Fatores de Composição
de
Módulos Indecomponíveis

Maria Izabel Ramalho Martins

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTORA EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Hector A. Merklen Goldschmidt

São Paulo, dezembro de 1993

Fatores de Composição de Módulos Indecomponíveis

Este exemplar corresponde à redação final da
tese de doutoramento devidamente corrigida e
defendida por Maria Izabel Ramalho Martins
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 23 de março de 1994.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Héctor A. Merklen Goldschmidt (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Maria Inés Platzeck - UNIV. DEL SUR-ARGENTINA
- Prof. Dr. Miguel A. Ferrero - UFRGS
- Prof. Dr. Antonio Paques - IMECC-UNICAMP

Aos companheiros de
luta pelo coletivo.

Agradecimento

Meu agradecimento é para o Hector pelo estímulo, crédito e paciência, enquanto orientador.

Em sua pessoa e na do Daciberg, também o meu agradecimento especial aos companheiros do IME que, ao longo desses anos, se empenharam na luta contra a discriminação e o individualismo tão presentes nas ações e discursos ditos acadêmicos. A todos eles o meu reconhecimento pela cotidiana e difícil batalha pelas idéias e ideais coletivos.

Abstract

Let Λ be a basic and connected artin algebra. Denote by $\Lambda\text{-mod}$ the category of all finite generated left Λ -modules and by $\Lambda\text{-ind}$ the full subcategory of $\Lambda\text{-mod}$ defined by one representative of each isomorphism class of indecomposable Λ -modules. In this thesis we investigate the following properties and a relationship between them.

Property P.A: Each M in $\Lambda\text{-ind}$ is uniquely determined by its composition factors;

Property P.II: Each M in $\Lambda\text{-ind}$ is multiplicity-free.

First we study Nakayama algebras. We give necessary and sufficient conditions for each one of the properties P.A and P.II to be satisfied.

Our main results are related to biserial algebras of finite representation type. We consider Λ to be a finite-dimensional algebra over an algebraically closed field, basic and with the following property.

Property P.I: Λ is biserial and $\Lambda\text{-ind}$ satisfies P.A.

We investigate then the implications $P.I \Rightarrow P.II$ and $P.II \Rightarrow P.I$. Pogorzały and Skowroński in [24] have showed that, in case Λ is a factor of a hereditary algebra, which means that the ordinary quiver of Λ has no loops and no cycles, P.I is equivalent to P.II. One of our main results is that, if the ordinary quiver of Λ has no loops, then P.I implies P.II. Also, we exhibit a counter-example showing that the converse is not true in general. In order to obtain this result, we do a fairly thorough study of the multiplicity-free indecomposable Λ -modules that eventually shows that, unless they are not non-uniserial projective-injective, they are of type A_n .

Resumo

Seja Λ uma álgebra de Artin básica e conexa. Denotamos por $\Lambda\text{-mod}$ a categoria dos Λ -módulos, à esquerda, finitamente gerados e por $\Lambda\text{-ind}$ a subcategoria plena de $\Lambda\text{-mod}$ cujos objetos são os representantes das classes de isomorfia dos Λ -módulos indecomponíveis. Neste trabalho investigamos as propriedades abaixo e a relação entre elas.

Propriedade P.A: Cada M em $\Lambda\text{-ind}$ é unicamente determinado por seus fatores de composição.

Propriedade P.II: Cada M em $\Lambda\text{-ind}$ é livre de multiplicidade.

Primeiramente, estudamos as álgebras de Nakayama. Estabelecemos condições necessárias e suficientes para que cada uma das propriedades P.A e P.II sejam satisfeitas.

Nossos principais resultados estão relacionados às álgebras biseriais de tipo de representação finito. Consideramos primeiro Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica e conexa e a seguinte propriedade:

Propriedade P.I: Λ é biserial e $\Lambda\text{-ind}$ satisfaz P.A.

Investigamos, então, as implicações $P.I \Rightarrow P.II$ e $P.II \Rightarrow P.I$. Pogorzaly e Skowroński, em [24], mostraram que, no caso em que Λ é fator de uma álgebra hereditária (isto é, tal que o quiver ordinário de Λ não contém laços nem circuitos), P.I e P.II são equivalentes. Um dos nossos principais resultados é que, se o quiver ordinário de Λ não contém laços, então P.I implica P.II. Exibimos também um contra-exemplo que mostra que a recíproca não é verdadeira em geral. Para obtermos este resultado, fizemos um estudo detalhado e completo dos módulos indecomponíveis livres de multiplicidade que mostra, entre outros fatos, que, exceto os projetivos-injetivos não uniserais, eles são de tipo A_n .

Índice

Introdução	1
I Preliminares	9
I.1 Álgebras de Artin	10
I.2 Quivers	13
I.3 Álgebras de caminhos e o Teorema de Gabriel	15
I.4 Quiver com relações	17
I.5 A categoria $(Q, R)\text{-Mod}$	18
I.6 A categoria $\Lambda\text{-mod}$ e a categoria $(Q, R)\text{-mod}$	20
I.7 O top e o soc no contexto das k -representações de (Q, R)	27
I.8 Quiver de um M em $\Lambda\text{-mod}$	29
I.9 Quiver de Auslander-Reiten	33
I.10 Algumas álgebras clássicas	33
II Módulos determinados por fatores de composição	36
II.1 Sobre os grupos de Grothendieck	37
II.2 As álgebras de Nakayama	39
II.3 O algoritmo de Ringel e algumas condições necessárias	47
III Módulos livres de multiplicidade	53
III.1 Algumas álgebras que têm a propriedade P.II	56
III.2 Sobre as álgebras biseriais e a propriedade P.II	59
III.3 Extensões indecomponíveis de um simples ou por um simples	70
III.4 A combinatória dos módulos com um quociente do tipo A_n	80
III.5 A implicação $P.I \Rightarrow P.II$	90
Bibliografia	100

Introdução

Seja Λ uma álgebra de Artin, isto é, um anel artiniano cujo centro contém um subanel artiniano sobre o qual Λ é um módulo finitamente gerado (por exemplo, as álgebras de dimensão finita sobre um corpo k). Denotamos por $\Lambda\text{-mod}$ a categoria dos módulos, à esquerda, finitamente gerados sobre Λ e por $\Lambda\text{-ind}$ a subcategoria plena de $\Lambda\text{-mod}$ formada pelas classes de isomorfia dos módulos indecomponíveis.

O principal objetivo da Teoria das Representações das álgebras de Artin é descrever a categoria $\Lambda\text{-mod}$. No entanto, o Teorema de Krull-Schmidt permite entender a descrição da categoria $\Lambda\text{-mod}$ como a descrição da categoria $\Lambda\text{-ind}$.

A descrição de $\Lambda\text{-ind}$ e as relações entre seus objetos têm sido feitas em diferentes abordagens, quer seja pela metodologia do enfoque, quer seja pelos problemas levantados. Daí o grande desenvolvimento da área nos últimos vinte anos. Uma grande parte das investigações nesta área tem sido a classificação das álgebras segundo o tipo de representação: finito ou infinito. Em particular, as álgebras de tipo de representação finito, isto é, aquelas cuja $\Lambda\text{-ind}$ contém apenas um número finito de classes de isomorfia distintas, têm merecido atenção com o objetivo de classificá-las, bem como de entender as condições que as caracterizam.

As conjecturas de Brauer-Thrall I e II (abreviadamente BT I e BT II), concebidas em 1940, desempenharam um papel importante e extremamente influente na teoria das representações de álgebras, pois muito do seu desenvolvimento começou com o esforço de resolver tais conjecturas. Elas foram enunciadas por Jans, em 1957, da seguinte forma:

BT I: Se Λ é uma k -álgebra de tipo de representação infinito não existe limitação para as dimensões, sobre k , dos Λ -módulos indecomponíveis finitamente gerados.

BT II: Se Λ é uma k -álgebra de tipo de representação infinito, onde k um corpo infinito, então existe uma infinidade de dimensões para as quais existe um número infinito de Λ -módulos indecomponíveis não isomorfos com uma tal dimensão.

Em 1968, Rojter demonstrou a BT I, que hoje é conhecida como o teorema de Rojter (em [29]), para álgebras de Artin. Em 1974, este teorema foi estendido por Auslander (ver em [3]) para anéis de Artin, à esquerda.

Se podemos dizer que as demonstrações da BT I de Rojter ou de Auslander são curtas e de fácil entendimento, o mesmo não acontece com a BT II. Esta conjectura foi sim um desafio por mais de 40 anos, em torno do qual se orientou a história da teoria das

representações. Nazarova e Rojter, em 73, publicaram um pré-print, [23], que enunciava sua demonstração, porém sem detalhes. Somente em 85, Bautista (em [8]) e Bongartz (em [11]), através do teorema das bases multiplicativas (teorema provado em conjunto por Bautista, Gabriel, Rojter e Salmerón em [10]), provaram em definitivo a BT II para corpos algebricamente fechados.

A teoria das representações de álgebras de Artin a partir de 72 explodiu! E isso graças aos métodos e resultados introduzidos principalmente por Auslander (a escola de Boston via os métodos funtoriais, através dos quais surgiram as ARS - sequências de Auslander e Reiten - e os morfismos irredutíveis em [4]), por Gabriel (via os métodos diagramáticos - os quivers), e por Rojter (a escola de Kiev, via os problemas matriciais). Mais tarde, novas contribuições foram dadas por Bongartz e Gabriel com a teoria dos recobrimentos, de inspiração topológica, cuja idéia é originária de um trabalho de Riedtmann na classificação das álgebras auto-injetivas de tipo de representação finito. Recentemente, outras técnicas surgiram, possibilitando também novos enfoques e grande desenvolvimento nessa área. Entre essas, podemos citar a teoria tilting e os BOCSes.

Tantas são as direções e tão rápido o desenvolvimento da área que nos resulta impossível fazer um relato mais ou menos sucinto de todos os seus aspectos, bem como as conexões entre os diferentes métodos.

A investigação motriz da teoria das representações que é a classificação das álgebras de Artin Λ , através da categoria Λ -ind, conduziu, entre outros aspectos, à busca de mais informações sobre os módulos indecomponíveis por si e sobre a estrutura de anel da álgebra.

Quanto à busca de informações próprias dos módulos indecomponíveis uma que se coloca é: dado M em Λ -ind e conhecida uma de suas séries de composição que condições devem ser exigidas do módulo e/ou da álgebra para que se conheça a classe de isomorfia de M em Λ -ind.

Uma outra: dado M em Λ -ind que condições devem ser exigidas sobre o módulo e/ou sobre a álgebra para que uma de suas séries de composição não admita fatores de composição isomorfos.

Essas informações procuradas têm alguma interface? Em que medida elas influenciam na classificação da estrutura da álgebra e no seu tipo de representação?

Formalmente, as duas primeiras indagações tratam, respectivamente, dos módulos indecomponíveis que são unicamente determinados por seus fatores de composição e dos módulos indecomponíveis que são livres de multiplicidade.

Por exemplo, um dos exemplos mais clássicos de álgebras, as álgebras semi-simples podem ser caracterizadas também do ponto de vista da propriedade *ser unicamente determinado por seus fatores de composição* da seguinte maneira: Uma álgebra Λ é semi-simples se e somente se todo Λ -módulo finitamente gerado é unicamente determinado por seus fatores de composição.

Quanto à propriedade *ser livre de multiplicidade*, sobre uma álgebra semi-simples os módulos indecomponíveis que são livres de multiplicidade são apenas os módulos simples.

