}_2(x) \text{ se } x \leq a_2 \text{ ou } x \geq a_2 + 2r_1,$$

$$\bar{f}_3(x) < 0 \text{ se } a_2 < x < a_2 + r_1,$$

e no intervalo $]a_2 + r_1, a_2 + 2r_1[$, temos que

$$\bar{f}_3(x) = 0 \text{ se, e somente se, } \alpha(x) = \frac{1}{2}.$$

Sendo $\alpha|_{[a_2+r_1, a_2+2r_1]}$ estritamente decrescente com $\alpha(a_2+r_1) = 1$ e $\alpha(a_2+2r_1) = 0$, temos a existência de exatamente um ponto $\bar{x} \in]a_2 + r_1, a_2 + 2r_1[$ tal que $\alpha(\bar{x}) = \frac{1}{2}$. Portanto o gráfico de $\bar{f}_2$ cruza $]a_2, a_4[\times\{0\}$ em apenas 2 pontos, $\bar{x}$ e a_3 .

Segue das observações acima e do fato de

$$G_1(x, \bar{f}_2(x)) = (x, \bar{f}_2(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} - [a_2 - 2r_1, a_2 + 2r_1]$$

que a difeotopia

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

definida por

$$F_t(\omega) = \begin{cases} \psi^{-1} \circ G_t \circ \psi(\omega) & \text{se } \omega \in U \\ \omega & \text{se } \omega \in M - U \end{cases}$$

acrescenta exatamente uma interseção transversal a $\gamma([0, 1]) \cap \tilde{\gamma}([0, 1])$.

Eliminando as duas interseções transversais, assim obtidas, pelo procedimento visto anteriormente, chegamos ao caso (ii), a saber, γ e $\tilde{\gamma}$ não possuem interseção transversal.

2.3 Uma Difeotopia de M entre Curvas sem Interseção Transversal

Suponhamos que $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow M$ sejam curvas regulares, simples e homotópicas, satisfazendo:

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t), \quad \forall t \in [0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1],$$

¹⁹Observemos que na construção de β estamos supondo $r \geq 1$, logo $\beta(\bar{f}_2(x)) = 1 \quad \forall x \quad (\text{pois } |\bar{f}_2(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x)$.

$$\gamma(\varepsilon_0) = \tilde{\gamma}(\varepsilon_0) = a_0 \neq a_1 = \gamma(\varepsilon_1) = \tilde{\gamma}(\varepsilon_1),$$

e

$$\gamma(t) \neq \tilde{\gamma}(t), \quad \forall t \in]\varepsilon_0, \varepsilon_1[.$$

Seja

$$\bar{f}_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável, tal que

$$\bar{f}_4(x) = 0 \text{ se } x \leq \varepsilon_0 \text{ ou } x \geq 5$$

e

$$0 < \bar{f}_4(x) < \min\left\{r, \frac{1}{2}\right\} \text{ se } \varepsilon_0 < x < 5.$$

Sejam (U_0, φ_0) e (U_1, φ_1) sistemas de coordenadas locais em torno de a_0 e a_1 , respectivamente, tais que

$$\varphi_0(a_0) = (\varepsilon_0, 0),$$

$$\varphi_1(a_1) = (5, 0)$$

e

$$\overline{\varphi_0(U_0)} \cap \overline{\varphi_1(U_1)} = \emptyset.$$

Podemos supor que existem retângulos

$$R_1 = [r_1, r_2] \times [-2r, 2r]$$

e

$$R_2 = [r_3, r_4] \times [-2r, 2r]$$

tais que

$$R_1 \subset \varphi_0(U_0),$$

e

$$R_2 \subset \varphi_1(U_1),$$

sendo $r_1 < 0 < r_2$ e $r_3 < 5 < r_4$.

Através de um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ podemos identificar $[r_1, r_2] \times [-2r, 2r]$ com $[-2, 2] \times [-2r, 2r]$. Consideremos a difeotopia

$$G : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$G_t(x, y) = (x, y - 2t\alpha(x)\beta(y)\bar{f}_4(x)).$$

Temos que

$$G_t(x, y) = (x, y) \text{ se } |x| \geq 2 \text{ ou } |y| \geq 2r$$

e a aplicação $G_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ leva o gráfico de $\bar{f}_4$ no gráfico da função $\bar{f}_5$ dada por

$$\bar{f}_5(x) = (1 - 2\alpha(x))\bar{f}_4(x).$$

Sendo α estritamente decrescente em $[1, 2]$ com $\alpha(1) = 1$ e $\alpha(2) = 0$, existe exatamente um ponto $\bar{x}_1 \in]1, 2[$ tal que $\bar{f}_5(\bar{x}_1) = 0$. Logo a difeotopia

$$\bar{G} : M \times [0, 1] \longrightarrow M,$$

dada por

$$\bar{G}(\omega, t) = \begin{cases} \varphi_0^{-1} \circ G_t \circ \varphi_0(\omega) & \text{se } \omega \in U_0, \\ \omega & \text{se } \omega \in M - U_0. \end{cases}$$

leva a curva $\tilde{\gamma}$ em uma curva $\tilde{\gamma}_1$ tal que $Im\tilde{\gamma}_1$ cruza $Im\gamma$ transversalmente em apenas um ponto.

Raciocinando de forma análoga, construímos uma difeotopia $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que leva o gráfico de $\bar{f}_5$ no gráfico de uma função $\bar{f}_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz²⁰

$$\bar{f}_6(x) = 0 \text{ se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 5,$$

$$\bar{f}_6(x) < 0 \text{ se } 0 < x < \bar{x}_1 \text{ ou } \bar{x}_2 < x < 5,$$

$$\bar{f}_6(x) > 0 \text{ se } \bar{x}_1 < x < \bar{x}_2,$$

para algum $\bar{x}_2$, com $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < 5$, sendo que H_t é a identidade em $M - (R_1 \cup R_2)$.

Figura 2.28: Gráfico de $\bar{f}_6$.

²⁰Ver figura 2.28.

Logo

$$\overline{H} : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

dada por

$$\overline{H}(\omega, t) = \begin{cases} \varphi_1^{-1} \circ H_t \circ \varphi_1(\omega) & \text{se } \omega \in U_1, \\ \omega & \text{se } \omega \in M - U_1 \end{cases}$$

é uma difeotopia de M que leva a curva $\tilde{\gamma}_1$ em uma curva $\tilde{\gamma}_2$ que coincide com γ em $[0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]$ e tal que $Im\tilde{\gamma}_2$ cruza $Im\gamma$ transversalmente em exatamente dois pontos, $\gamma(\bar{t}_1) \in U_0$ e $\gamma(\bar{t}_2) \in U_1$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{x}_1 - \varepsilon > 0$ e $\bar{x}_2 + \varepsilon < 5$.

Os resultados de 2.1 garantem a existência de um conjunto $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ difeomorfo ao disco unitário tal que a região D_0 limitada por

$$C_0 = \{(x, 0)/x \in [\bar{x}_1 - \varepsilon, \bar{x}_2 + \varepsilon]\}$$

e por

$$C'_0 = \{(x, \bar{f}_2(x))/x \in [\bar{x}_1 - \varepsilon, \bar{x}_2 + \varepsilon]\}$$

está contida em seu interior, e um difeomorfismo

$$h : D_1 \longrightarrow D = h(D_1) \subset M$$

tal que

$$\gamma([\bar{x}_1 - \varepsilon, \bar{x}_2 + \varepsilon]) \cup \tilde{\gamma}([\bar{x}_1 - \varepsilon, \bar{x}_2 + \varepsilon]) \subset \overset{\circ}{D}.$$

Além disso, a existência de uma difeotopia

$$G : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que

$$G_t(x, y) = (x, y) \text{ se } (x, y) \notin K_1,$$

sendo $K_1 \subset \overset{\circ}{D}_1$ um compacto que contém D_0 em seu interior e G_1 leva o gráfico de $\bar{f}_6$ no gráfico de uma função $\bar{f}_7$ que satisfaz

$$\bar{f}_7(x) = 0 \text{ se } x \leq \varepsilon_0 \text{ ou } x \geq 5,$$

$$\bar{f}_7(x) < 0 \text{ se } \varepsilon_0 < x < 5$$

e

$$|\bar{f}_7(x)| < \min\{r, \frac{1}{2}\}$$

Figura 2.29: Gráfico de $\bar{f}_7$.

A aplicação $F : M \times [0, 1] \longrightarrow M$ dada por

$$F(\omega, t) = \begin{cases} h \circ G \circ h^{-1}(\omega) & \text{se } \omega \in D \\ \omega & \text{se } \omega \in M - D \end{cases}$$

fornece uma difeotopia de M que leva $\tilde{\gamma}_2$ em uma curva $\tilde{\gamma}_3$ que coincide com γ em $[0, \varepsilon_0] \cup [\varepsilon_1, 1]$ e tal que $\tilde{\gamma}_3(t) \neq \gamma(t)$ se $\varepsilon_0 < t < \varepsilon_1$.

Seja $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que satisfaz

$$\begin{cases} \delta(t) = 1 & \text{se } t \leq \bar{x}_1, \\ \delta(t) = 0 & \text{se } t \geq \bar{x}_1 + \varepsilon, \\ & \text{e} \\ \delta'(t) < 0 & \text{se } \bar{x}_1 < t < \bar{x}_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Consideremos a difeotopia $K : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$K_t(x, y) = (x, y - t\delta(x)\beta(y)\bar{f}_7(x))$$

e suponhamos que $\bar{x}_1 = 1$.

Temos que K_1 leva o gráfico de $\bar{f}_7$ no gráfico de uma função $\bar{f}_8$ tal que

$$\bar{f}_8(x) = 0 \text{ se } x \leq \bar{x}_1 \text{ ou } x \geq 5,$$

$$\bar{f}_8(x) > 0 \text{ se } x \in]\bar{x}_1, \bar{x}_2[$$

$$\bar{f}_8(x) < 0 \text{ se } x \in]\bar{x}_2, 5[$$

Figura 2.30: Gráfico de $\bar{f}_8$.

A aplicação $\bar{K} : M \times [0, 1] \rightarrow M$ dada por

$$\bar{K}(\omega, t) = \begin{cases} \varphi_0^{-1} \circ K_t \circ \varphi_0(\omega) & \text{se } \omega \in U_0, \\ \varphi_1^{-1} \circ K_t \circ \varphi_1(\omega) & \text{se } \omega \in U_1, \\ \omega & \text{se } \omega \in M - (U_0 \cup U_1) \end{cases}$$

é uma difeotopia de M que leva $\tilde{\gamma}_2$ em uma curva $\tilde{\gamma}_3$ que coincide com γ em $[-\varepsilon, \bar{t}_1]$ e em $[1, 1 + \varepsilon]$.

Analogamente, constroi-se uma difeotopia do $\mathbb{R}^2$ que leva o gráfico de $\bar{f}_8$ no gráfico de uma função $\bar{f}_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\bar{f}_9(x) = 0 \text{ se } x \leq \bar{x}_1 \text{ ou } x \geq \bar{x}_2,$$

$$\bar{f}_9(x) < 0 \text{ se } \bar{x}_1 < x < \bar{x}_2$$

e uma difeotopia de M que leva $\tilde{\gamma}_3$ em uma curva $\tilde{\gamma}_4$ que coincide com γ em $[0, \bar{t}_1] \cup [\bar{t}_2, 1]$ e tal que $\tilde{\gamma}_3(t) \neq \gamma(t)$ se $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2$.

Observe-se que $|\bar{f}_9(x)| < 1$ e o conjunto limitado por

$$C_0 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2] \times \{0\}$$

e

$$C'_0 = \{(x, \bar{f}_9(x)) / x \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2]\}$$

está contido em D_1 .

Temos, portanto, uma difeotopia

$$\overline{F} : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

dada por

$$\overline{F}(\omega, t) = \begin{cases} h_0^1 \circ F_t \circ h_0(\omega) & \text{se } \omega \in D \\ \omega & \text{se } \omega \in M - D \end{cases}$$

sendo $F : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a difeotopia dada por

$$F_t(x, y) = (x, 1 - t\delta_1(x)\beta(y)\overline{f}_9(x)),$$

onde $\delta_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que satisfaz

$$\begin{cases} \delta_1(t) = 1 & \text{se } t \leq \bar{x}_2, \\ \delta_1(t) = 0 & \text{se } t \geq 5 \\ \text{e} \\ \delta_1'(t) < 0 & \text{se } \bar{x}_2 < t < 5 \end{cases}$$

Verifica-se facilmente que $\overline{F}$ leva $\hat{\gamma}_4$ em γ .

Capítulo 3

O Teorema Principal

Neste capítulo, demonstraremos o teorema principal. Denotaremos por M uma variedade diferenciável conexa, compacta, orientada, sem bordo e de dimensão dois. Sendo p um ponto crítico de uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com valor crítico correspondente $c = f(p)$, denotaremos por $V(f, p)$ a componente conexa de $f^{-1}(c)$ que contém p .

3.1 Funções Estável-Equivalentes

Observemos que, se $F : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma aplicação contínua tal que $F_0 = f$ e $F_1 = g$ sejam diferenciáveis, existirá $G : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $G(x, 0) = f(x)$ e $G(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in M$. Basta notar que F é diferenciável no fechado $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$ e aplicar o lema 1.1.2.

Definição 3.1.1 *Sejam $f, g \in \mathcal{F}_0(M)$. Dizemos que f e g são estável-equivalentes, se estão na mesma componente conexa de $\mathcal{F}_0(M)$. Isto significa que existe uma aplicação diferenciável $F : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_0 = f$, $F_1 = g$ e $F_t \in \mathcal{F}_0(M)$, $\forall t \in [0, 1]$, a qual chamaremos de estável-homotopia.*

Sejam $f, g \in \mathcal{F}_0(M)$ com $f \sim g$, e sejam $h : M \rightarrow M$ e $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ difeomorfismos que tornam o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

comutativo, isto é, $g = k \circ f \circ h^{-1}$.

Observe-se que, sendo M compacta, podemos supor que $Imf = Img = [0, 1]$ e trocar $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Denotando por $p_1, \dots, p_n$ os pontos críticos de f , a proposição 1.2.5 garante que $h(p_1), \dots, h(p_n)$ são os pontos críticos de g e $ind_f(p_i) = ind_g(h(p_i))$, $i = 1, \dots, n$. Sejam $c_i = f(p_i)$ e $d_i = g(h(p_i))$, $i = 1, \dots, n$ com $c_1 < c_2 < \dots < c_n$.

Se $ind_f(p_i) = 1$, então existem curvas simples e fechadas α_i e γ_i em M com $Im\alpha_i \cap Im\gamma_i = \{p_i\}$ e $V(f, p_i) = Im\alpha_i \cup Im\gamma_i$. O mesmo ocorre para $V(g, h(p_i))$. Sejam $\tilde{\alpha}_i$ e $\tilde{\gamma}_i$ curvas simples e fechadas em M com $Im\tilde{\alpha}_i \cap Im\tilde{\gamma}_i = \{h(p_i)\}$, $V(g, h(p_i)) = Im\tilde{\alpha}_i \cup Im\tilde{\gamma}_i$ tais que $Im\tilde{\alpha}_i = h(Im\alpha_i)$ e $Im\tilde{\gamma}_i = h(Im\gamma_i)$. Fixadas orientações para α_i e γ_i , orientamos $\tilde{\alpha}_i$ e $\tilde{\gamma}_i$ de modo que, se $\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$ for um difeomorfismo que preserva orientação entre vizinhanças abertas U_i e $\tilde{U}_i$ de p_i e $h(p_i)$, respectivamente, com $U_i \cap V(f, p_i)$ conexo, $\varphi_i(U_i \cap Im\gamma_i) = \tilde{U}_i \cap Im\tilde{\gamma}_i$ e $\varphi_i(U_i \cap Im\alpha_i) = \tilde{U}_i \cap Im\tilde{\alpha}_i$, as orientações obtidas nos arcos de $\tilde{\alpha}_i$ e $\tilde{\gamma}_i$ em $\tilde{U}_i \cap V(g, h(p_i))$ coincidirão com as induzidas de α e γ por φ_i .

Definição 3.1.2 Nas condições acima, se α_i e $\tilde{\alpha}_i$, assim como γ_i e $\tilde{\gamma}_i$, forem curvas orientadas e homotópicas para todo i com $ind_f(p_i) = 1$, diremos que f e g têm curvas críticas homotópicas.

Observamos que as condições da definição acima ficam trivialmente satisfeitas para curvas homotópicas a zero.

3.2 O Teorema Principal

É fácil ver que em 3.1.1 temos uma relação de equivalência em $\mathcal{F}_0(M)$. Este fato será usado repetidas vezes na demonstração de parte do teorema principal.

Sejam $f, g \in \mathcal{F}_0(M)$, $p_1, \dots, p_n$ os pontos críticos de f e $q_1, \dots, q_m$ os pontos críticos de g , com

$$c_1 = f(p_1) < \dots < c_n = f(p_n)$$

os valores críticos de f e

$$d_1 = g(q_1), \dots, d_m = g(q_m)$$

os valores críticos de g .

Teorema 3.2.1 Nas condições acima, temos que f e g serão estável-equivalentes se, e somente se, $f \sim g$ (e portanto $m = n$), f e g tiverem curvas críticas homotópicas e $d_i < d_{i+1}$, $i = 1, \dots, n - 1$, sendo $g = k \circ f \circ h^{-1}$ com $h : M \rightarrow M$ e $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ difeomorfismos nas condições da definição 3.1.1 e $q_i = h(p_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Observemos inicialmente que, fixado $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe uma estável-homotopia obtida através de uma difeotopia de M de g a uma função g_1 com pontos críticos $q_1, \dots, p_i, \dots, q_n$ e $\text{ind}_{g_1}(p_i) = \text{ind}_f(p_i)$.

De fato, pelo lema de homogeneidade (lema 1.5.4), existe uma difeotopia

$$H : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

com

$$H_1(p_i) = q_i$$

e $H_t = \text{id}$ fora de uma vizinhança de p_i .

Seja

$$G : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$G(x, t) = g(H_t(x)), \quad x \in M, \quad t \in [0, 1].$$

Então $G_0 = g$ e $G_1 = g_1$ tem p_i como ponto crítico e $\text{ind}_{g_1}(p_i) = \text{ind}_f(p_i)$ (veja proposição 1.2.5). Além disso, $d_i = g_1(p_i)$ é valor crítico de g_1 e $G_t : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é função de Morse estável para todo $t \in [0, 1]$, isto é, g e g_1 são estável-equivalentes.

