“TIGHTNESS” E ESPAÇOS “CHAIN NET”

Artur Hideyuki Tomita

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA**

**Área de concentração: Topologia Geral
Orientadora: Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas**

- São Paulo, dezembro de 1990 -

Parcialmente financiado pelo CNPq

Aos meus avós,

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Aos meus pais e aos meus irmãos por toda a paciência e apoio dados ao longo da minha vida, com a qual pude prosseguir meus estudos.

À minha orientadora, professora e amiga Ofelia Teresa Alas, cujo incentivo tem sido importante desde o primeiro seminário de iniciação científica. Além disso, gostaria de ressaltar que sua paciência, compreensão, estímulo e entusiasmo foram essenciais para vencer o desânimo e insegurança que algumas vezes eu sentia. Sem dúvida, ela é, das pessoas que conheci, uma das mais importantes. Lamento apenas não tê-la conhecido antes.

Ao Prof. Frank Tall, pelo incentivo e pelas sugestões.

Aos professores Daciberg Gonçalves, Lucília Borsari, Paulo Cordaro, Stavros Christodolou, Iole Druck, Francisco Miraglia, Newton da Costa, Rubens Lintz e Alexandre Rodrigues.

Aos meus amigos Cássio Shimuta e Renata Grunberg, que conheço desde a iniciação científica com a Ofelia. O clima de amizade e entusiasmo foi muito importante para a minha formação humana e acadêmica.

Ao meu amigo Eduardo Prado que, por sua força de vontade, considero um estudante exemplar.

Aos meus amigos de graduação e pós-graduação Yamin Moyal, Lúcia Junqueira, Carlos Lopes Dantas, Pedro Lívio e Márcia Salzano.

Ao pessoal da biblioteca, do café, do xerox e da secretaria do MAT.

Ao Cássio e à Renata por me ajudarem a revisar as primeiras versões datilografadas.

À Elen del Soli e ao Walter V. Fernandes pelo trabalho de datilografia.

INDICE

INTRODUÇÃO	01
Cap. 0 - PRELIMINARES	
1. Conceitos básicos	03
2. Consistência e independência	06
3. O universo construtível	07
4. Forcing	08
Cap. I - TIGHTNESS, SUAS GENERALIZAÇÕES E OUTROS	
CARDINAIS INVARIANTES	
1. Alguns cardinais invariantes	13
2. Algumas desigualdades envolvendo as generalizações de tightness	18
3. Notas históricas e bibliográficas	30
Cap. II - ESPAÇOS CHAIN NET E OUTROS ESPAÇOS DEFINIDOS POR	
λ -SEQÜÊNCIAS	
0. Introdução	32
1. Espaços chain net e espaços radiais	32
2. Tightness em espaços chain net	46
3. Mais desigualdades sobre espaços chain net	53
4. Espaços almost radial	56
5. Notas históricas e bibliográficas	59
Cap. III - EXEMPLOS DE ESPAÇOS CHAIN NET	
0. Introdução	61
1. Exemplos de espaços chain net em ZFC	61

2. Exemplos de espaços chain net consistentes com ZFC	68
3. ' $\{0,1\}^{\aleph_1}$ é chain net' é independente de ZFC	75
4. Notas históricas e bibliográficas	80

Cap. IV - O EXEMPLO DE SHELAH

0. Introdução	81
1. O exemplo	81
2. Notas históricas e bibliográficas	109

Cap. V - COMENTÁRIOS FINAIS

BIBLIOGRAFIA	113
------------------------	-----

INTRODUÇÃO

Um cardinal invariante ou uma função cardinal é um cardinal associado a uma ‘propriedade’ do espaço topológico de modo que dois espaços homeomorfos tenham o mesmo cardinal para esta propriedade. Por exemplo, se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, definimos por $w(\langle X, \tau \rangle)$ o menor cardinal infinito κ tal que existe uma base de abertos B para $\langle X, \tau \rangle$ com a cardinalidade de B menor ou igual a κ . É fácil notar que se $\langle Y, \rho \rangle$ é homeomorfo a $\langle X, \tau \rangle$ então $w(\langle X, \tau \rangle) = w(\langle Y, \rho \rangle)$. Um dos objetivos do estudo de cardinais invariantes é relacionar por meio de desigualdades as diversas ‘propriedades’ de um espaço topológico.

Em 1971, Juhász publicou seu livro sobre cardinais invariantes. Muitos resultados novos foram demonstrados nesta área de pesquisa, o que levou Juhász a publicar uma segunda edição em 1980, com o triplo de resultados sobre o assunto.

Em 1984, no ‘Handbook of Set-Theoretic Topology’, apareceram dois artigos sobre funções cardinais: um de Hodel, com resultados provados de forma ‘ingênua’ (i.é. em ZFC) e outro de Juhász, dedicado ao uso de *forcing*.

Os espaços seqüenciais e os espaços Fréchet-Urysohn são generalizações de espaços métricos, usando a convergência de seqüências. Estes espaços surgiram no início da topologia geral, mas o primeiro a examiná-los com detalhes foi Franklin, em meados da década de 60. Em 1967, usando ‘ λ -seqüências’, Herrlich definiu os espaços *chain net* e os espaços radiais que são generalizações naturais dos espaços citados acima.

Diversos resultados sobre cardinais invariantes na classe dos espaços *chain net* foram demonstrados. Em 1986, Arhangel’skii, Isler e Tironi definiram um novo cardinal invariante relacionado ao *tightness* - o *set tightness* - dando condições suficientes para que os dois cardinais coincidam sobre espaços *chain net*. Neste mesmo ano, Juhász definiu um outro cardinal invariante relacionado ao *tightness* e ao *set tightness* - o *T-tightness*.

O objetivo do nosso texto é apresentar alguns resultados sobre o *tightness*, suas generalizações e os espaços *chain net*.

No *capítulo 0*, daremos as definições e resultados básicos. Incluímos alguns comentários sobre *forcing*, o qual será utilizado no capítulo IV.

Não daremos as definições do princípio $\diamond$ de Jensen nem do MA de Solovay-Martin, pois nos bastará os breves comentários feitos.

Nossa referência básica para teoria dos conjuntos é o livro do Kunen.

No *capítulo I*, definiremos os cardinais invariantes usados neste texto (com exceção do *chain* caráter que só será definido no capítulo II). Veremos algumas desigualdades envolvendo o *tightness* e suas variações.

No *capítulo II*, definimos os espaços *chain net*, os espaços radiais e os espaços *almost radial*. Esta última classe de espaços foi definida em 1984 por Arhangel'skii, Isler e Tironi. Definiremos também um cardinal invariante definido sobre a classe dos espaços *chain net* - o *chain* caráter. Veremos diversos resultados envolvendo cardinais invariantes - principalmente o *tightness* e suas generalizações - sobre espaços *chain net*.

Conseguimos melhorar uma desigualdade obtida por Arhangel'skii.

No *capítulo III*, veremos alguns exemplos de espaços *chain net* relacionados a resultados provados no capítulo II. Veremos também que não podemos provar (em ZFC) que $\{0,1\}^{\aleph_1}$ é *chain net* nem que $\{0,1\}^{\aleph_1}$ não é *chain net*, isto é, ' $\{0,1\}^{\aleph_1}$ é *chain net*' é independente de ZFC.

No *capítulo IV*, veremos um exemplo que mostra que o *tightness* é importante em uma famosa desigualdade. Este exemplo, criado por Shelah em 1978 responde a uma difícil questão proposta por Arhangel'skii. Sua construção usa *forcing*.

No *capítulo V*, faremos um breve comentário de alguns tópicos relacionados aos espaços *chain net* que não foram tratados neste texto, além de alguns problemas que nos despertaram interesse e que pretendemos 'atacar' futuramente.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

1. Conceitos básicos

Neste parágrafo, iremos relembrar algumas definições e alguns resultados básicos em teoria dos conjuntos e topologia geral que serão utilizados ao longo do texto. Assumiremos o axioma da escolha (AC).

a) Teoria dos conjuntos

Um conjunto x é transitivo sse cada elemento de x é um subconjunto de x .

Um conjunto α é um **ordinal** sse α é transitivo e bem ordenado pela relação de pertinência.

Se α é um ordinal então $\alpha \cup \{\alpha\}$, o **ordinal sucessor** de α , é denotado por $\alpha + 1$. Um ordinal infinito que não é sucessor é chamado **ordinal limite**.

Seja A um conjunto bem ordenado por $<$. Então o tipo de A , $\text{tp } A$, é o ordinal α tal que $\langle A, < \rangle$ e $\langle \alpha, \epsilon \rangle$ são isomorfos.

Sejam x e y conjuntos. Dizemos que x e y são equipotentes, $x \approx y$ se existe uma bijeção entre x e y .

Um ordinal α é **inicial** se α não é equipotente a nenhum ordinal β tal que β é menor que α (o que equivale a $\beta \stackrel{c}{\neq} \alpha$).

Seja A um conjunto. O **cardinal de** A , $|A|$, é o ordinal inicial α que é equipotente a A . Se $\alpha = | \alpha |$, diremos que α é um cardinal.

Seja α um ordinal. Denotaremos por $\aleph_\alpha$ o α -ésimo cardinal infinito. Por exemplo, $\aleph_0 = | \omega |$, onde ω é o conjunto dos números naturais.

Sejam A, B conjuntos e κ um cardinal. ${}^A B$ denota o conjunto das funções de A em B . $P(A)$ denota o conjunto das partes de A .

$$[A]^\kappa = \{C \in P(A) : |C| = \kappa\}$$

$$[A]^{<\kappa} = \{C \in P(A) : |C| < \kappa\}$$

$$[A]^{\leq \kappa} = [A]^\kappa \cup [A]^{<\kappa}$$

O domínio de uma função f será denotado por $D(f)$.

$$H(A) = U\{C_2 : C \in [A]^{<\aleph_0}\}.$$

Seja κ um cardinal. O **cardinal sucessor** de κ , κ^+ , é o menor cardinal estritamente maior que κ . Se $n \in \omega$, κ^{+n} é o n -ésimo cardinal sucessor e $\kappa^{+\omega} = \sup\{\kappa^{+n} : n \in \omega\}$.

Se κ e λ são cardinais, então $\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|$.

Sejam α, β ordinais e $f \in {}^\alpha \beta$. Dizemos que f é **cofinal** em β se

$$\text{Im } f = \{f(\xi) : \xi \in \alpha\}$$

é um subconjunto ilimitado de β , isto é, para cada ordinal $\theta < \beta$, existe $\xi \in \alpha$ tal que $f(\xi) \geq \theta$. Neste caso, diremos também que α é **cofinal** em β .

Seja α um ordinal. Então a **cofinalidade** de α , $cf(\alpha)$, é o menor ordinal β tal que β é cofinal em α .

Seja β um ordinal limite. Dizemos que β é **regular** se $cf(\beta) = \beta$. Um ordinal que não é regular é chamado **singular**.

Seja κ um cardinal. Então κ é um cardinal regular (singular) se κ for um ordinal regular (resp. singular).

Lembramos que se κ é cardinal infinito, então κ^+ é regular e se α é um ordinal limite, então $cf(\alpha)$ é um cardinal regular.

O próximo resultado será muito útil para *forcing*:

“ Δ -system lemma”. Seja κ um cardinal infinito e θ um cardinal regular, $\theta > \kappa$, tal que $\forall \alpha < \theta (|\bigcup_{|\lambda|=\alpha}^{\lambda < \kappa} \lambda_\alpha| < \theta)$. Assumimos $|\mathcal{A}| \geq \theta$ e $\forall x \in \mathcal{A} (|x| < \kappa)$. Então existe $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \theta$ e $\mathcal{B}$ forma um Δ -system.

Lembramos que $\mathcal{B}$ é Δ -system se existe um conjunto r tal que $x \cap y = r, \forall x, y \in \mathcal{B}, x \neq y$. r é chamado de **raiz** de $\mathcal{B}$.

b) Topologia Geral

Denotaremos um espaço topológico por $\langle X, \tau \rangle$, onde X é o suporte do espaço e τ é a topologia. Quando não houver dúvida sobre a topologia usada denotaremos simplesmente por X .

Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e $A \subset X$. Denotaremos o **fecho** de A por $cl_\tau A$. Quando não houver dúvida sobre a topologia usada, denotaremos o fecho de A por

$$clA \text{ ou } \bar{A}.$$

Seja κ um cardinal e X um espaço topológico. Então

$$cl_\kappa A = \bigcup \{clB : B \in [A]^{<\kappa}\}.$$

. Dizemos que $Y \subset X$ é **κ -fechado** se $cl_\kappa Y = Y$. Y é **κ -fechado** se Y é λ -fechado para cada cardinal $\lambda < \kappa$.

Neste texto, um espaço topológico regular ou normal não precisa ser T_2 . Diremos que um espaço topológico é $T_3(T_4)$ se o espaço for regular e T_2 (resp. normal e T_2).

Não assumiremos que um espaço compacto é necessariamente T_2 .

Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico e $Y \subset X$, então

$$\tau|_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

é a **topologia induzida** por τ sobre Y .

Sejam τ e ρ topologias sobre X . Dizemos que ρ refina τ se $\rho \supset \tau$.

Sejam $\langle Y, \rho \rangle$ e $\langle X, \tau \rangle$ espaços topológicos. Dizemos que $\langle Y, \rho \rangle$ pode ser imerso em $\langle X, \tau \rangle$ se existe $Z \subset X$ tal que $\langle Y, \rho \rangle$ e $\langle Z, \tau|_Z \rangle$ são homeomorfos.

Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico. Então $A \subset X$ é *clopen* se A é aberto e fechado.

Dizemos que $\langle X, \tau \rangle$ é **O-dimensional** se X tem uma base da topologia formada por conjuntos *clopen*.

Um espaço topológico X é diádico se X é imagem contínua de $\{0, 1\}^\kappa$, para algum cardinal κ . Lembramos que $\{0, 1\} = 2$ é tomado com a topologia discreta e $\{0, 1\}^\kappa$ é o produto topológico de κ cópias de $\{0, 1\}$.

Seja ω com a topologia discreta. Então $\beta\omega$ denota o seu compactificado de Stone-Čech.

Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X .

Dizemos que A é **raro** ('nowhere dense') em X se o interior do fecho de A é vazio. A é chamado **magro** em X se A é uma reunião enumerável de conjuntos raros em X .

2. Consistência e independência

Neste texto, iremos utilizar a axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZF). Se, além de ZF, utilizarmos um axioma A , denotaremos por $ZF + A$. Se o axioma incluído for o axioma da escolha (AC), denotaremos por ZFC.

Quando, por exemplo, um teorema for provado em $ZFC + A$, indicaremos por **teorema (A)**. Caso não haja menção alguma, significará que o resultado está provado em ZFC.

Seja T um conjunto de sentenças. Então $V \models T$ indica que V é um modelo de T , isto é, V satisfaz T . Se $T = \{A\}$, denotaremos por $V \models A$.

Vamos lembrar os seguintes fatos (suponhamos aqui $T = ZF$ ou ZFC):

T é consistente se e somente se T tem modelo.

Uma sentença A é consistente com T se e somente se existe um modelo de T que satisfaz A .

Uma sentença A é um teorema de T se e somente se todo modelo de T satisfaz A .

Uma sentença A é independente de T se e somente se A e $\neg A$ (a negação da sentença A) são consistentes com T .

3. O universo construtível

No final do século passado, Cantor perguntou se a cardinalidade da reta real era igual ao menor cardinal infinito não enumerável, ou seja, se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Na década de 30, Gödel respondeu parcialmente à questão proposta por Cantor. Antes de prosseguirmos estes comentários, vamos definir os $\aleph_\alpha$ que serão utilizados na definição de uma questão ligada à anterior. A definição é feita por indução.

$$\aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_\alpha = 2^{\aleph_\beta}, \text{ se } \alpha = \beta + 1, \text{ e se } \alpha \text{ é limite então}$$

$$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}.$$

A questão citada acima é a hipótese do contínuo (CH). Notemos que, com a notação acima, CH é a afirmação

$$\aleph_1 = \aleph_1$$

A hipótese generalizada do contínuo (GCH) é a seguinte afirmação:

$$\aleph_\alpha = \aleph_\alpha, \text{ para cada } \alpha \text{ ordinal.}$$

Suponhamos que ZF seja consistente e seja V um modelo de ZF. Então, pelo método de Gödel, podemos tomar o submodelo L dos conjuntos construtíveis. L é um modelo de ZFC + GCH e portanto, se ZF for consistente então ZFC + GCH também será consistente.

Após os resultados de Gödel, passou-se a perguntar se AC, CH ou GHC eram teoremas de ZF. Somente na década de 60, com uma nova técnica - o *forcing* de Cohen - estas questões foram respondidas negativamente.

Lembramos que o princípio combinatório $\diamond$ de Jensen é consistente com ZF, utilizando o método dos construtíveis de Gödel.

4. Forcing

Suponhamos que ZFC é consistente e seja M um modelo transitivo enumerável de ZFC.

A idéia do *forcing* é ‘engordar’ o modelo M , incluindo ‘novos objetos’. Mais precisamente, via *forcing*, conseguiremos incluir um ‘novo conjunto’ G e teremos um modelo $M[G]$ de ZFC tal que

$$G \in M[G],$$

$$M \subset M[G] \text{ e}$$

$$M \text{ e } M[G] \text{ terão os mesmos ordinais.}$$

Vamos ilustrar este fato com dois exemplos:

1) Seja κ um ordinal de M tal que $(\kappa = \aleph_1)^M$, isto é, M ‘pensa’ que κ é o menor ordinal não enumerável. Usando o *forcing*, podemos criar um modelo $M[G]$ tal que existe uma função $f \in M[G]$, f uma bijeção entre κ e ω , ou seja, em $M[G]$ κ não é cardinal e é enumerável.

2) Suponhamos que M é um modelo para ZFC + GCH.

Seja κ um ordinal tal que $(\kappa \text{ é cardinal e } \kappa > \aleph_1 = 2^{\aleph_0})^M$. Via *forcing*, podemos criar $M[G]$ tal que

i) todos os cardinais são preservados, isto é, para cada ordinal α em M ,

$$(\alpha \text{ é cardinal})^M \Leftrightarrow (\alpha \text{ é cardinal})^{M[G]}.$$

ii) $M[G]$ contém κ novos subconjuntos de ω .

De i) e ii), teremos que

$$\kappa = (\aleph_1)^M = (\aleph_1)^{M[G]} \text{ e } (2^{\aleph_0} \geq \kappa)^{M[G]}$$

$(\kappa \text{ é cardinal})^M$
 $(\kappa \leq 2^\omega = \aleph_1)^{M[G]}$

Portanto,

$$M[G] \models \text{ZFC} + \neg \text{CH}.$$

Daremos agora as definições e os resultados básicos sobre *forcing*.

Seja $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ uma ordem parcial com maior elemento 1 e M um modelo transitivo enumerável para ZFC (diremos que M é m.t.e.). Por abuso de notação diremos que $\mathbf{P}$ é a ordem parcial.

$D \subset \mathbf{P}$ é denso em $\mathbf{P}$ se, para cada $p \in \mathbf{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Seja $p \in \mathbf{P}$. Então $D \subset \mathbf{P}$ é denso abaixo de p se,

$$\forall q \leq p, \exists r \in D \text{ tal que } r \leq q.$$

Seja $G \subseteq \mathbf{P}$. G é um filtro sobre $\mathbf{P}$ se

i) $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \text{ e } r \leq q)$.

ii) $(\forall p \in \mathbf{P})(\forall r \in G)(r \leq p \rightarrow p \in G)$.

Seja $G \subseteq \mathbf{P}$. G é $\mathbf{P}$ -genérico sobre M se G é filtro sobre $\mathbf{P}$ e para cada $D \subset \mathbf{P}$ denso, se $D \in M$ então $D \cap G \neq \emptyset$.

Fato: Se M é m.t.e. e $p \in \mathbf{P}$, então existe G $\mathbf{P}$ -genérico sobre M tal que $p \in G$.

τ é um $\mathbf{P}$ -nome sse τ é uma relação e

$$\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau (\sigma \text{ é } \mathbf{P}\text{-nome e } p \in \mathbf{P}).$$

$$\text{val}(\tau, G) = \{\text{val}(\sigma, G) : \exists p \in G (\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$$

também denotaremos $\text{val}(\tau, G)$ por τ_G .

Note que τ e τ_G são definidos recursivamente.

Sejam M um m.t.e. para ZFC, $\mathbf{P} \in M$ uma ordem parcial e τ um $\mathbf{P}$ -nome. Dizemos que τ é um $\mathbf{P}$ -nome em M ($\tau \in M^{\mathbf{P}}$) se $\tau \in M$.

Seja x um conjunto. Então o $\mathbf{P}$ -nome $\check{x}$ é definido recursivamente como

$$\check{x} = \{ \langle \check{y}, \parallel_{\mathbf{P}} \rangle : y \in x \}.$$

Sejam M um m.t.e. para ZFC, $\mathbf{P} \in M$ e $G \subset \mathbf{P}$ um conjunto $\mathbf{P}$ -genérico. Então

$$M[G] = \{ \tau_G : \tau \in M^{\mathbf{P}} \}.$$

Fato: Com a notação acima temos:

- i) $\check{x}_G = x, \forall x \in M$.
- ii) $M[G]$ é um modelo para ZFC.
- iii) $M \cup \{G\} \subset M[G]$.
- iv) $M[G]$ e M tem os mesmos ordinais.
- v) Se N é m.t.e de ZFC, $M \subset N$ e $G \in N$ então $M[G] \subset N$.

Fato: Sejam M m.t.e. de ZFC, $\mathbf{P} \in M$ ordem parcial, $E \subset \mathbf{P}$ e $E \in M$. Seja G $\mathbf{P}$ -genérico sobre M . Se $p \in G$ e E é denso abaixo de p , então

$$G \cap E \neq \emptyset$$

Vamos agora definir ‘ p força ϕ ’.

Seja $\phi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula com todas as variáveis livres mostradas; seja M um m.t.e. para ZFC, $\mathbf{P}$ uma ordem parcial em M , $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbf{P}}$ e $p \in \mathbf{P}$; então

$$p \Vdash_{\mathbf{P}, M} \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ sse}$$

$$\forall G[(G \text{ é } \mathbf{P}\text{-genérico sobre } M \text{ e } p \in G) \rightarrow$$

$$\phi^{M[G]}(\text{val}(\tau_1, G), \dots, \text{val}(\tau_n, G)).$$

Quando não houver perigo de confusão denotaremos por $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Fato: Na notação acima temos

- a) $(p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge q \leq p) \rightarrow q \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$
- b) $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge p \Vdash \psi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ sse $p \Vdash (\phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \dots, \tau_n))$.
- c) $\phi(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G (p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n))$
- d) $p \Vdash \neg \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \leftrightarrow \nexists q \leq p (q \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n))$.
- e) $p \Vdash \exists x \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n)$ sse $\{r \leq q : \exists \sigma \in M^P (r \Vdash \phi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n))\}$

é denso abaixo de p .

Lembramos que $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ pode ser definido em M .

Seja θ um cardinal em M e $\mathbf{P} \in M$.

$\mathbf{P}$ tem θ -c.c. (θ -chain condition) sse toda anticadeia tem cardinalidade $< \theta$. Lembramos que A é uma anticadeia em $\mathbf{P}$ se para cada par $x, y \in A, x \neq y$, x e y são incompatíveis, isto é, $\nexists z \in \mathbf{P}$ tal que $z \leq x$ e $z \leq y$.

$\mathbf{P}$ é θ fechado se e somente se sempre que $\gamma < \theta$ e $\{p_\xi : \xi < \gamma\}$ é uma sequência decrescente de elementos de $\mathbf{P}$ (isto é, $\xi < \eta \rightarrow p_\xi \geq p_\eta$) então $\exists q \in \mathbf{P} \forall \xi < \gamma (q \leq p_\xi)$.

Seja $\mathbf{P}$ e θ nas condições acima e $G \subseteq \mathbf{P}$ $\mathbf{P}$ -genérico sobre M .

Fato: Se $\mathbf{P}$ é θ^+ -fechado, $A \subset M, A \in M[G]$ e $(|A| \leq \theta)^{M[G]}$ então $A \in M$, ou seja $M[G]$ não contém nenhum subconjunto ‘novo’ de M de cardinalidade $\leq \theta$.

Se $\mathbf{P}$ é θ -c.c. e θ^+ fechado então $M[G]$ preserva os cardinais de M , isto é

$$(\lambda \text{ é cardinal})^M \text{ sse } (\lambda \text{ é cardinal})^{M[G]}$$

Sejam M m.t.e. para ZFC, $\mathbf{P}$ uma ordem parcial em M e $G \subseteq \mathbf{P}$ $\mathbf{P}$ -genérico. Vimos que $M[G]$ é m.t.e. para ZFC. Podemos então tomar ordem parcial Q em $M[G]$ e $H \subseteq Q$ Q -genérico sobre $M[G]$ e teremos um modelo $(M[G])[H]$.

Este *forcing* em dois estágios pode, na verdade, ser feito em um estágio, isto é, existe uma ordem parcial R em M e um $I \in R$ -genérico em M tal que $M[I] = (M[G])[H]$.

Podemos, tomando-se certos cuidados, fazer ' κ -iterações' de *forcing*, onde κ é um cardinal em M .

A consistência do axioma de Martin (MA) com $ZFC + \neg CH$ usa uma iteração de *forcing* de comprimento infinito, de modo mais preciso, se M é um m.t.e. para ZFC e κ é um cardinal regular em M , tal que $(\kappa > \aleph_1)^M$ então existe uma ordem parcial Q em M definida em κ -passos tal que se H é Q -genérico em M então $M[H]$ preserva os cardinais de M , $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$ e $M[H] \models MA$.

CAPÍTULO I

TIGHTNESS, SUAS GENERALIZAÇÕES E OUTROS CARDINAIS INVARIANTES

0. Introdução. Definiremos os cardinais invariantes que serão usados neste texto e veremos algumas relações envolvendo o *tightness* e suas generalizações.

1. Alguns cardinais invariantes

Seja (X, τ) um espaço topológico.