Um outro exemplo clássico são as álgebras de Artin hereditárias de tipo de representação finito, para as quais vale que todo M indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição. (Uma álgebra de Artin é hereditária se todo submódulo de um módulo projetivo é projetivo). Sobre a multiplicidade dos fatores de composição dos módulos indecomponíveis, para esse exemplo, faremos comentários mais a frente.

Fixemo-nos, por ora, na propriedade *ser unicamente determinado por seus fatores de composição*.

Embora os fatores de composição não determinem os módulos finitamente gerados sobre uma álgebra não semi-simples, ainda assim é uma questão interessante e que tem merecido grande atenção tentar conhecer sobre quais álgebras de Artin os módulos indecomponíveis verificam tal propriedade.

Não se tem uma resposta definitiva sobre esta questão. No entretanto, a classe das álgebras de Artin conhecidas com tal propriedade já foi estendida consideravelmente em relação às já mencionadas.

Em [6], Auslander e Reiten, através do conceito de *short chain*, encontraram uma dessas extensões, que é a classe das álgebras cuja Λ -ind não admite nenhuma short chain. Eles provaram que se Λ é uma álgebra de Artin tal que a categoria Λ -ind não contém short chain então todo módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição. Uma short chain significa uma sequência de morfismos, não nulos, $A \longrightarrow B \longrightarrow \tau A$, onde A e B estão em Λ -ind e τA denota o translado de Auslander e Reiten de A (para definições ver capítulo I ou em [4]) e, neste caso, B é dito um termo médio de uma short chain. Além disso, entre outros resultados, eles também provaram, no referido trabalho, que dois módulos indecomponíveis que têm os mesmos fatores de composição e não são termos médios de uma short chain são isomorfos. Auslander e Reiten ainda conjecturaram que provavelmente as álgebras de Artin, desde que tenham a propriedade de que todos os seus módulos indecomponíveis são determinados por seus fatores de composição, devem ser de tipo de representação finito.

Para as álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k é verdade que se todo módulo indecomponível é determinado por seus fatores de composição então a álgebra é de tipo de representação finito. E este fato, decorre diretamente da BT II.

Se nos fixarmos agora sobre a propriedade *ser livre de multiplicidade* vamos obter que se Λ é uma álgebra de Artin tal que todo Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade então Λ é também de tipo de representação finito. Mas aqui o fato decorre do Teorema de Rojter (antiga BT I).

Trabalhando com álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, conexas e básicas, Pogorzały e Skowroński provaram, em [24], que se todo Λ -módulo

indecomponível é livre de multiplicidade então, além de Λ ser de tipo de representação finito, ela é biserial.

Uma álgebra é biserial se o radical de cada Λ -módulo projetivo indecomponível, à esquerda ou à direita, não uniserial, é soma de dois submódulos uniserais, cuja intersecção é nula ou um módulo simples.

Nesse trabalho, [24], Pogorzały e Skowroński, provaram dois resultados importantes. Um deles é um teorema que estabelece a estrutura das álgebras biseriais de tipo de representação finito (teorema 2 em [24]) em termos do quiver com relações (Q, R) associado a álgebra. Este teorema foi uma das ferramentas básicas para caracterizarem as k -álgebras que são fatores de alguma k -álgebra hereditária cujos módulos indecomponíveis são todos livres de multiplicidade (teorema 1 em [24]). De uma forma simplificada eles provaram que, sobre k -álgebras que são quociente de hereditárias, onde k é um corpo algebricamente fechado, a propriedade “todo módulo indecomponível é livre de multiplicidade” é equivalente a “a álgebra é biserial e todo módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição”.

Tal equivalência estabelece assim a interface das duas propriedades em relação aos módulos indecomponíveis e determina a estrutura da álgebra e, conseqüentemente, seu tipo de representação.

Para situar o objetivo deste trabalho, queremos lembrar um fato muito conhecido sobre as álgebras de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado que são quociente de uma k -álgebra hereditária. O fato é que tais álgebras podem ser caracterizadas como aquelas cujo quiver ordinário não contém laços, nem circuitos (para definições ver capítulo I, seções I.4 e I.10).

O objetivo deste trabalho é responder a duas questões que têm origem no trabalho de Pogorzały e Skowroński e que julgamos mais gerais.

Vejamos. Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica e conexa.

Consideremos as seguintes propriedades:

Propriedade P.I: Λ é biserial e cada Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição;

Propriedade P.II: Todo Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade.

As questões que nos referimos acima são:

Questão 1: Se Λ é tal que as propriedades P.I e P.II são verificadas então Λ é fator de alguma k -álgebra hereditária?

Questão 2: Se Λ é uma álgebra cujo quiver ordinário pode conter laços ou circuitos, então alguma das implicações $P.I \Rightarrow P.II$ ou $P.II \Rightarrow P.I$ é sempre verdadeira?

Responder à questão 2 é o objetivo central deste trabalho.

Nossa motivação por elas teve origem na inquietação provocada pelo esforço de entender em [24] que prejuízo poderiam provocar os circuitos, uma vez que na descrição da estrutura das álgebras biseriais auto-injetivas, em [30], eles não provocam sensíveis danos.

Para responder às duas questões, fomos procurar nas antigas álgebras de Nakayama, entre aquelas cujo quiver é um circuito, que condições deveriam ser impostas para garantir a propriedade “ser unicamente determinada por fatores de composição” e relacioná-la com a de “ser livre de multiplicidade”.

As álgebras de Artin de Nakayama (também conhecidas como uniserais generalizadas) são exemplos dos mais simples de álgebras biseriais. Elas foram definidas por Nakayama, em 1939, em substituição aos anéis que são produto de anéis primários e que têm a propriedade de que cada módulo principal (de ambos os lados) admite uma única série de composição. Podemos dizer então que as álgebras de Nakayama são anéis dos quais se retirou a hipótese do produto mencionado acima.

Alguns resultados, contidos em [2], como a determinação da órbita dos fatores de composição dos módulos projetivos indecomponíveis sob a ação dos translações de Auslander e Reiten, foram ferramentas fundamentais para essa nossa primeira busca entre as álgebras de Nakayama. Obtivemos então para tais álgebras as condições necessárias e suficientes para que cada módulo indecomponível tenha a propriedade “ser unicamente determinado por seus fatores de composição”, no teorema II.2.1., e a propriedade “ser livre de multiplicidade”, no teorema III.1.1. Para ambas as propriedades as condições são extremamente simples e dizem respeito ao máximo comprimento permitido para os projetivos indecomponíveis, e esse máximo permitido é exatamente o posto do grupo de Grothendieck da álgebra.

Gostaríamos de dizer aqui que para nós foi extremamente surpreendente constatar que a condição necessária e suficiente que Auslander e Reiten estabeleceram, no exemplo 4.2 em [6], para que um módulo indecomponível, não projetivo, sobre uma álgebra de Nakayama auto-injetiva, seja unicamente determinado por fatores de composição se manteve a mesma quando a álgebra é uma álgebra de Nakayama qualquer (ver proposição II.2.6).

Através de uma álgebra de Nakayama achamos a resposta à questão 1, resposta essa que é negativa, conforme mostramos no exemplo III.2.1. Neste contra-exemplo, consideramos uma k -álgebra de Nakayama dada por um quiver com relações (Q, R) , onde Q é um 3-ciclo e, portanto, a álgebra considerada não é fator de nenhuma k -álgebra hereditária.

Quanto à questão 2, em relação à implicação $P.II \Rightarrow P.I$, também entre as álgebras de Nakayama podemos encontrar exemplos em que esta não se verifica. No entanto, preferimos construir uma álgebra biserial, que não é de Nakayama, dada por um quiver com relações. O contra-exemplo em questão está colocado no exemplo III.2.2.

Ainda quanto à implicação $P.II \Rightarrow P.I$, através do teorema 1 em [24], provamos que dentre as clássicas k -álgebras hereditárias de tipo de representação finito apenas as álgebras kQ , cujo grafo subjacente a Q é um diagrama de Dynkin A_n , é tal que $P.II$ se verifica. Chamamos a atenção de que é bem conhecido que todas elas têm a propriedade de que seus módulos indecomponíveis são unicamente determinados por seus fatores de composição.

A resposta para a implicação $P.I \Rightarrow P.II$, no caso em que o quiver ordinário da álgebra possa admitir circuitos, é o objetivo principal deste trabalho e consubstancia-se no teorema III.5.2: Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica, conexa e biserial, tal que seu quiver ordinário não contenha laços. Suponhamos que Λ -ind seja determinada por fatores de composição. Então Λ -ind é livre de multiplicidade.

Para a demonstração do mencionado resultado, estabelecemos vários outros que utilizam e exibem de modo sensível a combinatória dos métodos diagramáticos nas representações. Essa combinatória ficará evidenciada na descrição seguinte da organização do nosso trabalho.

O capítulo I contém definições e propriedades básicas da categoria dos módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de Artin. Particularmente sobre as notações e propriedades da categoria dos módulos finitamente gerados sobre uma k -álgebra de dimensão finita, onde k é um corpo algebricamente fechado. Tais álgebras, pelo teorema de Gabriel, são de uma forma natural identificadas com álgebras de quivers com relações (ver seções I.3 e I.4). Em consequência, fica estabelecido uma equivalência de Morita entre a categoria dos módulos finitamente gerados e a categoria das k -representações finitas de quiver com relações. Esta última é que fornece o modelo combinatório geométrico dos módulos (ver seções I.5 e I.6). Para complementar o capítulo introduzimos a caracterização do socle e do topo de um dado módulo neste contexto combinatório, bem como a noção de quiver de um módulo e dois tipos de classificação, segundo este quiver (ver seções I.7 e I.8).

No capítulo II tratamos de descrever algumas álgebras de Artin sobre as quais todos os módulos indecomponíveis são unicamente determinados por fatores de composição. A seção II.1 trata do grupo de Grothendieck, responsável pela definição formal da propriedade “ser unicamente determinado por fatores de composição”. A seção II.2 é dedicada às álgebras de Nakayama, para as quais estabelecemos as condições necessárias e suficientes para que a propriedade em questão se verifique em Λ -ind. Na seção II.3, por intermédio do algoritmo de Ringel, estabelecemos algumas condições necessárias para que uma álgebra $\Lambda = k(Q, R)$, onde (Q, R) é um quiver com relações, seja tal que em Λ -ind a propriedade que nos referimos acima se verifique. Tais condições impõem certas restrições

aos subquivers de Q . Estas restrições estão relacionadas com os laços, flechas múltiplas, circuitos e outros subquivers de Q , conforme a proposição II.3.5.

O capítulo III mostra na sua essência que P.I implica P.II. Nele temos de volta a forte influência da combinatória. Na seção III.1 caracterizamos as álgebras de Nakayama cuja categoria dos módulos indecomponíveis verifica P.II, através do teorema III.1.1. Para estas álgebras, usando as condições estabelecidas no capítulo anterior, esclarecemos quando a propriedade “ser determinada unicamente por fatores de composição” e a propriedade P.II são verificadas. A seção III.2 trata das k -álgebras biseriais e contém os resultados de Pogorzały e Skowroński, em [24], quanto à estrutura das álgebras biseriais de tipo de representação finito e à equivalência entre P.I e P.II, com a hipótese de que a álgebra é quociente de uma álgebra hereditária (aquelas cujo quiver ordinário não contém laços, nem circuitos). Nesta seção damos os primeiros passos na direção pretendida, provando que se P.I se verifica então os módulos projetivos (respectivamente, os injetivos) indecomponíveis são livres de multiplicidade - este é o teorema III.2.2. A seção III.3 contém três resultados básicos para nosso propósito que são o teorema III.3.1. seu corolário III.3.1 e o teorema III.3.2. e seus duais. Estes resultados ilustram localmente o quiver de módulos indecomponíveis, cujo quociente por um dado submódulo simples é soma direta de dois submódulos, no que se refere ao número de flechas que incidem no vértice ao qual tal simples está associado. Ilustram também que o número de somandos diretos indecomponíveis deste quociente é exatamente dois, que é o número de flechas que terminam nesse vértice considerado.