Podemos, ainda, tomar a difeotopia H de modo que as curvas críticas de g e g_1 sejam homotópicas.

Primeiro vamos supor f e g estável-equivalentes:

Seja

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

diferenciável com

$$F_0 = f, \quad F_1 = g \quad \text{e} \quad F_t \in \mathcal{F}_0(M), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Segue da proposição 1.4.3 que f é estável, logo existe $t_0 > 0$ tal que

$$F_t \sim f, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Seja

$$I = \{t \in [0, 1] / \text{se } t' \in [0, t], \text{ então } F_{t'} \sim f\}.$$

Temos:

(a) $I \neq \emptyset$, pois $t_0 \in I$,

(b) I é aberto em $[0, 1]$:

Seja $t_1 \in I$ qualquer. Temos que $F_{t_1} \in \mathcal{F}_0(M)$, logo, pela proposição 1.4.3, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \cap [0, 1]$, então $F_t \sim F_{t_1}$ e, consequentemente, $F_t \sim f$.

Portanto, I é aberto.

(c) $I = [0, 1]$ e, portanto, $f \sim g$:

Seja $\bar{t} = \sup I$ e suponhamos $\bar{t} \neq 1$. Então, por (b), $I = [0, \bar{t}[$ e $F_{\bar{t}}$ não é equivalente a $f = F_0$. Mas

$$F_{\bar{t}} \in \mathcal{F}_0(M),$$

logo, por 1.4.3, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$F_t \sim F_{\bar{t}}, \quad \forall t \in]\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon[\cap [0, 1].$$

Seja $t_2 \in]\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}[$ qualquer. Temos

$$F_{t_2} \sim F_0 = f \quad \text{e} \quad F_{t_2} \sim F_{\bar{t}}.$$

Absurdo, pois $F_{\bar{t}}$ não é equivalente a f .

Portanto,

$$I = [0, 1] \quad \text{e} \quad f \sim g.$$

Sejam (U_1, φ_1) uma carta em torno do ponto crítico p_i de $F_0 = f$, tal que U_1 não contenha outro ponto crítico de f ,

$$V_1 = \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \varphi_1(p_i) = (x_0, y_0) \in V_1.$$

Consideremos as aplicações

$$G_1 : V_1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$K_1 : V_1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dadas por:

$$G_1(x, y, t) = F(\varphi_1^{-1}(x, y), t)$$

e

$$K_1(x, y, t) = \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y, t) \right).$$

Do fato de ser p_i um ponto crítico não degenerado de F_0 segue que

$$K_1(x_0, y_0, 0) = (0, 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{e} \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x_0, y_0, 0) & \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, 0) \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, 0) & \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2}(x_0, y_0, 0) \end{array} \right| \neq 0. \end{array}$$

Logo existem um aberto $V'_1 \subset V_1$ e um intervalo

$$J_1 = [t_0, t_1] \subset [0, 1]$$

com $(x_0, y_0) \in V'_1$ e $t_0 = 0 \in J_1$, e existe uma curva diferenciável

$$\gamma_1 : J_1 \longrightarrow V'_1,$$

$\gamma_1(t) = (x(t), y(t))$, tal que

$$K_1(\gamma_1(t), t) = (0, 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{e} \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(\gamma_1(t), t) & \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y}(\gamma_1(t), t) \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y}(\gamma_1(t), t) & \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2}(\gamma_1(t), t) \end{array} \right| \neq 0, \quad \forall t \in J_1. \end{array}$$

Em particular

$$K_1(\gamma_1(t_1), t_1) = (0, 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{e} \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(\gamma_1(t_1), t_1) & \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y}(\gamma_1(t_1), t_1) \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y}(\gamma_1(t_1), t_1) & \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2}(\gamma_1(t_1), t_1) \end{array} \right| \neq 0. \end{array}$$

Se $t_1 \neq 1$, tomemos uma carta (U_2, φ_2) em torno do ponto crítico $\varphi_1^{-1}(\gamma_1(t_1))$ de F_{t_1} , tal que U_2 não contenha qualquer ponto crítico de f diferente de p_i e seja $V_2 = \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(\gamma_1(t_1))) = \gamma_1(t_1) \in V_2$. Definimos

$$G_2 : V_2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$K_2 : V_2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

pondo:

$$G_2(x, y, t) = F(\varphi_2^{-1}(x, y), t)$$

e

$$K_2(x, y, t) = \left(\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, y, t) \right)$$

Do fato de ser $\varphi_1^{-1}(\gamma_1(t_1)) = \varphi_2^{-1}(\gamma_1(t_1))$ um ponto crítico não degenerado de F_{t_1} , segue que

$$K_2(\gamma_1(t_1), t_1) = (0, 0)$$

e

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(\gamma_1(t_1), t_1) & \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial y}(\gamma_1(t_1), t_1) \\ \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial y}(\gamma_1(t_1), t_1) & \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}(\gamma_1(t_1), t_1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Logo existem um aberto $V'_2 \subset V_2$, um intervalo

$$J_2 = [t_1, t_2] \subset [0, 1]$$

e uma curva diferenciável

$$\gamma_2 : J_2 \longrightarrow V'_2,$$

tal que

$$\gamma_2(t_1) = \gamma_1(t_1),$$

$$K_2(\gamma_2(t), t) = (0, 0)$$

e

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(\gamma_2(t), t) & \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial y}(\gamma_2(t), t) \\ \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial y}(\gamma_2(t), t) & \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}(\gamma_2(t), t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in J_2.$$

Temos, portanto, uma curva

$$\bar{\gamma} : [0, t_2] \longrightarrow M$$

dada por

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(\gamma_1(t)), & \text{se } 0 \leq t \leq t_1, \\ \varphi_2^{-1}(\gamma_2(t)), & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

tal que $\bar{\gamma}(t)$ é ponto crítico não degenerado de F_t ¹.

Seja $A = \{s \in [0, 1] / \exists \bar{\gamma} : [0, s] \longrightarrow M \text{ contínua tal que } \bar{\gamma}(t) \text{ é ponto crítico não degenerado de } F_t, \forall t \in [0, s]\}$. Temos:

(1) $A \neq \emptyset$, pois $t_2 \in A$.

(2) A é aberto em $[0, 1]$:

Seja $s \in A$ qualquer. Procedendo da mesma forma como obtivemos t_2 , obtemos $\varepsilon > 0$ tal que $[s - \varepsilon, s + \varepsilon] \cap [0, 1] \subset A$.

Portanto, A é aberto em $[0, 1]$.

(3) A é fechado em $[0, 1]$:

Seja $S = \sup A$ e suponhamos que $S \notin A$. Então $A = [0, S[$.

Tomemos uma sequência (t_n) , estritamente crescente, tal que $t_n \in A, \forall n$ e $\lim t_n = S$. Para cada número natural n , existe uma curva $\bar{\gamma}_n : [0, t_n] \longrightarrow M$ tal que $\bar{\gamma}_n(t)$ é ponto crítico não degenerado de H_t e $\bar{\gamma}_{n+1}(t_n) = \bar{\gamma}_n(t_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $\bar{\gamma} : [0, S] \longrightarrow M$ definida por

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \bar{\gamma}_n(t), & \text{se } t \leq t_n \text{ para algum } n, \\ \lim \bar{\gamma}_n(t_n), & \text{se } t = S. \end{cases}$$

Temos que $\bar{\gamma}$ está bem definida e é contínua.

Suponhamos que $\bar{\gamma}(S)$ não seja ponto crítico de F_S . Seja (U, φ) uma carta em torno de $\bar{\gamma}(S)$, tal que U não contenha qualquer ponto crítico de f diferente de p_i e seja $V = \varphi(U)$. Consideremos as aplicações:

$$G : V \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$K : V \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

dadas por

$$G(x, y, t) = F(\varphi^{-1}(x, y), t)$$

¹Segue do fato de $\varphi_1^{-1}(\gamma_1(t_1))$ ser igual a $\varphi_2^{-1}(\gamma_1(t_1))$, que $\bar{\gamma}$ está bem definida e é contínua.

$$K(x, y, t) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, t) \right).$$

Do fato de $\bar{\gamma}(S)$ não ser ponto crítico de F_S , segue que $K(\bar{\gamma}(S), S) \neq (0, 0)$.

Logo existem um aberto $V' \subset V$ com $\varphi(\bar{\gamma}(S)) \in V'$ e $\varepsilon > 0$ tais que $K(x, y, t) \neq (0, 0)$, $\forall (x, y, t) \in V' \times]S - \varepsilon, S + \varepsilon[$. Seja n um número natural tal que $\bar{\gamma}(t_n) \in \varphi^{-1}(V')$. Então $\bar{\gamma}(t_n)$ não pode ser ponto crítico de F_{t_n} . Absurdo.

Portanto, A é fechado em $[0, 1]$. De onde se conclui que $A = [0, 1]$.

Temos, então, uma curva

$$\bar{\gamma}_i : [0, 1] \longrightarrow M$$

tal que $\bar{\gamma}_i(t)$ é ponto crítico não degenerado de F_t e $\bar{\gamma}_i(0) = p_i$, para cada ponto crítico p_i de f .

Por hipótese

$$c_i = F_0(p_i) < F_0(p_{i+1}) = c_{i+1}$$

e F_t é função de Morse estável, $\forall t \in [0, 1]$. Vamos mostrar que

$$d_i = F_1(p_i) < F_1(p_{i+1}) = d_{i+1}.$$

Seja

$$A_1 = \{s \in [0, 1] / F_t(\bar{\gamma}_i(t)) < F_t(\bar{\gamma}_{i+1}(t)), \quad \forall t \in [0, s]\}$$

(1) $A_1 \neq \emptyset$, pois $0 \in A_1$.

(2) A_1 é aberto em $[0, 1]$.

Seja $\alpha(s) = F_s(\bar{\gamma}_{i+1}(s)) - F_s(\bar{\gamma}_i(s))$, $s \in [0, 1]$ e tomemos $\bar{s} \in A_1$ qualquer. Segue da continuidade de α e do fato de ser $\alpha(\bar{s}) > 0$ que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(s) > 0$, $\forall s \in]\bar{s} - \varepsilon, \bar{s} + \varepsilon[\cap [0, 1]$.

Portanto, A_1 é aberto em $[0, 1]$.

(3) A_1 é fechado em $[0, 1]$.

Seja $S = \sup A_1$, e suponhamos que $S \notin A_1$. Por ser F_S uma função de Morse estável, devemos ter $\alpha(S) < 0$. Da continuidade de α , concluímos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(s) < 0$, $\forall s \in]S - \varepsilon, S + \varepsilon[\cap [0, 1]$. Absurdo, pois $\alpha(s) > 0$, $\forall s \in]S - \varepsilon, S[\cap [0, 1]$.

Portanto A_1 é fechado em $[0, 1]$.

De (1), (2) e (3), concluímos que $A_1 = [0, 1]$.

Portanto $d_i < d_{i+1}$.

Vamos verificar que as curvas críticas de f em p_i são homotópicas as curvas críticas de g em p_i para $\text{ind}_f(p_i) = 1$:

Tomemos $F : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com $F_0 = f$, $F_1 = g$ e $F_t \in \mathcal{F}_0(M)$, $\forall t \in [0, 1]$ e tomemos uma carta (U, φ) em torno do ponto crítico p_i de $F_0 = f$, tal que U não contenha outro ponto crítico de f . Seja $V = \varphi(U)$.

Sejam

$$c_i : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$c_i(t) = F(\varphi^{-1}(\gamma_i(t)), t)$$

e

$$\overline{F} : M \times J \longrightarrow \mathbb{R} \times J$$

dada por

$$\overline{F}(p, t) = (F(p, t), t),$$

onde $\gamma_i : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva tal que $\varphi^{-1}(\gamma_i(t))$ é ponto crítico de F_t , $\forall t \in J$ e $\varphi^{-1}(\gamma_i(0)) = p_i$.

Segue que

$$A = \{(c_i(t), t) / t \in J\}$$

é uma subvariedade de $\mathbb{R} \times J$, uma vez que é, basicamente, um gráfico.

Sejam

$$\Gamma(t) = (\varphi^{-1}(\gamma_i(t)), t), \quad t \in J,$$

$$W = M \times J - \text{Im} \Gamma$$

e

$$\tilde{F} = \overline{F}|_W : W \longrightarrow \mathbb{R} \times J$$

Vamos verificar que $\tilde{F}^{-1}(A)$ é uma subvariedade de W , para J suficientemente pequeno:

Para cada $(p, \bar{t}) \in \tilde{F}^{-1}(A)$ seja $(\tilde{U} \times \tilde{J}, \tilde{\varphi} \times id)$ uma carta local para W em torno de $(p, \bar{t})$, com $(0, 0) \in \tilde{V} = \tilde{\varphi}(\tilde{U})$.

Seja $\tilde{H} : \tilde{V} \times \tilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\tilde{H}(x, y, t) = \tilde{F}(\tilde{\varphi}^{-1}(x, y), t) = (F(\tilde{\varphi}^{-1}(x, y), t), t).$$

Basta verificar que $\tilde{H}$ é transversal a A em todos os pontos de $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{F}^{-1}(A))$, ou seja, que

$$Im(D\tilde{H}_{(x,y,t)}) + T_{\tilde{H}(x,y,t)}A = T_{\tilde{H}(x,y,t)}(\mathbb{R} \times J), \quad \forall (x, y, t) \in \tilde{F}^{-1}(A).$$

Temos que

$$D\tilde{H}_{(x,y,t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}F(\tilde{\varphi}^{-1}(x, y), t) & \frac{\partial}{\partial y}F(\tilde{\varphi}^{-1}(x, y), t) & \frac{\partial}{\partial t}F(\tilde{\varphi}^{-1}(x, y), t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como os pontos de $\tilde{F}^{-1}(A)$ não são pontos críticos de F_t , $\forall t \in \tilde{J}$, segue que

$$\frac{\partial}{\partial x}F(\tilde{\varphi}^{-1}(x, y), t) \neq 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial y}F(\tilde{\varphi}^{-1}(x, y), t) \neq 0$$

em todos os pontos de $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{F}^{-1}(A))$.

Portanto

$$Im(D\tilde{H}_{(x,y,t)}) = \mathbb{R}^2 = T_{\tilde{H}(x,y,t)}(\mathbb{R} \times J)$$

em todos os pontos de $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{F}^{-1}(A))$.

Portanto $\tilde{F}^{-1}(A)$ é uma subvariedade de dimensão 2 de $M \times J$ com $\partial \tilde{F}^{-1}(A) \neq \emptyset$,

$$\partial \tilde{F}^{-1}(A) = \{p \in M/p \neq p_i \text{ e } f(p) = c_i\} \cup \{p \in M/p \neq \gamma_i(t_1) \text{ e } F_{t_1}(p) = c_i(t_1)\}.$$

Seja N a componente conexa do fecho de $\tilde{F}^{-1}(A)$ que contém $Im\Gamma$. Então $N - Im\Gamma$ é uma subvariedade de dimensão 2 de $M \times J$, contida em $\tilde{F}^{-1}(A)$, com

$$\partial(N - Im\Gamma) = (V(f, p_i) - \{p_i\}) \bigcup (F_{t_1}^{-1}(c_i(t_1)) - \gamma_i(t_1)).$$

Além disso,

$$N - Im\Gamma = \bigcup_{t \in J} (V(F_t, \varphi^{-1}(\gamma_i(t))) - \varphi^{-1}(\gamma_i(t)))$$

e o seu fêcho em $M \times J$,

$$N = \bigcup_{t \in J} V(F_t, \varphi^{-1}(\gamma_i(t))).$$

Mas, se por um lado, $N - \text{Im}\Gamma$ é uma subvariedade aberta de $M \times J$, por outro, N não é subvariedade de $M \times J$. De qualquer modo, $N - \text{Im}\Gamma$ é difeomorfa a $(V(f, p_i) - \{p_i\}) \times J$ e N é um subespaço topológico de $M \times J$ homeomorfo a $V(f, p_i) \times J$. Podemos verificar estes fatos pela construção a seguir.

De fato, consideremos o campo de vetores

$$X(p, t) = \varphi_*^{-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, t), \frac{\partial G}{\partial t}(x, y, t) \right), \quad (x, y) = \varphi(p), \quad (p, t) \in U \times [0, 1]$$

em $U \times [0, 1]$, onde $G(x, y, t) = F(\varphi^{-1}(x, y), t)$. Pela compacidade de $\text{Im}\Gamma$, existem um aberto V_1 de V com $\bar{V}_1 \subset V$ e $\varepsilon > 0$ tal que o fluxo Φ de X está definido em $\varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J \times [0, \varepsilon]$, isto é,

$$\Phi : \varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J \times [0, \varepsilon] \longrightarrow \varphi^{-1}(V) \times J$$

dado por $\Phi(p, t, s) = \delta(s)$, sendo δ a curva integral de X tal que $\delta(0) = (p, t)$.

Se $p \neq p_i$, $\frac{d}{ds}\Phi(p, t, s) = X(\Phi(p, t, s)) \neq 0$. Seja $W_1 = W \cap \varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J$. Diminuindo V_1 , se necessário, podemos assumir que $\Psi(p, t, -s)$ está definida para todo $(p, t) \in \varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J$ e todo $s \in [0, \varepsilon]$, onde

$$\Psi(p, t, s) = \Phi(\varphi^{-1}(\varphi(p) + \gamma_i(t) - p_i), t, s).$$

Como

$$W_1 = \{(p, t) \in (\varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J) - \text{Im}\Gamma / \Gamma(p, t) - c_i(t) = 0\},$$

então

$$\begin{aligned} (F \circ \Psi)^{-1}(0) &= \Psi^{-1}(W_1) \\ &= \{(p, t, s) / \Psi(p, t, s) \in W_1\} \\ &= \{(p, t, s(p, t)) / (\varphi(p), t) \in \bar{V}_1 \times J\}, \end{aligned}$$

onde $s(p, t)$ é uma função diferenciável de (p, t) , para $(p, t) \in \varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J$.