Definição 1. O *weight* de X ,

$$w(X) = \min\{|B| : B \subset \tau \text{ é base de } X\} + \aleph_0.$$

Definição 2. A *densidade* de X ,

$$d(X) = \min\{|D| : D \subset X \text{ e } clD = X\} + \aleph_0.$$

Definição 3. Seja $p \in X$. O *caráter* de p em X ,

$$\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}_p| : \mathcal{V}_p \subset \tau \text{ e } \mathcal{V}_p \text{ é base local de } p\} + \aleph_0.$$

Definição 4. O *caráter* de X ,

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0.$$

Definição 5. Suponhamos $X - T_1$ e seja $p \in X$. O *pseudocaráter* de p em X ,

$$\psi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}_p| : \mathcal{V}_p \subset \tau \text{ e } \mathcal{V}_p \text{ é pseudobase local de } p\} + \aleph_0.$$

Definição 6. Suponhamos $X - T_1$. O pseudocaráter de X ,

$$\psi(X) = \sup\{\psi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0.$$

Definição 7. A celularidade de X ,

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \subset \tau \text{ e } \forall U, V \in \mathcal{V} \\ (U \neq V \rightarrow U \cap V = \emptyset)\} + \aleph_0.$$

Definição 8. O spread de X ,

$$s(X) = \sup\{|S| : S \subset X \text{ e } S \text{ é subespaço discreto}\} + \aleph_0.$$

Definição 9. O grau de Lindelöf,

$$L(X) = \min\{\kappa : \forall \mathcal{V} \subset \tau, \cup \mathcal{V} \supset X \rightarrow \exists \mathcal{V}' \subset \mathcal{V} (\cup \mathcal{V}' \supset X \text{ e } |\mathcal{V}'| \leq \kappa)\} + \aleph_0.$$

Definição 10. O grau de seqüências livres,

$$F(X) = \sup\{\kappa : \exists \text{ uma seqüência livre } S \text{ em } X \text{ e } |S| = \kappa\} + \aleph_0.$$

Veremos agora a definição de *tightness* e de suas generalizações.

Definição 11. Seja $p \in clA \setminus A$, $A \subset X$.

Então o *tightness atômico*,

$$a(p, A) = \min\{|B| : B \subset A \text{ e } p \in clB\}.$$

Definição 12. O *tightness* de um ponto p em X ,

$$t(p, X) = \sup\{a(p, A) : A \subset X, p \in clA \setminus A\} + \aleph_0.$$

Definição 13. O *tightness* de X

$$t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\} + \aleph_0.$$

Nota: É fácil ver que $t(X)$ é o menor cardinal infinito κ tal que $cl_\kappa A = clA$, $\forall A \subset X$.

Definição 14. Seja $A \subset X$ e $p \in clA \setminus A$. Então o *set tightness atômico*,

$$a_s(p, A) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subset P(A), p \in cl(\cup \mathcal{B}) \text{ e } p \notin \cup\{clB : B \in \mathcal{B}\}\}.$$

Definição 15. O *set tightness* de um ponto p em X ,

$$t_s(p, X) = \sup\{a_s(p, A) : A \subset X, p \in clA \setminus A\} + \aleph_0.$$

Definição 16. O *set tightness* de X ,

$$t_s(X) = \sup\{t_s(p, X) : p \in X\} + \aleph_0.$$

Definição 17. O *T-tightness* de X , $T(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que se $\{F_\alpha : \alpha \in \rho\}$ é uma seqüência crescente de fechados e $\kappa < cf(\rho)$, então

$$\bigcup_{\alpha \in \rho} F_\alpha \text{ é fechado.}$$

Vamos demonstrar duas desigualdades que iremos utilizar posteriormente. Como referências clássicas em cardinais invariantes, sugerimos o artigo de Hodel e o livro de Juhász.

Teorema 1. Seja X espaço topológico T_1 . Se $|clD| \leq 2^\gamma$ para cada $D \subset X$ com $|D| \leq t(X)$, então

$$|X| \leq 2^{\gamma \cdot L(X) \cdot \psi(X) \cdot t(X)}.$$

Demonstração:

Seja $L(X) = \kappa$, $\psi(X) = \lambda$, $t(X) = \eta$ e $\theta = \kappa \cdot \lambda \cdot \eta \cdot \gamma$.

Para cada $x \in X$, fixemos uma pseudobase de abertos $\mathcal{V}_x$ para x com $|\mathcal{V}_x| \leq \lambda$.

Vamos construir uma seqüência de fechados $\{A_\alpha : \alpha < \theta^+\}$ tais que:

- i) $(A_\alpha) \uparrow$
- ii) $|A_\alpha| \leq 2^\theta \quad \forall \alpha < \theta^+$
- iii) $\mathcal{V} \in [\cup\{\mathcal{V}_x : x \in A_\alpha\}]^{\leq \kappa}$ e $X \setminus \cup \mathcal{V} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A_{\alpha+1} \setminus \cup \mathcal{V}$.

Primeiro vamos provar o seguinte

Fato: Se $A \subset X$ e $|A| \leq 2^\theta$ então $|clA| \leq 2^\theta$.

Demonstração do Fato:

$$clA = \cup\{clB : B \in [A]^{\leq \eta}\}.$$

Por hipótese $|clB| \leq 2^\gamma$, portanto

$$|clA| \leq |A|^\eta \cdot 2^\gamma \leq (2^\theta)^\eta \cdot 2^\gamma = 2^\theta. \quad \blacksquare$$

Seja $A_0 \subset X$ fechado não-vazio, $|A_0| \leq 2^\theta$. Supondo definidos

A_α , $\alpha < \beta < \theta^+$ satisfazendo as condições, vamos definir A_β .

1) β é limite

$$|\bigcup_{\alpha < \beta} A_\alpha| \leq |\beta| \cdot 2^\theta \leq \theta^+ \cdot 2^\theta = 2^\theta.$$

Pelo fato acima,

$$|cl(\bigcup_{\alpha < \beta} A_\alpha)| \leq 2^\theta; \text{ portanto podemos tomar}$$

$$A_\beta = cl(\bigcup_{\alpha < \beta} A_\alpha)$$

2) $\beta = \alpha + 1$

Seja $\mathcal{V}_\alpha = \cup\{\mathcal{V}_x : x \in A_\alpha\}$, $\forall \mathcal{V} \in [\mathcal{V}_\alpha]^{\leq \kappa}$ tal que $X \setminus \cup \mathcal{V} \neq \emptyset$, escolhemos

$x_\mathcal{V} \in X \setminus \cup \mathcal{V}$.

Como $|\mathcal{V}_\alpha| \leq \lambda \cdot |A_\alpha| \leq \lambda \cdot 2^\theta = 2^\theta$, vamos escolher no máximo

$$|\mathcal{V}_\alpha|^\kappa \leq (2^\theta)^\kappa = 2^\theta \text{ pontos } x_\mathcal{V}, \text{ logo}$$

$$B_\beta = A_\alpha \cup \{x_\mathcal{V} : \mathcal{V} \in [\mathcal{V}_\alpha]^{\leq \kappa} \text{ e } X \setminus \bigcup \mathcal{V} \neq \emptyset\}$$

tem cardinalidade $\leq 2^\theta$.

Pelo fato,

$$A_\beta = cl(B_\beta) \text{ tem cardinalidade } \leq 2^\theta.$$

É claro que A_β satisfaz as condições da indução.

Seja $A = \bigcup_{\beta < \theta^+} A_\beta$. Como $t(X) = \eta$ e $cf(\theta^+) = \theta^+ > \eta$,

A é fechado, portanto

$$L(A) \leq L(X).$$

Pela construção

$$|A| \leq \theta^+ \cdot 2^\theta = 2^\theta.$$

Se $X \setminus A \neq \emptyset$,

tomo $y \in X \setminus A$. Para cada $x \in A$, fixo $V_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $y \notin V_x$. $\{V_x : x \in A\}$ é uma cobertura aberta de A .

Como $L(A) \leq \kappa$,

$\exists B \subset A$, $|B| \leq \kappa$ tal que

$\mathcal{V}' = \{V_x : x \in B\}$ cobre A .

Claramente,

$\exists \alpha < \theta^+$ tal que $B \subset A_\alpha$, portanto,

$\mathcal{V}'$ aparece no estágio $\alpha + 1$.

Como $y \in X \setminus \bigcup \mathcal{V}'$,

$X \setminus \bigcup \mathcal{V}' \neq \emptyset$, logo

$x_{\mathcal{V}'} \in A_{\alpha+1} \setminus \bigcup \mathcal{V}'$. Absurdo, pois

$A_{\alpha+1} \subset A \subset \cup \mathcal{V}'$ portanto $X = A$, logo
 $|X| \leq 2^\theta$. ■

Proposição 1. Seja X espaço topológico T_2 . Então $\psi(X) \leq 2^{d(X)}$.

Demonstração:

Sejam $y \in X$, $D \subset X$ tal que $clD = X$ e $|D| \leq d(X)$. Tomemos

$$\mathcal{V}_y = \{X \setminus clA : A \subset D \text{ e } y \in X \setminus clA\}.$$

Vamos mostrar que $\cap \mathcal{V}_y = \{y\}$.

De fato, seja $x \neq y$. Então existem U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Então

$$\begin{aligned} x \in cl(U) &= cl(U \cap D) = cl(U \cap D \setminus V) \subset \\ &\subset cl(D \setminus V) \text{ e} \end{aligned}$$

$y \notin X \setminus V \supset cl(D \setminus V)$; portanto

$X \setminus cl(D \setminus V) \in \mathcal{V}_y$ e

$x \notin X \setminus cl(D \setminus V)$. ■

2. Algumas desigualdades envolvendo as generalizações de tightness

Lema 1. i) $a_s(p, A)$ é igual ao menor número de vizinhanças de p em $A \cup \{p\}$ cuja intersecção não é vizinhança de p em $A \cup \{p\}$; em particular, em um espaço T_1
 $a_s(p, A) \leq \psi(p, A \cup \{p\})$.

ii) $a_s(p, A)$ é sempre um cardinal regular.

iii) Se X é regular, então $a_s(p, A) = a_s(p, \overline{A})$.

Demonstração:

i) é claramente uma reformulação da definição de $a_s(p, A)$.

ii) Seja $a_s(p, A) = \kappa$ e assumimos que $\mathcal{B} \subset P(A)$ é uma testemunha disto. Se κ fosse singular, poderíamos escrever

$$\mathcal{B} = \cup \{\mathcal{B}_\nu : \nu \in cf(\kappa)\}$$

com $|\mathcal{B}_\nu| < \kappa$ para cada ν . Mas então pela definição, $p \notin \overline{\cup \mathcal{B}_\nu}$ para $\nu \in cf(\kappa)$, logo a família $\{\cup \mathcal{B}_\nu : \nu \in cf(\kappa)\}$ mostraria que $a_s(p, A) \leq cf(\kappa) < \kappa$, contradição.

iii) $a_s(p, \overline{A}) \leq a_s(p, A)$ vale trivialmente, pois se $\mathcal{B} \subset P(A)$ é uma testemunha para $a_s(p, A)$, como $\mathcal{B} \subset P(\overline{A})$, claramente $a_s(p, \overline{A}) \leq |\mathcal{B}| = a_s(p, A)$.

Assumimos que $a_s(p, \overline{A}) = \kappa$ e seja $\mathcal{B} \subset P(\overline{A})$ uma testemunha disto, com $B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Como $p \notin \overline{B} \ \forall B \in \mathcal{B}$ temos, pela regularidade de X abertos disjuntos U_B e V_B tais que $p \in U_B$ e $\overline{B} \subset V_B$. A família $\mathcal{C} = \{A \cap V_B : B \in \mathcal{B}\}$ mostra que $a_s(p, A) \leq \kappa$.

De fato, se G é um aberto contendo p temos algum $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap G \neq \emptyset$. Como $B \subset \overline{A}$ temos

$$G \cap V_B \cap A \neq \emptyset, \quad \text{pois}$$

se $G \cap V_B \cap A = \emptyset$, como $G \cap V_B$ é aberto, teríamos $G \cap V_B \cap \overline{A} = \emptyset$, portanto $G \cap V_B \cap B = \emptyset$. De $B \subset V_B$, concluiríamos que $G \cap B = \emptyset$, contradição.

Logo, para cada vizinhança G de p , temos $\cup \mathcal{C} \cap G \neq \emptyset$, portanto, $p \in \overline{\cup \mathcal{C}}$. Por outro lado, para cada $V_B \cap A \in \mathcal{C}$, temos

$$p \notin \overline{V_B} \supset \overline{V_B \cap A}, \quad \text{pois} \quad \overline{V_B} \subset X \setminus U_B \not\ni p.$$

Portanto,

$$a_s(p, A) \leq |\mathcal{C}| \leq \kappa = a_s(p, \overline{A}). \quad \blacksquare$$

Teorema 1. $t_s(X) \leq T(X)$.

Demonstração:

Seja $a_s(p, A) = \kappa$ e $B = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma testemunha disto.

Seja $\mathcal{C} = \left\{ \overline{\bigcup_{\alpha < \xi} B_\alpha} : \xi < \kappa \right\}$. Como

$\xi < \kappa = a_s(p, A)$, temos

$p \notin \overline{\bigcup_{\alpha < \xi} B_\alpha}$, logo $p \notin \mathcal{C}$.

Por outro lado,

$\cup B \subset \mathcal{C} \Rightarrow p \in \overline{\cup B} \subset \overline{\mathcal{C}}$, logo

pela definição de T -tightness,

$$cf(a_s(p, A)) = cf(|\mathcal{C}|) \leq T(X).$$

Pelo lema 1.ii), $cf(a_s(p, A)) = a_s(p, A)$, portanto,

$a_s(p, A) \leq T(X)$, como $a_s(p, A)$ era arbitrário, temos

$$t_s(X) \leq T(X). \quad \blacksquare$$

Teorema 2. $T(X) \leq t(X)$.

Demonstração:

Seja $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma seqüência crescente de fechados tais que $cf(\kappa) > t(X)$.

Então

$\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$ é fechado.

De fato, se $p \in \overline{\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha}$, então $\exists A \subset \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$ tal que $|A| \leq t(X)$ e $p \in \overline{A}$. Como $cf(\kappa) > t(X) \geq |A|$ e $\{F_\alpha\}$ é crescente, existe $\alpha < \kappa$ tal que $A \subset F_\alpha$, portanto

$$p \in \overline{A} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha \subset \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha, \quad \text{logo}$$

$$\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha \text{ é fechado, portanto}$$

$$T(X) \leq t(X). \quad \blacksquare$$

Lema 2. Sempre que $A \subset X$, $p \in \overline{A} \setminus A$, temos $cf(a(p, A)) \leq T(X)$.

Demonstração:

Seja $\rho = a(p, A)$ e $B = \{q_\alpha : \alpha \in \rho\}$ tal que $B \subset A \setminus \{p\}$ e $p \in \overline{B}$.

Então $\{F_\alpha = \overline{\{q_\beta : \beta \in \alpha\}} : \alpha \in \rho\}$ é uma seqüência crescente de fechados com $F = \bigcup_{\alpha < \rho} F_\alpha$ não fechado, pois $B \subset F \subsetneq \overline{B}$ ($p \in \overline{B} \setminus F$); logo

$$cf \rho \leq T(X). \quad \blacksquare$$

Corolário 1. Se $t(X)$ é regular e existem $p \in X$ e $A \subset X$ tal que $a(p, A) = t(X)$, isto é, o valor $t(X)$ é atingido, então $t(X) = T(X)$.

Demonstração:

Sejam p e A satisfazendo

$a(p, A) = t(X)$. Pelo Lema 2,

$cf(a(p, A)) \leq T(X)$, como $t(X)$ é regular, concluímos

$t(X) \leq T(X)$; a igualdade vale pelo teorema 2. $\blacksquare$

Corolário 2. Se $t(X)$ é cardinal sucessor, $T(X) = t(X)$.

Demonstração:

Como $t(X)$ é sucessor, $t(X)$ é regular e é atingido, logo basta aplicar o corolário 1.

Vamos mostrar que as desigualdades dos teoremas 1 e 2 podem ser estritas, mesmo para espaços “bons”.

Proposição 1. Para cada cardinal κ existe um espaço X_κ com $T(X_\kappa) = \kappa$ e $t_s(X_\kappa) = \aleph_0$.

Demonstração:

Vamos primeiro assumir que κ é regular e definimos X_κ com conjunto suporte $(\kappa \times \omega) \cup \{p\}$ tal que:

Cada ponto em $\kappa \times \omega$ é isolado e uma vizinhança para p contém algum conjunto da forma

$$(\kappa \setminus \alpha) \times (\omega \setminus n) \cup \{p\}$$

onde $\alpha \in \kappa$ e $n \in \omega$. Então

$$T(X_\kappa) = \kappa \quad \text{e} \quad t_s(X_\kappa) = \aleph_0.$$

De fato,

$\alpha \times \omega$ é fechado para cada $\alpha < \kappa$ e

$\bigcup_{\alpha < \kappa} \{\alpha \times \omega\} = \kappa \times \omega$ não é fechado, logo

$T(X_\kappa) \geq cf(\kappa) = \kappa$. Como $|X_\kappa| = \kappa$, $T(X_\kappa) \leq \kappa$, portanto vale a igualdade.

Para ver que $t_s(X_\kappa) = \aleph_0$, basta verificar que $a_s(p, A) = \aleph_0$, se $p \in \overline{A} \setminus A$.

Pelo lema 1.i), basta notar que

$$\{p\} = \bigcap \{[A \cap (\kappa \times \omega \setminus n)] \cup \{p\} : n \in \omega\}$$

é uma intersecção enumerável de vizinhanças de p em $A \cup \{p\}$ que não é vizinhança de p em $A \cup \{p\}$.

Agora, se λ é singular, podemos tomar

$$X_\lambda = \bigoplus \{X_\kappa : \kappa < \lambda \text{ e } \kappa = cf(\kappa)\}.$$

Como cada X_κ é fechado em X_λ , claramente

$$T(X_\lambda) \geq T(X_\kappa) = \kappa, \quad \text{portanto}$$

$$T(X_\lambda) \geq \lambda = \sup\{\kappa : \kappa < \lambda \text{ e } \kappa = cf(\kappa)\}.$$

Como $|X_\lambda| = \lambda$, segue a igualdade.

Como cada X_κ é aberto em X_λ e $X_\lambda = \bigcup\{X_\kappa : \kappa < \lambda \text{ e } \kappa = cf(\kappa)\}$, temos

$$t_s(X_\lambda) \leq \sup\{t_s(X_\kappa)\} = \aleph_0. \quad \blacksquare$$

Um exemplo para $T(X) < t(X)$, pelo Corolário 2, deve ser tal que $|X|$ é cardinal limite. Seja κ um cardinal singular arbitrário, isto é, $\sigma = cf(\kappa) < \kappa$. Construiremos um espaço $X(\kappa)$ com um único ponto não isolado tal que $t(X(\kappa)) = \kappa$ e $T(X(\kappa)) = \sigma$.

O suporte de $X(\kappa)$ é $\kappa + 1$ e todos os pontos $\xi \in \kappa$ são isolados em $X(\kappa)$. Para definir as vizinhanças de κ , primeiro vamos fixar uma seqüência crescente de cardinais regulares $\{\kappa_\gamma : \gamma \in \sigma\}$ convergindo para κ . Dado $A \subset \kappa$, $A \cup \{\kappa\} \subset \kappa + 1$ é vizinhança de κ em $X(\kappa)$ sse existe algum $\mu \in \sigma$ com $|\kappa_\nu \setminus A| < \kappa_\nu$ sempre que $\nu \in \sigma \setminus \mu$.

Claramente, isto define um sistema de vizinhanças para κ . De fato,

se $A \cup \{\kappa\}$, $B \cup \{\kappa\}$, μ_A e μ_B são tais que

$$|\kappa_\nu \setminus A| < \kappa_\nu \quad \forall \nu \in \sigma \setminus \mu_A$$

$$|\kappa_\nu \setminus B| < \kappa_\nu \quad \forall \nu \in \sigma \setminus \mu_B,$$

$$\text{então } \forall \nu \in \sigma \setminus \mu, \quad \mu = \max\{\mu_A, \mu_B\},$$

$$|\kappa_\nu \setminus A \cap B| = |\kappa_\nu \setminus A \cup \kappa_\nu \setminus B| < \kappa_\nu.$$

Mostraremos que

$$t(X(\kappa)) = t(\kappa, X(\kappa)) = \kappa.$$

De fato,

se $A \subset \kappa$ e $|A| < \kappa$, então existe $\mu < \sigma$ tal que $|A| < \kappa_\nu$, $\forall \nu \in \sigma \setminus \mu$, portanto

$$|A \cap \kappa_\nu| < \kappa_\nu \quad \forall \nu \in \sigma \setminus \mu, \text{ mas}$$

$$\kappa_\nu \setminus (\kappa \setminus A) = A \cap \kappa_\nu, \text{ logo}$$

$$(\kappa \setminus A) \cup \{\kappa\} \text{ é vizinhança de } \kappa, \text{ logo } \kappa \notin \overline{A}.$$

Agora, para mostrar que $T(X(\kappa)) \leq \sigma$, considere uma seqüência crescente

$$\{F_\alpha : \alpha \in \rho\}$$

de conjuntos fechados em $X(\kappa)$, com $\rho = cf(\rho) > \sigma$.

Se $\kappa \in F_\alpha$ para algum α , então $F = \bigcup_{\alpha \in \rho} F_\alpha$ é trivialmente fechado, logo podemos assumir que $\kappa \notin F$.

Note que como $\rho \leq \kappa$ e ρ é regular, temos $\rho < \kappa$, logo $\rho < \kappa_{\mu'}$ para algum $\mu' \in \sigma$.

Como para cada $\alpha \in \rho$, o conjunto F_α é fechado e $\kappa \notin F_\alpha$, podemos definir

$\mu_\alpha \in \sigma$ por

$$\mu_\alpha = \min\{\beta : |F_\alpha \cap \kappa_\beta| < \kappa_\beta \text{ para cada } \nu \in \sigma \setminus \beta\}.$$

Como os F_α 's são crescentes, $\alpha < \alpha'$ implica $\mu_\alpha \leq \mu_{\alpha'}$, conseqüentemente, como ρ é regular e $\sigma < \rho < \kappa$, a seqüência $\{\mu_\alpha : \alpha \in \rho\}$ é limitada em σ .

De fato, se

$$B = \{\mu_\alpha : \alpha \in \rho\} \text{ é ilimitado em } \sigma,$$

a função

$$f: B \longrightarrow \rho$$

$$\xi \mapsto \text{menor } \alpha \text{ tal que } \mu_\alpha = \xi \text{ é}$$

cofinal crescente sobre ρ , logo

$$\rho = cf(\rho) \leq |B| \leq \sigma < \rho, \text{ absurdo.}$$

Portanto, existe um ordinal $\mu \in \sigma$ tal que

$$\mu' \leq \mu \text{ e } \mu_\alpha \leq \mu \text{ para cada } \alpha \in \rho.$$

Então para cada $\nu \in \sigma \setminus \mu$ a regularidade de κ_ν implica

$$|F \cap \kappa_\nu| = \left| \bigcup_{\alpha \in \rho} F_\alpha \cap \kappa_\nu \right| \leq \sum_{\alpha \in \rho} |F_\alpha \cap \kappa_\nu| < \kappa_\nu.$$

Mostrando que $\kappa \notin \overline{F}$, logo F é fechado.

Portanto $T(X) \leq \sigma$.

Por outro lado,

$\{\kappa_\gamma : \gamma < \sigma\}$ é uma seqüência crescente de fechados, pois

$$\forall \gamma < \sigma,$$

$$|\kappa_\gamma \cap \kappa_\xi| = \kappa_\gamma < \kappa_\xi, \quad \forall \xi \in \sigma \setminus (\gamma + 1),$$

além disso,

$$\cup \{\kappa_\gamma : \gamma < \sigma\} = \kappa$$

é não fechado, logo

$$T(X) \geq \sigma. \quad \blacksquare$$

O próximo resultado mostra um contraste com o corolário 2:

Proposição 2: Para cada cardinal limite λ existe um espaço X com $t(X) = \lambda$ e $T(X) = \aleph_0$.

Demonstração:

Se $cf(\lambda) = \aleph_0$, então podemos tomar $X(\lambda)$ como X . Por outro lado, note que se $\lambda \geq cf(\lambda) > \aleph_0$,

$$\lambda = \cup \{\kappa < \lambda : cf(\kappa) = \aleph_0\}.$$

Conseqüentemente, pondo

$$X = \oplus \{X(\kappa) : \kappa < \lambda \text{ e } cf(\kappa) = \aleph_0\},$$

novamente teremos

$t(X) = \lambda$ e $T(X) = \aleph_0$, que é facilmente verificável, pois, cada $X(\kappa)$ é fechado e aberto em X . ■

Note que os $X(\kappa)$ da proposição acima são espaços muito bons, por exemplo, são hereditariamente paracompactos T_2 .

Veja que o mesmo ocorre para os espaços X_κ da proposição 1.

Teorema 3. Se X é compacto T_2 então $t(X) = T(X)$.

Demonstração:

Assumimos $T(X) < t(X)$. Então pelo Teorema 3.12 [E-89], $F(X) = t(X)$, portanto X contém uma seqüência livre $S = \{p_\alpha : \alpha \in \rho\}$ de comprimento $\rho = T(X)^+$. Mas

$$\left\{ F_\alpha = \overline{\{p_\beta : \beta \in \alpha\}} : \alpha \in \rho \right\}$$

é uma seqüência crescente de fechados com $F = \bigcup_{\alpha \in \rho} F_\alpha$ não fechado.

De fato, como X é compacto,

$$\bigcap_{\alpha \in \rho} \overline{\{p_\beta : \beta \geq \alpha\}} \neq \emptyset. \text{ Seja } p \in \bigcap_{\alpha \in \rho} \overline{\{p_\beta : \beta \geq \alpha\}}.$$

Como S é seqüência livre,

$$p \notin F_\alpha = \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}}, \quad \forall \alpha \in \rho, \text{ portanto}$$

$$p \notin F, \text{ portanto}$$

$$p \in \overline{\{p_\alpha : \alpha \in \rho\}} \setminus F = \overline{F} \setminus F.$$

Mas

$$cf(\rho) = \rho > T(X), \text{ contradição,}$$

logo $T(X) \geq t(X)$, e a igualdade segue do teorema 2. ■

Lema 3. Seja $X - T_2$. Se $p \in X$ e $\psi(p, X) \geq \kappa$ e $a(p, X \setminus \{p\}) \geq \kappa$ então X contém um subespaço discreto de cardinalidade κ .

Demonstração:

Como X é T_2 ,

$$\cap \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_p\} = \{p\}.$$

Vamos construir uma seqüência

$$\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset X \setminus \{p\} \quad \text{e} \quad \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$$

por indução tal que

$$(*) \quad x_\alpha \in X \setminus \left(\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \cup \overline{V_\alpha} \right)$$

$$\text{e } x_\xi \in V_\alpha \quad \text{se } \xi > \alpha.$$

Supondo definidos x_β , $\forall \beta < \alpha$, satisfazendo $(*)$ vamos escolher x_α e V_α .

$p \notin \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}$, pois

$|\alpha| < \kappa \leq a(p, X \setminus \{p\})$ portanto

$\bigcap_{\beta < \alpha} V_\beta \cap (X \setminus \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}})$ é uma intersecção de menos que κ vizinhanças de p ,

logo

$$\exists x_\alpha \in \bigcap_{\beta < \alpha} V_\beta \cap (X \setminus \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}), \quad x_\alpha \neq p,$$

pois $\psi(p, X) \geq \kappa$.