A seção III.4, como diz seu título, prima pelo método combinatório. Nele apresentamos todos os “modelos” de k -representações (ou módulos), cujo quociente por um submódulo simples é um módulo de tipo A_n (um dos tipos introduzidos na seção I.8 do cap.I), para o caso em que a álgebra $\Lambda = k(Q, R)$ é biserial de tipo de representação finito e tal que seu quiver Q não contém laços. Esses modelos estão listados nos lemas III.4.1, III.4.2 e III.4.3. Eles e suas versões duais, permitiram-nos garantir que, dado um módulo indecomponível, a multiplicidade dos seus fatores de composição que são somandos diretos do socle ou do topo é igual a um.

A seção III.5, fecho do trabalho, contém dois teoremas. O primeiro, teorema III.5.1, que é um teorema de classificação dos Λ -módulos indecomponíveis livres de multiplicidade, quando $\Lambda = k(Q, R)$ é biserial de tipo de representação finito, cujo quiver Q não contém laços e todo circuito de Q pertence a R . Tais módulos são classificados em dois tipos, segundo seu quiver: os biseriais livres (que são os projetivos-injetivos não uniseriais) e os de tipo A_n . O segundo teorema é o teorema III.5.2. que, conforme já dissemos anteriormente, finalmente demonstra no caso considerado que P.I implica P.II. A classificação dada pelo teorema III.5.1, as proposições III.4.2 e III.4.3. bem como o teorema III.3.2, foram ferramentas fundamentais na aplicação dos passos de indução, método utilizado na demonstração do teorema III.5.2.

Ainda nesta introdução queremos ressaltar que a verificação da propriedade “ser unicamente determinado por seus fatores de composição” para os módulos sobre uma

álgebra de Artin continua despertando grande interesse.

Auslander e Reiten, em [6], colocam em discussão várias condições que eles chamam de “locais”. Entre elas a questão de que “we do not know if is sufficient for $[A] = [B]$ to imply $A \cong B$ that only A is assumed not to be the middle of a short chain”. Hoje tal questão está resolvida para alguns casos.

Por exemplo, Reiten, Skowroński e Smalø, em [25], através da introdução da noção de “short cycle”, provaram que no caso em que a álgebra de Artin é de tipo de representação finito a resposta à questão acima é sim. No mesmo trabalho provaram que a resposta é afirmativa no caso em que um dado módulo indecomponível M não está em um “short cycle” e que em álgebras de tipo de representação finito os conceitos “ser termo médio de uma short chain” e “estar em um short cycle” são equivalentes. Para ilustrar melhor, dizemos que M em Λ -ind está em um “short cycle” se existe um módulo indecomponível N e existem os morfismos, não nulos, $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow M$ que não sejam isomorfismos.

Destacamos por fim que as condições “não estar em um short cycle” ou “ser a álgebra de tipo de representação finito e o módulo não ser termo médio de uma short chain” são apenas condições suficientes para que um dado módulo indecomponível seja unicamente determinado por fatores de composição, conforme mostra o exemplo da seção 4 em [22].

Capítulo I

Preliminares

Este capítulo consta de alguns resultados e propriedades básicas da categoria dos módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de Artin. Em especial, trata da categoria dos módulos finitamente gerados sobre as álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado na ótica do Teorema de Gabriel, forma pela qual tal categoria será abordada nos capítulos seguintes.

Lembramos que o teorema de Gabriel caracteriza uma grande classe de álgebras em termos de certo ‘modelo combinatório’ que permite uma representação geométrica através de quivers e certas relações. Consequentemente, os módulos sobre tais álgebras ganham também seu ‘modelo combinatório’, permitindo da mesma forma uma ‘visualização’ geométrica - é esta a ótica a que nos referimos acima.

Assumiremos muitos dos resultados aqui discutidos, sem explicitar suas demonstrações; no entanto, eles podem ser encontrados em detalhes em [4], [5], [9], [12], [13], [16], [18] e [21].

Queremos destacar que em algumas seções apresentamos exemplos com o intuito de ilustrar geometricamente os conceitos, bem como de clarificar a nomenclatura e convenções adotadas em geral na área das representações. Daremos ênfase às álgebras de quivers e às suas k -representações (ou seus módulos).

Além disso, na seção I.7, introduzimos a caracterização dos módulos *socle* e *topo* de um dado módulo M no contexto das k -representações (modelo combinatório referido acima) de um quiver com relações. Isto se deve a dois fatos. Um, não conhecemos na literatura a formalização do processo prático (que é bem conhecido!) de determinação de tais módulos. O outro, com base nessa formalização, temos também a “representação combinatória visual” deles “dentro” da de M .

Na seção I.8, introduzimos o conceito de *quiver próprio* de um módulo, sobre uma álgebra $k(Q, R)$, como um subquiver do quiver Q . Este conceito, de um modo informal, significa uma “visualização externa” da estrutura de k -representação e por isso, julgamos, facilitará o reconhecimento de certos “tipos de k -representações” no capítulo III.

Em todo o contexto deste trabalho quando nos referirmos a um módulo queremos dizer um módulo, à esquerda, finitamente gerado.

I.1 Álgebras de Artin

Definição I.1.1 : Um anel artiniano A (com unidade) é uma álgebra de Artin se seu centro contém um subanel artiniano sobre o qual A é um módulo finitamente gerado.

Por exemplo, todas as álgebras de dimensão finita sobre um corpo são exemplos de álgebras de Artin. É claro que existem álgebras de Artin que não são álgebras de dimensão finita sobre um corpo. Por exemplo, o anel $\mathbb{Z}_6$, anel dos inteiros módulo 6.

Definição I.1.2 : *Uma álgebra de Artin é conexa se, dados dois Λ -módulos projetivos quaisquer P e Q , existe uma sequência de módulos projetivos $P_0 = P, P_1, \dots, P_t = Q$, com $t \geq 1$, tal que, para todo $0 \leq i \leq t-1$, $\text{Hom}_\Lambda(P_i, P_{i+1}) \neq (0)$ ou $\text{Hom}_\Lambda(P_{i+1}, P_i) \neq (0)$.*

Assim, se Λ é não conexa então $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_s$, onde Λ_i são álgebras conexas, $i = 1, 2, \dots, s$. Com relação à categoria dos módulos, à esquerda, sobre Λ , denotada por $\Lambda\text{-Mod}$, vale que $\Lambda\text{-Mod}$ é equivalente a categoria produto $\prod_{i=1}^s (\Lambda_i\text{-Mod})$.

Definição I.1.3 : *Uma álgebra de Artin Λ é básica se $\Lambda/\text{rad}\Lambda$ é produto de anéis com divisão, onde $\text{rad}\Lambda$ indica o radical (de Jacobson) de Λ .*

Seja $\Lambda \cong P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2} \oplus \dots \oplus P_n^{m_n}$, $m_i \geq 1$, uma decomposição em Λ -módulos indecomponíveis, onde $P_i \not\cong P_j$ se $i \neq j$. Se $m_i = 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, então Λ é básica. Uma vez que nosso principal alvo é estudar a categoria dos módulos finitamente gerados, o teorema a seguir nos permite restringir esse estudo às álgebras básicas.

Teorema I.1.1 : (Morita) (ver Teorema 2, cap.II, sec.3 em [21]) *Seja Λ uma álgebra de Artin. Então existe uma álgebra básica S tal que as categorias $\Lambda\text{-Mod}$ e $S\text{-Mod}$ são equivalentes.*

Se denotamos por $\Lambda\text{-mod}$ a categoria dos Λ -módulos, à esquerda, finitamente gerados, como consequência deste último teorema temos que $\Lambda\text{-mod}$ e $S\text{-mod}$ são equivalentes.

Pelo exposto, vemos que impor que as álgebras sejam básicas e conexas não constituem uma restrição. Portanto, todas as álgebras neste trabalho serão supostas conexas e básicas.

Queremos lembrar que se $\Lambda \cong P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$, onde $P_i \not\cong P_j$ se $i \neq j$, então existem exatamente n classes de isomorfia de Λ -módulos simples (para detalhes ver em [21]).

Aproveitamos esta seção para fixar algumas notações sobre os módulos que estaremos utilizando a partir de agora e introduzir as especiais sequências exatas curtas que são as sequências de Auslander-Reiten. Tais sequências têm um papel fundamental no estudo das Representações de Álgebras.

Seja Λ um anel (associativo com unidade). A categoria dos Λ -módulos, à esquerda, finitamente gerados será denotada por $\Lambda\text{-mod}$. Denotaremos por $\Lambda\text{-ind}$ a subcategoria plena de $\Lambda\text{-mod}$ formada pelas classes de isomorfia dos Λ -módulos indecomponíveis. Todos os módulos a que nos referirmos são objetos de $\Lambda\text{-mod}$.

Definição I.1.4 : *Seja Λ um anel. Uma sequência exata curta*

$$(0) \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \longrightarrow (0)$$

de Λ -módulos é uma sequência de Auslander-Reiten (notação ARS) se:

- (i) *A e C são Λ -módulos indecomponíveis;*
- (ii) *f não é epimorfismo que cinde ou g não é monomorfismo que cinde;*
- (iii) *Todo homomorfismo $f' : X \longrightarrow C$, que não é epimorfismo que cinde pode ser levantado a B , isto é, existe um homomorfismo $f'' : X \longrightarrow B$ tal que $f' = f \circ f''$.*

Observação I.1.1 : As condições (i), (ii) e (iii) da definição acima são equivalentes às condições (i), (ii) e (iii*), onde (iii*) é dada por:

- (iii*) *Todo homomorfismo $g' : A \longrightarrow Y$ que não é monomorfismo que cinde pode ser estendido a B , isto é, existe um homomorfismo $g'' : B \longrightarrow Y$ tal que $g'' \circ g = g'$.*

Auslander e Reiten, provaram que, sobre certos anéis (em particular, sobre uma álgebra de Artin), para cada módulo indecomponível C , não projetivo, existe, a menos de isomorfismo, uma ARS que termina em C . O módulo A da ARS que termina em C é denotado por τC e denominado *transladado de Auslander-Reiten de C* . Da mesma forma, provaram que para cada módulo indecomponível A , não injetivo, existe, a menos de isomorfismo, uma ARS que começa em A ; o módulo C da ARS que começa em A é denotado por $\tau^{-1}A$ e denominado *transladado inverso de A* . Eles exibiram também uma fórmula explícita de cálculo dos transladados e transladados inversos para módulos indecomponíveis, quando existem, através de métodos funtoriais, que podem ser encontrados em [5].