Assim, se $p \in \bar{V}_1 - \{p_i\}$, então

$$\Psi(p, 0, 0) = \Phi(p, 0, 0) = (p, 0) \in W_1$$

$$\Psi(p, t, s(p, t)) = \Phi(\varphi^{-1}(\varphi(p) + \gamma_i(t) - p_i), t, s(p, t)) \in W_1,$$

logo Φ leva

$$W_0 = \{(\varphi^{-1}(\varphi(p) + \gamma_i(t) - p_i), t) \in M \times J / p \in (\varphi^{-1}(\bar{V}_1) - p_i) \cap \tilde{F}^{-1}(A)\}$$

difeomorficamente em um subconjunto de W_1 . Pela continuidade de Φ e pela compacidade de $W_1 \cup Im\Gamma = \tilde{F}^{-1}(A) \cap (\varphi^{-1}(\bar{V}_1)) \times J$, então Φ leva $W_0 \cup Im\Gamma$ homeomorficamente em $W_1 \cup Im\gamma$ e portanto Φ leva W_0 difeomorficamente sobre W_1 .

Assim, seja $\alpha : [-\delta, 1] \longrightarrow M$, $\delta > 0$, uma parametrização regular por partes do fêcho de uma das componentes conexas de $V(f, p_i) - \{p_i\}$ com $\alpha(0) = p_i$, regular em $[-\delta, 0]$ e $[0, 1]$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $Im\alpha \cap \varphi^{-1}(\bar{V}_1) = \alpha([-\delta, \delta])$. Então

$$\begin{aligned} \Lambda : [-\delta, \delta] \times J &\longrightarrow \varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J \\ (\theta, t) &\longmapsto \Psi(\alpha(\theta), t, s(\alpha(\theta), t)) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo sobre $N \cap (\varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J)$ e um difeomorfismo de $([-\delta, 0] \cup [0, \delta]) \times J$ sobre $N \cap (\varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J) - Im\Gamma$.

Seja N_0 o fêcho da componente conexa de $N - Im\Gamma$ que contém $\alpha([-\delta, \delta])$. Então Λ define uma estrutura diferenciável em N_0 que é a induzida de $M \times J$ em $N_0 - Im\Gamma$. Com essa estrutura, a aplicação

$$(p, t) \longmapsto t,$$

onde $t \in J$ e $F(p, t) = c_i(t)$ é uma função diferenciável sem pontos críticos de N_0 em J que leva ∂N_0 em ∂J , logo, com essa estrutura, N_0 é difeomorfa a $Im\alpha \times J$ e, portanto, N_0 é homeomorfa a $Im\alpha \times J$. Vale o mesmo para a outra componente conexa de $\tilde{F}^{-1}(A)$, logo N é homeomorfa a $V(f, p_i) \times J$.

Seja

$$\eta : N \longrightarrow V(f, p_i) \times J$$

um tal homeomorfismo, com $\eta(p, 0) = (p, 0)$. Então

$$V(F_t, \gamma_i(t)) = \{\eta^{-1}(p, t) / (p, t) \in V(f, p_i) \times \{t\}\}.$$

Assim $\beta : V_i(f) \times J \longrightarrow M$, dada por $\beta = \pi \circ \eta^{-1}$, onde $\pi : M \times J \longrightarrow M$ é a projeção usual é, essencialmente, uma homotopia de $V(f, p_i)$ a $V(F_{t_1}, \gamma_i(t_1))$.

Analogamente, tomando $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, e $B = \{(c, t) \in \mathbb{R} \times J \mid c_i(t) - \varepsilon < c < c_i(t) + \varepsilon\}$, obtemos que a componente conexa Q de $\bar{F}^{-1}(B)$ que contém $Im\Gamma$ é uma subvariedade de $M \times J$ tal que, para cada $t \in J$, $Q \cap M \times \{t\}$ é difeomorfa à superfície representada na figura 3.2. De forma análoga, se t_1 é suficientemente pequeno, Q é difeomorfa a $Q_0 \times J$, onde Q_0 é a componente conexa de $f^{-1}(]c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon[$ que contém p_i . Repetindo até obter $[0, 1]$, obtemos uma homotopia $H : Q_0 \times J \longrightarrow M$, tal que $H_t : Q_0 \longrightarrow M$ é um mergulho diferenciável com $H_t(Q_0) = Q_t$, onde Q_t é a componente conexa de $F_t^{-1}(]c_i(t) - \varepsilon, c_i(t) + \varepsilon[$ que contém o ponto crítico $\varphi_i^{-1}(\gamma_i(t))$ de F_t . Logo a aplicação

$$p \in Q_0 \longmapsto H_{t_1}(p) \in F_{t_1}^{-1}(]c_i(t_1) - \varepsilon, c_i(t_1) + \varepsilon[$$

é um difeomorfismo que preserva orientação, o que mostra que os níveis críticos de f e F_{t_1} correspondentes aos pontos críticos p_i e p_i e $\varphi_i^{-1}(\gamma_i(t_1))$, respectivamente, são homotópicos conforme a definição 3.1.2.

Repetindo o mesmo procedimento para F_{t_1} , obtemos $t_2 \in [0, 1]$, $t_2 > t_1$ tal que $V(f, p_i)$ é homotópica a $F_{t_2}^{-1}(c_2(t_2))$. Obtemos assim, uma sequência (t_n) estritamente crescente e limitada superiormente por 1 tal que $F_{t_n}^{-1}(c_n(t_n))$ é homotópica a $V(f, p_i)$. Seja

$$\bar{t} = \sup(t_n) \in [0, 1].$$

Vamos verificar que $\bar{t} = 1$ e portanto as curvas críticas citadas são homotópicas

Suponhamos $\bar{t} < 1$. Raciocinando-se da mesma forma, constroi-se uma curva diferenciável de pontos críticos $\bar{\gamma}_i(t)$, definida em $[s_1, s_2]$ com $s_1 \leq \bar{t} \leq s_2$. Mas então $\bar{\gamma}_i(t) = \gamma_i(t)$, $s_1 < t \leq \bar{t}$ e, portanto, $F_{s_2}^{-1}(c(s_2))$ é homotópica a $F_{\bar{t}}(c(\bar{t}))$, o que é absurdo.

Portanto $\bar{t} = 1$ e as curvas críticas são homotópicas conforme a definição 3.1.2.

Vamos supor agora, que $f \sim g$, por $g = k \circ f \circ h^{-1}$, f e g têm curvas críticas homotópicas e $d_i < d_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ e vamos mostrar que f e g são estável-equivalentes.

Por ser $f \sim g$, temos que f e g possuem o mesmo número de pontos críticos.

A idéia é alterar g , por etapas, através de estável-homotopias, algumas delas obtidas através de difeotopias de M ou de $[0, 1]$, até obter f . A primeira etapa consistirá em construir uma estável-homotopia entre g e uma função g_2 que possui os mesmos pontos críticos de g e tal que

$$g_2(q_j) = f(p_j) = c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

sendo $p_1, \dots, p_n$ os pontos críticos de f e $q_j = h(p_j)$ os pontos críticos de g .

A seguir construiremos uma estável-homotopia entre g_2 e uma função g_5 que coincide com f numa vizinhança de um ponto crítico p_i . Depois faremos g_5 coincidir com f nas curvas críticas de p_i . Alteraremos, a seguir, a função obtida, fazendo-a coincidir com f numa vizinhança dessas curvas críticas e, finalmente, em vizinhanças de todas as curvas críticas e em toda a variedade.

Por ser uma demonstração bastante longa, será dividida em vários lemas.

O lema 3.2.2, a seguir, garante a existência de uma estável-homotopia entre g e uma função g_2 que possui os mesmos pontos críticos de g e os mesmos valores críticos de f , isto é,

$$g_2(h(p_j)) = f(p_j) = c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Lema 3.2.2 *Existe uma estável-homotopia entre g e uma função g_2 com os mesmos pontos críticos de g e mesmos índices, tal que $g_2(h(p_j)) = f(p_j) = c_j$, $j = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Seja

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

um difeomorfismo satisfazendo

$$k(c_j) = d_j, \quad j = 1, \dots, n$$

(o lema 1.6.1 garante a existência de tal difeomorfismo) segue que k e k^{-1} preservam orientação.

Assim, pelo lema 1.5.3, existe

$$K : \mathbb{R} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

diferenciável com

$$K_0 = 1_{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad K_1 = k^{-1},$$

sendo $K_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo, $\forall t \in [0, 1]$.

Seja

$$H : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida para cada $t \in [0, 1]$ por

$$H_t = K_t \circ g.$$

Então

$$H_0 = g,$$

$$H_1 = k^{-1} \circ g \stackrel{\text{def}}{=} g_2$$

e H_t é função de Morse estável, $\forall t \in [0, 1]$. Logo g_2 é estável-equivalente a g , e

$$g_2(h(p_j)) = k^{-1} \circ g(h(p_j)) = k^{-1}(d_j) = c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Além disso, $f = g_2 \circ h$.

□

Fixemos um ponto crítico p_i de f . Os lemas 3.2.3 a 3.2.5 garantem a existência de uma estável-homotopia de g_2 a uma função g_5 que coincide com f em um compacto K_i que contém o ponto crítico p_i em seu interior.

Sejam f e g_2 como no lema 3.2.2. Aplicando a construção da observação inicial a g_2 , obtemos g_1 tal que

$$c_j = f(p_j) = g_1(p_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Tomemos uma carta de Morse (U_i, ψ_i) para f em torno do ponto crítico p_i e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ tais que para todo $(x, y) \in U_i$,

$$f \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2.$$

A fórmula de Taylor de $g_1 \circ \psi_i^{-1}$ com resto de ordem 3 fica

$$g_1 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + \alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + R(x, y).$$

Lema 3.2.3 *Nas condições acima existe uma estável-homotopia $F^1 : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $F_t^1(p_i) = c_i$, $F_0^1 = g_1$ e $F_1^1 = g_3$, sendo g_3 uma função que satisfaz $g_3 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + ax^2 + by^2 + R(T_1(x, y))$ em uma bola aberta $B(0; r)$ tal que $B[0; 2r] \subset \psi_i(U_i)$, sendo a e b constantes reais e $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Além disso, $g_3 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2 - \psi_i(U_i)$. (Observemos que o fato de $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ garante que $c_i + ax^2 + by^2 + R(T_1(x, y))$ é a fórmula de Taylor de $g_3|_{U_i}$ com resto $R(T_1(x, y))$).*

Demonstração. Seja $\theta \in]0, \pi[$ tal que, se

$$T_1(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

então

$$g_1 \circ \psi_i^{-1}(T_1(x, y)) = c_i + ax^2 + by^2 + R(T_1(x, y))$$

e seja

$$\lambda = \beta(\|(x, y)\|),$$

sendo

$$\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

diferenciável e tal que

$$0 \leq \beta \leq 1,$$

$$\beta(t) = 1 \text{ se } t \in [0, r],$$

$$\beta(t) = 0 \text{ se } t \geq 2r$$

e β é estritamente decrescente em $[r, 2r]$.

Segue que, para cada $s \in [0, 1]$ a função

$$h_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$h_s(x, y) = (x \cos(s\lambda(x, y)\theta) - y \sin(s\lambda(x, y)\theta), x \sin(s\lambda(x, y)\theta) + y \cos(s\lambda(x, y)\theta)),$$

é um difeomorfismo.² Além disso, $h_s(x, y) = (x, y)$ para $\|(x, y)\| \geq 2r$.

Logo

$$F^1 : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

definida por

$$F^1(p, s) = \begin{cases} g_1 \circ \psi_i^{-1} \circ h_s \circ \psi_i(p) & \text{se } p \in U_i, \\ g_1(p) & \text{se } p \in M - U_i \end{cases}$$

é uma estável-homotopia tal que $F_0^1 = g_1$ e $F_1^1 = g_3$, sendo

$$g_3 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + ax^2 + by^2 + R(T_1(x, y)) \text{ em } \psi_i^{-1}(B[0, r])$$

e

$$e \quad g_3 = g \quad \text{em} \quad M - \psi_i^{-1}(B[0, 2r]).$$

□

Observação : Decorre do fato de g_3 ser de Morse que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Como $g_3 = f \circ \bar{h}$, onde $\bar{h} : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo, segue que $ind_{g_3}(p_i) = ind_f(p_i)$, pela proposição 1.2.5. Além disso, trocando θ por $\theta - \pi$, com a mesma construção, obtém-se ainda, $g_3 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + ax^2 + by^2 + R(T_1(x, y))$, em $\psi_i^{-1}(B[0, r])$. Por outro lado, trocando-se θ por $\theta - \frac{\pi}{2}$, obtém-se $g_3 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + bx^2 + ay^2 + R(T_1(x, y))$, em $\psi_i^{-1}(B[0, r])$. Assim, trocando θ por $\theta - \frac{\pi}{2}$, se necessário, podemos supor que $\frac{a}{|a|} = \varepsilon_1$ e $\frac{b}{|b|} = \varepsilon_2$.

Lema 3.2.4 *Existe uma estável-homotopia $F^2 : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ com $F_s^2(p_i) = c_i$, tal que $F_0^2 = g_3$ e $g_4 = F_1^2$ satisfaz $g_4 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + \frac{a}{|a|}x^2 + \frac{b}{|b|}y^2 + R(T_2(x, y))$ com $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, sendo $F_s^2 = id$ em $M - U_i$.*

Demonstração. Vamos supor, inicialmente, que $|b| < |a|$ ³.

Seja $h^1 : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida para cada $t \in [0, 1]$ por

$$h_t^1(x, y) = \left(x, \left(1 + \left(\sqrt{\left| \frac{b}{a} \right|} - 1 \right) t \alpha(\|(x, y)\|) \right) y \right),$$

²Para cada $s \in [0, 1]$, $h_s(x, y)$ provoca uma rotação em $\mathbb{R}^2$ de um ângulo $s\lambda(x, y)\theta$, o qual é constante em cada círculo centrado na origem, portanto h_s é bijetora e tem inversa com mesmo tipo de expressão e, portanto, diferenciável.

³O caso $|b| > |a|$ é análogo.

sendo $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$\begin{cases} \alpha(x) = 1 & \text{se } |x| \leq r_1, \\ \alpha(x) = 0 & \text{se } |x| \geq 2r_1, \\ \alpha'(x) > 0 & \text{se } -2r_1 < x < -r_1 \quad \text{e} \\ \alpha'(x) < 0 & \text{se } r_1 < x < 2r_1, \end{cases}$$

Tem-se que

$$h_0^1(x, y) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$h_t^1(x, y) = (x, y), \text{ se } \|(x, y)\| \geq 2r_1$$

e

$$h_t^1\left(\frac{x}{\sqrt{|a|}}, \frac{y}{\sqrt{|b|}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{|a|}}, \frac{y}{\sqrt{|a|}}\right), \text{ se } \|(x, y)\| \leq r_1.$$

Vamos verificar que h_t^1 não possui ponto crítico, $\forall t \in [0, 1]$.

Fixado $x \in \mathbb{R}$, seja

$$g(y) = \left(1 + \left(\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|} - 1\right)t\alpha(\|(x, y)\|)\right)y.$$

Temos que

$$g'(y) = \begin{cases} 1 + \left(\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|} - 1\right)t\left(\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\frac{y^2}{\|(x, y)\|}\right), & \text{se } \|(x, y)\| > r_1, \\ 1 + \left(\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|} - 1\right)t, & \text{se } \|(x, y)\| \leq r_1. \end{cases}$$

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer.

(1) Se $\|(x, y)\| \geq 2r_1$, então $g'(y) = 1 > 0$.

(2) se $\|(x, y)\| \leq r_1$, então $g'(y) = 1 + (\sqrt{|\frac{b}{a}|} - 1)t > 0$.

(3) se $r_1 < \|(x, y)\| < 2r_1$ e $\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\frac{y^2}{\|(x, y)\|} > 0$, então $\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\frac{y^2}{\|(x, y)\|} < \alpha(\|(x, y)\|) < 1$. Logo $g'(y) > 0$.

⁴Observemos que $-1 < \sqrt{|\frac{b}{a}|} - 1 < 0$.

(4) Se $r_1 < \|(x, y)\| < 2r_1$ e $\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\frac{y^2}{\|(x, y)\|} < 0$, então $\left(\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|} - 1\right)t\left(\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\frac{y^2}{\|(x, y)\|}\right) > 0$ e, portanto, $g'(y) > 0$

(5) Se $\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\frac{y^2}{\|(x, y)\|} = 0$, então $g'(y) = 1 > 0$.

Portanto h_i^1 não possui ponto crítico, $\forall t \in [0, 1]$.

Consideremos, agora, a aplicação $h^2 : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$h_i^2(x, y) = ((1 + (\sqrt{|a|} - 1)t\alpha(\|(x, y)\|))x, (1 + (\sqrt{|a|} - 1)t\alpha(\|(x, y)\|))y).^5$$

Tem-se que

$$h_0^2(x, y) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$h_i^2(x, y) = (x, y), \text{ se } \|(x, y)\| \geq 2r_1$$

e

$$h_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{|a|}}, \frac{y}{\sqrt{|a|}}\right) = (x, y) \text{ se } \|(x, y)\| \leq r_1$$

Para verificar que h_i^2 não possui ponto crítico, $\forall t \in [0, 1]$, deve-se mostrar que o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_{t1}}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_{t1}}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_{t2}}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_{t2}}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix}$$

é não nulo, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, sendo

$$g_{t1}(x, y) = (1 + (\sqrt{|a|} - 1)t\alpha(\|(x, y)\|))x$$

e

$$g_{t2}(x, y) = (1 + (\sqrt{|a|} - 1)t\alpha(\|(x, y)\|))y.$$

Temos que

$$\frac{\partial g_{t1}}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 1 + (\sqrt{|a|} - 1)t\left(\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\frac{x^2}{\|(x, y)\|}\right) > 0, & \text{se } \|(x, y)\| \geq r_1 \\ 1 + (\sqrt{|a|} - 1)t, & \text{se } \|(x, y)\| \leq r_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial g_{t1}}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} (\sqrt{|a|} - 1)t\alpha'(\|(x, y)\|)\frac{y}{\|(x, y)\|}x, & \text{se } \|(x, y)\| \geq r_1 \\ 0, & \text{se } \|(x, y)\| \leq r_1 \end{cases}$$

⁵Observemos que $-1 < \sqrt{|a|} - 1 < 0$.

$$\frac{\partial g_{t_2}}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} (\sqrt{|a|} - 1)t\alpha'(\|(x, y)\|)\frac{x}{\|(x, y)\|}y, & \text{se } \|(x, y)\| \geq r_1 \\ 0, & \text{se } \|(x, y)\| \leq r_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial g_{t_2}}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 1 + (\sqrt{|a|} - 1)t(\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\frac{y^2}{\|(x, y)\|}) > 0, & \text{se } \|(x, y)\| \geq 1, \\ 1 + (\sqrt{|a|} - 1)t, & \text{se } \|(x, y)\| \leq r_1. \end{cases}$$

De onde concluímos que basta analisar o caso em que $\frac{\partial g_{t_1}}{\partial y}(x, y)\frac{\partial g_{t_2}}{\partial x}(x, y) > 0$, isto é, $r_1 < \|(x, y)\| < 2r_1$.

