**Imersões Mínimas em Esferas
Associadas a Curvas Holomorfas**

Ivan Castro de Almeida

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: Geometria
Orientadora: Prof. Dr. Célia Contin Góes

-SÃO PAULO, Novembro de 1987-

Agradecimentos

Gostaria de agradecer...

Aos amigos que colaboraram com o trabalho ou simplesmente deram o seu apoio

Aos colegas da Universidade Federal do Espírito Santo, pelo apoio

Finalmente, à minha orientadora e amiga, Prof^a Dr. Célia Contin
Góes

Obrigado...

À minha família

Introdução

Neste trabalho, estudamos a teoria das imersões mínimas de 2-esferas em espaços de curvatura seccional constante, utilizando o método do referencial móvel, desenvolvido por E. Cartan. Neste contexto, definimos os elementos necessários a este estudo, sempre que possível, a partir de referenciais móveis locais.

Particularmente, neste estudo poderemos explorar as estruturas complexa e topológica de S^2 . Usando isto, determinaremos um referencial móvel local, adaptado aos espaços osculadores, definido em S^2 , menos possivelmente, em um conjunto de pontos isolados.

Em geral, dada uma imersão de uma superfície em um espaço de curvatura constante teremos que a dimensão do b-ésimo espaço normal osculador será menor ou igual a 2. Se a superfície for S^2 , a obtenção do referencial acima determina que, nos pontos regulares, a dimensão será, de fato, igual a 2 (neste caso, os chamaremos de planos normais osculadores).

Isto nos permite, sempre nos pontos regulares, considerar os planos, através do referencial obtido como sendo, localmente, uma curva complexificada, isto é, dada por um referencial $\{e_{2b-1}, e_{2b}\}$ e representada por $E_b = e_{2b-1} + ie_{2b}$.

Este referencial determina um conjunto de equações, denominadas fórmulas de Frenet-Boruvka. A partir destas equações, é que pretendemos desenvolver a teoria. Estas podem ser caracterizadas por um conjunto (que está definido globalmente sobre S^2) de coeficientes $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$.

No caso em que a variedade ambiente for $S^{2m}(1)$, com a estrutura Riemanniana induzida de R^{2m+1} , podemos considerar o referencial adaptado aos osculadores, como sendo campos de R^{2m+1} . Desta maneira, os campos complexificados E_b tornam-se campos de C^{2m+1} , que não se anulam em nenhum ponto e portanto, podem ser considerados como coordenadas homogêneas do espaço projetivo complexo $P^{2m}(C)$. Fazendo isto, obteremos, juntamente com as equações de Frenet-Boruvka que:

- (i) as curvas E_b estão na hiperquádrica Q^{2m-1} de $P^{2m}(C)$;
- (ii) se a subvariedade imersa não estiver contida em algum subespaço próprio de R^{2m+1} , então a curva E_m será holomorfa como curva do espaço projetivo, a qual denominaremos curva diretriz da imersão.

Esta curva tem a propriedade de não somente ela pertencer à hiperquádrica, mas também as suas derivadas até ordem $(m-1)$. Isto poderá ser deduzido, das equações de Frenet-Boruvka.

Reciprocamente, é possível, a partir de uma curva holomorfa que possua as propriedades da curva diretriz acima, obter uma imersão generalizada (isto é, que seja imersão, menos em um conjunto de pontos isolados de S^2) de modo que esta seja a curva diretriz desta imersão.

Este trabalho foi feito por S.S.Chern, no caso $m=2$, em [07], e por J.L.M.Barbosa, no caso geral, em [02]. Neste último, demonstra-se, mais ainda, que existe uma relação biunívoca entre as curvas que tenham as propriedades das curvas diretrizes e as imersões mínimas de S^2 em $S^{2m}(1)$.

No nosso trabalho, procuramos determinar, no capítulo 3, a imersão mínima generalizada a partir de sua curva diretriz, obter as equações de Frenet-Boruvka, os coeficientes $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ e a curvatura Gaussiana da imersão.

Esta construção da imersão é feita seguindo a técnica desenvolvida por S.S.Chern, no caso $m=2$, em [07].

A partir da curva diretriz, mais precisamente, de uma coordenada homogênea local e holomorfa, obtemos o referencial de Frenet-Boruvka. Estes determinam os espaços osculadores de ordem $(m-1)$, da curva diretriz e de sua conjugada.

A imersão generalizada, pontual e localmente, será obtida como a intersecção destes espaços.

No capítulo 4, determinamos, $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$, a partir de sua coordenada homogênea e holomorfa, e destes a curva diretriz da imersão mínima de curvatura Gaussiana K constante e igual, por (2.2.34) a

$$K = \frac{2}{m(m+1)}$$

Na verdade o que fazemos é provar que uma dada curva diretriz tem a propriedade de k_{m-1}/k_{m-2} constante e utilizamos o teorema (2.2.36) que diz, neste caso, que K deve ser constante.

Além da construção da imersão a partir de sua curva diretriz nos capítulos 3 e 4, procuramos desenvolver um pouco a teoria das imersões mínimas de S^2 em $S^{2m}(1)$ no capítulo 2, baseando-nos para isto, principalmente, nos trabalhos de S.S.Chern em [06] e de A.C.Asperti [01].

Destes, deduzimos alguns resultados, locais e globais.

Dentre os locais, procuramos demonstrar que é possível determinar o referencial de Frenet-Boruvka e suas equações, as condições de integrabilidade deste conjunto de equações, que nos permitirá concluir alguns resultados globais acerca da imersão.

Demostraremos ainda que, mesmo nos pontos onde não estejam definidos os planos normais osculadores, há o plano limite destes e um campo diferenciável definido, inclusive nestes pontos.

Além do teorema (2.2.34) podemos destacar o seguinte: Se tivermos uma imersão mínima $\pi : S^2 \rightarrow S^n(1)$, na qual todo ponto seja regular e a curvatura Gaussiana K da imersão satisfaça as desigualdades

$$\frac{2}{(m+1)(m+2)} \leq K \leq \frac{2}{m(m+1)}$$

Então, devemos ter, necessariamente,

$$K = \frac{2}{(m+1)(m+2)} \text{ ou } K = \frac{2}{m(m+1)}$$

Podemos demonstrar este fato usando as condições de integrabilidade das equações de Frenet-Bokuvka.

CAPÍTULO 1

GEOMETRIA RIEMANNIANA E O MÉTODO DO REFERENCIAL MÓVEL

1.1 — Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos da geometria Riemanniana, tais como, conexão, curvatura, etc, usando o método do referencial móvel.

1.2 — O Método do Referencial Móvel

1.2.1 — Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana n -dimensional.

Um **referencial móvel ortonormal local de M** será um conjunto de campos de classe C^∞ definido sobre um aberto $U \subset M$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de modo que para cada $p \in U$, $\{e_1(p), e_2(p), \dots, e_n(p)\}$ seja uma base ortonormal do espaço tangente a $M, T_p M$, em p .

O **coreferencial local associado** ao referencial $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ será o conjunto das 1-formas diferenciáveis $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ de modo que, para cada $p \in U$, o conjunto $\{w_1(p), w_2(p), \dots, w_n(p)\}$ seja dual de $\{e_1(p), e_2(p), \dots, e_n(p)\}$ em $(T_p M)^*$, o espaço dual de $T_p M$.

1.2.2 — Observemos que se M for uma variedade Riemanniana teremos que para todo $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U de p em M e um referencial móvel ortonormal local sobre U .

A conexão de Levi-Civita de M e o tensor de curvatura ficam determinados quando calculamos seus valores em um conjunto de campos de vetores de classe C^∞ , em uma vizinhança de cada ponto de M , que formam, pontualmente, uma base do espaço tangente. Em particular, podemos determiná-los a partir de um referencial móvel ortonormal local de M . Para isto, demonstraremos o seguinte resultado :

1.2.3 — **LEMA DE CARTAN.** Seja V um espaço vetorial real de dimensão n e $w_1, w_2, \dots, w_r : V \rightarrow R$ funcionais lineares, linearmente independentes. Suponha que existam funcionais lineares $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r : V \rightarrow R$ satisfazendo :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^r w_i \wedge \theta_i = 0$$

então, existe um conjunto, $\{a_{ij}\}$, de números reais, tal que

$$\theta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} w_j$$

com $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \leq i \leq r$.

Prova : Considere $w_{r+1}, \dots, w_n$ funcionais lineares sobre V de modo que $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ seja uma base de V^* , o dual de V . Portanto, para cada $1 \leq i \leq r$, existem $\{a_{ij}\}$ e $\{b_{ij}\}$ conjuntos de números reais, satisfazendo,

$$\theta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} w_j + \sum_{j=r+1}^n b_{ij} w_j$$

Usando a hipótese (1), obtemos

$$(2) \quad \sum_{i,j=1}^r a_{ij} w_i \wedge w_j + \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^n b_{ij} w_i \wedge w_j = 0$$

Agora, o conjunto $\{w_i \wedge w_j : 1 \leq i < j \leq n\}$ forma uma base de $\bigwedge^2 V^*$, o espaço vetorial das 2-formas alternadas sobre V . Mas, a expressão (2) pode ser reescrita como,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} (a_{ij} - a_{ji}) w_i \wedge w_j + \sum_{1 \leq i \leq r < j \leq n} b_{ij} w_i \wedge w_j = 0$$

E, portanto,

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ e } b_{ij} = 0$$

Donde segue o resultado.

1.2.4 — PROPOSIÇÃO. Sejam $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um referencial móvel local ortonormal sobre $U \subset M$ e $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$. Então, existe um único conjunto de 1-formas diferenciáveis $\{w_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$, satisfazendo :

$$(3) \quad (a) w_{ij} + w_{ji} = 0, \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq n;$$

$$(b) dw_i = \sum_{j=1}^n w_j \wedge w_{ji}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n;$$

Prova : Unicidade — Suponhamos que existam, satisfazendo (a) e (b) em (3) $\{\tilde{w}_{ij}\}$, 1-formas sobre U ,

Usando (b), teremos que,

$$0 = \sum_{j=1}^n w_j \wedge (w_{ji} - \tilde{w}_{ji})$$

o que pelo lema de Cartan (1.2.3) implica em que existe $\{a_{ijk}\}$ tal que

$$\tilde{w}_{ij} - w_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ijk} w_k$$

com, $a_{ijk} = a_{ikj}$, para todo $1 \leq i, j, k \leq n$. Mas, por (a) segue que devemos ter $a_{ijk} = -a_{jik}$. Portanto,

$$a_{ijk} = -a_{jik} = -a_{jki} = a_{kji} = a_{kij} = -a_{ikj} = -a_{ijk}$$

Isto é,

$$a_{ijk} = 0$$

para todo $1 \leq i, j, k \leq n$. Daí temos que

$$\tilde{w}_{ij} = w_{ij}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Donde segue a unicidade.

Existência - Para cada $1 \leq i \leq n$, dw_i sendo uma 2-forma diferenciável então,

$$dw_i = \sum_{j < k} b_{ijk} w_j \wedge w_k$$

com b_{ijk} , definido sobre U e diferenciável, para cada $1 \leq i, j, k \leq n$.

Para determinarmos w_{ij} , para cada $1 \leq i, j \leq n$, suponhamos que,

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ijk} w_k$$

Para termos (a), deve ocorrer, para cada $1 \leq i, j, k \leq n$, que

$$a_{ijk} = -a_{jik}$$

Para termos (b), deve ocorrer,

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} b_{ijk} w_j \wedge w_k = \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{ijk} w_j \wedge w_k = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_{ijk} - a_{ikj}) w_j \wedge w_k$$

Portanto, devemos ter, para todo $1 \leq i, j, k \leq n$

- (i) $a_{ijk} - a_{ikj} = b_{ijk}$
- (ii) $a_{jki} - a_{jik} = b_{jki}$
- (iii) $a_{kij} - a_{kji} = b_{kij}$

Fazendo-se, (i)+(ii)-(iii), obteremos que

$$(a_{ijk} - a_{ikj}) + (a_{jki} - a_{jik}) - (a_{kij} - a_{kji}) = b_{ijk} + b_{jki} - b_{kij}$$

Mas,

$$a_{ijk} = -a_{jik}, \quad a_{ikj} = -a_{kij} \text{ e } a_{jki} = -a_{kji}$$

Ou seja,

$$a_{ijk} = \frac{1}{2}(b_{ijk} + b_{jki} - b_{kij})$$

que são funções diferenciáveis em U.

Assim, definimos para cada $1 \leq i, j \leq n$,

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (b_{ijk} + b_{jki} - b_{kij}) w_k$$

1.2.5 — Seja D a conexão de Levi-Civita de M e X um campo de classe C^∞ sobre $U \subset M$, aberto, definimos as 1-formas

$$w_{ij}(X) = \langle De_i(X), e_j \rangle$$

em cada ponto de U. Neste caso, temos que :

(a) $w_{ij} + w_{ji} = 0$ em U, pois,

$$0 = X\langle e_i, e_j \rangle = \langle De_i(X), e_j \rangle + \langle e_i, De_j(X) \rangle$$

(b) $dw_i = \sum_{j=1}^n w_j \wedge w_{ji}$. Para ver isto, calculamos abaixo :

$$\begin{aligned} dw_i(e_j, e_k) &= e_k[w_i(e_j)] - e_j[w_i(e_k)] - w_i([e_j, e_k]) = \\ &= -w_i([e_j, e_k]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n w_l \wedge w_{li}(e_j, e_k) &= \sum_{l=1}^n [w_l(e_j)w_{li}(e_k) - w_l(e_k)w_{li}(e_j)] = \\ &= w_{ji}(e_k) - w_{ki}(e_j) = \langle De_j(e_k) - De_k(e_j), e_i \rangle = \\ &= \langle [e_k, e_j], e_i \rangle = -w_i([e_j, e_k]). \end{aligned}$$

De (i) e (ii) acima decorre que as 1-formas $\{w_{ij}\}$ da proposição (1.2.4), determinam a conexão de Levi-Civita de M.

Essas formas são denominadas as **1-formas de conexão associadas** ao referencial ortonormal $\{e_i\}$ em U. Além disso, se tivermos X e Y, campos diferenciáveis definidos em U e $Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i$, então,

$$DY(X) = \sum_{i=1}^n \left[dY_i(X) + \sum_{j=1}^n Y_j w_{ji}(X) \right] e_i$$

a derivada covariante de Y na direção de X.

1.2.6 — A equação definida em U,

$$dw_i = \sum_{j=1}^n w_j \wedge w_{ji}$$

será a 1ª Equação de Estrutura.

Derivando exteriormente essa equação, obteremos

$$0 = d^2 w_i = \sum_{j=1}^n dw_j \wedge w_{ji} - \sum_{j=1}^n w_j \wedge dw_{ji}$$

E, do fato de $dw_j = \sum_{k=1}^n w_k \wedge w_{kj}$, chegaremos à expressão

$$\sum_{j=1}^n w_j \wedge \left(dw_{ji} - \sum_{k=1}^n w_{jk} \wedge w_{ki} \right) = 0$$

Definimos a 2-forma Ω_{ij} , diferenciável em U, por

$$\Omega_{ij} = dw_{ij} - \sum_{k=1}^n w_{ik} \wedge w_{kj}$$

para cada $1 \leq i, j \leq n$.

1.2.7 — Para interpretarmos Ω_{ij} , calculemos $\Omega_{ij}(e_k, e_l)$. Temos,

$$\Omega_{ij} = \sum_{k,l=1}^n R_{ijkl} w_k \wedge w_l$$

com $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$. Da definição, segue que

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \Omega_{ij}(e_k, e_l) = dw_{ij}(e_k, e_l) - \sum_{r=1}^n w_{ir} \wedge w_{rj}(e_k, e_l) = \\ &= e_k [w_{ij}(e_l)] - e_l [w_{ij}(e_k)] - w_{ij}([e_k, e_l]) + \\ &\quad + \sum_{r=1}^n [w_{ir}(e_k) w_{jr}(e_l) - w_{ir}(e_l) w_{jr}(e_k)] = \\ &= e_k \langle De_i(e_l), e_j \rangle - e_l \langle De_i(e_k), e_j \rangle - \langle De_i([e_k, e_l]), e_j \rangle + \\ &\quad + \sum_{r=1}^n [\langle De_i(e_k), e_r \rangle \langle De_j(e_l), e_r \rangle - \langle De_i(e_l), e_r \rangle \langle De_j(e_k), e_r \rangle] = \\ &= \langle D[De_i(e_l)](e_k) - D[De_i(e_k)](e_l) - De_i([e_k, e_l]), e_j \rangle = \\ &= \langle R(e_k, e_l) e_i, e_j \rangle \end{aligned}$$

sendo R o tensor de curvatura de M .

Portanto, o conjunto $\{\Omega_{ij}\}$ determina o tensor de curvatura de M .

Essas 2-formas serão denominadas **formas de curvatura associadas** ao referencial $\{e_i\}$.

1.2.8 — A relação dada em U , por

$$\Omega_{ij} = dw_{ij} - \sum_{k=1}^n w_{ik} \wedge w_{kj}$$

será a **2ª Equação de Estrutura** de M .

1.2.9 — Dizemos que uma variedade Riemanniana é de curvatura seccional constante c , se

$$\Omega_{ij} = -cw_i \wedge w_j$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Isto é,

$$R_{ijkl} = -c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

1.2.10 — Sejam U um aberto não vazio de M , $\{e_i\}$ um referencial móvel ortonormal definido em U e $f : U \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty$.

A diferencial de f , é a 1-forma dada, em U por,

$$df = \sum_{i=1}^n df(e_i)w_i$$

O campo de vetores, de classe C^∞ ,

$$\sum_{i=1}^n df(e_i)e_i$$

será denominado campo gradiente de f em U . Notação : **gradf**.

1.2.11 — Seja X um campo de classe C^∞ . O traço da aplicação

$$Y \rightarrow DX(Y)$$

será denominado divergente de X . Notação : **div X**.

Se $\{e_i\}$ for um referencial ortonormal então,

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \langle DX(e_i), e_i \rangle$$

Seja f como em (1.2.10). Definimos o Laplaciano de f , Δf , em U , como sendo

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

Se $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, são de classe C^∞ , temos a relação,

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$$

Dai podemos deduzir o seguinte :

1.2.12 — TEOREMA (E. HOPF). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e conexa e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ com $\Delta f \geq 0$ (ou $\Delta f \leq 0$) em todo ponto. Então, f é constante. Em particular, as funções harmônicas ($\Delta f = 0$), sobre M são constantes.*

1.3 — Imersões Isométricas

1.3.1 — Sejam M^n uma variedade diferenciável e $(\bar{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, uma variedade Riemanniana, respectivamente, de dimensão n e $n+m$.

Seja $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ uma imersão de classe C^∞ .

Podemos tornar M^n uma variedade Riemanniana, induzindo pela imersão x , a seguinte métrica :

$$\langle u, v \rangle_M = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle$$

para cada $p \in M$ e $u, v \in T_{x(p)}\bar{M}$.

Sendo x uma imersão, todo campo C^∞ em $\bar{M}$ ao longo de $x(M)$ se estende, localmente, a um campo de classe C^∞ em $\bar{M}$. Além disso, x pode ser dado em coordenadas locais por uma inclusão. Podemos identificar, desta maneira, p com $x(p)$ e $u \in T_p M$ com $dx_p(u) \in dx_p(T_p M)$. A partir de agora estaremos fazendo sempre esta identificação.

1.3.2 — Um referencial ortonormal local sobre um aberto não vazio, $U \subset M$, $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$, diz-se adaptado à imersão x se, para cada $p \in U$, tenhamos $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ uma base de $T_p M$.

1.3.3 — Usaremos a seguinte convenção de índices :

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n+m, \text{ para } T_p \bar{M} ;$$

$$1 \leq i, j, k, \dots \leq n, \text{ para } T_p M ;$$

$$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n+m, \text{ para } (T_p M)^\perp ;$$

sendo $(T_p M)^\perp$ o complemento ortogonal de $T_p M$ relativamente à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, em $T_p \bar{M}$.

1.3.4 — Sejam $\{e_A\}$ um referencial local adaptado à imersão x e $\{w_A\}$ o coreferencial associado.

Temos as equações de estrutura,

$$\begin{aligned}dw_A &= \sum_B w_B \wedge w_{BA} \\dw_{AB} &= \bar{\Omega}_{AB} + \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} \\ \bar{\Omega}_{AB} &= \sum_{C,D} \bar{R}_{ABCD} w_C \wedge w_D\end{aligned}$$

com, $w_{AB} + w_{BA} = 0$ e $\bar{R}_{ABCD} = -\bar{R}_{ABDC}$.

Se $\bar{D}$ for a conexão de Levi-Civita de $\bar{M}$, temos que a conexão D de Levi-Civita sobre M , pela unicidade (Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana), será dada por

$$DY(X) = (\bar{D}Y(X))^T$$

onde " T " significa a projeção ortogonal sobre $T_p M$, para cada $p \in M$, X e Y campos diferenciáveis sobre M no qual identificamos Y com uma extensão diferenciável sobre $\bar{M}$. Assim, por (1.2.5) segue que,

$$w_{ij}(X) = \langle \bar{D}e_i(X), e_j \rangle = \langle (\bar{D}e_i(X))^T, e_j \rangle = \langle De_i(X), e_j \rangle$$

Isto é, $\{w_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$, quando restritas aos campos tangentes à M , são as 1-formas de conexão de M .

1.3.5 — Consideremos o coreferencial $\{w_A\}$ restrito à M , isto é, aos campos tangentes à M . Desse modo, as formas $w_\alpha = 0$, quando restritas à M . Usando-se a 1ª equação de estrutura de $\bar{M}$, teremos,

$$0 = \sum_A w_A \wedge w_{A\alpha} = \sum_i w_i \wedge w_{i\alpha}$$

Portanto, pelo lema de Cartan, existem $\{h_{\alpha ij}\}$, tal que,

$$w_{i\alpha} = \sum_{j=1}^n h_{\alpha ij} w_j$$

com, $h_{\alpha ij} = h_{\alpha ji}$, para todo i, j, α .

Observe que,

$$h_{\alpha ij} = w_{i\alpha}(e_j) = \langle \bar{D}e_i(e_j), e_\alpha \rangle$$

Definimos a forma simétrica e bilinear B^1 , pontualmente, por,

$$\langle B^1(e_i, e_j), e_\alpha \rangle = h_{\alpha ij} = h_{\alpha ji}$$

Neste caso, teremos,

$$B^1(X, Y) = \sum_{\alpha, i, j} h_{\alpha ij} w_i(X) w_j(Y) e_\alpha = \sum_{\alpha, i, j} h_{\alpha ij} X_i Y_j e_\alpha$$

para todos os campos diferenciáveis X e Y sobre M , dados localmente por $X = \sum_i X_i e_i$ e $Y = \sum_i Y_i e_i$.

Agora, por (1.2.5),

$$\overline{DY}(X) = \sum_{i=1}^n dY_i(X) e_i + \sum_{i=1}^n \sum_A Y_i w_{iA} e_A$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\overline{DY}(X))^\perp &= \sum_{i, \alpha} Y_i w_{i\alpha}(X) e_\alpha = \\ &= \sum_{\alpha, i, j} Y_i X_j h_{\alpha ij} e_\alpha. \end{aligned}$$

Isto é, $B^1(X, Y)$ é a projeção ortogonal de $\overline{DY}(X)$, pontualmente, sobre o complemento ortogonal do respectivo espaço tangente.

1.3.6 — Definimos o **vetor curvatura média** H , pontualmente, por

$$H = \sum_{i=1}^n B^1(e_i, e_i)$$

Isto é,

$$H = \sum_{\alpha} \left(\sum_i h_{\alpha ii} \right) e_\alpha$$

(Observemos que H está bem definido pois, é o traço de B^1).

Diremos que a imersão $x : M \rightarrow \overline{M}$ será mínima se $H = 0$, em todo ponto de M , ou equivalentemente,

$$\sum_i h_{\alpha ii} = 0$$

para todo $n+1 \leq \alpha \leq n+m$.

1.3.7 — As equações de estrutura de M , relativamente ao referencial $\{e_i\}$ são dadas por

$$\begin{aligned}dw_i &= \sum_j w_j \wedge w_{ji} \\dw_{ij} &= \Omega_{ij} + \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}\end{aligned}$$

onde as 2-formas Ω_{ij} são dadas por

$$\Omega_{ij} = \sum_{k,l} R_{ijkl} w_k \wedge w_l$$

De (1.3.4) decorre que,

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} &= dw_{ij} - \sum_A w_{iA} \wedge w_{Aj} = \\&= dw_{ij} - \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} - \sum_\alpha w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j} \\&= \Omega_{ij} + \sum_{\alpha,k,l} h_{\alpha ik} h_{\alpha jl} w_k \wedge w_l\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + \sum_\alpha (h_{\alpha ik} h_{\alpha jl} - h_{\alpha il} h_{\alpha jk})$$

que é denominada equação de Gauss para a imersão x , relativamente ao referencial $\{e_i\}$.

Se M for uma superfície, isto é, uma variedade diferenciável de dimensão 2, temos a curvatura Gaussiana K da imersão x , definida por

$$dw_{12} = -K w_1 \wedge w_2$$

Da 2ª equação de estrutura de M , obtém-se que

$$dw_{12}(e_1, e_2) = -K = R_{1212}$$

Assim, da equação de Gauss e de (1.2.9), segue que se $\bar{M}$ tem curvatura seccional constante c , então,

$$-c = -K + \sum_\alpha (h_{\alpha 11} h_{\alpha 22} - h_{\alpha 12}^2)$$

Portanto, se $x : M \rightarrow \bar{M}$, for mínima,

$$K = c - \sum_\alpha (h_{\alpha 11}^2 + h_{\alpha 12}^2)$$

Em particular, se $M = S^2$ (ou, topologicamente equivalente à S^2), deveremos ter $c > 0$ pois,

$$\int_{S^2} K dM = 4\pi > 0$$

1.4 — Os Espaços Osculadores e as Formas Fundamentais

1.4.1 — Ao introduzirmos os conceitos de espaços osculadores e de formas fundamentais, pretendemos utilizá-los no estudo das imersões mínimas de S^2 em uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante c , para determinar um referencial móvel ortonormal local adaptado à imersão, que nos permitirão obter as equações de Frenet-Boruvka e uma dada curva de $P^{2m}(C)$ denominada curva diretriz que pode ser utilizada para caracterizar a imersão e também, para determinar a curvatura Gaussiana, como veremos no capítulo 3.

1.4.2 — Consideremos $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana $(m+k)$ -dimensional, M uma variedade diferenciável m -dimensional e $x : M \rightarrow N$, uma imersão.

Seja em M a métrica induzida pela aplicação x . Para cada $p \in M$, identificaremos p com $x(p)$ e todo $u \in T_p M$ com $dx_p(u) \in dx_p(T_p M) \subset T_{x(p)} N$.

Seja Ψ uma curva de M passando por $p \in M$, parametrizada pelo comprimento de arco s , por $x(s)$ e tal que $x(0) = p$. Seja D a conexão de Levi-Civita sobre N e $\frac{D^n x}{ds^n}(0)$ a n -ésima derivada covariante no qual $\frac{Dx}{ds}(0) = \frac{dx}{ds}(0)$ será o vetor velocidade de Ψ em p .

Os primeiros n vetores

$$\frac{Dx}{ds}(0), \dots, \frac{D^n x}{ds^n}(0)$$

geram um subespaço de $T_p N$, ao qual denominaremos de espaço osculador de ordem n , ao longo de $x(s)$, em $s = 0$.

1.4.3 — O n -ésimo espaço osculador de M em p , $Osc^n M_p$, será o subespaço de $T_p N$ gerado por todos os espaços osculadores ao longo das curvas parametrizadas $x(s)$ de M , passando por p e tais que $x(0) = p$.

Da definição decorre que

$$T_p M = Osc^1 M_p \subset Osc^2 M_p \subset \dots \subset Osc^n M_p \subset Osc^{n+1} M_p \subset \dots$$

1.4.4 — O n -ésimo espaço normal osculador de M em p , N_p^n , será o complemento ortogonal relativamente à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de $Osc^n M_p$ em $Osc^{n+1} M_p$.

Seja $p_n = \dim N_p^n = \dim Osc^{n+1} M_p - \dim Osc^n M_p$, para cada $n \geq 1$, inteiro. Então,

$$p_0 = \dim T_p M = m$$

em todo ponto $p \in M$ e,

$$\dim \text{Osc}^n M_p = \sum_{j=0}^{n-1} p_j$$

1.4.5 — Diremos que um ponto $p \in M$ será regular de ordem n se, existir uma vizinhança de p , na qual a dimensão do espaço osculador de ordem k , $1 \leq k \leq n+1$ seja constante. Ou seja, se existir uma vizinhança de p na qual p_j , $1 \leq j \leq n$, seja constante. Se p for regular de ordem n , para todo $n \geq 1$, diremos, simplesmente, que p será um ponto regular de M .