Escolha V_α tal que $x_\alpha \notin \overline{V_\alpha}$.

$\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é claramente discreto, pois

$$\{x_\alpha\} = \left[X \setminus \left(\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \cup \overline{V_\alpha} \right) \right] \cap \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}. \quad \blacksquare$$

Proposição 3. Se X é T_2 então $t_s(X) \leq s(X)$. Se X é T_3 então $t_s(X) \leq F(X)$.

Demonstração: Seja $s(X) = \kappa$, então se X é T_2 , para cada p e A , pelo lema 3, temos $a(p, A) \leq \kappa$ ou $\psi(p, A \cup \{p\}) \leq \kappa$. Logo pelo lema 1.i) devemos ter $a_s(p, A) \leq \kappa$ (note que $a_s(p, A) \leq a(p, A \setminus \{p\})$, se $p \in \overline{A \setminus \{p\}}$), portanto, $t_s(X) \leq s(X)$.

Para ver a segunda parte, assumimos que X é T_3 . Então $a_s(p, A) = a_s(p, \overline{A})$, pelo lema 1.iii), além disso, usando o lema 1.i), podemos definir uma seqüência fortemente decrescente

$\{V_\alpha : \alpha \in a_s(p, \overline{A})\}$ de vizinhanças abertas de p em $\overline{A}$, isto é,
 $\overline{V_\alpha} \not\subset V_\beta$ se $\beta < \alpha$. Agora se $p_\alpha \in V_\alpha \setminus \overline{V_{\alpha+1}}$ para $\alpha \in a_s(p, \overline{A})$ então $\{p_\alpha : \alpha \in a_s(p, \overline{A})\}$ é uma seqüência livre em $\overline{A}$ e deste modo em X também, logo

$$t_s(X) \leq F(X). \quad \blacksquare$$

Teorema 4. Seja X espaço topológico. Se $L(X) < F(X)$ então $F(X) \leq T(X)$.

Demonstração:

Assumimos $T(X) < F(X)$ e seja $\mu = \max(L(X), T(X))$. Claramente

$\mu^+ \leq F(X)$. Por definição em X existe uma seqüência livre $\{x_\alpha : \alpha \in \mu^+\}$ de tamanho μ^+ . Para cada $\alpha \in \mu^+$ sejam

$$F_\alpha = \overline{\{x_\beta : \beta \in \alpha\}} \quad \text{e} \quad G_\alpha = \overline{\{x_\beta : \beta \in \mu^+ \setminus \alpha\}}.$$

A família $\{F_\alpha : \alpha \in \mu^+\}$ é uma seqüência crescente de fechados de X e como $cf(\mu^+) = \mu^+ > T(X)$, o conjunto

$$\bigcup_{\alpha \in \mu^+} F_\alpha \quad \text{é fechado.}$$

Disto concluímos que

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in \mu^+} F_\alpha &= \overline{\{x_\alpha : \alpha \in \mu^+\}}, \quad \text{logo} \\ \bigcap_{\alpha \in \mu^+} G_\alpha &= \emptyset. \end{aligned}$$

A família $\{X \setminus G_\alpha\}_{\alpha \in \mu^+}$ é uma cobertura aberta de X e como $L(X) \leq \mu$, tem sub-recobrimento de tamanho $\leq \mu$.

Isto equivale a dizer que existe um sub-conjunto $S \subset \mu^+$ tal que

$$|S| \leq \mu \quad \text{e} \quad \bigcap_{\alpha \in S} G_\alpha = \emptyset.$$

Pela regularidade de μ^+ , existe $\tilde{\alpha}$ tal que $S \subseteq \tilde{\alpha}$.

Claramente,

$$G_{\tilde{\alpha}} \subset G_\alpha \quad \forall \alpha \in S \quad \text{portanto}$$

$$\bigcap_{\alpha \in S} G_\alpha \supset G_{\tilde{\alpha}} \neq \emptyset, \quad \text{contradição,}$$

logo

$$F(X) \leq T(X). \quad \blacksquare$$

Proposição 4. Sejam λ um cardinal infinito e X um espaço topológico tal que

$$< \lambda^{+\omega}\text{-fechado} \Rightarrow \text{fechado. Ent\~ao}$$

$$T(X) < \lambda \quad \text{ou} \quad t(X) = T(X).$$

Demonstração:

Assumimos que $T(X) \geq \lambda$. É claro que $t(X) \leq \lambda^{+\omega}$, pois $cl_{\lambda^{+\omega}} A = cl A$, para cada $A \subset X$.

Pelo teorema 2, basta mostrarmos que $t(X) \leq T(X)$.

Se $t(X) < \lambda^{+\omega}$, então temos dois casos a considerar:

$$\text{i) } t(X) = \lambda \quad \text{portanto} \quad t(X) = \lambda \leq T(X).$$

$$\text{ii) } t(X) = \lambda^{+n} \quad \text{portanto} \quad t(X) = T(X), \text{ pelo corolário 2.}$$

Se $t(X) = \lambda^{+\omega}$, suponhamos por absurdo que $T(X) = \lambda^{+n} < t(X)$.

Pelo lema 2, para cada p , $A \subset X$ com $p \in cl A$,

$$cf(a(p, A)) \leq T(X) = \lambda^{+n}, \quad \text{logo}$$

$$(*) \quad a(p, A) = \lambda^{+\omega} \quad \text{ou} \quad a(p, A) \leq \lambda^{+n}.$$

Portanto, pela definição de *tightness*, é fácil ver que existem $p \in X$, $A \subset X$, $p \in clA$ tal que

$$a(p, A) = \lambda^{+\omega}.$$

Seja $F = cl_{\lambda+n} A$. F não pode ser fechado, pois $p \in clF \setminus F$. Logo, para obter uma contradição, bastará mostrar que F é $< \lambda^{+\omega}$ -fechado. Agora, se $H \subset F$ e $|H| < \lambda^{+\omega}$ então $\forall q \in clH$,

$$a(q, H) < \lambda^{+\omega}, \quad \text{logo por } (*)$$

$$a(q, H) \leq \lambda^{+n}, \quad \text{portanto}$$

$$q \in cl_{\lambda+n}(H) \subset cl_{\lambda+n}(F) = F. \quad \blacksquare$$

Corolário 3. Seja X espaço topológico tal que cada $A \subset X$, $< \aleph_\omega$ -fechado, é fechado. Então $T(X) = t(X)$.

Demonstração:

Basta aplicar o lema anterior para $\lambda = \omega$. ■

3. Notas Históricas e Bibliográficas

O *set tightness* foi introduzido por Arhangel'skii, Isler e Tironi [AIT-86] em 1986, como quasecaráter. O rebatismo foi feito por Juhász em [J-86]. Neste mesmo artigo, Juhász introduziu a noção de *T-tightness*.

Vimos que o *tightness* e o *set-tightness* têm sua versão local. Em 1986, Bella introduziu o *T-tightness* local de x em X e mostrou que $T(X) = \sup\{T(x, X) : x \in X\}$.

Provamos o teorema 1.1, usando a técnica de Pol-Sapironskii, quando demos uma nova demonstração do teorema 15 do preprint de Tall [T].

A proposição 1.1 aparece em [IT-84].

Os teoremas 2.1, 2.2 e 2.3 são devidos à Juhász [J-86], assim como os lemas 2.1, 2.3 e as proposições 2.1 e 2.2.

A proposição 2.3 é devido a [AIT-86] e [B-86a], mas a demonstração que apresentamos é de [J-86].

O lema 2.3 está demonstrado em [J-80].

O teorema 2.4 é devido à Bella [B-86b].

A proposição 4 e o corolário 1 são devidos à Alas e Wilson [AW] e generalizam, respectivamente os corolários 4 e 2 de [J-86].

CAPÍTULO II

ESPAÇOS CHAIN NET E OUTROS ESPAÇOS DEFINIDOS POR λ -SEQÜÊNCIAS

0. Introdução

Em espaços métricos, sabemos que as seqüências convergentes caracterizam os fechados, isto é, um conjunto é fechado sse contém todos os seus pontos limites de seqüências. Os espaços topológicos com a propriedade acima são chamados espaços sequenciais. Logo, todos os espaços métricos são espaços sequenciais. Mas, os espaços métricos têm uma propriedade mais forte:

se A é um subconjunto de um espaço métrico X , então x está na aderência de A sse $\exists$ seqüência $\{x_n\}_{n \in \omega}$ em A tal que $x_n \rightarrow x$.

Um espaço topológico com a propriedade acima é chamado espaço Fréchet–Urysohn.

É claro que todo Fréchet–Urysohn é um espaço sequencial. A recíproca não é verdadeira, como veremos nos exemplos.

Podemos definir de forma natural λ -seqüências e convergência de λ -seqüências, como uma extensão do conceito de seqüência.

Estudaremos aqui algumas generalizações dos espaços citados acima, usando λ -seqüências e suas relações com algumas funções cardinais, em especial o *tightness* e suas generalizações.

1. Espaços chain net e espaços radiais

Seja (X, τ) um espaço topológico.

Definição 1. Uma λ -seqüência $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ é uma função $f : \lambda \rightarrow X$ tal que $f(\alpha) = x_\alpha$

$\forall \alpha < \lambda$. Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ está em $A \subset X$, se $x_\alpha \in A$, $\forall \alpha < \lambda$ e denotaremos por $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset A$.

Observação: Denotaremos $\{x \in X : (\exists \alpha \in \lambda)(x = x_\alpha)\}$ por $\{x_\alpha : \alpha \in \lambda\}$.

Uma κ -seqüência $(y_\beta)_{\beta < \kappa}$ é uma κ -subseqüência cofinal de $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$, se existe $f : \kappa \rightarrow \lambda$ crescente e cofinal tal que

$$y_\beta = x_{f(\beta)}, \quad \forall \beta < \kappa. \text{ Denotaremos } (y_\beta)_{\beta < \kappa} \text{ por } (x_{\alpha_\beta})_{\beta < \kappa}.$$

Definição 2. Seja $x \in X$ e $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ uma λ -seqüência. Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ converge para x , ou

$$(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \rightarrow x \text{ se para cada vizinhança } V \text{ de } x, \text{ existe } \xi < \lambda \text{ tal que } x_\alpha \in V, \forall \alpha \geq \xi.$$

Observação: Quando não houver perigo de confusão, denotaremos

$$(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \rightarrow x \text{ por } x_\alpha \rightarrow x.$$

Nota: É fácil ver que se $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \rightarrow x$ e $(x_{\alpha_\xi})_{\xi < \kappa}$ é cofinal em $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$, então $(x_{\alpha_\xi})_{\xi < \kappa} \rightarrow x$.

Definição 3. X é um espaço *chain net* ou *pseudoradial* se, para cada não fechado $A \subset X$, existe um ponto $x \in clA \setminus A$ e uma λ -seqüência $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ em A tal que $x_\alpha \rightarrow x$.

A definição 3 é equivalente à seguinte:

Definição 3'. X é um espaço *chain net* ou *pseudoradial* se, para cada subconjunto não fechado A , existe um ponto $x \in clA \setminus A$ e uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X , tal que a família $\mathcal{P}$ é linearmente ordenada pela inclusão e

$$(i) \quad P \cap A \neq \emptyset, \quad \forall P \in \mathcal{P};$$

- (ii) para cada vizinhança U de x existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subset U$;
- (iii) $\cap \mathcal{P} = \{x\}$.

Como neste texto não usaremos a definição 3', não provaremos a equivalência, ficando a cargo do leitor interessado.

O próximo teorema fornece uma caracterização útil de um espaço *chain-net*.

Teorema 1. $X - T_1$ é *chain net* sse para cada não fechado $A \subset X$ existe $x \in clA \setminus A$ e um subconjunto $B \subset A$, $|B|$ é regular infinito e para cada vizinhança U de x , $|B \setminus U| < |B|$.

Provaremos antes o seguinte

Lema 1. Seja $x \in clA \setminus A$. Então

$$\exists (x_\alpha)_{\alpha < \gamma} \subset A, x_\alpha \rightarrow x \quad \text{sse}$$

$(\exists y \in A)(x \in cl\{y\})$ ou $(\exists B \subset A)(|B| \text{ é regular infinito e para cada vizinhança } U \text{ de } x, |B \setminus U| < |B|)$.

Demonstração:

$(\Leftarrow)$ Se $x \in cl\{y\}$ então $(x_n)_{n \in \omega}$, onde $x_n = y, \forall n \in \omega$, é uma seqüência com as propriedades procuradas.

Seja $B \subset A$ satisfazendo as condições acima. Tomemos uma enumeração bijetora $(x_\alpha)_{\alpha < |B|}$ de B . Então $x_\alpha \rightarrow x$.

De fato, seja U vizinhança de x . Então pela hipótese $|B \setminus U| < |B|$, como $|B|$ é regular, $\exists \beta < |B|$ tal que $B \setminus U \subset \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$, portanto

$$\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\} = B \setminus \{x_\alpha : \alpha < \beta\} \subset U \quad \text{portanto}$$

$$x_\alpha \rightarrow x.$$

($\Rightarrow$) Seja $(x_\alpha)_{\alpha < \gamma} \subset A$, $x_\alpha \rightarrow x$.

Podemos supor sem perda de generalidade que γ é regular. De fato, se $f : cf(\gamma) \rightarrow \gamma$ é uma função cofinal crescente,

$$(x_{f(\alpha)})_{\alpha < cf(\gamma)} \longrightarrow x.$$

$\forall y \in \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$, seja $I_y = \{\alpha : x_\alpha = y\}$. Se I_y é ilimitado para algum y , claramente $x \in cl\{y\}$ e terminamos. Assumimos que I_y é limitado em γ , $\forall y \in \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ e seja $B = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Como

$$\gamma = \bigcup_{y \in B} I_y, \quad |I_y| < \gamma \quad \text{e} \quad \gamma \text{ é regular},$$

temos $|B| = \gamma$.

Seja U vizinhança de x . Como $x_\alpha \rightarrow x$, $\exists \beta < \gamma$ tal que $\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\} \subset U$, portanto

$$B \setminus U \subset \{x_\alpha : \alpha < \beta\} \quad \text{portanto}$$

$$|B \setminus U| \leq |\{x_\alpha : \alpha < \beta\}| \leq |\beta| < \gamma = |B|. \quad \blacksquare$$

Corolário 1. Suponhamos $X - T_1$ e $x \in clA \setminus A$. Então $\exists (x_\alpha)_{\alpha < \gamma} \subset A$, $x_\alpha \rightarrow x$ sse $(\exists B \subset A)(|B|)$ é regular infinito e para cada vizinhança U de x , $|B \setminus U| < |B|$.

Demonstração:

Segue do lema 1. \blacksquare

Corolário 2. Seja $x \in clA \setminus A$, $(x_\alpha)_{\alpha < \gamma} \subset A$ e $x_\alpha \rightarrow x$. Então existe $(y_\alpha)_{\alpha < cf(\gamma)} \subset A$ tal que $\alpha \neq \beta \Rightarrow y_\alpha \neq y_\beta$ e $y_\alpha \rightarrow x$, ou uma seqüência constante $(x_n)_{n \in \omega} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demonstração:

Imediata pela demonstração do lema 1. ■

Demonstração do Teorema 1:

Imediata pela definição de *chain net* e pelo corolário 1. ■

Definição 4. Seja $x \in X$.

Um subconjunto B de um espaço topológico X é dito *dirigido topologicamente* em x se $|B|$ é um cardinal regular e para cada vizinhança U de x , $|B \setminus U| < |B|$. Neste caso, diremos que toda vizinhança U de x contém “quase todos” os pontos de B .

Quando B é dirigido topologicamente para um único x , dizemos que x é o **fim** (end) de B .

Vamos agora introduzir um cardinal invariante ligado aos espaços *chain net*.

Definição 5. Seja X um espaço *chain net*. Então o **chain net caráter**, $\sigma_c(X)$, é o menor cardinal infinito tal que se A é não fechado, então existem

$$x \in clA \setminus A \quad \text{e}$$

$$(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset A, \quad \text{com} \quad \lambda \leq \sigma_c(X) \quad \text{tal que}$$

$$x_\alpha \rightarrow x.$$

Pelo corolário 2, $\sigma_c(X)$ está bem definido e $\sigma_c(X) \leq |X| + \aleph_0$.

Corolário 3. Seja X um espaço *chain net*– T_1 . Então $\sigma_c(X)$ é igual ao menor cardinal infinito κ tal que para cada A não fechado em X , $\exists B \subset A$ e $x \in clA \setminus A$ tal que $|B|$ é regular, $|B| \leq \kappa$ e B é dirigido topologicamente em x .

Demonstração:

Segue da demonstração do lema 1. ■

Definição 6. Um espaço *chain net* X é sequencial se $\sigma_c(X) = \aleph_0$.

Definição 7. i) Seja $A \subset X$. Então

$$\widehat{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset A \text{ tal que } x_\alpha \rightarrow x\}.$$

ii) Dizemos que A é *chain* fechado se $\widehat{A} = A$.

Proposição 1. Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de conjuntos *chain* fechados. Então $\cap \mathcal{F}$ é *chain* fechado.

Demonstração: Óbvio.

É claro que se $A \subset X$ é fechado, então A é *chain* fechado. Logo, se $B \subset X$,

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : B \subset F \text{ e } F \text{ é } chain \text{ fechado}\}$$

é não vazia. Pela proposição 1, claramente $\cap \mathcal{F}$ é o menor *chain* fechado contendo B .

Isto motiva a seguinte

Definição 8. Seja $A \subset X$. Então o *chain* fecho de A , $ch A$, é o menor *chain* fechado contendo A .

O próximo resultado nos dá uma caracterização de um espaço *chain net* por *chain* fechos:

Proposição 2. X é *chain net* sse $ch A = cl A$, $\forall A \subset X$.

Demonstração:

É claro que $\forall A \subset X$,

$$A \subset ch A \subset cl A \quad \text{portanto}$$

$$cl A \subset cl(ch A) \subset cl A,$$

$$cl(ch(A)) = cl A.$$

($\Rightarrow$) Suponhamos que

$A \subset X$ é tal que $ch A \subsetneq cl A$. Então

$ch A \subsetneq cl(ch(A))$, ou seja,

$cl(ch(A)) \setminus ch A$ é não vazio, logo se X é *chain net* então

$\exists x \in cl(ch(A)) \setminus ch(A)$ e

$\exists (x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset ch(A)$ tal que

$x_\alpha \rightarrow x$.

Como $ch(A)$ é *chain* fechado, temos $x \in ch(A)$, absurdo, portanto

X não é *chain net*.

($\Leftarrow$) Suponhamos que X não é *chain net*. Então $\exists A \subset X$ tal que A é não fechado

e

$\forall x \in cl A \setminus A$

$\nexists (x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset A$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$.

Claramente, A é *chain* fechado, ou seja,

$A = ch A$ portanto $ch A \neq cl A$. ■

Daremos agora uma caracterização de *chain* fecho:

Definição 9. Seja $A \subset X$. Então definimos por indução

$$\widehat{A}^{(0)} = A$$

$$\widehat{A}^{(\alpha+1)} = \widehat{B}, \text{ onde } B = \widehat{A}^{(\alpha)}$$

se α é limite,

$$\widehat{A}^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta < \alpha} \widehat{A}^{(\beta)}.$$

Proposição 3. Seja $A \subset X$, então

i) $\widehat{A}^{(\alpha)} \subset ch A, \forall \alpha$

ii) $\widehat{A}^{(\lambda^+)}$ é *chain* fechado, onde $\lambda = |X| + \aleph_0$

iii) $\widehat{A}^{(\lambda^+)} = ch A$.

Demonstração:

i) Basta usar a indução.

ii) Seja $(x_\alpha)_{\alpha < \eta} \subset \widehat{A}^{(\lambda^+)}$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$. Vamos mostrar que $x \in \widehat{A}^{(\lambda^+)}$.

Pelo corolário 2, $\exists (y_\alpha)_{\alpha < \theta} \subset \widehat{A}^{(\lambda^+)}$, $\theta \leq \lambda$ tal que $y_\alpha \rightarrow x$.

Como λ^+ é regular,

$\exists \beta < \lambda^+$ tal que

$\{y_\alpha : \alpha < \theta\} \subset \widehat{A}^{(\beta)}$, portanto

$x \in \widehat{A}^{(\beta+1)} \subset \widehat{A}^{(\lambda^+)}$.

iii) Imediato de i) e ii). ■

Corolário 4. X é *chain net* sse $\forall A \subset X$, $\exists \theta$ tal que $\widehat{A}^{(\theta)}$ é fechado.

Demonstração: Proposições 2 e 3.

Pelo resultado acima, vemos que se X é um espaço *chain net*, e se $A \subset X$, então podemos “incluir indutivamente” os limites de λ -seqüências até obtermos o fecho de A . Veremos um exemplo onde pode ocorrer do fecho de A não ser obtido no primeiro passo, isto é

$$\widehat{A} \neq cl A.$$

Exemplo 1. Seja $N = \omega \setminus \{o\}$.

$$X = \{(0, 0)\} \cup \{(0, \frac{1}{n}) : n \in N\} \cup \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m, n \in N\}$$

com a seguinte topologia:

$(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ são isolados.

$V \subset X$ é uma vizinhança de $(0, \frac{1}{n})$ se $\exists m_0 \in N$ tal que $\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m \geq m_0\} \cup \{(0, \frac{1}{n})\} \subset V$.

$W \subset X$ é uma vizinhança de $(0, 0)$ se $\exists n_0 \in N$ e $\forall n \geq n_0 \exists m_n \in N$ tal que

$$\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m \geq m_n, n \geq n_0\} \cup \{(0, 0)\} \subset W.$$

Claramente, X é T_2 , zero-dimensional, Lindelöf. (Portanto T_4).

Vamos mostrar que X é seqüencial.

Seja $A \subset X$. Então

$$(cl A) \setminus \{(0, 0)\} \subset \hat{A} \subset cl \hat{A} = cl A.$$

De fato, é claro que

se $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) \in \hat{A}$, $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) \in A \subset \hat{A}$.

Se $(0, \frac{1}{n}) \in cl A \setminus A$, então

$A \cap \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m \in N\}$ é infinito e facilmente podemos tomar uma seqüência em $A \cap \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m \in N\}$ que converge para $(0, \frac{1}{n})$.

Se $(0, 0) \notin cl(\hat{A}) \setminus \hat{A}$, terminamos.

Suponhamos que $(0, 0) \in cl(\hat{A}) \setminus \hat{A}$. Então claramente $\hat{A} \cap \{(0, \frac{1}{n}) : n \in N\}$ é infinito e facilmente podemos tomar uma seqüência em $\hat{A} \cap \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \omega\}$ que converge para $(0, 0)$. Portanto

$$cl A = \hat{A}^{(2)}, \quad \forall A \subset X.$$

Seja $Y = \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : (m, n) \in N \times N\}$.

É claro que $cl Y = X$. Vamos mostrar que $(0, 0) \notin \hat{Y}$. De fato, suponhamos que $(y_\alpha)_{\alpha < \gamma} \subset Y$ converge para $(0, 0)$. Como $|X| = \aleph_0$, pelo corolário 2, $\exists (x_n)_{n \in \omega} \subset Y$ tal que $x_n \rightarrow (0, 0)$. Claramente,

$$\{x_n : n \in \omega\} \cap \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{p}) : m \in N\}$$

deve ser finito $\forall p \in N$, logo,

para cada $p \in N$, existe $m_p \in N$ tal que

$$\{x_n : n \in \omega\} \cap \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{p}) : m \geq m_p\} = \emptyset.$$

Logo $W = \{(0,0)\} \cup \{(0, \frac{1}{p}) : p \in N\} \cup \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{p}) : m \geq m_p\}$ é vizinhança de $(0,0)$ e

$$W \cap \{x_n : n \in \omega\} = \emptyset \quad \text{portanto} \quad x_n \not\rightarrow x$$

logo

$$(0,0) \notin \hat{Y} \quad \text{portanto} \quad \hat{Y} \neq cl Y.$$

Podemos ainda notar que $\{(0,0)\} \cup Y$ não é *chain net*.

Definição 10. Um espaço X é chamado radial ou Fréchet-*chain net*, se $\hat{A} = cl A$, $\forall A \subset X$.

Nota: Pelo corolário 1, se X é espaço topológico T_1 , então X é radial sse $\forall A \subset X$
 $\forall x \in cl(A) \setminus A \exists B \subset A$ topologicamente dirigido em x .

Proposição 4. Todo espaço radial é *chain net*.

Demonstração: Imediato pela definição.

Pelo exemplo 1, vemos que a recíproca da proposição 4 não é verdadeira.

Para espaços *chain net*, a proposição 3.iii) nos diz que iterando $(|X| + \aleph_0)^+$ vezes é suficiente para conseguir o fecho de qualquer $A \subset X$.

Neste sentido, temos um resultado melhor:

Teorema 2. Seja X espaço *chain net* e $A \subset X$. Então $\hat{A}^{(\theta^+)}$ é fechado, onde $\theta = \sigma_c(X)$.

Demonstração:

Suponhamos que $B = \widehat{A}^{(\theta^+)}$ não é fechado. Então, como $\sigma_c(X) = \theta$, $\exists x \in cl\ B \setminus B$ e $(x_\alpha)_{\alpha < \eta} \subset B$, $\eta \leq \theta$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$. Usando agora o mesmo argumento da demonstração da proposição 3.ii), temos $x \in B = \widehat{A}^{(\theta^+)}$, absurdo.

Logo, $\widehat{A}^{(\theta^+)}$ é fechado.

Vamos estender o conceito de *chain* fecho:

Definição 11. Seja $A \subset X$. Então

$$(\widehat{A})_\lambda = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha < \theta} \subset A, \theta \leq \lambda, \text{ tq } x_\alpha \rightarrow x\}.$$

Definição 12. Dizemos que $A \subset X$ é λ -chain fechado se $(\widehat{A})_\lambda = A$. Se $\lambda = \aleph_0$, dizemos que A é seqüencialmente fechado.

É claro que A é chain-fechado sse A é λ -chain fechado para $\lambda = |X| + \aleph_0$.

Proposição 5. Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de conjuntos λ -chain fechados. Então $\cap \mathcal{F}$ é λ -chain fechado.

Demonstração: Óbvia.

Definição 13. Seja $A \subset X$. Então o λ -chain fecho de A , $ch_\lambda A$ é o menor λ -chain fechado contendo A . Se $\lambda = \aleph_0$, também dizemos que $ch_{\aleph_0} A$ é o fecho sequencial.

É imediato da definição o seguinte:

Proposição 6. Seja X espaço *chain net*. Então $\sigma_c(X)$ é o menor cardinal infinito θ tal que $\forall A \subset X$, $ch_\theta A = cl\ A$.

Podemos definir de maneira indutiva, como na definição 9, os conjuntos $(\widehat{A})_\lambda^{(\alpha)}$.