Suponhamos, agora, que $|a| < 1$. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $r_1 < \|(x, y)\| < 2r_1$, procuremos as raízes da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{t_1}}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_{t_1}}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_{t_2}}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_{t_2}}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(t) &= (\sqrt{|a|} - 1)^2[\alpha^2(\|(x, y)\|) + \alpha(\|(x, y)\|)\alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\|]t^2 \\ &\quad + [(\sqrt{|a|} - 1)(2\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\|)]t \\ &\quad + 1. \end{aligned}$$

Temos que

$$\Delta = (\sqrt{|a|} - 1)^2(\alpha'(\|(x, y)\|))^2\|(x, y)\|^2 > 0.$$

Segue que $f(t) = (\sqrt{|a|} - 1)\alpha(\|(x, y)\|)t + 1 > 0$, se $\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\| = 0$ e tem duas raízes reais dadas por

$$\begin{aligned} t &= \frac{-(\sqrt{|a|} - 1)(2\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\|) \pm \sqrt{\Delta}}{2(\sqrt{|a|} - 1)^2[\alpha^2(\|(x, y)\|) + \alpha(\|(x, y)\|)\alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\|]} \\ &= \frac{-(\sqrt{|a|} - 1)(2\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\|) \pm (\sqrt{|a|} - 1)\alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\|}{2(\sqrt{|a|} - 1)^2\alpha(\|(x, y)\|)(\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\|)}. \end{aligned}$$

Logo

$$t = \frac{-1}{(\sqrt{|a|} - 1)\alpha(\|(x, y)\|)} > 1$$

ou

$$t = \frac{-1}{\sqrt{|a|} - 1)(\alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\|)}.$$

No segundo caso, temos que

$$\begin{cases} t < 0, & \text{se } \alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\| < 0 \\ t > 1, & \text{se } \alpha(\|(x, y)\|) + \alpha'(\|(x, y)\|)\|(x, y)\| > 0. \end{cases}$$

Suponhamos, agora, que $|a| > 1$ e consideremos $h^3 : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$h_t^3(x, y) = \left(x + \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}} - 1 \right) t\alpha(\|(x, y)\|)x, y + \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}} - 1 \right) t\alpha(\|(x, y)\|)y \right).$$

Analogamente, h_t^3 não possui pontos críticos, pois $\frac{1}{|a|} < 1$. Temos que

$$h_0^3(x, y) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$h_1^3(x, y) = (x, y), \text{ se } \|(x, y)\| \geq 2r_1$$

e

$$h_1^3(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{|a|}}, \frac{y}{\sqrt{|a|}} \right), \text{ se } \|(x, y)\| \leq r_1.$$

As aplicações h^1, h^2 e h^3 fornece-nos uma aplicação $h : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, a saber

$$h_t = \begin{cases} (h^2)^{-1} \circ (h_1^1)^{-1}, & \text{se } |a| < 1 \\ (h^2)^{-1} \circ h^3, & \text{se } |a| > 1, \end{cases}$$

tal que

$$h_0 = 1_{\mathbb{R}^2},$$

$$h_1(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{|a|}}, \frac{y}{\sqrt{|b|}} \right) \text{ se } \|(x, y)\| \leq r_1$$

e

$$h_1(x, y) = (x, y) \text{ se } \|(x, y)\| \geq 2r_1$$

e h_t não possui ponto crítico em $\mathbb{R}^2$, $\forall t \in [0, 1]$.

Suponhamos que $B[0, 2r_1] \subset U_i$ e $r_1 \leq r$, a aplicação $F^2 : M \times [0, 1] \longrightarrow M$ definida por

$$F^2(p, s) = \begin{cases} g_3 \circ \psi_i^{-1} \circ k_s \circ \psi_i(p) & \text{se } p \in U_i \\ p & \text{se } p \in M - U_i \end{cases}$$

é uma estável-homotopia entre $F_0^2 = g_3$ e $F_1^2 = g_4$, sendo que

$$g_4 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + \frac{a}{|a|}x^2 + \frac{b}{|b|}y^2 + R(T_2(x, y)), \forall (x, y) \in B[0, r_1] \subset \psi_i(U_i)$$

e

$$T_2(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{|a|}}, \frac{y}{\sqrt{|b|}} \right) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

□

Nosso objetivo agora, é alterar g_4 de forma a obter uma função g_5 que coincide com f em uma vizinhança aberta de p_i , coincide com g fora de um compacto que contém o ponto crítico p_i em seu interior e não encontra nenhum nível crítico de g diferente de $g^{-1}(c_i)$.

Para a construção da estável-homotopia que fornecerá a função g_5 acima, precisaremos do lema 3.2.5. a seguir.

Lema 3.2.5 *Fixados $K > 0$ e uma função $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ qualquer, existe $r_2 > 0, r_2 \leq r_1$, tal que se $0 < \|(x, y)\| < 2r_2$, então ,*

$$\|2(\pm x, \pm y) + \mu(x, y)\nabla R_1(x, y)\| - sK \frac{|R_1(x, y)|}{r_2} > 0, \quad \forall s \in]0, 1[,$$

sendo $R_1(x, y) = R(T(x, y))$ com $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. É imediato que se

$$0 < \|(x, y)\| < 2r_2, \text{ para algum } r_2 > 0,$$

então

$$sK \frac{|R_1(x, y)|}{\|(x, y)\|} > \frac{1}{2}sK \frac{|R_1(x, y)|}{r_2},$$

logo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\|2(\pm x, \pm y) + \mu(x, y)\nabla R_1(x, y)\| - sK \frac{|R_1(x, y)|}{2r_2}] \\ & > \frac{1}{2} [\|2(\pm x, \pm y) + \mu(x, y)\nabla R_1(x, y)\| - sK \frac{|R_1(x, y)|}{\|(x, y)\|}] \quad (*) \end{aligned}$$

Para verificar que existe $r_2 > 0$ que torna (*) positivo sempre que $\|(x, y)\| < 2r_2$, utilizaremos o seguinte limite:

$$\begin{aligned} & \lim_{\|(x, y)\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\|2(\pm x, \pm y) + \mu(x, y)\nabla R_1(x, y)\|}{sK \frac{|R_1(x, y)|}{\|(x, y)\|}} \\ & = \lim_{\|(x, y)\| \rightarrow 0} \frac{1}{2sK} \frac{1}{\frac{|R_1(x, y)|}{\|(x, y)\|^2}} \left\| 2 \frac{(\pm x, \pm y)}{\|(x, y)\|} + \mu(x, y) \frac{\nabla R_1(x, y)}{\|(x, y)\|} \right\| = \infty \quad 6 \end{aligned}$$

⁶Note que $\frac{1}{2sK} > 0, \lim_{\|(x, y)\| \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{|R_1(x, y)|}{\|(x, y)\|^2}} = \infty$ e $\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow 0} \left\| 2 \frac{(\pm x, \pm y)}{\|(x, y)\|} + \mu(x, y) \frac{\nabla R_1(x, y)}{\|(x, y)\|} \right\| = 2$, pois μ é limitada e $\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow 0} \frac{\nabla R_1(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0$.

Logo existe $r_2 > 0$ tal que se $0 < \|(x, y)\| < 2r_2$, então

$$\frac{\|2(\pm x, \pm y) + \mu(x, y)\nabla R_1(x, y)\|}{sK \frac{|R_1(x, y)|}{\|(x, y)\|}} > 1$$

e, portanto

$$\|2(\pm x, \pm y) + \mu(x, y)\nabla R_1(x, y)\| - sK \frac{|R_1(x, y)|}{\|(x, y)\|} > 0$$

Da desigualdade (*) segue que se $0 < \|(x, y)\| < 2r_2$, então

$$\|2(\pm x, \pm y) + \mu(x, y)\nabla R_1(x, y)\| - sK \frac{|R_1(x, y)|}{r_2} > 0.$$

Note-se que podemos tomar $r_2 \leq r_1$.

□

Lema 3.2.6 *Existe uma estável-homotopia $F^3 : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_0^3 = g_4$ e $F_1^3 = g_5$ satisfaz $g_5 = f$ em $\psi_i^{-1}(B[0, r_2]) \subset U_i$ e $g_5 = g_4$ em $M - U_i$ e portanto $g_5 = g$ em $M - U_i$.*

Demonstração. Seja

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$$

diferenciável tal que, $\varphi = 0$ fora da bola $B(0, 2r_2) \subset \psi_i(U_i)$, $\varphi = 1$ na bola $B[0, r_2]$ e $\|\nabla\varphi(x, y)\| < \frac{K}{r_2}$.

A aplicação $\bar{F}^3 : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\bar{F}_s^3(x, y) = c_i + \frac{a}{|a|}x^2 + \frac{b}{|b|}y^2 + (1 - s\varphi(x, y))R(T_2(x, y))$$

é uma estável-homotopia satisfazendo

$$\bar{F}_0^3(x, y) = c_i + \frac{a}{|a|}x^2 + \frac{b}{|b|}y^2 + R(T_2(x, y))$$

e

$$\bar{F}_1^3(x, y) = c_i + \frac{a}{|a|}x^2 + \frac{b}{|b|}y^2 \text{ em } B[0, r_2]$$

Basta verificar que $\bar{F}_s^3$ não possui ponto crítico em $r_2 < \|(x, y)\| < 2r_2$, ou seja, $\|\nabla\bar{F}_s^3\| > 0$ neste conjunto.

⁷e portanto $g_5 = g$ em $M - \psi_i^{-1}(B[0, 2r_2])$.

⁸basta tomar $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y) = \beta(\frac{\|(x, y)\|}{r_2})$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, sendo $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que satisfaz $0 \leq \beta \leq 1$, $\beta(t) = 1$ se $|t| \leq 1$ e $\beta(t) = 0$ se $|t| > 2$.

Em $r_2 < \|(x, y)\| < 2r_2$ temos:

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{F}_s^3\| &= \left\| 2 \left(\frac{a}{|a|}x, \frac{b}{|b|}y \right) - s\nabla\varphi(x, y)R_1(x, y) + (1 - s\varphi(x, y))\nabla R_1(x, y) \right\| \\ &\geq \left\| 2 \left(\frac{a}{|a|}x, \frac{b}{|b|}y \right) + (1 - s\varphi(x, y))\nabla R_1(x, y) \right\| - s\|\nabla\varphi(x, y)\| |R_1(x, y)| \\ &\geq \left\| 2 \left(\frac{a}{|a|}x, \frac{b}{|b|}y \right) + (1 - s\varphi(x, y))\nabla R_1(x, y) \right\| - \frac{sK}{r_2} |R_1(x, y)| > 0, \end{aligned}$$

pelo lema 3.2.5.

A aplicação

$$F^3 : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$F_s^3(p) = \begin{cases} \psi_i^{-1} \circ \bar{F}_s^3 \circ \psi_i(p), & \text{se } p \in U_i \\ p, & \text{se } p \in M - U_i \end{cases}$$

é uma estável-homotopia satisfazendo $F_0^3 = g_4$ e $F_1^3 = g_5$, sendo que

$$g_5 \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i + \frac{a}{|a|}x^2 + \frac{b}{|b|}y^2 \quad \forall (x, y) \in B[0, r_1]$$

e

$$g_5 = g_4 \text{ em } M - U_i$$

Portanto

$$g_5 = f \text{ em } \psi_i^{-1}(B[0, r_2]) \subset U_i.$$

□

Observação: Precisamos garantir que as curvas críticas de f (α e γ) e as curvas críticas correspondentes de g_5 ($\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\gamma}$) que têm arcos coincidentes em uma vizinhança de p_i são aquelas que são homotópicas conforme a definição 3.1.2.

Suponhamos que $\text{ind}_f(p_i) = 1$. Para fixar as idéias, suponhamos $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = 1$, isto é, $f \circ \psi_i^{-1}(x, y) = c_i - x^2 + y^2$, $\forall (x, y) \in B[0, r_2]$ e que $\psi_i((\text{Im}\gamma) \cap \psi_i^{-1}(B[0, r_2])) = \{(x, y)/y = \pm x, x > 0\} \cap B[0, r_2]$. Os outros casos são análogos. Como g_5 é estável-equivalente a f , então é equivalente a f , isto é, existem difeomorfismos $h_1 : M \longrightarrow M$ e $k_1 : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ que preservam orientação, tais que $g_5 = k_1 \circ g_4 \circ h_1^{-1}$ e $g_5 = f$ em $\psi_i^{-1}(B[0, r_2])$. Por outro lado, juntando as difeotopias anteriores, obtemos $K_t : M \longrightarrow M$, logo $K_1 : M \longrightarrow M$ preserva orientação, com

$$f = g_2 \circ h = g_4 \circ K_1^{-1} \circ h,$$

isto é,

$$f = k_1 \circ f \circ h^{-1} \circ K_1 \circ h_1^{-1} \text{ em } \psi_i^{-1}(B[0; r]).$$

Queremos mostrar que $h_1 \circ K_1^{-1} \circ h$ leva $(Im\gamma) \cap \psi_i^{-1}(B[0; r_2])$ em $(Im\gamma) \cap \psi_i^{-1}(B[0; r_2])$, logo $h_1 \circ K_1^{-1}$ leva os arcos correspondentes de $h(Im\gamma) = Im\tilde{\gamma}$ em tais arcos de $Im\gamma$.

De fato, seja $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$ uma curva regular contida em $\psi_i(V(g_4, p_i))$ com $(x(0), y(0)) = (0, 0)$. Então,

$$(g_4 \circ \psi_i^{-1} - f \circ \psi_i^{-1})(x, y) = R(T_2(x, y)) = R_1(x, y),$$

logo

$$\nabla(g_4 \circ \psi_i^{-1} - f \circ \psi_i^{-1})(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = \nabla R_1(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)).$$

Mas

$$(g_4 \circ \psi_i^{-1} - f \circ \psi_i^{-1})(x(t), y(t)) = x^2(t) - y^2(t),$$

logo

$$2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t) = \nabla R_1(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))$$

e

$$\begin{aligned} 2(x'(t))^2 + 2x(t)x''(t) - 2(y'(t))^2 - 2y(t)y''(t) &= \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2}(x(t))^2 + \frac{\partial^2 R_1}{\partial y \partial x}y'(t)x'(t) \\ &+ \frac{\partial R_1}{\partial x}x''(t) + \frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y}x'(t)y'(t) \\ &+ \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2}(y'(t))^2 + \frac{\partial R_1}{\partial y}y''(t). \end{aligned}$$

Assim, $2(x'(0))^2 - 2(y'(0))^2 = 0$ e portanto $x'(0) = \pm y'(0)$.

Analogamente, se $(x_s(t), y_s(t))$, $t \geq 0$ é uma curva regular contida em $\psi_i(V(\bar{F}_s^3, p_i))$ então

$$x'_s(0) = \pm y'_s(0), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Assim, a estável-homotopia de $g_4 \circ \psi_i^{-1}$ a $g_5 \circ \psi_i^{-1}$ não move muito g_4 para $(x, y) \cong (0, 0)$ e $s \in [0, 1]$.

Desse modo, podemos escolher $h_1 : M \rightarrow M$ como acima, tal que $h_1 \cong id$ numa vizinhança de p_i , logo h_1 preserva orientação.

Por outro lado, em $B[0; r_2]$,

$$\begin{aligned} f \circ \psi_i^{-1}(x, y) &= k_1 \circ f \circ \psi_i^{-1}(\psi_i \circ h^{-1} \circ K_1 \circ h_1^{-1} \circ \psi_i^{-1})(x, y) \\ &= k_1 \circ f \circ \psi_i^{-1}(u(x, y), v(x, y)). \end{aligned}$$

Então para $(x, y) \in B[0; r_2]$,

$$\begin{aligned}
 |y| < |x| &\iff f \circ \psi_i^{-1}(x, y) < c_i \\
 &\iff k_1 \circ f \circ \psi_i^{-1}(u(x, y), v(x, y)) < c_i \\
 &\iff f \circ \psi_i^{-1}(u(x, y), v(x, y)) < c_i \\
 &\iff |v(x, y)| < |u(x, y)|.
 \end{aligned}$$

Logo $(u(x, y), v(x, y))$ leva

$$A = \{(x, y)/y = \pm x, \quad x > 0\}$$

e

$$B = \{(x, y)/y = \pm x, \quad x < 0\}$$

em A e B , ou em B e A , respectivamente. No segundo caso, basta trocar θ por $\theta - \pi$ no lema 3.2.3, como queríamos.

Temos, até o momento, a existência de uma estável-homotopia entre g e uma função g_5 que coincide com f num compacto

$$K_i = \psi_i^{-1}(B[0; r_2])$$

que contém o ponto crítico p_i em seu interior. Suponhamos que $\text{ind}_f(p_i) = 1$.

Denotemos agora, por $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ curvas regulares, simples e fechadas, tais que $\text{Im}\gamma \subset V(f, p_i)$, $\text{Im}\tilde{\gamma} = h(\text{Im}\gamma) \subset V(g_5, p_i)$, $\tilde{\gamma}$ é homotópica a γ e $\gamma(0) = \gamma(1) = p_i = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$. Construiremos uma difeotopia de M que leva $\tilde{\gamma}$ numa nova curva regular que coincide com γ em intervalos disjuntos da forma $[0, s_0]$ e $[s_1, 1]$, a qual é transversal a γ no complementar destes intervalos, com o objetivo de poder aplicar os resultados do capítulo 2 para fazer g coincidir com f em $V(f, p_i)$.