1.4.6 — Suponhamos agora que $p \in M$ seja um ponto regular de ordem $n-1 \geq 2$ e $V \subset M$ uma vizinhança aberta de p em M na qual $p_j = \text{constante}$, para $j = 1, 2, \dots, n-2$. Neste caso, podemos construir em uma vizinhança aberta $U \subset V$, um referencial móvel ortonormal local de N , adaptado à imersão, $\{e_{\lambda_b}\}$, de modo que, para cada $q \in U$ e $b = 0, 1, 2, \dots, n-2$, $\{e_{\lambda_b}(q)\}$ seja base de N_q^b . Denominaremos um referencial deste tipo como sendo **adaptado aos espaços osculadores até ordem $n-1$** (pelo fato de $\text{Osc}^1 M_p = T_p M$ e $p_0 = m$, um tal referencial será adaptado à imersão).

1.4.7 — Quando tivermos um referencial local adaptado aos espaços osculadores até ordem $n-1$, usaremos a seguinte convenção de índices :

$$\begin{aligned} 1 \leq \lambda_0 \leq p_0 = m; \\ 1 + \sum_{j=0}^{b-3} p_j \leq \lambda_{b-2} \leq \sum_{j=0}^{b-2} p_j, b = 3, \dots, n; \\ 1 + \sum_{j=0}^{n-2} p_j \leq \lambda_{n-1} \leq m + k; \end{aligned}$$

onde $p_j = \dim N_q^j$ para todo $j = 0, 1, \dots, n-2$ e $q \in U$.

1.4.8 — Suponhamos agora que $N = M(c) = M^{m+k}(c)$, uma variedade Riemanniana de dimensão $m+k$ e curvatura seccional constante c . Sejam $p \in M$ um ponto regular de ordem $n-1$ e $\{e_A\}$ um referencial ortonormal local adaptado aos espaços osculadores até ordem $n-1$.

Usaremos sempre a seguinte convenção : (e_A, w_A, w_{AB}) significará que $\{e_A\}$ será um referencial móvel local ortonormal adaptado à imersão, $\{w_A\}$ o seu coreferencial local e $\{w_{AB}\}$ as 1-formas de conexão associadas a $\{e_A\}$, definidos em (1.2.4).

A derivada covariante de e_A , na direção do campo diferenciável X tangente à $M(c)$ é dada por

$$(5) \quad De_A(X) = \sum_B w_{AB}(X) e_B$$

Temos as equações de estrutura

$$(6) \quad \begin{aligned} dw_A &= \sum_B w_B \wedge w_{BA} \\ dw_{AB} &= \sum_B w_{AD} \wedge w_{DB} - cw_A \wedge w_B \end{aligned}$$

para todo $1 \leq A, B \leq m+k$.

1.4.9 — Consideremos as formas $\{w_A\}$ e $\{w_{AB}\}$ restritas aos campos tangentes à M . Daí obtemos que

$$(7) \quad w_A \wedge w_B = 0$$

para todo $A > m$ ou $B > m$. Portanto, por (6) de (1.4.8) decorre

$$dw_{AB} = \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB}$$

para todo $A > m$ ou $B > m$.

Para cada $b = 0, 1, 2, \dots, n-2$, seja o conjunto $I_b = \{\lambda_0\} \cup \dots \cup \{\lambda_{b+1}\}$, com os índices $\{\lambda_i\}$ definidos em (1.4.7). Supondo $\{e_A\}$ adaptado aos espaços osculadores até ordem $n-1$, teremos que, para cada λ_{b-1} , o campo $e_{\lambda_{b-1}}$ assume valores em $Osc^b M$ e portanto, $De_{\lambda_{b-1}}$ assume valores em Osc^{b+1} , o que por (5) de (1.4.8) implica em

$$De_{\lambda_{b-1}} = \sum_{B \in I_{b-1}} w_{\lambda_{b-1}B} e_B$$

Assim,

$$w_{\lambda_{b-1}B} = 0$$

para todo $b = 1, 2, \dots, n-2$ e B que não seja elemento de I_{b-1} .

Isto, juntamente com (8) nos leva à

$$\sum_{\lambda_b} w_{\lambda_{b-1}\lambda_b} \wedge w_{\lambda_b B} = 0$$

se B não pertence a I_{b-1} . Em particular,

$$(9) \quad \sum_{\lambda_b} w_{\lambda_{b-1}\lambda_b} \wedge w_{\lambda_b \lambda_{b+1}} = 0$$

para todo $b = 1, 2, \dots, n-2$. Este fato, juntamente com o lema de Cartan, possibilitará que definamos as b -ésimas formas fundamentais, que estenderão o conceito de 2ª forma fundamental já introduzido.

1.4.10 — Seja D' , a conexão de Levi-Civita de M . Então,

$$D^2x(X, Y) = D(Dx(Y)) - D'(Dx(X))(Y)$$

Quando $b=1$, temos os coeficientes da 2ª forma fundamental $\{h_{\lambda_1 i_1 i_2}\}$, $1 \leq i_1, i_2 \leq m$, simétricos, relativamente aos índices i_1 e i_2 satisfazendo,

$$(10) \quad w_{i_1 \lambda_1} = \sum_{i_2=1}^m h_{\lambda_1 i_1 i_2} w_{i_2}$$

relativamente ao referencial $\{e_A\}$.

Desta maneira,

$$De_{i_1} = \sum_{j=1}^m w_{i_1 j} e_j + \sum_{\lambda_1} w_{i_1 \lambda_1} e_{\lambda_1}$$

Isto é,

$$(11) \quad De_{i_1} = \sum_j w_{i_1 j} e_j + \sum_{\lambda_1, j_2} h_{\lambda_1 i_1 i_2} w_{i_2} e_{\lambda_1}$$

Mas, $Dx = \sum_{i_1} w_{i_1} e_{i_1}$ e portanto,

$$(12) \quad \langle D^2x, e_{\lambda_1} \rangle = \sum_{i_1} w_{i_1} \langle De_{i_1}, e_{\lambda_1} \rangle$$

sendo $\langle , \rangle$ a métrica de $M(c)$.

De (11) e (12) obtemos,

$$(13) \quad \sum_{\lambda_1} \langle D^2x, e_{\lambda_1} \rangle e_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_1, i_1, i_2} h_{\lambda_1 i_1 i_2} w_{i_1} w_{i_2} e_{\lambda_1}$$

Comparando (13) com (1.3.5) observamos que a 2ª forma fundamental B^1 da imersão $x : M \rightarrow M(c)$ pode ser dada como a projecção de D^2x sobre N^1 , pontualmente, o espaço normal osculador de Os^1M em Os^2M . Isto é, para todos os campos tangentes à M , diferenciáveis,

$$B^1(X, Y) = \sum_{\lambda_1} \langle D^2x(X, Y), e_{\lambda_1} \rangle e_{\lambda_1}$$

Mais geralmente, pretendemos obter, como no caso $b=1$, uma forma $((b+1)$ -ésima) B^b , que seja simétrica, quando aplicada aos campos tangentes e diferenciáveis à M que, pontualmente, seja a projecção ortogonal de $D^{b+1}x$ sobre

N^b , para todo $b = 2, \dots, n-1$. Devemos ter, relativamente ao referencial local $\{e_A\}$ adaptado aos espaços osculadores de M ,

$$B^b = \sum_{\lambda_b} \langle D^{b+1} x, e_{\lambda_b} \rangle e_{\lambda_b}$$

1.4.11 — TEOREMA. *Seja $p \in M$ um ponto regular de ordem $n-1$ e $\{e_A\}$ um referencial móvel local adaptado aos espaços osculadores até ordem $n-1$, definido em $U \subset M$, vizinhança aberta de p em M . Então, para cada $1 \leq b \leq n-1$, a aplicação dada localmente por*

$$(14) \quad B^b(X_1, X_2, \dots, X_{b+1}) = \sum_{\lambda_b} \langle D^{b+1} x(X_1, X_2, \dots, X_{b+1}), e_{\lambda_b} \rangle e_{\lambda_b}$$

será uma $(b+1)$ -ésima forma, simétrica, com $X_1, X_2, \dots, X_{b+1}$ sendo campos tangentes diferenciáveis à M definidos em U , $D^{b+1}x$ sendo dado, para $b \geq 2$ por

$$D^{b+1}x(X_1, X_2, \dots, X_{b+1}) = D(D^b x(X_1, X_2, \dots, X_b))(X_{b+1}) - \sum_{j=1}^b D^b x(X_1, \dots, D^j X_j(X_{b+1}), \dots, X_b)$$

Além disso, se $\{h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b}\}$ e $\{h_{\lambda_b i_1i_2\dots i_{b+1}}\}$ são, respectivamente, os coeficientes de B^{b-1} e de B^b , relativamente ao referencial (e_A, w_A, w_{AB}) , temos o seguinte :

$$(15) \quad \sum_{\lambda_{b-1}} h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b} w_{\lambda_{b-1}\lambda_b} = \sum_{i_{b+1}} h_{\lambda_b i_1i_2\dots i_{b+1}} w_{i_{b+1}}$$

Prova : Faremos a demonstração por indução sobre $1 \leq b \leq n-2$. Para $b=1$, temos o resultado satisfeito por (1.4.10).

Supomos agora que para $1 \leq b-1 \leq n-2$, as condições (14) e (15) estejam satisfeitas. Deste modo, teremos

$$(i) \quad \sum_{\lambda_{b-2}} h_{\lambda_{b-2}i_1i_2\dots i_{b-1}} w_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}} = \sum_{i_b} h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b} w_{i_b}$$

$$(ii) \quad B^{b-1}(X_1, X_2, \dots, X_b) = \sum_{\lambda_{b-1}, i_1, \dots, i_b} h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b} w_{i_1}(X_1) \cdots w_{i_b}(X_b) e_{\lambda_{b-1}}$$

$$\langle D^b x(X_1, X_2, \dots, X_b), e_{\lambda_{b-1}} \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_b} h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b} w_{i_1}(X_1) \cdots w_{i_b}(X_b)$$

Além disso, os coeficientes $\{h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b}\}$ são simétricos relativamente aos índices $i_1, \dots, i_b$.

Sabemos de (9) em (1.4.9) que

$$(16) \quad \sum_{\lambda_{b-1}} w_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}} \wedge w_{\lambda_{b-1}\lambda_b} = 0$$

Portanto,

$$(17) \quad \sum_{\lambda_{b-1}} \left(\sum_{\lambda_{b-2}} h_{\lambda_{b-2}i_1i_2\dots i_{b-1}} w_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}} \right) \wedge w_{\lambda_{b-1}\lambda_b} = 0$$

Substituindo (i) em (17) obtemos,

$$\sum_{i_b} w_{i_b} \wedge \left(\sum_{\lambda_{b-1}} h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b} w_{\lambda_{b-1}\lambda_b} \right) = 0$$

Pelo lema de Cartan, segue que existem $\{h_{\lambda_b i_1 i_2 \dots i_{b+1}}\}$ simétricos, relativamente à i_b e i_{b+1} , satisfazendo,

$$\sum_{\lambda_{b-1}} h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b} w_{\lambda_{b-1}\lambda_b} = \sum_{i_{b+1}} h_{\lambda_b i_1 i_2 \dots i_{b+1}} w_{i_{b+1}}$$

Como $\{h_{\lambda_{b-1}i_1i_2\dots i_b}\}$ são simétricos, relativamente aos índices $i_1, \dots, i_b$, por (18) segue que $\{h_{\lambda_b i_1 i_2 \dots i_{b+1}}\}$ são simétricos, relativamente a $i_1, i_2, \dots, i_b, i_{b+1}$.

Basta-nos agora, verificar que,

$$(D^{b+1}x(X_1, \dots, X_{b+1}), e_{\lambda_b}) = \sum_{i_1, \dots, i_{b+1}} h_{\lambda_b i_1 i_2 \dots i_{b+1}} w_{i_1}(X_1) \cdots w_{i_{b+1}}(X_{b+1})$$

De fato,

$$\begin{aligned} D^{b+1}x(X_1, \dots, X_{b+1}) &= D(D^b x(X_1, \dots, X_b))(X_{b+1}) - \sum_{j=1}^b D^b x(X_1, \dots, D'X_j(X_{b+1}), \dots, X_b) \\ &= D \left[(\text{comb. linear de } e_{\lambda_0}, \dots, e_{\lambda_{b-2}}) + \sum_{\lambda_{b-1}} \langle D^b x(X_1, \dots, X_b), e_{\lambda_{b-1}} \rangle \right] (X_{b+1}) + \\ &\quad + (\text{comb. linear de } e_{\lambda_0}, \dots, e_{\lambda_{b-1}}) \end{aligned}$$

pois, usando a hipótese (iii), para cada $1 \leq j \leq b$, teremos que

$$D^b(X_1, \dots, D'X_j(X_{b+1}), \dots, X_b) = (\text{comb. linear de } e_{\lambda_0}, \dots, e_{\lambda_{b-1}})$$

Assim,

$$D^{b+1}x(X_1, \dots, X_{b+1}) = (\text{comb. linear de } e_{\lambda_0}, \dots, e_{\lambda_{b-1}}) \\ + \sum_{\lambda_{b-1}} \langle D^b x(X_1, \dots, X_b), e_{\lambda_{b-1}} \rangle De_{\lambda_{b-1}}(X_{b+1})$$

Portanto,

$$\langle D^{b+1}x(X_1, \dots, X_{b+1}), e_{\lambda_b} \rangle = \sum_{\lambda_{b-1}} \langle D^b x(X_1, \dots, X_b), e_{\lambda_{b-1}} \rangle \langle De_{\lambda_{b-1}}(X_{b+1}), e_{\lambda_b} \rangle = \\ = \sum_{\lambda_{b-1}} h_{\lambda_{b-1} i_1 i_2 \dots i_b} w_{i_1}(X_1) \dots w_{i_b}(X_b) w_{\lambda_{b-1} \lambda_b}(X_{b+1}) = \\ = \sum_{i_{b+1}} h_{\lambda_b i_1 i_2 \dots i_{b+1}} w_{i_1}(X_1) \dots w_{i_b}(X_b) w_{i_{b+1}}(X_{b+1})$$

por (18). E isto prova o teorema.

Observemos que este resultado mostra também que B^b não depende do referencial local adaptado aos espaços osculadores de M . Além disso, isto mostra que a $(b+1)$ -ésima forma fundamental representa a projeção ortogonal, pontualmente, de D^{b+1} sobre N^b .

1.4.12 — Se $x : M \rightarrow M(c)$ for uma imersão mínima, teremos que

$$\sum_j h_{\lambda_1 j j} = 0$$

para cada λ_1 . Assim, usando recursivamente (15), chegaremos à

$$\sum_j h_{\lambda_b j j i_1 \dots i_{b+1}} = 0$$

para todo λ_b .

Agora, $D^a x$ sendo uma combinação linear de $e_{\lambda_0}, \dots, e_{\lambda_{a-1}}$, para cada $1 \leq a \leq b$, os campos

$$(19) \quad \sum_{\lambda_b} h_{\lambda_b i_1 i_2 \dots i_{b+1}} e_{\lambda_b}$$

geram N^b . Em particular, se M for uma superfície temos por (19) acima que os campos

$$\sum_{\lambda_b} h_{\lambda_b 11 \dots 1} e_{\lambda_b} \\ \text{e} \\ \sum_{\lambda_b} h_{\lambda_b 1 \dots 12} e_{\lambda_b}$$

geram N^b , isto é, $p_b = \dim N^b \leq 2$, para todo b .

Veremos adiante, que se $M = S^2$, então $p_b = 2$ (Se $B^b \neq 0$), para cada b , menos possivelmente, para um número finito de pontos. Se, $B^b \equiv 0$ então, $p_b = 0$ para todo ponto de S^2 . Isto decorrerá do fato de S^2 ser uma superfície de Riemann compacta, sobre a qual toda função definida globalmente sobre S^2 a valores complexos e holomorfa deve ser identicamente nula.

1.4.13 — Definimos a norma da $(b+1)$ -ésima forma fundamental B^b por,

$$\|B^b\|^2 = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{b+1} \leq n} \|B^b(e_{i_1}, \dots, e_{i_{b+1}})\|^2$$

que está bem definida pois, não depende do particular referencial ortonormal $\{e_i\}$ tangente à M . Mostraremos explicitamente este fato para o caso em que M é uma superfície, no capítulo 3.

Se M for uma superfície e $x : M \rightarrow M(c)$, uma imersão mínima, teremos

$$\|B^b\|^2 = 2^b (\|B^b(e_1, e_1, \dots, e_1)\|^2 + \|B^b(e_1, \dots, e_1, e_2)\|^2)$$

Se $\langle B^b(e_1, e_1, \dots, e_1), B^b(e_1, \dots, e_1, e_2) \rangle = 0$ teremos,

$$\|B^b(e_1, e_1, \dots, e_1)\|^2 \text{ e } \|B^b(e_1, \dots, e_1, e_2)\|^2$$

como sendo os semi-eixos da b -ésima elipse de curvatura c^b da imersão x nos pontos em que esta seja não degenerada, o que é equivalente, nos pontos onde $p_b = 2$ (Ver [01], pg 32).

Veremos ainda que no caso particular de $M = S^2$, todas as eplises de curvatura não degeneradas serão circunfêrencias (Isto, que nos permitirá obter um referencial adaptado aos espaços osculadores e as equações de Frenet-Boruvka, relativamente a este referencial determinado).

CAPITULO 2

IMERSÕES MÍNIMAS DE 2-ESFERAS EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

2.1 — Imersões de Superfícies

2.1.1 — Seja M uma superfície e uma imersão $x : M \rightarrow M^n(c)$, $M^n(c)$ uma variedade Riemanniana n -dimensional de curvatura seccional constante c . Consideremos (e_A, w_A, w_{AB}) um referencial local adaptado à imersão, em uma vizinhança não vazia de M , dada em coordenadas isotérmicas, $z = u + iv$. Suporemos ainda que os campos tangentes à M sejam dados por

$$(1) \quad e_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u} \quad e \quad e_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial v}$$

onde $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$ são os campos coordenados de M , nesta vizinhança e λ dada por

$$\lambda = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_M} = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_M}$$

Obs : $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ como sendo a métrica de M , induzida por x .
Teremos as equações de estrutura

$$(2) \quad dw_A = \sum_B w_B \wedge w_{BA}$$

$$(3) \quad dw_{AB} = \sum_D w_{AD} \wedge w_{DB} - cw_A \wedge w_B$$

A derivada covariante do campo e_A será dada por

$$(4) \quad De_A = \sum_B w_{AB} e_B$$

Derivando (4) exteriormente, obtemos

$$dDe_A = \sum_B dw_{AB} e_B - \sum_B w_{AB} \wedge De_B$$

o que nos leva por (2) e (3) à

$$(5) \quad dDe_A = -c \sum_B w_A \wedge w_B e_B$$

Restringiremos as formas $\{w_A\}$ aos campos tangentes à M . Assim,

$$dDe_i = -cw_i \wedge w_j e_j$$

para $1 \leq i, j \leq 2$ e $i \neq j$;

$$(7) \quad dDe_\alpha = 0$$

para todo $\alpha > 2$.

2.1.2 — Usaremos a notação complexa, fazendo

$$\varphi = w_1 + iw_2$$

Desta maneira, a métrica de M induzida por x fica sendo

$$ds^2 = \varphi \bar{\varphi}$$

onde, $\bar{\varphi} = w_1 - iw_2$.

Agora, $d\varphi = dw_1 + idw_2$ e por (2) de (2.1.1) e (8) segue

$$(9) \quad d\varphi = -iw_{12} \wedge \varphi$$

A curvatura Gaussiana K de M , relativamente à métrica induzida por x , pode ser definida localmente por,

$$dw_{12} = -Kw_1 \wedge w_2$$

ou seja

$$(10) \quad dw_{12} = -\frac{i}{2}K\varphi \wedge \bar{\varphi}$$

2.1.3 — Observemos que (2.1.1) nos diz que

$$(11) \quad \varphi = \lambda dz$$

Diferenciando (11) exteriormente, chegaremos à

$$d\varphi = d\lambda \wedge dz$$

o que, juntamente com (9), resulta em

$$(12) \quad (d\lambda + i\lambda w_{12}) \wedge dz = 0$$

isto é, $d\lambda + i\lambda w_{12}$ será múltiplo de dz .

2.2 — Imersões Mínimas de 2-Esferas

2.2.1 — Consideremos S^2 a esfera unitária de R^3 e, uma imersão mínima $x: S^2 \rightarrow M(c)$ (portanto, $c > 0$, por (1.3.7)).

Pretendemos neste capítulo, construir um referencial ortonormal local adaptado aos espaços osculadores em uma vizinhança de cada ponto regular de S^2 . A partir deste referencial e das relações obtidas poderemos deduzir alguns fatos acerca da imersão x . Por exemplo, poderemos concluir que se a imersão mínima for de curvatura Gaussiana constante K então, existe $m \geq 1$, inteiro, de modo que

$$K = \frac{2c}{m(m+1)}$$

No caso particular, da variedade ambiente ser $S^n(1)$ poderemos caracterizá-la a partir de uma certa curva do espaço projetivo $P^n(C)$, holomorfa.

No sentido de explorar a estrutura complexa da esfera S^2 , usaremos campos de vetores complexificados.

2.2.2 — Seja (e_A, w_A, w_{AB}) um referencial local adaptado à imersão x .

Suponhamos que S^2 seja dada, localmente, em coordenadas isotérmicas, $z = u + iv$, de modo que os campos tangentes à S^2 , e_1 e e_2 , sejam como em (2.1.1).

Definimos o campo de vetores complexificado,

$$E_1 = e_1 + ie_2$$

e o campo de vetores

$$DE_1 = De_1 + iDe_2$$

Desta maneira, teremos

$$dDE_1 = dDe_1 + idDe_2$$

o que juntamente com (6) de (2.1.1) resulta em

$$(13) \quad dDE_1 = -\frac{c}{2}\varphi \wedge \bar{\varphi} E_1$$

2.2.3 — Sejam $\{h_{\alpha ij}\}$ os coeficientes da 2^a forma fundamental B^1 , relativamente à $\{e_A\}$ e

$$(14) \quad H_\alpha^{(2)} = h_{\alpha 11} + ih_{\alpha 12}$$

para todo $\alpha > 2$.

Usando (4) de (2.1.1) obtemos

$$(15) \quad DE_1 = -i w_{12} E_1 + \bar{\varphi} \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{(2)} e_{\alpha}$$

2.2.4 — Fixemos, a partir de agora, uma orientação para S^2 . Suponhamos então, dado um outro referencial $\{e_1^*, e_2^*\}$ local na orientação fixada, sendo os respectivos duais $\{w_1^*, w_2^*\}$. Sejam ainda, $\{h_{\alpha ij}^*\}$ os coeficientes de B^1 relativos ao referencial $\{e_A^*\}$ onde, $e_{\alpha}^* = e_{\alpha}$ para todo $\alpha > 2$.

Se, $E_1^* = e_1^* + i e_2^*$, existe, localmente, uma função τ diferenciável, de modo que

$$(16) \quad E_1^* = e^{i\tau} E_1$$

Assim, se $\varphi^* = w_1^* + i w_2^*$, então

$$(17) \quad \varphi^* = e^{i\tau} \varphi$$

Portanto,

$$(18) \quad DE_1^* = d(e^{i\tau}) E_1 + e^{i\tau} DE_1$$

Mas, por (15) de (2.2.3)

$$(19) \quad DE_1^* = -i w_{12}^* E_1^* + \bar{\varphi}^* \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{*(2)} e_{\alpha}$$

sendo w_{12}^* a 1-forma de conexão de S^2 relativamente ao referencial $\{e_1^*, e_2^*\}$ e $H_{\alpha}^{*(2)} = h_{\alpha 11}^* + i h_{\alpha 12}^*$.

Comparando (18) com (19) e usando (15) de (2.2.3), obtemos

$$e^{-i\tau} \bar{\varphi} \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{*(2)} e_{\alpha} = e^{i\tau} \bar{\varphi} \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{(2)} e_{\alpha}$$

Isto é,

$$(20) \quad H_{\alpha}^{*(2)} = e^{2i\tau} H_{\alpha}^{(2)}$$

para todo $\alpha > 2$.

Temos de (20) que

$$(21) \quad \overline{H_{\alpha}^{(2)}} \varphi^2 = \overline{H_{\alpha}^{*(2)}} \varphi^{*2}$$

2.2.5 — A forma dada, localmente, por

$$(22) \quad \Phi_2 = \sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2 \varphi^4$$

não depende do referencial tomado, relativamente à orientação fixada. Este fato decorre de (21) de (2.2.4). Além disso, a forma Φ_2 não depende do referencial $\{e_{\alpha}\}$, $\alpha > 2$ pois,

$$\sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2 = \|B^1(e_1, e_1)\|^2 - \|B^1(e_1, e_2)\|^2 - 2i\langle B^1(e_1, e_1), B^1(e_1, e_2) \rangle$$

obs: $\langle , \rangle$ a métrica de $M(c)$.

Logo, a forma Φ_2 está definida globalmente sobre S^2 .

2.2.6 — Vejamos agora, que a forma Φ_2 dada acima é uma forma abeliana sobre S^2 . Para isto, diferenciemos exteriormente DE_1 em (15) de (2.2.3) e comparamos com (13) de (2.2.2) :

$$\begin{aligned} -\frac{c}{2}\varphi \wedge \bar{\varphi} E_1 &= -idw_{12}E_1 + iw_{12} \wedge \bar{\varphi} \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{(2)} e_{\alpha} + \\ &+ \sum_{\alpha} dH_{\alpha}^{(2)} \wedge \bar{\varphi} e_{\alpha} + \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{(2)} d\bar{\varphi} e_{\alpha} - \sum_{\alpha, A} H_{\alpha}^{(2)} \bar{\varphi} \wedge w_{\alpha A} e_A \end{aligned}$$

Substituímos (9) de (2.1.2) na expressão acima e obtemos, para cada $\alpha > 2$,

$$0 = \left(dH_{\alpha}^{(2)} + 2iw_{12}H_{\alpha}^{(2)} + \sum_{\beta} H_{\beta}^{(2)} w_{\beta\alpha} \right) \wedge \bar{\varphi}$$

ou,

$$(23) \quad \left(d\overline{H_{\alpha}^{(2)}} - 2iw_{12}\overline{H_{\alpha}^{(2)}} + \sum_{\beta} \overline{H_{\beta}^{(2)}} w_{\beta\alpha} \right) \wedge \varphi = 0$$

Multiplicando-se (23) por $2\overline{H_{\alpha}^{(2)}}$ e somando em α , obtemos

$$(24) \quad \left[d \left(\sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2 \right) - 4iw_{12} \sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2 \right] \wedge \varphi = 0$$

pois, $w_{\alpha\beta} + w_{\beta\alpha} = 0$.

Assim, se substituímos (12) de (2.1.3) em (24) e multiplicarmos por λ^4 , teremos

$$\left[\lambda^4 d \left(\sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2 \right) + 4\lambda^3 d\lambda \sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2 \right] \wedge \varphi = 0$$

ou,

$$d \left(\lambda^4 \sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2 \right) \wedge \varphi = 0$$

E, isto significa que a função, definida por $f(z) = \lambda^4 \sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2$, localmente, é holomorfa.

Mas, Φ_2 , na vizinhança considerada é dada por

$$\Phi_2(z) = f(z) dz^4$$

Logo, Φ_2 será uma forma abeliana sobre S^2 , o que implica em $\Phi_2 = 0$ ou, equivalentemente, em termos locais, a $f(z) = 0$. Ou seja,

$$(25) \quad \sum_{\alpha} \left(\overline{H_{\alpha}^{(2)}} \right)^2 = 0$$

2.2.7 — O fato, devido à topologia de S^2 , de toda forma abeliana definida sobre S^2 ser identicamente nula é que nos permitirá construir um referencial local adaptado aos espaços osculadores em uma vizinhança de um ponto regular de S^2 .

2.2.8 — De (25) de (2.2.6) obtemos,

$$(26) \quad \sum_{\alpha} h_{\alpha 11}^2 = \sum_{\alpha} h_{\alpha 12}^2 \text{ e } \sum_{\alpha} h_{\alpha 11} h_{\alpha 12} = 0$$

Definimos k_1 por,

$$k_1 = \sqrt{\sum_{\alpha} h_{\alpha 11}^2}$$

Observemos que desta maneira,

$$B^1(e_1, e_1) = \sum_{\alpha} h_{\alpha 11} e_{\alpha}, \quad B^1(e_1, e_2) = \sum_{\alpha} h_{\alpha 12} e_{\alpha}$$

Portanto,

$$k_1 = \|B^1(e_1, e_1)\| = \|B^1(e_1, e_2)\|$$

Além disso, se $\{e_1^*, e_2^*\}$ for um outro referencial tangente à S^2 na mesma orientação de $\{e_1, e_2\}$ por (20) segue que

$$k_1 = \|B^1(e_1^*, e_1^*)\| = \|B^1(e_1^*, e_2^*)\|$$

Isto é, k_1 fica definida globalmente sobre S^2 .

2.2.9 — LEMA. Se $k_1 = 0$ em uma vizinhança de S^2 , então, temos $k_1 = 0$ em S^2 .

Este fato decorre do seguinte :

2.2.10 — TEOREMA ([13]). Seja $x : S^2 \rightarrow S^n(r)$, $r > 0$, uma imersão mínima, S^2 dada em coordenadas isotérmicas locais por, $z = u + iv$. Então, $x(u, v)$ será uma função analítica real.