Analogamente à proposição 3 e ao teorema 2, temos:

Proposição 7. Seja X espaço topológico e $A \subset X$. Então

- i) $(\widehat{A})_\lambda^{(\alpha)} \subset ch_\lambda(A)$, $\forall \alpha$.
- ii) $(\widehat{A})_\lambda^{(\lambda^+)}$ é λ -chain fechado.
- iii) $(\widehat{A})_\lambda^{(\lambda^+)} = ch_\lambda A$.

Teorema 3. Seja X chain net. Então $(\widehat{A})_\lambda^{(\lambda^+)} = cl A$, para cada $A \subset X$, onde $\lambda = \sigma_c(X)$.

Definição 14. Um espaço X é Fréchet-Urysohn se $(\widehat{A})_{\aleph_0} = cl A$, $\forall A \subset X$.

É claro que todo Fréchet-Urysohn é radial e seqüencial. O Exemplo 1 mostra que nem todo seqüencial é Fréchet-Urysohn.

A recíproca da outra afirmação também não vale.

Exemplo 2. Seja $X = \omega_1 + 1$, com a seguinte topologia:

$\{\alpha\}$ é aberto, se $\alpha < \omega_1$.

$V \subset X$ é vizinhança de ω_1 , se $\omega_1 \in V$ e $X \setminus V$ é enumerável. Claramente,

X é radial, mas não seqüencial, logo não é Fréchet-Urysohn.

O próximo exemplo mostra que o limite de uma λ -seqüência não precisa ser único.

Exemplo 3.

$X = \omega + 2$, com a seguinte topologia:

$\{n\}$ são abertos para cada $n \in \omega$.

Se $p \in \{\omega, \omega + 1\}$,

$V \subset X$ é vizinhança de p , se

$p \in V$ e $\omega \setminus V$ é finito.

É fácil ver que X é um espaço Fréchet-Urysohn T_1 e existem seqüências que convergem para mais de um ponto.

Isto sugere a seguinte:

Definição 15. Um espaço topológico X satisfaz T_c se toda λ -seqüência convergente tem limite único.

Proposição 8. Todo espaço topológico T_c é T_1 .

Demonstração:

Basta notar que se $x \neq y$ e $y \in cl\{y\}$, então a seqüência constante $x_n = x$, $\forall n \in \omega$ converge para y . ■

O exemplo 3 acima mostra que $T_1 \not\rightarrow T_c$, mesmo na classe dos espaços Fréchet-Urysohn.

Lema 2. Seja $X - T_c$ e λ um cardinal infinito. Então $|(\hat{A})_\lambda| \leq |A|^\lambda$, $\forall A \subset X$.

Demonstração: Imediata.

Corolário 5. Seja $X - T_c$, $|ch_\lambda A| \leq |A|^\lambda$, $\forall A \subset X$.

Demonstração:

Podemos supor $|A| \geq 2$. Pelo lema 2 e usando indução, facilmente vemos que

$$|(\hat{A})_\lambda^{(\alpha)}| \leq |A|^\lambda, \forall \alpha < \lambda^+. \text{ Logo,}$$

$$|(\hat{A})_\lambda^{\lambda^+}| \leq |A|^{\lambda \cdot \lambda^+} = |A|^\lambda.$$

Pela proposição 7, $ch_\lambda A = (\hat{A})_\lambda^{(\lambda^+)}$. ■

Corolário 6. Seja $X - T_c$ chain net. Então $|cl A| \leq |A|^{\sigma_c(X)}$, $\forall A \subset X$. Em particular $|X| \leq d(X)^{\sigma_c(X)}$.

Demonstração:

Basta aplicar a proposição 6 e o corolário 5. ■

Proposição 9. Todo espaço topológico T_2 é T_c .

Demonstração: Trivial.

O próximo exemplo mostra que a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 3.

Seja X do exemplo 1 e $p \notin X$. Seja $X_1 = X \cup \{p\}$ com a seguinte topologia:

Uma base de vizinhanças de $x \neq p$ em X é uma base para x em X_1 .

Uma base de vizinhanças de p em X_1 são os conjuntos da forma $\{p\} \cup (Y \setminus F)$, onde F é uma reunião de imagens de um número finito de seqüências convergentes em $Y = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : m, n \in \mathbb{N}\}$.

Claramente, X_1 é enumerável e não é T_2 , pois $(0,0)$ e p não tem vizinhanças disjuntas.

Como X é T_2 e uma seqüência convergente em X não converge para p , toda seqüência convergente em X_1 tem limite único. Mas X_1 é enumerável e T_1 , logo X_1 é T_c .

X_1 é seqüencial. De fato,

seja A não fechado em X_1 . Se $A \cap X$ não é fechado em X , terminamos. Logo assumimos $\{p\} = cl A \setminus A$, onde $cl A$ é o fecho de A em X_1 .

Claramente $I = \{n : \exists m (\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) \in A\}$ é infinito. Então seja $I = \{n_i : i \in \omega\}$, onde $n_i < n_j$ se $i < j$.

Para cada $i \in \omega$, fixemos

$x_i = (\frac{1}{m_i}, \frac{1}{n_i}) \in A$. Claramente,

$$(x_i)_{i \in \omega} \longrightarrow p.$$

2. Tightness em espaços chain net

Teorema 1. Seja $X - T_1$ radial. Então $a_s(x, A) = a(x, A)$ para cada $A \subset X$ tal que $x \in cl A \setminus A$.

Demonstração:

É claro que $a_s(x, A) \leq a(x, A)$. Suponhamos $\tau = a_s(x, A) < a(x, A)$. Então existe uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos de A tal que $|\mathcal{P}| \leq \tau$, $(\forall P \in \mathcal{P})(x \notin cl P)$, mas $x \in cl(\cup \mathcal{P})$. Como X é radial, existe $C \subset \cup \mathcal{P}$, com C topologicamente dirigido em x de cardinalidade regular não menor que $a(x, A)$, pois $x \in cl C$ e $C \subset A$.

Tome $P' = P \cap C$ para P em $\mathcal{P}$ e seja $\mathcal{P}' = \{P' : P \in \mathcal{P}\}$. Para cada $P' \in \mathcal{P}'$, nós temos $x \notin cl(P')$, portanto $\exists U_{P'}$ vizinhança de x tal que $P' \subset C \setminus U_{P'}$. Como C é topologicamente dirigido em x ,

$$|P'| \leq |C \setminus U_{P'}| < |C|.$$

Como $|P'| < |C|$ e $|\mathcal{P}'| \leq \tau < |C|$, da regularidade de $|C|$, segue $|\cup \mathcal{P}'| < |C|$, contradizendo $\cup \mathcal{P}' = C$. ■

Como corolários imediatos, temos

Corolário 1. Seja $X - T_1$ radial. Então

$$t_s(x, X) = t(x, X).$$

Corolário 2. Se X é T_1 -radial, então

$$t_s(X) = t(X).$$

Logo, nos espaços radiais, $t_s(X)$ e $t(X)$ coincidem.

No parágrafo anterior (proposições 2 e 3) vimos espaços tais que $t_s(X) < t(X)$.

Uma questão natural é a seguinte:

A igualdade $t_s(X) = t(X)$ vale para espaços *chain net*?

No resto deste parágrafo, veremos condições suficientes para que isto ocorra e as destacaremos no último teorema deste parágrafo.

Proposição 1. Se X é *chain net*, então

$$T(X) = t_s(X).$$

Demonstração: Pelo teorema I.2.1, basta mostrarmos que $T(X) \leq t_s(X)$.

Seja $\{F_\alpha : \alpha \in \rho\}$ uma seqüência crescente de fechados em X tal que $F = \bigcup_{\alpha \in \rho} F_\alpha$ é não fechado e $\rho = cf(\rho)$. Como X é *chain net*, podemos encontrar uma μ -seqüência $(x_v)_{v \in \mu} \subset F$ convergindo para um ponto $x \in cl F \setminus F$. Nós podemos assumir $\mu = cf(\mu)$. Vamos mostrar que $\mu = \rho$.

De fato,

não podemos ter $\mu < \rho$, pois caso contrário, como ρ é regular e $\{F_\alpha : \alpha \in \rho\}$ é crescente, teríamos para algum $\alpha < \rho$ $\{x_\alpha : \alpha \in \mu\} \subset F_\alpha$, portanto $x \in ch(F_\alpha) = F_\alpha \subset F$, contradição.

Por outro lado, $\mu > \rho$ implicaria que, para algum $\alpha < \rho$,

$$|\{v \in \mu : x_v \in F_\alpha\}| = \mu \text{ e portanto}$$

teríamos uma μ -subseqüência de $(x_v)_{v \in \mu}$ convergindo para x em F_α e, novamente concluiríamos que $x \in F_\alpha \subset F$. Logo $\mu = \rho$.

Seja $A = \{x_v : v \in \rho\}$. Vamos mostrar que $a_s(x, A) = \rho$. É claro que $a_s(x, A) \leq \rho$. Suponhamos, por absurdo, $a_s(x, A) < \rho$ e seja $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(A)$ uma testemunha disto. Então, para cada $P \in \mathcal{P}$, temos $x \notin cl P$, portanto $|P| < \rho$ (se $|P| = \rho$ teríamos uma

ρ -subseqüência cofinal de $(x_v)_{v < \rho}$ em P , logo $x \in ch P \subset cl P$. Logo, da regularidade de ρ , temos $|\cup \mathcal{P}| < \rho$, mas então,

$\exists \alpha < \rho$ tal que $\cup \mathcal{P} \subset F_\alpha$, mas $x \notin F_\alpha = cl F_\alpha$, portanto $x \notin cl(\cup \mathcal{P})$, absurdo.

Logo, se $\{F_\alpha : \alpha \in \rho\}$ é seqüência crescente de fechados e $cf(\rho) > t_s(X)$, então $\bigcup_{\alpha \in \rho} F_\alpha$ deve ser fechada, logo

$$T(X) \leq t_s(X). \quad \blacksquare$$

Lema 1. Seja X espaço chain net T_1 . Sejam $A \subset X$, $p \in cl A \setminus A$, $(x_\alpha)_{\alpha < \mu} \subset A$ e μ regular tal que $x_\alpha \rightarrow p$. Então $\mu \leq \psi(p, A \cup \{p\})$.

Demonstração:

Seja $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ família de vizinhanças de p em A tal que $\bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha = \{p\}$ e $\kappa = \psi(p, A \cup \{p\})$. Suponhamos por absurdo $\mu > \kappa$. Então para cada $\alpha < \kappa$, seja $\beta(\alpha)$ o menor ordinal tal que $\{x_\xi : \xi \geq \beta(\alpha)\} \subset U_\alpha$. Então pela regularidade de μ , $\beta = \sup\{\beta(\alpha) : \alpha < \kappa\} < \mu$, portanto $x_\beta \in U_\alpha, \forall \alpha < \kappa$, donde $x_\beta \in \bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha = \{p\}$, mas $x_\beta \in A$ e $p \in cl A \setminus A$, absurdo, logo $\mu \leq \psi(p, A \cup \{p\})$. ■

Proposição 2. Seja X espaço chain net T_1 tal que $t_s(X) \leq \lambda$. Seja $A \subset X$ tal que $\psi(x, A \cup \{x\}) \leq \lambda^+$ para cada $x \in X \setminus A$ e $cl_\lambda A = A$. Então $cl A = A$.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que $cl A \neq A$. Então existe $z \in cl A \setminus A$ e $(x_\alpha)_{\alpha < \theta} \subset A$ tal que $x_\alpha \rightarrow z$. Podemos supor θ regular, logo pelo lema 1,

$$\theta \leq \psi(z, A \cup \{z\}) \leq \lambda^+, \text{ mas}$$

$z \in cl\{x_\alpha : \alpha < \theta\}$, portanto

$a(z, A) \leq \lambda^+$. Como $z \notin A$ e $cl_\lambda A = A$,

$a(z, A) = \lambda^+$, logo pelo Lema I.2.2

$cf(\lambda^+) = \lambda^+ \leq T(X)$. Pela proposição 1

$\lambda^+ \leq t_s(X)$, contra a hipótese. ■

Proposição 3. Seja $X - T_1$ chain net e $t_s(X) \leq \lambda$. Se A é um subconjunto de X e $|A| \leq \lambda^+$, então $cl_\lambda A = cl A$.

Demonstração:

Se $|A| \leq \lambda$, o resultado é óbvio. Assumiremos que $|A| = \lambda^+$ e bem ordenaremos A como $\{x_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$. É claro que

$$cl_\lambda A = \cup\{cl\{x_\alpha : \alpha < \beta\} : \beta < \lambda^+\}.$$

Seja

$$B = cl_\lambda A.$$

Então $cl_\lambda B = B$. Para cada $x \in X \setminus B$, seja $Y = B \cup \{x\}$. Temos

$\{x\} = \cap\{Y \setminus cl\{x_\alpha : \alpha < \beta\} : \beta < \lambda^+\}$, logo

$\psi(x, B \cup \{x\}) \leq \lambda^+$. Pela proposição 2, $B = cl B$ e o resultado segue. ■

Corolário 3. Seja $X - T_1$ chain net e $t_s(X) \leq \lambda$. Se $A \subset X$ e $|A| \leq \lambda^{+n}$, para algum n inteiro não negativo, então

$$cl_\lambda A = cl A.$$

Demonstração:

Basta aplicar a proposição anterior e indução finita.

Proposição 4. Se X é chain net regular, então $t(X) \leq F(X)$.

Demonstração: Seja $\tau < t(X)$. Pela definição de *tightness*, existe um conjunto $A \subseteq X$ tal que $A = cl_\tau A \neq cl A$. Como X é *chain net*, existe um ponto $p \in cl A \setminus A$ e uma λ -seqüência $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset A$ convergindo para p . Sem perda de generalidade, podemos assumir λ regular.

Construiremos uma τ^+ -subseqüência $(x_{\alpha_\xi})_{\xi < \tau^+}$ e uma família $\{V_\xi\}_{\xi < \tau^+}$ de abertos satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) se $\xi < \gamma$, então $\alpha_\xi < \alpha_\gamma$.
- ii) para cada $\xi < \tau^+$ $cl\{x_\beta : \beta < \xi\} \subseteq V_\xi$.
- iii) $\{x_\beta : \beta \geq \alpha_\xi\} \cap V_\xi = \emptyset$.
- iv) $p \notin cl V_\xi$.

Primeiro, notemos que $\lambda \geq \tau^+$.

Procederemos por indução transfinita.

Suponhamos escolhidos

x_{α_β} e V_β para cada $\beta < \xi$, onde $\xi < \tau^+$.

Como $\left| \{x_{\alpha_\beta} : \beta < \xi\} \right| \leq \tau$, nós temos

$p \notin cl\{x_{\alpha_\beta} : \beta < \xi\}$. Então existe uma vizinhança U de p tal que

$cl U \cap cl\{x_{\alpha_\beta} : \beta < \xi\} = \emptyset$. Para cada $\beta < \xi$, seja θ_β tal que $x_\alpha \in X \setminus cl V_\beta$,

$\forall \alpha \geq \theta_\beta$.

Como λ é regular e $\tau < \lambda$, temos

$$\theta = \max\{\sup\{\alpha_\beta : \beta < \xi\}, \sup\{\theta_\beta : \beta < \xi\}\} + 1 < \lambda.$$

Como U é vizinhança de p , $\exists \gamma > \theta$ tal que $x_\alpha \in U$, $\forall \alpha \geq \gamma$. Seja $\alpha_\xi = \gamma$ e escolhamos $V_\xi = X \setminus cl U$. É fácil verificar que x_{α_ξ} e V_ξ têm as propriedades desejadas. Agora, mostraremos que a τ^+ -seqüência $(x_{\alpha_\xi})_{\xi < \tau^+}$ é livre.

Da construção feita acima, segue que para cada $\xi < \tau^+$,

$$cl\{x_{\alpha_\beta} : \beta < \xi\} \subseteq V_\xi \text{ e } \{x_{\alpha_\beta} : \beta \geq \xi\} \cap V_\xi = \emptyset,$$

logo,

$$cl \{x_{\alpha_\beta} : \beta < \xi\} \cap cl \{x_{\alpha_\beta} : \beta \geq \xi\} = \emptyset,$$

ou seja, $(x_{\alpha_\xi})_{\xi < \tau+}$ é uma seqüência livre. Como τ era um cardinal arbitrário menor que $t(X)$, segue que $t(X) \leq F(X)$. ■

Teorema 2. Se X é *chain net* T_3 e $L(X) < F(X)$, então $t(X) = t_s(X)$.

Demonstração:

Pela proposição 4, $t(X) \leq F(X)$. Pelo teorema I.2.4, $F(X) \leq T(X)$, logo

$$t(X) \leq T(X).$$

Pelo teorema I.2.2 e pela proposição 1,

$$t(X) = t_s(X). \quad \blacksquare$$

No parágrafo anterior, vimos que se X é compacto e T_2 , então $t(X) = T(X)$. Se além disso, X é *chain net*, pela proposição 1,

$$t_s(X) = t(X).$$

O próximo teorema mostra que, para X *chain net*, podemos substituir compacto T_2 por Lindelöf T_3 .

Teorema 3. Se X é *chain net*, T_3 , Lindelöf, então $t(X) = t_s(X)$.

Demonstração:

Se $F(X) > \aleph_0$, então $L(X) < F(X)$, portanto, pelo teorema 2, $t(X) = t_s(X)$.

Se $F(X) = \aleph_0$, pela proposição 4, $t(X) = \aleph_0$. Pelos teoremas I.2.1 e I.2.2,

$$t_s(X) \leq t(X), \quad \text{portanto}$$

$$t_s(X) = t(X) = \aleph_0. \quad \blacksquare$$

Vamos destacar alguns casos onde $t_s(X) = t(X)$, para espaços *chain net*.

Teorema 4. Seja X um espaço *chain net*. Então

$t_s(X) = T(X) = t(X)$ nos seguintes casos:

- 1) $t(X)$ é um cardinal sucessor ou um regular que é atingido.
- 2) X é Lindelöf- T_3 .
- 3) $T(X) \geq \lambda$ e $\sigma_c(X) \leq \lambda^{+\omega}$.

Demonstração:

1) Basta aplicar o corolário I.2.1 e a proposição 1.

2) Teorema 3.

3) Pelas proposições 1 e I.2.4, basta mostrar que cada $< \lambda^{+\omega}$ fechado é fechado.

Suponhamos por absurdo que A é $< \lambda^{+\omega}$ fechado, mas não é fechado.

Como $\sigma_c(X) \leq \lambda^{+\omega}$,

$\exists z \in cl A \setminus A$ e uma ρ -seqüência em A convergindo para z , com $\rho \leq \sigma_c(X)$.

Podemos supor ρ regular, logo,

$\rho < \sigma_c(X)$, donde

$z \in cl_\rho A \subset A$, contradição,

portanto, A é fechado. ■

Corolário 4. Seja X *chain net*. Suponhamos $T(X) \geq \lambda$ e se $(x_\alpha)_{\alpha < \tau}$ é convergente e não trivial com τ regular, então $\tau \leq \lambda^{+\omega}$. Então $t_s(X) = t(X)$.

Demonstração:

Claramente $\sigma_c(X) \leq \lambda^{+\omega}$ e segue do teorema acima. ■

3. Mais desigualdades sobre espaços chain net

Teorema 1. Seja X espaço chain net- T_1 . Então $\sigma_c(X) \leq \psi(X)$.

Demonstração:

Seja $cl A \setminus A \neq \emptyset$. Então existe $p \in cl A \setminus A$ e $(x_\alpha)_{\alpha < \mu} \subset A$ tal que $x_\alpha \rightarrow p$. Podemos assumir μ regular. Pelo lema 2.1, $\mu \leq \psi(p, A) \leq \psi(X)$, logo

$$\sigma_c(X) \leq \psi(X). \quad \blacksquare$$

Corolário 1. Se X é um espaço chain net T_1 e $\psi(X) \leq \aleph_0$, então X é seqüencial.

Arhangels'kii mostrou que se X é radial- T_2 , então $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \psi(X)}$. Conseguimos provar a seguinte generalização.

Teorema 2. Seja X espaço chain net T_c . Então $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \psi(X)}$.

Demonstração:

Pelo teorema I.1.1, basta mostrar que $|cl Y| \leq 2^{L(X) \cdot \psi(X)}$ se $Y \in [X]^{\leq t(X)}$, pois $t(X) \leq \sigma_c(X) \leq \psi(X)$ (teorema 1).

Seja $Y \in [X]^{\leq t(X)}$. Como $cl Y$ é chain net e $\sigma_c(cl Y) \leq \sigma_c(X)$, pelo corolário 1.6, temos

$$|cl Y| \leq |Y|^{\sigma_c(cl Y)} \leq t(X)^{\sigma_c(X)} \leq 2^{\sigma_c(X)} \leq 2^{L(X) \cdot \psi(X)}$$

e o resultado segue. \blacksquare

Para espaços chain net, a desigualdade da proposição I.2.3 pode ser melhorada:

Teorema 3. Seja $X - T_2$ chain net. Então $t(X) \leq s(X)$.

Demonstração:

Suponhamos que para o cardinal λ existe um subconjunto não fechado $A \subset X$ tal que $cl_\lambda A = A$. Então existe uma μ -seqüência $(x_\alpha)_{\alpha < \mu}$, μ regular, $x_\alpha \neq x_\beta$ se $\alpha \neq \beta$, $p \in cl A \setminus A$ tal que $x_\alpha \rightarrow p$. É claro que $\mu > \lambda$.

Definiremos por recursão um subconjunto relativamente discreto $\{x_{\alpha_\xi} : \xi < \lambda\} \subset \{x_\alpha : \alpha < \mu\}$.

Seja $\alpha_0 = 0$ e sejam U_0 e V_0 abertos disjuntos com $x_{\alpha_0} \in U_0$ e $p \in V_0$.

Suponhamos que para cada $\beta < \xi$, nós temos escolhidos α_β e abertos disjuntos U_β e V_β satisfazendo as seguintes condições:

- a) $(\alpha_\beta) \uparrow$
- b) $x_{\alpha_\beta} \in U_\beta$ e $p \in V_\beta$.
- c) $x_{\alpha_\beta} \notin U \cup \{U_\gamma : \gamma < \beta\} \cup cl \{x_{\alpha_\gamma} : \gamma < \beta\}$.

Escolheremos

α_ξ , U_ξ e V_ξ como seguem:

$$\left| \{x_{\alpha_\beta} : \beta < \xi\} \right| = |\xi| < \lambda, \quad \text{logo}$$

$$p \notin cl \{x_{\alpha_\gamma} : \gamma < \xi\}, \quad \text{logo } X \setminus cl \{x_{\alpha_\gamma} : \gamma < \xi\}$$

é vizinhança de p . Seja $\theta < \lambda$ tal que

$$x_\alpha \in X \setminus cl \{x_{\alpha_\gamma} : \gamma < \xi\}, \quad \forall \alpha \geq \theta.$$

Por b), para cada V_β existe θ_β tal que

$$x_\alpha \in V_\beta, \quad \forall \alpha \geq \theta_\beta.$$

Como $\lambda < \mu$ e μ é regular,

$$\eta = \max \{ \sup \{ \theta_\beta : \beta < \xi \}, \sup \{ \alpha_\beta : \beta < \xi \}, \theta \} < \mu.$$

Seja $\alpha_\xi = \eta + 1$ e U_ξ e V_ξ vizinhanças disjuntas de x_{α_ξ} e p respectivamente.

Claramente a) e b) estão satisfeitos. Para verificar c) basta notar que

$$x_{\alpha_\xi} \in \cap \{V_\gamma : \gamma < \xi\} \subset X \setminus \cup \{U_\gamma : \gamma < \xi\}.$$

Seja $F = \{x_{\alpha_\xi} : \xi < \lambda\}$. Então $|F| = \lambda$ e F é discreto, pois $F \cap U_\xi \cap (X \setminus cl\{x_{\alpha_\beta} : \beta < \xi\}) = \{x_{\alpha_\xi}\}$. ■

Teorema 4. Seja X um espaço *chain net*- T_2 . Então $\sigma_c(X) \leq 2^{d(X)}$.

Demonstração:

Basta aplicar a proposição I.2.1 e o teorema 1. ■

Teorema 5. Seja X um espaço *chain net* T_2 . Então $t(X) \leq \sigma_c(X) \leq 2^{t(X)}$.

Demonstração:

Pondo $\tau = 2^{t(X)}$, seja $A \subset X$ tal que $ch_\tau A = A$. Demonstraremos que A é fechado.

É suficiente mostrar que $cl_{t(X)} A = A$.

Seja $B \in [A]^{\leq t(X)}$. Vamos mostrar que $cl B \subset A$.

De fato,

como $cl B$ é *chain net*, pelo teorema 4

$$\sigma_c(cl B) \leq 2^{|B|} \leq \tau. \text{ Logo}$$

$$cl B = ch_\tau B \subset ch_\tau A = A.$$

Portanto $\sigma_c(X) \leq 2^{t(X)}$.

A primeira desigualdade é óbvia. ■

4. Espaços almost radial

Neste parágrafo definimos uma classe de espaços entre os *chain net* e os *radial*.

Definição 1. Seja X espaço topológico e seja dado um subconjunto A e um ponto x de X .

Um ponto x é dito ponto alvo ('target') para A se para cada B , $B \subset A$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $x \in cl B$
- ii) $|B| = |A|$.

Esta propriedade será denotada por $A \xrightarrow{t} x$ ou $x(\text{tar})A$ ou dizemos (A, x) é uma flecha ('arrow').

Nas considerações abaixo, todos os espaços são T_1 .

As seguintes afirmações são conseqüências imediatas da definição:

Fato 1. Se $|A| > 1$ então $x(\text{tar})A$ implica $x \in cl A \setminus A$.

Fato 2. Se $A \xrightarrow{t} x$, então A é dirigido em x . Em particular, se X é T_2 , então cada $A \subset X$ tem no máximo um ponto alvo.

Fato 3. Se A é infinito e $x(\text{tar})A$ em X , então cada vizinhança U de x contém 'quase todos' os pontos de A , mais ainda se $B \subset A$ e $|B| < |A|$, então x não é ponto de acumulação de B . Notemos ainda que se X é T_2 e $x(\text{tar})A$, então x é o único ponto de acumulação completo de A .

Fato 4. Se $x(\text{tar})A$ em X , então $a(x, A) = |A| + \aleph_0$.

Definição 2. Um espaço X é chamado **almost-radial** se para cada A não-fechado contido em X existe um $p \in cl A \setminus A$ e uma λ -seqüência $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset A$ tal que $x_\alpha \rightarrow p$ e $p \notin cl\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$, $\forall \beta < \lambda$.

Note que toda η -subseqüência cofinal satisfaz as mesmas propriedades.

Da definição temos imediatamente a seguinte:

Proposição 1. Todo espaço *almost radial* é *chain net*.