Sejam

$$a = \gamma(\bar{t}_0) = \tilde{\gamma}(\bar{t}_0) \in \overset{\circ}{K}_i$$

e

$$b = \gamma(\bar{t}_1) = \tilde{\gamma}(\bar{t}_1) \in \overset{\circ}{K}_i,$$

para algum $\bar{t}_0$ e algum $\bar{t}_1$ em $[0, 1]$ com $0 < \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < 1$.⁹

Sejam (U_0, φ_0) e (U_1, φ_1) sistemas de coordenadas locais em torno de a e b , respectivamente, tais que $\bar{U}_0 \cap \bar{U}_1 = \emptyset$, $U_0 \cap \text{Im}\gamma$ e $U_1 \cap \text{Im}\gamma$ são conexos, $U_0 \subset \overset{\circ}{K}_i - \{p_i, b\}$, $U_1 \subset \overset{\circ}{K}_i - \{p_i, a\}$, $\varphi_0(a) = (0, 0)$ e $\varphi_1(b) = (0, 0)$.¹⁰

⁹ver figura 3.1

¹⁰Ver figura 3.1

Figura 3.1: $Im\gamma \cap K_i$ e $Im\tilde{\gamma} \cap K_i$.

Fixemos $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{\gamma}(t_0 - \varepsilon), \tilde{\gamma}(t_0 + \varepsilon) \in U_0, \tilde{\gamma}(t_1 - \varepsilon), \tilde{\gamma}(t_1 + \varepsilon) \in U_1$ e tomemos uma curva regular, simples e fechada $\tilde{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}(t)$, $\forall t \in [0, t_0 - \varepsilon] \cup [t_0 + \varepsilon, 1]$, $\tilde{\gamma}_1(t) \neq \tilde{\gamma}(t)$, $\forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ e $\gamma([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) \subset V_0$, sendo V_0 um aberto tal que $\overline{V_0} \subset U_0$. Os resultados obtidos em 2.3 garantem a existência de uma difeotopia $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $F_1(Im\tilde{\gamma}) = Im\tilde{\gamma}_1$ e F_t é a identidade em $M - U_0$.

Analogamente, tem-se uma difeotopia $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que H é a identidade em $M - U_1$ e leva $\tilde{\gamma}_1$ em uma curva $\tilde{\gamma}_2$ tal que

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_1(t), \quad \forall t \in [0, t_1 - \varepsilon] \cup [t_1 + \varepsilon, 1]$$

e

$$\tilde{\gamma}_2(t) \neq \tilde{\gamma}_1(t), \quad \forall t \in]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[,$$

tal que $\tilde{\gamma}_2([t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]) \subset V_1$, sendo $V_1 \subset M$ um aberto tal que $\overline{V_1} \subset U_1$.¹¹

Figura 3.2: $Im\gamma \cap K_i$ e $Im\tilde{\gamma}_2 \cap K_i$.

¹¹vide figura 3.2.

Consideremos, agora, vizinhanças abertas U'_i, U''_i de p_i em M tais que $Im\gamma \cap U'_i, Im\tilde{\gamma} \cap \overset{o'}{U}_i, Im\gamma \cap U''_i$ e $Im\tilde{\gamma}_2 \cap U''_i$ são conexos,

$$\overline{U}'_i \subset U''_i,$$

$$\tilde{\gamma}_2(t) \in \overline{U}'_i \text{ se } 0 \leq t \leq t_0 - \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } t_1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq 1,$$

$$\tilde{\gamma}_2(t) \in U''_i - \overline{U}'_i \text{ se } t_0 - \frac{\varepsilon}{2} < t < t_0 + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } t_1 - \frac{\varepsilon}{2} < t < t_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\tilde{\gamma}_2(t) \in M - U''_i \text{ se } t_0 + \frac{\varepsilon}{2} < t < t_1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Decorre do teorema 1.7.3 e das observações finais do capítulo 1 a existência de uma curva regular, simples e fechada $\tilde{\gamma}_3 : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\tilde{\gamma}_3(t) = \tilde{\gamma}_2(t)$, $0 \leq t \leq t_0 - \frac{\varepsilon}{2}$, $t_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq 1$ e $\tilde{\gamma}_3$ é transversal a γ e a $\tilde{\gamma}$ em $[t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, t_1 + \frac{\varepsilon}{2}]$. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos tomar $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_3$ em qualquer vizinhança de $\tilde{\gamma}$ em $C^\infty([0, 1], M)$. Segue que $\tilde{\gamma}_3$ é homotópica a $\tilde{\gamma}$ por uma homotopia fixa em $\tilde{\gamma}([0, t_0 - \varepsilon] \cup [t_1 + \varepsilon, 1])$. Dos resultados do capítulo 2, decorre a existência de uma difeotopia $K : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $K_1 \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_3$ e $K_t = id$ fora de um compacto que contém $V(g, p_i)$ no seu interior, fora de K_i e fora de uma vizinhança de $Im\tilde{\alpha}$. Aqui não seria necessário usar os resultados do capítulo 2, uma vez que, sendo $\tilde{\gamma}_3$ próxima de $\tilde{\gamma}$, poderíamos tomá-la transversal às curvas integrais por pontos de $Im\tilde{\gamma}$, de um campo pseudo-gradiente para g_5 , uma vez que $\tilde{\gamma}$ o é e $[0, 1]$ é compacto. Nesse caso teríamos que $\tilde{\gamma}_3$ cruza cada uma dessas curvas integrais em um único ponto. De fato, poderíamos construir tal difeotopia deformando $\tilde{\gamma}$ até $\tilde{\gamma}_3$ através dessas curvas integrais. Não detalharemos mais essa construção, por termos o capítulo 2 a mão.

Figura 3.3: $Im\gamma \cap K_i$ e $Im\tilde{\gamma}_3 \cap K_i$.

Denotemos por g_6 a função

$$g_5 \circ K_1 \circ H_1 \circ F_1 : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Segue que g_6 é estável-equivalente a f , coincide com f numa vizinhança de p_i e, denotando por $\tilde{\gamma}$ (por simplicidade) a curva crítica de g_6 correspondente à antiga $\tilde{\gamma}$ (de g) temos que $\tilde{\gamma}$ é homotópica a γ e tem a propriedade de transversalidade desejada.

Sejam $\alpha, \gamma, \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ as curvas críticas do nível crítico de f e g , respectivamente, que contém p_i (como na definição 3.1.2).

Seja g_1 como na observação inicial e seja $H_t : M \rightarrow M$ a difeotopia ali construída com $H_1(p_i) = q_i$. Se $F_t : [0, 1] \rightarrow M$ é a homotopia que leva γ a $\tilde{\gamma}$, seja $\mu : [0, 1] \rightarrow M$ a curva dada por $\mu(t) = F_t(0)$, com $\mu(0) = p_i$, $\mu(1) = q_i$. Conforme a observação do lema 1.5.4 (Lema de Homogeneidade) podemos escolher H_t de modo que $H_t(p_i)$, seja homotópica a $\mu(t)$, $t \in [0, 1]$. Sendo $\tilde{\gamma}_1$ a curva crítica de g_1 correspondente a $\tilde{\gamma}$, podemos modificar a homotopia G_t obtida de F_t seguida de H_{1-t} de $\tilde{\gamma}_1$ a γ de modo a torná-la fixa em p_i . Admitiremos que G_t tem essas propriedades. Assim a nova curva $\tilde{\gamma}$ (de g_6) terá a mesma propriedade. Denotando por $\tilde{\alpha}$ (também por simplicidade) a curva crítica de g_6 correspondente a curva crítica $\tilde{\alpha}$ de g , não assumiremos tal propriedade para α e $\tilde{\alpha}$.

Observamos ainda que ao alterar $\tilde{\gamma}$ pelas outras construções, o fizemos em uma vizinhança difeomorfa a uma bola de centro p_i logo $\tilde{\gamma}$ é levada em uma nova curva, que também denotaremos por $\tilde{\gamma}$, homotópica a γ por uma homotopia fixa em p_i se $\tilde{\gamma}$ o era.

Os resultados do capítulo 2 garantem a existência de uma difeotopia $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $F_1 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $F_t = id$ fora de um compacto que contém $V(g_6, p_i)$ em seu interior, fora de K_i e fora de uma vizinhança de $Im\tilde{\alpha}$ a qual podemos tomar de modo a não encontrar nenhum outro nível crítico de g_6 . Analogamente, existe uma difeotopia $G : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $G_1 \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $G_t = id$ fora de uma vizinhança de $Im\tilde{\alpha}$ e fora de K_i . A função $g_6 \circ G_t \circ F_t$ é uma estável-homotopia entre g_6 e uma função $g_7 = g_6 \circ G_1 \circ F_1$ que coincide com f em K_i e em $V(f, p_i)$.

A fim de obter o resultado acima, *para todas as curvas críticas*, procederemos a uma indução, dividida em 3 partes. Aplicando, inicialmente, o lema 3.2.2, podemos assumir que f e g têm os mesmos valores críticos.

1^a parte: Consideramos apenas os pontos críticos p_i de índice 1 e assumimos que pelo menos um dos pares de curvas críticas, γ_i e $\tilde{\gamma}_i$, α_i e $\tilde{\alpha}_i$ não são homotópicas a zero.

Seja p_1 um ponto crítico de f com esta propriedade (estamos reordenando tais pontos críticos). Temos que γ_1 e $\tilde{\gamma}_1$, assim como α_1 e $\tilde{\alpha}_1$ são homotópicas. Aplicamos os lemas 3.2.3, 3.2.4 e 3.2.6 e as construções que o seguem a p_1 , obtendo $f = g$ numa vizinhança de p_1 . Podemos assumir que γ_1 e a nova curva crítica de g correspondente a $\tilde{\gamma}_1$ (a qual denotaremos por $\tilde{\gamma}_1$, por simplicidade) são homotópicas por uma homotopia

fixa em p_1 . Os resultados do capítulo 2 se aplicam a γ_1 e $\tilde{\gamma}_1$, dando-nos ao final $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$. Tais resultados se aplicam também a α_1 e $\tilde{\alpha}_1$, dando-nos $V(f, p_1) = V(g, p_1)$.

Suponhamos que já obtivemos $V(f, p_i) = V(g, p_i)$, $i = 1, \dots, k$. Seja p_{k+1} qualquer ponto crítico com as propriedades acima, se houver.

Denotemos por N a componente conexa de $M - \left(\bigcup_{i=1}^k V(f, p_i)\right)$ que contém p_{k+1} . Observe-se que $p_i \in \bar{N}$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Sejam $k_i, l_i \in \mathbb{R}$ com $k_i < c_i = f(p_i) < l_i$ de modo que c_i seja o único valor crítico de f em $[k_i, l_i]$ e seja W a componente conexa de $f^{-1}([k_i, l_i])$ que contém p_i . Segue que $W - V(f, p_i)$ tem 3 componentes conexas A, B e C . Denotando também por h (por simplicidade) o (novo) difeomorfismo de M (para a nova g) tal que $g = k \circ f \circ h^{-1}$ ($k = id$, pelo lema 3.2.2) temos que h não troca as componentes, uma vez que $h(V(f, p_i)) = V(g, p_i) = V(f, p_i)$. Assim, se N contém A, B ou C , então $h(N)$ contém A, B ou C , respectivamente. Logo $h(N) = N$ e $q_{k+1} = h(p_{k+1}) \in h(N) = N$. Portanto na construção de g_1 , como na observação inicial, para p_{k+1} através de uma difeotopia H_t tal que H_1 leva q_{k+1} em p_{k+1} , podemos tomar H_t fixa fora de $\dot{N}$. Os outros lemas e as construções subsequentes se aplicam a p_{k+1} . Para proceder ao uso dos resultados do capítulo 2, observamos que se existem cruzamentos $\gamma_{k+1}(t_{i-1})$ e $\gamma_{k+1}(t_i)$ de $Im\gamma_{k+1}$ e $Im\tilde{\gamma}_{k+1}$ tais que os arcos de γ_{k+1} e $\tilde{\gamma}_{k+1}$ entre esses pontos formam o bordo de um disco D em M com $\dot{D} \cap Im\gamma_{k+1} = \emptyset$ e $\dot{D} \cap Im\tilde{\gamma}_{k+1} = \emptyset$, então $p_j \notin \dot{D}$, $j \in \{1, \dots, k\}$. De fato, como $Im\tilde{\gamma}_j = Im\gamma_j$ e $Im\tilde{\alpha}_j = Im\alpha_j$, $j \in \{1, \dots, k\}$, de $p_j \in \dot{D}$ seguiria que $Im\gamma_j = Im\tilde{\gamma}_j \subset \dot{D}$ e $Im\alpha_j = Im\tilde{\alpha}_j \subset \dot{D}$ e, portanto, seriam todas bordos de discos em M , contra a hipótese. Se o número de cruzamentos de $Im\gamma_{k+1}$ e $Im\tilde{\gamma}_{k+1}$ é $n = 0$, então o disco D com bordo contido em $Im\gamma_{k+1} \cup Im\tilde{\gamma}_{k+1}$ também tem essa propriedade. O mesmo ocorre com α_{k+1} e $\tilde{\alpha}_{k+1}$. Claramente, $V(f, p_i) \cap D = \emptyset$, $j = 1, \dots, k$. Assim as difeotopias do capítulo 2 podem ser fixas numa vizinhança de $\bigcup_{i=1}^k V(f, p_i)$. Segue que tais resultados se aplicam a γ_{k+1} e $\tilde{\gamma}_{k+1}$ (ou seja, são homotópicas por uma homotopia fixa em p_{k+1}) e para α_{k+1} e $\tilde{\alpha}_{k+1}$.

Como o número de pontos críticos de f é finito, procedemos à indução em qualquer ordem fixada até que $V(f, p_i) = V(g, p_i)$ para todos os pontos críticos p_i com as propriedades acima.

2 $\stackrel{a}{=}$ parte: Consideramos apenas pontos críticos de índice 1 e todas as curvas críticas homotópicas a zero.

Sejam $q \in M$ um ponto regular de f e N_0 uma das componentes conexas de $M - \bigcup_{j=r}^n V(f, p_j)$, onde $p_r, \dots, p_n$ são os pontos críticos de f com índice 1 e pelo menos uma das curvas críticas não homotópicas a zero.¹² Se $q \in N_0$, então $h(q) \in N_0$.¹³

¹²novamente, estamos reordenando tais pontos críticos.

¹³pois $h(V(f, p_j)) = V(f, p_j)$, $h(Im\gamma_j) = Im\gamma_j$ e $h(Im\alpha_j) = Im\alpha_j$, $j = r, \dots, n$ de onde con-

Construimos uma difeotopia $H : M \times [0, 1] \longrightarrow M$ tal que $H_1(h(q)) = q$, fixa fora de uma vizinhança de $M - N_0$ e fixa numa vizinhança de cada ponto crítico de f em N_0 . Podemos supor então, que $h(q) = q$.

Seja p_j um ponto crítico de f , $j \in \{1, \dots, r-1\}$, de índice 1. Temos que $Im\gamma_j, Im\tilde{\gamma}_j, Im\alpha_j$ e $Im\tilde{\alpha}_j$ são bordos de discos $D_j, \tilde{D}_j, D'_j$ e $\tilde{D}'_j$, respectivamente, em M tais que $\tilde{D}_j = h(D_j)$ e $\tilde{D}'_j = h(D'_j)$. Os discos com esta propriedade são únicos em M ; basta observar que se $M = S^2$ e $q \notin D_j, D'_j$, então, de $h(q) = q$, segue que $q \notin \tilde{D}_j, \tilde{D}'_j$. Além disso p_i não pertence a qualquer desses discos, $i = r, \dots, n$, pois, caso contrário, teríamos $Im\gamma_i = Im\tilde{\gamma}_i, Im\alpha_i = Im\tilde{\alpha}_i$ contidos no disco e portanto, homotópicas a zero.

Seja N uma componente conexa de $M - (\bigcup_{i=r}^n V(f, p_i))$ e suponhamos que p_j seja um ponto crítico de f do tipo acima em N . De $h(N) = N$, obtemos $q_j = h(p_j) \in N$. Como

$p_i \notin D_j, \tilde{D}_j, D'_j, \tilde{D}'_j$, $i = r, \dots, n$, concluímos que tais discos estão contidos em N .

Se existir $p_k \neq p_j$ do tipo acima em N , com $p_j \in \overset{\circ}{D}_k$ ou $p_j \in \overset{\circ}{D}'_k$, teremos $D_j, D'_j \subset \overset{\circ}{D}_k$ ou $D_j, D'_j \subset \overset{\circ}{D}'_k$, respectivamente. Analogamente, se existir p_l do tipo acima em N , com $p_k \in \overset{\circ}{D}_l$ ou $p_k \in \overset{\circ}{D}'_l$, teremos $D_j, D'_j \subset \overset{\circ}{D}_l$ ou $D_j, D'_j \subset \overset{\circ}{D}'_l$, respectivamente. Como o número de pontos críticos de f é finito, segue que existe um ponto crítico p_j de f do tipo acima, em N tal que:

(P) Para todo ponto crítico p_k de f do tipo acima, em N , tem-se que $p_j \notin \overset{\circ}{D}_k, \overset{\circ}{D}'_k$.

Seja p_1 um ponto crítico de f de índice 1 em N com a propriedade (P). Efetuamos a $1 \stackrel{a}{=} \text{difeotopia}$ para levar $q_1 = h(p_1)$ em p_1 , fixa fora de uma vizinhança N_1 de $V(f, p_1)$ e $V(g, q_1)$, tal que $N_1 \subset N$, $N_1 \cap V(f, p_j) = \emptyset$ e $N_1 \cap V(g, q_j) = \emptyset$, $\forall j \neq 1$. Assim, podemos supor $q_1 = p_1$. Aplicamos os lemas 3.2.3, 3.2.4 e 3.2.6 e as construções que o seguem, obtendo $f = g$ numa vizinhança de p_1 . Os resultados do capítulo 2 se aplicam a γ_1 e $\tilde{\gamma}_1$ e depois a α_1 e $\tilde{\alpha}_1$. Além disso, se $\gamma_1(t_{i-1})$ e $\gamma_1(t_i)$ são cruzamentos de $Im\gamma_1$ e $Im\tilde{\gamma}_1$ tais que os arcos de $Im\gamma_1$ e $Im\tilde{\gamma}_1$ entre esses pontos formam o bordo de um disco D com $\overset{\circ}{D} \cap Im\gamma_1 = \emptyset$ e $\overset{\circ}{D} \cap Im\tilde{\gamma}_1 = \emptyset$, então $p_i \notin \overset{\circ}{D}$, $i = 1, r, \dots, n$. Se não existir tais cruzamentos, existirá um único disco D com bordo contido em $Im\gamma \cup Im\tilde{\gamma}$ e também $p_i \notin D$, $i = 1, r, \dots, n$. De fato, $p_1 \notin D$ claramente, e se $p_i \in D$, para algum $i \in \{r, \dots, n\}$, então $Im\gamma_i = Im\tilde{\gamma}_i \subset \overset{\circ}{D}$, e seriam todas homotópicas a zero, contra a hipótese. Assim, as difeotopias do capítulo 2 podem ser tomadas fixas numa vizinhança de $M - N_1$. Ao final, obtemos $V(f, p_1) = V(g, p_1)$.