2.2.11 — O referencial que pretendemos obter é local, o que nos permite considerar no lugar da variedade ambiente $M^n(c)$, o seu recobrimento universal $S^n(\frac{1}{\sqrt{c}})$ que é uma variedade analítica. Desse modo identificaremos $M^n(c)$ com $S^n(\frac{1}{\sqrt{c}})$.

2.2.12 — Demonstração do lema (2.2.9) :

Do teorema (2.2.10) decorre que, $D^{b+1}x$ deve ser uma função analítica real para todo b .

Isto significa que B^b deve também ser analítica real para todo b em uma vizinhança de um ponto regular de ordem $(b+1)$.

Sendo $S^n(\frac{1}{\sqrt{c}})$ uma variedade analítica real, podemos tomar um referencial ortonormal local adaptado aos espaços osculadores até ordem $(b+1)$ de modo que os coeficientes relativos a este referencial $\{h_{\lambda, i_1 \dots i_{b+1}}\}$ sejam funções analíticas reais.

Definimos para todo inteiro, j , $1 \leq j \leq b$,

$$r_j^2 = \|B^j(e_1, e_1, \dots, e_1)\|^2 = \sum_{\lambda_j} k_{\lambda_j, 11 \dots 1}^2$$

que é uma função analítica real em uma vizinhança de um ponto regular de ordem $(j+1)$ (veremos mais adiante que na verdade r_j^2 está definida globalmente sobre S^2). Em particular,

$$k_1^2 = r_1^2 = \|B^1(e_1, e_1)\|^2$$

deve ser uma função analítica real, definida globalmente sobre S^2 que se anula em uma vizinhança de S^2 e portanto, $k_1 = 0$ em S^2 .

2.2.13 — Seja $z = 0$, coordenada local de um ponto de S^2 no qual $k_1 = 0$, isto é, $H_\alpha^{(2)} = 0$, para todo α . Da relação (23) de (2.2.6) temos que $\{\overline{H_\alpha^{(2)}}\}$ resolve um sistema de equações diferenciais elíptico, em uma vizinhança de $z = 0$, do tipo

$$\frac{\partial \overline{H_\alpha^{(2)}}}{\partial \bar{z}} = \sum_{\beta > 2} a_{\alpha\beta} \overline{H_\beta^{(2)}}$$

para cada $\alpha > 2$. Se a imersão não for totalmente geodésica, isto é, se k_1 não for identicamente nulo em S^2 , (isto significa pelo lema (2.2.9) que as funções $\overline{H_\alpha^{(2)}}$ não

são, simultaneamente, nulas em uma vizinhança de $z = 0$), então pelo lema (2.4.1) do apêndice deste capítulo, decorre :

(a) os zeros comuns de $\{\overline{H_\alpha^{(2)}}\}$ são isolados, ou seja, os zeros de k_1 são isolados;

(b) existe um $s > 0$, inteiro, e

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overline{H_\alpha^{(2)}}}{z^s}$$

para todo $\alpha > 2$. Além disso para algum $\alpha > 2$, o limite em (27) é não nulo.

2.2.14 — Podemos portanto, considerar em S^2 , dois tipos de vizinhanças abertas : uma na qual todo ponto é regular de ordem ≥ 2 , que denominaremos do **1º tipo**; outra na qual $z = 0$ fica sendo como o único ponto com $k_1 = 0$, que denominaremos do **2º tipo**. Suporemos a partir de agora que toda vizinhança de S^2 será do 1º ou do 2º tipo.

2.2.15 — Para cada ponto de S^2 existe um referencial que pode não estar definido em $z = 0$, quando a vizinhança for do 2º tipo, dado por $\{\tilde{e}_A\}$, do qual $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = e_2$ e

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{k_1} \sum_{\alpha} h_{\alpha 11} e_{\alpha}, \quad \tilde{e}_4 = \frac{1}{k_1} \sum_{\alpha} h_{\alpha 12} e_{\alpha}$$

Observemos que por (26) os campos dados em (28) satisfazem a relação

$$\langle \tilde{e}_{\alpha}, \tilde{e}_{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

Além disso, $\tilde{e}_3$ e $\tilde{e}_4$ formam, pontualmente, uma base do plano normal N^1 . Assim, nos pontos regulares de ordem maior ou igual a 2, teremos que $p_2 = \dim N^1 = 2$.

No caso da vizinhança ser do 2º tipo, consideremos as funções :

$$E_{\alpha}^{(2)} = \begin{cases} \overline{\frac{H_{\alpha}^{(2)}}{z^s}}, & \text{se } z \neq 0, \\ \lim_{z \rightarrow 0} \overline{\frac{H_{\alpha}^{(2)}}{z^s}}, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Observemos que estas funções são de classe C^{∞} pois as respectivas partes, real e imaginária, são analíticas, pelo teorema (2.2.10) e pelo lema (2.4.2) do apêndice deste capítulo.

Observemos ainda que de (2.2.13 - (b)) teremos

$$\sum_{\alpha} \mathbb{B}_{\alpha}^{(2)} \overline{\mathbb{B}_{\alpha}^{(2)}} \neq 0$$

em $z = 0$.

Podemos definir, portanto, em uma vizinhança de $z = 0$, o campo diferenciável

$$\hat{E}_2 = \frac{\sqrt{2} \sum_{\alpha} \mathbb{B}_{\alpha}^{(2)} e_{\alpha}}{\sqrt{\sum_{\alpha} \mathbb{B}_{\alpha}^{(2)} \overline{\mathbb{B}_{\alpha}^{(2)}}}}$$

Desta maneira, teremos para $z \neq 0$,

$$(28) \quad \hat{E}_2 = \frac{|z|^4}{z^5} \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{(2)} e_{\alpha} = \frac{|z|^4}{z^5} \tilde{E}_2$$

se definirmos, $\tilde{E}_2 = \tilde{e}_3 + i\tilde{e}_4$.

Isto significa que os campos

$$\hat{e}_3 = \frac{\hat{E}_2 + \overline{\hat{E}_2}}{2} \quad \text{e} \quad \hat{e}_4 = \frac{\hat{E}_2 - \overline{\hat{E}_2}}{2i}$$

formam, pontualmente, uma base de N^1 .

Observemos, portanto, que em uma vizinhança de $z = 0$ na qual $k_1 = 0$ ocorre o seguinte: $(\hat{e}_A, \hat{w}_A, \hat{w}_{AB})$ tal que, $\hat{e}_1 = e_1$, $\hat{e}_2 = e_2$ e $\hat{e}_{\mu} = e_{\mu}$ para todo $\mu \geq 5$ fica sendo um referencial em $z = 0$. Se $\{\hat{h}_{\alpha ij}\}$ são os coeficientes de B^1 relativamente a $\{\hat{e}_A\}$, teremos

$$(a) \lim_{z \rightarrow 0} \hat{h}_{\alpha ij} = 0,$$

$$(b) \text{ para todo } \mu \geq 5 \text{ e } z \neq 0,$$

$$\sum_{\alpha} \hat{H}_{\alpha}^{(2)} \hat{w}_{\alpha \mu} = H_{\mu}^{(3)} \bar{\varphi}$$

por (15) de (1.4.11), onde $\hat{H}_{\alpha}^{(2)} = \hat{h}_{\alpha 11} + i\hat{h}_{\alpha 12}$ e $\{h_{\mu ijk}\}$ são os coeficientes de B^2 definida em uma vizinhança de $z = 0$, menos em $z = 0$, e

$$H_{\mu}^{(3)} = h_{\mu 111} + i h_{\mu 112}$$

Sendo $\hat{w}_{\alpha \mu}$ contínua em $z = 0$, segue que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \hat{H}_{\alpha}^{(2)} \hat{w}_{\alpha \mu} = 0$$

Portanto,

$$(29) \quad \lim_{z \rightarrow 0} H_{\mu}^{(3)} = 0$$

Concluimos então que, existe o plano limite dos planos normais N^1 , em $z = 0$.

2.2.16 — Consideremos agora, o referencial ortonormal local dado por $(\tilde{e}_A, \tilde{w}_A, \tilde{w}_{AB})$ em (2.2.15). Sejam $\{\tilde{h}_{\alpha ij}\}$, os coeficientes de B^1 , $\alpha = 3$ ou 4, e $\{h_{\mu ijk}\}$, os coeficientes de B^2 , $\mu \geq 5$, relativamente a $\{\tilde{e}_A\}$. Temos de (15) em (2.2.3) que

$$DE_1 = -iw_{12}E_1 + \bar{\varphi} \sum_{\alpha=3}^4 \tilde{H}_{\alpha}^{(2)} \tilde{e}_{\alpha}$$

Definimos os campos diferenciáveis

$$(30) \quad e_3 = \frac{1}{k_1} \sum_{\alpha=3}^4 \tilde{h}_{\alpha 11} \tilde{e}_{\alpha} \quad \text{e} \quad e_4 = \frac{1}{k_1} \sum_{\alpha=3}^4 \tilde{h}_{\alpha 12} \tilde{e}_{\alpha}$$

Seja, $E_2 = e_3 + ie_4$, logo,

$$(31) \quad E_2 = \frac{1}{k_1} \sum_{\alpha=3}^4 \tilde{H}_{\alpha}^{(2)} \tilde{e}_{\alpha}$$

Portanto,

$$(32) \quad DE_1 = -iw_{12}E_1 + k_1 \bar{\varphi} E_2$$

Além disso, por (28) de (2.2.15) e (30) acima se a vizinhança for do 2º tipo, decorre que existe r_2 satisfazendo

$$(33) \quad \hat{E}_2 = e^{ir_2} E_2$$

para $z \neq 0$.

2.2.17 — Estenderemos o produto escalar $(,)$ sobre os espaços tangentes à $M^n(c)$, aos vetores complexificados, do seguintes modo :

$$(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_2, v_2 \rangle + i(\langle u_1, v_2 \rangle + \langle u_2, v_1 \rangle)$$

para u_1, v_1, u_2, v_2 vetores tangentes à $M^n(c)$, em um ponto dado. Este produto vem a propriedade de ser simétrico.

Estenderemos a derivada covariante D , aos campos complexificados, por

$$D(u + iv) = Du + iDv$$

para u e v campos tangentes à $M^n(c)$. Desta maneira, D preserva o produto simétrico $(\ , \)$, definido acima. Temos então,

$$(a) (E_1, \bar{E}_1) = (E_2, \bar{E}_2) = 2;$$

$$(b) (E_1, E_1) = (E_1, E_2) = (E_2, E_2) = (E_1, \bar{E}_2) = 0.$$

Pelo fato de D preservar o produto $(\ , \)$ decorre, juntamente com (a) e (b) acima que,

$$(c) (DE_1, E_1) = (DE_1, E_2) = (DE_2, E_2) = (DE_2, E_1) = 0;$$

$$(d) (DE_2, \bar{E}_1) = -(D\bar{E}_1, E_2).$$

2.2.18 — Seja (e_A, w_A, w_{AB}) o referencial local $e_1 = \tilde{e}_1, e_2 = \tilde{e}_2, e_3$ e e_4 dados em (30) de (2.2.16) e $e_\mu = \tilde{e}_\mu, \mu \geq 5$.

Dáí obtemos,

$$DE_2 = \alpha_1 E_1 + \beta_1 \bar{E}_1 + \alpha_2 E_2 + \beta_2 \bar{E}_2 + \sum_{\mu \geq 5} \alpha_\mu e_\mu$$

Então,

$$(ii) \quad \begin{aligned} \beta_1 = \beta_2 = 0, \text{ pois } (DE_2, E_1) &= (DE_2, E_2) = 0; \\ 2\alpha_1 &= (DE_2, \bar{E}_1) = -(D\bar{E}_1, E_2) = -2k_1\varphi, \end{aligned}$$

por (32) de (2.2.16);

$$(iii) \quad 2\alpha_2 = -2iw_{34},$$

por (4) de (2.1.1). Assim,

$$DE_2 = -k_1\varphi E_1 - iw_{34}E_2 + \sum_{\mu \geq 5} \alpha_\mu e_\mu$$

Para determinarmos os coeficientes de e_μ , recorremos a (31) de (2.2.16)

$$\begin{aligned} \alpha_\mu &= (DE_2, e_\mu) = \frac{1}{k_1} \sum_{\alpha=3}^4 \tilde{H}_\alpha^{(2)}(D\tilde{e}_\alpha, e_\mu) = \\ &= \frac{1}{k_1} \sum_{\alpha=3}^4 \tilde{H}_\alpha^{(2)} \tilde{w}_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

Mas, por (15) de (1.4.11) temos a seguinte relação,

$$\sum_{\alpha=3}^4 \tilde{h}_{\alpha i j} \tilde{w}_{\alpha\mu} = \sum_{k=1}^2 h_{\mu i j k} w_k$$

Ou seja,

$$\sum_{\alpha=3}^4 \tilde{H}_\alpha^{(2)} \tilde{w}_{\alpha\mu} = \bar{\varphi} H_\mu^{(3)}.$$

Chegamos portanto, à

$$(34) \quad DE_2 = -k_1 \varphi E_1 - i w_{34} E_2 + \frac{1}{k_1} \bar{\varphi} \sum_{\mu \geq 5} H_\mu^{(3)} e_\mu$$

Observemos que (34) está definido em uma vizinhança de cada ponto de S^2 sendo que, no caso desta ser do 2º tipo, estará definido na vizinhança, menos em $z = 0$.

2.2.19 — Para continuarmos a construção do referencial local adaptado aos espaços osculadores, repetimos a técnica utilizada para obter E_2 , isto é, diferenciamos exteriormente DE_1 e DE_2 . Observemos ainda que chegamos a uma situação análoga à de (2.2.3). Mas neste ponto há uma diferença importante pois, enquanto (15) de (2.2.3) está definida em todo ponto de S^2 , (34) de (2.2.18) pode não estar definida em um conjunto de pontos isolados.

Para que tivéssemos

$$\sum_a \left(\overline{H_a^{(2)}} \right)^2 = 0$$

fora essencial que a forma Φ_2 estivesse definida globalmente.

Para termos uma situação análoga a de (2.2.5), isto é,

$$\sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_\mu^{(3)}} \right)^2 = 0$$

nos pontos regulares, devemos poder estendê-la continuamente aos pontos nos quais $k_1 = 0$.

2.2.20 — Diferenciando exteriormente DE_1 e comparando com (13) de (2.2.2), teremos :

$$\begin{aligned} -\frac{c}{2} \varphi \wedge \bar{\varphi} E_1 = & -i d w_{12} E_1 + i w_{12} \wedge (-i w_{12} E_1 + k_1 \bar{\varphi} E_2) + \\ & + d k_1 \wedge \bar{\varphi} E_2 + i k_1 w_{12} \wedge \bar{\varphi} E_2 - \\ & - k_1 \bar{\varphi} \wedge \left(-k_1 \varphi E_1 - i w_{34} E_2 + \frac{1}{k_1} \bar{\varphi} \sum_{\mu \geq 5} H_\mu^{(3)} e_\mu \right). \end{aligned}$$

Tomamos os termos em E_1 e usamos (10) de (2.1.2) para obter,

$$(35) \quad k_1^2 = \frac{1}{2}(c - K)$$

Desta maneira, concluímos que $K \leq c$ em todo ponto de S^2 .
Os termos em E_2 , resultam na relação

$$(36) \quad [d \log k_1 + i(2w_{12} - w_{34})] \wedge \bar{\varphi} = 0$$

2.2.21 — Se diferenciarmos exteriormente, DE_2 , obtemos o seguinte :

$$\begin{aligned} 0 = & -dk_1 \wedge \varphi E_1 - k_1 d\varphi E_1 + k_1 \varphi \wedge (-iw_{12}E_1 + k_1 \bar{\varphi} E_2) \\ & - idw_{34}E_2 + iw_{34} \wedge \left(-k_1 \varphi E_1 - iw_{34}E_2 + \frac{1}{k_1} \bar{\varphi} \sum_{\mu \geq 5} H_\mu^{(3)} e_\mu \right) \\ & + d\left(\frac{1}{k_1}\right) \wedge \bar{\varphi} \sum_{\mu \geq 5} H_\mu^{(3)} e_\mu + \frac{1}{k_1} d\bar{\varphi} \sum_{\mu \geq 5} H_\mu^{(3)} e_\mu \\ & - \frac{1}{k_1} \bar{\varphi} \wedge \sum_{\mu \geq 5} (dH_\mu^{(3)} e_\mu + H_\mu^{(3)} D e_\mu) \end{aligned}$$

Tomamos os termos em e_μ , para cada $\mu \geq 5$.

$$\frac{1}{k_1} \left[dH_\mu^{(3)} + iw_{34}H_\mu^{(3)} - \frac{dk_1}{k_1} H_\mu^{(3)} + iw_{12}H_\mu^{(3)} + \sum_{\nu \geq 5} H_\nu^{(3)} w_{\nu\mu} \right] \wedge \bar{\varphi} = 0$$

Usando (36) de (2.2.20) chegaremos à,

$$\left(dH_\mu^{(3)} + 3iw_{12}H_\mu^{(3)} + \sum_{\nu \geq 5} H_\nu^{(3)} w_{\nu\mu} \right) \wedge \bar{\varphi} = 0$$

Ou,

$$(37) \quad \left(\overline{dH_\mu^{(3)}} - 3iw_{12}\overline{H_\mu^{(3)}} + \sum_{\nu \geq 5} \overline{H_\nu^{(3)}} w_{\nu\mu} \right) \wedge \varphi = 0$$

Multiplicamos (36) por $2\lambda^6 \overline{H_\mu^{(3)}}$, substituímos (12) de (2.1.3) e somamos em μ . Assim,

$$\left[\lambda^6 d \left(\sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_\mu^{(3)}} \right)^2 \right) + 6\lambda^5 d\lambda \sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_\mu^{(3)}} \right)^2 \right] \wedge \varphi = 0$$

ou seja,

$$(38) \quad d \left[\lambda^6 \sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_\mu^{(3)}} \right)^2 \right] \wedge \varphi = 0$$

2.2.22 — Consideremos e_1^*, e_2^* referenciais locais tangentes à S^2 , como em (2.2.4) e $\{w_{AB}^*\}$ as formas de conexão associadas ao referencial de (2.2.18) quando substituímos $\{e_1, e_2\}$ por $\{e_1^*, e_2^*\}$.

Para $A > 2$, $e_A^* = e_A$. Além disso,

$$De_A = \sum_B w_{AB} e_B = w_{A1} e_1 + w_{A2} e_2 + \sum_{B>2} w_{AB} e_B$$

$$De_A^* = \sum_B w_{AB}^* e_B^* = w_{A1}^* e_1^* + w_{A2}^* e_2^* + \sum_{B>2} w_{AB}^* e_B^*$$

Mas, $De_A^* = De_A$, segue que, para $A, B > 2$,

$$(39) \quad w_{AB}^* = w_{AB}$$

2.2.23 — Para cada $\mu \geq 5$, temos por (15) de (1.4.11) que

$$\sum_{\alpha} H_{\alpha}^{(2)} w_{\alpha\mu} = H_{\mu}^{(3)} \bar{\varphi}$$

$$\sum_{\alpha} H_{\alpha}^{*(2)} w_{\alpha\mu}^* = H_{\mu}^{*(3)} \bar{\varphi}^*$$

onde $\{h_{\mu ijk}^*\}$ são os coeficientes de B^2 , relativamente ao referencial $\{e_A\}$ quando substituímos $\{e_1, e_2\}$ por $\{e_1^*, e_2^*\}$ e

$$H_{\mu}^{*(3)} = h_{\mu 111}^* + i h_{\mu 112}^*$$

Por (21) de (2.2.4) e (40) de (2.2.22) obtemos

$$\sum_{\alpha} H_{\alpha}^{*(2)} w_{\alpha\mu}^* = e^{2ir} \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{(2)} w_{\alpha\mu}$$

ou seja,

$$(41) \quad H_{\mu}^{*(3)} = e^{i3r} H_{\mu}^{(3)}$$

para todo $\mu \geq 5$.

2.2.24 — Definimos a forma Φ_3 sobre S^2 , localmente, por

$$\Phi_3(z) = \sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_{\mu}^{(3)}} \right)^2 \varphi^6$$

se a vizinhança considerada for do 1º tipo ou, por

$$\Phi_3(z) = \begin{cases} \sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_{\mu}^{(3)}} \right)^2 \varphi^6, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

se a vizinhança for do 2^o tipo.

Observemos que por (41) de (2.2.23), temos que Φ_3 não depende do referencial tomado na orientação fixada.

Além disso, Φ_3 não depende também do referencial $\{e_\mu\}$, $\mu \geq 5$, pois

$$\sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_\mu^{(3)}} \right)^2 =$$

$$= \|B^2(e_1, e_1, e_1)\|^2 - \|B^2(e_1, e_1, e_2)\|^2 - 2i \langle B^2(e_1, e_1, e_1), B^2(e_1, e_1, e_2) \rangle.$$

Desta maneira temos que a forma Φ_3 está, de fato, definida globalmente. Sendo $\varphi = \lambda dz$, teremos

$$\Phi_3(z) = \left[\lambda^6 \sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_\mu^{(3)}} \right)^2 \right] dz^6$$

nos pontos regulares de ordem maior ou igual a 2.

Nestes pontos, (38) de (2.2.21) nos diz que

$$g(z) = \lambda^6 \sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_\mu^{(3)}} \right)^2$$

deve ser uma função holomorfa. Mas, por (29) de (2.2.15), Φ_3 , mesmo quando a vizinhança for do 2^o tipo, é contínua em $z = 0$. Isto significa que $g(z)$ fica sendo holomorfa em $z = 0$. Temos, portanto Φ_3 como uma forma abeliana sobre S^2 . Logo,

$$\sum_{\mu \geq 5} \left(\overline{H_\mu^{(3)}} \right)^2 = 0.$$

Desse modo chegamos à situação semelhante a de (2.2.6) e podemos repetir todo argumento utilizado para obter um referencial local adaptado aos espaços osculadores até ordem 3, menos possivelmente em um conjunto de pontos isolados de S^2 .

Seguindo este tipo de argumento, poderemos mais geralmente, obter um referencial adaptado aos osculadores até ordem s , em uma vizinhança de um ponto regular de ordem $(s-1)$.

2.2.25 — Seja $p \in S^2$ um ponto regular de ordem $(s+1)$ e um referencial local adaptado aos espaços osculadores até ordem $(s+1)$, (e_A, w_A, w_{AB}) , em uma vizinhança aberta de p . Suponhamos que os coeficientes de B^s relativamente a $\{e_A\}$ sejam $\{h_{\lambda, i_1 \dots i_{s+1}}\}$. Definimos,

$$H_{\lambda_s}^{(s+1)} = h_{\lambda_s, 11 \dots 1} + i h_{\lambda_s, 1 \dots 12}$$

2.2.26 — LEMA. Seja (e_A^*, w_A^*, w_{AB}^*) um outro referencial sobre S^2 no qual e_1^*, e_2^* sejam dados como em (2.2.4) e $e_\alpha^* = e_\alpha$, para todo $\alpha > 2$.

Se $\{h_{\lambda, i_1 \dots i_{s+1}}^*\}$ são os coeficientes de B^s relativamente ao referencial $\{e_A^*\}$ e $H_{\lambda_s}^{*(s+1)} = h_{\lambda_s, 11 \dots 1}^* + i h_{\lambda_s, 1 \dots 12}^*$, então,

$$H_{\lambda_s}^{*(s+1)} = e^{i(s+1)\tau} H_{\lambda_s}^{(s+1)}.$$

Prova : Seja $\varphi^* = w_1^* + i w_2^* = e^{i\tau} \varphi$. Demonstraremos (42) por indução sobre $s \geq 2$.

Para $s = 2$, o resultado segue por (20) de (2.2.4). Suponhamos então que para $s - 1 \geq 2$,

$$H_{\lambda_{s-1}}^{*(s)} = e^{is\tau} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}$$

Por (15) de (1.4.11) temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_{s-1}} H_{\lambda_{s-1}}^{*(s)} w_{\lambda_{s-1} \lambda_s}^* &= H_{\lambda_s}^{*(s+1)} \overline{\varphi^*} \\ \sum_{\lambda_{s-1}} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} w_{\lambda_{s-1} \lambda_s} &= H_{\lambda_s}^{(s+1)} \overline{\varphi}. \end{aligned}$$

O fato de $\varphi^* = e^{i\tau} \varphi$ e $w_{\lambda_{s-1} \lambda_s}^* = w_{\lambda_{s-1} \lambda_s}$, juntamente com a hipótese de indução, resulta em

$$H_{\lambda_s}^{*(s+1)} e^{-i\tau} \overline{\varphi} = e^{is\tau} H_{\lambda_s}^{(s+1)} \overline{\varphi}.$$

Ou seja,

$$H_{\lambda_s}^{*(s+1)} = e^{i(s+1)\tau} H_{\lambda_s}^{(s+1)}$$

e, isto demonstra o resultado.

2.2.27 — PROPOSIÇÃO. Seja $x : S^2 \rightarrow M^n(c)$, uma imersão mínima e $1 \leq s \leq n/2$, inteiro. Então,

(1) $r_{s-1} = 0$ em S^2 ,
ou,

(2) Para cada $p \in S^2$, existe uma vizinhança V_p de p e um referencial (e_A, w_A, w_{AB}) adaptado aos espaços osculadores até ordem s e satisfazendo :

- (a) $r_{s-1}(q) \neq 0$, para todo $q \in V_p \setminus \{p\}$;
- (b) $DE_j = -k_{j-1} \varphi E_{j-1} - i w_{2j-1, 2j} E_j + k_j \overline{\varphi} E_{j+1}$

para $1 \leq j \leq s-1$ e,

$$DE_s = -k_{s-1} \varphi E_{s-1} - i w_{2s-1, 2s} E_s + \frac{1}{r_{s-1}} \overline{\varphi} \sum_{\lambda_s \geq 2s+1} H_{\lambda_s}^{(s+1)} e_{\lambda_s};$$

definidos em V_p se $r_{s-1}(p) \neq 0$ ou, em $V_p \setminus \{p\}$ se $r_{s-1}(p) = 0$.
Além disso, nos pontos onde r_{s-1} são não nulos, teremos

$$dw_{12} + i \left(\frac{c}{2} - k_1^2 \right) \varphi \wedge \bar{\varphi} = 0$$

e

$$dw_{2s-3, 2s-2} + i (k_{s-2}^2 - k_{s-1}^2) \varphi \wedge \bar{\varphi} = 0, \text{ para } s \geq 3.$$

Onde,

$$(i) \varphi = w_1 + iw_2;$$

(ii) $E_j = e_{2j-1} + ie_{2j}$, para $1 \leq j \leq s$ e $\{e_{\lambda_s}\}$ um referencial qualquer normal em $M^n(c)$ ao s -ésimo espaço osculador;

$$(iii) r_0 = 1, k_0 = 0 \text{ e,}$$

$$k_j = \frac{r_j}{r_{j-1}}$$

para $1 \leq j \leq s-1$;

(iv) $\{h_{\lambda, i_1 \dots i_{s+1}}\}$ são os coeficientes de B^s relativamente ao referencial $\{e_A\}$.

Prova : Será feita por indução sobre $s \geq 1$, supondo ainda que, se não ocorrer (1) na hipótese, tenhamos:

(c) se $r_{s-1}(p) = 0$ e p for dado em coordenadas locais por $z = 0$ então, existe um campo cujas parte real e imaginária sejam reais analíticas, portanto diferenciáveis, $\hat{E}_s$ em uma vizinhança de $z = 0$ e uma função $\mu_s, |\mu_s| = 1$, definidos em V_p , tal que

$$\hat{E}_s = \mu_s E_s$$

para $z \neq 0$. Além disso,

$$\lim_{z \rightarrow 0} r_{s-1}(p) = 0$$

(d) temos em V_p se $r_{s-1}(p) \neq 0$ ou, em $V_p \setminus \{p\}$ se $r_{s-1}(p) = 0$, a seguinte relação,

$$[d \log r_{s-1} + i (s w_{12} - w_{2s-1, 2s})] \wedge \bar{\varphi} = 0.$$

Para $s = 1$, temos o seguinte :

$$(a) r_0 \neq 0 \text{ em } S^2;$$

(b) por (15) de (2.2.3)

$$DE_1 = -iw_{12}E_1 + \bar{\varphi} \sum_{\lambda_1 \geq 3} H_{\lambda_1}^{(2)} e_{\lambda_1};$$

(c) não ocorre para $s = 1$;

(d) $d \log r_0 + i(w_{12} - w_{12}) = 0$.

Isto é, todas as hipóteses estão satisfeitas. Suponhamos então que as hipóteses estejam satisfeitas para $s - 1 \geq 1$.