Além de formarem uma classe distinguida de sequências exatas curtas, na medida em que fornecem uma “fórmula” para a determinação da categoria dos módulos indecomponíveis, as ARS apresentam outras propriedades importantes. Entre essas, a de determinar dois números invariantes da álgebra, denotados por $\alpha(\Lambda)$ e $\beta(\Lambda)$, responsáveis por uma maneira de descrever a complicada estrutura dos morfismos entre os módulos. O número $\alpha(\Lambda)$ indica o maior número possível de somandos indecomponíveis do termo médio de qualquer ARS de Λ ; $\beta(\Lambda)$ o maior número possível desses somandos que são nem projetivos, nem injetivos. Bautista e Brenner, em [9], provaram que para uma álgebra de Artin Λ de tipo de representação finito vale que $\alpha(\Lambda) \leq 4$ e $\beta(\Lambda) \leq 3$.

Vamos também agora recordar alguns conceitos bem conhecidos na Teoria das Representações de Álgebras, como as noções de topo, socle de módulos, álgebra de tipo de representação finito e álgebras hereditárias.

Sejam Λ uma álgebra de Artin e M um Λ -módulo.

Chama-se *topo* de M , denotado por $\text{top } M$, o módulo $M/\text{rad } M$. É bem conhecido que $\text{top } M$ é um Λ -módulo semi-simples; ou seja, $\text{top } M = \bigoplus_i S_i^{m_i}$, onde S_i são simples e $m_i \geq 1$.

Define-se *socle* de M , denotado por $\text{soc } M$, o submódulo semi-simples maximal de M ; ou seja, $\text{soc } M$ é a soma de todos os submódulos simples de M . Decorre do fato de que M é finitamente gerado sobre um anel artiniano que $\text{soc } M \neq (0)$.

De outro lado, vale também que sobre uma álgebra de Artin os módulos projetivos indecomponíveis têm topo simples e os injetivos indecomponíveis têm socle simples.

Diremos que Λ é de *tipo de representação finito* se o número de classes de isomorfia dos Λ -módulos indecomponíveis é finito. Caso contrário, diremos que Λ é de *tipo de representação infinito*.

Uma álgebra Λ é *hereditária* se todo submódulo de um Λ -módulo projetivo é projetivo. É bem conhecido que um anel artiniano é hereditário se e somente se seu radical é projetivo.

I.2 Quivers

Definição I.2.1 : Um quiver é uma quádrupla $Q = (Q_0, Q_1, o, e)$, onde Q_0 e Q_1 são conjuntos, enquanto o, e são funções de Q_1 em Q_0 . Os elementos de Q_0 são chamados de *vértices* de Q e os de Q_1 de *flechas* de Q ; dada uma flecha $\alpha \in Q_1$, $o(\alpha)$ é o *vértice inicial* (ou *origem*) de α e $e(\alpha)$ é o *vértice final* (ou *final* ou *término*) de α .

A notação $\alpha : x \rightarrow y$ indica que α é uma flecha que tem $o(\alpha) = x$ e $e(\alpha) = y$.

Dado um vértice $x \in Q_0$, dizemos que x é *incidente* às r flechas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, com $r \geq 1$, se $x \in \{o(\alpha_i), e(\alpha_i)\}$, para todo $i = 1, 2, \dots, r$.

Sejam $x, y \in Q_0$. Um *caminho* μ em Q de x para y é uma sequência de flechas α_i , denotado por $\mu = \alpha_r \alpha_{r-1} \dots \alpha_2 \alpha_1$, $r \geq 1$, tal que $o(\alpha_1) = x$, $e(\alpha_r) = y$ e para cada i , $1 \leq i \leq r-1$, $e(\alpha_i) = o(\alpha_{i+1})$. O número r de flechas que aparecem em μ é chamado *comprimento* de μ , sendo denotado por $l(\mu)$.

Por convenção, adotaremos também o caminho *trivial* que é um caminho sem flechas associado a um vértice $x \in Q_0$, entendendo-o como de comprimento zero e denotando-o por ϵ_x . Por definição $o(\epsilon_x) = x = e(\epsilon_x)$.

Seja $\mu = \alpha_r \alpha_{r-1} \dots \alpha_1$, um caminho em Q , com $r \geq 2$. Dizemos que μ é um *circuito* se $o(\alpha_1) = e(\alpha_r)$. Um circuito é um *r-ciclo* se é formado de r flechas distintas e cada vértice é incidente a exatamente duas flechas. Um *laço* em Q é um caminho formado por apenas uma flecha que tem origem e final iguais.

Dados os vértices $x, y \in Q_0$, um *passeio* entre x e y é uma sequência de flechas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, tal que $x \in \{o(\alpha_1), e(\alpha_1)\}$, $y \in \{o(\alpha_s), e(\alpha_s)\}$ e para cada i , $1 \leq i \leq s-1$, α_i e α_{i+1} tem um vértice em comum.

Um *subquiver* de um quiver $Q = (Q_0, Q_1, o, e)$ é um quiver $Q' = (Q'_0, Q'_1, o', e')$, onde $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ e o', e' são, respectivamente, as restrições de o, e a Q'_1 . Um subquiver Q' de Q é um *subquiver pleno* de Q se toda flecha $\alpha : x \rightarrow y$ de Q_1 , com $x, y \in Q'_0$, é uma flecha de Q'_1 .

Dado um vértice $x \in Q_0$, seja Q'_x o subquiver pleno de Q formado por todos os vértices y tais que existe um passeio entre x e y . Tal subquiver é denominado a *componente conexa* de Q , contendo x . Assim, diz-se que um quiver é *conexo* se $Q = Q'_x$, para algum $x \in Q_0$.

As definições e a nomenclatura acima sugerem uma forma pictórica de representá-las, como nos exemplos que seguem:

Exemplo I.1.1:

Para este exemplo o conjunto de vértices é $\{1, 2, 3, 4\}$, o conjunto das flechas é $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ e as funções e, o são tais que $o(\alpha) = e(\alpha) = 1 = o(\beta)$, $e(\beta) = 2$, $o(\gamma) = 3$ e $e(\gamma) = 4$. O quiver dado não é conexo e contém como subquiver um laço de flecha α .

Exemplo I.1.2:

O quiver acima é conexo e contém um 4-ciclo e flechas múltiplas (ou flechas paralelas).

Dado um quiver Q , a ele está associado um *diagrama ou grafo subjacente* que consiste de um conjunto de pontos que é formado pelos vértices de Q e um conjunto de arestas que está em correspondência um a um com o conjunto das flechas de Q . Para ilustrar, aos quivers do exemplo I.1.1 e do exemplo I.1.2 estão associados, respectivamente, os diagramas ou grafos subjacentes que têm a seguinte forma pictórica :

Os quivers aos quais vamos nos referir, a partir de agora, são *finitos*, isto é, têm Q_0 e Q_1 finitos.

I.3 Álgebras de caminhos e o Teorema de Gabriel

Sejam $Q = (Q_0, Q_1, o, e)$ um quiver conexo e k um corpo. Consideremos kQ o k -espaço vetorial que tem por base todos os caminhos de Q , inclusive os caminhos triviais. Para munir kQ de uma estrutura de k -álgebra, definiremos primeiro a multiplicação na base indicada da seguinte maneira:

Dados dois caminhos de Q , $\mu_1 = \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1$ e $\mu_2 = \beta_r \beta_{r-1} \dots \beta_1$, colocamos

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \begin{cases} \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1 \beta_r \beta_{r-1} \dots \beta_1 & \text{se } e(\beta_r) = o(\alpha_1) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Este produto se estende de maneira única, por linearidade, a todos os elementos de kQ ; essa extensão mune o espaço kQ de uma estrutura de k -álgebra, que é associativa e tem elemento unidade. O elemento unidade é $\sum_{x \in Q_0} \epsilon_x$. Essa álgebra é chamada a *álgebra de caminhos* de Q . Denotaremos sempre por F o ideal de kQ gerado por todas as flechas de Q .

Propriedades da álgebra kQ (ver em [12] ou em [13])

Além de ser associativa e ter elemento unidade, kQ tem as seguintes propriedades:

1. É de dimensão finita sobre k se e somente se Q não contém laços, nem circuitos;
2. É uma álgebra conexa se e somente se Q é conexo;
3. O conjunto $\{\epsilon_x : x \in Q_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de kQ ;
4. É uma álgebra básica se e somente se Q não contém laços, nem circuitos;
5. F é o *rad* kQ se e somente se Q não contém circuitos, nem laços. Além disto, dados $x, y \in Q_0$, o número de flechas $\alpha : x \rightarrow y$ é igual a $\dim_k(\epsilon_y(F/F^2)\epsilon_x)$.

Como nosso próximo alvo é o teorema de Gabriel, que estabelece que o estudo das álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é equivalente ao estudo de quocientes de álgebras de caminhos de um quiver por certos ideais especiais, precisamos definir o que são tais ideais especiais.

Definição I.3.1 : *Sejam Q um quiver e F o ideal de kQ gerado pelas flechas. Um ideal R de kQ é admissível se existe um $r \geq 2$ tal que $F^r \subseteq R \subseteq F^2$.*

Observação I.3.1 : (i) $\{0\}$ é um ideal admissível de kQ se e somente se Q não contém circuitos, nem laços. Neste caso, todo ideal de kQ contido em F^2 é admissível;

(ii) Para todo $r \geq 2$, F^r é um ideal admissível de kQ .

Proposição I.3.1 : (ver proposição II.7 em [13]) *Sejam k um corpo, Q um quiver e R um ideal admissível de kQ . Consideremos a álgebra quociente $\Lambda = kQ/R$. Então:*

- (i) $\{\epsilon_x + R : x \in Q_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de kQ/R ;
- (ii) Se Q é conexo então kQ/R é uma k -álgebra conexa;
- (iii) kQ/R é uma álgebra básica de dimensão finita sobre k , $\text{rad}(kQ/R) = F/R$ e, portanto, $\text{rad}^m(kQ/R) = F^m/R$.

Estamos agora em condições de estabelecer o resultado principal desta seção, que é o teorema de Gabriel. Tal resultado é um teorema de estrutura e como tal permite ‘visualizar’ a álgebra, o que por sua vez permitirá ‘visualizar’ os módulos sobre a álgebra, conforme veremos na seção seguinte.

Teorema I.3.1 : (Gabriel) (ver Teorema II.1 em [13] ou em [18]) *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica e conexa. Então existe um quiver conexo Q_Λ e um epimorfismo de álgebras $\psi: kQ_\Lambda \rightarrow \Lambda$ tal que $\ker \psi$ é um ideal admissível de kQ_Λ .*

Embora não apresentemos aqui a demonstração do teorema de Gabriel, vamos esquematizar alguns passos de sua demonstração, no que se refere a construção do quiver Q_Λ e a necessidade da hipótese de que o corpo k seja algebricamente fechado.

I. Construção do quiver Q_Λ

Tendo em mente que, dado um quiver Q , o conjunto $\{\epsilon_x : x \in Q_0\}$ forma um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de kQ e que o número de flechas que começam no vértice x e terminam no vértice y é igual a $\dim_k(\epsilon_y(F/F^2)\epsilon_x)$ surge, pois, de forma natural a construção de Q_Λ que indicaremos a seguir.

Consideremos um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$ da álgebra Λ . O quiver Q_Λ , denominado *quiver ordinário* de Λ , é construído com n vértices (tantos quantos o número de idempotentes do sistema considerado, ou ainda tantos quantos o número de classes de isomorfia dos Λ -módulos simples), enumerados de 1 a n , em correspondência um a um com os $e_1, \dots, e_n$. Quanto às flechas, o número delas que tem origem no vértice i e terminam no vértice j é dado pela $\dim_k e_j(\text{rad } \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda) e_i$.