Seja N_2 uma componente conexa de $M - \bigcup_{i=1, r, \dots, n} V(f, p_i)$ e seja p_2 um ponto

cluimos que h não troca as componentes conexas.

crítico de f de índice 1 em N_2 . Então $p_1 \notin \overset{\circ}{D}_2, \overset{\circ'}{D}_2$. De fato, se p_1 pertencesse ao bordo de $\overline{N}_2$ teríamos

(i) $N_2 = \overset{\circ}{D}_1$ ou $N_2 = \overset{\circ'}{D}_1$ e, nesse caso, $D_2, D'_2 \subset \overset{\circ}{D}_1$ ou $D_2, D'_2 \subset \overset{\circ'}{D}_1$, pois $q \notin D_2, D'_2$, respectivamente, logo $p_1 \notin \overset{\circ}{D}_2, \overset{\circ'}{D}_2, \overset{\circ}{\tilde{D}}_2, \overset{\circ'}{\tilde{D}}_2$, ou

(ii) $N_1 = N_2 \cup D_1 \cup D'_1$ e, pela propriedade (P), $p_1 \notin D_2, D'_2$.

Se p_1 não pertence ao bordo de $\overline{N}_2$, então N_2 é uma componente conexa de $M - \bigcup_{i=r, \dots, n} V(f, p_i)$, $N_2 \neq N_1$, logo $p_1 \notin N_2$ e p_i não pertence a estes discos, $i = 1, r, \dots, n$.

Suponhamos, indutivamente, que $V(f, p_i) = V(g, p_i)$, $i = 1, \dots, s-1, r, \dots, n$, $1 \leq s-1 < r$ e que se N_s é uma componente conexa de

$$M - \bigcup_{i=1, \dots, s-1, r, \dots, n} V(f, p_i)$$

e p_s é um ponto crítico de índice 1 de f em N_s então $p_i \notin \overset{\circ}{D}_s, \overset{\circ'}{D}_s$, $i = 1, \dots, s-1$.

Seja N_s uma tal componente e p_s um tal ponto. Então, claramente, $p_i \notin D_s, D'_s$, $i = r, \dots, n$ e como $\tilde{D}_s = h(D_s)$, $\tilde{D}'_s = h(D'_s)$ e $h(p_i) = p_i$, então $p_i \notin \tilde{D}_s, \tilde{D}'_s$, $i = 1, \dots, s-1, r, \dots, n$. Logo $D_s, D'_s, \tilde{D}_s, \tilde{D}'_s \subset N_s$ e podemos escolher p_s em N_s com a propriedade (P).

Aplicamos as construções e lemas deste capítulo, tomando difeotopias fixas fora de uma vizinhança de $M - N_s$ para obter $f = g$ numa vizinhança de p_s . Se os arcos de $Im\gamma_s$ e $Im\tilde{\gamma}_s$ de $\gamma_s(t_{i-1})$ a $\gamma_s(t_i)$ formam o bordo de um disco D em M , então $p_1, \dots, p_{s-1} \notin \overset{\circ}{D}$ pois $D \subset D_s$ ou $D \subset D'_s$. No caso em que os arcos de $Im\gamma$ e $Im\tilde{\gamma}$ de a_0 a $\gamma(t_1)$ ou de $\gamma(t_1)$ a a_1 formam o bordo de um disco D , também temos que $D \subset D_s$ ou $D \subset D'_s$, logo também $p_1, \dots, p_{s-1} \notin \overset{\circ}{D}$. Assim podemos aplicar os resultados do capítulo 2 a $\gamma_s, \tilde{\gamma}_s$ e $\alpha_s, \tilde{\alpha}_s$ como antes, com difeotopias fixas numa vizinhança de $M - N_s$.

Sejam então, N_{s+1} uma componente conexa de $M - \bigcup_{i=1, \dots, s, r, \dots, n} V(f, p_i)$ e p_{s+1} um ponto crítico de f de índice 1 em N_{s+1} . Então $p_i \notin \overset{\circ}{D}_{s+1}, \overset{\circ'}{D}_{s+1}$, $i = 1, \dots, s$. De fato, se $p_s \in \partial N_{s+1}$, então:

(i) $N_{s+1} = D_s$ ou $N_{s+1} = D'_s$ e, nesse caso, $D_{s+1}, D'_{s+1} \subset \overset{\circ}{D}_s$ ou $D_{s+1}, D'_{s+1} \subset \overset{\circ'}{D}_s$ logo $p_s \notin D_{s+1}, D'_{s+1}$, e como $p_1, \dots, p_{s-1} \notin D_s, D'_s$, então $p_1, \dots, p_{s-1} \notin D_{s+1}, D'_{s+1}$; ou

(ii) $N_s = N_{s+1} \cup D_s \cup D'_s$ e, pela propriedade (P), $p_s \notin D_{s+1}, D'_{s+1}$ e, como $p_{s+1} \in N_s$ então $p_i \notin \overset{\circ}{D}_{s+1}, \overset{\circ'}{D}_{s+1}$, $i = 1, \dots, s-1$. Se $p_s \notin \partial N_{s+1}$ então N_{s+1} é componente conexa de $M - \bigcup_{i=1, \dots, s-1, r, \dots, n} V(f, p_i)$, $N_{s+1} \neq N_s$, logo $p_1, \dots, p_{s-1} \notin \overset{\circ}{D}_{s+1}, \overset{\circ'}{D}_{s+1}$ e

como $D_{s+1}, \overset{\circ}{D}_{s+1} \subset N_{s+1}$ (pois $p_1, \dots, p_{s-1}, p_r, \dots, p_n \notin \overset{\circ}{D}_{s+1}, \overset{\circ'}{D}_{s+1}$) e $p_s \in N_s$ então $p_s \notin D_{s+1}, \overset{\circ}{D}_{s+1}$.

Como o número de pontos críticos de f é finito, ao final da indução obtemos $V(f, p_i) = V(g, p_i)$ para todos os pontos críticos p_i de f com $\text{ind}_f(p_i) = 1$.

3 $\overset{a}{=}$ parte: Para pontos críticos de índice 0 ou 2.

Nesse caso, dado p_1 qualquer de índice 0 ou 2, se p_1 pertence à componente conexa N de $M - \bigcup_{\text{ind}_f(p_i)=1} V(f, p_i)$, então $q_1 = h(p_1) \in N$ como antes e podemos construir a difeotopia H_t de modo que H_1 leva q_1 em p_1 , fixa fora de N . Aplicamos, a seguir, os lemas 3.2.3, 3.2.4 e 3.2.6 a p_1 e a seguir aos outros pontos críticos de índice 0 ou 2, indutivamente, em qualquer ordem fixada, obtendo finalmente, uma nova função de Morse g estável-equivalente à original e tal que $f = g$ nas curvas críticas e numa vizinhança de cada ponto crítico.

Denotemos, agora, por

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$$

uma curva regular e simples tal que $\text{Im} \gamma \subset V(f, p_i) \cap V(g_6, p_i)$, $a = \gamma(0) \neq \gamma(1) = b$ com $a, b \in \overset{\circ}{K}_i$ e $p_i \notin \text{Im} \gamma$.¹⁴

Pretendemos, agora, fazer g_6 coincidir com f numa vizinhança Z_i de $\text{Im} \gamma$.

Sejam X_1 um campo pseudo-gradiente para f e X_2 um campo pseudo-gradiente para g_6 . Conforme o lema 1.3.2, podemos tomar X_1 e X_2 de modo que $X_1 \equiv X_2$ em K_i . Segue do fato de f e g_6 não possuírem ponto crítico numa vizinhança aberta Z de $\text{Im} \gamma$, que $X_1(f) > 0$ e $X_2(g_6) > 0$ sobre Z , de onde multiplicando-se $X_1(f)$ e $X_2(g_6)$ em cada ponto de Z pelos números reais positivos $\frac{1}{X_1(f)}$ e $\frac{1}{X_2(g_6)}$, respectivamente, podemos assumir que $X_1(f) \equiv 1$ e $X_2(g_6) \equiv 1$ em Z .

Consideremos curvas integrais

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow Z$$

e

$$\varphi_2 : [a, b] \longrightarrow Z$$

para os campos de vetores X_1 e X_2 , respectivamente. Então

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_1) = X_1(f) \equiv 1$$

¹⁴Lembremos que $K_i \subset M$ é um compacto que contém o ponto crítico p_i em seu interior no qual f e g_6 coincidem.

e

$$\frac{d}{dt}(g_6 \circ \varphi_2) = X_2(g_6) \equiv 1,$$

portanto

$$f(\varphi_1(t)) = t + \text{constante}$$

e

$$g_6(\varphi_2(t)) = t + \text{constante}.$$

Fazendo as mudanças de parâmetros

$$\psi_1(s) = \varphi_1(s - \text{constante}),$$

e

$$\psi_2(s) = \varphi_2(s - \text{constante}),$$

obtemos curvas integrais ψ^1 e ψ^2 satisfazendo

$$f(\psi^1(s)) = s \quad \text{e} \quad g_6(\psi^2(s)) = s.$$

Fixemos $k_i, l_i \in \mathbb{R}$, com $k_i < c_i < l_i$ e c_i o único valor crítico de f e de g_6 em $[k_i, l_i]$. Podemos tomar k_i e l_i suficientemente próximos de c_i de modo que $\psi_w^1(s) \in Z$ e $\psi_w^2(s) \in Z$, $\forall w \in \text{Im}\gamma, \forall s \in [k_i, l_i]$ e $\psi_w^1(s) \in \overset{\circ}{K}_i$ para $w = \gamma(0)$ e para $w = \gamma(1)$, onde $\psi_w^j(s)$ é a curva integral de X_j com $\psi_w^i(c_i) = w$, $i = 1, 2$. Sejam $N_j = \{\psi_w^j(s)/w \in \text{Im}\gamma, s \in [k_i, l_i]\}$, $j = 1, 2$. Cada curva integral de X_1 e X_2 que passa por um ponto de N_1 ou N_2 , respectivamente, pode ser estendida de modo único a um intervalo maximal, o qual necessariamente é $[k_i, l_i]$. Portanto, para cada $w \in N_1$ existe uma única curva integral maximal

$$\psi_w^1 : [k_i, l_i] \longrightarrow N_1$$

que passa por w , e satisfaz

$$f(\psi_w^1(s)) = s, \quad \forall s \in [k_i, l_i]$$

e existe para cada $w \in N_2$, uma única curva integral maximal

$$\psi_w^2 : [k_i, l_i] \longrightarrow N_2$$

que passa por w , e satisfaz

$$g_6(\psi_w^2(s)) = s, \quad \forall s \in [k_i, l_i].$$

Além disso, $\psi_w^1(s)$ e $\psi_w^2(s)$ são funções diferenciáveis nas variáveis w e s ¹⁵. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $[k_i, l_i] = [-1, 1]$, $c_i = 0$, $f(N_1) = [-1, 1]$ e $g_6(N_1) = [-1, 1]$.

Logo, sendo $Z'_j = \{\psi_w^j(s)/w \in Im\gamma \text{ e } s \in [-1, 1]\}$ ¹⁶ temos difeomorfismos

$$k_1 : [0, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow Z'_1$$

e

$$k_2 : [0, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow Z'_2$$

dados por

$$k_1(y, s) = \psi_{\gamma(y)}^1(s)$$

e

$$k_2(y, s) = \psi_{\gamma(y)}^2(s),$$

com inversas

$$k_1^{-1}(w) = (y, f(w)), \text{ onde } \gamma(y) = \psi_w^1(0)$$

e

$$k_2^{-1}(w) = (y, g_6(w)), \text{ onde } \gamma(y) = \psi_w^2(0)$$

respectivamente.

Seja $k_2^{-1} \circ k_1(y, s) = (u(y, s), v(y, s))$. Temos que $\frac{\partial v}{\partial y}(y, 0) > 0$ em $[0, 1]$ e podemos admitir, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) > 1$, $\forall y \in [0, 1]$. De fato, tomemos $r > 0$, com $0 < 3r < 1$, uma função diferenciável $\rho : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \rho(s) = 1, & \text{se } |s| \leq 2r, \\ \rho(s) = 0, & \text{se } |s| \geq 3r, \\ 0 < \rho(s) < 1, & \text{se } 2r < |s| < 3r \end{cases}$$

e a função contínua $\xi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\xi(y) = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y}(y, 0), & \text{se } \frac{\partial v}{\partial y}(y, 0) < 1, \\ 1, & \text{se } \frac{\partial v}{\partial y}(y, 0) \geq 1. \end{cases}$$

¹⁵Ver [16], Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias.

¹⁶Observemos que $\partial Z'_i = \psi_{\gamma(0)}^i([c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]) \cup \psi_{\gamma(1)}^i([c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon])$

Observe-se que existem vizinhanças U_0 e U_1 de $\gamma(0)$ e de $\gamma(1)$, respectivamente, tais que $\xi(y) = 1$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(y, s) = 1$, $\forall s \in [-1, 1]$ e para todo y tal que $\gamma(y) \in U_0 \cup U_1$. Fixemos $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min\{\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) | y \in [0, 1]\}$ e uma função diferenciável $\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ que dista de ξ menos do que ε e coincide com ξ no conjunto em que ξ é diferenciável. Multiplicando ζ por uma função diferenciável conveniente, igual a 1 numa vizinhança de $\gamma(0)$ e de $\gamma(1)$, e menor do que 1 em $[0, 1] \cap k_1^{-1}(K_i \cap Z'_1)$, podemos supor que $0 < \zeta(y) \leq 1$ em $[0, 1]$.

Seja $f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(w) = f(w), \text{ se } w \notin Z'_1$$

e

$$\begin{aligned} f_1(w) &= f_1 \circ k_1(y, s) \\ &= f \circ k_1(y, s) + \rho(s)(\zeta(y) - 1)f \circ k_1(y, s) \\ &= s + \rho(s)(\zeta(y) - 1)s, \text{ se } w \in Z'_1. \end{aligned}$$

Segue que f_1 está bem definida, pois $f_1 = f$ numa vizinhança de $\partial \overline{Z}'_1$ e fora de Z'_1 ($f_1 = f$, se $|y| \geq 3r$ e $\gamma(y) \in U_0 \cup U_1$). Além disso, $f_1 \in \mathcal{F}_0(M)$ e é estável-equivalente a f , pois $F_t^1 : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$F_t^1(w) = f(w), \text{ se } w \notin Z'_1$$

e

$$\begin{aligned} F_t^1(w) &= F_t^1 \circ k_1(y, s) \\ &= f \circ k_1(y, s) + t\rho(s)(\zeta(y) - 1)f \circ k_1(y, s), \text{ se } w \in Z'_1, \end{aligned}$$

é tal que

$$\frac{\partial}{\partial s}(F_t \circ k_1)(y, s) = 1 + t\rho'(s)(\zeta(y) - 1)s + t\rho(s)(\zeta(y) - 1) > 0,$$

pois $0 < \zeta(y) \leq 1$ acarreta $\zeta(y) - 1 < 0$ e $0 \leq |\zeta(y) - 1| < 1$ e, portanto, $t\rho'(s)(\zeta(y) - 1) \geq 0$ e $|t\rho(s)(\zeta(y) - 1)| < t\rho(s) \leq 1$

Observe-se que, para $|s| \leq 2r$,

$$f_1 = \zeta(y)f$$

e

$$f_1 \circ k_1(y, s) = \zeta(y)s.$$

Seja $k_1^1 : [0, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow Z'_1$ dada por $k_1^1(y, \tau) = \psi_{\gamma(y)}^{11}(\tau)$, onde $\psi_{\gamma(y)}^{11}$ é a curva integral de um campo pseudo-gradiente X_1^1 para f_1 com $\|X_1^1\| = 1$ e $\psi_{\gamma(y)}^{11}(0) = \gamma(y)$. Temos que $(k_1^1)^{-1}(w) = (y, f_1(w))$, $\forall w \in Z'_1$.

Segue que

$$k_1^{-1} \circ k_1^1(y, f_1(w)) = (y, f(w)),$$

onde $f_1(w) = \zeta(y)f(w)$, se $|f(w)| \leq 2r_1$, isto é,

$$k_1^{-1} \circ k_1^1(z, \tau) = \left(y(z, \tau), \frac{\tau}{\zeta(y)} \right)$$

e

$$k_2^{-1} \circ k_1^1(z, \tau) = (k_2^{-1} \circ k_1) \circ (k_1^{-1} \circ k_1')(z, \tau).$$

Logo, pondo

$$k_2^{-1} \circ k_1(y, s) = (u(y, s), v(y, s))$$

e

$$k_2^{-1} \circ k_1^1(z, \tau) = (u_1(z, \tau), v_1(z, \tau)),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(z, 0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(y, 0) \frac{\partial y}{\partial \tau}(z, 0) + \frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) \frac{1}{\zeta(y)} \\ &> \frac{1}{\xi(y)} \frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{\zeta(y)} \frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) \geq 1.$$

Seja

$$\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável satisfazendo:

$$\beta(t) = 1 \text{ se } |t| \leq r,$$

$$\beta(t) = 0 \text{ se } |t| \geq 2r$$

e

$$0 < \beta(t) < 1 \text{ se } r < |t| < 2r$$

para algum $r > 0$ fixado, tal que $2r < 1$ e consideremos a aplicação:

$$F : Z'_1 \times [0, 1] \longrightarrow Z'_2$$

dada por:

$$F_t(k_1(y, s)) = k_2 \circ H_t(y, s)$$

onde

$$H_t : [0, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [-1, 1]$$

é definida por:

$$H_t(y, s) = t\beta(s)(y, s) + (1 - t\beta(s))k_2^{-1} \circ k_1(y, s).$$

Temos que $F_t : Z'_1 \longrightarrow Z'_2$ é diferenciável $\forall t \in [0, 1]$,

$$F_0(w) = w, \quad \forall w \in Z'_1$$

$$F_1(w) = w \text{ para todo } w = \psi_y^1(s) \text{ com } |s| \geq 2r$$

$$F_1(w) = k_2 \circ k_1^{-1}(w) \text{ se } |s| \leq r$$

e

$$F_t(w) = w, \quad \forall t \in [0, 1] \text{ e } \forall w \in K_i \cap N_1.$$

Observe-se que $g_6 \circ F_t$ não possui ponto crítico em Z'_1 . De fato

$$\begin{aligned} g_6 \circ F_t(k_1(y, s)) &= g_6 \circ k_2 \circ H_t(y, s) \\ &= t\beta(s)s + (1 - t\beta(s))v(y, s), \end{aligned}$$

onde $k_2^{-1}(k_1(y, s)) = (u(y, s), v(y, s))$.