Se $r_{s-1} = 0$ em S^2 nada há para demonstrar. Suponhamos então $r_{s-1} \neq 0$ em S^2 . Neste caso $r_{s-2} \neq 0$, o que pela hipótese de indução, implica em que para cada $p \in S^2$ existe um referencial (e_A, w_A, w_{AB}) adaptado aos espaços osculadores até ordem $s - 1$ definido em uma vizinhança de V_p se $r_{s-1}(p) \neq 0$ ou em $V_p \setminus \{p\}$ se $r_{s-1}(p) = 0$, satisfazendo

$$DE_j = -k_{j-1}\varphi E_{j-1} - iw_{2j-1,2j}E_j + k_j\bar{\varphi}E_{j+1}$$

para $1 \leq j \leq s - 2$ e,

$$DE_{s-1} = -k_{s-2}\varphi E_{s-2} - iw_{2s-3,2s-2}E_{s-1} + \frac{1}{r_{s-2}}\bar{\varphi} \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} e_{\lambda_{s-1}}.$$

Diferenciamos exteriormente DE_{s-1} , para obtermos o seguinte:

$$\begin{aligned} dDE_{s-1} &= -d(k_{s-2}\varphi)E_{s-2} - k_{s-2}\varphi \wedge DE_{s-2} - idw_{2s-3,2s-2}E_{s-1} \\ &+ iw_{2s-3,2s-2} \wedge DE_{s-1} + d\left(\frac{1}{r_{s-2}}\right) \wedge \bar{\varphi} \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} e_{\lambda_{s-1}} \\ &+ \frac{1}{r_{s-2}}d\bar{\varphi} \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} e_{\lambda_{s-1}} - \frac{1}{r_{s-2}}\bar{\varphi} \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} \left(dH_{\lambda_{s-1}}^{(s)} e_{\lambda_{s-1}} + H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} De_{\lambda_{s-1}}\right). \end{aligned}$$

Tomamos os termos em $e_{\lambda_{s-1}}$ e obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{s-2}} \left[iw_{2s-3,2s-2} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} - d \log r_{s-2} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} + iw_{12} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} + \right. \\ \left. + dH_{\lambda_{s-1}}^{(s)} + \sum_{\nu_{s-1} \geq 2s-1} H_{\nu_{s-1}}^{(s)} w_{\nu_{s-1}\lambda_{s-1}} \right] \wedge \bar{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Usando a hipótese (2)-(d)

$$[d \log r_{s-2} + i((s-1)w_{12} - w_{2s-3,2s-2})] \wedge \bar{\varphi} = 0$$

chegaremos à expressão,

$$\left[dH_{\lambda_{s-1}}^{(s)} + isw_{12}H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} + \sum_{\nu_{s-1} \geq 2s-1} H_{\nu_{s-1}}^{(s)} w_{\nu_{s-1}\lambda_{s-1}} \right] \wedge \bar{\varphi} = 0$$

ou

$$(43) \quad \left[\overline{dH_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} - isw_{12}\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} + \sum_{\nu_{s-1} \geq 2s-1} \overline{H_{\nu_{s-1}}^{(s)}} w_{\nu_{s-1}\lambda_{s-1}} \right] \wedge \varphi = 0$$

Multiplicamos (43) por $2\lambda^{2s}\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}}$, substituímos (12) de (2.1.3) e somamos em $\lambda_{s-1} \geq 2s-1$, para obter,

$$\left[\lambda^{2s} d \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} \left(\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} \right)^2 + 2s\lambda^{2s-1} d\lambda \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} \left(\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} \right)^2 \right] \wedge \varphi = 0$$

isto é,

$$(44) \quad d \left[\lambda^{2s} \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} \left(\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} \right)^2 \right] \wedge \varphi = 0$$

Definimos a forma Φ_s , localmente, por

$$\Phi_s = \begin{cases} \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} \left(\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} \right)^2 \varphi^{2s}, & \text{se } r_{s-2}(p) \neq 0 \\ 0, & \text{se } r_{s-1}(p) = 0 \end{cases}$$

Pelo lema (2.2.26) segue que a forma Φ_s não depende da escolha do referencial, na orientação fixada, tangente à S^2 .

Além disso, Φ_s não depende do particular referencial normal, em $M^n(c)$, ao $(s-1)$ -ésimo espaço osculador, pois,

$$\sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} \left(\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \|B^{s-1}(e_1, e_1, \dots, e_1)\|^2 - \|B^{s-1}(e_1, \dots, e_1, e_2)\|^2 \\ &\quad - 2i\langle B^{s-1}(e_1, e_1, \dots, e_1), B^{s-1}(e_1, \dots, e_1, e_2) \rangle \end{aligned}$$

Isto mostra que a forma Φ_s está definida globalmente sobre S^2 .

A função, definida em V_p por

$$h(z) = \begin{cases} \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} \left(\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} \right)^2, & \text{se } r_{s-2} \neq 0 \\ 0, & \text{se } r_{s-2} = 0 \end{cases}$$

fica sendo holomorfa por (44), nos pontos onde $r_{s-2} \neq 0$. Assim, para termos Φ_s abeliana em S^2 basta-nos mostrar que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} = 0$$

se $z = 0$ for coordenada local de $p \in S^2$, tal que $r_{s-2}(p) = 0$.

Usando a hipótese (2)-(c), sejam

$$\hat{e}_{2s-3} = \frac{\hat{E}_{s-1} + \overline{\hat{E}_{s-1}}}{2} \quad \text{e} \quad \hat{e}_{2s-2} = \frac{\hat{E}_{s-1} - \overline{\hat{E}_{s-1}}}{2i}$$

e, $(\hat{e}_A, \hat{w}_A, \hat{w}_{AB})$ tal que $\hat{e}_A = e_A$ para $A \neq 2s-3$ e $A \neq 2s-2$.

Se, $\{\hat{h}_{\lambda_{s-2}i_1 \dots i_{s-1}}\}$ são os coeficientes de B^{s-2} relativamente à $\{\hat{e}_A\}$, e

$$\hat{H}_{\lambda_{s-2}}^{(s-1)} = \hat{h}_{\lambda_{s-2}11 \dots 1} + i\hat{h}_{\lambda_{s-2}1 \dots 12}$$

Teremos para $z \neq 0$, em uma vizinhança de $z = 0$, por (15) de (1.4.11)

$$\sum_{\lambda_{s-2}=2s-3}^{2s-2} \hat{H}_{\lambda_{s-2}}^{(s-1)} \hat{w}_{\lambda_{s-2}\lambda_{s-1}} = H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} \bar{\varphi}.$$

Agora, $\{\hat{w}_{\lambda_{s-2}\lambda_{s-1}}\}$ são contínuas em $z = 0$, o que implica em

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sum_{\lambda_{s-2}}^{2s-2} \hat{H}_{\lambda_{s-2}}^{(s-1)} = 0$$

e, portanto,

$$(45) \quad \lim_{z \rightarrow 0} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} = 0$$

Desta maneira, temos Φ_s abeliana em S^2 , ou seja

$$(46) \quad \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} \left(\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} \right)^2 = 0$$

A relação (46) é equivalente à

$$(47) \quad \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} h_{\lambda_{s-1}11\dots 1}^2 = \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} h_{\lambda_{s-1}1\dots 12}^2 \text{ e}$$

$$\sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} h_{\lambda_{s-1}11\dots 1} h_{\lambda_{s-1}1\dots 12} = 0.$$

Isto significa que, $r_{s-1}(p)$ está definida globalmente, com

$$\lim_{q \rightarrow p} r_{s-1}(p) = 0.$$

Mais ainda, a existência do referencial $\{\hat{e}_{2s-3}, \hat{e}_{2s-2}\}$, satisfazendo a condição (c), em $z = 0$, quando $z = 0$ for coordenada de $p \in S^2$ e $r_{s-2}(p) = 0$, determina que a função r_{s-1}^2 fica sendo real analítica, em todo S^2 . Logo, podemos supor os coeficientes de B^{s-1} funções reais analíticas que não são todas nulas nesta vizinhança.

De (43) segue que o conjunto $\{\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}}\}$ resolve um sistema de equações diferenciais elíptico do tipo

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} = \sum_{\nu_{s-1} \geq 2s-1} a_{\nu_{s-1} \lambda_{s-1}} \overline{H_{\nu_{s-1}}^{(s)}}$$

Desta maneira, pelo lema (2.4.1) do apêndice deste capítulo, segue que :

(i) os zeros comuns a $\{\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}}\}$ são isolados, ou, equivalentemente, os zeros de r_{s-1} são isolados;

(ii) existe $r \geq 1$, inteiro, e o limite

$$(48) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}}}{z^r}$$

para cada $\lambda_{s-1} \geq 2s-1$. Além disso, para algum $\lambda_{s-1} \geq 2s-1$ o limite em (48) não nulo.

Seja então, $U_p \subset V_p$ vizinhança de p na qual $r_{s-1}(q) \neq 0$, para todo $q \in U_p \setminus \{p\}$. As funções,

$$\Xi_{\lambda_{s-1}}^{(s)} = \begin{cases} \frac{\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}}}{z^r}, & \text{em } U_p \setminus \{p\} \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overline{H_{\lambda_{s-1}}^{(s)}}}{z^r}, & \text{em } x(0) = p \end{cases}$$

são tais que as partes, real e imaginária, sejam funções reais analíticas, pelo lema (2.4.2) do apêndice deste capítulo.

Mas, teremos em todo ponto de U_p ,

$$\sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} B_{\lambda_{s-1}}^{(s)} \overline{B_{\lambda_{s-1}}^{(s)}} \neq 0$$

pois, algum dos limites de (48) é não nulo. Assim, o campo

$$\hat{E}_s = \frac{\sqrt{2} \sum_{\lambda_{s-1}} B_{\lambda_{s-1}}^{(s)} e_{\lambda_{s-1}}}{\sqrt{\sum_{\lambda_{s-1}} B_{\lambda_{s-1}}^{(s)} \overline{B_{\lambda_{s-1}}^{(s)}}}}$$

possui partes, real e imaginária, como funções reais analíticas. Além disso,

$$(49) \quad \hat{E}_s = \frac{|z|^r}{z^r} \tilde{E}_s$$

em $U_p \setminus \{p\}$, onde

$$(50) \quad \tilde{E}_s = \frac{1}{r_{s-1}} \sum_{\lambda_{s-1} \geq 2s-1} H_{\lambda_{s-1}}^{(s)} e_{\lambda_{s-1}}$$

Para cada $p \in S^2$ temos, portanto, uma vizinhança U_p de p , tal que $r_{s-1}(q) \neq 0$ para todo $q \in U_p \setminus \{p\}$. Consideremos então, o campo $\tilde{E}_s$ dado em (50) e os campos reais

$$\tilde{e}_{2s-1} = \frac{\tilde{E}_s + \overline{\tilde{E}_s}}{2}, \quad \tilde{e}_{2s} = \frac{\tilde{E}_s - \overline{\tilde{E}_s}}{2i}$$

definidos em U_p se, $r_{s-1}(p) \neq 0$, ou em $U_p \setminus \{p\}$ se, $r_{s-1}(p) = 0$.

Sejam $\{\tilde{h}_{\lambda_{s-1} i_1 \dots i_s}\}$ os coeficientes de B^{s-1} relativamente ao referencial $(\tilde{e}_A, \tilde{w}_A, \tilde{w}_{AB})$ onde, $\tilde{e}_A = e_A$, para cada $1 \leq A \leq 2s-2$.

Se $\{h_{\lambda_{s-1} i_1 \dots i_{s+1}}\}$ são os coeficientes de B^s relativamente a este mesmo referencial local, teremos :

$$DE_{s-1} = -k_{s-2} \varphi E_{s-2} - i w_{2s-3, 2s-2} E_{s-1} + \frac{1}{r_{s-2}} \overline{\varphi} \sum_{\lambda_{s-1}=2s-1}^{2s} \tilde{H}_{\lambda_{s-1}}^{(s)} \tilde{e}_{\lambda_{s-1}}$$

da hipótese de indução.

Definimos um "novo" referencial (e_A, w_A, w_{AB}) por, $e_A = \tilde{e}_A$ para $A \neq 2s-1$ ou $A \neq 2s-2$ e,

$$(51) \quad e_{2s-1} = \frac{1}{r_{s-1}} \sum_{\lambda_{s-1}=2s-1}^{2s-2} \tilde{h}_{\lambda_{s-1} 11 \dots 1} \tilde{e}_{\lambda_{s-1}}$$

$$e_{2s} = \frac{1}{r_{s-1}} \sum_{\lambda_{s-1}=2s-1}^{2s-2} \tilde{h}_{\lambda_{s-1} 1 \dots 12} \tilde{e}_{\lambda_{s-1}}$$

Consideremos agora, o campo complexificado,

$$(52) \quad E_s = e_{2s-1} + ie_{2s}$$

Por (49) e (50) segue que, existe uma função $\mu_s, |\mu_s| = 1$, definida em $U_p \setminus \{p\}$ se $r_{s-1}(p) = 0$, satisfazendo

$$\hat{E}_s = \mu_s E_s$$

Desta maneira, temos

$$DE_{s-1} = -k_{s-2}\varphi E_{s-2} - iw_{2s-3,2s-2}E_{s-1} + k_{s-1}\bar{\varphi}E_s$$

e, as hipóteses (2)-(a), (2)-(c) e parte de (2)-(d) estão satisfeitas para "s". Como as hipóteses (2)-(b) estão satisfeitas para $1 \leq j \leq s-1$, segue que,

$$(DE_s, \bar{E}_j) = 0$$

para $1 \leq j \leq s-2$,

$$(DE_s, E_j) = 0$$

para $1 \leq j \leq s$ e,

$$(DE_s, \bar{E}_{s-1}) = -(D\bar{E}_{s-1}, E_s) = -2k_{s-1}\varphi.$$

Isto é,

$$DE_s = -k_{s-1}\varphi E_{s-1} - iw_{2s-1,2s}E_s + \sum_{\lambda, \geq 2s+1} \alpha_\lambda e_\lambda.$$

Por outro lado,

$$DE_s = D \left(\frac{1}{r_{s-1}} \sum_{\lambda_{s-1}=2s-1}^{2s} \tilde{H}_{\lambda_{s-1}}^{(s)} \tilde{e}_{\lambda_{s-1}} \right)$$

e, portanto,

$$(DE_s, e_{\lambda_s}) = \frac{1}{r_{s-1}} \sum_{\lambda_{s-1}=2s-1}^{2s} \tilde{H}_{\lambda_{s-1}}^{(2)} \tilde{w}_{\lambda_{s-1}\lambda_s}$$

Mas,

$$\sum_{\lambda_{s-1}=2s-1}^{2s} \tilde{H}_{\lambda_{s-1}}^{(2)} \tilde{w}_{\lambda_{s-1}\lambda_s} = \bar{\varphi} H_{\lambda_s}^{(s+1)}$$

donde segue que,

$$\alpha_{\lambda_s} = (DE_s, e_{\lambda_s}) = \frac{1}{r_{s-1}} \bar{\varphi} H_{\lambda_s}^{(s+1)}$$

ou seja,

$$DE_s = -k_{s-1}\varphi E_{s-1} - iw_{2s-1,2s}E_s + \frac{1}{r_{s-1}}\bar{\varphi} \sum_{\lambda_s \geq 2s+1} H_{\lambda_s}^{(s+1)} e_{\lambda_s}.$$

Para termos a parte (2)-(d) demonstrada, diferenciemos exteriormente, DE_{s-1} e tomamos o termo em E_s , para obter,

$$dk_{s-1} \wedge \bar{\varphi} + ik_{s-1}w_{12} \wedge \bar{\varphi} + ik_{s-1}w_{2s-3,2s-2} \wedge \bar{\varphi} - ik_{s-1}w_{2s-1,2s} \wedge \bar{\varphi} = 0$$

ou,

$$[d \log k_{s-1} + i(w_{12} + w_{2s-3,2s-2} - w_{2s-1,2s})] \wedge \bar{\varphi} = 0.$$

Usando a hipótese

$$[d \log r_{s-2} + i(-w_{2s-3,2s-2} + (s-1)w_{12})] \wedge \bar{\varphi} = 0$$

teremos que,

$$[d(\log k_{s-1}r_{s-2}) + i(sw_{12} - w_{2s-1,2s})] \wedge \bar{\varphi} = 0$$

ou seja,

$$[d \log r_{s-1} + i(sw_{12} - w_{2s-1,2s})] \wedge \bar{\varphi} = 0.$$

Além disso, se tomarmos, para $s-1 \geq 2$, o termo em E_{s-1} , obtemos a expressão

$$-idw_{2s-3,2s-2} + k_{s-2}^2\varphi \wedge \bar{\varphi} - k_{s-1}^2\varphi \wedge \bar{\varphi} = 0$$

isto é,

$$dw_{2s-3,2s-2} + i(k_{s-2}^2 - k_{s-1}^2)\varphi \wedge \bar{\varphi} = 0.$$

Para $s=2$, temos

$$dw_{12} + i\left(\frac{c}{2} - k_1^2\right)\varphi \wedge \bar{\varphi} = 0$$

Temos portanto, demonstrado a proposição, para todo $1 \leq j \leq n/2$.

Seguindo as notações da proposição temos o seguinte resultado :

2.2.28 — TEOREMA. Seja $x: S^2 \rightarrow M^n(c)$, uma imersão mínima e $m \geq 1$, inteiro, tal que, $m-1 = \max\{s: k_s \neq 0 \text{ em } S^2\}$. Então, existe para cada $p \in S^2$ uma vizinhança V_p e um referencial local (e_A, w_A, w_{AB}) , satisfazendo,

$$(53) \quad DE_s = -k_{s-1}\varphi E_{s-1} - iw_{2s-1,2s}E_s + k_s\bar{\varphi}E_{s+1}$$

para todo $1 \leq s \leq m-1$. Onde, $k_m = k_0 = 0$, e o referencial acima está definido em V_p se $k_{m-1}(p) \neq 0$ ou, em $V_p \setminus \{p\}$ se $k_{m-1}(p) = 0$.

Prova : Aplicamos a proposição (2.2.27) para o caso $s=m$ e, neste caso, devemos ter

$$H_{\lambda_m}^{(m+1)} = 0 \text{ em } S^2.$$

2.2.29 — A condição (2)-(c) na prova da proposição (2.2.27), além de dizer que existem os planos limites dos planos normais osculadores, nos pontos não regulares, indica também que o referencial $\{e_{\lambda_s}\}$ de que trata a proposição, pode ser tomado de classe C^∞ inclusive nos pontos não regulares. Isto quer dizer que, como já observamos anteriormente, as funções r_s^2 são de classe C^∞ em todo S^2 .

2.2.30 — As equações de (53) do teorema (2.2.28) são as fórmulas de Frenet-Boruvka para a imersão mínima x da esfera S^2 em $M^n(c)$.

Observemos ainda que o fato essencial para obter este referencial foi de que as formas Φ_s fossem identicamente nulas. Na verdade, a existência de um tal referencial implica, reciprocamente, em que as formas Φ_s sejam identicamente nulas.

Poderíamos, portanto, substituir S^2 por uma superfície M na qual tenhamos a condição de que $\Phi_s = 0$, para todo $s \geq 1$, inteiro.

Uma imersão mínima $x : M \rightarrow M^n(c)$, M uma superfície, verificando a condição $\Phi_s = 0$, para todo s , denomina-se **Supermínima**. Bryant em [03], estudou estas imersões em $S^4(1)$.

2.2.31 — Observemos ainda que, as relações

$$(54) \quad \begin{aligned} dw_{12} + i \left(\frac{c}{2} - k_1^2 \right) \varphi \wedge \bar{\varphi} &= 0 \\ dw_{2s-1,2s} + i (k_{s-1}^2 - k_s^2) \varphi \wedge \bar{\varphi} &= 0, \quad 2 \leq s \leq m \\ [d \log r_{s-1} + i (s w_{12} - w_{2s-1,2s})] \wedge \bar{\varphi} &= 0, \quad 1 \leq s \leq m \end{aligned}$$

são as condições de integrabilidade das equações de Frenet-Boruvka.

Estas relações podem ser simplificadas como veremos adiante.

2.2.32 — Definimos o operador d^c por

$$d^c = i (\bar{\partial} - \partial)$$

onde

$$\bar{\partial} - \partial = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} d\bar{z} - \frac{\partial}{\partial z} dz.$$

Se $u(z)$ for uma função a valores reais, de classe C^2 , e $z = x + iy$, coordenada isotérmica local de S^2 , teremos :

$$d^c u = i \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} - \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx.$$

Portanto,

$$dd^c u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy = \lambda^2 (\Delta u) dx \wedge dy$$

Mas,

$$dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \frac{i}{2\lambda^2} \varphi \wedge \bar{\varphi}$$

Logo,

$$(55) \quad dd^c u = \frac{i}{2} (\Delta u) \varphi \wedge \bar{\varphi}$$

Se $u > 0$ em todo ponto, usando (55) obtemos,

$$(56) \quad u^2 \Delta (\log u) + \|\text{gradu}\|^2 = u \Delta u$$

2.2.33 — De (54) de (2.2.31) temos que,

$$[d \log r_{s-1} + i(w_{2s-1,2s} - sw_{12})] \wedge \varphi = 0$$

portanto, se fizermos

$$w_{2s-1,2s} - sw_{12} = A dx + B dy \text{ e } d \log r_{s-1} = C dx + D dy$$

com A, B, C e D reais, obtemos

$$\left[C \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) + D \left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \right) + iA \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) + iB \left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \right) \right] \wedge dz = 0$$

isto é,

$$C = B \text{ e } D = -A$$

Agora,

$$d^c \log r_{s-1} = C dy - D dx$$

o que implica em,

$$d^c \log r_{s-1} = w_{2s-1,2s} - sw_{12}$$

Logo,

$$dd^c \log r_{s-1} = dw_{2s-1,2s} - s dw_{12}$$

para todo $1 \leq s \leq m$. Mas, por (54) de (2.2.31) e (10) de (2.1.3),

$$dw_{2s-1,2s} - s dw_{12} = i \left(-k_{s-1}^2 + k_s^2 + \frac{sK}{2} \right) \varphi \wedge \bar{\varphi}$$

para $2 \leq s \leq m$. Assim,

$$dd^c \log r_{s-1} = i \left(-k_{s-1}^2 + k_s^2 + \frac{sK}{2} \right) \varphi \wedge \bar{\varphi}$$

Usamos (55) de (2.2.32) para concluir que,

$$(57) \quad \frac{1}{2} \Delta \log r_{s-1} = -k_{s-1}^2 + k_s^2 + \frac{sK}{2}$$

para $2 \leq s \leq m$, ou

$$(58) \quad \frac{1}{2} \Delta \log (k_1 k_2 \cdots k_{s-1}) = -k_{s-1}^2 + k_s^2 + \frac{sK}{2}$$

Podemos obter ainda, a seguinte relação :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \log (r_1 r_2 \cdots r_{s-1}) &= \sum_{j=1}^{s-1} \left(-k_j^2 + k_{j+1}^2 + \frac{(j+1)K}{2} \right) = \\ &= -k_1^2 + k_s^2 + \frac{(s+1)sK}{4} - \frac{K}{2} \end{aligned}$$

Usando, $k_1^2 = \frac{1}{2}(c - K)$ chegaremos à expressão

$$(59) \quad \frac{1}{2} \Delta \log (r_1 r_2 \cdots r_{s-1}) = k_s^2 + \frac{(s+1)sK - 2c}{4}$$

nos pontos regulares e para $2 \leq s \leq m$.

Agora, temos

$$\Delta (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})^2 = 2 (r_1 r_2 \cdots r_{s-1}) \Delta (r_1 r_2 \cdots r_{s-1}) + 2 \|\text{grad} (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})\|^2$$

Por (56) de (2.2.32)

$$\begin{aligned} (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})^2 \Delta \log (r_1 r_2 \cdots r_{s-1}) + \|\text{grad} (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})\|^2 &= \\ &= (r_1 r_2 \cdots r_{s-1}) \Delta (r_1 r_2 \cdots r_{s-1}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})^2 &= (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})^2 \Delta \log (r_1 r_2 \cdots r_{s-1}) \\ &\quad + 2 \|\text{grad} (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})\|^2 \end{aligned}$$

e substituímos (59) acima para obter

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \Delta (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})^2 = \\ (60) \quad &= (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})^2 \left(k_s^2 + \frac{(s+1)sK - 2c}{4} \right) + \|\text{grad} (r_1 r_2 \cdots r_{s-1})\|^2 \end{aligned}$$

Mas, do fato de

$$(r_1 r_2 \cdots r_{s-1})^2 k_s^2 = r_1^2 r_2^2 \cdots r_{s-2}^2 r_s^2$$

e por (2.2.29), segue que a expressão em (60) se estende aos pontos não regulares para todo $2 \leq s \leq m$. Vejamos agora algumas consequências destas relações.

2.2.34 — TEOREMA. *Seja $x : S^2 \rightarrow M^n(c)$ uma imersão mínima com curvatura Gaussiana constante K e $m-1 = \max\{s : r_s \neq 0\}$ então,*

$$K = \frac{2c}{m(m+1)}$$

Prova : Sendo K constante, segue que k_1 também é constante. Usando recursivamente, (59) de (2.2.33) chegaremos a que $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ são constantes e não nulos. Assim,

$$\Delta \log(r_1 r_2 \cdots r_{m-1}) = 0$$

em todo ponto. Desta maneira, obtemos

$$0 = (m+1)mK - 2c$$

Isto é,

$$K = \frac{2c}{(m+1)m}$$

2.2.35 — COROLÁRIO. *Seja $x : S^2 \rightarrow M^n(c)$ uma imersão mínima com a norma da 2ª forma fundamental, $\|B^1\|$ constante. Se $m-1 = \max\{s : r_s \neq 0\}$ Então, a curvatura Gaussiana da imersão será constante e igual a*

$$K = \frac{2c}{m(m+1)}$$

Prova : Se $\{h_{\alpha i j}\}$ são os coeficientes de B^1 relativamente a algum referencial ortonormal adaptado, teremos,

$$k_1^2 = \sum_{\alpha} h_{\alpha 11}^2 = \sum_{\alpha} h_{\alpha 12}^2$$

Portanto,

$$\|B^1\|^2 = 4k_1^2$$

e portanto, k_1 será constante e o restante segue do teorema (2.2.34).

2.2.36 — TEOREMA. Seja $x : S^2 \rightarrow M^n(c)$ uma imersão mínima e $m - 1 = \max\{s : r_s \neq 0\} \geq 2$. Suponhamos ainda que,

$$\frac{k_{m-1}}{k_{m-2}}$$

seja constante nos pontos regulares.

Então, a curvatura Gaussiana da imersão será constante.

Prova : Nos pontos regulares, teremos,

$$\frac{1}{2} \Delta \log(k_s) = k_{s-1}^2 - 2k_s^2 + k_{s+1}^2 + \frac{K}{2}$$

por (57) de (2.2.33), para todo $2 \leq s \leq m - 1$. Desta maneira, obtemos

$$(61) \quad \frac{1}{2} \Delta \log \left(\frac{k_s}{k_{s-1}} \right) = -k_{s-2}^2 + 3k_{s-1}^2 - 3k_s^2 + k_{s+1}^2$$

para todo $3 \leq s \leq m - 1$. Usando a expressão em (61) para $s = m - 1$, e a hipótese de que k_{m-1}/k_{m-2} deve ser constante, obtemos

$$0 = \frac{1}{2} \Delta \log \left(\frac{k_{m-1}}{k_{m-2}} \right) = -k_{m-3}^2 - 3k_{m-2}^2 + 3k_{m-1}^2$$

Dáí concluímos que são constantes

$$\frac{k_{m-1}}{k_{m-3}} \text{ e } \frac{k_{m-2}}{k_{m-3}} \text{ se } m > 3$$

Suponhamos agora que tenhamos, para $3 < s \leq m - 2$,

$$\frac{k_{s+1}}{k_{s-1}} \text{ e } \frac{k_s}{k_{s-1}}$$

constantes. Obteremos então, por (61) que

$$0 = -k_{s-2}^2 + 3k_{s-1}^2 - 3k_s^2 + k_{s+1}^2$$

ou seja,

$$\frac{k_s}{k_{s-2}} \text{ e } \frac{k_{s-1}}{k_{s-2}}$$

são constantes. Seguindo, recursivamente, chegaremos à conclusão que

$$\frac{k_2}{k_1} \text{ e } \frac{k_3}{k_1}$$

são constantes. Se $m = 3$, temos apenas k_2/k_1 constante. Mas,

$$\frac{1}{2}\Delta \log k_1 = -k_1^2 + k_2^2 + K$$

e

$$\frac{1}{2}\Delta \log k_2 = k_1^2 - 2k_2^2 + k_3^2 + \frac{k}{2}$$

Portanto,

$$0 = \frac{1}{2}\Delta \log \left(\frac{k_2}{k_1} \right) = 2k_1^2 - 3k_2^2 + k_3^2 - \frac{K}{2}$$

para $m > 3$. Assim, temos que é constante, para $m \geq 3$,

$$\frac{K}{k_1^2}$$

De, $k_1^2 = \frac{1}{2}(c - K)$ segue que k_1 será constante, portanto, K também será constante nos pontos regulares, logo, constante em todos os pontos.

A partir deste resultado, pretendemos determinar no capítulo 4 a imersão mínima, $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, não contida em subespaço próprio de R^{2m+1} , de curvatura Gaussiana constante. Isto será feito a partir de sua curva diretriz, que definiremos adiante, em (2.3.3).