Observamos que a construção de Q_Λ independe do sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos escolhido (a menos de enumeração dos vértices) e é conexo. Além disso, se Q é um quiver conexo tal que Λ é isomorfa a álgebra de caminhos kQ então Q e Q_Λ coincidem.

II. Sobre o epimorfismo $\psi : kQ_\Lambda \longrightarrow \Lambda$

Em primeiro lugar, construímos um morfismo k -linear ψ do espaço vetorial kQ_Λ no espaço vetorial Λ definindo-o sobre a base de caminhos de kQ_Λ , de tal forma que cada caminho trivial e_i seja levado no idempotente e_i e que as flechas $\alpha : i \longrightarrow j$ de Q_Λ sejam aplicadas bijetivamente sobre uma base escolhida de $e_j(\text{rad } \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda)e_i$. Esse morfismo é também um morfismo de álgebras.

É importante observar agora que a exigência de o corpo k ser algebricamente fechado e Λ ser básica são essenciais para garantir que ψ é um epimorfismo de álgebras, uma vez que, nestas condições, vale que $\Lambda \cong \text{rad } \Lambda \oplus (\bigoplus_{i=1}^n k e_i)$ como k -espaço vetorial.

É fácil provar que o $\ker \psi$ é um ideal finitamente gerado e admissível de kQ_Λ .

I.4 Quiver com relações

Sejam k um corpo e Q um quiver. Para cada par $(x, y) \in Q_0 \times Q_0$, denotamos por $Q(x, y)$ o k -espaço vetorial que tem por base os caminhos de Q de x para y ; desta forma podemos escrever que kQ , como k -espaço vetorial, é a soma direta dos $Q(x, y)$, quando x e y percorrem Q_0 .

Definição I.4.1 : Um sistema de relações R sobre Q é uma aplicação $R : Q_0 \times Q_0 \longrightarrow kQ$ que a cada par (x, y) associa um subespaço vetorial $R(x, y) \subseteq Q(x, y)$ que satisfaz as condições $Q(y, z)R(x, y) \subseteq R(x, z)$ e $R(x, y)Q(y, x) \subseteq R(x, y)$.

O par (Q, R) é denominado um quiver com relações.

Se R é um sistema de relações sobre Q , então o k -espaço vetorial $I = \bigoplus_{x, y \in Q_0} R(x, y)$ é um ideal da álgebra de caminhos kQ . A álgebra quociente kQ/I é conhecida como álgebra de caminhos de (Q, R) e, muitas vezes, será denotada também por $k(Q, R)$.

Observação I.4.1 : (a) Por abuso de linguagem, vamos denotar por R tanto o sistema de relações R sobre Q como o ideal I em kQ gerado por esse sistema.

(b) Seja (Q, R) um quiver com relações tal que o ideal R gerado pelas relações seja um ideal admissível de kQ . Então para a álgebra $\Lambda = k(Q, R)$ valem as propriedades da proposição I.3.1.

Chamamos a atenção para o fato de que o ideal R por ser admissível garante que Q e Q_Λ coincidem.

Vimos, na seção I.3, que uma álgebra Λ de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica e conexa, é tal que $\Lambda \cong kQ_\Lambda / R_\Lambda$, onde $R_\Lambda = \ker \psi$ e ψ um epimorfismo na citada seção (teorema de Gabriel).

Com as mesmas notações utilizadas e indicando por $\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ um conjunto finito de geradores de R_Λ sobre kQ_Λ , é fácil ver que a aplicação, também denotada por R_Λ , de $(Q_\Lambda)_0 \times (Q_\Lambda)_0$ em kQ_Λ , definida por

$$R_\Lambda(x, y) = \sum_{t=1}^m a_t \epsilon_y \delta_t \epsilon_x \in Q_\Lambda(x, y), \text{ onde } a_t \in k, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, t,$$

é um sistema de relações sobre Q_Λ e que o ideal R_Λ é a soma direta dos $R_\Lambda(x, y)$, para $x, y \in (Q_\Lambda)_0$.

Deste ponto de vista, podemos ‘esquecer’ o epimorfismo ψ no referido teorema e descrever a álgebra Λ através de um quiver Q_Λ mais um sistema de relações R_Λ , denominado por Gabriel de *adequado* (isto é, tal que $F^m \subseteq R_\Lambda \subseteq F^2$, para algum $m \geq 2$). Portanto, podemos reescrever o teorema de Gabriel da forma:

Teorema I.4.1 : *Toda álgebra Λ de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica e conexa, é uma álgebra de caminhos de um quiver com relações (Q_Λ, R_Λ) , onde R_Λ é um sistema de relações adequado.*

Observação I.4.2 : Comentamos no final da construção de Q_Λ , quiver ordinário de Λ , que este é unicamente determinado. No entanto, o sistema de relações R_Λ adequado pode ser não unicamente determinado. Queremos dizer que podemos ter (Q, R_1) e (Q, R_2) quivers com sistemas de relações adequados, com $R_1 \neq R_2$, mas tais que $k(Q, R_1) \cong k(Q, R_2)$. Para um exemplo ver em [12], cap.III, ex.3D2.

A partir de agora, gostaríamos de enfatizar que, em vista do teorema de Gabriel, quando falarmos em uma álgebra Λ de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica e conexa, estaremos falando de álgebras dadas por um quiver com sistema de relações adequado, ou simplesmente, $\Lambda = k(Q, R)$ onde (Q, R) é um quiver com relações, sem menção explícita de que $Q = Q_\Lambda$ é o quiver ordinário de Λ e $R = R_\Lambda$ é um sistema de relações adequado sobre Q .

E é sob essa ótica que vamos descrever os módulos sobre tais álgebras.

I.5 A categoria (Q, R) -Mod

Sejam k um corpo e (Q, R) um quiver com relações.

Definição I.5.1 : *Uma k -representação de Q é um par $V = (V(x)_{x \in Q_0}, V(\alpha)_{\alpha \in Q_1})$, onde para cada $x \in Q_0$, $V(x)$ é um k -espaço vetorial e, para cada flecha $\alpha : x \rightarrow y$ em Q_1 , $V(\alpha)$ é um k -morfismo (linear) de $V(x)$ em $V(y)$.*

Sejam V uma k -representação de Q e um caminho $\mu = \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1$, com $m \geq 1$, $o(\alpha_1) = x$ e $e(\alpha_m) = y$, em Q . Definimos o k -morfismo $V(\mu) : V(x) \rightarrow V(y)$ como o morfismo dado pela composição $V(\alpha_m) \circ V(\alpha_{m-1}) \circ \dots \circ V(\alpha_1)$; estendemos esta definição para as combinações lineares de caminhos da seguinte forma : se $\rho = \sum_{\mu} a_{\mu} \mu \in Q(x, y)$, com $a_{\mu} \in k$, então $V(\rho) = \sum_{\mu} a_{\mu} V(\mu)$.

Definição I.5.2 : Uma k -representação V de (Q, R) é uma k -representação de Q que satisfaz a condição $V(\rho) = 0$, para todo $\rho \in R$.

Sejam $V = (V(x)_{x \in Q_0}, V(\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ e $W = (W(x)_{x \in Q_0}, W(\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ duas representações de (Q, R) . Por definição, um morfismo $f : V \rightarrow W$ é uma família $f = (f_x)_{x \in Q_0}$ de morfismos k -lineares tal que, para cada flecha $\alpha : x \rightarrow y$, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} V(x) & \xrightarrow{f_x} & W(x) \\ V(\alpha) \downarrow & & \downarrow W(\alpha) \\ V(y) & \xrightarrow{f_y} & W(y) \end{array}$$

O conjunto dos morfismos entre V e W é denotado por $Hom_{(Q, R)}(V, W)$ e este conjunto é um k -espaço vetorial; a composta dos morfismos é naturalmente definida coordenada a coordenada.

Portanto, podemos definir a *Categoria das k -representações de (Q, R)* , denotada por $(Q, R)\text{-Mod}$, cujos objetos são as k -representações V de (Q, R) e cujo conjunto de morfismos entre dois objetos V e W são os elementos de $Hom_{(Q, R)}(V, W)$ definido acima. É fácil verificar que $(Q, R)\text{-Mod}$ é de fato uma categoria.

Também é de fácil verificação que um morfismo $f = (f_x)_{x \in Q_0} \in Hom_{(Q, R)}(V, W)$ é um *monomorfismo* (*epimorfismo*) se o k -morfismo f_x é injetivo (sobrejetivo), para cada $x \in Q_0$. Assim f é um isomorfismo se f é um monomorfismo e epimorfismo.

Seja $V = (V(x)_x, V(\alpha)_{\alpha})$ uma k -representação de (Q, R) . Uma *subrepresentação* de V é um objeto $W = (W(x)_x, W(\alpha)_{\alpha})$ em $(Q, R)\text{-Mod}$ tal que, para cada $x \in Q_0$, $W(x)$ é um subespaço de $V(x)$ e a família $(\iota_x)_x$ é um morfismo, onde ι_x é a inclusão de $W(x)$ em $V(x)$.

Uma k -representação é *simples* se não admite subrepresentação própria não trivial. Podemos dar exemplos de k -representações simples de (Q, R) que são: para cada $x \in Q_0$, seja $S_x = (S_x(y)_y, S_x(\alpha)_{\alpha})$, onde

$$S_x(y) = \begin{cases} (0) & \text{se } x \neq y \\ k & \text{se } x = y \end{cases} \quad \text{e} \quad S_x(\alpha) = 0, \text{ para toda } \alpha \in Q_1.$$

É fácil ver que cada S_x é de fato uma k -representação simples de (Q, R) e que, para $x \neq y$, $S_x \not\cong S_y$; portanto a categoria $(Q, R)\text{-Mod}$ admite pelos menos n objetos simples, onde n é o número de vértices de Q , que indicaremos por $n = |Q_0|$.

Definição I.5.3 : *Seja $V = (V(x)_x, V(\alpha)_\alpha)$ uma k -representação de (Q, R) . V é dita uma k -representação finita de (Q, R) se $\dim_k V(x) < \infty$, para todo $x \in Q_0$.*

Indicamos por $(Q, R)\text{-mod}$ a subcategoria plena de $(Q, R)\text{-Mod}$, cujos objetos são as k -representações finitas de (Q, R) .

Observamos que se $\phi \in \text{Hom}_{(Q, R)}(V, W)$, com V, W em $(Q, R)\text{-mod}$, é um isomorfismo então $\dim_k V(x) = \dim_k W(x)$, para todo $x \in Q_0$. Mas a recíproca deste fato não é verdadeira (ver exemplo I.6.4 na seção que segue).

I.6 A categoria $\Lambda\text{-mod}$ e a categoria $(Q, R)\text{-mod}$

Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica e conexa. Pelo teorema I.4.1, $\Lambda \cong k(Q, R)$, onde (Q, R) é um quiver com relações. Assim cada M em $\Lambda\text{-mod}$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k e $\text{Hom}_\Lambda(M, N)$ é um k -espaço vetorial.

O teorema abaixo estabelece uma equivalência entre as categorias $\Lambda\text{-mod}$ e $(Q, R)\text{-mod}$ que permite, pois, ‘visualizar’ as representações (ou seja, os módulos) da álgebra através das k -representações de seu correspondente quiver com relações.