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(g_6 \circ F_t)(y, s) &= \frac{\partial v}{\partial s}(y, s) + t\beta(s)(1 - \frac{\partial v}{\partial s}(y, s)) + t\beta'(s)(s - v(y, s)) \\ &= \frac{\partial v}{\partial s}(y, s) - t\beta(s)\frac{\partial v}{\partial s}(y, s) + t\beta(s) \\ &\quad + t\beta'(s)(s - v(y, s)) > 0, \end{aligned}$$

pois

$$\frac{\partial v}{\partial s}(y, s) - t\beta(s)\frac{\partial v}{\partial s}(y, s) + t\beta(s) > 0$$

e

$$t\beta'(s)(s - v(y, s)) \geq 0,$$

onde a última desigualdade decorre do fato de podermos tomar $r > 0$, suficientemente pequeno, de modo a obter $\frac{\partial v}{\partial s} > 1$ e, conseqüentemente $s - v(y, s) < 0$.

Decorre destes fatos que a função

$$G : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

definida por

$$G(w, t) = \begin{cases} g_6 \circ F_t(w) & \text{se } w \in Z, \\ g_6(w) & \text{se } w \in M - Z \end{cases}$$

é uma estável-homotopia entre g_6 e uma função G_1 , com $G_t \in \mathcal{F}_0(M)$, $\forall t \in [0, 1]$, que satisfaz

$$g_7 = g_6 \text{ em } M - Z$$

e

$$g_7 = f \text{ em uma vizinhança aberta de } \text{Im} \gamma,$$

pois

$$g_7(k_1(y, s)) = g_6 \circ F_1(k_1(y, s)) = g_6 \circ k_2(y, s) = s = f(k_1(y, s)), \text{ para } |s| \leq r.$$

Observe-se que o aberto Z pode ser tomado de forma a não encontrar nenhum outro nível crítico de g_6 .

Repetimos o mesmo procedimento para todos os pontos críticos de índice 1.

Concluimos então, que existe uma estável-homotopia

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $F_0 = g_6$, F_1 coincide com f em vizinhanças abertas Z_i'' de $V(f, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ e F_1 coincide com g_6 fora de vizinhanças maiores Z_i de $V(f, p_i)$.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, existem $k_i, l_i \in \mathbb{R}$, valores regulares de f , com $k_i < c_i < l_i$ tais que uma das componentes conexas K_i de $f^{-1}([k_i, l_i])$ está contida em Z_i'' e c_i é o único valor crítico de f em $[k_i, l_i]$.

Segue que K_i é uma subvariedade de M com

$$\partial K_i \subset f^{-1}(k_i) \cup f^{-1}(l_i),^{17}$$

e

$$f|_{K_i} = g_6|_{K_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Temos que $M - \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{K}_i$ possui um número finito de componentes conexas, seja N uma dessas componentes.

¹⁷Observemos que se $\text{ind}_f(p_i) = 0$ ou 2, então $f^{-1}(k_i)$ ou $f^{-1}(l_i)$ é vazio.

É fácil ver que N é uma variedade com $\partial N = V_i \dot{\cup} V_j$, sendo V_i uma das componentes conexas de $f^{-1}(l_i)$, V_j uma das componentes conexas de $f^{-1}(k_j)$ para algum $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$, e que N possui número de Morse $\mu = 0$. Podemos, sem perda de generalidade, assumir que $l_i = 0$, $k_j = 1$ e $f(N) = g_6(N) = [0, 1]$.

Pelo teorema 1.3.4 e corolário 1.3.6, existem difeomorfismos

$$h_1 : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow N,$$

e

$$h_2 : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow N$$

tais que

$$f \circ h_1(y, s) = s, \quad e \quad g_7 \circ h_2(y, s) = s, \quad \forall (y, s) \in S^1 \times [0, 1],$$

onde

$$h_1(y, s) = \psi_{\varphi(y)}^1(s)$$

e

$$h_2(y, s) = \psi_{\varphi(y)}^2(s),$$

sendo $\varphi : S^1 \longrightarrow V_i$ um difeomorfismo e

$$\psi_{\omega}^1 : [0, 1] \longrightarrow Z$$

e

$$\psi_{\omega}^2 : [0, 1] \longrightarrow Z$$

curvas integrais máximas para campos pseudo-gradientes X_1 de f e X_2 de g_7 , com $\omega \in V_i$.

Analogamente ao caso anterior, podemos supor que $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) > 1$, e $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 1) > 1$, $\forall y \in [0, 1]$.

Sejam $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < 1$ números reais escolhidos de forma que uma das componentes conexas de $f^{-1}(r_2)$ e uma das componentes conexas de $f^{-1}(r_3)$ estejam contidas em $\overset{\circ}{K}_i$ e $\overset{\circ}{K}_j$, respectivamente, e seja $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável satisfazendo:

$$\alpha(t) = 0 \quad \text{se } t \leq r_1 \text{ ou } t \geq r_4,$$

$$\alpha(t) = 1 \quad \text{se } t \in [r_2, r_3],$$

e

$$0 < \alpha(t) < 1 \quad \text{se } t \in]r_1, r_2[\cup]r_3, r_4[,$$

De $\pi_0(Diff^+(S^1 \times [0, 1])) = 0$,¹⁸ decorre a existência de uma homotopia

$$H : (S^1 \times [0, 1]) \times [0, 1] \longrightarrow S^1 \times [0, 1]$$

com

$$H_1 = 1_{S^1 \times [0, 1]},$$

$$H_0 = h_2^{-1} \circ h_1$$

e H_t difeomorfismo que preserva orientação para todo $t \in [0, 1]$. Além disso, como $h_2^{-1} \circ h_1$ é a identidade numa vizinhança de $(S^1 \times \{0\}) \cup (S^1 \times \{1\})$, H é diferenciável em $(S^1 \times [0, 1]) \times \{0\} \cup (S^1 \times [0, 1]) \times \{1\}$, $Diff^+(S^1 \times [0, 1])$ é aberto em $C^\infty(S^1 \times [0, 1])$ e $S^1 \times [0, 1]$ é compacto, podemos assumir que H é diferenciável.

Sendo $H_t(y, s) = (u_t(y, s), v_t(y, s))$, definimos

$$K_t(y, s) = (u_t(y, \alpha(s)s + 1 - \alpha(s)), (1 - \alpha(s))s + \alpha(s)v_t(y, s)).$$

Temos que

$$\begin{aligned} K_1(y, s) &= (u_0(y, \alpha(s)s + 1 - \alpha(s)), (1 - \alpha(s))s + \alpha(s)v_0(y, s)) \\ &= (y, (1 - \alpha(s))s + \alpha(s)s) \\ &= (y, s), \\ K_0(y, s) &= (u_0(y, \alpha(s)s + 1 - \alpha(s)), (1 - \alpha(s))s + \alpha(s)v_0(y, s)), \\ &\stackrel{(*)}{=} (u_0(y, \alpha(s)s + 1 - \alpha(s)), s) \\ K_0(y, s) &= (u_0(y, s), v_0(y, s)) \\ &= H_0(y, s), \text{ se } s \in [r_2, r_3], \\ K_t(y, s) &= (u_t(y, 1), s), \text{ se } s \leq r_1 \text{ ou } s \geq r_4, \text{ e} \\ K_t(y, s) &= (u_t(y, s), v_t(y, s)) \\ &= H_t(y, s), \text{ se } s \in [r_2, r_3]. \end{aligned}$$

Observe-se que $v_0(y, s) = v_1(y, s) = s$ e, portanto, a igualdade $(*)$ verifica-se.

Seja $F : N \times [0, 1] \longrightarrow N$ definida por

$$F_t(h_1(y, s)) = h_2 \circ K_t(y, s).$$

Verifiquemos que $G : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G_t(w) = \begin{cases} g_7 \circ F_t(w), & \text{se } w \in N, \\ g_7(w), & \text{se } w \in M - N, \end{cases}$$

¹⁸ $Diff^+(S^1 \times [0, 1])$ é o espaço dos difeomorfismos de $S^1 \times [0, 1]$ que preservam orientação.

é uma estável-homotopia entre g_7 e uma função g_8 que coincide com f em $N \cup (\cup_{j=1}^n K_j)$.

Temos que

$$\begin{aligned}
 G_t \circ h_1(y, s) &= g_7 \circ F_t \circ h_1(y, s) \\
 &= g_7 \circ h_2 \circ K_t(y, s) \\
 &= g_7 \circ h_2(u_t(y, 1), s) \\
 &= s \\
 &= g_7 \circ h_2(y, s) \\
 &= g_7 \circ h_1(y, s),
 \end{aligned}$$

pois, neste conjunto, $h_2 = h_1$, o que mostra que G está bem definida em N .

Temos, ainda, que

$$\begin{aligned}
 G_1(h_1(y, s)) &= g_7 \circ F_1(h_1(y, s)) \\
 &= g_7 \circ h_2 \circ K_1(y, s) \\
 &= g_7 \circ h_2(y, s) \\
 &= s \\
 &= f(h_1(y, s)),
 \end{aligned}$$

logo $G_1(w) = f(w)$, $\forall w \in N$. Além disso,

$$\begin{aligned}
 s \in [r_2, r_3] \implies G_0(h_1(y, s)) &= g_7 \circ F_0(y, s) \\
 &= g_7 \circ h_2(K_0(y, s)) \\
 &= g_7 \circ h_2(u_0(y, s), v_0(y, s)) \\
 &= g_7 \circ h_2(H_0(y, s)) \\
 &= g_7 \circ h_2(h_2^{-1} \circ h_1(y, s)) \\
 &= g_7(h_1(y, s)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s \in [0, r_1] \cup [r_4, 1] \implies G_0(h_1(y, s)) &= g_7 \circ h_2(K_0(y, s)) \\
 &= g_7 \circ h_2(u_0(y, 1), s) \\
 &= s \\
 &= f(h_1(y, s)) \\
 &= g_7(h_1(y, s)),
 \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre de $h_1(y, s) \in K_i \cup K_j$ e $f|_{K_i \cup K_j} = g_7|_{K_i \cup K_j}$,

$$\begin{aligned}
s \in]r_1, r_2[\cup]r_3, r_4[&\implies G_0(h_1(y, s)) = g_7 \circ F_0(y, s) \\
&= g_7 \circ h_2 \circ K_0(y, s) \\
&= g_7 \circ h_2(u_0(y, \alpha(s)s + 1 - \alpha(s)), s) \\
&= s \\
&= f(h_1(y, s)).
\end{aligned}$$

Em resumo,

$$G_0 = 1_M,$$

$$G_1(w) = f(w), \text{ se } w \in N$$

e

$$G_1(w) = g_7(w), \text{ se } w \in M - N.$$

Verifiquemos, agora, que $G_t \in \mathcal{F}_0(M)$, $\forall t \in [0, 1]$. Basta verificar a não existência de pontos críticos de G_t da forma $h_1(y, s)$, com $s \in [r_2, r_3]$. Temos

$$\begin{aligned}
g_7 \circ F_t(h_1(y, s)) &= g_7 \circ h_2 \circ K_t(y, s) \\
&= g_7 \circ h_2(u_t(y, \alpha(s)s + 1 - \alpha(s), (1 - \alpha(s))s + \alpha(s)v_t(y, s))) \\
&= (1 - \alpha(s))s + \alpha(s)v_t(y, s).
\end{aligned}$$

Em vizinhanças coordenadas, podemos supor $y \in \mathbb{R}^2$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}(g_7 \circ F_t \circ h_1(y, s)) &= -\alpha'(s)s + 1 - \alpha(s) + \alpha'(s)v_t(y, s) + \alpha(s)\frac{\partial v_t}{\partial s}(y, s) \\
&= \alpha'(s)(v_t(y, s) - s) + 1 - \alpha(s) + \alpha(s)\frac{\partial v_t}{\partial s}(y, s) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

bastando, para isso, tomar r_2 e $1 - r_3$ suficientemente pequenos de modo a obter

$$\alpha'(s) > 0 \text{ e } v_t(y, s) \geq s, \text{ se } r_1 < |s| < r_2$$

e

$$\alpha'(s) < 0 \text{ e } v_t(y, s) \leq s, \text{ se } r_3 < |s| < r_4.$$

Considere a aplicação:

$$F : N \times [0, 1] \longrightarrow N$$

dada por $F_t(h_1(y, s)) = h_2 \circ H_t(y, s)$

Temos que $F_t : N \longrightarrow N$ é diferenciável $\forall t \in [0, 1]$,

$$F_0(\omega) = \omega,$$

e

$$F_1(\omega) = h_2(y, s) \text{ em } N$$

Observe-se que Z não possui ponto crítico de g_7 . Logo a aplicação:

$$G : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$G(\omega, t) = \begin{cases} g_7 \circ F(\omega, t) & \text{se } \omega \in N \\ \omega & \text{se } \omega \in M - N \end{cases}$$

é uma estável-homotopia satisfazendo

$$G_t \in \mathcal{F}_0(M) \quad \forall t,$$

$$G_0 = g_7,$$

e G_1 coincide com f em N , pois $G_1(h_1(y, s)) = g_7 \circ F_1(y, s) = f \circ h_1(y, s)$. Repetindo o mesmo procedimento para as outras componentes conexas de $M - \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{K}_i$, obtemos uma estável-homotopia entre g_7 e f , o que conclui a demonstração do teorema principal.

□

Capítulo 4

Uma Caracterização das Componentes Conexas de $\mathcal{F}_0(M)$

Izar, S. A. [8] obteve um teorema de classificação de funções de Morse em variedades de dimensão dois, conexas e orientadas fazendo corresponder a cada função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ um certo grafo e utilizando a relação de equivalência $\sim$ definida em 1.4.1. Veremos, até que ponto, este resultado é suficiente para garantir que duas funções $f, g \in \mathcal{F}_0(M)$ estejam na mesma componente conexa de $\mathcal{F}_0(M)$.

Faremos, inicialmente, um resumo dos resultados obtidos por Izar, S.A [8].

4.1 Grafo de Reeb de uma função de Morse

Nesta seção definiremos grafo de Reeb de uma função de Morse e isomorfismo entre grafos de Reeb. Faremos também, alguns exemplos para ilustrar os conceitos acima.

Definição 4.1.1 *Um grafo Γ é um par (γ, V) , sendo γ um espaço de Hausdorff e V um subespaço de γ , verificando as seguintes condições:*

- (i) *V é um subespaço fechado e discreto de γ . Os pontos de V chamam-se vértices de Γ ;*
- (ii) *$\gamma - V$ é reunião disjunta de subconjuntos abertos e_i , cada um dos quais homeomorfo a um intervalo aberto da reta real. Os conjuntos e_i chamam-se arestas de Γ ;*
- (iii) *Para cada aresta e_i , $\overline{e_i} - e_i$ é um subconjunto de V formado por um ou dois pontos. Se $\overline{e_i} - e_i$ consta de dois pontos, então o par $(\overline{e_i}, e_i)$ é homeomorfo ao par $([0, 1], (0, 1))$; se $\overline{e_i} - e_i$ consta de um só ponto, então o par $(\overline{e_i}, e_i)$ é homeomorfo ao par $(S^1, S^1 - \text{ponto})$, sendo o par topológico (A, B) constituído de um espaço topológico A e de um subespaço B de A e um homeomorfismo de*

pares. Dizemos que $h : (A, B) \longrightarrow (A', B')$ é um homeomorfismo de pares se $h : A \longrightarrow A'$ é um homeomorfismo tal que $h(B) = B'$

- (iv) A topologia de γ é tal que um subconjunto $A \subset \gamma$ é fechado se, e somente se, para cada aresta e_i , $A \cap \overline{e_i}$ é fechado em $\overline{e_i}$.

É interessante notar que grafos podem ser representados através de diagramas: cada vértice sendo representado por um ponto e cada aresta por uma curva sem auto intersecção ligando seus vértices.

Figura 4.1: Exemplo de diagrama representando um grafo

Definição 4.1.2 Dois grafos $\Gamma = (\gamma, V)$ e $\Gamma' = (\gamma', V')$ são isomorfos se existe um homeomorfismo $k : \gamma \longrightarrow \gamma'$ que leva vértices em vértices e arestas em arestas. Neste caso, diz-se que k é um isomorfismo entre Γ e Γ' .

É imediato, a partir da definição 4.1.2, que grafos isomorfos possuem diagramas iguais.

Associaremos a cada função de Morse $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ um grafo $\Gamma(f) = (\gamma(f), V_f)$. Para isso definiremos uma relação de equivalência sobre M pondo: $R_f = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } f^{-1}(t) \text{ para algum } t \in \text{Im}(f)\}$

É de verificação imediata que R_f define uma relação de equivalência sobre M .

Seja $\gamma(f) = M|_{R_f}$ o espaço quociente de M pela relação R_f , e considere a função

$$\bar{f} : \gamma(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$. A função $\bar{f}$ está bem definida e é contínua, pois $f = \bar{f} \circ p$, sendo

$$p : M \longrightarrow \gamma(f)$$

a projeção canônica.

Figura 4.2: Grafos associados à função altura em M

Definição 4.1.3 A terna $\Gamma(f) = (\gamma(f), V_f, \bar{f})$ denomina-se grafo de Reeb da função de Morse f .

A função $\bar{f}$ produzirá uma restrição ao conceito de isomorfismo, fixando “tamanhos” para as arestas.