2.2.37 — TEOREMA. *Seja $x : S^2 \rightarrow M^n(c)$, uma imersão mínima e $m - 1 = \max\{s : r_s \neq 0\}$. Suponhamos ainda que a curvatura Gaussiana K satisfaça a desigualdade*

$$K \geq \frac{2c}{(m+1)m}$$

para todo ponto de S^2 . Então,

$$K = \frac{2c}{(m+1)m}$$

Prova : Usando (60) de (2.2.33) para $s = m$, teremos que

$$\Delta (r_1 r_2 \cdots r_{m-1})^2 \geq 0$$

em todo ponto de S^2 . Pelo Teorema de E.Hopf de (1.2.12) segue

$$\Delta (r_1 r_2 \cdots r_{m-1})^2 = 0$$

Portanto,

$$r_1 r_2 \cdots r_{m-1} [(m+1)mK - 2c] = 0$$

Como o produto $r_1 r_2 \cdots r_{m-1}$ se anula apenas em pontos isolados, devemos ter

$$k = \frac{2c}{(m+1)m}$$

2.2.38 — TEOREMA. *Seja $x : S^2 \rightarrow M^{2n}(c)$, uma imersão mínima, K a sua curvatura Gaussiana e $n-1 = \max\{s : r_s \neq 0\}$.*

(a) Se $\frac{c}{3} \leq K \leq c$ então,

$$K = \frac{c}{3} \text{ e } n = 2 \text{ ou } K = 1 \text{ e } n = 1;$$

(b) Se $r_{m-1} \neq 0$ em todo ponto de S^2 e

$$\frac{2c}{(m+1)(m+2)} \leq K \leq \frac{2c}{m(m+1)}$$

então,

$$K = \frac{2c}{(m+1)(m+2)} \text{ e } n = m+1 \text{ ou } K = \frac{2c}{m(m+1)} \text{ e } n = m$$

Prova : (a) Por (60) de (2.2.33) para $s = 2$, segue que

$$\frac{1}{4} \Delta r_1^2 = r_1^2 \left(k_2^2 + \frac{3K - c}{2} \right) + \|\text{grad} r_1\|^2$$

Da hipótese, temos

$$\Delta r_1^2 \geq 0$$

o que implica em $\Delta r_1^2 = 0$. Daí obtemos o seguinte,

$$r_1^2 \left(k_2^2 + \frac{3K - c}{2} \right) = 0$$

Temos então, duas possibilidades :

(i) $r_1 = 0$ e portanto, $n-1 = 0$, ou $n = 1$ e de

$$k_1^2 = r_1^2 = \frac{1}{2} (c - K), \text{ segue que } K = c;$$

(ii) $r_1 \neq 0$. Neste caso devemos ter

$$2k_2^2 + 3K - c = 0$$

pois os zeros de r_1 são isolados. Daí obtemos, $k_2^2 = 0$ e $3K - c$ e portanto, $K = \frac{c}{3}$ e $n = 2$.

(b) Seja $l = n - 1$. Temos duas possibilidades :

(i) $l < m$. Neste caso, usando (59) de (2.2.33), teremos

$$\frac{1}{2} \Delta \log(r_1 \cdots r_l) = k_{l+1}^2 + \frac{1}{4} [(l+1)(l+2)K - 2c]$$

em todo ponto de S^2 (pois, $r_l \neq 0$ em todo ponto). Mas, $k_{l+1} = 0$ e

$$\frac{1}{2} \Delta \log(r_1 \cdots r_l) = \frac{(l+1)(l+2)K - 2c}{4} \leq 0$$

pois, para $l < m$, $(l+1)(l+2)K - 2c \leq m(m+1)K - 2c \leq 0$, por hipótese.

Assim, $\Delta \log(r_1 \cdots r_l) = 0$ e portanto,

$$(l+1)(l+2)K - 2c = 0$$

Além disso, $(l+1)(l+2) = m(m+1)$, isto é, $l+1 = m$. Logo, $n = m$, e

$$K = \frac{2c}{m(m+1)}$$

(ii) $l \geq m$. Neste caso,

$$\frac{2c}{(l+1)(l+2)} \leq \frac{2c}{(m+1)(m+2)} \leq K$$

o que pelo teorema (2.2.35) implica em

$$K = \frac{2c}{(l+1)(l+2)} = \frac{2c}{(m+1)(m+2)}$$

Além disso, $l = m$ e portanto, $n = m + 1$.

2.2.39 — COROLÁRIO. Seja $x : S^2 \rightarrow M^4(c)$, uma imersão mínima tal que, a curvatura Gaussiana K satisfaça a condição

$$K \leq \frac{c}{3}$$

em todo ponto de S^2 . Então,

$$K = \frac{c}{3}$$

Prova : Neste caso, da relação, $k_1^2 = \frac{1}{2}(c - K)$ segue que $k_1^2 \neq 0$ em todo ponto. Daí usamos (b)-(i) na prova do teorema (2.2.35) para concluir o resultado desejado.

2.3 — As Imersões Mínimas de S^2 em $S^n(1)$

2.3.1 — Seja $S^n(1) = \{x \in R^{n+1} : \langle x, x \rangle = 1\}$ com a estrutura Riemanniana induzida por R^{n+1} . Suponhamos que tenhamos um referencial local sobre $S^n(1)$, (e_A, w_A, w_{AB}) .

Desta maneira, teremos que,

$$(62) \quad \langle x, e_A \rangle = 0$$

para todo $1 \leq A \leq n$. Além disso,

$$(63) \quad dx = \sum_A w_A e_A$$

$$de_A = -w_A x + De_A$$

onde, D representa a conexão de Levi-Civita de $S^n(1)$ e

$$\langle de_A, x \rangle = -\langle e_A, dx \rangle = -w_A$$

Seja $x : S^2 \rightarrow S^n(1)$ uma imersão mínima e $m - 1 = \max\{s : r_s \neq 0 \text{ em } S^2\}$.

Temos os campos $E_1, E_2, \dots, E_m$ satisfazendo as condições do teorema (2.2.28), em uma vizinhança de um ponto regular. Por (63) segue que

$$(64) \quad dE_1 = -\varphi x + DE_1$$

$$dE_s = DE_s, \quad 2 \leq s \leq m$$

Pelo fato de $k_m = 0$ e $k_{m-1} \neq 0$ em S^2 , podemos considerar que $n = 2m$ (M. Dajczer, [10]), reduzindo, se necessário, a codimensão da subvariedade imersa em $S^n(1)$.

2.3.2 — Podemos considerar um campo tangente a $S^n(1)$, Y , como sendo um campo de vetores de R^{2m+1} , satisfazendo a condição, $\langle Y, x \rangle = 0$.

Desta maneira, os campos complexificados $E_1, E_2, \dots, E_m$ tornam-se, pontualmente, vetores de C^{2m+1} (definidos em uma vizinhança de S^2).

Podemos, portanto, interpretar os campos E_s , como sendo coordenadas homogêneas de curvas do espaço projetivo complexo $P^{2m}(C)$. Assim, cada coordenada homogênea de E_s representa uma base do plano normal osculador N^s , pontualmente.

2.3.3 — O campo E_m , satisfaz, pelo teorema (2.2.28) e por (64) de (2.3.1), a equação,

$$(65) \quad dE_m = -k_{m-1}\varphi E_{m-1} - iw_{2m-1,2m}E_m$$

Consideremos a curva $\Gamma : S^2 \rightarrow P^{2m}(C)$ dada em coordenadas homogêneas por E_m , nos pontos regulares, que se estende aos pontos não regulares, pois, como vimos, o plano normal osculador N^m , está definido nestes pontos.

A curva Γ dada acima é holomorfa. Para ver isto, seja ρ uma função diferenciável, definida em uma vizinhança de S^2 , a valores complexos. Então,

$$d(\rho E_m) = \rho dE_m + d\rho E_m$$

Substituímos (65) na expressão acima, para obtermos,

$$d(\rho E_m) = -\rho k_{m-1}\varphi E_{m-1} + (d\rho - i\rho w_{2m-1,2m}) E_m$$

Agora, temos da proposição (2.2.25) que

$$[d \log r_{m-1} + i(mw_{12} - w_{2m-1,2m})] \wedge \bar{\varphi} = 0$$

e que $[d\lambda + i\lambda w_{12}] \wedge dz = 0$. Assim,

$$(d \log r_{m-1} + m d \log \lambda + iw_{2m-1,2m}) \wedge dz = 0$$

Tomando-se, nos pontos regulares,

$$\rho = \frac{1}{r_{m-1}\lambda^m}$$

teremos que

$$(d\rho - \rho i w_{2m-1,2m}) \wedge dz = 0$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho E_m) = 0$$

Isto significa que (ρE_m) é holomorfa, definida em uma vizinhança de um ponto regular de S^2 com valores em C^{2m+1} . A existência dos planos normais limites nos pontos não regulares indica que Γ , dada localmente por E_m , uma coordenada homogênea, é holomorfa. Esta curva é denominada **curva diretriz da imersão π** .

Observemos ainda que, das equações de Frenet-Boruvka, obtemos

$$(E_s, E_r) = 0$$

para todo $1 \leq r, s \leq m$ e mais ainda, que $E_1, E_2, \dots, E_m$ geram o $(m-1)$ -ésimo espaço osculador de E_m . Além disso, de (66) decorre o fato de que as curvas $E_1, E_2, \dots, E_m$ são curvas da hiperquádrica Q^{2m-1} de $P^{2m}(C)$ onde,

$$Q^{2m-1} = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_{2m}] / z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_{2m}^2 = 0\}$$

2.3.4 — Por (62) de (2.3.1) deduz-se que,

$$(67) \quad (x, E_s) = (x, \bar{E}_s) = 0$$

para todo $1 \leq s \leq m$. Além disso, por (63) de (2.3.1) segue

$$dx = \frac{1}{2} (\varphi \bar{E}_1 + \bar{\varphi} E_1)$$

Podemos, portanto, menos possivelmente em um conjunto de pontos isolados de S^2 , determinar x a partir de $E_1, E_2, \dots, E_m$. Basta-nos para isto, considerar, pontualmente, os subespaços V e $\bar{V}$ de C^{2m+1} gerados, respectivamente, por $E_1, E_2, \dots, E_m$ e $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_m$. estes espaços são ortogonais entre si e de dimensão m , cada um, por (66) de (2.3.3).

As relações, em (67) nos dizem que x está, pontualmente, no complemento ortogonal, em C^{2m+1} , da soma dos subespaços V e $\bar{V}$, que possui dimensão 1. Além disso, a condição de que x seja real e $\langle x, x \rangle = 1$, temos x determinado (a menos de sinal), univocamente. Isto será feito no capítulo 3.

Geometricamente, temos que x , por (65) de (2.3.3) e das equações de Frenet-Boruvka, é determinado pela intersecção, em C^{2m+1} , dos espaços osculadores de ordem $(m-1)$ de E_m e $\bar{E}_m$.

2.4 — Apêndice — Um Sistema de Equações Diferenciais Elíptico

2.4.1 — LEMA ([06]). Sejam $\{w_\alpha\}$ funções complexas, $1 \leq \alpha \leq p$, a valores complexos, de classe C^1 , satisfazendo,

$$(68) \quad \frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar{z}} = \sum_{\beta=1}^p a_{\alpha\beta} w_\beta$$

definidas em uma vizinhança de $z = 0$, onde $a_{\alpha\beta}$ são funções de classe C^1 . Suponha ainda que, $w_\alpha(0) = 0$ e que as funções w_α não sejam, simultaneamente, nulas nessa vizinhança. Então,

(i) os zéros comuns das funções w_α , são isolados;

(ii) existe um $r \geq 1$, inteiro, e

$$(69) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{w_\alpha}{z^r}$$

para todo $1 \leq \alpha \leq p$. Além disso, para algum α , o limite em (69) é não nulo.

2.4.2 — LEMA. Sejam $\{w_\alpha\}$, $1 \leq \alpha \leq p$, funções complexas a valores complexos, com partes, real e imaginária, como sendo funções analíticas reais, definidas em uma vizinhança de $z = 0$, com $w_\alpha(0) = 0$ para todo α . Suponha ainda que $\{w_\alpha\}$ satisfaça um sistema de equações diferenciais como em (68) de (2.4.1).

Se $r \geq 1$, inteiro, for tal que exista o limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w_\alpha}{z^r}$$

para todo α . Então, o conjunto de funções $\{\varphi_\alpha\}$ definidas nessa vizinhança, por

$$\varphi_\alpha = \begin{cases} \frac{w_\alpha}{z^r}, & \text{se } z \neq 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{w_\alpha}{z^r}, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

devem ser também, funções de classe C^∞ , com partes, real e imaginária, como sendo funções analíticas reais, para cada α .

Prova : Será feita por indução sobre $r \geq 1$. Seja $r = 1$. Para cada α , existem em uma vizinhança de $z = 0$, constantes $a_{\mu\nu} \in C$ e tal que

$$w_\alpha = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} z^\mu \bar{z}^\nu$$

Assim, para $z \neq 0$, teremos,

$$\varphi_\alpha = \frac{a_{00}}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{0\nu} \frac{\bar{z}^\nu}{z} + \sum_{\mu, \nu, \mu > 0} a_{\mu\nu} z^{\mu-1} \bar{z}^\nu$$

Agora, da hipótese sobre w_α temos que $a_{00} = w_\alpha(0) = 0$ e

$$a_{0\nu} = \frac{1}{\nu!} \frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar{z}}(0)$$

Como w_α satisfaz um sistema de equações diferenciais como em (68) de (2.4.1) segue que,

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar{z}}(0) = 0$$

Usando recursivamente, o sistema (68), obteremos,

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar{z}^\nu}(0) = 0$$

para todo $\nu \geq 1$, inteiro. Portanto,

$$\varphi_\alpha = \sum_{\mu, \nu, \mu > 0} a_{\mu\nu} z^{\mu-1} \bar{z}^\nu$$

em uma vizinhança de $z = 0$. Assim, as partes, real e imaginária, são funções reais analíticas e φ_α de classe C^∞ .

Suponhamos agora que, $r > 1$ e que as hipóteses do lema estejam satisfeitas, para $1 \leq s < r$. Em particular, as funções w'_α , $1 \leq \alpha \leq p$, dadas por

$$w'_\alpha = \begin{cases} \frac{w_\alpha}{z^{r-1}}, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

são funções com partes, real e imaginária, analíticas reais e satisfazendo um sistema de equações diferenciais como em (68) de (2.4.1). Usando, de novo, a hipótese de indução para $s = 1$, concluímos que as funções φ_α podem ser escritas como

$$\varphi = \begin{cases} \frac{w'_\alpha}{z}, & \text{se } z \neq 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{w'_\alpha}{z} & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

em uma vizinhança de $z = 0$, são de classe C^∞ com partes, real e imaginária, reais analíticas.

CAPITULO 3

CONSTRUÇÃO DA IMERSÃO MÍNIMA A PARTIR DE SUA CURVA DIRETRIZ

3.1 — Dada uma imersão mínima $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, podemos obter um referencial complexificado local $E_1, E_2, \dots, E_m$, em coordenadas isotérmicas de S^2 (que determinam os respectivos planos normais osculadores), menos possivelmente em pontos isolados de S^2 , do qual E_m seja coordenada homogênea de uma curva holomorfa $\Gamma : S^2 \rightarrow P^{2m}(C)$, denominada curva diretriz da imersão, com as seguintes propriedades:

(i) $(E_m, E_m) = 0$, isto é, Γ é uma curva da hiperquádrica Q^{2m-1} de $P^{2m}(C)$;

(ii) $(d^{(k)} E_m, d^{(k)} E_m) = 0$, para todo $1 \leq k \leq m-1$, inteiro;

(iii) $E_m \wedge dE_m \wedge \dots \wedge d^{(m-1)} E_m \wedge d^{(m)} E_m \neq 0$ pois,
 $E_m \wedge dE_m \wedge \dots \wedge d^{(m)} E_m = (-1)^m k_1 k_2 \dots k_{m-1} \varphi^m E_m \wedge E_{m-1} \wedge \dots \wedge E_1 \wedge x$.

Observe que (ii) e (iii), decorrem das equações de Frenet-Boruvka e de acontecerem $(dE_k, dE_j) = 0$ para todo $1 \leq j, k \leq m$.

Geometricamente, (iii) nos diz que a curva Γ não está contida em algum subespaço próprio de $P^{2m}(C)$ e que $x(S^2)$ não está contida em algum hiperplano de R^{2m+1} o que é equivalente a dizer que não podemos reduzir a codimensão da subvariedade imersa em $S^{2m}(1)$.

Desse modo, se quisermos construir, a partir de Γ , uma imersão mínima $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, devemos ter Γ , em coordenadas homogêneas locais ξ , satisfazendo (i), (ii) e (iii) acima.

Vimos no capítulo 2 que o referencial $E_1, E_2, \dots, E_m$, em geral, não está definido para todo ponto de S^2 . Agora, esta situação não ocorre pois Γ está definida em todo ponto de S^2 . Neste caso, podemos obter x em uma vizinhança de todo ponto de S^2 , diferenciável mas, eventualmente, com um conjunto de pontos singulares que está contido no conjunto $\{p \in S^2 / \xi \wedge \dots \wedge \xi^{(m)}(p) = 0\}$. Portanto, este conjunto será isolado. Uma tal aplicação x será denominada imersão generalizada.

Pretendemos neste capítulo, a partir de Γ , obter exemplos de imersões mínimas, $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, determinar as equações de Frenet-Boruvka e a curvatura Gaussiana da imersão mínima generalizada construída.

Faremos isto, utilizando-nos da técnica desenvolvida, no caso $m=2$, por S.S.Chern em [07].

3.2 — A Construção de $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$

3.2.1 — Dada uma curva holomorfa $\Gamma : S^2 \rightarrow P^{2m}(C)$, construiremos uma aplicação $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$ a qual pretendemos que seja uma imersão mínima generalizada.

Seja z , coordenada isotérmica local de S^2 , em torno de $z = 0$. Determinaremos um referencial local em C^{2m+1} , $E_1(z), \dots, E_m(z)$, de modo que $(E_i(z), E_j(z)) = 0$ e $(E_i(z), \overline{E_j(z)}) = 2\delta_{ij}$, para todo $1 \leq i, j \leq m$. Desse modo, o espaço vetorial, pontualmente gerado por $\{E_1(z), \dots, E_m(z), \overline{E_1(z)}, \dots, \overline{E_m(z)}\}$ possui codimensão 1 em C^{2m+1} e $x(z)$ será determinado como sendo o único vetor unitário real, isto é, $x(z) \in R^{2m+1}$, a menos de sinal, que gera o complementar desse espaço em C^{2m+1} . Além disso, seguindo a mesma notação do capítulo 2, teremos que, nos pontos de S^2 nos quais $x(z)$ for imersão mínima $E_m(z)$ será coordenada homogênea de Γ .

3.2.2 — Considere $\Gamma : S^2 \rightarrow P^{2m}(C)$ holomorfa, dada em coordenadas locais, por $\xi(z) \in C^{2m+1}$, em torno de $z = 0$, cujas coordenadas sejam funções holomorfas.

Por [3.1] segue que, para Γ ser uma curva diretriz de uma imersão mínima generalizada $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, que não esteja contida em algum hiperplano de R^{2m+1} , devemos ter:

$$(1) \quad (\xi(z), \xi(z)) = (\xi^{(1)}(z), \xi^{(1)}(z)) = \dots = (\xi^{(m-1)}(z), \xi^{(m-1)}(z)) = 0$$

$$(2) \quad \xi(z) \wedge \xi^{(1)}(z) \wedge \dots \wedge \xi^{(m)}(z) \neq 0$$

Onde $\xi(z)$ é coordenada homogênea holomorfa de Γ e $\xi^{(j)}(z)$, a j -ésima derivada de ξ em C^{2m+1} , relativamente à z .

3.2.3 — LEMA. Seja ξ uma curva holomorfa de C^{2m+1} , satisfazendo

$$(\xi, \xi) = (\xi^{(1)}, \xi^{(1)}) = \dots = (\xi^{(m-1)}, \xi^{(m-1)}) = 0.$$

Então,

$$(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = 0$$

para todo $1 \leq r + s \leq 2m - 1$ (com $\xi^{(0)} = \xi$).

Prova: Será feita por indução sobre $d = r + s$. Para $d = 1$, temos $(\xi, \xi^{(1)}) = 0$ pois, $(\xi, \xi) = 0$. Suponhamos agora que para todo $r, s \geq 0$, inteiros, e tais que $1 \leq r + s < 2m - 1$, tenhamos

$$(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = 0$$

Mostremos que, para $r+s = d+1$, $(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = 0$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $r \geq 1$ e portanto, $(r-1)+s = d$ e usando a hipótese de indução, temos

$$(\xi^{(r-1)}, \xi^{(s)}) = 0$$

E assim,

$$(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) + (\xi^{(r-1)}, \xi^{(s+1)}) = 0$$

Mais geralmente, obtemos para $r \geq p$,

$$(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = (-1)^p (\xi^{(r-p)}, \xi^{(s+p)})$$

Isto é, se $r+s = r_1 + s_1 = d+1$ com $r \geq r_1$ e portanto, $r-r_1 = s_1-s = j \geq 0$. Então,

$$(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = (-1)^j (\xi^{(r-j)}, \xi^{(s+j)}) = (-1)^j (\xi^{(r_1)}, \xi^{(s_1)})$$

Ou seja,

$$(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = 0 \text{ se, e somente se, } (\xi^{(r_1)}, \xi^{(s_1)}) = 0.$$

Para se ter $(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = 0$, para $r+s = d+1$, consideramos duas situações:

(i) $d+1 = 2k$, é par, com $k \leq m-1$. Neste caso,

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(k)}) = 0$$

E como, $k+k = r+s = d+1$, segue que

$$(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = 0$$

(ii) $d+1 = 2k+1$, é ímpar, com $k \leq m-1$. Neste caso,

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(k)}) = 0 \text{ e } (\xi^{(k)}, \xi^{(k+1)}) = 0$$

Como, $k+(k+1) = r+s = d+1$, segue que

$$(\xi^{(r)}, \xi^{(s)}) = 0$$

3.2.4 — Para obter $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, construiremos, nessa ordem (omitindo a coordenada z), $E_m, E_{m-1}, \dots, E_1$, seguindo a notação do capítulo 2. Fixemos $z \in C$, na vizinhança de $z=0$, na qual ξ seja coordenada homogênea de Γ .

Primeiramente façamos

$$(3) \quad E_m = \frac{\sqrt{2}\xi}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}}}$$

sendo $\bar{\xi}$ o complexo conjugado em C^{2m+1} de ξ .

Por (1) de (3.2.2) temos que

$$(E_m, E_m) = 0$$

E, de (3)

$$(E_m, \bar{E}_m) = 2$$

Os vetores complexos $E_{m-1}, \dots, E_1$ serão obtidos, recursivamente. Suponhamos então que, para $1 \leq j \leq m-1$ em uma vizinhança de $z = 0$, já tenhamos determinado $E_{m-1}, \dots, E_{m-j+1}$, satisfazendo o seguinte:

(i) para todo $0 \leq k < j$, E_{m-k} = comb. linear de $\xi, \dots, \xi^{(k)}$;

(ii) $(E_{m-k}, \bar{E}_{m-l}) = 2\delta_{kl}$, para todo $0 \leq k, l < j$.

Observe que de (i) juntamente com o lema (3.2.3) segue que

$$(E_{m-k}, E_{m-l}) = 0$$

para todo $0 \leq k, l < j$.

Definimos E_{m-j} , como se segue: consideramos o vetor complexo,

$$\eta_{m-j} = \xi^{(j)} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} (\xi^{(j)}, \bar{E}_{m-k}) E_{m-k}$$

Assim,

$$(\eta_{m-j}, \bar{\eta}_{m-j}) = (\xi^{(j)}, \bar{\xi}^{(j)}) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} |(\xi^{(j)}, \bar{E}_{m-k})|^2$$

Por outro lado,

$$(\xi^{(j)} \wedge E_{m-j+1} \wedge \dots \wedge E_m, \bar{\xi}^{(j)} \wedge \bar{E}_{m-j+1} \wedge \dots \wedge \bar{E}_m) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} (\xi^{(j)}, \bar{\xi}^{(j)}) & \dots & \dots & \dots & (\xi^{(j)}, \bar{E}_m) \\ \vdots & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ (E_m, \bar{\xi}^{(j)}) & 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2^j \left[(\xi^{(j)}, \bar{\xi}^{(j)}) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} |(\xi^{(j)}, \bar{E}_{m-k})|^2 \right]$$

E, portanto,

$$(4) \quad (\xi^{(j)} \wedge \dots \wedge E_m, \bar{\xi}^{(j)} \wedge \dots \wedge \bar{E}_m) = 2^j (\eta_{m-j}, \bar{\eta}_{m-j})$$

Sendo $\xi, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(j)}$ funções holomorfas,

$$\xi \wedge \dots \wedge \xi^{(j)} \neq 0,$$

por (2) de (3.2.2), e pelo fato de $E_m, \dots, E_{m-j+1}$ serem, por (i) acima, combinação linear de $\xi, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(j-1)}$ segue que existe $n_j \geq 0$, inteiro, tal que,

$$\frac{1}{z^{n_j}} \eta_{m-j} \Big|_{z=0} \neq 0$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{z^{n_j}} \eta_{m-j}$$

não se anula em alguma vizinhança de $z = 0$. Seja, nessa vizinhança

$$v_{m-j} = \frac{1}{|z|^{2n_j}} (\eta_{m-j}, \bar{\eta}_{m-j})$$

Escolhamos então, $u_{m-j} \in C - \{0\}$ de modo que, u_{m-j} seja diferenciável, em torno de $z = 0$, e

$$|u_{m-j}|^2 = \frac{2}{v_{m-j}}$$

Isto é,

$$(5) \quad |u_{m-j}|^2 = \frac{2|z|^{2n_j}}{(\eta_{m-j}, \bar{\eta}_{m-j})}$$

Definimos, E_{m-j} por,

$$\begin{aligned} E_{m-j} &= \frac{u_{m-j}}{z^{n_j}} \eta_{m-j} = \\ &= \frac{u_{m-j}}{z^{n_j}} \left[\xi^{(j)} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} (\xi^{(j)}, \bar{E}_{m-k}) E_{m-k} \right] \end{aligned}$$

Verifiquemos que E_{m-j} , satisfaz as condições (i) e (ii) acima:

$$E_{m-k} = (\text{comb. linear de } \xi, \dots, \xi^{(k)}) \text{ para } 1 \leq k < j,$$

juntamente com (6) decorre que

$$E_{m-j} = (\text{comb. linear de } \xi, \dots, \xi^{(j)});$$

Isto determina a condição (i) para E_{m-j} . Vejamos agora que a condição (ii) acima se verifica. Para isto, calculemos $(E_{m-j}, \bar{E}_{m-k})$ para $0 \leq k \leq j$.

$$(E_{m-j}, \bar{E}_{m-j}) = \frac{|u_{m-j}|^2}{|z|^{2n_j}} (\eta_{m-j}, \bar{\eta}_{m-j}) = 2 \text{ por (5).}$$

Para $0 \leq k < j$, temos

$$(E_{m-j}, \bar{E}_{m-k}) = \frac{u_{m-j}}{z^{n_j}} \left[(\xi^{(j)}, \bar{E}_{m-k}) - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{j-1} (\xi^{(j)}, \bar{E}_{m-l}) 2\delta_{kl} \right]$$

Donde,

$$(E_{m-j}, \bar{E}_{m-k}) = 0$$

Isto é,

$$(E_{m-k}, \bar{E}_{m-l}) = 2\delta_{kl}$$

para todo $0 \leq k, l \leq j$.

Seguindo desta maneira, determinamos $E_m, \dots, E_1$ em uma vizinhança de $z = 0$.

Observe que de (3) e (6) decorre,

$$\xi^{(j)} \wedge E_{m-j+1} \wedge \dots \wedge E_m = \frac{\sqrt{2}u_{m-j+1} \dots u_{m-1}}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}} z^{(n_1 + \dots + n_{j-1})}} (\xi^{(j)} \wedge \dots \wedge \xi)$$

juntamente com (4), resulta em

$$(7) \quad 2^j(\eta_{m-j}, \bar{\eta}_{m-j}) = \frac{2|u_{m-j+1}|^2 \dots |u_{m-1}|^2}{(\xi, \bar{\xi})|z|^{2(n_1 + \dots + n_{j-1})}} (\xi \wedge \dots \wedge \xi^{(j)}, \bar{\xi} \wedge \dots \wedge \bar{\xi}^{(j)}).$$

E, da escolha de u_{m-j} em (5), segue

$$(8) \quad 2^j = \frac{|u_{m-j}|^2 \dots |u_{m-1}|^2}{(\xi, \bar{\xi})|z|^{2(n_1 + \dots + n_j)}} (\xi \wedge \dots \wedge \xi^{(j)}, \bar{\xi} \wedge \dots \wedge \bar{\xi}^{(j)})$$

para $1 \leq j \leq m-1$.

Falta-nos agora, determinar a aplicação z , em uma vizinhança de $z = 0$.

3.2.5 — Seja,

$$\eta_0 = \xi^{(m)} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (\xi^{(m)}, \bar{E}_{m-k}) E_{m-k}.$$

Para, $0 \leq j \leq m-1$ temos,

$$(9) \quad (\eta_0, E_{m-j}) = (\eta_0, \bar{E}_{m-j}) = 0.$$

Fixemos z , na vizinhança de $z = 0$, considerada. Os subespaços vetoriais de C^{2m+1} gerados por $E_1, \dots, E_m$ e $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_m$, respectivamente, serão denotados por V e $\bar{V}$.