Observação I.6.1 : As categorias $\Lambda\text{-mod}$ e $k(Q, R)\text{-mod}$ são k -categorias, isto é, são categorias que, para cada par de objetos, o conjunto de morfismos entre eles é um k -espaço vetorial e a composição de morfismos é k -bilinear.

Teorema I.6.1 : (ver Sec.4.1 em [18] ou Teorema III.1 em [13]) *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica e conexa. Então a k -categoria $\Lambda\text{-mod}$ é equivalente a k -categoria $(Q, R)\text{-mod}$, onde (Q, R) é um quiver com relações tal que $\Lambda \cong k(Q, R)$*

Neste teorema também vamos apenas indicar a construção dos funtores que definem a equivalência entre essas categorias, sem no entanto entrar em detalhes. O leitor curioso encontrará os detalhes nas referências acima ou em (teorema 4.3.2 em [12]). A construção desses funtores nos será útil em algumas demonstrações posteriores, que julgamos se tornarem mais simples na linguagem das k -representações.

Para o que segue neste capítulo, salvo menção ao contrário, estaremos utilizando as notações introduzidas nas seções anteriores: ou seja, $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de Λ e $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ é o conjunto dos caminhos triviais de Q correspondentes a $\{e_1, \dots, e_n\}$. Estaremos, também, graças a Gabriel, escrevendo $\Lambda = k(Q, R) = kQ/R$, ao invés de $\Lambda \cong kQ/R = k(Q, R)$.

Vamos supor ainda que $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$, sempre que $|Q_0| = n$

A. Sobre o funtor $\mathcal{F} : \Lambda\text{-mod} \longrightarrow (Q, R)\text{-mod}$

Seja M em $\Lambda = kQ/R\text{-mod}$. Colocamos, para cada i , $1 \leq i \leq n$, $M(i) := (\epsilon_i + R)M$, que é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k , e, para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ em Q_1 , definimos $M(\alpha) : M(i) \longrightarrow M(j)$ como a multiplicação por $\alpha + R$ ou seja, $M(\alpha)(m_i) := (\alpha + R)m_i$, $m_i \in M(i)$, que é um morfismo k -linear. Desta forma, $M(\rho) = 0$, para todo $\rho \in R$ e assim o par $(M(i)_{i \in Q_0}, M(\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ é uma k -representação finita de (Q, R)

Seja agora um morfismo $\phi \in \text{Hom}_\Lambda(M, M')$. Consideremos a família $(\phi_i)_{i \in Q_0}$, onde ϕ_i é o k -morfismo linear de $M(i)$ em $M'(i)$ induzido por ϕ . Tal família é um morfismo de k -representações de $M = (M(i)_i, M(\alpha)_\alpha)$ em $M' = (M'(i)_i, M'(\alpha)_\alpha)$.

É natural definirmos, para M em $\Lambda\text{-mod}$, $\mathcal{F}M = (M(i)_{i \in Q_0}, M(\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ e, para $\phi \in \text{Hom}_\Lambda(M, M')$, $\mathcal{F}\phi = (\phi_i)_i$. Com essas definições $\mathcal{F}$ é um funtor k -linear.

B. Sobre o funtor $\mathcal{G} : (Q, R)\text{-mod} \longrightarrow \Lambda\text{-mod}$

Seja $V = (V(i)_i, V(\alpha)_\alpha)$ em $(Q, R)\text{-mod}$. Consideremos o k -espaço vetorial de dimensão finita $M = \bigoplus_{i=1}^n V(i)$. Queremos definir uma estrutura de Λ -módulo em M . Para tanto, vamos usar os seguintes fatos: que kQ tem como base os caminhos de Q , que, para todo caminho μ , não trivial, de i para j , $V(\mu) : V(i) \longrightarrow V(j)$ é um morfismo k -linear e que $V(\rho) = 0$, para todo $\rho \in R$.

Seja $m = (m_1, \dots, m_n) \in M$, $m_i \in V(i)$. Definimos que $(\epsilon_i + R).m := m_i \in M(i) \subseteq M$, para cada i , $1 \leq i \leq n$, e, para cada caminho μ , não trivial, de i para j , $(\mu + R).m$ é o elemento de M , cuja coordenada de lugar l é $((\mu + R).m)_l := \delta_{lj}V(\mu)(m_i) \in V(j)$, onde δ_{lj} é o símbolo de Kronecker.

Por abuso de notação, escreveremos que $(\mu + R).m = V(\mu)(m_i)$. E, por linearidade, está definido o produto $(\mu + R).m$, para todo $\mu \in kQ$. Com isto, definimos $\mathcal{G}V = M$.

Sejam $V = (V(i)_i, V(\alpha)_\alpha)$ e $W = (W(i)_i, W(\alpha)_\alpha)$ em $(Q, R)\text{-mod}$ e $\phi = (\phi_i)_i \in \text{Hom}_{(Q, R)}(V, W)$. Como $\mathcal{G}V = \bigoplus_{i \in Q_0} V(i)$ e $\mathcal{G}W = \bigoplus_{i \in Q_0} W(i)$, definimos $\mathcal{G}\phi := \bigoplus_{i \in Q_0} \phi_i : \mathcal{G}V \longrightarrow \mathcal{G}W$. Com estas definições $\mathcal{G}\phi$ é um morfismo de Λ -módulos e $\mathcal{G}$ é um k -funtor.

Observação I.6.2 : Os funtores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, construídos acima, são tais que $\mathcal{F}\mathcal{G} \cong \text{Id}_{(Q, R)\text{-mod}}$ e $\mathcal{G}\mathcal{F} \cong \text{Id}_{\Lambda\text{-mod}}$. São eles que permitem visualizar um módulo M geometricamente da seguinte maneira: no lugar de cada vértice i de Q colocamos um k -espaço vetorial de dimensão finita $M(i)$ e no lugar de cada flecha α de Q um morfismo k -linear $M(\alpha)$.

Assim, através da equivalência do teorema I.6.1. não distinguiremos, na maioria das vezes, os $\Lambda = k(Q, R)$ -módulos finitamente gerados das k -representações finitas de (Q, R) . Abusando da linguagem, nos referiremos indistintamente a M como um Λ -módulo ou a M como uma representação de (Q, R) . Através de um abuso maior ainda de linguagem, diremos “seja M um Λ -módulo cuja representação é” com o significado de “seja a representação M de (Q, R) , dada por”.

De outro lado, queremos chamar a atenção de que a equivalência definida por esses funtores permite trabalhar com a categoria $(Q, R)\text{-mod}$ como uma categoria abeliana, onde os conceitos de kernel, cokernel, soma direta, sequência exata curta, etc, serão tratados como usualmente é feito. Quanto à soma direta, estabeleceremos que, dadas $V = (V(x)_x, V(\alpha)_\alpha)$ e $W = (W(x)_x, W(\alpha)_\alpha)$, duas k -representações finitas de (Q, R) , a soma direta de V e W é a representação $V \oplus W = ((V \oplus W)(x)_x, (V \oplus W)(\alpha)_\alpha)$, onde $(V \oplus W)(x) = V(x) \oplus W(x)$ e $(V \oplus W)(\alpha)$ é o k -morfismo dado pela matriz :

$$\begin{pmatrix} V(\alpha) & 0 \\ 0 & W(\alpha) \end{pmatrix} : V(x) \oplus W(x) \longrightarrow V(y) \oplus W(y), \text{ para toda flecha } \alpha : x \longrightarrow y.$$

Dizemos que uma k -representação, não nula, de (Q, R) é *indecomponível* se ela não pode ser escrita como soma direta de outras duas k -representações, não nulas, de (Q, R) .

O teorema I.6.1 permite também caracterizar as classes de isomorfismo dos Λ -módulos simples e dos Λ -módulos projetivos indecomponíveis.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n = |Q_0|$, consideremos $P_i = (P_i(j), P_i(\alpha)_\alpha)$, definida por:

Para cada vértice j , $P_i(j) = Q(i, j)/R(i, j)$, onde $Q(i, j)$ denota o k -espaço vetorial que tem por base os caminhos de i para j e $R(i, j)$ um k -subespaço de $Q(i, j)$, contido em R . Para uma flecha $\alpha : j \rightarrow s$, $P_i(\alpha)(\gamma + R) = \alpha\gamma + R$, para todo caminho γ de i para j . Temos, pois, a

Proposição I.6.1 : (ver sec.4.1 em [18] ou cap.III, sec.3 em [13]) *Com as notações anteriores, vale que*

- (i) $\{S_i : 1 \leq i \leq n\}$ é o conjunto das classes de isomorfia dos Λ -módulos simples;
- (ii) Cada P_i definido acima é uma k -representação e o conjunto $\{P_i : 1 \leq i \leq n\}$ é um conjunto de representantes das classes de isomorfia dos Λ -módulos projetivos indecomponíveis e $\text{top } P_i \cong S_i$.

É claro que podemos caracterizar também os Λ -módulos injetivos indecomponíveis. Essa caracterização é feita através da álgebra oposta Λ^{op} e do functor dualidade $D : \Lambda\text{-mod} \longrightarrow \Lambda^{op}\text{-mod}$ definido nos objetos de $\Lambda\text{-mod}$ por $DM = \text{Hom}_k(M, k)$. Lembremos que se $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$, com $P_i \not\cong P_j$ se $i \neq j$, então $DP_1, DP_2, \dots, DP_n$ é uma lista completa, sem repetições, dos Λ^{op} -módulos injetivos indecomponíveis (ver em [21]).

De outro lado, se $\Lambda = k(Q, R)$, então $\Lambda^{op} = k(Q^*, R^*)$, onde $Q^* = (Q_0^*, Q_1^*, o^*, e^*)$, o quiver oposto de Q , é tal que $Q_0^* = Q_0$ e existe uma bijeção $\phi : Q_1 \rightarrow Q_1^*$ tal que $o^*(\phi(\alpha)) = e(\alpha)$ e $e^*(\phi(\alpha)) = o(\alpha)$ (informalmente podemos dizer que Q^* é obtido de Q pela inversão das flechas); quanto a R^* , denotando por $\alpha^* = \phi(\alpha)$, para toda $\alpha \in Q_1$, temos que $\rho = \sum_i a_i \alpha_{m_i} \dots \alpha_1 \in R$, $a_i \in k$, se e somente se $\phi(\rho) = \sum_i a_i \alpha_1^* \dots \alpha_{m_i}^* \in R^*$.

Portanto, é possível relacionar as representações de (Q, R) com as do seu quiver oposto (Q^*, R^*) , via o comportamento da dualidade $D = Hom_k(-, k)$ e dos funtores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ da equivalência do teorema I.6.1. Os detalhes podem ser encontrados em [12] ou em [18].

Para caracterizar os injetivos indecomponíveis, para cada $i = 1, 2, \dots, n = |Q_0|$, definimos $I_i = (I_i(j), I_i(\alpha)_\alpha)$ onde:

Para cada vértice j , $I_i(j) = Q(j, i) / R(j, i)$. Para cada flecha $\alpha : j \rightarrow s$ e caminho γ de j para s , $I_i(\alpha)(\gamma + R) = \gamma' + R$, se existe um caminho γ' de s para i tal que $\gamma = \gamma'\alpha$, e R , caso contrário. Temos, então a

Proposição I.6.2 : (ver sec.4.1 em [18] ou cap.III, sec.4 em [13]) *Seja $\Lambda = k(Q, R)$. Então, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, I_i é uma k -representação de (Q, R) e o conjunto $\{I_i : 1 \leq i \leq n\}$ é um conjunto de representantes das classes de isomorfismo dos Λ -módulos injetivos indecomponíveis e $\text{soc } I_i = S_i$.*

Gostaríamos agora de ilustrar aqui a ‘visualização’ de uma k -álgebra Λ , bem como de alguns de seus Λ -módulos indecomponíveis, através de exemplos.