Teorema 1. Seja X um espaço topológico T_1 . Então X é *almost radial* sse $\forall A \subset X$ não fechado, $\exists x \in cl A \setminus A$ e $B \subset A$ tal que $|B|$ é regular e $x(\text{tar})B$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) É suficiente mostrar que podemos tomar λ regular e $x_\alpha \neq x_\beta$ se $\alpha \neq \beta$ e consideramos $B = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

($\Leftarrow$) Basta ordenar $B = \{x_\alpha : \alpha < |B|\}$ e tomar a $|B|$ -seqüência $(x_\alpha)_{\alpha < |B|}$.

Lembramos que, se λ é regular,

$(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset A$ e $x_\alpha \rightarrow x$, podemos tomar uma λ -subseqüência cofinal

$(x_{\alpha_\xi})_{\xi < \lambda} \subset A$ tal que $x_{\alpha_\xi} \rightarrow x$ e $x_{\alpha_\xi} \neq x_{\alpha_{\xi'}}$ se $\xi \neq \xi'$. ■

Teorema 2. Todo espaço radial $X - T_1$ é *almost radial*.

Demonstração:

Seja A não fechado e $x \in cl A \setminus A$. Tomemos $B \subset A$ tal que $|B| = a(x, A)$ e $x \in cl B$.

Como $x \in cl B \setminus B$, existe $C \subset B$ tal que C é dirigido topologicamente em x .

Vamos mostrar que $C \xrightarrow{t} x$.

De fato, seja $D \subset C$.

i) $\Rightarrow$ ii)

Se $|D| < |C|$, então $x \notin cl D$, pois $|D| < a(x, A)$.

ii) $\Rightarrow$ i)

Se $|D| = |C|$, então $x \in cl D$, pois C é topologicamente dirigido em x .

Pelo teorema 1, X é *almost radial*. ■

Proposição 2. Cada espaço seqüencial T_1 é *almost radial*.

Demonstração: Segue do teorema 1.

Teorema 3. Para cada *almost radial* $X - T_1$ temos $t_s(X) = t(X)$.

Demonstração: Seja $\tau = t_s(X)$. É suficiente mostrar que se $A = cl_\tau(A)$, então A é fechado.

Suponhamos que $A = cl_\tau A \subsetneq cl A$. Como X é *almost radial*, existe $x \in cl A \setminus A$ e um subconjunto B de A tal que $|B|$ é regular e $x(\text{tar})B$. Como $t_s(X) = \tau$ existe uma família $\gamma \subset \mathcal{P}(B)$ tal que $|\gamma| \leq \tau$, $x \notin cl P$ para cada $P \in \gamma$, mas $x \in cl(\cup \gamma)$.

Como $x(\text{tar})B$, segue que $|P| < |B|$, para cada $P \in \gamma$ e $|\cup \gamma| = |B|$. Como $|B|$ é regular, segue que $|\gamma| = |B|$. Deste modo

$$|B| \leq \tau, \quad \text{portanto}$$

$$x \in cl B = cl_\tau B \subset cl_\tau A = A, \quad \text{absurdo.}$$

Logo, A é fechado, portanto

$t(X) \leq t_s(X)$, pelos teoremas I.2.1 e I.2.2 e pela proposição 1, $t_s(X) \geq t(X)$, portanto vale a igualdade. ■

Teorema 4. Seja X *almost radial*- T_1 . Então $t(X) = \sigma_c(X)$.

Demonstração:

É suficiente mostrar que $\sigma_c(X) \leq t(X)$.

Seja A não fechado contido em X .

Como X é *almost-radial*- T_1 ,

$\exists B \subset A$ e $x \in cl A \setminus A$ tal que $|B|$ é regular e $B \xrightarrow{\text{tar}} x$. Pelo fato 4, $a(x, B) = |B|$.

Logo, pelo corolário 1.3,

$$\sigma_c(X) \leq t(X). \quad \blacksquare$$

Corolário 1. Para espaços T_1 , X é seqüencial sse X é *almost radial* e $t(X)$ é enumerável.

Demonstração: Proposição 1 e Teorema 4.

Corolário 2. Todo espaço *chain net* X T_1 com $t(X) < \sigma_c(X)$ não é *almost radial*.

Pelo corolário 1, o exemplo 1.1 é um espaço *almost radial*- T_4 que não é radial.

Existem espaços *chain net* que não são *almost radial*? Pelo corolário 2, basta encontrar um espaço *chain net* T_1 tal que $t(X) < \sigma_c(X)$.

5. Notas históricas e bibliográficas

Os espaços *chain net* e os espaços radiais foram introduzidos em 1967 por Herrlich.

Em 1984, Arhangel'skii, Isler e Tironi [AIT-84] introduziram os espaços *almost radial*.

O teorema 1.1 está enunciado sem demonstração em [AIT-86]. A demonstração do lema 1.1 que prova o teorema 1.1 é nossa.

A definição de *chain fecho* segue a de [JMSW-81]. Para alguns autores o *chain fecho* de A é definido como $\widehat{A}$.

Tomamos a notação $\widehat{A}^{(\alpha)}$ de [AIT-86]. Por analogia, resolvemos utilizar $(\widehat{A})_\lambda^{(\alpha)}$.

Vimos o exemplo 1.1 numa exposição feita pelo prof. Rajagopalan em 1988 no IME-USP.

Os exemplos 1.1 e 1.3 estão em [F-67].

Provamos o corolário 1.6.

O teorema 2.1 e os seus corolários são de [AIT-86].

Provamos o lema 2.1 e a partir dele demos uma nova demonstração da proposição 2.2 que aparece em [AIT-86].

A proposição 2.1 foi provada em [J-86].

A proposição 2.3 aparece em [AIT-86], com a hipótese adicional do espaço ser T_2 e valer GCH . A proposição 2.3, o corolário 2.3 são de [AW].

Provamos o item 3 do teorema 2.4 que generaliza o corolário 2.4 de [AW].

A proposição 2.4 e o teorema 2.2 e 2.3 são de Bella [B-86a] e [B-86b].

O teorema 3.1 e o seu corolário foram provados em [FIT-83] usando a def. 1.3'. Demos aqui uma nova demonstração usando a definição 1.3.

O teorema 3.2 generaliza um resultado de [A-80].

O teorema 3.3 foi provado em [JMSW-81].

Os teoremas 3.4 e 3.5 são de [IT-84].

Todos os resultados e definições do parágrafo 4 são de [AIT-84].

CAPÍTULO III

EXEMPLOS DE ESPAÇOS CHAIN NET

0. Introdução. Veremos alguns exemplos de espaços *chain net*, relacionados com diversos resultados vistos no capítulo II.

1. Exemplos de espaços chain net em ZFC.

Neste parágrafo, vamos dar dois exemplos em ZFC relacionados às seguintes questões:

- 1) $t_s(x) \neq t(x)$ para algum *chain net*?
- 2) existe um espaço *chain net* de *tightness* enumerável que não é sequencial?

(1) Vimos em II.4 que para todo *almost radial* T_1 , $t_s(x) = t(x)$. Para espaços *chain net*, a igualdade vale nos casos enunciados no teorema II.2.4. Veremos que a resposta da questão 1 é negativa.

(2) Em 1981, Jané, Meyer, Simon e Wilson criaram um exemplo T_2 em ZFC + CH e um exemplo T_c em ZFC.

Em 1986, Simon e Tironi, e independentemente Juhász e Weiss, construíram contra-exemplos T_2 em ZFC para as duas questões acima. O exemplo que apresentaremos a seguir, devido aos dois últimos, tem a vantagem de ser 0-dimensional.

Teorema 1. Sejam κ, λ cardinais tais que $cf(\kappa) = \aleph_0$, se $\kappa > \aleph_0$ então $\mu^{\aleph_0} < \kappa$ para cada $\mu < \kappa$ e, além disso, $\lambda^\kappa = \lambda$. Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico com $|X| = \lambda$ satisfazendo as propriedades 1-4 abaixo:

- 1) para cada fechado $F \subset X$ nós temos ou $|F| \leq \kappa$ ou $|F| = \lambda$;
- 2) $hd(X) \leq \kappa$;
- 3) X é T_2 , $\chi(X) = \aleph_0$;

4) se $F \subset X$ é fechado com $|F| \leq \kappa$ então F é uma intersecção enumerável de conjuntos τ -clopen.

Então existe uma topologia $\rho \supset \tau$ sobre X tal que $\langle X, \rho \rangle$ tem base de abertos compactos enumeráveis, satisfazendo $\chi(\langle X, \rho \rangle) = \aleph_0$ e, além disso,

- i) se $S \subset X$ e $|cl_\tau S| = \lambda$ então $|cl_\rho S| = \lambda$.
- ii) se $F \subset X$ é ρ -fechado e $|F| \leq \kappa$, então existe um ρ -clopen Z com $F \subset Z$ e $|Z| \leq \kappa$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{T}$ a família de todos os conjuntos $S \in [X]^{\leq \kappa}$ com $|cl_\tau S| = \lambda$. Então como $\lambda^\kappa = \lambda$, podemos escrever $\mathcal{T} = \{S_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ onde cada $S \in \mathcal{T}$ aparece λ vezes na enumeração. Para cada $p \in X$, fixemos uma base de τ -vizinhanças decrescentes de p , $\{U_n(p) : n \in \omega\}$. Também fixaremos uma boa ordem $\prec$ sobre X de tipo λ .

Nosso objetivo é definir, por indução sobre $\alpha \in \lambda$, pontos $p_\alpha \in X$ e topologias ρ_α sobre $X_\alpha = \{p_\beta : \beta \in \alpha\}$, que satisfaçam as seguintes hipóteses indutivas:

$I(\alpha)$: ρ_α contém uma base de abertos compactos enumeráveis e $\tau_\alpha = \tau|_{X_\alpha} \subset \rho_\alpha$.

$J(\alpha)$: para cada $\beta \in \alpha$, nós temos $\rho_\alpha|_{X_\beta} = \rho_\beta$.

Se $\alpha \in \lambda$ é limite e p_β, ρ_β foram escolhidos para cada $\beta \in \alpha$ com as propriedades desejadas, então ρ_α é a topologia gerada por $\cup\{\rho_\beta : \beta \in \alpha\}$ sobre X_α . Claramente $I(\alpha)$ e $J(\alpha)$ estão satisfeitas.

Agora se $\alpha = \beta + 1$, dividiremos em dois casos.

Se $S_\beta \subset X_\beta$, então escolheremos como p_β o $\prec$ -primeiro elemento de $cl_\tau(S_\beta) \setminus X_\beta$ e escolhemos uma sequência $(q_n)_{n \in \omega} \subset S_\beta$ tal que $q_n \in U_n(\rho_\beta)$. Usando $I(\beta)$ podemos escolher para cada $n \in \omega$ uma ρ_β -vizinhança compacta, aberta e enumerável $K_n \subset U_n(p_\beta)$. Uma base de ρ_α -vizinhanças de p_β em X_α são os conjuntos da forma $\cup\{K_i : i \in \omega \setminus n\} \cup \{p_\beta\}$ para cada $n \in \omega$.

Se $S_\beta \not\subset X_\beta$, então tomamos como p_β o $\prec$ -primeiro elemento de $X \setminus X_\beta$ e definimos p_β

isolado em ρ_α . É fácil verificar que $I(\alpha)$ e $J(\alpha)$ estão satisfeitas em ambos os casos.

Terminada a indução, podemos facilmente verificar que $X = \{p_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Definimos ρ como a topologia gerada por

$$\cup\{\rho_\alpha : \alpha \in \lambda\}.$$

Pelas hipóteses $I(\alpha)$ e $J(\alpha)$, claramente $\langle X, \rho \rangle$ é localmente enumerável, localmente compacto e $\rho \supset \tau$.

Resta apenas verificar i) e ii).

(i) Como $\lambda^\kappa = \lambda$, segue que $cf(\lambda) > \kappa$. Logo se $S \in \mathcal{I}$, existe $\beta^* < \lambda$ tal que $S \subset X_{\beta^*}$. Portanto $|\{\beta : S = S_\beta \subset X_{\beta^*}\}| = \lambda$, logo $|cl_\rho S| = \lambda$.

Se $A \subset X$ e $|cl_\tau A| = \lambda$, por (2), $\exists S \subset A$ tal que $|S| \leq \kappa$ e $cl_\tau A = cl_\tau S$. Claramente $S \in \mathcal{I}$, logo $|cl_\rho S| = \lambda$. Como $cl_\rho S \subset cl_\rho A$, $|cl_\rho A| = \lambda$.

(ii) Seja $F \subset X$ ρ -fechado com $|F| \leq \kappa$. Por i) e 1, temos $|cl_\tau F| \leq \kappa$, logo é suficiente mostrar que todo τ -fechado $F \subset X$, com $|F| \leq \kappa$ pode ser coberto por um ρ -clopen Z com $|Z| \leq \kappa$.

Suponhamos primeiro que $|F| < \kappa$. Se $\kappa = \aleph_0$, podemos recobrir F com um número finito de ρ -clopen enumeráveis. Se $\kappa > \aleph_0$, podemos provar o seguinte:

Fato A: Se $|H| < \kappa$ então $|cl_\rho H| < \kappa$.

Demonstração:

$cl_\rho H = \cup\{cl_\rho A : A \in [H]^\omega\}$, pois claramente $t(\langle X, \rho \rangle) = \aleph_0$.

Lembramos que se Y é um espaço topológico T_3 então $|Y| \leq 2^{d(Y) \cdot \psi(Y)}$, portanto

$$|cl_\rho A| \leq 2^{\aleph_0}, \text{ logo}$$

$$|cl_\rho H| \leq 2^{\aleph_0} \cdot |H|^{\aleph_0} < \kappa.$$

■

Seja $H_0 = F$. Por indução sobre $\alpha < \omega_1$, definimos

$$H_\alpha = \cup \{V_x : x \in cl_\rho(\bigcup_{\xi < \alpha} H_\xi)\},$$

onde V_x é uma vizinhança enumerável de x .

Pelo fato acima, é fácil ver que $|H_\alpha| < \kappa \quad \forall \alpha < \omega_1$. Seja

$$Z = \bigcup_{\alpha < \omega_1} H_\alpha.$$

Claramente $|Z| \leq \kappa$. Cada H_α é ρ -aberto, portanto, Z é ρ -aberto. Além disso,

$$\bigcup_{\alpha < \omega_1} (cl_\rho H_\alpha) = Z \quad \text{e} \quad T(< X, \rho >) = \aleph_0$$

portanto Z é ρ -fechado.

Assumiremos agora que F é τ -fechado e $|F| = \kappa$. Por 4) existe uma sequência decrescente $\{U_n : n \in \omega\}$ de conjuntos τ -clopen com $F = \bigcap_{n \in \omega} U_n$.

Podemos também escrever $F = \bigcup_{n \in \omega} F_n$, onde $|F_n| < \kappa$ para cada $n \in \omega$. Pelo caso anterior, podemos encontrar $Z_n \supset F_n$, onde Z_n é ρ -clopen e $|Z_n| \leq \kappa$.

Afirmamos que

$$Z = \cup \{Z_n \cap U_n : n \in \omega\}$$

satisfaz as condições exigidas.

De fato, claramente temos

$$F \subset Z, |Z| \leq \kappa \quad \text{e} \quad Z \quad \text{é} \quad \rho\text{-aberto}.$$

Para mostrar que Z é ρ -fechado, vamos tomar $x \in X \setminus Z$ e escolher $n \in \omega$ tal que $x \notin U_n$. Então

$$V = X \setminus [\bigcup_{i < n} (Z_i \cap U_i) \cup U_n]$$

é claramente um ρ -clopen contendo x com $V \cap Z = \emptyset$, logo Z é ρ -fechado.

Corolário 1. Existe um espaço *chain net* X , 0-dimensional, T_2 , de *tightness* enumerável, que não é sequencial (logo, X também não é *almost radial*).

Demonstração:

Vamos aplicar o teorema 1 (com $\kappa = \aleph_0$ e $\lambda = 2^{\aleph_0}$) por exemplo no conjunto de Cantor C . C satisfaz as quatro condições:

- 1) todo fechado na reta é enumerável ou tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$ (corol. 7.21 em [H-84]).
- 2) $hd(C) \leq w(C) = \aleph_0$.
- 3) óbvio.
- 4) seja $F \subset C$ fechado tal que $|F| \leq \aleph_0$. Como F é fechado e C é espaço métrico, $\exists \{U_n : n \in \omega\}$ abertos em C tal que $F = \bigcap_{n \in \omega} U_n$. Como C é 0-dimensional e F é compacto, podemos tomar V_n clopen tal que $F \subset V_n \subset U_n$, logo

$$F = \bigcap V_n.$$

Tomemos $p \notin C$.

Seja $X = C \cup \{p\}$ com a seguinte topologia: uma base de ρ -vizinhanças para $x \in C$ em C é base para x em X .

Uma base de vizinhanças para p são os conjuntos da forma $(C \setminus Z) \cup \{p\}$, onde $Z \subset C$ é um ρ -clopen e $|Z| \leq \aleph_0$.

Vamos denotar por clA o fecho de A em X .

Como $\langle C, \rho \rangle$ tem uma base de abertos compactos enumeráveis e é T_2 , claramente X é 0-dimensional T_2 .

De $X - T_2$ e ii), temos que nenhuma ω -sequência em C converge para p , logo X não é sequencial.

X é *chain net*. Seja $A \subset X$ não fechado. Como $\chi(\langle C, \rho \rangle) = \aleph_0$, basta considerarmos o caso em que

$$\{p\} = clA \setminus A, \text{ logo}$$

A é ρ -fechado e não fechado, portanto, por ii), $|A|$ é não enumerável. É claro que toda ω_1 -sequência de elementos distintos de A converge para p . Notemos que $\sigma_c(X) = \aleph_1$.

Finalmente, X tem *tightness* enumerável. Novamente, o único caso a ser verificado é $p \in clA$, com $A \subset C$. Se A é enumerável, não temos nada para fazer. Suponhamos que A não é enumerável. Por 1), $|cl_\tau A| = 2^{\aleph_0}$. Por 2), $\exists B \subset A, |B| \leq \aleph_0$ tal que $cl_\tau A = cl_\tau B$. Por i), $|cl_\rho B| = |cl_\tau B| = 2^{\aleph_0}$, logo B não está contido num ρ -clopen enumerável, portanto $p \in clB$.

Claramente, X é Lindelöf. Como X é 0-dimensional- T_2 , X é T_3 , logo X é T_4 .

Corolário 2. Existe um espaço *chain net* X , 0-dimensional, Lindelöf, T_4 , de *tightness* enumerável que não é sequencial.

Corolário 3. Suponhamos que $cf(\kappa) = \aleph_0$ e $\lambda = \kappa^{\aleph_0}$ são tais que $\mu^{\aleph_0} < \kappa, \forall \mu < \kappa$ e $\lambda^\kappa = \lambda$. Então existe um espaço *chain net* X , 0-dimensional, T_2 , com $|X| = \lambda$ para o qual $t_s(X) \neq t(X)$.

Demonstração:

Vamos aplicar neste caso o teorema 1 no espaço $B(\kappa) = D(\kappa)^\omega$, onde $D(\kappa)$ é κ com a topologia discreta. $B(\kappa)$ é chamado de espaço de Baire de *weight* κ .

2) e 3) são óbvios.

Fato (8.3 de [H-84]): Se Y é completamente metrizável e $\omega(Y) = \theta$ então $|Y| = \theta$ ou $|Y| = \theta^{\aleph_0}$.

1) Basta usarmos o fato acima e notarmos que todo subespaço fechado de $B(\kappa)$ é completamente metrizável e tem *weight* $\leq \kappa$ ou igual $\kappa^{\aleph_0} = \lambda$.

4) Seja $A \subset D(\kappa)^\omega$ fechado. Para cada $n \in \omega$, seja

$$A_n = \{x \in D(\kappa)^\omega : (\exists y \in A)(x \upharpoonright_{n+1} = y \upharpoonright_{n+1})\}$$

É claro que A_n é clopen e $\cap A_n \supset A$. Para ver que $\cap A_n \subset A$, seja d a métrica 0 – 1 sobre $D(\kappa)$ e

$$\begin{aligned} \bar{d} : B(\kappa) \times B(\kappa) &\rightarrow \mathbf{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto \sum_{i \in \omega} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{i+1}} \end{aligned}$$

É claro que $\bar{d}$ é uma métrica completa compatível com a topologia dada inicialmente e se

$$x \notin A, \exists n \in \omega \quad \text{tal que} \quad \bar{d}(x, A) > \frac{1}{2^n},$$

logo $x \notin A_{n+1}$ e, portanto,

$$\cap A_n = A.$$

Agora, seja ρ a topologia sobre $B(\kappa)$ construída pelo teorema 1. Seja $p \notin B(\kappa)$. Nosso espaço X será da forma $X = B(\kappa) \cup \{p\}$ com a topologia que coincide com ρ sobre $B(\kappa)$ e como base de vizinhanças de p temos os conjuntos da forma

$$(B(\kappa) \setminus Z) \cup \{p\}, \text{ onde } Z \text{ é um } \rho\text{-clopen e } |Z| \leq \kappa.$$

Denotaremos o fecho de A em X por clA .

É claro que X é 0-dimensional e T_2 .

Para mostrar que X é *chain net*, tome um conjunto ρ -fechado $F \subset B(\kappa)$ tal que $p \in clF$.

Então por (ii) devemos ter $|F| = \lambda > \kappa$, e é claro que toda κ^+ -sequência de elementos distintos de F converge para p .

A seguir, mostraremos que $t_s(\rho, X) = \aleph$, logo $t_s(X) = \aleph$ também. Seja $A \subset B(\kappa)$ e $p \in clA$. Então, por i) e ii) e 1), $|cl_\tau A| = |cl_\rho A| = \lambda$. Por 2), existe $S \subset A$ tal que $cl_\tau S = cl_\tau A$, com $|S| \leq \kappa$. Como $|cl_\rho| = \lambda$, pelo fato A na demonstração do teorema,

$|S| = \kappa$. Como nenhum ρ -clopen Z com $|Z| \leq \kappa$ pode cobrir S , vemos que $p \in clS$. Podemos escrever $S = \cup\{S_n : n \in \omega\}$ com $|S_n| < \kappa$ para cada $n \in \omega$. Pelo fato A e por ii), $\forall n \in \omega$,

$$p \notin cl(S_n), \text{ logo}$$

$$t_s(p, X) = \aleph_0.$$

Finalmente, mostraremos que $t(p, X) = \kappa$, e isto completará nossa demonstração. Claramente, é suficiente mostrar que $t(p, X) \geq \kappa$. Isto porém é trivial, pois já vimos que se $A \subset B(\kappa)$, com $|A| < \kappa$, então $p \notin clA$.

Vimos no capítulo II que um contra-exemplo para a questão 1 pode ter cardinalidade $\geq \aleph_{\omega+1}$. Pelo corolário acima, temos um exemplo de cardinalidade $\aleph_{\omega+1}$ ($\kappa = \aleph_\omega$ e $\lambda = \aleph_{\omega+1}$).

2. Exemplos de espaços chain net consistentes com ZFC

Apresentamos aqui mais dois exemplos relacionados à questão 2 do parágrafo anterior.

Como foi notado anteriormente, o espaço X do **corolário 1.1** tem $\sigma_c(X) = \aleph_1$. Observamos que o mesmo ocorre com o exemplo criado por Simon e Tironi. Lembramos que para espaços Y chain net, T_2 , $\sigma_c(Y) \leq 2^{t(Y)}$ (teorema II.3.5).

É natural perguntarmos se para cada Y chain net T_2 , $\sigma_c(Y) \leq \aleph_1$.

Recentemente, Alas e Wilson criaram em $ZFC + MA + \neg CH$ um espaço Z chain net T_2 de *tightness* enumerável, com $\sigma_c(Z) = 2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Também vimos que o espaço X acima é Lindelöf, T_4 , zero-dimensional. Veremos em $ZFC + \diamond$ um exemplo compacto- T_2 para a questão 2. Observmos que $ZFC + \diamond \rightarrow CH$, logo, o chain net caráter deste espaço também é $\aleph_1$.

Teorema 1 (MA + $\neg$ CH): Existe um espaço *chain net* T_2 com *tightness* enumerável cujo *chain net* caráter é $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Demonstração:

Seja μ o ordinal inicial de cardinalidade $2^{\aleph_0}$. Seja $\{C_\alpha : \alpha < \mu\}$ uma família de subconjuntos raros do conjunto de Cantor C , cuja reunião não é magra (como subconjunto de C).

[K-80] MA implica que se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos raros e $|\mathcal{F}| < 2^{\aleph_0}$ então $\cup \mathcal{F}$ é um conjunto magro. Em particular, $\cup \{C_\alpha : \alpha < \xi\}$ é um conjunto magro para cada $\xi < \mu$.

Lembramos também que MA implica $2^{\aleph_0}$ regular.

Podemos assumir $C_\alpha \neq \emptyset$, disjuntos dois a dois, pois

$$C_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} C_\beta \text{ é um conjunto raro e } 2^{\aleph_0} \text{ é regular.}$$

Indutivamente, podemos definir uma família enumerável $\mathcal{I}_\xi$ de subconjuntos raros e fechados do conjunto de Cantor tal que

$$(\cup \{\cup \mathcal{I}_\theta : \theta < \xi\}) \cup (\cup \{C_\alpha : \alpha < \xi\}) \subset \cup \mathcal{I}_\xi,$$

pois $\cup \{\mathcal{I}_\theta : \theta < \xi\} \cup \{C_\alpha : \alpha < \xi\}$ é uma família de subconjuntos raros, e sua cardinalidade é menor que $2^{\aleph_0}$.

Como $\cup \{C_\alpha : \alpha < \mu\}$ não é um conjunto magro, para cada $\xi < \mu$ existe o menor $\beta(\xi) \geq \xi$ tal que $C_{\beta(\xi)} \setminus \cup \mathcal{I}_\xi \neq \emptyset$. Para cada $\xi < \mu$ vamos escolher

$$x_{\beta(\xi)} \in C_{\beta(\xi)} \setminus \cup \mathcal{I}_\xi$$

e seja

$$X = \{x_{\beta(\xi)} : \xi < \mu\}.$$

Claramente, $|X| = 2^{\aleph_0}$, pois os C_α são disjuntos e μ é regular.

Seja $\tau_{\mathbf{R}}$ a topologia usual da reta e $\tau_X = \tau_{\mathbf{R}}|_X$.