Do fato de $(E_j, E_k) = 0$ e $(E_j, \bar{E}_k) = 2\delta_{jk}$, para todo $1 \leq j, k \leq m$, segue que V e $\bar{V}$ são ortogonais entre si e possuem dimensão m , cada um. Seja X o complemento ortogonal em C^{2m+1} de $V \oplus \bar{V}$, a soma direta dos subespaços V e $\bar{V}$. Esse subespaço possui dimensão 1 e portanto, é gerado por um vetor ω , que pode ser tomado diferenciável, em uma vizinhança de $z = 0$. Desse modo,

$$(\omega, E_j) = (\omega, \bar{E}_j) = 0.$$

O que implica em,

$$(\bar{\omega}, \bar{E}_j) = (\bar{\omega}, E_j) = 0$$

para todo $1 \leq j \leq m$. Isto é, $\bar{\omega}$ também é um gerador de X . Se $\Re(\omega(0)) \neq 0$, existe uma vizinhança de 0, no qual $\Re(\omega) \neq 0$ em todo ponto dela. E, seja,

$$v = \frac{\omega + \bar{\omega}}{2} \in R^{2m+1}$$

que é diferenciável e não se anula em nenhum ponto dessa vizinhança. Tomemos

$$x = \frac{v}{(v + \bar{v})^{\frac{1}{2}}} \in R^{2m+1}$$

Assim, $(x, x) = 1$. No caso de $\Re(\omega(0)) = 0$, temos $\Im(\omega(0)) \neq 0$ e, usando argumento análogo tomemos neste caso

$$v = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2i}$$

Desse modo, em uma vizinhança de $z = 0$, temos definida uma aplicação

$$x: z \rightarrow x(z) \in S^{2m}(1)$$

diferenciável.

Para obter x a partir de η_0 , observemos que, de (9) temos η_0 e $\bar{\eta}_0$, pontualmente vetores de X e, portanto, na vizinhança onde x está definida, existe v_0 , diferenciável satisfazendo,

$$\eta_0 = v_0 x$$

Assim, dado η_0 , a função v_0 está determinada em uma vizinhança de $z = 0$, a menos de sinal, pelas equações

$$(\eta_0, \eta_0) = v_0^2 \quad e \quad (\eta_0, \bar{\eta}_0) = |v_0|^2$$

Além disso, por (7) de (3.2.4)

$$(10) \quad |v_0| = \frac{|u_{m-1}|^2 \dots |u_1|^2}{2^{m-1} (\xi, \bar{\xi}) |x|^{2(n_1 + \dots + n_{m-1})}} (\xi \wedge \dots \wedge \xi^{(m)}, \bar{\xi} \wedge \dots \wedge \bar{\xi}^{(m)})$$

Portanto, $v_0 = 0$, em um conjunto de pontos isolados na vizinhança de $z = 0$. Assim nos pontos em que $v_0 \neq 0$, temos

$$x = \frac{1}{v_0} \eta_0.$$

O que mostra que x fica determinado em uma vizinhança de $z = 0$, a menos de sinal.

Vamos estabelecer então, uma forma canônica para a escolha do sinal de v_0 e isto determinará uma escolha para x . Isto será feito de modo que a aplicação definida sobre S^2 independa da coordenada isotérmica de S^2 e da escolha da coordenada homogênea de Γ , pois, a construção de x foi feita localmente e dependeu destes dois fatores.

3.2.6 — Sejam $E_1, E_2, \dots, E_m$, como em (3.2.4). Definimos,

$$e_{2j-1} = \frac{E_j + \bar{E}_j}{2}, e_{2j} = \frac{E_j - \bar{E}_j}{2i}$$

para todo $1 \leq j \leq m$. Desse modo,

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj} \text{ e } \langle x, e_j \rangle = 0$$

para todo $1 \leq k, j \leq 2m$. Portanto, os campos $e_1, \dots, e_{2m}$ são tangentes à $S^{2m}(1)$. A escolha de x (o que é equivalente por (3.2.5) a escolher v_0 , nos pontos onde $v_0 \neq 0$) será feita de modo que o referencial ortonormal $\{x, e_1, \dots, e_{2m}\}$, nessa ordem e pontualmente, seja uma base na mesma orientação da base canônica de R^{2m+1} . Isto determina, como vimos, um único v_0 de modo que

$$x = \frac{1}{v_0} \eta_0$$

quando $v_0 \neq 0$. Mostraremos a seguir que deste modo, x fica definida globalmente sobre S^2 .

3.2.7 — Vejamos que, x não depende da coordenada homogênea de Γ . Para isto, calculemos $x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m}$.

$$\begin{aligned} x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m} &= \\ &= x \wedge \left(\frac{E_1 + \bar{E}_1}{2} \right) \wedge \left(\frac{E_1 - \bar{E}_1}{2i} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{E_m + \bar{E}_m}{2} \right) \wedge \left(\frac{E_m - \bar{E}_m}{2i} \right) \end{aligned}$$

Mas,

$$\left(\frac{E_j + \bar{E}_j}{2} \right) \wedge \left(\frac{E_j - \bar{E}_j}{2i} \right) = -\frac{1}{2i} E_j \wedge \bar{E}_j$$

para todo $1 \leq j \leq m$. Portanto,

$$x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^m (i)^m} x \wedge E_1 \wedge \overline{E}_1 \wedge \dots \wedge E_m \wedge \overline{E}_m$$

Isto é,

$$x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m} = \frac{(i)^m |u_1|^2 \dots |u_{m-1}|^2}{2^{m-1} (\xi, \overline{\xi}) |z|^{2(n_1 + \dots + n_{m-1})}} (x \wedge \xi^{(m-1)} \wedge \overline{\xi^{(m-1)}} \wedge \dots \wedge \xi \wedge \overline{\xi})$$

Assim, nos pontos nos quais $v_0 \neq 0$, temos

$$x = \frac{1}{v_0} \eta_0$$

e, usando (10) de (3.2.5)

$$(11) \quad \begin{aligned} x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m} &= \\ &= \frac{(i)^m |u_1|^2 \dots |u_{m-1}|^2}{2^{m-1} (\xi, \overline{\xi}) v_0 |z|^{2(n_1 + \dots + n_{m-1})}} (\xi^{(m)} \wedge \xi^{(m-1)} \wedge \overline{\xi^{(m-1)}} \wedge \dots \wedge \xi \wedge \overline{\xi}) \end{aligned}$$

Suponha que nessa vizinhança, tenhamos uma outra coordenada de Γ , homogênea e holomorfa $\psi(z) = f(z)\xi(z)$. Então,

$$(12) \quad \psi^{(j)} = f(z)\xi^{(j)} + (\text{comb. linear de } \xi^{(j-1)}, \dots, \xi)$$

para todo $1 \leq j \leq m$.

Sejam η_0^*, v_0^* e x^* , respectivamente, como sendo η_0, v_0 e x determinados em (3.2.5), com $e_1^*, \dots, e_{2m}^*$, o referencial ortonormal de $S^{2m}(1)$ obtido como em (3.2.6), relativamente à ψ . Temos por (12) que

$$\psi^{(m)} \wedge \psi^{(m-1)} \wedge \dots \wedge \psi = (f(z))^{m+1} (\xi^{(m)} \wedge \xi^{(m-1)} \wedge \dots \wedge \xi)$$

Isto é, $\psi^{(m)} \wedge \dots \wedge \psi = 0$ se, e somente se, $\xi^{(m)} \wedge \dots \wedge \xi = 0$.

Seja U na vizinhança de $z = 0$, na qual $\xi^{(m)} \wedge \dots \wedge \xi \neq 0$. Neste caso, os vetores complexos $\xi^{(m-1)}, \dots, \xi$ formam, pontualmente, uma base de V , determinado em (3.2.5) e $\overline{\xi^{(m-1)}}, \dots, \overline{\xi}$, uma base de $\overline{V}$. Por (12) segue que $\psi^{(m-1)}, \dots, \psi$ também formam, pontualmente, uma base de V e $\overline{\psi^{(m-1)}}, \dots, \overline{\psi}$ uma base de $\overline{V}$. Assim, η_0 e η_0^* são também geradores de X e portanto, existe λ satisfazendo $\eta_0^* = \lambda \eta_0$, para todo ponto de U . Mas

$$\begin{aligned} \eta_0^* &= \psi^{(m)} + (\text{comb. linear de } \psi^{(m-1)}, \dots, \psi) \\ &= f \xi^{(m)} + (\text{comb. linear de } \xi^{(m-1)}, \dots, \xi) \end{aligned}$$

portanto, $\lambda = f$ em U , isto é,

$$(13) \quad \eta_0^* = f \eta_0$$

Ainda mais, $v_0^* = \pm f v_0$ pois, $(v_0^*)^2 = (f v_0)^2$ e $|v_0^*|^2 = |f v_0|^2$.

$$\begin{aligned} x^* \wedge e_1^* \wedge \dots \wedge e_{2m}^* &= \\ &= \frac{(i)^m |u_1^*|^2 \dots |u_{m-1}^*|^2}{2^{m-1} (\psi, \bar{\psi}) v_0^* |z|^{2(n_1 + \dots + n_{m-1})}} (\psi^{(m)} \wedge \psi^{(m-1)} \wedge \overline{\psi^{(m-1)}} \wedge \dots \wedge \psi \wedge \bar{\psi}) \end{aligned}$$

Ou,

$$\begin{aligned} x^* \wedge e_1^* \wedge \dots \wedge e_{2m}^* &= \\ &= \frac{(i)^m |u_1^*|^2 \dots |u_{m-1}^*|^2 f |f|^m}{2^{m-1} (\psi, \bar{\psi}) v_0^* |z|^{2(n_1 + \dots + n_{m-1})}} (\xi^{(m)} \wedge \xi^{(m-1)} \wedge \overline{\xi^{(m-1)}} \wedge \xi \wedge \bar{\xi}). \end{aligned}$$

por (11) e (13).

Sendo $\{x^*, e_1^*, \dots, e_{2m}^*\}$ e $\{x, e_1, \dots, e_{2m}\}$ pontualmente, bases ortonormais de mesma orientação em $\mathbb{R}^{2m+1}$ temos que

$$x^* \wedge e_1^* \wedge \dots \wedge e_{2m}^* = x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m}.$$

Comparando (11) com (14) vemos que, $v_0^*/f v_0$ deve ser real e positivo e portanto,

$$(15) \quad v_0^* = f v_0$$

De (13) e (15) deduzimos que

$$x^* = \frac{1}{v_0^*} \eta_0^* = \frac{1}{v_0} \eta_0 = x.$$

Como x^* e x são diferenciáveis a igualdade acima se estende aos pontos da vizinhança de $z = 0$, considerada inicialmente, nos quais $v_0^* = v_0 = 0$. Isto é, a aplicação x não depende da escolha da coordenada homogênea de Γ .

3.2.8 — Vejamos agora que x não depende das coordenadas isotérmicas de S^2 . Sejam z e w , coordenadas isotérmicas de S^2 e vizinhanças, respectivamente, de $z = 0$ e $w = w_0$ nas quais $z = z(w)$ e $0 = z(w_0)$.

Suponha que tenhamos obtido $x(z)$ e $x(w)$, como em (3.2.5). Se $\xi(z)$ for coordenada homogênea de Γ , considere $\xi(w) = \xi(z(w))$. Então,

$$(16) \quad \xi^{(j)}(w) = \left(\frac{dz}{dw} \right)^j \xi^{(j)}(z) + (\text{comb. linear de } \xi^{(j-1)}(z), \dots, \xi(z))$$

para todo $1 \leq j \leq m$.

Seguindo raciocínio análogo a (3.2.7), teremos :

(i) $\xi^{(m)}(w) \wedge \dots \wedge \xi(w) = 0$ se, e somente se, $\xi^{(m)}(z) \wedge \dots \wedge \xi(z) = 0$;

(ii) Seja U na vizinhança de $z = 0$ na qual $z = z(w)$ e $\xi^{(m)}(z) \wedge \dots \wedge \xi(z) \neq 0$ então, $V(z) = V(w)$ e $\bar{V}(z) = \bar{V}(w)$ em C^{2m+1} , por (16).

Portanto, $X(z) = X(w)$ e

$$\eta_0(w) = \left(\frac{dz}{dw} \right)^m \eta_0(z);$$

Consequentemente,

$$v_0(w) = \left(\frac{dz}{dw} \right)^m v_0(z).$$

Deste modo, podemos concluir que

$$x(w) = \frac{1}{v_0(w)} \eta_0(w) = \frac{1}{v_0(z)} \eta_0(z) = x(z).$$

nos pontos onde $z = z(w)$ e $v_0(z)$ e $v_0(w)$ são não nulos. A igualdade acima se estende, por continuidade, aos pontos nos quais $v_0(z) = v_0(w) = 0$.

3.2.9 — Observe que com (3.2.7) temos que a aplicação x fica bem definida em uma vizinhança de $z = 0$ pois não depende da particular coordenada homogênea de Γ . Agora, (3.2.8) nos diz que x fica definida globalmente sobre S^2 pois, podemos tomar um recobrimento por abertos de S^2 , que sejam domínios de coordenadas isotérmicas, nos quais estejam definidas $x(z)$. Além disso, esta aplicação fica determinada, essencialmente, de modo único (como vimos, basta fixar a orientação para o referencial $\{x, e_1, e_2, \dots, e_{2m}\}$).

3.2.10 — PROPOSIÇÃO. Seguindo as notações anteriores e se denotarmos $E_0 = x, E_{m+1} \equiv 0$, em torno de $z = 0$, teremos :

(i) $dE_{m-j} \equiv 0 \text{ mod } (E_{m-j-1}, E_{m-j}, E_{m-j+1})$ para todo $0 \leq j \leq m-1$;

(ii) $dE_0 = dx \equiv 0 \text{ mod } (E_1, \bar{E}_1)$

(onde denotamos $v \equiv 0 \text{ mod } (v_1, \dots, v_n)$, para indicar que, v fica sendo combinação linear de $v_1, \dots, v_n$)

(iii) $(dE_{m-j}, \bar{E}_{m-j-1}) = \frac{2u_{m-j}z^{n_j+1}}{u_{m-j-1}z^{n_j}} dz$, para todo $1 \leq j \leq m-2$

(iv) $(dE_m, \bar{E}_{m-1}) = \frac{2\sqrt{2}z^{n_1}}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}} u_{m-1}} dz$;

$$(v) \quad (dE_1, x) = \frac{u_1 u_0}{z^{n_{m-1}}} dz.$$

Prova : Será feita por indução sobre $0 \leq j \leq m-1$. Para $j=0$, da definição de E_m , temos

$$dE_m = (\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}} d \left(\frac{1}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}}} \right) E_m + \frac{\sqrt{2}}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{z^{n_1}}{u_{m-1}} dz E_{m-1} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)}, \bar{E}_m) E_m \right]$$

donde,

$$dE_m \equiv 0 \text{ mod } (E_{m-1}, E_m).$$

Além disso,

$$(dE_m, \bar{E}_{m-1}) = \frac{2\sqrt{2}z^{n_1}}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}} u_{m-1}} dz.$$

O que prova (iv). Suponhamos agora que a hipótese seja satisfeita para todo $0 \leq k < j \leq m-1$, k inteiro, isto é,

$$dE_{m-k} \equiv 0 \text{ mod } (E_{m-k-1}, E_{m-k}, E_{m-k+1}).$$

Do fato de $(E_{m-j}, \bar{E}_{m-k}) = 2\delta_{jk}$ decorre que,

$$(dE_{m-j}, \bar{E}_{m-k}) + (E_{m-j}, d\bar{E}_{m-k}) = 0.$$

para todo $0 \leq k \leq m$. Mas, pela construção de E_{m-j} temos

$$\begin{aligned} dE_{m-j} &\equiv 0 \text{ mod } (\xi^{(j+1)}, \xi^{(j)}, \dots, \xi) \\ &\equiv 0 \text{ mod } (E_{m-j-1}, E_{m-j}, \dots, E_m) \end{aligned}$$

Assim,

$$(dE_{m-j}, \bar{E}_{m-k}) = 0$$

para todo $k > j+1$. Por hipótese de indução, para todo $k < j-1$,

$$d\bar{E}_{m-k} \equiv 0 \text{ mod } (\bar{E}_{m-k-1}, \bar{E}_{m-k}, \bar{E}_{m-k+1})$$

E, daí obtemos

$$(\bar{E}_{m-k}, E_{m-j}) \equiv 0 \text{ mod } (\delta_{(k+1)j}, \delta_{kj}, \delta_{(k-1)j}) \equiv 0.$$

Portanto, para $k > j$ ou $k < j-1$, vemos

$$(dE_{m-j}, \bar{E}_{m-k}) = 0.$$

Isto é,

$$dE_{m-j} \equiv 0 \text{ mod } (E_{m-j-1}, E_{m-j}, E_{m-j+1})$$

Além disso, para $0 < j \leq m-1$,

$$dE_{m-j} = d \left\{ \frac{u_{m-j}}{z^{n_j}} \left[\xi^{(j)} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} (\xi^{(j)}, \bar{E}_{m-k}) E_{m-k} \right] \right\}$$

Portanto,

$$(dE_{m-j}, \bar{E}_{m-j-1}) = \frac{u_{m-j}}{z^{n_j}} (\xi^{(j+1)}, \bar{E}_{m-j-1}) dz.$$

Mas,

$$(\xi^{(j+1)}, \bar{E}_{m-j-1}) = \frac{z^{n_{j+1}}}{u_{m-j-1}} (E_{m-j-1}, \bar{E}_{m-j-1})$$

para $0 < j \leq m-2$. Isto é,

$$(dE_{m-j}, \bar{E}_{m-j-1}) = \frac{2u_{m-j}z^{n_{j+1}}}{u_{m-j-1}z^{n_j}} dz.$$

O que prova (iii). No caso $j = m-1$,

$$(\xi^{(m)}, \bar{E}_0) = (\xi^{(m)}, x) = (\eta_0, x) = v_0.$$

Ou seja,

$$(dE_1, x) = \frac{u_1 v_0}{z^{n_{m-1}}} dz.$$

O que prova (v). Basta-nos para completar, verificar (ii). Para isto, observe que, $(x, E_k) = (x, \bar{E}_k) = 0$ para todo $1 \leq k \leq m$ e portanto,

$$(dx, E_k) + (x, dE_k) = (dx, \bar{E}_k) + (x, d\bar{E}_k) = 0.$$

O que implica por (i) em

$$(dx, E_k) = (dx, \bar{E}_k) = 0$$

para todo $2 \leq k \leq m$. Isto é,

$$dx \equiv 0 \text{ mod } (E_1, \bar{E}_1).$$

O que prova (ii).

3.3 — Condição para x ser Imersão

3.3.1 — Os pontos de S^2 , em uma vizinhança de $z = 0$, na qual x deixa de ser imersão são aqueles tais que $dx(z)(v) = 0$ para todo $v \in T_{x(z)}^{S^2}$.

Seja $\varphi = (dx, \bar{E}_1)$, assim

$$dx = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}E_1 + \varphi\bar{E}_1).$$

Desse modo, $dx \equiv 0$ se, e somente se, $\varphi \equiv 0$. Mas, por (v) da proposição (3.2.10),

$$(17) \quad \varphi = -(dE_1, x) = -\frac{u_1 v_0}{z^{n_m-1}} dz$$

O que implica em que os pontos nos quais $\varphi \equiv 0$ são isolados (pois os zeros de v_0 são isolados). Isto mostra que a aplicação x dada localmente por (3.2.5) é uma imersão generalizada.

3.3.2 — Pretendemos estabelecer uma condição necessária e suficiente para que x seja uma imersão em $z = 0$, a partir de Γ .

Suponha que Γ seja dada, localmente, por ξ , coordenada homogênea, em uma vizinhança de $z = 0$.

Sejam $l_1, l_2, \dots, l_m$, inteiros positivos, satisfazendo,

$$\frac{1}{z^{l_1}}(\xi \wedge \xi^{(1)}) \Big|_{z=0} \neq 0, \dots, \frac{1}{z^{l_m}}(\xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \dots \wedge \xi^{(m)}) \Big|_{z=0} \neq 0.$$

Observe que, sendo ξ holomorfa e $\xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \dots \wedge \xi^{(m)} \neq 0$ por hipótese, segue que existem tais inteiros. Além disso, por (12) de (3.2.7) se $\psi = f\xi$ for uma outra coordenada homogênea de Γ teremos

$$\psi \wedge \dots \wedge \psi^{(j)} = (f)^{j+1} \xi \wedge \dots \wedge \xi^{(j)}$$

E portanto, $l_1, l_2, \dots, l_m$ não dependem da particular coordenada homogênea considerada. Fazendo-se $l_0 = 0$ (pois $\xi(0) \neq 0$) temos, $l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m$.

Sabemos por (3.2.4) que

$$\frac{1}{z^{n_j}}(E_m \wedge E_{m-1} \wedge \dots \wedge E_{m-j+1} \wedge \xi^{(j)}) \Big|_{z=0} \neq 0$$

para todo $0 \leq j \leq m-1$ ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{z^{(n_1+\dots+n_j)}}(\xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \dots \wedge \xi^{(j)}) \Big|_{z=0} \neq 0$$

Portanto, para $0 \leq j \leq m-1$, $l_j = n_1 + \dots + n_j$.

Mas, por (10) de (3.2.5) temos

$$|v_0|^2 = \frac{|u_1|^2 \dots |u_{m-1}|^2 |z|^{2l_m}}{2^{m-1}(\xi, \bar{\xi})|z|^{2(n_1+\dots+n_{m-1})}} \frac{(\xi \wedge \dots \wedge \xi^{(m)}, \bar{\xi} \wedge \dots \wedge \bar{\xi}^{(m)})}{|z|^{2l_m}}$$

O que nos leva a

$$(18) \quad \frac{1}{z^{l_m - l_{m-1}}} v_0 \Big|_{z=0} \neq 0$$

Comparando (18) acima com (17) de (3.3.1) chegaremos ao seguinte resultado:

3.3.3 — PROPOSIÇÃO. A aplicação $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, dada localmente por (3.2.5), é uma imersão em $z = 0$ se, e somente se,

$$l_{m-1} = \frac{l_{m-2} + l_m}{2}$$

Prova : x será uma imersão em $z = 0$ se, e somente se, $\varphi|_{z=0} \neq 0$, o que equivale, por (17) de (3.3.1), a

$$\frac{v_0}{z^{n_{m-1}}} \Big|_{z=0} \neq 0$$

Agora, por (18) de (3.3.2), isso é equivalente a $n_{m-1} = l_{m-1} - l_{m-2} = l_m - l_{m-1}$. Donde segue o resultado.

3.3.4 — LEMA. Seja ξ uma curva holomorfa de C^{2m+1} tal que, $\xi(0) \neq 0$ e $\xi \wedge \xi^{(1)} \equiv 0 \bmod z^n$, para algum $n \geq 0$, inteiro. Então, existe $0 \neq A \in C^{2m+1}$ e $a_i \in C$, $1 \leq i \leq n$, constantes, satisfazendo:

$$\xi \equiv A(1 + a_1 z + \dots + a_n z^n) \bmod z^{n+1}$$

Prova : Será feita por indução sobre $n \geq 0$. Para $n = 0$, nada há para demonstrar pois, temos ξ holomorfa e $\xi(0) \neq 0$.

Suponhamos as hipóteses satisfeitas para $n - 1$ e que

$$\xi \wedge \xi^{(1)} \equiv 0 \bmod z^n.$$

Isto implica em $\xi \wedge \xi^{(1)} \equiv 0 \bmod z^{n-1}$. Pela hipótese de indução, existe $A \neq 0$ e $a_i \in C$, $1 \leq i \leq n$, constantes e tal que

$$\xi \equiv A(1 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}) \bmod z^n$$

Assim,

$$\xi \equiv [A(1 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}) + A_1 z^n] \bmod z^{n+1}$$

pois ξ é analítica em uma vizinhança de $z = 0$. Portanto,

$$\xi^{(1)} \equiv \{A[a_1 + \dots + (n-1)a_{n-1}z^{n-2}] + nA_1z^{n-1}\} \bmod z^n$$

Neste caso,

$$\xi \wedge \xi^{(1)} \equiv n(A \wedge A_1)z^{n-1} \bmod z^n \equiv 0 \bmod z^n$$

Isto é, $A \wedge A_1 = 0$. Existe então, $a_n \in C$ e tal que $A_1 = a_n A$. Donde segue o resultado, para todo $n \geq 0$, inteiro.

3.3.5 — Usaremos o lema (3.3.4) para estabelecermos uma condição suficiente para que x seja uma imersão em $z = 0$.

Seja $n \geq 0$, inteiro, satisfazendo

$$\left. \frac{1}{z^n} \xi \wedge \xi^{(1)} \right|_{z=0} \neq 0$$

Temos pelo lema (3.3.4) que existem $A_0 \neq 0$, constante, e um polinômio $p_n(z) = 1 + a_1z + \dots + a_nz^n$, tais que

$$\xi \equiv A_0(p_n) \bmod z^{n+1}$$

Sendo ξ analítica em $z = 0$,

$$\xi = A_0(p_n) + A_1z^{n+1} + \dots + A_kz^{n+k} + \dots$$

E assim,

$$\xi^{(j)} \equiv [(comb. linear, A_0, \dots, A_{j-1}) + (n+j) \dots (n+1)A_jz^n] \bmod z^{n+1}$$

para todo $j \geq 0$, inteiro. Isto nos leva a que

$$\begin{aligned} \xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \dots \wedge \xi^{(j)} \equiv \\ (n+1)^j (n+2)^{j-1} \dots (n+j) z^{jn} A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_j \bmod z^{jn+1} \end{aligned}$$

3.3.6 — COROLÁRIO. Suponhamos que $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \neq 0$. Então, $x: S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, obtida a partir de Γ é uma imersão em $z = 0$.

Prova : Temos, $A_0 \wedge \dots \wedge A_j \neq 0$ para todo $0 \leq j \leq m$. Portanto, usando a notação de (3.3.2),

$$l_m = mn, l_{m-1} = (m-1)n \text{ e } l_{m-2} = (m-2)n$$

Logo,

$$l_{m-1} = \frac{l_m + l_{m-2}}{2}$$

Ou seja x será uma imersão em $z = 0$, pela proposição (3.3.3).

3.3.7 — COROLÁRIO. Se $m = 2$ e $x : S^2 \rightarrow S^4(1)$, é obtida a partir de ξ como em (3.2.5) então, x será uma imersão em $z = 0$ se, e somente se, $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \neq 0$.

Prova : x será uma imersão em $z=0$ se, e somente se,

$$l_{m-1} = \frac{l_m + l_{m-2}}{2}$$

pela proposição (3.3.3). Para $m = 2$, $l_{m-2} = 0$ e $l_{m-1} = n$. Portanto, $l_m = 2n$ o que por (3.3.5) implica em $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \neq 0$. Reciprocamente, se $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \neq 0$ x é uma imersão em $z = 0$, pelo corolário (3.3.6).

3.3.8 — Exemplo :[07] Seja $\Gamma : S^2 \rightarrow P^4(C)$ dada por

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_1 &= iq \left(1 + \frac{p-q}{p+q} z^{2p} \right), \quad \xi_2 = q \left(1 - \frac{p-q}{p+q} z^{2p} \right) \\ \xi_3 &= ipz^{p-q} \left(1 - \frac{p-q}{p+q} z^{2q} \right), \quad \xi_4 = pz^{p-q} \left(1 + \frac{p-q}{p+q} z^{2q} \right) \\ \xi_5 &= -2i(p-q)z^p. \end{aligned}$$

com $1 \leq q < p$, inteiros. Podemos escrever,

$$\xi = A_0 + A_1 z^{p-q} + A_2 z^p + A_3 z^{p+q} + A_4 z^{2p}$$

onde,

$$\begin{aligned} A_0 &= (iq, q, 0, 0, 0), \quad A_1 = (0, 0, ip, p, 0) \\ A_2 &= (0, 0, 0, 0, -2i(p-q)), \quad A_3 = (0, 0, -\frac{ip(p-q)}{p+q}, \frac{p(p-q)}{p+q}, 0) \\ A_4 &= (iq \frac{(p-q)}{p+q}, -q \frac{(p-q)}{p+q}, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \{A_0, A_0\} &= \{A_0, A_1\} = \{A_0, A_2\} = \{A_0, A_3\} = 0 \\ \{A_1, A_1\} &= \{A_1, A_2\} = \{A_1, A_4\} = 0 \\ \{A_2, A_3\} &= \{A_2, A_4\} = 0 \\ \{A_3, A_3\} &= \{A_3, A_4\} = 0 \\ \{A_4, A_4\} &= 0 \end{aligned}$$

Além disso,

$$(A_0, A_4) = -2p^2 \left(\frac{p-q}{p+q} \right)$$

$$(A_1, A_3) = 2p^2 \left(\frac{p-q}{p+q} \right)$$

$$(A_2, A_2) = -4(p-q)^2$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\xi, \xi) = & (A_0, A_0) + 2(A_0, A_1)z^{p-q} + 2(A_0, A_2)z^p + \\ & + 2(A_0, A_3)z^{p+q} + [2(A_0, A_4) + 2(A_1, A_3) + (A_2, A_2)]z^{2p} + \\ & + (A_1, A_1)z^{2(p-q)} + 2(A_1, A_2)z^{2p-q} + 2(A_1, A_4)z^{3p-q} + \\ & + 2(A_2, A_3)z^{2p+m} + 2(A_2, A_4)z^{3p} + (A_3, A_3)z^{2(p+q)} + \\ & + 2(A_3, A_4)z^{3p+q} + (A_4, A_4)z^{4p} = 0 \end{aligned}$$

$$\xi^{(1)} = (p-q)A_1z^{p-q-1} + pA_2z^{p-1} + (p+q)A_3z^{p+q-1} + 2pA_4z^{2p-1}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} (\xi^{(1)}, \xi^{(1)}) = & (p-q)^2(A_1, A_1)z^{2p-2q-2} + 2(p-q)p(A_1, A_2)z^{2p-q-2} + \\ & + [2(p^2-q^2)(A_1, A_3) + p^2(A_2, A_2)]z^{2p-2} + 2p(p-q)(A_1, A_4)z^{3p-q-2} + \\ & + 2p(p+q)(A_2, A_3)z^{2p+q-2} + 4p^2(A_2, A_4)z^{3p-2} + (p+q)^2(A_3, A_3)z^{2p+2q-2} + \\ & + 4p(p+q)(A_3, A_4)z^{3p+q-2} + 4p^2(A_4, A_4)z^{4p-2} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{pois, } 2(p^2-q^2)(A_1, A_3) + p^2(A_2, A_2) = 0.$$

Temos,

$$\xi \wedge \xi^{(1)} \equiv (p-q)(A_0 \wedge A_1)z^{p-q-1} \text{ mod } z^{p-q}$$

Sejam $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 5$ dados por $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in C^5$. Então,

$$A_0 \wedge A_1 = qp[-e_1 \wedge e_3 + ie_1 \wedge e_4 + ie_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4] \neq 0$$

e portanto,

$$\frac{1}{z^{p-q-1}} \xi \wedge \xi^{(1)} \Big|_{z=0} \neq 0$$

Usando a notação de (3.3.2) teremos, $l_1 = p-q-1$.