Exemplo I.6.3 : Seja $\Lambda = k(Q, R)$ a álgebra onde Q é o quiver:

e $R = \langle \beta\alpha - \eta\delta\gamma, \theta\eta \rangle$, isto é, R é o ideal de kQ gerado pelas relações $\beta\alpha - \eta\delta\gamma = 0$ e $\theta\eta = 0$.

Os Λ -módulos simples, $S_1, S_2, \dots, S_6$, associados aos vértices de Q , são as representações:

Os Λ -módulos projetivos indecomponíveis $P_1, P_2, \dots, P_6$ são as representações:

Os Λ -módulos injetivos indecomponíveis $I_1, I_2, \dots, I_6$ são as representações:

Chamamos a atenção para os seguintes fatos: P_4 é um projetivo simples (ou seja, $P_4 = S_4$), $P_1 \cong I_3$ e $P_2 \cong I_4$ são projetivos-injetivos indecomponíveis e $I_1 = S_1$ é um injetivo simples.

Por exemplo, M dado abaixo por:

Exemplo I.6.4: Seja $\Lambda = k(Q, R)$, onde Q é o quiver abaixo e R é o ideal kQ gerado por $\alpha\gamma\beta\alpha$.

Os Λ -módulos simples são:

Os Λ -módulos projetivos indecomponíveis têm as seguintes representações :

E os Λ -módulos injetivos indecomponíveis são as seguintes representações :

Observamos que $\dim_k I_1(x) = \dim_k P_2(x)$, para todo $x \in Q_0$, mas $I_1 \not\cong P_2$.

Sejam N e N' dados por:

É fácil verificar que N não é uma representação, mas N' é. Na verdade, $N' = P_1/\text{rad}^3 P_1$.

Observação I.6.3 : Muitas vezes, no sentido de simplificar a notação, ou mesmo quando o interesse maior é determinar o número de vezes que um dado módulo simples aparece como fator de composição de um módulo M , é usual também representar esse módulo de uma forma mais simplificada.

Conforme a observação I.6.2, nos exemplos que exibimos, a representação pictórica de um dado módulo $M = (M(i)_i, M(\alpha)_\alpha)$ era feita pela indicação dos espaços vetoriais $M(i)$ em cada vértice i e dos k -morfismos lineares $M(\alpha)$ sobre cada flecha α . A forma simplificada que usualmente é adotada é a seguinte: sobre cada vértice i será indicado o número que é a $\dim_k M(i)$, “esquecendo-se” as flechas, e, por conseguinte, os morfismos lineares. O número $\dim_k M(i)$ indica a multiplicidade do simples S_i como fator de composição de M .

Para ilustrar, consideremos novamente o exemplo I.6.4.

Sejam os módulos P_3 e N' , cujas representações são:

Com a convenção agora adotada, P_3 e N' são dados por:

I.7 O top e o soc no contexto das k -representações de (Q, R)

Estamos agora interessados, no contexto das k -representações, em determinar quando um dado simples S é um somando direto do socle ou do topo de algum M em (Q, R) -mod.

Embora seja conhecido um procedimento prático de determinar na representação de um dado Λ -módulo se um dado módulo simples é somando direto do seu socle ou do seu topo, não existe na literatura que conhecemos a formalização desse processo. Por isso fazemos aqui a descrição formal desse procedimento, bem como sua demonstração, através da proposição I.7.1 e seu corolário.

Seja M um módulo (ou uma k -representação finita de (Q, R)). Para cada vértice i de Q , vamos definir por C_i a soma dos submódulos simples S de M , tais que $S \cong S_i$, onde S_i denota o simples associado ao vértice i . Desta forma, sendo $n = |Q_0|$, podemos escrever que $\text{soc } M = \bigoplus_{i=1}^n C_i$. É claro que C_i pode ser nulo, para algum i .

Analogamente, por ser o $\text{top } M$ um módulo semisimples, para cada i vértice de Q , definimos por C'_i a soma de seus somandos diretos S' , tais que $S' \cong S_i$. Com esta notação, podemos reescrever que $\text{top } M = \bigoplus_{i=1}^n C'_i$. Também aqui, eventualmente, algum C'_i pode ser nulo.

Portanto, nosso objetivo agora é determinar que interpretação tem C_i e C'_i , na 'representação combinatória visual' de M , da qual falamos na seção anterior. Para isso, iniciamos com a proposição que segue.

Proposição I.7.1 : Sejam a álgebra $\Lambda = k(Q, R)$ e M um módulo. Dados i um vértice de Q e $0 \neq v \in M(i)$, consideremos o Λ -mod simples kv . ($kv \cong S_i$).

i) Existe um morfismo, não nulo, $f : M \rightarrow kv$ se e somente se $kv \cap (\sum_{\gamma} \text{Im } M(\gamma))$ é o subespaço nulo, quando γ percorre o conjunto das flechas de Q_1 que terminam em i ; ($\text{Im } M(\gamma)$ indica a imagem do k -morfismo $M(\gamma)$)

(ii) Existe um morfismo, não nulo, $g : kv \hookrightarrow M$ se e somente se kv é um subespaço de $\cap \{\ker M(\gamma) : \gamma \in Q_1, o(\gamma) = i\}$.

Demonstração: i) Suponhamos que exista um morfismo, não nulo, $f : M \rightarrow kv$. Temos, pois, que $f = (f_j)_{j \in Q_0}$, onde $f_j = 0$, para $j \neq i$ e $f_i : M(i) \rightarrow kv \cong k$ é um k -epimorfismo. Consideremos γ uma flecha qualquer de Q tal que $e(\gamma) = i$; pela definição de morfismos de k -representações, temos que o diagrama que segue é comutativo, onde j denota a origem de γ .

$$\begin{array}{ccc} M(j) & \xrightarrow{0} & (0) \\ M(\gamma) \downarrow & & \downarrow 0 \\ M(i) & \xrightarrow{f_i} & kv \end{array}$$

Desde que f_i é sobrejetiva e $v \in M(i)$, podemos escrever $M(i) = kv \oplus \ker f_i$. Portanto, da comutatividade do diagrama acima, resulta que $\text{Im } M(\gamma) \subseteq \ker f_i$. Logo $kv \cap \sum_{\gamma} \{\text{Im } M(\gamma) : \gamma \in Q_1, e(\gamma) = i\} = (0)$.

Reciprocamente, suponhamos que $v \notin \sum_{\gamma} \{\text{Im } M(\gamma) : \gamma \in Q_1, e(\gamma) = i\}$. Seja $M'(i)$ um k -espaço vetorial suplementar de kv em $M(i)$, isto é, $M(i) = kv \oplus M'(i)$. Da hipótese sobre v , temos que $\sum_{\gamma} \text{Im } M(\gamma)$, quando γ percorre o conjunto das flechas em Q_1 que terminam em i , é um subespaço de $M'(i)$. Seja $f = (f_j)_{j \in Q_0} : M \rightarrow kv$ o morfismo, não nulo, definido por $f_j = 0$ para $j \neq i$ e $f_i = (1 \ 0) : kv \oplus M'(i) \rightarrow kv$. Então é fácil ver que f é morfismo de k -representações.

(ii) A demonstração é análoga. □

Através desta proposição, podemos então caracterizar, da forma pretendida, os C_i e os C'_i . É o que fazemos no corolário abaixo.

Corolário I.7.1 : Sejam a álgebra $\Lambda = k(Q, R)$ e M um módulo. Com as notações anteriores, para cada vértice i de Q , temos que:

(i) C'_i é, a menos de isomorfismo, um k -espaço vetorial suplementar, em $M(i)$, de $\sum_{\gamma} \{\text{Im } M(\gamma) : \gamma \in Q_1, e(\gamma) = i\}$;

(ii) $C_i = \cap \{\ker M(\gamma) : \gamma \in Q_1, o(\gamma) = i\}$.

Demonstração: É consequência imediata da proposição I.7.1. □

Observação I.7.1 : Gostaríamos de observar agora que, usando as identificações descritas pelos funtores $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, mais os fatos de que $\text{rad } M = (\text{rad } \Lambda)M$, $\text{rad } \Lambda = F/R$ e que, para cada $i \in Q_0$, $e_i F$ é o ideal de kQ gerado pelas flechas que terminam em i , é fácil ver que, para cada vértice i de Q , o k -espaço vetorial $\text{rad } M(i)$ é igual a $\sum_{\gamma} \text{Im } M(\gamma)$, quando γ percorre o conjunto das flechas de Q_1 que terminam em i .

Exemplo I.7.5 : Seja Λ a álgebra do exemplo I.6.4, isto é, dada pelo quiver Q :

e R é o ideal de kQ gerado por $\alpha\gamma\beta\alpha$.

Seja M o módulo, cuja representação é :

Com a utilização da proposição I.7.1 é fácil verificar que $\text{soc } M = S_3$ e $\text{top } M = S_2$.

De fato: de $M(\alpha)$ e $M(\beta)$ serem injetivas e $\ker M(\gamma) \cong k$, resulta que $S_3 \subseteq M$ e é o único submódulo simples de M ; donde temos que $\text{soc } M = S_3$.

De $M(\gamma)$ e $M(\beta)$ serem sobrejetivas e $\dim_k \text{Im } M(\alpha) = 1$, resulta que existe $k \subseteq M(2)$ tal que $k \cap \text{Im } M(\alpha) = (0)$, donde $\text{top } M = S_2$.

I.8 Quiver de um M em $\Lambda\text{-mod}$

Vimos que o teorema I.6.1, permite a visualização dos Λ -módulos quando os miramos com os olhos das k -representações, baseados no quiver ordinário da álgebra Λ . É claro que esse mirar com outros olhos nos leva a ver o módulo enquanto quiver também; e isto nos motivou a definir *quiver próprio* de um módulo (ou de uma representação).

Seja M um módulo sobre $k(Q, R)$. O conjunto $\{i \in Q_0 : M(i) \neq (0)\}$ é denominado *suporte* de M e denotado por $\text{sup } M$. Notemos que $\text{sup } M$ é um conjunto finito (pois Q é finito).

Definição I.8.1 : Chama-se *quiver próprio* de M , que será denotado por Q_M , o subquiver de Q , que tem como conjunto de vértices, $(Q_M)_0$, o $\text{sup } M$ e como conjunto de flechas, $(Q_M)_1$, o conjunto formado pelas flechas $\alpha \in Q_1$ tais que $M(\alpha) \neq 0$.

Desta forma vamos poder ‘visualizar’ um módulo de duas formas: uma enquanto representação (que poderíamos dizer visualização interna) e outra enquanto subquiver do quiver ordinário da álgebra (visualização externa).

Proposição I.8.1 : Seja M em $\Lambda\text{-ind}$. Então o quiver Q_M é conexo.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que Q_M não seja conexo. Então $Q_M = Q' \cup Q''$, onde Q' e Q'' são subquivers de Q_M tais que $Q'_0 \cap Q''_0 = \emptyset$ e para todo $i \in Q'_0$ e todo $j \in Q''_0$ não existe flecha em $(Q_M)_1$, ligando i e j .