Suponhamos $A \subset X$, $|A| = \kappa$ regular e $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$. Da regularidade de $2^{\aleph_0}$, segue que existe $\lambda < \mu$ mínimo tal que $\{x_{\beta(\xi)} : \xi < \lambda\} \supset A$. Mas

$$\{x_{\beta(\xi)} : \xi < \lambda\} \subset \cup\{C_{\beta(\xi)} : \xi < \lambda\} \subset \cup\mathcal{I}_{\eta},$$

onde $\eta = \sup\{\beta(\xi) : \xi < \lambda\}$. Logo $A \subset \cup\mathcal{I}_{\eta}$. Como κ é regular, $\kappa > \aleph_0$ e $|\mathcal{I}_{\eta}| \leq \aleph_0$, segue que, para algum $T \in \mathcal{I}_{\eta}$

$$|A \cap T| = \kappa.$$

Então $cl_{\tau_X}(A \cap T) = cl_{\tau_{\mathbf{R}}}(A \cap T) \cap X \subset T \cap X$, pois $cl_{\tau_{\mathbf{R}}}T = T$, mas $T \cap X \subset (\cup\mathcal{I}_{\eta}) \cap X \subset \{x_{\beta(\xi)} : \xi < \lambda\}$, logo $|T \cap X| < 2^{\aleph_0}$, portanto, A contém um subconjunto $B = A \cap T$ tal que $|B| = |A| = \kappa$ e $|cl_{\tau_X}B| < 2^{\aleph_0}$. denotaremos esta propriedade do espaço X por (*).

Fato 1: X tem $2^{\aleph_0}$ pontos de acumulação.

Demonstração:

$|X| = 2^{\aleph_0}$ e X é Lindelöf ($X \subset \mathbf{R}$, logo tem base enumerável).

Fato 2: Existem $2^{\aleph_0}$ fechados de cardinalidade $2^{\aleph_0}$.

Demonstração:

Pelo fato 1, assumimos sem perda de generalidade que $E = \{x \in X : x \text{ é ponto de acumulação completo à esquerda}\}$ tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$. Se $x \in E$, então

$F_x = (-\infty, x]$ é fechado em X e

$|F_x| = 2^{\aleph_0}$. Além disso,

$F_x \neq F_y$, se $x, y \in E, x \neq y$.

Como X tem base enumerável, X é hereditariamente separável, isto é, $hd(X) \leq \aleph_0$. Pelo fato 2, existem $2^{\aleph_0}$ conjuntos enumeráveis cujo fecho tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$.

Vamos enumerar estes conjuntos como

$$\{N_\alpha : \alpha < \mu\},$$

de modo que cada conjunto apareça $2^{\aleph_0}$ vezes nesta enumeração. Para cada $\alpha < \mu$ escolhemos $y_\alpha \in clN_\alpha \setminus N_\alpha$ e uma sequência $S_\alpha \subset N_\alpha$ convergente para y_α de modo que $y_\alpha \neq y_\beta$, se $\alpha \neq \beta$.

Seja $Z = \{y_\alpha : \alpha < \mu\}$. Seja ρ a topologia métrica sobre Z induzida por $X \subset C$. Claramente $\langle Z, \rho \rangle$ tem base clopen e satisfaz a propriedade (*).

Seja $Z_\alpha = \{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Definiremos indutivamente topologias τ_α sobre Z_α .

τ_1 é a topologia discreta sobre Z_1 .

Suponhamos que já definimos, para cada $\beta < \alpha$, uma topologia τ_β sobre Z_β tal que todo ponto de Z_β tem uma base local enumerável de conjuntos τ_β -clopen, ρ -fechados e enumeráveis. Além disso, se $\beta' < \beta$ então $\langle Z_{\beta'}, \tau_{\beta'} \rangle$ é subespaço aberto de $\langle Z_\beta, \tau_\beta \rangle$ e $\rho|_{Z_\beta} \subset \tau_\beta$.

agora vamos definir uma topologia τ_α sobre Z_α , satisfazendo as propriedades acima.

- 1) Se α é ordinal limite então τ_α é a topologia gerada por $\cup\{\tau_\beta : \beta < \alpha\}$.
- 2) Se $\alpha = \gamma + 1$ e
 - a) se $S_\alpha \cap Z_\alpha$ é finito então y_γ é isolado em Z_α .
 - b) se $S_\alpha \cap Z_\alpha$ é infinito então vamos escolher uma base local em y_γ , $\{B_n : n \in \omega\}$ de conjuntos ρ -clopen, decrescente, de tal modo que

$$(B_n \setminus B_{n+1}) \cap (S_\alpha \cap Z_\alpha) \neq \emptyset.$$

Escolhemos $Z_n \in (B_n \setminus B_{n+1}) \cap S_\alpha \cap Z_\alpha$ e um conjunto U_n τ_γ -clopen, ρ -fechado e enumerável tal que

$$Z_n \in U_n \subset B_n \setminus B_{n+1}.$$

Uma base de vizinhanças de y_γ em τ_α será

$$\{W_k : k \in \omega\}, \text{ onde}$$

$$W_k = \{y_\gamma\} \cup \bigcup \{U_n : n \geq k\}$$

Como cada U_n é ρ -fechado, W_k é ρ -fechado, pois y_γ é o único ponto de acumulação da família $\{U_n : n \in \omega\}$. Além disso, claramente $\tau_\alpha \supset \rho|_{Z_\alpha}$, logo

W_k é τ_α -fechado, portanto

W_k é ρ -fechado, τ_α -clopen e enumerável.

Seja τ a topologia gerada por $\bigcup_{\alpha < \mu} \tau_\alpha$.

É claro que τ é uma topologia sobre Z que refina ρ , logo tem a propriedade (*). Agora definimos

$$Y = Z \cup \{p\} \quad (\text{onde } p \notin Z),$$

de tal modo que as vizinhanças de p são da forma $U \cup \{p\}$, onde $Z \setminus U$ é τ -fechado em Z e tem cardinalidade menor que $2^{\aleph_0}$.

Seja δ a topologia definida acima.

Afirmamos que:

1) Y é chain net:

Suponhamos $p \in cl_\delta A$ para algum $A \subset Z$. Então $cl_\tau A$ deve ter cardinalidade $2^{\aleph_0}$. Cada ponto de $cl_\tau A$ é limite de uma ω -seqüência em A (note que $\chi(< Z, \tau >) = \aleph_0$ e Z é aberto em Y). Agora, qualquer enumeração bijetora de $cl_\tau A$ é uma $2^{\aleph_0}$ -seqüência convergente para p , logo

$$cl_\delta A = cl_\tau A \cup \{p\} = ch_\delta A.$$

Notamos que nenhuma λ -seqüência em Z , com $\lambda < 2^{\aleph_0}$ converge para p , pois $< Z, \tau >$ tem a propriedade (*). De fato, suponhamos que $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset Z$ converge para p , com $\lambda < 2^{\aleph_0}$.

Pelo corolário II.1.1, existe $B \subset Z, |B| \leq \lambda$, regular tal que B é dirigido topologicamente em p . Por (*)

$$(\exists C \subset B) \text{ tal que } |B| = |C|$$

e

$$|cl_\tau C| < 2^{\aleph_0} \text{ portanto}$$

$$p \notin cl_\delta C, \text{ logo}$$

$$Y \setminus cl_\delta C \text{ é vizinhança de } p$$

e

$$|B \setminus (Y \setminus cl_\delta C)| = |C| = |B|$$

donde B não é dirigido topologicamente em p , absurdo.

2) Y tem **tightness enumerável**. Novamente seja $A \subset Z$ tal que $p \in cl_\delta A$. $cl_\tau A$ deve ter cardinalidade $2^{\aleph_0}$. Logo na topologia métrica ρ , A tem um subconjunto enumerável denso $N \subset A$. N aparece $2^{\aleph_0}$ vezes na enumeração N_α , logo N tem $2^{\aleph_0}$ pontos de acumulação na topologia τ ($N \subset Z_\alpha$ para algum $\alpha < \mu$, logo $\forall \gamma > \alpha$ tal que $N_\gamma = N$, $|S_\gamma \cap Z_\gamma| = \aleph_0$ e portanto $y_\gamma \in cl_\tau N$). Logo $cl_\tau N$ tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$ e portanto $p \in cl_\delta N$.

Teorema 2. Seja X localmente compacto, T_2 localmente enumerável, hereditariamente separável, enumeravelmente compacto, não compacto, $\chi(X) = \aleph_0$. Então o compactificado por um ponto de Alexandroff αX de X é um compacto T_2 , *chain net*, não-sequencial, com *tightness* enumerável.

Demonstração:

É claro que $\alpha X = X \cup \{p\}$ é compacto T_2 , hereditariamente separável, logo $t(\alpha X) = \aleph_0$. Vamos mostrar que αX é *chain net*. Seja τ a topologia definida sobre αX e ρ a

topologia definida sobre X . Como $\chi(X) = \aleph_0$, é suficiente considerar A em αX tal que $\{p\} = cl_\tau A \setminus A$. Logo A é fechado em X .

A não é enumerável. De fato, suponhamos que A é enumerável. Então A é Lindelöf. Além disso, A é fechado em X , portanto, A é enumeravelmente compacto, logo A é compacto. Portanto

$$\alpha X \setminus A \text{ é vizinhança de } p, \text{ logo}$$

$p \notin cl_\tau A$, contra a hipótese.

Seja V uma vizinhança de p em αX . $\alpha X \setminus V \subset X$ é compacto. Como X é localmente enumerável, $\alpha X \setminus V$ pode ser coberto por um número finito de abertos enumeráveis, logo,

$$\alpha X \setminus V \text{ é enumerável.}$$

Seja $B \subset A$ tal que $|B| > \aleph_0$ e regular. Então $|B \setminus V| \leq \aleph_0 < |B|$, para cada vizinhança V de p . Portanto, pelo teorema II.1.1, αX é *chain net*.

Resta apenas mostrar que αX não é seqüencial. Suponhamos por absurdo que αX é seqüencial. Como $p \in cl_\tau X \setminus X$, existe $(x_n)_{n \in \omega} \subset X$ tal que $x_n \rightarrow p$. Como αX é T_2 , $\{x_n : n \in \omega\} \cup \{p\}$ é fechado em αX , logo $\{x_n : n \in \omega\}$ é fechado em X , por um argumento já usado anteriormente, $p \notin cl_\tau \{x_n : n \in \omega\}$, absurdo, pois $(x_n \rightarrow p) \Rightarrow p \in cl_\tau \{x_n : n \in \omega\}$.

Em 1976, Ostaszewski criou em $ZFC + \diamond$ um espaço Ω satisfazendo as condições do teorema 2. Logo, temos

Corolário 1 ($\diamond$): Existe um espaço *chain net*, compacto- T_2 com *tightness* enumerável que não é seqüencial (portanto, não é *almost radial*).

As construções do parágrafo 1 e do exemplo anterior usam a técnica de Ostaszewski, logo não faremos a construção de Ω neste texto.

O espaço Ω foi construído por Ostaszewski para responder negativamente ao problema de Moore-Mrowka:

É todo compacto T_2 de *tightness* enumerável seqüencial?

É natural perguntarmos se em ZFC o corolário 1 vale, ou se o problema de Moore-Mrowka tem contra-exemplo em ZFC.

A resposta é negativa. Em 1988, Balogh, Dow, Fremlin e Nyikos provaram usando PFA que todo compacto T_2 de *tightness* enumerável é seqüencial. A consistência de PFA usa forcing e depende da existência de *large cardinals*, ou seja, uma axiomática mais forte que ZFC. Em 1990, Alan Dow provou ser consistente com ZFC o resultado acima. Sua demonstração usa forcing e os submodelos elementares.

Logo, a questão de Moore-Mrowka (e o resultado do corolário 1) é independente de ZFC.

3. ' $\{0,1\}^{\aleph_1}$ é chain net' é independente de ZFC

O resultado principal deste parágrafo é mostrar que $D^{\aleph_1}$, onde $D = \{0,1\}$, é *chain net* se $MA + \neg CH$ vale e não é *chain net* na presença de CH.

Lema 1: Seja X espaço *chain net*- T_1 , Y uma família enumerável de abertos não vazios em X , $A = \bigcap Y$, $M \subset X \setminus A$ e $x \in A \cap \hat{M}$. Então existe $(x_n)_{n \in \omega} \subset M$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demonstração:

Seja $Y^* = \{P \cap (M \cup \{x\}) : P \in Y\}$. Como Y^* é uma família enumerável de abertos em $M \cup \{x\}$, é fácil notar que $\psi(x, M \cup \{x\}) = \aleph_0$.

Como $x \in \hat{M}$, $\exists (y_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset M$ tal que $y_\alpha \rightarrow x$. Pelo lema II.3.1, existe uma sequência

$(x_n)_{n \in \omega} \subset \{y_\alpha : \alpha < \lambda\} \subset M$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Corolário 1: Todo radial- T_1 de pseudocaráter enumerável é Fréchet-Urysohn.

Imediatamente do lema 1, concluímos o

Teorema 1. Seja X espaço *chain net* T_1 . Se não existem sequências convergentes não triviais em X , então todo conjunto G_δ é aberto em X .

Exemplo 1: $\beta\omega$ não é *chain net*.

$\beta\omega \setminus \omega$ é um G_δ em $\beta\omega$ que não é aberto. Como X é T_2 , pelo teorema 1, basta mostrarmos que $\beta\omega$ não contém sequências enumeráveis convergentes não triviais.

Seja $(x_n)_{n \in \omega} \subset \beta\omega$ uma sequência convergente e seja $x \in \beta\omega$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como $\beta\omega$ é T_2 , claramente

$$\{x_n : n \in \omega\} \cup \{x\} \text{ é fechado.}$$

Como todo fechado infinito de $\beta\omega$ é não enumerável ([E-89] pg. 175), então $\{x_n : n \in \omega\} \cup \{x\}$ é finito, logo $\exists m \in \omega$ tal que $\forall n \geq m, x_n = x$; donde, $(x_n)_{n \in \omega}$ é uma sequência convergente trivial.

Lema 2: Sejam X, Y e $f : X \rightarrow Y$, tais que X é um espaço *chain net*, Y espaço topológico e f é uma função contínua sobrejetora fechada.

Então Y é *chain net*.

Demonstração:

Seja $A \subset Y$ tal que $cl A \setminus A \neq \emptyset$.

$f^{-1}(A)$ não é fechado em X , pois $f(f^{-1}(A)) = A$ e f é função fechada.

Seja $x \in cl(f^{-1}(A)) \setminus f^{-1}(A)$ e $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda} \subset f^{-1}(A)$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$.

Então $(f(x_\alpha))_{\alpha < \lambda} \subset A$, $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ e $f(x) \in cl(A) \setminus A$. Portanto

Y é *chain net*.

Teorema 2: Seja X *chain net* compacto T_2 . Então $w(X) \leq 2^{c(X)}$.

Demonstração:

Suponhamos que $w(X) > 2^{c(X)} = \tau$.

Pelo teorema 3 de [S-75], $\exists f : X \rightarrow I^\tau$ contínua e sobrejetora. Claramente f é fechada, logo pelo lema 2, I^τ é *chain net*.

Por outro lado, $\tau \geq 2^{\aleph_0}$, portanto, $\beta\omega \subset I^\tau$. Como $\beta\omega$ é subespaço fechado que não é *chain net* (Exemplo 1), I^τ não é *chain net*, absurdo. Portanto

$$w(X) \leq 2^{c(X)}.$$

■

Suponhamos X diádico compacto T_2 , *chain net*. Como $c(X) = \aleph_0$, pelo teorema 2, $w(X) \leq 2^{\aleph_0}$. O próximo resultado mostra que, neste caso, a desigualdade estrita vale:

Teorema 3: Seja X diádico compacto, T_2 e *chain net*. Então $w(X) < 2^{\aleph_0}$.

Demonstração:

Suponhamos que $w(X) \geq 2^{\aleph_0} = c$. Então X contém uma cópia de D^c ([E-77]).

Como $\beta\omega$ pode ser topologicamente imerso em D^c , X contém uma cópia de $\beta\omega$. Pelo mesmo argumento usado no teorema 2, X não é *chain net*, absurdo. Logo, $w(X) < 2^{\aleph_0}$.

Teorema 4 (CH): Todo X diádico compacto, *chain net* e T_2 , é metrizável.

Demonstração:

Pelo teorema 3, $w(X) < 2^{\aleph_0}$. Como $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, $w(X) = \aleph_0$. Como X é compacto T_2 e $w(X) = \aleph_0$, X é metrizável ([E-89] pg. 260).

Teorema 5 (CH): $D^{\aleph_1}$ não é *chain net*.

Demonstração:

Como $D^{\aleph_1}$ é diádico compacto, T_2 , não metrizável, segue do teorema 4.

Proposição 1 (MA + $\neg$ CH): Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um conjunto enumerável. Suponhamos $x \in cl A$ e $\chi(x, X) < 2^{\aleph_0}$. Então existe uma ω -sequência em A convergindo para x .

Demonstração:

Se existe uma ω -sequência constante em A convergindo para x , terminamos.

Caso contrário, $U \cap A$ deve ser infinito para cada vizinhança U de x .

Seja $\mathcal{U}$ uma base de vizinhanças de x com $|\mathcal{U}| < 2^{\aleph_0}$. Então $\{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ é uma família de conjuntos infinitos dirigido para baixo, logo, pelo teorema 1 [F-84] existe $I \subseteq A$ infinito tal que $I \setminus (U \cap A) = I \setminus U$ é finito para cada $U \in \mathcal{U}$. Logo se $I = \{x_n : n \in \omega\}$ é uma enumeração bijetora de I , então claramente $(x_n)_{n \in \omega} \rightarrow x$.

Teorema 6 (MA + $\neg$ CH): O espaço $D^{\aleph_1}$ é *chain net*.

Demonstração:

Nós mostraremos que para cada $A \subset D^{\aleph_1}$, $\hat{A}^{(2)} = cl A$. Seja $\tilde{A} = cl_{\aleph_0} A$. Pela proposição 1, $cl_{\aleph_0} A = (\hat{A})_{\aleph_0} \subset \hat{A}$. Sejam $x \in cl \tilde{A} \setminus \tilde{A}$ e $B = \{U_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ uma base de $D^{\aleph_1}$ no ponto x .

Como $cl_{\aleph_0} \tilde{A} = \tilde{A}$, temos para cada $\beta < \aleph_1$,

$$P_\beta = (\cap \{U_\alpha : \alpha < \beta\}) \cap \tilde{A} \neq \emptyset.$$

De fato, $\forall \alpha < \beta$, $\exists V_\alpha$ vizinhança de x tal que $cl V_\alpha \subset U_\alpha$.

$\forall J \in [\beta]^{<\omega}$, $J \neq \emptyset$, fixemos $x_J \in (\cap_{\alpha \in J} V_\alpha) \cap \tilde{A}$. Seja

$$B = cl\{x_J : J \in [\beta]^{<\omega}, J \neq \emptyset\} \subset cl_{\aleph_0} \tilde{A} = \tilde{A}.$$

Claramente, $\{V_\alpha \cap B : \alpha < \beta\}$ tem *p.i.f.*, logo, pela compacidade de $D^{\aleph_1}$, temos

$$\cap \{cl V_\alpha \cap B : \alpha < \beta\} \neq \emptyset. \text{ como}$$

$$P_\beta \supset \cap \{cl V_\alpha \cap B : \alpha < \beta\}, \text{ temos}$$

$$P_\beta \neq \emptyset$$

Para cada $\beta < \aleph_1$, fixemos $x_\beta \in P_\beta$ e seja $C = \{x_\beta : \beta < \aleph_1\}$. Então $C \subset A$ e $x \in cl C$. Logo, $|B| = \aleph_1$. Se 0 é uma vizinhança do ponto x , então existe $\alpha^* < \aleph_1$ tal que $U_{\alpha^*} \subset 0$. Então $x_\beta \in U_{\alpha^*} \subset U$ para cada $\beta > \alpha^*$ e $B \setminus 0 \subset \{x_\beta : \beta \leq \alpha^*\}$. Logo $|B \setminus 0| \leq \aleph_0 < \aleph_1 = |B|$. Como $\aleph_1$ é regular, pelo corolário II.1.1, $x \in \hat{B}$. Como $B \subset \tilde{A} = (\hat{A})_{\aleph_0} \subset \hat{A}$, temos $\hat{B} \subset \hat{A}^{(2)}$, portanto, $x \in \hat{A}^{(2)}$. Logo,

$$cl \tilde{A} \subset \hat{A}^{(2)} \subset cl A = cl(cl_{\aleph_0}(A)) = cl \tilde{A} \text{ portanto}$$

$$cl A = \hat{A}^{(2)}, \text{ logo}$$

$$D^{\aleph_1} \text{ é chain net.}$$

Podemos notar que a demonstração acima vale para qualquer X compacto T_2 tal que $\chi(X) \leq \aleph_1$.

Corolário 2: “ $D^{\aleph_1}$ é chain net” é independente de ZFC.

Corolário 3: “Todo espaço *chain net*, compacto T_2 é metrizável” é independente de ZFC.

4. Notas históricas e bibliográficas.

As duas questões citadas no parágrafo 1 foram propostas em [AIT-86]. O problema de Moore-Mrowka foi citado por Arhangel'skii como uma das questões em aberto cuja ‘solução deve exigir idéias e métodos novos’.

Os exemplos do parágrafo 1 são de [JW-86].

O exemplo do teorema 2.1 e o exemplo de Ostaszewski foram construídos em [AW] e [O-76], respectivamente.

O teorema 2.2 e o corolário 2.1 são de [DIT-87].

Uma demonstração detalhada da resposta afirmativa ao problema de Moore-Mrowka foi feita por Balogh em 1989 e aparecerá na dissertação de mestrado de Lúcia Junqueira.

O artigo de Alan Dow [D-90] usa uma nova técnica em *set-theoretic topology*: os submodelos elementares. Segundo ele, esta passará a fazer parte do *background* de todo *set topologist* por sua elegância e clareza. Durante o minicurso sobre *large cardinals e topologia*, em fevereiro de 1990, o Prof. Tall ressaltou a importância do conhecimento de [D-88], preprint de 1988, de Alan Dow, que é uma introdução à nova técnica. O seu estudo tem sido um dos objetivos do seminário do nosso grupo de *set theoretic topology*.

Os resultados do parágrafo 3 são de [A-80].

CAPÍTULO IV

O EXEMPLO DE SHELAH

0. Introdução

Em 1969, num célebre artigo, Arhangel'skii mostrou que se X é T_2 , então

$$|X| \leq 2^{L(X)\chi(X)},$$

resolvendo uma questão proposta por Alexandroff, meio século antes.

Esta desigualdade pode ser melhorada para

$$|X| \leq 2^{L(X)\psi(X)t(X)}.$$

Arhangel'skii perguntou se o *tightness* era necessário na desigualdade acima, isto é, se X é T_2 , então $|X| \leq 2^{L(X)\psi(X)}$?

No capítulo II, demonstramos que a desigualdade acima é verdadeira para espaços *chain net* T_c .

O exemplo que apresentaremos a seguir, devido à Shelah, responde negativamente à questão proposta por Arhangel'skii. Sua construção usa *forcing*.

1. O Exemplo

Definição 1. Uma função $f : X^2 \rightarrow 2$ é chamada um **grafo dirigido** sobre X . O grafo f é chamado **flexível** se para cada

$$x, y \in X, x \neq y \text{ e } i, j \in 2,$$

existe $z \in X \setminus \{x, y\}$ com $f(z, x) = i$ e $f(z, y) = j$.

Para cada $x \in X$ e $i \in 2$ colocamos

$$A_{f,x}^i = \{y \in X : y \neq x \text{ e } f(x,y) = i\}$$

e para cada $s \in H(X) = F_n(X, 2, \omega)$,

$$U_{f,s} = \cap \{A_{f,x}^{s(x)} \cup \{x\} : x \in D(s)\}.$$

Finalmente, colocamos

$$\mathcal{U}_f = \{U_{f,s} : s \in H(X)\}.$$

Quando a f estiver clara, para simplificar a notação, usaremos A_x^i e U_s .

Cada grafo dirigido sobre X determina duas topologias ‘naturais’ sobre X :

Definição 2. Sejam f , um grafo dirigido sobre X , e $i \in 2$. Denotaremos por τ_f^i a topologia determinada pela subbase

$$B_f^i = \{A_{f,x}^i \cup \{x\} : x \in X\} \cup \{A_{f,x}^{1-i} : x \in X\}.$$

Claramente, τ_f^i é 0-dimensional, pois cada elemento da subbase B_f^i é *clopen*.

Se f é flexível, é fácil ver que τ_f^i é Hausdorff. De fato,

se $x, y \in X$ e $x \neq y$, pela flexibilidade de f ,

$\exists z \in X \setminus \{x, y\}$ tal que $f(z, y) = i$ e $f(z, x) = 1 - i$.

Portanto $A_z^i \cup \{z\}$ e A_z^{1-i}

são abertos disjuntos de τ_f^i tal que

$$x \in A_z^{1-i} \text{ e } y \in A_z^i \cup \{z\}.$$

Note que os valores atribuídos a $\Delta_x = \{< x, x > : x \in X\}$ são irrelevantes.

Lema 1. Se $f : X^2 \rightarrow 2$ é flexível e τ_f^i é Lindelöf, então τ_f^{1-i} tem pseudocaráter enumerável.

Demonstração:

Vamos supor $i = 0$. A demonstração para $i = 1$ é análoga.

Pela flexibilidade, dados $x \in X$ e $y \in X \setminus \{x\}$ existe $z \in X \setminus \{x, y\}$ tal que

$$f(z, y) = 0 \quad \text{e} \quad f(z, x) = 1.$$

Logo, pondo

$$Z = \{z \in X \setminus \{x\} : x \in A_z^0\},$$

a família

$$\{A_z^0 \cup \{z\} : z \in Z\} \cup \{A_x^0 \cup \{x\}\} \subset \tau_f^0$$

cobre X . Como τ_f^0 é Lindelöf, existe

$Z' \subset Z$ enumerável tal que

$$\cup \{A_z^0 \cup \{z\} : z \in Z'\} \cup (A_x^0 \cup \{x\}) = X.$$

Conseqüentemente, nós temos

$$X \setminus \{x\} = \cup \{A_z^0 \cup \{z\} : z \in Z'\} \cup A_x^0,$$

portanto

$X \setminus \{x\}$ é uma reunião enumerável de τ_f^1 fechados, ou seja

$$\{x\} \text{ é } G_\delta \text{ em } \tau_f^1.$$

Lema 2. Se $f : x^2 \rightarrow 2$ é flexível e a família $\mathcal{U}_f$ é Lindelöf, então ambas, τ_f^0 e τ_f^1 são Lindelöf e têm pseudocaráter enumerável.

Demonstração:

Pelo lema 1, é suficiente mostrar que as τ_f^i são Lindelöf. Para isto, é suficiente que cada cobertura de X por conjuntos que são intersecção finita de elementos de B_f^i tenha subcobertura enumerável.

Seja $\mathcal{V}$ uma cobertura de X da forma acima. Podemos supor que cada $V \in \mathcal{V}$ é não vazio.