Agora,

$$\xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \equiv p(p-1)(p-q)A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 z^{2p-q-3} \text{ mod } z^{2p-q-2}$$

Ou seja, $\xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \neq 0$ e,

$$\frac{1}{z^{2p-q-3}} \xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \Big|_{z=0} \neq 0$$

pois,

$$\begin{aligned} A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 = \\ = 2qp(p-q) [ie_1 \wedge e_3 \wedge e_5 - e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_4 \wedge e_5] \neq 0 \end{aligned}$$

Assim, Γ satisfaz as condições de (3.2.2) além disso, $l_2 = 2p - q - 3$, seguindo (3.3.2).

A aplicação x , obtida a partir de Γ , é uma imersão em $z = 0$, pela proposição (3.3.3) se, e somente se, $2p - q - 3 = 2(p - q - 1)$ ou seja, se, e somente se, $q = 1$. (Observe que o " A_2 " da curva ξ será o " A_2 " do corolário (3.3.7) se, e somente se, $q = 1$).

Tomando-se coordenadas homogêneas de Γ , em torno de $z = \infty$ obtemos,

$$\begin{aligned} \xi &= A_0 z^{2p} + A_1 z^{p+q} + A_2 z^p + A_3 z^{p-q} + A_4 \\ \xi^{(1)} &= 2p A_0 z^{2p-1} + (p+q) A_1 z^{p+q-1} + p A_2 z^{p-1} + (p-q) A_3 z^{p-q-1} \\ \xi^{(2)} &= 2p(2p-1) A_0 z^{2p-2} + (p+q)(p+q-1) A_1 z^{p+q-2} + p(p-1) A_2 z^{p-2} + \\ &= +(p-q)(p-q-1) A_3 z^{p-q-2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\xi \wedge \xi^{(1)} \equiv (p-q) A_4 \wedge A_3 z^{p-q-1} \text{ mod } z^{p-q}$$

e

$$\xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \equiv (p-q)(p-1)p A_4 \wedge A_3 \wedge A_2 z^{2p-q-3} \text{ mod } z^{2p-q-2}$$

Como,

$$A_4 \wedge A_3 = \frac{qp(p-q)^2}{(p+q)^2} (e_1 \wedge e_3 + ie_2 \wedge e_3 + ie_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_4)$$

$$A_4 \wedge A_3 \wedge A_2 =$$

$$\frac{qp(p-q)^2}{(p+q)^2} (-ie_1 \wedge e_3 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 + e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 + ie_2 \wedge e_4 \wedge e_5) \neq 0$$

Dai segue que $l_1 = p - q - 1$, $l_2 = 2p - q - 3$ e x será uma imersão em $z = \infty$ se, e somente se, $q = 1$. Logo, Γ determina uma imersão mínima $x: S^2 \rightarrow S^4(1)$, menos em $z = 0$ e $z = \infty$, quando $q > 1$.

3.4 — Verificação de que x é uma Imersão Mínima Generalizada

3.4.1 — Vimos que $x: S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, dada localmente por (3.2.5), é uma imersão, menos possivelmente, em um conjunto de pontos isolados. Verificaremos agora que x obtida é de fato mínima nos pontos onde for imersão.

3.4.2 — Consideremos $E_1, E_2, \dots, E_m$ como em (3.2.4) e x obtida como em (3.2.5). Definimos o referencial local, $e_1, e_2, \dots, e_{2m}$ por,

$$e_{2j-1} = \frac{E_j + \bar{E}_j}{2}, \quad e_{2j} = \frac{E_j - \bar{E}_j}{2i}$$

para todo $1 \leq j \leq m$. Por (ii) da proposição (3.2.10) segue que e_1 e e_2 são tangentes à S^2 , isto é, o referencial acima é adaptado à imersão. Sejam $\{w_A\}$ o coreferencial e $\{w_{AB}\}$ as 1-formas de conexão associadas a $\{e_A\}$. Assim,

$$de_1 = -w_1 x + \sum_{j=1}^{2m} w_{1j} e_j$$

$$de_2 = -w_2 x + \sum_{j=1}^{2m} w_{2j} e_j$$

e

$$\varphi = (dx, \bar{E}_1) = w_1 + iw_2$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dE_1 &= -\varphi x - iw_{12} E_1 + \sum_{j=3}^{2m} (w_{1j} + iw_{2j}) e_j = \\ &= -\varphi x - iw_{12} E_1 + \sum_{j=2}^m (w_{1(2j-1)} + iw_{2(2j-1)}) \frac{E_j + \bar{E}_j}{2} + \\ &\quad + \sum_{j=2}^m (w_{1(2j)} + iw_{2(2j)}) \frac{E_j - \bar{E}_j}{2i} \end{aligned}$$

E, como $(dE_1, E_j) = 0$ para todo $2 \leq j \leq m$, temos

$$w_{1(2j-1)} - w_{2(2j)} + i(w_{2(2j-1)} + w_{1(2j)}) = 0$$

Ou seja,

$$(19) \quad w_{1(2j-1)} = w_{2(2j)} \quad e \quad w_{2(2j-1)} = -w_{1(2j)}$$

Sejam $\{h_{aij}\}$ os coeficientes da segunda forma fundamental B^1 , relativamente ao referencial $\{e_A\}$. Neste caso, substituindo em (19), obtemos

$$h_{(2j-1)11} w_1 + h_{(2j-1)12} w_2 = h_{(2j)12} w_1 + h_{(2j)22} w_2$$

$$h_{(2j-1)12} w_1 + h_{(2j-1)22} w_2 = -h_{(2j)11} w_1 - h_{(2j)12} w_2$$

Isto é,

$$h_{(2j-1)11} = h_{(2j)12} \quad , \quad h_{(2j-1)22} = -h_{(2j)12}$$

e

$$h_{(2j-1)12} = h_{(2j)22} \quad , \quad h_{(2j-1)12} = -h_{(2j)11}$$

Assim,

$$h_{(2j-1)11} + h_{(2j-1)22} = 0 \quad e \quad h_{(2j)11} + h_{(2j)22} = 0$$

para todo $2 \leq j \leq m$.

Consequentemente, a imersão generalizada $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, é mínima.

3.5 — As Equações de Frenet-Boruvka

3.5.1 — Seja $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$ dada por (3.2.5). Seguindo as notações anteriores, sabemos da proposição (3.2.10) que $dE_j \equiv 0 \text{ mod } (E_{j-1}, E_j, E_{j+1})$ para todo $1 \leq j \leq m$ e que $dx \equiv 0 \text{ mod } (E_1, \bar{E}_1)$. Desse modo,

$$d^2x \equiv 0 \text{ mod } (x, E_1, dE_1, \bar{E}_1, d\bar{E}_1) \equiv 0 \text{ mod } (x, E_1, \bar{E}_1, E_2, \bar{E}_2)$$

Assim, se D for a conexão de Levi-Civita de $S^{2m}(1)$, temos que $Dx \equiv dx$ e $D^2x \equiv 0 \text{ mod } (E_1, \bar{E}_1, E_2, \bar{E}_2)$. Ou seja, $Osc^2 S^2$ será gerado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Seguindo, recursivamente, chegaremos a

$$d^k x \equiv 0 \text{ mod } (x, E_1, E_2, \dots, E_k, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k)$$

Isto é,

$$D^k x \equiv 0 \text{ mod } (E_1, E_2, \dots, E_k, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k)$$

Mas, pela proposição (3.2.10) decorre que dE_j se anula, possivelmente, apenas em um conjunto de pontos isolados de S^2 , para todo $1 \leq j \leq m$. Em particular, nos pontos nos quais dE_m não é nulo, os espaços osculadores $Osc^k S^2$ são gerados, pontualmente, por $\{e_1, e_2, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}\}$ para cada $1 \leq k \leq m$. Assim, o plano normal N^{m-1} a $Osc^{m-1} S^2$ relativamente a $Osc^m S^2$, é gerado por e_{2m-1} e e_{2m} . Isto significa (pela definição de curva diretriz) que E_m é coordenada homogênea da curva diretriz da imersão mínima generalizada $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$. Ou seja, Γ é a curva diretriz de x .

3.5.2 — Determinaremos agora, as equações de Frenet-Boruvka, relativamente à imersão mínima generalizada $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$ obtida, localmente, por (3.2.5).

Da proposição (3.2.10) temos :

$$(i) \quad (dE_{m-j}, \bar{E}_{m-j-1}) = \frac{2u_{m-j}z^{n_{j+1}}}{u_{m-j-1}z^{n_j}} dz, \quad 1 \leq j \leq m-2$$

$$(ii) \quad (dE_m, \bar{E}_{m-1}) = \frac{2\sqrt{2}z^{n_1}}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}} u_{m-1}} dz$$

$$(iii) \quad (dE_1, x) = -\varphi = \frac{u_1 v_0}{z^{n_{m-1}}} dz$$

Nos pontos onde x for imersão, podemos escrever :

$$(i) \quad (dE_{m-j}, \bar{E}_{m-j-1}) = -\frac{2u_{m-j}z^{n_{j+1}+n_{m-1}}}{u_1 u_{m-j-1} v_0 z^{n_j}} \varphi, \quad 1 \leq j \leq m-2$$

$$(ii) \quad (dE_m, \bar{E}_{m-1}) = -\frac{2\sqrt{2}z^{n_1+n_{m-1}}}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}} u_1 u_{m-1} v_0} \varphi$$

Seguindo, recursivamente, sobre $1 \leq j \leq m-1$, podemos tomar, em uma vizinhança de $z = 0$, $u_{m-1}, u_{m-2}, \dots, u_1$ de modo que, tenhamos

$$-\frac{u_1 v_0}{z^{n_{m-1}}}, \frac{2\sqrt{2}z^{n_1+n_{m-1}}}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}} u_1 u_{m-1} v_0}, \dots, \frac{2u_{m-j}z^{n_{j+1}+n_{m-1}}}{u_1 u_{m-j-1} v_0 z^{n_j}}, \dots$$

reais positivos pois, do modo como obtivemos o referencial $E_{m-1}, \dots, E_1$, os coeficientes $u_{m-1}, \dots, u_1$ estavam determinados unicamente por $|u_{m-1}|^2, \dots, |u_1|^2$ satisfazendo (8) de (3.2.4).

Desta maneira, temos

$$(a) \quad \varphi = \lambda dz, \quad \lambda = -\frac{u_1 v_0}{z^{n_{m-1}}}$$

$$(b) \quad dE_1 = -\varphi x - i w_{12} E_1 + k_1 \bar{\varphi} E_2$$

$$(c) \quad dE_j = -k_{j-1} \varphi E_{j-1} - i w_{2j-1,2j} E_j + k_j \bar{\varphi} E_{j+1}, \quad 2 \leq j \leq m$$

onde $k_0 = k_m = 0$

$$(20) \quad k_{m-j-1} = \frac{u_{m-j} z^{n_{j+1}+n_{m-1}}}{u_1 u_{m-j-1} v_0 z^{n_j}}, \quad 1 \leq j \leq m-2$$

$$k_{m-1} = \frac{\sqrt{2} z^{n_1+n_{m-1}}}{(\xi, \bar{\xi})^{\frac{1}{2}} u_1 u_{m-1} v_0}$$

e, $\{w_{AB}\}$ são as 1-formas de conexão em $S^{2m}(1)$, associados a $\{e_A\}$.

Vejamos agora que estas equações são as de Frenet-Boruvka. Para isto, sejam $\{h_{\lambda, i_1 i_2 \dots i_{j+1}}\}$ os coeficientes de B^j relativamente a $\{e_A\}$ adaptado aos espaços osculadores. Temos, $h_{\lambda, i_1 i_2 \dots i_{j+1}} = 0$ para todo $\lambda_j \geq 2j + 3$.

Além disso,

$$DE_1 = \sum_{A=1}^{2m} (w_{1A} + w_{2A}) e_A$$

E, comparando com (b) acima decorre que,

$$\begin{aligned} w_{13} + iw_{23} &= k_1(w_1 - iw_2) \\ w_{14} + iw_{24} &= ik_1(w_1 - iw_2) \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} h_{311}w_1 + h_{312}w_2 &= k_1w_1, \quad h_{312}w_1 - h_{311}w_2 = -k_1w_2 \\ h_{411}w_1 + h_{412}w_2 &= k_1w_2, \quad h_{412}w_1 - h_{411}w_2 = k_1w_1 \end{aligned}$$

Daí obtemos, $k_1 = h_{311} = h_{412}$ e $h_{312} = h_{411} = 0$. Da definição de r_1 temos $r_1 = \|B^1(e_1, e_1)\|$, onde

$$B^1(e_1, e_1) = h_{311}e_3 + h_{411}e_4, \quad B^1(e_1, e_2) = h_{312}e_3 + h_{412}e_4.$$

Então,

$$k_1 = r_1 = \|B^1(e_1, e_1)\| = \|B^1(e_1, e_2)\|$$

Ou seja, as elipses de curvatura ϵ^1 são circunferências e

$$e_3 = \frac{1}{k_1} B^1(e_1, e_1), \quad e_4 = \frac{1}{k_1} B^1(e_1, e_2)$$

Mais geralmente, suponhamos que para $3 \leq j \leq m-1$

$$r_{j-1} = h_{(2j-1)11\dots 1} = \|B^{j-1}(e_1, e_1, \dots, e_1)\|$$

$$r_{j-2} = h_{(2j-3)11\dots 1} = \|B^{j-2}(e_1, e_1, \dots, e_1)\|$$

com, $r_0 = 1$ e,

$$\begin{aligned} h_{(2j-1)11\dots 1} &= h_{(2j)1\dots 12} = r_{j-1} \\ h_{(2j-1)1\dots 12} &= h_{(2j)11\dots 1} = 0 \end{aligned}$$

Isto é, as elipses de curvatura $\epsilon^{(j-1)}$ são circunferências. Assim,

$$e_{2j-1} = \frac{1}{r_{j-1}} B^{j-1}(e_1, e_1, \dots, e_1), \quad e_{2j} = \frac{1}{r_{j-1}} B^{j-1}(e_1, \dots, e_1, e_2)$$

Usando a relação (c) acima e o fato de,

$$dE_j = DE_j = \sum_{A=1}^{2m} (w_{(2j-1)A} + iw_{(2j)A})e_A$$

para $2 \leq j \leq m-1$, teremos,

$$\begin{aligned} w_{(2j-1)(2j+1)} + iw_{(2j)(2j+1)} &= k_j(w_1 - iw_2) \\ w_{(2j-1)(2j+2)} + iw_{(2j)(2j+2)} &= ik_j(w_1 - iw_2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (21) \quad w_{(2j-1)(2j+1)} &= k_j w_1, \quad w_{(2j)(2j+1)} = -k_j w_2 \\ w_{(2j-1)(2j+2)} &= k_j w_2, \quad w_{(2j)(2j+2)} = k_j w_1 \end{aligned}$$

Mas, por (15) de (1.4.11)

$$h_{(2j-1)11\dots 1} w_{(2j-1)(2j+1)} + h_{(2j)11\dots 1} w_{(2j)(2j+1)} = h_{(2j+1)11\dots 1} w_1 + h_{(2j+1)1\dots 12} w_2$$

Isto é,

$$r_{j-1} w_{(2j-1)(2j+1)} = h_{(2j+1)11\dots 1} w_1 + h_{(2j+1)1\dots 12} w_2$$

pois, $h_{(2j-1)11\dots 1} = r_{j-1}$ e $h_{(2j)11\dots 1} = 0$.

De (21) obtemos,

$$(22) \quad r_{j-1} k_j w_1 = h_{(2j+1)11\dots 1} w_1 + h_{(2j+1)1\dots 12} w_2$$

Assim, $h_{(2j+1)1\dots 12} = 0$.

Analogamente, temos

$$h_{(2j-1)11\dots 1} w_{(2j-1)(2j+2)} + h_{(2j)11\dots 1} w_{(2j)(2j+2)} = h_{(2j+2)11\dots 1} w_1 + h_{(2j+2)1\dots 12} w_2$$

De (21) segue que

$$r_{j-1} k_j w_2 = h_{(2j+2)11\dots 1} w_1 + h_{(2j+2)1\dots 12} w_2$$

Logo, $h_{(2j+2)11\dots 1} = 0$. E, comparando com (22) chegaremos à

$$B^j(e_1, e_1, \dots, e_1) = h_{(2j+1)11\dots 1} e_{2j+1}$$

$$B^j(e_1, \dots, e_1, e_2) = h_{(2j+2)1\dots 12} e_{2j+2}$$

Como, $r_{j-1} k_j = h_{(2j+1)11\dots 1} > 0$, então, $r_{j-1} k_j = r_j$, ou seja,

$$k_j = \frac{r_j}{r_{j-1}}$$

Logo, os coeficientes $k_1, \dots, k_{m-1}$ obtidos em (20), nos pontos em que estes coeficientes são não nulos (observe que estes são nulos apenas em um conjunto de pontos isolados de S^2), juntamente com (a), (b) e (c) acima, determinam as equações de Frenet-Boruvka, da imersão generalizada $x: S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$.

3.5.3 — PROPOSIÇÃO. Sejam $\langle e_A, w_A, w_{AB} \rangle$ e $\langle e'_A, w'_A, w'_{AB} \rangle$ referenciais locais, definidos em uma vizinhança na qual todo ponto é regular e ambos adaptados à imersão mínima generalizada $x: S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$. Considere os campos complexificados $E_1, E_2, \dots, E_m$ e $E'_1, E'_2, \dots, E'_m$ definidos para cada $1 \leq j \leq m$, respectivamente, por $E_j = e_{2j-1} + ie_{2j}$ e $E'_j = e'_{2j-1} + ie'_{2j}$. Suponha ainda que, $dE_j \equiv 0 \text{ mod}(E_{j-1}, E_j, E_{j+1})$ e $dE'_j \equiv 0 \text{ mod}(E'_{j-1}, E'_j, E'_{j+1})$, para $1 \leq j \leq m$, com $E_0 = E'_0 = x$ e $E_{m+1} = E'_{m+1} = 0$. Então, nesta vizinhança, $E'_j \equiv E_j$, como curvas em $P^{2m}(C)$, para todo $1 \leq j \leq m$.

Prova: Podemos supor, sem perda de generalidade que $x(S^2)$ não está contida em algum subespaço de R^{2m+1} . Sejam, $\varphi = w_1 + iw_2$ e $\varphi' = w'_1 + iw'_2$ na vizinhança considerada, na qual todo ponto é regular. Sendo o referencial adaptado à imersão, temos que $E'_1 = e^{i\theta_1} E_1$, θ_1 diferenciável em uma vizinhança do ponto considerado. Deste modo,

$$(23) \quad dE_1 = -\varphi x - w_{12} E_1 + \lambda_1 E_2, \quad dE'_1 = -\varphi' x - w'_{12} E'_1 + \lambda'_1 E'_2$$

com λ_1 e $\lambda'_1 \neq 0$, pois, $dE_1 \equiv 0 \text{ mod}(x, E_1, E_2)$ e $dE'_1 \equiv 0 \text{ mod}(x, E'_1, E'_2)$ e o ponto sendo regular. Por outro lado,

$$dE'_1 = d(e^{i\theta_1}) E_1 = de^{i\theta_1} E_1 + e^{i\theta_1} dE_1$$

Comparando isto com (23), teremos

$$\lambda'_1 E'_2 = e^{i\theta_1} \lambda_1 E_2$$

Portanto, $E'_2 = e^{i\theta_2} E_2$, onde $e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1} \frac{\lambda_1}{\lambda'_1}$.

Mais geralmente, se tivermos $E'_k = e^{i\theta_k} E_k$, θ_k diferenciável em uma vizinhança de um ponto regular, para todo $1 \leq k < j \leq m$, então,

$$(24) \quad dE'_{j-1} = d(e^{i\theta_{j-1}} E_{j-1}) = de^{i\theta_{j-1}} E_{j-1} + e^{i\theta_{j-1}} dE_{j-1}$$

Mas, por hipótese,

$$dE'_{j-1} \equiv 0 \text{ mod}(E'_{j-2}, E'_{j-1}, E'_j) \quad \text{e} \quad dE_{j-1} \equiv 0 \text{ mod}(E_{j-2}, E_{j-1}, E_j)$$

E, sendo o ponto regular, $(dE'_{j-1}, \overline{E'_j}) \neq 0$ e $(dE_{j-1}, \overline{E_j}) \neq 0$, o que comparando com (24) nos leva a

$$\frac{1}{2}(dE'_{j-1}, \overline{E'_j}) E'_j = \frac{1}{2} e^{i\theta_{j-1}} (dE_{j-1}, \overline{E_j}) E_j$$

Isto é,

$$E'_j = e^{i\theta_{j-1}} \frac{(dE_{j-1}, \bar{E}_j)}{(dE'_{j-1}, \bar{E}'_j)} E_j$$

Dai segue que $E'_j = e^{i\theta_j} E_j$ onde

$$e^{i\theta_j} = e^{i\theta_{j-1}} \frac{(dE_{j-1}, \bar{E}_j)}{(dE'_{j-1}, \bar{E}'_j)}$$

E isto demonstra a proposição.

3.5.4 — COROLÁRIO. Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2 : S^2 \rightarrow P^{2m}(C)$, holomorfas, satisfazendo as condições em (3.2.2). Suponha que $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, seja uma imersão mínima generalizada determinada localmente como em (3.2.5), a partir de Γ_1 e Γ_2 . Então, $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Prova : Temos os referenciais locais complexificados $E'_1, E'_2, \dots, E'_m$ e $E_1, E_2, \dots, E_m$, obtidos, respectivamente, a partir de Γ_1 e Γ_2 , satisfazendo, pela proposição (3.2.10),

$$dE'_j \equiv 0 \text{ mod } (E'_{j-1}, E'_j, E'_{j+1}), \quad dE_j \equiv 0 \text{ mod } (E_{j-1}, E_j, E_{j+1})$$

para todo $1 \leq j \leq m$. Os referenciais $\{e'_A\}$ e $\{e_A\}$ dados, respectivamente, por

$$e'_{2j-1} = \frac{E'_j + \bar{E}'_j}{2}, e'_{2j} = \frac{E'_j - \bar{E}'_j}{2i} \text{ e } e_{2j-1} = \frac{E_j + \bar{E}_j}{2}, e_{2j} = \frac{E_j - \bar{E}_j}{2i}$$

para $1 \leq j \leq m$ são adaptados à imersão generalizada x por (ii) da proposição (3.2.10).

O conjunto dos pontos nos quais x deixa de ser imersão e regular é isolado, por (3.5.2). Observe que deste modo os referenciais acima satisfazem as condições da proposição (3.5.3). Portanto, E'_m e E_m são coordenadas homogêneas de uma mesma curva holomorfa de $P^{2m}(C)$ em uma vizinhança de um ponto regular e por continuidade estendemos a igualdade a todo ponto de S^2 . Logo $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

3.5.5 — Para concluir este capítulo, observemos alguns resultados acerca da rigidez de imersões mínimas generalizadas $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, não contidas em subespaços próprios de R^{2m+1} , obtidos por J.L.M. Barbosa em [02]:

(1) Sejam $x, y : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, imersões mínimas generalizadas não contidas em subespaços próprios de R^{2m+1} . Então, x e y são isométricas se, e somente se, as correspondentes curvas diretrizes são isométricas (relativamente à métrica de Fubini-Study de $P^{2m}(C)$);

(2) Sejam $x, y : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, imersões mínimas generalizadas não contidas em subespaços próprios de R^{2m+1} . Então, x e y são isométricas se, e somente se, elas diferem por um movimento rígido de $S^{2m}(1)$.

CAPITULO 4

A CURVA DIRETRIZ DA 2-ESFERA MINIMA DE $S^{2m}(1)$ DE CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE

4.1 — Se $\Gamma : S^2 \rightarrow P^{2m}(C)$ for curva diretriz de uma imersão mínima generalizada $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, não contida em algum subespaço próprio de R^{2m+1} , podemos determinar $k_1, \dots, k_{m-1}$ a partir de (3.5.2), obtendo uma expressão que dependa, exclusivamente de Γ . Em particular, teremos a curvatura Gaussiana K de S^2 , relativamente a x .

Das expressões de $k_1, \dots, k_{m-1}$, será possível determinar a curva diretriz da imersão mínima x de curvatura Gaussiana K constante.

4.2 — Determinação da Curvatura Gaussiana a partir de sua Curva Diretriz

4.2.1 — Seja ξ coordenada homogênea de $\Gamma : S^2 \rightarrow P^{2m}(C)$, holomorfa, satisfazendo (3.2.2) e $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$ obtida localmente como em (3.2.5). Seguindo as notações do capítulo 3, por (20) de (3.5.2) temos

$$(1) \quad k_{m-j-1}^2 = \frac{|u_{m-j}|^2 |z|^{2(n_{j+1} + n_{m-1})}}{|u_1|^2 |u_{m-j-1}|^2 |u_0|^2 |z|^{2n_j}}$$

para $1 \leq j \leq m-2$ e

$$(2) \quad k_{m-1}^2 = \frac{2|z|^{2(n_1 + n_{m-1})}}{(\xi, \bar{\xi}) |u_1|^2 |u_{m-1}|^2 |u_0|^2}$$

4.2.2 — A partir de agora, denotaremos $\xi \wedge \xi^{(1)} \wedge \dots \wedge \xi^{(j)}$, por $\bigwedge \xi^{(j)}$, $\bar{\xi} \wedge \bar{\xi}^{(1)} \wedge \dots \wedge \bar{\xi}^{(j)}$ por $\bigwedge \bar{\xi}^{(j)}$, para cada $1 \leq j \leq m$, e $\bigwedge \xi^{(0)} = \xi$ e $\bigwedge \bar{\xi}^{(0)} = \bar{\xi}$.