Seja

$$C_f = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ é valor crítico de } f\}$$

e considere sobre C_f a ordem induzida da reta.

Definição 4.1.4 Sejam $f, g \in \mathcal{F}(M)$ com grafos $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$, respectivamente. Dizemos que $\Gamma(f)$ é isomorfo a $\Gamma(g)$, e indicamos por $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$, se $\Gamma(f) = (\gamma(f), V_f)$ e $\Gamma(g) = (\gamma(g), V_g)$ são isomorfos no sentido de 4.1.2 por um isomorfismo h que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_f & \xrightarrow{\bar{f}|_{V_f}} & C_f \\ h|_{V_f} \downarrow & & \downarrow k \\ V_g & \xrightarrow{\bar{g}|_{V_g}} & C_g \end{array}$$

comutativo, sendo $k : C_f \longrightarrow C_g$ uma aplicação bijetora e monotônica.

A relação de isomorfismo entre grafos de Reeb é uma relação de equivalência.

Exemplo: Os grafos dos exemplos (3) e (4) da fig.4.2 são isomorfos, mas não são isomorfos como grafos de Reeb.

Finalmente chegamos aos teoremas demonstrados por Izar, S. A.

Teorema 4.1.5 Se f e g forem funções de Morse equivalentes sobre M , então seus grafos de Reeb serão isomorfos.

□

No teorema 4.1.5 M pode ser suposta de dimensão n (ver Izar, S. A. [8])

Teorema 4.1.6 Se $f, g \in \mathcal{F}_0(M)$ possuírem grafos de Reeb isomorfos, então f será equivalente a g .

□

Veremos através de um contra-exemplo que isomorfismo entre grafos de Reeb não é suficiente para a equivalência de funções de Morse não estáveis em dimensão dois.

Donde se conclui que no teorema 3.2.1 não podemos trocar a hipótese $f, g \in \mathcal{F}_0(M)$ por $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

A figura 4.3 ilustra duas funções de Morse sobre S^2 com grafos de Reeb isomorfos mas não equivalentes.

Figura 4.3: Duas funções de Morse sobre S^2

As funções acima têm grafos de Reeb isomorfos a

Figura 4.4: Grafo de Reeb das funções de Morse da fig. 4.3.

no entanto não são equivalentes, visto que os níveis críticos correspondentes ao índice 1 não são homeomorfos.

Figura 4.5: Curvas de nível correspondentes ao ponto crítico de sela.

4.2 Conclusões

Resumindo os resultados obtidos neste trabalho e em Izar, S. A. [8], obtemos que $f, g \in \mathcal{F}_0(M)$ são estável-equivalentes se, e somente se, possuem grafos de Reeb isomorfos por um isomorfismo h , que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_f & \xrightarrow{\bar{f}|_{V_f}} & C_f \\ h|_{V_f} \downarrow & & \downarrow k \\ V_g & \xrightarrow{\bar{g}|_{V_g}} & C_g \end{array}$$

comutativo, sendo k monotônica crescente e com os níveis críticos correspondentes aos pontos críticos de índice 1 relacionados por h , homotópicos no sentido da definição 3.1.2.

No próximo exemplo temos duas funções de Morse estáveis f e g no toro T^2 com grafos de Reeb isomorfos e níveis críticos homeomorfos, porém não homotópicos e portanto pertencentes a componentes conexas disjuntas de $\mathcal{F}_0(T^2)$.

Exemplo:

Figura 4.6: T^2 .

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(u, v) = ((2 + \sin u) \cos v, (2 + \sin u) \sin v, \cos u).$$

A aplicação φ é diferenciável, e tem por imagem o toro T^2 imerso no $\mathbb{R}^3$ representado na figura 4.6.

Além disso, φ é um difeomorfismo local.

Consideremos, agora, as aplicações

$$f_1, g_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definidas por

$$f_1(x, y, z) = y - 2x,$$

e

$$g_1(x, y, z) = y - x.$$

Utilizando o atlas $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3)$ sobre T^2 dado por:

$$\varphi_1 = (\varphi|_{]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[})^{-1}, \quad U_1 = \varphi_1(]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[),$$

$$\varphi_2 = (\varphi|_{]-\pi, \pi[\times]0, 2\pi[})^{-1}, \quad U_2 = \varphi_2(]-\pi, \pi[\times]0, 2\pi[),$$

e

$$\varphi_3 = (\varphi|_{]0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[})^{-1}, \quad U_3 = \varphi_3(]0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[),$$

verifica-se facilmente que as funções

$$f = f_1|_{T^2} : T^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$g = g_1|_{T^2} : T^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

são funções de Morse estáveis com exatamente 4 pontos críticos.

As curvas de nível de f correspondentes aos pontos críticos de sela “se enrolam” duas vezes no toro antes de se fecharem, enquanto que as curvas de nível de g correspondentes aos pontos críticos de sela “se enrolam” apenas uma vez no toro antes de se fecharem. Ambas são homeomorfas, no entanto não são homotópicas.

Exemplo: Figura 4.7: T .

Sejam $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição da projeção $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\pi(x, y, z) = z$, à superfície T representada na figura 4.7, $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $h(x, y, z) = (x, y, -z)$ e $k_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k_0(z) = -z$. Segue que f e a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g = k_0 \circ f$ são funções de Morse estáveis e equivalentes, através do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 h|_T \downarrow & & \downarrow k = id \\
 T & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

pois se $(x, y, z) \in T$,

$$\begin{aligned}
 g \circ h(x, y, z) &= g(x, y, -z) \\
 &= k_0 \circ f(x, y, -z) \\
 &= k_0(-z) \\
 &= z \\
 &= f(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Além disso, $k = id$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}$ que preserva orientação e leva os valores críticos de f nos valores críticos de g . Se p e q são os pontos críticos de f com $f(p) = \frac{1}{3}$ e $f(q) = -\frac{1}{3}$, então $h(p) = q$ e $h(q) = p$ são os pontos críticos de g com $g(h(p)) = \frac{1}{3}$ e $g(h(q)) = -\frac{1}{3}$. Temos ainda, que $h(V(f, p)) = V(g, q)$.

Sendo $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ curvas regulares, simples, fechadas e orientadas, tais que $Im\gamma \subset V(f, p)$ e $Im\tilde{\gamma} = h(Im\gamma) \subset V(g, q)$, então γ e $\tilde{\gamma}$ não são homotópicas, segundo a definição 3.1.2. Se $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva regular, simples, fechada e orientada tal que $Im\tilde{\alpha} = \overline{V(g, q)} - Im\tilde{\gamma}$, então γ e $\tilde{\alpha}$ também não são homotópicas. Logo f e g não são estável-equivalentes.

Bibliografia

- [1] Armstrong, M. A., *Basic Topology*, Springer-Verlag, 1983.
- [2] Cerf, J., *Sur les Difféomorphismes de la Sphère de Dimension Trois* ($\Gamma_4 = 0$), Lectures Notes in Mathematics, 53, 1968.
- [3] Epstein, D. B. A., *Curves on 2-Manifolds and Isotopies*. Acta Math., 115(1966), 83 - 107.
- [4] Golubitsky, M. and Guillemin, V., *Stable Mappings and their Singularities*. Springer - Verlag, 1973.
- [5] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974.
- [6] Gutierrez, C. and Melo, W. de, *The Connected Components of Morse-Smale Vector Fields on Two Manifolds*. Lectures Notes in Mathematics, 597, 1976.
- [7] Hirsch, M. W., *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.
- [8] Izar, S. A., *Funções de Morse: Um Teorema de Classificação em Dimensão Dois*, Dissertação de Mestrado, IME - USP, 1978.
- [9] Milnor, J., *Differential Topology*, notes by J. Munkres, mimeographed Princeton University, 1958.
- [10] Milnor, J., *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, 1965.
- [11] Milnor, J., *Morse Theory*, Princeton University Press, 1968.
- [12] Milnor, J., *Topology from the Differentiable viewpoint*, Princeton University, 1965.
- [13] Monteiro, R. D. C., *Trabalhos de Morse sobre os Problemas de Schoenflies*, Dissertação de Mestrado, IMPA, 1984.
- [14] Munkres, J., *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, 1963.

- [15] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol.1.
- [16] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1979.
- [17] Tavares, G., *Funções de Morse e Classificação das Superfícies*, notas do 12.^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.

Errata

- página(s) linha(s): ... correção ...
- 23 3 : ... com α numa vizinhança suficientemente pequena, fixada de $\gamma \dots$
- 15 : ... ≤ 2 , sendo $S^1 \times \{1\}$ identificado com ∂D_0 , via um difeomorfismo φ . Conforme ...
- 24 8/9 : ... por $h = \varphi^{-1} \circ \bar{h} \circ (\varphi \times 1|_{[0,1]})$, $k = \varphi^{-1} \circ \bar{k} \circ (\varphi \times 1|_{[0,1]})$, $\bar{h}(x, y, t) = \dots$
- 11 : $\bar{k}(x, y, t) = (x \cos(2\pi(\|(x, y)\| - 1)t) - y \sin(2\pi(\|(x, y)\| - 1)t), x \sin(2\pi(\|(x, y)\| - 1)t + y \cos(2\pi(\|(x, y)\| - 1)t))$
- 29 6/7 : ... $K = \{0, 1\}$ será fechado em $[0, 1]$ e $ZZ = Im\gamma$ será fechado em M e subvariedade de M . Segue ...
- 8 : ... $C^\infty([0, 1], M) \dots$
- 33 14/15 : $Im\tilde{\gamma} = h(Im\gamma)$ e, $\gamma([\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \dots$
- 5 : ... $V(g, p)$ e $h(Im\alpha) = Im\tilde{\alpha}$. Suporemos ...
- 61 10 : ... centro em $(a_2, 0)$ e raio ...;
- 12 : ... $\psi(U \cap Im\gamma) \subset C_0$ e $\psi(U \cap Im\tilde{\gamma}) \subset C'_0$, já que $\psi(U \cap Im\tilde{\gamma})$ é localmente um gráfico, em torno de $(a_0, 0)$
- 3 : ... (x, y) se $x \geq a_2 + 2r_1$ ou $x \leq a_2 - 2r_1$ ou $|y| \geq 2r$,
- 63 13 : $\varphi_1(a_1) = (\varepsilon_1, 0)$
- 15 : Podemos supor, como antes, que $(\varphi_0(U_0 \cap Im\gamma)) \cup (\varphi_1(U_1 \cap Im\gamma)) \subset$ eixo Ox e $(\varphi_0(U_0 \cap Im\tilde{\gamma})) \cup (\varphi_1(U_1 \cap Im\tilde{\gamma})) \subset G_{\tilde{f}_4}$
- 6 : ... $r_1 < \varepsilon_0 < r_2$ e $r_3 < \varepsilon_1 < r_4 \dots$
- 64 14 : ... se $x \leq \varepsilon_0$ ou ...
- 15 : ... se $\varepsilon_0 < x < \bar{x}_1$ ou ...
- 67 3 : suprimir totalmente
- 4 : ... se $x \in]\bar{x}_1, 5[$.
- suprimir figura 2.30
- 68 7 : ... $= (x, y - \dots$
- 71 16/17 : suprimir totalmente
- 77 17 : $\varphi^{-1}(\gamma_i(0)) = p_i, Im\gamma_i \subset V_1, \bar{V}_1 \subset V$.
- 79 8 : ... $(\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, t), 0), (x, y) = \varphi(p), (p, t) \in U \times J;$

página(s)	linha(s): ... correção ...
	9 : em $U \times J$, onde ...;
	9/10 : ... compacidade de $\bar{V}_1 \times J$, existe $\varepsilon > 0$ tal que ...;
	11/12 : ... $(\bar{V}_1) \times J \times [-\varepsilon, \varepsilon], \dots$;
	14 : Se $p \neq \varphi^{-1}(\gamma_i(t))$, $\frac{d}{ds}(\Phi(p, t, s)) = X(\Phi(p, t, s)) \neq 0$, para ε pequeno. Seja $W_1 = \tilde{F}^{-1}(A) \cap \varphi^{-1} \dots$;
	16 : $\varphi^{-1}(\bar{V}_1) \times J$ e todo $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, onde;
	17 : ... $\gamma_i(t) - \varphi(p_i), t, s$.
	19 : ... $Im \Gamma \mid F(p, t) - c_i(t) = 0$,
	27 : ... $\gamma_i(t) - \varphi(p_i), t \dots$;
	29 : ... $\gamma_i(t) - \varphi(p_i), t \in \dots$
82	-4 : ... $f = g_2 \circ h$, considerando k tal que $g = k \circ f \circ h^{-1}$.
83	10 : $F^1 : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que ...
84	-5 : ... $+ R(T_2(x, y))$, com $(x, y) \in B[0, r_1]$ e
85	10 : ..., se $\left\ \left(\frac{x}{\sqrt{ a }}, \frac{y}{\sqrt{ b }} \right) \right\ \leq r$
85 a 87	trocar r_1 por r
88	até linha -9: trocar r_1 por r ;
	9 : $(h_1^1)^{-1} \circ (h_1^2)^{-1}$, se $ a < 1$
	10 : $(h_1^1)^{-1} \circ h_1^3$, se $ a > 1$
	12 : ... se $\left\ \left(\frac{x}{\sqrt{ a }}, \frac{y}{\sqrt{ b }} \right) \right\ \leq r$
	-7 : ... e $r_1 \leq r$, onde $0 < r_1 \leq r\sqrt{c}$, $c = \min\{ a , b \}$. A aplicação ...
91	-4 : $h_1 : M \longrightarrow M$, e $k_1 : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ que preserva ...
92	-5 : ... escolher h_1 como acima, mas definida numa vizinhança de p_i e tal que ...;
	-4/ -3 : ... orientação. De fato, em $B[0; r_2]$, ...
95	2 : ... $U'_i, Im \hat{\gamma}_2 \cap U'_i, Im \gamma \dots$
98	6 : M , e em $M - \{q\}$ se $M = S^2$, tais que $\tilde{D}_j = \dots$
99	3 : $N_2 \subset \overset{\circ}{D}_1$ ou $N_2 \subset \overset{\circ}{D}'_1$ e, ...;
	-5 : $N_{s+1} \subset D_s$ ou $N_{s+1} \subset D'_s$ e, ...
100	a partir da linha 15, trocar g_6 por g_7 e g_7 por g_8 .
	-9/ -8 : ... multiplicando-se X_1 e $X_2 \dots$
102	17 : ... $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) > 0 \dots$
	18 : $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) > 1$, $\forall y \in [0, 1] - k_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1)$ e, para $(y, s) \in k_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1)$, $v(y, s) - s \geq 0$ se $s \geq 0$ e $v(y, s) - s \leq 0$, se $s \leq 0$.

- página(s) linha(s): ... correção ...
- 9 : ... Temos que $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) > 0$ em ...
- 8 : ... $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) > 1, \quad \forall y \in [0, 1] - k_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1)$ e para
 $(y, s) \in K_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1), v(y, s) - s \geq 0$ se $s \geq 0$ e
 $v(y, s) - s \leq 0$, se $s \leq 0$. De fato, ...
- 2 : $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0)$, se $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) < 1$,
- 1 : 1, se $\frac{\partial v}{\partial s}(y, 0) \geq 1$.
- 103 2 : ... e $\frac{\partial v}{\partial s}(y, s) = 1, \dots$;
- 5 : ... função diferenciável ≤ 1 conveniente, ;
- 6 : ... que 1 em $[0, 1] - k_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1), ;$
- 7 : ... em $[0, 1]$ e $\zeta(y) < \frac{\partial v}{\partial s}(y, 0)$ em $[0, 1] - k_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1)$
- 104 5 : $k_1^{-1} \circ k_1^1(z, f_1(w)) = \dots$;
- 9 : ... $= (k_2^{-1} \circ k_1) \circ (k_1^{-1} \circ k_1^1)(z, \tau)$.
- 15 : $= \frac{1}{\zeta(y)} \frac{\partial v}{\partial s}(y, 0)$;
- 16 : $= \frac{1}{\zeta(y)} \frac{\partial v}{\partial s}(y, 0)$
- 17 : ... ≥ 1 , e > 1 em $[0, 1] - k_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1)$.
- 18 : ... $\geq 1, e > 1$ em $[0, 1] - k_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1)$
- 105 -1 : ... $s - v(y, s) < 0$ para $s > 0$, e
 $s - v(y, s) > 0$ para $s < 0$, quando $y \in [0, 1] - k_1^{-1}(\overset{\circ}{K}_i \cap Z'_1)$.
- 106 15 : ... procedimento para a outra curva α de nível p_i , e para
 todos ...
- 107 -11 : $\omega \in V_i$. Podemos supor que $h_1(y, s) = h_2(y, s) = (y, s)$, pa-
 ra $(y, s) \in \overset{\circ}{K}_i \cup \overset{\circ}{K}_j$ e $X_1 \equiv X_2$ em $\overset{\circ}{K}_i \cup \overset{\circ}{K}_j$.
- 10/ -9 : suprimir totalmente
- 108 10 : ... $H_t(y, s) = (u_t(y, s), v_t(y, s))$, podemos supor,
 analogamente ao caso anterior, que
 $\frac{\partial v_t}{\partial s}(y, 0) > 1$ e $\frac{\partial v_t}{\partial s}(y, 1) > 1$, para $\varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon$;
 $v_t(y, s) - s \geq 0$ para $t \leq \varepsilon$ e $s \leq r_2, v_t(y, s) - s \leq 0$ para
 $t \geq 1 - \varepsilon$ e $s \geq r_3, \quad \forall y \in [0, 1]$, definimos ;
- 17 : ... s), se $s \leq r_2$ ou $s \geq r_3$.
- 109 2 : Temos que, para $s \leq r_1$ ou $s \geq r_4, ;$
- 9 : ... definida em M .
- 110 1 : ... $= g_7 \circ F_0(h_1(y, s))$;
- 5 : $= f(h_1(y, s)) = g_8 \circ h_1(y, s)$.
- 7 : $G_0 = g_8$,
- 12 : ... com $s \in]r_1, r_2[\cup]r_3, r_4[$. Temos

página(s) linha(s): ...correção...
-3/ - 2/ - 1 : suprimir totalmente
111 1 a 9 : suprimir totalmente
119 10 : Logo $G : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma estável-homotopia ...

Figura 4.3: T.

página(s) linha(s): ...correção...
120 6 : ... $V(g, q)$ como na figura