Para cada $V \in \mathcal{V}$, temos

$$V = W_{x_1}^{i_1} \cap \dots \cap W_{x_n}^{i_n}, \quad \text{onde}$$

$$W_{x_j}^{i_j} = \begin{cases} A_{x_j}^{i_j} \cup \{x_j\} & \text{se } i_j = i \\ A_{x_j}^{i_j} & \text{se } i_j = 1 - i. \end{cases}$$

Podemos supor

$$W_{x_j}^{i_j} \neq W_{x_k}^{i_k}, \quad \text{se } k \neq j.$$

Como

$$W_x^i \cap W_x^{1-i} = \emptyset \quad \text{e} \quad V \neq \emptyset, \quad \text{temos}$$

$$j \neq k \rightarrow x_j \neq x_k.$$

Seja

$$\begin{aligned} S_V : \{x_1, \dots, x_n\} &\longrightarrow 2 \\ x_j &\mapsto i_j \end{aligned}$$

$$S_V \in H(X).$$

Claramente,

$$(1) V \subset U_{S_V} \quad \text{e} \quad (2) U_{S_V} \setminus V \text{ é finito.}$$

Por (1),

$\{U_{S_V} : V \in \mathcal{V}\}$ cobre X . Como

$\mathcal{U}_f$ é Lindelöf e $U_{S_V} \in \mathcal{U}_f$, $\forall V \in \mathcal{V}$, existe

$\{V_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{V}$ tal que

$\{U_{S_{V_n}} : n \in \omega\}$ cobre X . Logo, por (2), $\{V_n : n \in \omega\}$ cobre X a menos de um conjunto enumerável,

portanto $\mathcal{V}$ tem subcobertura enumerável,

logo τ_f^i são Lindelöf.

Teorema 1. $CON(ZF) \rightarrow CON(ZFC + CH + \exists F : (\omega_2)^2 \rightarrow 2 \text{ flexível para a qual } \mathcal{U}_F \text{ é Lindelöf})$.

Demonstração:

Se ZF é consistente, pelos resultados de Gödel, $ZFC + CH$ também é consistente. Assumimos que $V \models ZFC + CH$ e construiremos o grafo F em uma extensão genérica de V .

Uma condição em nossa noção de *forcing* determinará um fragmento enumerável de F . De modo mais claro, uma condição p contém um conjunto $A^p \subset \omega_2$ enumerável e uma função $f^p : (A^p)^2 \rightarrow 2$. Veremos que se $s \in H(A^p)$, então f^p contém informação suficiente para determinar $U_s \cap A^p$. Em outras palavras, se para $s \in H(A^p)$ definimos

$$U_s^p = \{x \in A^p : \forall z \in D(S)(z \neq x) \rightarrow f^p(z, x) = s(z)\}$$

então para cada grafo $f \supset f^p$, $f : (\omega_2)^2 \rightarrow 2$, nós teremos

$$U_{s,f} \cap A^p = U_s^p.$$

Usando desta notação podemos definir nossa noção de *forcing* P mais precisamente.

Definição 3. Uma condição $p \in P$ será uma terna $p = \langle A, f, T \rangle$ tal que

- (i) $A \subset \omega_2$ e $|A| \leq \aleph_0$;
- (ii) $f : A^2 \rightarrow 2$;
- (iii) $|T| \leq \aleph_0$ e $\forall B \in T (B \subset H(A) \text{ e } \cup \{U_s^p : s \in B\} = A)$;

$$(iv) (\forall B \in T)(\forall \delta \in A)(\forall y \in A \setminus \delta)(\forall h \in H(A \setminus \delta)) \\ (\exists s \in B)(y \in U_{s|_6}^p \text{ e } s \cup h \in H(A)).$$

A condição tecnicamente complicada (iv) ficará clara depois.

A seguir, definiremos uma relação 3-ária E^p sobre A por

$$E^p(\delta, y, z) \leftrightarrow [\delta \leq y, z \text{ e } (\forall x \in A \cap \delta)(f(x, y) = f(x, z))].$$

A condição $p' = \langle A', f', T' \rangle \in P$ estende p , i.é.,

$$p' \leq p \text{ se}$$

$$A \subset A', f \subset f', T \subset T' \text{ e } E^p \subset E^{p'}.$$

Lema 3. $\langle P, \leq \rangle$ é $\aleph_1$ -fechado. Mais precisamente, se

$$p_n = \langle A_n, f_n, T_n \rangle \in P \text{ e}$$

$$p_{n+1} \leq p_n, \forall n \in \omega, \text{ então}$$

$$p = \langle A, f, T \rangle \in P \text{ e}$$

$$p \leq p_n, \forall n \in \omega,$$

onde

$$A = \bigcup_n A_n, f = \bigcup_n f_n \text{ e } T = \bigcup_n T_n.$$

Demonstração: $p \in P$.

i) e ii) são óbvios.

iii) $B \in T \rightarrow \exists n \in \omega$ tal que $B \in T_n$, portanto

$$B \in T_m, \forall m \geq n. \text{ Além disso,}$$

$$B \subset H(A_n) \rightarrow B \subset H(A) \text{ e}$$

$$\bigcup \{U_s^{p_m} : s \in B\} = A_m \quad \forall m \geq n, \text{ logo}$$

$$\bigcup \{U_s^p : s \in B\} = \bigcup_{m \geq n} A_m = A, \text{ pois}$$

$$U_s^p \cap A_m = U_s^{p_m} \text{ e } \bigcup_{m \geq n} U_s^{p_m} = U_s^p.$$

iv) Se $B \in T$, $\delta \in A$, $y \in A \setminus \delta$, $h \in H(A \setminus \delta)$, então
 $\exists m$: $B \in T_m$, $\delta \in A_m$, $y \in A_m \setminus \delta$ e $h \in H(A_m \setminus \delta)$, portanto
 $\exists s \in B$ ($y \in U_{s|\delta}^{p_m}$ e $s \cup h \in H(A_m)$, mas
 $U_{s|\delta}^{p_m} \subset U_{s|\delta}^{p_m}$ e $H(A_m) \subset H(A)$, logo
 p satisfaz iv).

$p \leq p_n$, $\forall n \in \omega$.

Nós temos que verificar somente $E^{p_n} \subset E^p$, $\forall n \in \omega$.

Fixemos $n \in \omega$. Como $p_n \leq p_m$, se $m \geq n$, temos

$$(*) \quad E^{p_n}(\delta, y, z) \rightarrow E^{p_m}(\delta, y, z), \quad \forall m \geq n.$$

Sejam δ, y, z tal que $E^{p_n}(\delta, y, z)$ e $x \in A \cap \delta$. Então existe $m \geq n$ tal que
 $x \in A_m \cap \delta$, logo, por (*)

$$f_m(x, y) = f_m(x, z), \text{ ou seja}$$

$$f(x, y) = f(x, z), \text{ pois } f_m \subset f.$$

Portanto $\forall x \in A \cap \delta$, temos $f(x, y) = f(x, z)$.

Ou seja, $E^p(\delta, y, z)$, logo

$$E^{p_n} \subset E^p.$$

Lema 4. $\langle P, \leq \rangle$ satisfaz $\aleph_2$ -C.C.

Demonstração: Seja $\{ \langle A_\alpha, f_\alpha, T_\alpha \rangle : \alpha < \omega_2 \} \subset P$.

Se $|\{A_\alpha : \alpha < \omega_2\}| < \aleph_2$, como ω_2 é regular, existe A tal que $|\{\alpha < \omega_2 : A = A_\alpha\}| = \aleph_2$.

Se $|\{A_\alpha : \alpha < \omega_2\}| = \aleph_2$, tomando-se $\theta = \aleph_2$ e $\kappa = \aleph_1$, como CH vale as condições para aplicar o Δ -system lemma estão satisfeitas.

Portanto, em ambos os casos, existe $B \subset \omega_2$ $|B| = \aleph_2$ tal que

$\{A_\alpha : \alpha \in B\}$ tem uma raiz Δ , logo, podemos assumir que

$$A_\alpha \cap A_\beta = \Delta, \quad \forall \alpha, \beta \in \omega_2, \quad \alpha \neq \beta.$$

$$|\Delta| \leq \aleph_0, \text{ portanto}$$

$$|\{f_\alpha|_{\Delta^2} : \Delta^2 \rightarrow 2 : \alpha < \omega_2\}| \leq 2^{\aleph_0} = \aleph_1, \text{ logo}$$

pela regularidade de ω_2 , podemos assumir também que

$$f_\alpha|_{\Delta^2} = f_\beta|_{\Delta^2}, \quad \forall \alpha, \beta \in \omega_2.$$

$$\text{Como } \Delta \subset \omega_2, \quad cf(\aleph_2) = \aleph_2 > \aleph_0 \geq |\Delta|,$$

$$\sup \Delta = \delta < \omega_2.$$

$$\text{Seja } \mathcal{C} = \{\alpha : (A_\alpha \cap (\delta + 1)) \setminus \Delta \neq \emptyset\}. \quad \forall \alpha \in \mathcal{C}, \text{ tomemos } x_\alpha \in (A_\alpha \cap (\delta + 1)) \setminus \Delta.$$

Se $\alpha \neq \beta$, então $x_\alpha \neq x_\beta$, pois $x_\alpha = x_\beta \rightarrow x_\alpha \in A_\alpha \cap A_\beta = \Delta$, absurdo. Logo,

$$|\{\alpha : (A_\alpha \cap (\delta + 1)) \setminus \Delta \neq \emptyset\}| \leq |\delta + 1| < \aleph_2, \text{ portanto}$$

podemos assumir que $\forall \alpha < \omega_2$,

$$A_\alpha \cap (\delta + 1) \setminus \Delta = \emptyset, \text{ ou seja,}$$

$$\forall \xi \in A_\alpha \setminus \Delta \text{ e } \forall \eta \in \Delta \rightarrow \eta < \xi, \text{ que denotaremos por } \Delta < A_\alpha \setminus \Delta.$$

$$\text{Como } |A_\alpha \setminus \Delta| \leq \aleph_0 \quad \forall \alpha < \omega_2,$$

$$|\{t_p(A_\alpha \setminus \Delta) : \alpha < \omega_2\}| \leq \aleph_1, \text{ portanto, pela regularidade de } \omega_2, \text{ podemos assumir}$$

também que existe $\theta < \omega_1$ tal que

$$\theta = t_p(A_\alpha \setminus \Delta), \quad \forall \alpha, \beta < \omega_2.$$

$$(\forall \alpha < \omega_2)(\forall \xi < \theta) \text{ denotaremos } z_\alpha(\xi) \text{ o } \xi\text{-ésimo elemento de } A_\alpha \setminus \Delta, \text{ i.é.,}$$

$$t_p((A_\alpha \setminus \Delta) \cap z_\alpha(\xi)) = \xi.$$

Seja

$$\begin{aligned} g_\alpha : \Delta \times \theta &\longrightarrow 2 \\ (x, \xi) &\longmapsto f(x, z_\alpha(\xi)) \end{aligned}$$

$$|\Delta \times \theta| \leq \aleph_0, \text{ portanto}$$

$$|\{g_\alpha : \alpha < \omega_2\}| \leq 2^{\aleph_0} = \aleph_1, \text{ logo}$$

podemos assumir que $\forall \alpha, \beta \in \omega_2$

$$g_\alpha = g_\beta, \text{ ou seja}$$

$$f_\alpha(x, z_\alpha(\xi)) = f_\beta(x, z_\beta(\xi)).$$

Fixemos $\gamma < \omega_2$. A partir de um argumento análogo ao usado para mostrar que podemos assumir $\Delta < A_\alpha \setminus \Delta$, $\forall \alpha < \omega_2$, temos

$$A_\gamma \setminus \Delta < A_\beta \setminus \Delta \text{ para algum } \beta < \omega_2.$$

Logo, para mostrar que $\langle P, \leq \rangle$ é $\aleph_2$ -C.C., será suficiente mostrar que duas condições $p = \langle A, f, T \rangle$ e $p' = \langle A', f', T' \rangle$ são compatíveis, quando

$$\Delta = A \cap A' < A \setminus \Delta < A' \setminus \Delta,$$

$$f|_{\Delta^2} = f'|_{\Delta^2},$$

$$t_p(A \setminus \Delta) = t_{p'}(A' \setminus \Delta) \text{ e}$$

satisfazendo $f(x, z) = f'(x, z')$ para todo $x \in \Delta$, sempre que $z \in A \setminus \Delta$ e $z' \in A' \setminus \Delta$ são tais que $t_p(A \cap z) = t_{p'}(A' \cap z')$ (neste caso, diremos que z e z' são membros correspondentes de $A \setminus \Delta$ e $A' \setminus \Delta$).

Denotaremos por γ o primeiro elemento de $A \setminus \Delta$ e γ' o correspondente a γ em $A' \setminus \Delta$.

Para este fim, construiremos

$$g : (A \cup A')^2 \rightarrow 2 \text{ tal que}$$

$$g \supset f \cup f', \quad q = \langle A \cup A', g, T \cup T' \rangle \in P \text{ e } q \text{ estende } p \text{ e } p'.$$

Claramente, devemos definir g apenas sobre

$$[(A \setminus \Delta) \times (A' \setminus \Delta)] \cup [(A' \setminus \Delta) \times (A \setminus \Delta)], \text{ onde os 'somandos' são obviamente disjuntos.}$$

Vamos primeiro mostrar como definir g sobre $(A \setminus \Delta) \times (A' \setminus \Delta)$. A definição é feita por indução em $\omega + 1$ passos. Para começar, fixemos uma enumeração de tipo ω de todas as quádruplas $\langle B, \delta, z', h \rangle$ com

$$B \in T, \delta \in A \setminus \Delta, z' \in A' \setminus \Delta, h \in H(A \setminus \delta).$$

Assumimos $i < \omega$ e supondo definidos todos os estágios anteriores a i de modo que para cada $y' \in A' \setminus \Delta$ foi definido $g(x, y')$ somente para um número finito de $x \in A \setminus \Delta$.

Seja $\langle B, \delta, z', h \rangle$ o i -ésimo termo da enumeração anterior. Para cada $x \in A \setminus \Delta$ com $g(x, z')$ já definido, pomos

$$k(x) = g(x, z').$$

Pela hipótese de indução, $k \in H(A \setminus \Delta)$.

Seja z o membro de $A \setminus \Delta$ correspondente a z' . Então a condição (iv) aplicada a p em

$$B, \gamma, z \text{ e } (k|_\delta) \cup h \in H(A \setminus \gamma) \text{ (ou a } k \in H(A \setminus \gamma) \text{ se } h = \emptyset)$$

(notemos que $A \setminus \gamma = A \setminus \Delta$), nos dá um $t \in B$ com

$$z \in U_{t|_\gamma}^p \text{ e } t \cup (k|_\delta) \cup h \in H(A) \text{ (ou } t \cup k \in H(A) \text{ se } h = \emptyset).$$

Agora, no passo i , daremos o valor

$$g(x, y') = t(x)$$

sempre que

$$x \in D(t) \setminus (D(k) \cup D(h) \cup \Delta) \text{ e}$$

$$y' \in A' \setminus \Delta \text{ é tal que } E^{p'}(\gamma', z', y').$$

Tendo completado todos os passos $i < \omega$, no passo ω nós colocamos

$$g(x, y') = 0$$

para todo par

$$\langle x, y \rangle \in (A \setminus \Delta) \times (A' \setminus \Delta)$$

para o qual

$$g(x, y')$$

não foi previamente definido.

A definição de g sobre $(A' \setminus \Delta) \times (A \setminus \Delta)$ é similar, mas mais simples, pois não precisaremos verificar E^q , pois $A \setminus \Delta < A' \setminus \Delta$, logo, no i -ésimo passo, daremos o valor

$$g(x', z) = t(x'), \quad x' \in D(t) \setminus (D(k) \cup D(h) \cup \Delta).$$

É preciso mostrar que

$$q \in P \text{ e } q \leq p, p'. \text{ Agora,}$$

(i) e (ii) são óbvios para q . Para mostrar (iii) tomemos por exemplo $B \in T$, $z' \in A' \setminus \Delta$ e a 4-upla $\langle B, \gamma, z', \phi \rangle$ que, digamos, é o i -ésimo termo da enumeração. Então no passo i da construção de g sobre $(A \setminus \Delta) \times (A' \setminus \Delta)$ nós temos certeza que $z' \in U_t^q$ para $t \in B$ usado no passo i . De fato,

o t escolhido era tal que

$$z \in U_{t|_\gamma}^p, \text{ ou seja,}$$

$$f(x, z) = g(x, z) = t(x), \forall x \in D(t|_\gamma), x \neq z.$$

Como z e z' são correspondentes,

$$f(x, z) = f'(x, z'), \quad \forall x \in \Delta. \text{ Mas}$$

$$D(t|_\gamma) \subset \Delta, \text{ logo}$$

$$f'(x, z') = g(x, z) = t(x), \quad \forall x \in D(t|_\gamma), x \neq z.$$

Lembramos que

$$k(x) = g(x, z')$$

vale para cada $x \in A \setminus \Delta$ tal que $g(x, z')$ foi definido antes do i -ésimo passo. Como t e k são compatíveis, pela definição no passo i , temos

$$g(x, z') = t(x), \quad \forall x \in D(t) \setminus \gamma, x \neq z'.$$

$$\text{portanto } g(x, z') = t(x), \quad \forall x \in D(t), x \neq z',$$

$$\text{logo } z' \in U_t^q.$$

A prova de (iii) nos casos restantes é similar ou trivial.

Para ver (iv), consideremos

$$B \in T \cup T', \delta \in A \cup A', h \in H(A \cup A' \setminus \delta)$$

e por exemplo

$$z' \in A' \setminus \Delta \text{ com } \delta \leq z'.$$

Se $B \in T'$, então podemos escolher $t \in B$ com

$$z' \in U_{t|_\delta}^{p'} \text{ e } t \cup (h|_{A'}) \in H(A').$$

(Note que $t|_\delta = t|_{\gamma'}$, se $\delta \in A \setminus \Delta$.)

Como

$$h = h|_{A'} \cup h|_{A \setminus \Delta} \text{ e } D(t) \cap A \setminus \Delta = \emptyset,$$

$t \cup h \in H(A \cup A')$ e terminamos.

Se $B \in T \setminus T'$, temos que verificar três casos. Primeiro,

se $\delta \in \Delta$, nós escolhemos $t \in B$ tal que

$$z \in U_{t|_\delta}^p \text{ e } t \cup h|_A \in H(A)$$

com $z \in A \setminus \Delta$ correspondente a z' . Claramente então

$$z' \in U_{t|_\delta}^q \text{ (temos } f(x, z) = f(x, z'), \quad \forall x \in \Delta)$$

e

$$t \cup h \in H(A \cup A') (h = h|_A \cup h|_{A' \setminus \Delta} \text{ e } D(t) \cap (A' \setminus \Delta) = \emptyset).$$

Segundo, (suponhamos $h|_A \neq \emptyset$, se $h|_A = \emptyset$ é parecido)

se $\delta \in A \setminus \Delta$, nós consideramos

$$\langle B, \delta, z', h|_A \rangle$$

que ocorre, digamos como o i -ésimo termo da enumeração fixada. Então o t utilizado no i -ésimo passo da definição de g sobre $(A \setminus \Delta) \times (A' \setminus \Delta)$ nos assegura que

$$z' \in U_{t|_\delta}^q \text{ e } t \cup h \in H(A \cup A').$$

De fato, vimos que

$$g(x, z') = t(x), \quad \forall x \in D(t) \cap \gamma, \quad x \neq z'.$$

Além disso,

$$(1) \quad t \cup k|_\delta \cup h|_A \in H(A), \text{ em particular,}$$

$$t \cup h|_A \in H(A), \text{ mas}$$

$$A \cap A' \setminus \Delta = \emptyset \text{ e } A \cup (A' \setminus \Delta) = A \cup A', \text{ logo}$$

$$t \cup h = t \cup h|_A \cup h|_{A' \setminus \Delta} \in H(A \cup A').$$

Agora, pela definição no i -ésimo passo,

$$g(x, z') = t(x), \quad \forall D(t) \setminus (D(k) \cup D(h|_A) \cup \Delta).$$

Como $k|_\delta$ e t são compatíveis e por (1), temos

$$g(x, z') = t(x),$$

$$\forall x \in D(t|_\delta) \setminus D(h|_A) = D(t|_\delta), \quad x \neq z',$$

ou seja,

$$z' \in U_{t|_\delta}^q.$$

Finalmente,

se $\delta \in A' \setminus \Delta$, então $t|_\delta = t$, para cada $t \in B$, pois $D(t) \subset A$ e $A < A' \setminus \Delta$.

Como já verificamos iii) para q , temos

$$z' \in U_t^q = U_{t|_\delta}^q, \quad \text{para algum } t \in B.$$

Como $D(h) \setminus \delta = \emptyset$, temos

$$t \cup h \in H(A \cup A').$$

Suponhamos $z \in A$ com $\delta \leq z$.

Se $z \in \Delta = A \cap A'$, então $\delta \in \Delta$. Temos dois casos a considerar:

$$1) B \in T \rightarrow (\exists t \in B)(z \in U_{t|_\delta}^p \subset U_{t|_\delta}^q \text{ e } t \cup h|_A \in H(A)).$$

$$\text{Portanto, } (t \cup h|_A) \cup (h|_{A' \setminus \Delta}) = t \cup h \in H(A \cup A').$$

$$2) B \in T' \rightarrow (\exists t \in B')(z \in U_{t|_\delta}^{p'} \subset U_{t|_\delta}^q \text{ e } t \cup h|_{A'} \in H(A')).$$

$$\text{Logo, } (t \cup h|_{A'}) \cup (h|_{A' \setminus \Delta}) = t \cup h \in H(A \cup A').$$

Para verificar que (iv) está satisfeita quando $z \in A \setminus \Delta$, é análogo ao que já foi feito.

Portanto, q verifica (iv).

É claro que para $q \leq p$ e $q \leq p'$ basta verificar que $E^q \supset E^p$ e $E^q \supset E^{p'}$.

$E^q \supset E^p$ está trivialmente verificada, pois $A < A' \setminus \Delta$. Para verificar que $E^q \supset E^{p'}$, basta notar que pela nossa construção,

$$E^q(\gamma', y', z')$$

foi feita para valer, sempre que

$$E^{p'}(\gamma', y', z')$$

valesse.

Lema 5. Suponhamos $p = \langle A, f, T \rangle \in P$. Então

(a) para cada $z \in \omega_2 \setminus A$ existe uma extensão

$$g : (A \cup \{z\})^2 \longrightarrow 2$$

de f tal que $q = \langle A \cup \{z\}, g, T \rangle \in P$ e $q \leq p$;

(b) se $z \in \omega_2 \setminus \cup(\cup A + 1)$, $\delta, y \in A$ com

$$\delta \leq y \quad \text{e} \quad h \in H(A \setminus \delta),$$

existe uma extensão

$$g : (A \cup \{z\})^2 \longrightarrow 2$$

de f tal que

$$q = \langle A \cup \{z\}, g, T \rangle \in P,$$

$$q \leq p,$$

$$g(x, z) = h(x), \text{ para cada } x \in D(h) \text{ e}$$

$$E^q(\delta, y, z) \text{ vale.}$$

Demonstração:

(a) Primeiro, definimos

$$g(z, y) = 0, \text{ para cada } y \in A$$

que nos garantirá $E^p \subset E^q$ (poderíamos ter tomado $g(z, y) = 1$ para cada $y \in A$), logo

$$q \leq p,$$

se mostrarmos que $q \in P$. Os valores $g(y, z)$ serão definidos por indução em $\omega + 1$ passos. Para começar, fixaremos uma enumeração de tipo ω de todas as ternas

$$\langle B, \delta, h \rangle$$

satisfazendo

$$B \in T, \delta \in (A \cap z) \cup \{z\} \text{ e } h \in H(A \setminus \delta).$$

Para cada $i < \omega$, $g(y, z)$ será definido somente para um número finito de $y \in A$.

Suponhamos que estamos para fazer o passo $i < \omega$. Colocamos

$$k(y) = g(y, z)$$

para cada $y \in A$ com $g(y, z)$ já definidos e seja $\langle B, \delta, h \rangle$ o i -ésimo termo da enumeração fixada. Como p satisfaz (iv), existe $t \in B$ com

$$t \cup k|_\delta \cup h \in H(A) \text{ (ou } t \cup k \in H(A) \text{ se } h = \emptyset)$$

(use $B, \xi, \xi, k|_\gamma \cup h$ se $h \neq \emptyset$ e B, ξ, ξ, k se $h = \emptyset$).

Definiremos no passo i ,

$$g(y, z) = t(y) \text{ para } y \in D(t) \setminus (D(k) \cup D(h)).$$

Isto garantirá que

$$z \in U_{t|_\delta}^q \text{ (ou } z \in U_t^q \text{ se } h = \emptyset)$$

e

$$t \cup h \in H(A \cup \{z\}).$$

Finalmente,

no passo ω , colocamos

$$g(y, z) = 0$$

para cada y que não apareceu antes.

Precisamos mostrar que iii) e iv) estão satisfeitas pela q . iii) segue diretamente do nosso comentário acima, pois a terna $\langle B, z, \phi \rangle$ foi considerada em algum passo i).

Para ver iv), seja

$$B \in T, \delta \in A \cup \{z\}, y \in A \cup \{z\} \text{ com } \delta \leq y \text{ e } h \in H(A \cup \{z\} \setminus \delta).$$

Se $y \neq z$ e $\delta \neq z$ aplicando iv) em $B, \delta, y, h|_A$ teremos $t \in B$ tal que

$$y \in U_{t|_\delta}^p \subset U_{t|_\delta}^q \text{ e } t \cup h|_A \in H(A),$$

portanto $t \cup h \in H(A \cup \{z\})$, pois $z \notin D(t)$.

Se $y \neq z$ e $\delta = z$, tomemos o sucessor de z em A , δ' . Aplicando iv) em

$$B, \delta', y, h|_A \text{ (note que } \delta' \leq y, \text{ pois } z \leq y \text{ e } z \notin A)$$

temos $t \in B$ tal que

$$y \in U_{s|_{\delta'}}^p = U_{s|_z}^p \subset U_{s|_z}^q$$

e

$$S \cup h \in H(A \cup \{z\}).$$

Se $y = z$, nós temos

$$z \in U_{t|_\delta}^q \text{ e } t \cup h \in H(A \cup \{z\})$$

válido para o t escolhido no passo em que a terna $\langle B, \delta, h|_A \rangle$ foi considerada.

(b) Agora, $g(z, x)$ para $x \in A$ pode ser escolhido arbitrariamente, pois

$$z > x \quad \forall x \in A.$$

Além disso, devemos colocar

$$g(x, z) = h(x) \quad \text{para } x \in D(h)$$

e

$$g(x, z) = f(x, y)$$

para cada $x \in A \cap \delta$ para assegurar que $E^q(\delta, y, z)$. Os valores $g(x, z)$ para $x \in A \setminus (\delta \cup D(h))$ são definidos por uma indução em $\omega + 1$ passos.