Desse modo, para cada $1 \leq j \leq m-1$, obtemos por (8) de (3.2.4)

$$(3) \quad 2^j = \frac{|u_{m-j}|^2 \dots |u_{m-1}|^2}{(\xi, \bar{\xi}) |z|^{2(n_1 + \dots + n_j)}} \left(\bigwedge \xi^{(j)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(j)} \right)$$

Em particular,

$$(5) \quad 2^{m-1} = \frac{|u_1|^2 \dots |u_{m-1}|^2}{(\xi, \bar{\xi})|z|^{2(n_1 + \dots + n_{m-1})}} (\bigwedge \xi^{(m-1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-1)})$$

Usando a expressão (3) para $(j-1)$ e j , $2 \leq j \leq m-1$ chegaremos à

$$(6) \quad |u_{m-j}|^2 = 2|z|^{2n_j} \frac{(\bigwedge \xi^{(j-1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(j-1)})}{(\bigwedge \xi^{(j)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(j)})}$$

E, para $j = 1$,

$$(6) \quad |u_{m-1}|^2 = \frac{2|z|^{2n_1}(\xi, \bar{\xi})}{(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(1)})}$$

Além disso, se substituirmos (4) em (10) de (3.2.5) obteremos

$$(7) \quad |v_0|^2 = \frac{(\bigwedge \xi^{(m)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m)})}{(\bigwedge \xi^{(m-1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-1)})}$$

4.2.3 — Para determinarmos $k_1, \dots, k_{m-2}$ comparamos (5), (6) e (7) de (4.2.2) com (1) de (4.2.1). Desse modo, obtemos, para $1 \leq j \leq m-2$,

$$(8) \quad k_{m-j-1}^2 = \frac{(\bigwedge \xi^{(j-1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(j-1)})(\bigwedge \xi^{(j+1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(j+1)})(\bigwedge \xi^{(m-1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-1)})^2}{2(\bigwedge \xi^{(j)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(j)})^2(\bigwedge \xi^{(m-2)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-2)})(\bigwedge \xi^{(m)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m)})}$$

Para $j = 0$, usamos (2) de (4.2.1) e substituímos (6) e (7) de (4.2.2) para chegarmos à expressão

$$(9) \quad k_{m-1}^2 = \frac{(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(1)})(\bigwedge \xi^{(m-1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-1)})^2}{2(\xi, \bar{\xi})^2(\bigwedge \xi^{(m-2)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-2)})(\bigwedge \xi^{(m)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m)})}$$

Isto significa que:

(a) Para $m \geq 3$ (tomando-se $j = m-2$ em (8)) obtemos,

$$(10) \quad k_1^2 = \frac{(\bigwedge \xi^{(m-2)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-2)})(\bigwedge \xi^{(m-1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-1)})^2}{2(\bigwedge \xi^{(m-2)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m-2)})^3(\bigwedge \xi^{(m)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(m)})}$$

(b) Para $m = 2$ ($m-1 = 1$) de (9) obtemos,

$$(11) \quad k_1^2 = \frac{(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(1)})^2}{2(\xi, \bar{\xi})^3(\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(2)})}$$

Determinamos, conseqüentemente, a curvatura Gaussiana K , da imersão generalizada x , através da relação,

$$k_1^2 = \frac{1}{2}(1 - K)$$

Isto é,

$$(12) \quad K = 1 - 2k_1^2$$

4.2.4 — Exemplo 1 : Seja $\Gamma : S^2 \rightarrow P^6(C)$ dada por,

$$\xi = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5 + A_6 z^6$$

onde $A_0, A_1, \dots, A_6 \in C^7$, são constantes. Então,

$$(\xi, \xi) = (\xi^{(1)}, \xi^{(1)}) = (\xi^{(2)}, \xi^{(2)}) = 0$$

se, e somente se,

$$(A_0, A_0) = (A_0, A_1) = (A_0, A_2) = (A_0, A_3) = (A_0, A_4) = (A_0, A_5) = 0$$

$$(A_1, A_1) = (A_1, A_2) = (A_1, A_3) = (A_1, A_4) = (A_1, A_6) = 0$$

$$(A_2, A_2) = (A_2, A_3) = (A_2, A_5) = (A_2, A_6) = 0$$

$$(A_3, A_4) = (A_3, A_5) = (A_3, A_6) = 0$$

$$(A_4, A_4) = (A_4, A_5) = (A_4, A_6) = 0$$

$$(A_5, A_5) = (A_5, A_6) = 0$$

$$(A_6, A_6) = 0$$

e

$$0 = (A_3, A_3) + 2(A_2, A_4) + 2(A_1, A_5) + 2(A_0, A_6)$$

$$(I) \quad 0 = 9(A_3, A_3) + 16(A_2, A_4) + 10(A_1, A_5)$$

$$0 = 3(A_3, A_3) + 4(A_2, A_4)$$

Temos a seguinte solução para (I) :

$$(A_0, A_6) = 1, (A_1, A_5) = -6, (A_2, A_4) = 15 \text{ e } (A_3, A_3) = -20$$

Se escolhermos $(A_i, \bar{A}_j) = 0$ para $i \neq j$ podemos obter uma solução do seguinte tipo:

$$A_0 = (z_0, z_0 i, 0, 0, 0, 0, 0), \quad A_1 = (0, 0, z_1, z_1 i, 0, 0, 0)$$

$$A_2 = (0, 0, 0, 0, z_2, z_2 i, 0), \quad A_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, z_3)$$

$$A_4 = (0, 0, 0, 0, z_2, -z_2 i, 0), \quad A_5 = (0, 0, z_1, -z_1 i, 0, 0, 0)$$

$$A_6 = (z_0, -z_0 i, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (A_0, A_0) &= 1 \text{ se, e somente se } 2z_0^2 = 1; \\ (A_1, A_5) &= -6 \text{ se, e somente se } 2z_1^2 = -6; \\ (A_2, A_4) &= 15 \text{ se, e somente se } 2z_2^2 = 15; \\ (A_3, A_3) &= -20 \text{ se, e somente se } z_3^2 = -20. \end{aligned}$$

Tomamos por exemplo,

$$z_0 = 1/\sqrt{2}, z_1 = \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{15}/\sqrt{2}, \text{ e } z_3 = -2\sqrt{5}i$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} (A_0, \overline{A_0}) &= 1, (A_1, \overline{A_1}) = 6, (A_2, \overline{A_2}) = 15, (A_3, \overline{A_3}) = 20 \\ (A_4, \overline{A_4}) &= 15, (A_5, \overline{A_5}) = 6 \text{ e } (A_6, \overline{A_6}) = 1. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$(13) \quad (\xi, \bar{\xi}) = (1 + |z|^2)^6$$

De (13) obtemos,

$$\begin{aligned} (\xi^{(1)}, \bar{\xi}) &= 6\bar{z}(1 + |z|^2)^5 \\ (\xi^{(2)}, \bar{\xi}) &= 30\bar{z}^2(1 + |z|^2)^4 \\ (\xi^{(3)}, \bar{\xi}) &= 120\bar{z}^3(1 + |z|^2)^3 \\ (\xi^{(1)}, \overline{\xi^{(1)}}) &= 6(1 + |z|^2)^4(1 + 6|z|^2) \\ (\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(1)}}) &= 6\bar{z}(1 + |z|^2)^3(1 + 3|z|^2) \\ (\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(2)}}) &= 60(1 + |z|^2)^2(1 + 10|z|^2 + 15|z|^4) \\ (\xi^{(3)}, \overline{\xi^{(3)}}) &= 360\bar{z}^2(1 + |z|^2)^2(1 + 2|z|^2) \\ (\xi^{(3)}, \overline{\xi^{(2)}}) &= 720\bar{z}(1 + |z|^2)(1 + 5|z|^2 + 5|z|^4) \\ (\xi^{(3)}, \overline{\xi^{(3)}}) &= 720(1 + 12|z|^2 + 30|z|^4 + 20|z|^6) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(1)}}) &= (\xi, \bar{\xi})(\xi^{(1)}, \overline{\xi^{(1)}}) - |(\xi^{(1)}, \bar{\xi})|^2 = \\ &= 6(1 + |z|^2)^{10}(1 + 6|z|^2 - 6|z|^2) = 6(1 + |z|^2)^{10}; \end{aligned}$$

$$(ii) \quad (\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(2)}}) =$$

$$\begin{aligned} &= (\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(2)}})(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(1)}}) + 2(\xi^{(1)}, \overline{\xi^{(2)}})(\xi^{(2)}, \bar{\xi})(\xi, \overline{\xi^{(1)}}) + \\ &\quad - (\xi, \bar{\xi}) |(\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(1)}})|^2 - (\xi^{(1)}, \overline{\xi^{(1)}}) |(\xi^{(2)}, \bar{\xi})|^2 = \\ &= 360(1 + |z|^2)^{12}(1 + 10|z|^2 + 15|z|^4) + 360 \times 60(1 + |z|^2)^{12}|z|^4(1 + 3|z|^2) + \\ &\quad - 360 \times 10(1 + |z|^2)^{12}|z|^2(1 + 3|z|^2)^2 - 360 \times 15(1 + |z|^2)^{12}|z|^4(1 + 6|z|^2) = \\ &= 360(1 + |z|^2)^{12}; \end{aligned}$$

(iii) Definimos

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a & c & f & g \\ \bar{c} & b & h & i \\ f & \bar{h} & c & j \\ \bar{g} & i & \bar{j} & d \end{pmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta = d \times \det \begin{pmatrix} a & c & f \\ \bar{c} & b & h \\ f & \bar{h} & c \end{pmatrix} + 2\Re e(b\bar{f}g\bar{j}) + 2\Re e(ah\bar{i}j) + \\ + 2\Re e(ce\bar{g}i) + |c|^2|j|^2 + |f|^2|i|^2 + |g|^2|h|^2 + \\ - 2\Re e(c\bar{g}h\bar{j}) - 2\Re e(\bar{c}f\bar{i}j) - 2\Re e(f\bar{g}h\bar{i}) \\ - ab|j|^2 - bc|g|^2 - ac|i|^2. \end{aligned}$$

Tomando-se,

$$\begin{aligned} a &= (\xi, \bar{\xi}), b = (\xi^{(1)}, \bar{\xi}^{(1)}), c = (\xi^{(2)}, \bar{\xi}^{(2)}), d = (\xi^{(3)}, \bar{\xi}^{(3)}) \\ e &= (\xi, \bar{\xi}^{(1)}), f = (\xi, \bar{\xi}^{(2)}), g = (\xi, \bar{\xi}^{(3)}), h = (\xi^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)}), \\ i &= (\xi^{(1)}, \bar{\xi}^{(3)}), j = (\xi^{(2)}, \bar{\xi}^{(3)}) \end{aligned}$$

Desta maneira temos que,

$$\Delta = \left(\bigwedge \xi^{(3)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(3)} \right)$$

Agora,

- (1) $\Re e(b\bar{f}g\bar{j}) = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(30|z|^6 + 330|z|^8 + 1050|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (2) $\Re e(ah\bar{i}j) = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(30|z|^4 + 300|z|^6 + 1080|z|^8 + 1650|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (3) $\Re e(ce\bar{g}i) = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(30|z|^6 + 360|z|^8 + 1050|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (4) $|c|^2|j|^2 = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(36|z|^4 + 360|z|^6 + 1260|z|^8 + 1800|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (5) $|f|^2|i|^2 = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(225|z|^8 + 900|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (6) $|g|^2|h|^2 = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(100|z|^8 + 600|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (7) $\Re e(c\bar{g}h\bar{i}) = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(60|z|^6 + 480|z|^8 + 1200|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (8) $\Re e(\bar{c}f\bar{i}j) = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(90|z|^6 + 630|z|^8 + 1350|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (9) $\Re e(f\bar{g}h\bar{i}) = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(150|z|^8 + 750|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (10) $ac|i|^2 = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(15|z|^4 + 210|z|^6 + 385|z|^8 + 1500|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (11) $bc|g|^2 = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(10|z|^6 + 160|z|^8 + 750|z|^{10} + 900|z|^{12})$
- (12) $ab|j|^2 = 720^2(1 + |z|^2)^{12}(6|z|^2 + 96|z|^4 + 570|z|^6 + 1560|z|^8 + 1950|z|^{10} + 900|z|^{12})$

Portanto,

$$\begin{aligned}(A) &= 2 \times (1) + 2 \times (2) + 2 \times (3) + (4) + (5) + (6) = \\ &= 720^2(1 + |z|^2)^{12}(96|z|^4 + 1080|z|^6 + 5125|z|^8 + 10800|z|^{10} + 8100|z|^{12})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B) &= 2 \times (7) + 2 \times (8) + 2 \times (9) + (10) + (11) + (12) = \\ &= 720^2(1 + |z|^2)^{12}(6|z|^2 + 111|z|^4 + 1090|z|^6 + 5125|z|^8 + 10800|z|^{10} + 8100|z|^{12})\end{aligned}$$

$$(A) - (B) = 360 \times 720(1 + |z|^2)^{12}(-12|z|^2 - 30|z|^4 - 20|z|^6)$$

Por outro lado, temos

$$(C) = d \times \left(\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(2)}} \right) = 360 \times 720(1 + |z|^2)^{12}(1 + 12|z|^2 + 30|z|^4 + 20|z|^6)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left(\bigwedge \xi^{(3)}, \bigwedge \overline{\xi^{(3)}} \right) &= (A) + (C) - (B) = \\ &= 360 \times 720(1 + |z|^2)^{12}.\end{aligned}$$

Podemos calcular k_1^2 a partir de (10) de (4.2.3).

$$\begin{aligned}k_1^2 &= \frac{(\xi, \bar{\xi}) \left(\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(2)}} \right)^3}{2 \left(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(1)}} \right)^3 \left(\bigwedge \xi^{(3)}, \bigwedge \overline{\xi^{(3)}} \right)} = \\ &= \frac{(1 + |z|^2)^6 360^3 (1 + |z|^2)^{36}}{2 \times 6^3 (1 + |z|^2)^{30} 360 \times 720 (1 + |z|^2)^{12}} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

Assim, por (12) de (4.2.3) determinamos a curvatura Gaussiana K de S^2 , relativamente à imersão x , obtida a partir de Γ .

$$K = 1 - k_1^2 = \frac{1}{6}$$

Sendo ξ coordenada homogênea de Γ podemos descrevê-la por:

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7)$$

onde,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 1 + z^6, \quad \xi_2 = i(1 - z^6), \quad \xi_3 = \sqrt{6}i(z + z^5), \\ \xi_4 &= \sqrt{6}(-z + z^5), \quad \xi_5 = -\sqrt{15}(z^2 + z^4), \quad \xi_6 = \sqrt{15}i(-z^2 + z^4) \\ \xi_7 &= -2\sqrt{10}iz^3.\end{aligned}$$

4.2.5 — Exemplo 2 : Podemos determinar como em (4.2.4) a curva diretriz Γ da superfície de Veronesi (contida em $S^4(1)$) dada em coordenadas homogêneas por

$$\xi = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4$$

onde,

$$A_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}i, 0, 0, 0 \right), \quad A_1 = (0, 0, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}, 0)$$

$$A_2 = (0, 0, 0, 0, \sqrt{6}), \quad A_3 = (0, 0, \sqrt{2}i, \sqrt{2}, 0)$$

$$A_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}i, 0, 0, 0 \right)$$

Se $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$ e multiplicando ξ por $\sqrt{2}$, podemos tomar,

$$\xi_1 = 1 + z^4, \quad \xi_2 = i(1 - z^4), \quad \xi_3 = 2i(z + z^3)$$

$$\xi_4 = 2(-z + z^3), \quad \xi_5 = 2\sqrt{3}z^2$$

Para $\xi = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4$ obtemos que, $(\xi, \bar{\xi}) = (1 + |z|^2)^4$. De modo análogo ao exemplo 1, podemos determinar :

$$(i) \quad \left(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(1)} \right) = 4(1 + |z|^2)^6$$

$$(ii) \quad \left(\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \bar{\xi}^{(2)} \right) = 96(1 + |z|^2)^6$$

Calculando-se k_1^2 a partir (11) de (4.2.3) chegaremos a

$$k_1^2 = \frac{4^3(1 + |z|^2)^{18}}{2 \times 96(1 + |z|^2)^{12}(1 + |z|^2)^6} = \frac{1}{3}$$

Isto é, a curvatura Gaussiana K da imersão obtida a partir Γ será dada por

$$K = 1 - 2k_1^2 = \frac{1}{3}.$$

Isto demonstra que Γ , de fato, é a curva diretriz da superfície de Veronesi.

4.3 — A 2-Esfera Mínima de Curvatura Gaussiana Constante

4.3.1 — Do teorema (2.2.34) decorre que se a imersão mínima (não contida em algum subespaço próprio de R^{2m+1}) $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$ for de curvatura Gaussiana constante K então,

$$K = \frac{2}{m(m+1)}$$

Além disso, por [09] decorre que esta imersão mínima será única, a menos de isometrias de $S^{2m}(1)$.

J.L.M.Barbosa em [02], demonstra, ainda, que há uma correspondência biunívoca entre as imersões mínimas $x : S^2 \rightarrow S^{2m}(1)$, não contidas em algum subespaço de R^{2m+1} , e as respectivas curvas diretrizes. Isto é, as curvas diretrizes são suficientes para caracterizar estas imersões mínimas.

Devido à "unicidade" da superfície mínima $x(S^2)$ contida em $S^{2m}(1)$, de curvatura Gaussiana constante, poderemos determinar a curva diretriz desta imersão (a partir de sua curvatura Gaussiana), usando as relações (9), (10), (11) e (12) de (4.2.3) e o teorema (2.2.36) do

4.3.2 — Seja $\Gamma : S^2 \rightarrow P^{2m}(C)$ dada em coordenadas homogêneas ξ por

$$\xi = A_0 + A_1 z + \dots + A_{2m} z^{2m}$$

onde $A_i \in C^{2m+1}$, $0 \leq i \leq 2m$, constantes.

Para termos $(\xi, \xi) = (\xi^{(1)}, \xi^{(1)}) = \dots = (\xi^{(m-1)}, \xi^{(m-1)}) = 0$ estabeleceremos as seguintes condições, sobre $A_0, A_1, \dots, A_{2m}$:

$$(14) \quad \begin{aligned} (a) & (A_i, A_j) = 0 \text{ se } 0 \leq i, j \leq m \text{ e } j \neq 2m - i; \\ (b) & \frac{2j!(2m-j)!}{0!(2m-2j)!} (A_j, A_{2m-j}) + \frac{2(j+1)!(2m-j-1)!}{1!(2m-2j-1)!} (A_{j+1}, A_{2m-j-1}) + \dots + \\ & + \frac{2k!(2m-k)!}{(k-j)!(2m-2j-(k-j))!} (A_k, A_{2m-k}) + \dots + \frac{m!m!}{(m-j)!(m-j)!} (A_m, A_m) = 0 \end{aligned}$$

para todo $0 \leq j \leq m-1$

Observemos que (b) de (14) é exatamente a condição para que o coeficiente de z^{2m-2j} em $(\xi^{(j)}, \xi^{(j)})$ seja nulo. Com as condições acima obtemos,

$$(\xi, \xi) = (\xi^{(1)}, \xi^{(1)}) = \dots = (\xi^{(m-1)}, \xi^{(m-1)}) = 0$$

Tomando-se, para cada $j = 0, \dots, m$

$$(15) \quad (A_j, A_{2m-j}) = (-1)^j \binom{2m}{j}$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Substituindo (15) em (b) de (14) chegaremos à

$$\begin{aligned} & \frac{(2m)!}{(2m-2j)!} \left[2 \binom{2m-2j}{0} - 2 \binom{2m-2j}{1} + \dots + (-1)^k \binom{2m-2j}{k} + \right. \\ & \left. + \dots + (-1)^{m-j} \binom{2m-2j}{m-j} \right] = 0 \end{aligned}$$

Isto significa que se $A_0, \dots, A_{2m}$ satisfazem (15) de (4.3.2) a curva ξ satisfaz a condição $(\xi, \xi) = \dots = (\xi^{(m-1)}, \xi^{(m-1)}) = 0$.

4.3.3 — Para determinarmos $A_0, A_1, \dots, A_{2m}$ imporemos ainda que $(A_i, \overline{A_j}) = 0$ se $1 \leq i, j \leq 2m, i \neq j$ e que

$$(A_j, \overline{A_j}) = |(A_j, A_{2m-j})| = \binom{2m}{j}$$

para todo $1 \leq j \leq 2m$. Neste caso, obtemos

$$(16) \quad (\xi, \overline{\xi}) = (1 + |z|^2)^{2m}$$

4.3.4 — Determinaremos vetores complexos $A_0, A_1, \dots, A_{2m}$, de C^{2m+1} , satisfazendo as condições dadas em (4.3.2) e (4.3.3). Sejam, então,

$$\begin{aligned} A_0 &= (z_0, iz_0, 0, \dots, 0) \\ A_1 &= (0, 0, z_1, iz_1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ A_{m-1} &= (0, \dots, 0, z_{m-1}, iz_{m-1}, 0) \\ A_m &= (0, 0, \dots, 0, z_m) \\ A_{m+1} &= (0, \dots, 0, z_{m-1}, -iz_{m-1}, 0) \\ &\vdots \\ A_{2m-1} &= (0, 0, z_1, -iz_1, 0, \dots, 0) \\ A_{2m} &= (z_0, -iz_0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Usando a condição dada em (4.3.3) por

$$(A_j, A_{2m-j}) = (-1)^j \binom{2m}{j}$$

para cada $0 \leq j \leq m$, temos que

$$2z_j^2 = (-1)^j \binom{2m}{j}$$

se $0 \leq j \leq m-1$ e

$$z_m^2 = (-1)^m \binom{2m}{m}$$

Desta maneira, podemos tomar

$$z_j = \frac{i^j}{\sqrt{2}} \sqrt{\binom{2m}{j}}$$

para $0 \leq j \leq m-1$ e

$$z_m = i^m \sqrt{\binom{2m}{m}}$$

Assim, obtemos $A_0, A_1, \dots, A_{2m}$ por:

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \dots, 0, i^j \sqrt{\binom{2m}{j}}, i^{j+1} \sqrt{\binom{2m}{j}}, 0, \dots, 0)$$

$$A_{2m-j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \dots, 0, i^j \sqrt{\binom{2m}{j}}, -i^{j+1} \sqrt{\binom{2m}{j}}, 0, \dots, 0)$$

para $0 \leq j \leq m-1$ e,

$$A_m = (0, 0, \dots, 0, i^m \sqrt{\binom{2m}{m}})$$

Portanto, se multiplicarmos $A_0, A_1, \dots, A_{2m}$ por $\sqrt{2}$, podemos descrever

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2m}, \xi_{2m+1}) \text{ por,}$$

$$\xi_{2j+1} = i^j \sqrt{\binom{2m}{j}} (z^j + z^{2m-j})$$

$$\xi_{2j+2} = i^{j+1} \sqrt{\binom{2m}{j}} (z^j - z^{2m-j})$$

para $0 \leq j \leq m-1$ e,

$$\xi_{2m+1} = \sqrt{2} i^m \sqrt{\binom{2m}{m}} z^m$$

4.3.5 — Vejamos agora, que ξ , satisfazendo (4.3.2) e (4.3.3) é coordenada homogênea da curva diretriz da 2-esfera mínima de $S^{2m}(1)$ de curvatura Gaussiana constante.

Observemos primeiramente que a imersão mínima generalizada obtida a partir de Γ não está contida em algum subespaço próprio de R^{2m+1} .

Para ver isto, determinaremos $\bigwedge \xi^{(m)}|_{z=0}$.

Se, ξ satisfaz (16) de (4.3.3), teremos

$$\begin{aligned} & (\xi^{(k)}, \overline{\xi^{(j)}}) = \\ & = \frac{(2m)!k!}{(2m-j)!} z^{j-k} (1 + |z|^2)^{2m-j-k} \sum_{i=0}^k \binom{j}{k-i} \binom{2m-j}{i} |z|^{2i} (1 + |z|^2)^{k-i} \end{aligned}$$

para $1 \leq k \leq j$. Desta maneira, obtemos

$$(\xi^{(k)}, \overline{\xi^{(j)}}) \Big|_{z=0} = 0$$

para $1 \leq k < j$ e,

$$(\xi^{(j)}, \overline{\xi^{(j)}}) \Big|_{z=0} = \frac{(2m)!j!}{(2m-j)!}$$

Portanto,

$$\bigwedge \xi^{(m)} \Big|_{z=0} = \frac{[(2m)!]^{m+1} \prod_{j=0}^m (j!)}{\prod_{j=0}^m [(2m-j)!]}$$

onde $\prod_{i=0}^n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$.

Isto mostra que $\bigwedge \xi^{(m)} \Big|_{z=0} \neq 0$.

Se, $m = 2$, o resultado segue de (4.2.5). Suponhamos portanto, que $m \geq 3$. Neste caso, decorre de (8) de (4.2.3) que

$$k_{m-2}^2 = \frac{(\xi, \overline{\xi})(\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(2)}})(\bigwedge \xi^{(m-1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(m-1)}})^2}{(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(1)}})^2 (\bigwedge \xi^{(m-2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(m-2)}})(\bigwedge \xi^{(m)}, \bigwedge \overline{\xi^{(m)}})}$$

E, de (9) de (4.2.5)

$$k_{m-1}^2 = \frac{(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(1)}})(\bigwedge \xi^{(m-1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(m-1)}})^2}{2(\xi, \overline{\xi})^2 (\bigwedge \xi^{(m-2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(m-2)}})(\bigwedge \xi^{(m)}, \bigwedge \overline{\xi^{(m)}})}$$

Assim,

$$\frac{k_{m-1}^2}{k_{m-2}^2} = \frac{(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(1)}})^3}{(\xi, \overline{\xi})^3 (\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(2)}})}$$

Agora,

$$(\xi, \overline{\xi}) = (1 + |z|^2)^{2m}$$

$$(\xi^{(1)}, \overline{\xi}) = 2m\overline{z}(1 + |z|^2)^{2m-1}$$

$$(\xi^{(2)}, \overline{\xi}) = 2m(2m-1)\overline{z}^2(1 + |z|^2)^{2m-2}$$

$$(\xi^{(1)}, \overline{\xi^{(1)}}) = 2m(1 + |z|^2)^{2m-2}(1 + 2m|z|^2)$$

$$(\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(2)}}) = 2m(2m-1)\overline{z}(1 + |z|^2)^{2m-3}(2 + 2m|z|^2)$$

$$(\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(2)}}) = 2m(2m-1)(1 + |z|^2)^{2m-4}[2 + 4(2m-1)|z|^2 + 2m(2m-1)|z|^4]$$

Logo,

$$(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(1)}}) = 2m(1 + |z|^2)^{4m-2}$$

$$(\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(2)}}) = (A) + (B) - (C) - (D)$$

onde,

$$\begin{aligned}
 (A) &= (\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(2)}})(\bigwedge \xi^{(1)}, \bigwedge \overline{\xi^{(1)}}) = \\
 &= (2m)^2(2m-1)(1+|z|^2)^{6m-6}[2+4(2m-1)|z|^2+2m(2m-1)|z|^4] \\
 (B) &= 2(\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(1)}})(\xi, \overline{\xi^{(2)}})(\xi^{(1)}, \overline{\xi}) = \\
 &= (2m)^2(2m-1)(1+|z|^2)^{6m-6}[8m(2m-1)(1+m|z|^2)|z|^4] \\
 (C) &= (\xi, \overline{\xi}) |(\xi^{(2)}, \overline{\xi^{(1)}})|^2 = \\
 &= (2m)^2(2m-1)(1+|z|^2)^{6m-6}[(2m-1)|z|^2(4+8m|z|^2+(2m)^2|z|^4)] \\
 (D) &= (\xi^{(1)}, \overline{\xi^{(1)}}) |(\xi^{(2)}, \overline{\xi})|^2 = \\
 &= (2m)^2(2m-1)(1+|z|^2)^{6m-6}[2m(2m-1)|z|^4(1+2m|z|^2)]
 \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\bigwedge \xi^{(2)}, \bigwedge \overline{\xi^{(2)}}) &= (A) + (B) - (C) - (D) = \\
 &= 2(2m)^2(2m-1)(1+|z|^2)^{6m-6}
 \end{aligned}$$

Calculemos então, k_{m-1}^2/k_{m-2}^2 :

$$\frac{k_{m-1}^2}{k_{m-2}^2} = \frac{(2m)^3(1+|z|^2)^{12m-6}}{2(2m)^2(2m-1)(1+|z|^2)^{6m}(1+|z|^2)^{6m-6}} = \frac{2m}{2(2m-1)}$$

Temos portanto que k_{m-1}^2/k_{m-2}^2 será constante.

Desta maneira, pelo teorema (2.2.36), segue que a curvatura Gaussiana da imersão obtida a partir de Γ será constante e igual, pelo teorema (2.2.34), a

$$K = \frac{2}{m(m+1)}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] A.C.Asperti – *Superfícies Mínimas Genéricas e Elipses de Curvatura Generalizadas*. Tese de Livre Docência, IME-USP(1986).
- [02] J.L.M.Barbosa – *On Minimal Immersions of S^2 into $S^{2m}(1)$* . Trans.Am. Math.Soc, vol 210(1975), 75–106.
- [03] R.L.Bryant – *Conformal on Minimal Immersions of Compact Surfaces into the 4-Sphere*. J.Diff.Geom, vol 17(1982), 455–473.
- [04] E. Calabi – *Minimal Immersions of Surfaces in Euclidean Spheres*. J.Diff. Geom, vol 1(1967), 111–125.
- [05] S.S.Chern — *Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold*. Dept of Math.Tech.Rep, 19(N.S), Univ.of Kansas, Lawrence(1968).
- [06] ———— *On the Minimal Immersions of the two Sphere in a Space of Constant Curvature*. Prob.in Anal, Princeton, N.J(1970), 27–40.
- [07] ———— *On Minimal Spheres in the Four-Sphere*. Studies and Essays, Math.Res.Center, Nat.Taiwan Univ., Taipei(1970), 137–150.
- [08] ———— M.do Carmo and S.Kobayashi – *Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form Constant length*. Func.Analysis and Rel. Fields, Berlin-Heidelberg-N.York, Springer(1970), 59–75.
- [09] M.do Carmo and Wallach – *Minimal Immersions of Spheres into Spheres*. Ann.of Math, vol 93(1971), 43–62.
- [10] M. Dajczer – *Reduction of Codimension of Regular Isometric Immersions*. Math.Z, vol 179(1982), 263–286.
- [11] K.Kenmotsu – *On Compact Minimal Surfaces with Non-Negative Gaussian Curvature in a Space of Constant Curvature I*. Tôhoku Math.J, vol 25(1973), 469–479.
- [12] ———— *On Compact Minimal Surfaces with Non-Negative Gaussian Curvature in a Space of Constant Curvature II*. Tôhoku Math.J, vol 27 (1975), 291–301.
- [13] H.B.Lawson Jr – *The Global Behavior of Minimal Surfaces in S^n* . Ann.of Math, vol 92(1970), 224–237.