Fixemos uma enumeração de tipo ω das ternas

$$\langle B, \xi, \ell \rangle,$$

onde

$$B \in T, \xi \in A \setminus \delta, \ell \in H(A \setminus \xi).$$

Suponhamos que estamos no passo i e $g(x, z)$ estão definidas somente para um número finito de $x \in A \setminus \delta$.

Pondo

$$k(x) = g(x, z)$$

para cada $x \in A \setminus \delta$ tal que $g(x, z)$ já esteja definido, então $k \in H(A \setminus \delta)$.

Tomemos

$\langle B, \xi, \ell \rangle$ o i -ésimo termo da enumeração fixada.

Aplicando iv) para

$$B, \delta, y, k|_{\xi} \cup \ell \text{ se } \ell = \emptyset \text{ (ou } B, \delta, y, k \text{ se } \ell = \emptyset)$$

tomo $t \in B$ tal que

$$y \in U_{t|_{\delta}}^p \text{ e } t \cup (k|_{\xi}) \cup \ell \in H(A)$$

$$\text{(ou tal que } y \in U_{t|_{\delta}}^p \text{ e } t \cup k \in H(A) \text{ se } \ell = \emptyset).$$

Definimos

$$g(x, z) = t(x), \quad \forall x \in D(t) \setminus (D(k) \cup D(\ell) \cup \delta).$$

Após completado os ω primeiros passos, no passo $\omega + 1$ coloquemos

$$g(x, z) = 0$$

para cada x tal que $g(x, z)$ não foi previamente definido.

Vamos mostrar primeiro que $q \in P$. Para isto, basta mostrar que iii) e iv) estão satisfeitas. Para iii), a demonstração é análoga ao que já fizemos.

Para verificar iv) seja

$$B \in T, \xi \in A \cup \{z\}, \mu \in A \cup \{z\}, h \in H((A \cup \{z\}) \setminus \xi).$$

Se $\mu \in A$, $\xi \in A$ e aplicando iv) em $B, \xi, \mu, h|_A$, temos

$$t \in B \text{ tal que}$$

$$\mu \in U_{t|\xi}^p \subset U_{t|\xi}^q \text{ e } t \cup h|_A \in H(A), \text{ portanto}$$

$$t \cup h \in H(A).$$

Se $\mu \notin A$, então $\mu = z$ e temos dois casos a considerar:

1) $\xi = z$.

Neste caso, $D(h) \subset \{z\}$ e basta tomarmos $t \in B$ tal que $z \in U_t^q$, que existe pelo item iii) já demonstrado.

2) $\xi \in A$.

Neste caso, $\langle B, \xi, h|_A \rangle$ foi considerado, digamos no i -ésimo termo da enumeração e tomando o t escolhido no passo i , temos

$$z \in U_{t|\xi}^q \text{ e } t \cup h|_A \in H(A) \text{ (portanto } t \cup h \in H(A)).$$

Logo, $q \in P$.

Como $A < \{z\}$, $E^q \supset E^p$ trivialmente,

portanto, $q \leq p$.

Vimos que P é $\aleph_2$ -c.c. e $\aleph_1$ -fechado, logo,

se G é $\langle P, \leq \rangle$ -genérico sobre V , então em $V[G]$ os cardinais são preservados e nenhum subconjunto enumerável novo de V é acrescentado, em particular, como V satisfaz CH , temos que $V[G]$ também satisfaz CH .

Além disso, pelo item a) do lema anterior

$$\forall \alpha < \omega_2, \quad D_\alpha = \{p = \langle A, f, T \rangle \in P : \alpha \in A\}$$

é denso em P e portanto, como G é filtro, se

$$F_G = \cup \{f : (\exists A, T)(\langle A, f, T \rangle \in G)\},$$

então

$$F_G : (\omega_2)^2 \rightarrow 2.$$

Pelo item b) do lema 5, F_G é flexível. De fato,

seja $x \neq y$, $x, y \in \omega_2$ e $i, j \in 2$. Vamos mostrar que $\exists z \in \omega_2 \setminus \{x, y\}$ tal que

$$F_G(z, x) = i \quad \text{e} \quad F_G(z, y) = j.$$

Sejam $p = \langle A, f, T \rangle \in G$ e

$$q = \langle A', f', T' \rangle, \quad q \leq p.$$

Pelo item a) do lema anterior, podemos supor $x, y \in A'$. Por b), existe $z \notin (\cup A') + 1$ tal que

$$g : (A' \cup \{z\})^2 \rightarrow 2,$$

onde

$$g(z, x) = i,$$

$$g(z, y) = j,$$

(lembramos que pela demonstração de b), se $A' < \{z\}$, então podemos atribuir qualquer valor para $g(z, x)$ e $g(z, y)$).

$$q' = \langle A' \cup \{z\}, g, T' \rangle \in P$$

e

$$q' \leq q.$$

Portanto,

$$A_{ij} = \{q \leq p : q = \langle A, f, T \rangle, \exists z \in A \setminus \{x, y\} : f(z, x) = i, f(z, y) = j\}$$

é denso abaixo de p , logo

$$G \cap A_{ij} \neq \emptyset.$$

Tomemos

$$q'' = \langle A'', f'', T'' \rangle \in G \cap A_{ij},$$

temos que

$$\exists z \in A'' \setminus \{x, y\} \text{ tal que}$$

$$f''(z, x) = i$$

e

$$f''(z, y) = j, \text{ portanto}$$

$$F_G(z, x) = i$$

e

$$F_G(z, y) = j,$$

portanto F_G é flexível.

Lema 6. Se $p = \langle A, f, T \rangle \in P$, então

$$p \Vdash \check{\omega}_2 = \cup \{U_t : t \in \check{B}\} \text{ para cada } B \in T.$$

Demonstração:

Lembramos que

$$p \Vdash \check{\omega}_2 = \cup \{U_t : t \in \check{B}\}$$

sse

$\forall G$ P -genérico, se $p \in G$, então

$$\omega_2 = \cup \{U_{t, F_G} : t \in \check{B}\}.$$

Logo é imediato pela condição (iii) para p que

$$p \Vdash \check{A} \subset \cup \{U_t : t \in \check{B}\},$$

pois

$\forall G, \quad P$ -genérico, se $p \in G$, então

$$A = \cup \{U_t^p : t \in B\} \subset \cup \{U_{t, F_G} : t \in \check{B}\}$$

(recordamos que $f \subset F_G$).

Para cada $p' \leq p$ e $z \in \omega_2$, pelo lema 5.a. existe

$$p'' = \langle A'', f'', T'' \rangle \leq p'$$

com

$z \in A''$, logo

$$(*) \quad p'' \Vdash \check{z} \in \cup \{U_t : t \in \check{B}\}.$$

o que nos motra que

$$p \Vdash \check{\omega}_2 = \cup \{U_t : t \in \check{B}\}.$$

De fato, se

$$p \nVdash \check{\omega}_2 = \cup \{U_t : t \in \check{B}\}$$

então

$(\exists q \leq p)(q \Vdash (\exists z \in \check{\omega}_2)(z \notin \cup \{U_t : t \in \check{B}\}))$, portanto

$\exists q' \leq q \quad \text{e} \quad z \in \omega_2$

tal que

$q' \Vdash \check{z} \notin \cup \{U_t : t \in \check{B}\}$, contradição (*).

Agora temos tudo o que será necessário para provarmos que

$\mathcal{U}_{F_G}$ é Lindelöf (em $V[G]$). Como em $V[G]$ vale o axioma da escolha, basta mostrarmos que toda cobertura $\mathcal{V}$ de ω_2 , por elementos de $\mathcal{U}_{F_G}$, de cardinalidade $\leq \aleph_2$ tem subcobertura enumerável.

Seja

$$g : \omega_2 \rightarrow H(\omega_2)$$

uma função em $V[G]$ tal que

$$x \in U_{g(x)}$$

para cada $x \in \omega_2$. Então existe

$$p = \langle A, f, T \rangle \in G$$

e um P -nome σ para g tal que

$$(\otimes) \quad p \Vdash \sigma : \check{\omega}_2 \rightarrow H(\check{\omega}_2) \text{ e } (\forall y \in \check{\omega}_2)(y \in U_{\sigma(y)}).$$

Claramente, será suficiente mostrar que sempre que p satisfaz $\otimes$, esta tem uma extensão que força

$$“\check{\omega}_2 = \cup \{U_{\sigma(y)} : y \in \check{A}^*\}”$$

para algum $A^* \in [\omega_2]^{\aleph_0}$.

Notamos que se $q \in P$ satisfaz $\otimes$ (por exemplo, se $q \leq p$), então para cada

$$y \in \omega_2$$

podemos fixar

$$r = r(q, y) \leq q$$

e um

$$t \in H(\omega_2)$$

tal que

$$r \Vdash \sigma(\check{y}) = \check{t}.$$

Podemos supor que $y \in A^r$.

É fácil ver que

$$t \in A^r.$$

De fato, suponhamos que existe $\alpha \in D(t) \setminus A^r$. Então, pelo lema 5.a. podemos tomar

$$s = \langle A^s, f^s, T^s \rangle \leq r$$

tal que

$$\alpha \in A^s \text{ e } f^s(\alpha, y) = 1 - t(\alpha) \quad (1)$$

(Veja observação na demonstração do lema 5.a).

Como

$$s \leq r \text{ e } r \Vdash \check{y} \in U_i,$$

temos

$$s \Vdash \check{y} \in U_i, \text{ portanto}$$

$$f^s(\alpha, y) = t(\alpha),$$

contradição com (1), logo $D(t) \subset A^r$.

A seguir, construiremos uma ω -seqüência decrescente de condições. Colocamos

$$p_0 = p$$

e se

$$p_i = \langle A_i, f_i, T_i \rangle$$

foi bem definido, fixaremos uma enumeração

$$\{ \langle \delta_j^{(i)}, x_j^{(i)}, h_j^{(i)} \rangle : j \in \omega \}$$

do conjunto de todas as ternas

$$\langle \delta, x, h \rangle$$

tal que

$$\delta, x \in A_i, \delta \leq x \text{ e } h \in H(A_i \setminus \delta).$$

Também fixaremos uma bijeção

$$\varphi : \omega \rightarrow \omega^2$$

tal que

$$\varphi(n) = \langle i, j \rangle \quad \text{implica} \quad i \leq n,$$

para cada $n \in \omega$.

Suponhamos

$$p = p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_n$$

já definidos. Vamos escolher p_{n+1} .

Para isto, consideremos

$$\varphi(n) = \langle i, j \rangle.$$

Tomemos

$$z_n \in \omega_2 \setminus (\cup A_n + 1)$$

e aplicando o lema 5.b. tomemos uma extensão

$$q_n \leq p_n$$

tal que

$$E^{q_n}(\delta_j^{(i)}, x_j^{(i)}, z_n) \text{ vale}$$

e, além disso,

$$f^{q_n}(x, z_n) = h_j^{(i)}(x)$$

para cada $x \in D(h_j^{(i)})$.

Então, aplicando o comentário feito anteriormente, pomos

$$p_{n+1} = r(q_n, x_j^{(i)}).$$

Como

$$p_{n+1} \leq p_n$$

vale para cada $n \in \omega$, pelo lema 3, temos

$$q^* = \langle A^*, f^*, T^* \rangle \in P$$

e

$$q^* \leq p_n$$

para cada $n \in \omega$, onde

$$A^* = \cup_n A_n, f^* = \cup_n f_n, T^* = \cup_n T_n.$$

Agora colocamos

$$B^* = \{t \in H(A^*) : (\exists y \in A^*)(q^* \Vdash \sigma(\check{y}) = \check{t})\}.$$

Nós afirmamos que

$$p^* = \langle A^*, f^*, T^* \cup \{B^*\} \rangle \in P.$$

Para isto, basta mostrarmos que

iii) e iv)

estão satisfeitas por B^* . Tome

$$y \in A^*.$$

Como $A^* = \cup_n A_n$ e $(A_n) \uparrow$,

$y \in A_i$, para algum $i \in \omega$.

Logo, podemos tomar

$$\langle i, j \rangle \in \omega^2$$

tal que

$$y = x_j^{(i)}.$$

Portanto, se $\varphi(n) = \langle i, j \rangle$ então

$$p_{n+1} = r(q_n, y), \text{ donde}$$

$$p_{n+1} \Vdash \sigma(\check{y}) = \check{t}$$

para algum $t \in H(A_{n+1}) \subset H(A^*)$, logo

$$q^* \Vdash \sigma(\check{y}) = \check{t},$$

pois

$$q^* \leq p_{n+1}, \text{ portanto}$$

$$t \in B^*.$$

Além disso, $q^* \leq p_0 = p$, portanto q^* também força “ $\check{y} \in U_{\sigma(\check{y})}$ ”, logo

$$q^* \Vdash \check{y} \in U_i,$$

que claramente implica

$$y \in U_i^{q^*} = U_i^{p^*}.$$

Para verificar iv), considere

$$\delta, y \in A^*$$

com

$$\delta \leq y \quad \text{e} \quad h \in H(A^* \setminus \delta)$$

e seja

$$\langle \delta, y, h \rangle = \langle \delta_j^{(i)}, y_j^{(i)}, h_j^{(i)} \rangle$$

com $\varphi(n) = \langle i, j \rangle$. Então

$$z_n \in A_{n+1}$$

e

$$q_n \leq p_n$$

foi escolhido de modo que

$$E^{q_n}(\delta, y, z_n)$$

e

$$f_{n+1}(x, z_n) = h(x)$$

seja válida para cada $x \in D(h)$. Como (ii) já foi provada para B^* , temos

$$t \in B^*$$

com

$$z_n \in U_t^{p^*}.$$

Por $q^* \leq q_n$, temos

$$E^{q^*}(\delta, y, z_n)$$

e

$$f^*(x, z_n) = h(x)$$

para cada $x \in D(h)$.

Isto claramente implica que

$$y \in U_{t|_S}^{p^*}$$

e

$$t \cup h \in H(A^*).$$

$$(\text{De fato, } z_n \in U_t^{p^*}, \text{ isto é, } f^*(x, z_n) = t(x) \quad \forall x \in D(t) \setminus \{z_n\} \text{ e } f^*(x, z_n) = h(x)$$

$\forall x \in \text{dom } h$, portanto

$$t|_{D(t) \setminus \{z_n\}} \text{ e } h \text{ são compatíveis. Como } z_n \notin D(h), t \text{ e } h \text{ são compatíveis.})$$

Logo,

$$p^* \in P \text{ e } p^* \leq q^* \leq p \quad (*) \text{ portanto}$$

pelo lema 6,

$$p^* \Vdash \check{\omega}_2 = \cup \{U_t : t \in \check{B}^*\}.$$

Da definição de B^* e de $(*)$, temos:

$$p^* \Vdash \check{\omega}_2 = \cup \{U_{\sigma(y)} : y \in \check{A}^*\}$$

e isto completa a demonstração.

Em 1978, Arhangel'skii perguntou o que acontece, se além de $L(X) = \psi(X) = \aleph_0$, também supormos que $c(X) = \aleph_0$ e $X - T_3$; ou de forma mais geral, se $|X| \leq 2^{L(X)\psi(X)C(X)}$ pode ser provada para $X - T_3$. O próximo resultado responde negativamente a esta questão.

Teorema 2. Se F foi construído do modo acima, então

$$c(<\omega_2, \tau_F^i>) = \aleph_0 \quad \text{para } i = 0, 1.$$

Demonstração:

Como foi notado no lema 2, cada aberto básico de τ_f^i difere de algum

$$U_t \in \mathcal{U}_F$$

em um conjunto finito, conseqüentemente, é suficiente mostrar que não existe uma subfamília não enumerável $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}_F$ tal que cada dois membros de $\mathcal{V}$ tem intersecção finita. Para isto, vamos primeiro mostrar que $|U_{t,F}| = \aleph_2$ para cada $t \in H(\omega_2)$.

Na verdade, mostraremos que

$$1 \Vdash |U_i| = \aleph_2.$$

Fato. Para cada $p \in P$ e $\alpha \in \omega_2$, existe $q \leq p$ e $z \in \omega_2 \setminus \alpha$ com $q \Vdash \check{z} \in U_i$.

Demonstração: Pelo lema 5.a., podemos encontrar $r = \langle A, f, T \rangle \leq p$ tal que $D(t) \subset A$. Pelo lema 5.b., para cada $z \in \omega_2 \setminus \{(\cup A + 1) \cup \alpha\}$, podemos estender f para uma função

$$g : (A \cup \{z\})^2 \rightarrow 2$$

tal que

$$g(x, z) = t(x)$$

para cada $x \in D(t)$. Claramente

$$q \Vdash \check{z} \in U_i.$$

Suponhamos por absurdo que

$$1 \nVdash |U_i| = \aleph_2. \text{ Então existe } p \in P \text{ tal que}$$

$$p \Vdash |U_i| < \aleph_2, \text{ portanto}$$

$$(\exists q \leq p)(\exists \alpha \in \omega_2)(q \Vdash U_i \subset \check{\alpha}), \text{ mas pelo fato,}$$

$$(\exists r \leq q)(\exists z \in \omega_2 \setminus \alpha)(r \Vdash \check{z} \in U_i), \text{ contradição.}$$

Seja $\mathcal{H} \in [H(\omega_2)]^{\aleph_1}$ em $V[G]$. Como é bem conhecido (basta usar o Δ -system lemma), podemos sempre encontrar

$$t, s \in \mathcal{H} \text{ distintos tais que}$$

$$t \cup s \in H(\omega_2), \text{ e então}$$

$$U_t \cap U_s = U_{t \cup s}, \text{ donde}$$

$$|U_t \cap U_s| = \aleph_2.$$

2. Notas históricas e bibliográficas

O exemplo de Shelah apareceu publicado em 1980, num artigo de Hajnal e Juhász e mais recentemente em 1984, num artigo de Juhász [J-84], dedicado a aplicações de *forcing* em funções cardinais.

Vimos que o exemplo de Shelah é consistente com $ZFC + CH$. Em outra direção, o próprio Shelah mostrou que se assumirmos a existência de um cardinal fracamente compacto, então é consistente com $ZFC + CH$ a não existência de um espaço X tal que $L(X) = \psi(X) = \aleph_0$ e $|X| = \aleph_2$. (Quando $L(X) = \psi(X) = \aleph_0$, dizemos que X é um espaço Lindelöf com pontos G_δ .)

Pelo parágrafo 1, sabemos que $2^{\aleph_0}$ não é um limitante para a cardinalidade de um espaço T_2 , Lindelöf, com pontos G_δ .

Sabemos apenas que a cardinalidade de todo espaço Lindelöf com pontos G_δ é menor que o primeiro cardinal mensurável e não é fracamente compacto [J-84].

Por outro lado, o exemplo 7.2 [J-80] de Juhász mostra que para cada κ menor que o primeiro cardinal mensurável, existe um espaço $X - T_1$, Lindelöf com pontos G_δ tal que $|X| > \kappa$. Em 1980, Gryzlov (veja [J-84]) mostrou que se acrescentarmos a hipótese X compacto, então $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.

Para espaços T_2 , Lindelöf com pontos G_δ , sabemos apenas que o melhor limitante está entre $\aleph_2 + 2^{\aleph_0}$ e o primeiro cardinal mensurável. Porém, um cardinal mensurável (se existir) é muito grande. Segundo Tall, alguns pesquisadores têm tentado modificar o exemplo de Shelah para obter um espaço de cardinalidade $\aleph_3$, sem ter obtido sucesso.

Tall [T] usa *forcing*, *large cardinals* – especialmente argumentos de reflexão e submodelos elementares para dar soluções parciais ao problema acima.

CAPÍTULO V

COMENTÁRIOS FINAIS

0. Introdução. Faremos neste capítulo alguns comentários sobre alguns tópicos não tratados no texto e alguns problemas em aberto.

1. Produtos de espaços *chain net*

Dos resultados citados em [FT-89] e [BT], sabemos o seguinte:

Sejam X e Y espaços compactos, T_2 , *chain net*. Se, além disso, X for “disperso” (todo subespaço tem um ponto isolado), seqüencial ou radial, então $X \times Y$ é *chain net*.

Consideremos a seguinte questão:

Se X e Y são compactos, T_2 , *chain net*, então X e Y é *chain net*?

Durante sua exposição no VII Encontro Brasileiro de Topologia, Tironi comentou que ele acha que a resposta à questão é negativa, enquanto Simon acha que é afirmativa.

Bella e Tironi [BT] lembram que, para tentar responder negativamente a questão acima, é preciso criar (*) espaços compactos T_2 , *chain net* que não sejam nem dispersos, nem seqüenciais e nem radiais. Além disso, eles comentam que $\alpha\Omega$ em $ZFC + \diamond$ e $D^{\aleph_1}$ em $ZFC + MA + CH$ são os únicos exemplos que eles conhecem que satisfazem (*), mas $(\alpha\Omega)^2$ e $(D^{\aleph_1})^2$ são espaços *chain net*.

Em 1978, Arhangel'skii perguntou se existe um exemplo “ingênuo” (isto é, em ZFC) de dois compactos T_2 , Fréchet-Urysohn, cujo produto não é Frechet-Urysohn, pois vários exemplos tinham sido construídos, assumindo axiomas extras. Em 1980, Simon respondeu afirmativamente a esta questão.

2. Chain compactos

Lembramos que um espaço é seqüencialmente compacto se toda seqüência tem uma subsequência convergente.

Uma generalização natural usando λ -seqüências é a seguinte:

Um espaço é *chain* compacto se toda λ -seqüência tem uma κ -subseqüência cofinal convergente.

Em 1972, Mrowka, Rajagopalan e Soundarajan provaram que um espaço $X - T_2$ é *chain* compacto sse é compacto e disperso.

3. Espaços subsequenciais

Um espaço é chamado subsequencial se ele pode ser imerso em um espaço seqüencial.

Resultados recentes sobre espaços subsequenciais podem ser encontrados num artigo de 1990 de Franklin e Rajagopalan:

Um espaço subsequencial T_2 pode ser pseudocompacto sem ser seqüencial.

Todo espaço subsequencial, T_2 e compacto (enumeravelmente compacto, seqüencialmente compacto) é seqüencial.

Um espaço subsequencial e compacto não precisar ser seqüencial.

4. Alguns Problemas

1) [A-80] É verdade que se $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$, então $D^{\aleph_1}$ é um espaço *chain net*?

2) [IT-83] Se X é *chain net* (T_0, T_1) , então $\sigma_c(X) \leq 2^{t(X)}$?

3) Se X é *chain net* T_1 , então $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \psi(X)}$?

4) [AIT-86] Encontrar condições necessárias ou suficientes para um espaço Y ser sub-espaço de um espaço X *chain net*.

5) Se X é *chain net*, então $|X| \leq 2^{L(X) \sigma_c(X)}$?

BIBLIOGRAFIA

- [AW] ALAS, O.T.; WILSON, R.G. *Some spaces concerning the tightness of chain net spaces*. Preprint. Bol. Soc. Mexicana de Matemática. 9p.
- [A-80] ARHANGEL'SKII, A.V. *Some properties of radical spaces*. Mathematical Notes of Academy of Sciences of the USSR (Mat. Zametki). Vol. 27, N-1, 1980, pg. 50-54.
- [AIT-84] ARHANGEL'SKII, A.V.; ISLER, R.; TIRONI, G. *Pseudo radial spaces and another generalization of sequential spaces*. Proc. of The Conference on Convergence, Bechyne (Checoslováquia), 1984. Akademie Verlag, Berlin.
- [AIT-86] ARHANGEL'SKII, A.V.; ISLER, R.; TIRONI, G. *On pseudo-radial spaces*. CMUC 27(1) (1986) 137-154.
- [B-86a] BELLA, A. *Free sequences in pseudo-radial spaces*. CMUC 27(1) (1986) 163-170.
- [B-86b] BELLA, A. *Some remarks on set tightness*. Ricerche di Matematica. Vol. XXXV, fasc. 2^o (1986).
- [BT] BELLA, A.; TIRONI, G. *Further results on the product of chain net spaces*. Preprint, 1990.
- [D88] DOW, Alan. *An introduction to applications of elementary submodels to topology*. Preprint.
- [D-90] DOW, Alan. *On the consistency of the Moore-Mrowka solution*. Preprint. 21p.
- [DIT-87] DIMOV, G.D.; ISLER, R.; TIRONI, G. *On functions preserving almost radiality and their relations to radial and pseudo-radial spaces*. CMUC 28, 4 (1987) 751-781.
- [E-77] EFIMOV, B.A. *Mappings and embeddings of dyadic spaces*. Mathematics of the USSR Sbornik, Vol. 32, N^o 1, pg. 45-57.
- [E-89] ENGELKING, R. *General topology*. Berlin, Heldermann, 1989.
- [F-67] FRANKLIN, S.P. *Spaces which sequences suffice II*. Fund. Math. LXI (1967)

- [F-84] FREMLIN, D.H. *Consequences of Martin's Axiom*. Cambridge University Press, 1984.
- [FIT-83] FROLIK, Z.; ISLER, R.; TIRONI, G. *Some results on chain net and sequential spaces*. C.M.S. János Bolyai, 41. Topology and Applications, EGER (Hungary) 1983. 293-301.
- [FT-89] FROLIK, Z.; TIRONI, G. *Products of chain net spaces*. Revista da Matemática Pura ed Applicata. N.S. Anno 1989.
- [H-84] HODEL, R. *Cardinal functions I*. H.B.S.S.T.
- [IT-86] ISLER, R. TIRONI, G. *Alcuni recenti risultati sugli spazi pseudo-radiali*. II Convegno di Topologia Taormina (ME). 4-7 aprile 1984 ATTI. Rend. del Circolo Mat. di Palermo, serie II, número 12, 1986. 271-276.
- [JMSW-81] JANÉ, I; MEYER, P.R.; SIMON, P.; WILSON, R.G. *On tightness in chain net spaces*. CMUC 22, 4 (1981) 809-817.
- [J-80] JUHÁSZ, I. *Cardinal functions - ten years later*. Math. Centrum, 1980. 123.
- [J-84] JUHÁSZ, I. *Cardinal functions II*. H.B.S.S.T. 1984.
- [J-86] JUHÁSZ, I. *Variations on tightness*. Preprint, 1986. 17p.
- [JW-86] JUHÁSZ, I; WEISS, W. *On the tightness of chain net spaces*. CMUC 27,4 (1986) 677-681.
- [K-80] KUNEN, K. *Set theory - an introduction to independence proofs*. North-Holland, 1980.
- [O-76] OSTASZEWSKI, A.J. *On countably compact, perfectly normal spaces*. J. London Math. Soc. (2) 14 (1976), 505-516.
- [S-75] SAPIROVSKII, B.E. *The embedding of extremally unconnected spaces in bicom-pacta of b -points and the weight of pointwise normal spaces*. Soviet. Math. Dokl., Vol. 16 (1975), N^o 4.
- [T] TALL, F.D. *On the cardinality of Lindelöf spaces with points G_δ* . 21p. Preprint.