Sejam $Q'_0 = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ e $Q''_0 = \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{r'}\}$, com $r, r' \geq 1$ e $r + r' \leq n = |Q_0|$. Com as notações das seções anteriores, indiquemos por $f = \sum_{j=1}^r (\epsilon_{i_j} + R) \in \Lambda$ e por $f' = \sum_{j=1}^{r'} (\epsilon_{i'_j} + R) \in \Lambda$, onde ϵ_{i_j} e $\epsilon_{i'_j}$ indicam os caminhos triviais em Q associados, respectivamente, aos vértices i_j e i'_j .

Claramente, f e f' são idempotentes ortogonais de kQ/R . Portanto, podemos escrever $M = (\sum_{j=1}^n (\epsilon_j + R)).M = (f + R).M + (f' + R).M$, com $(f + R).M$ e $(f' + R).M$ subespaços não nulos de M . De outro lado, por serem f e f' idempotentes ortogonais de Λ , resulta que $(f + R).M \cap (f' + R).M = (0)$. Logo $M = (f + R).M \oplus (f' + R).M$ como k -espaço vetorial.

Mostremos que $(f + R).M$ e $(f' + R).M$ são submódulos de M , o que leva a uma contradição da hipótese de que M é indecomponível. Para tal é suficiente provar que, para todo caminho μ de Q , $(\mu + R).((f + R).M) \subseteq (f + R).M$ (a demonstração para $(f' + R).M$ é análoga).

Sejam i e j vértices em Q e μ um caminho em Q de i para j .

Se μ é um caminho trivial tal que $i = j = \epsilon_{i_j}$, para $j = 1, 2, \dots, r$, então

$$(\mu + R).((f + R).M) = (\epsilon_{i_j} + R).((f + R).M) = (\epsilon_{i_j} + R).M \subseteq (f + R).M.$$

No entanto, se μ é um caminho trivial tal que $i \notin Q'_0$, então

$$(\mu + R).((f + R).M) = (\epsilon_i + R).((f + R).M) = (\epsilon_i f + R).M = R.M = (0) \subseteq (f + R).M.$$

Portanto, para todo caminho trivial μ em Q , vale que $(\mu + R).((f + R).M) \subseteq (f + R).M$.

Suponhamos, agora, que $\mu = \alpha_t \alpha_{t-1} \dots \alpha_2 \alpha_1$, com $t \geq 1$.

Se $i = o(\alpha_1)$ é um vértice em Q'_0 então $(\mu + R).((f + R).M) = (\mu + R).M$. Mas, pela definição da ação de kQ em M , na seção I.6, o subespaço $(\mu + R).M$ é a imagem do

k -morfismo $M(\mu)$ em $M(j)$. Assim se $M(\mu) = 0$, temos que $(\mu + R).M = (0) \subseteq (f + R).M$.

No entanto, se $M(\mu) \neq 0$ então μ é um caminho em Q_M . Como, por hipótese, não existem flechas em Q_M ligando vértices de Q'_0 com os vértices de Q''_0 , resulta que, de fato, μ é um caminho em Q'_0 , ou seja $e(\mu) = i_m$, para algum m , $1 \leq m \leq r$. Donde segue que $(\mu + R).M = \text{Im } M(\mu) \subseteq (\epsilon_{i_m} + R).M \subseteq (f + R).M$.

Se $i = o(\alpha_1)$ não é vértice de Q'_0 , da definição de produto em kQ e da ação de kQ em M decorre que $(\mu + R).((f + R).M) = (\mu f + R).M = (0 + R).M = (0) \subseteq (f + R).M$.

Logo, também vale que $(\mu + R).((f + R).M) \subseteq (f + R).M$, para todo caminho μ em Q , não trivial.

Provamos assim que $(f + R).M$ é um submódulo de M . □

Observação I.8.1 : Sejam M e S módulos, onde S é simples e $S \subseteq M$. Indiquemos por i_S o vértice de Q ao qual S está associado. Se $\overline{M} = M/S$ for tal que $\overline{M}(i_S) \neq (0)$, então $\text{sup } M = \text{sup } \overline{M}$ e o quiver próprio $Q_{\overline{M}}$, de $\overline{M}$, é obtido de Q_M pela eventual eliminação de flechas que incidem no vértice i_S .

Vamos dar destaque agora aos módulos cujo quiver próprio tem como grafo subjacente um diagrama de Dynkin A_n . Lembremos que um diagrama de Dynkin A_n é o grafo :

Definição I.8.2 : Um M em $\Lambda\text{-mod}$ é dito de tipo A_n , se seu quiver próprio Q_M é tal que o grafo subjacente é um diagrama de Dynkin A_n , com $n \geq 1$, e tal que $M(i) \cong k$, para todo $i \in (Q_M)_0$ e $M(\alpha) \cong 1$, para toda $\alpha \in (Q_M)_1$.

São exemplos de módulos de tipo A_n , todos os módulos indecomponíveis de comprimento 2, desde que Q_Λ não contenha laços.

Um outro exemplo, é o módulo M cuja representação, com relação ao seu suporte, é :

Observação I.8.2 : Todo módulo M do tipo A_n , $n \geq 1$, tem as seguintes propriedades:

- a) $l(M) = n = |(Q_M)_0|$;
- b) Cada Λ -módulo simples que é fator de composição de M tem multiplicidade um em M ;
- c) É indecomponível (decorrência imediata do fato de que toda $f \in \text{End}_\Lambda M$ é nula ou um múltiplo escalar da identidade);
- d) Os somandos diretos do $\text{soc } M$ podem ser reconhecidos, no quiver próprio Q_M , como os simples associados aos vértices que são apenas vértices de chegada de flechas. Os somandos diretos do $\text{top } M$, de maneira análoga, são reconhecidos como os simples associados aos vértices que são apenas origens de flechas (por decorrência do corolário I.7.1).

Assim para o módulo M do exemplo acima, temos que $\text{soc } M = S_{i_1} \oplus S_{i_2} \oplus S_{i_3}$ e $\text{top } M = S_{j_1} \oplus S_{j_2} \oplus S_{j_3}$.

Definição I.8.3 : Um módulo M é dito de tipo biserial livre se seu quiver próprio, Q_M , é da forma :

onde $s, m \geq 1$, com as relações $\alpha_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1 - \beta_{m+1}\beta_m \dots \beta_1 \in R$, mas $\alpha_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1 \notin R$ e $\beta_{m+1}\beta_m \dots \beta_1 \notin R$; $M(i) \cong k$, para todo $i \in (Q_M)_0$ e $M(\alpha_i) \cong 1 \cong M(\beta_j)$, para todo $i = 1, 2, \dots, s+1$ e todo $j = 1, 2, \dots, m+1$.

Observação I.8.3 : Se M é de tipo biserial livre então:

- a) $l(M) = s + m + 2 = |(Q_M)_0|$;
- b) Cada módulo simples que é fator de composição de M tem multiplicidade um em M ;
- c) $\text{soc } M = S_j$ e $\text{top } M = S_i$ e, portanto, M é um módulo local e co-local;
- d) Indicando por S o simples S_j , temos que o módulo $\overline{M} = M/S$ é do tipo A_{s+m-1} . Além disso, $\text{top } \overline{M} \cong S_i$, $\text{soc } \overline{M} = S_i \oplus S_{j_m}$. Portanto, $\overline{M}$ é local, logo indecomponível.

I.9 Quiver de Auslander-Reiten

Na seção I.1 nos referimos às ARS como uma classe distinguida de sequências exatas curtas de módulos sobre uma álgebra de Artin, na medida em que elas se constituem num belo, porém quase sempre dificultoso, “algoritmo” de construção da categoria dos módulos indecomponíveis sobre a álgebra. Essa construção requer, ao mesmo tempo, um pensar sobre uma forma de organizar os módulos construídos, ou seja, uma tentativa de organizar a categoria Λ -ind. Ringel formalizou essa idéia, através de associar a uma dada álgebra Λ um quiver, denotado por Γ_Λ , que foi denominado quiver de Auslander-Reiten de Λ .

Pelo fato de que o quiver de Auslander-Reiten, neste trabalho, será utilizado como uma ferramenta para a apresentação de exemplos, mencionaremos de uma maneira informal a sua definição. A definição formal deste quiver, bem como suas propriedades podem ser encontradas em [18].

Dada uma álgebra de Artin, seu quiver de Auslander-Reiten é construído da seguinte forma: os vértices estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfia dos Λ -módulos indecomponíveis. Dado um Λ -módulo indecomponível, usaremos a notação $[M]$ para indicar a classe de isomorfia de M . Quanto às flechas, existe uma flecha $[M_1] \rightarrow [M_2]$ se e somente se existir um especial morfismo, conhecido como morfismo irredutível (ver em [4] ou em [5]), de M_1 em M_2 .

Esses morfismos irredutíveis são uma espécie de “elementos primos” do grupo dos morfismos de módulos e podem ser obtidos na construção das ARS, para o caso em que o módulo indecomponível não é projetivo ou nem injetivo. No caso em que o módulo M é um projetivo indecomponível, os morfismos irredutíveis que têm como contradomínio M são, a menos de isomorfismo, as inclusões dos somandos diretos do $\text{rad } M$ em M . Dualmente, se M é um injetivo indecomponível, os morfismos irredutíveis que têm M como domínio são, a menos de isomorfismo, as projeções canônicas M sobre os somandos diretos $M/\text{soc } M$.

No caso em que a álgebra é de dimensão finita sobre um corpo, o quiver de Auslander-Reiten é construído usando a notação simplificada das k -representações (que indica apenas as dimensões em cada vértice) introduzidas na observação I.6.3.

I.10 Algumas álgebras clássicas

Além das álgebras semisimples, as álgebras de Artin que são hereditárias e quocientes de hereditárias também são exemplos de álgebras clássicas na Teoria de Representação de Álgebras, uma vez que desempenharam e desempenham um papel importante no desenvolvimento dessa teoria.

Em particular, as álgebras de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado que são hereditárias foram exaustivamente estudadas quanto ao seu tipo de representação. Vejamos, então, alguns resultados muito conhecidos, e por que não dizer clássicos, sobre elas.

Proposição I.10.1 : (proposição 6.1.1 em [12]) *Uma álgebra de quiver com relações $\Lambda = k(Q, R)$ é hereditária se e somente se Q não contém laços, nem circuitos e $R = (0)$.*

É interessante observar que se se omitir a condição $R = (0)$ de toda álgebra hereditária obtém-se uma família importante de álgebras que são as quociente de hereditárias. Vejamos como.

Definição I.10.1 : *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado. Dizemos que Λ é quociente de uma álgebra hereditária se existir uma k -álgebra Λ' de dimensão finita e hereditária e um epimorfismo $\Phi: \Lambda' \rightarrow \Lambda$ de k -álgebras tal que $\ker \Phi \subseteq \text{rad}^2 \Lambda'$.*

Chamamos a atenção para o seguinte fato que é decorrente desta definição: se Λ é básica e conexa então Λ' também o é.

Conforme comentamos no início desta seção as álgebras que são quociente de hereditárias podem ser caracterizadas através do seu quiver com relações.

Proposição I.10.2 : (ver proposição 6.2.1 em [12]) *Uma álgebra de quiver com relações $\Lambda = k(Q, R)$ é quociente de uma álgebra hereditária se e somente se o quiver Q não contém laços, nem circuitos.*

As k -álgebras que são quociente de k -álgebra hereditária tem a particular propriedade de que são isomorfas a álgebras de matrizes triangulares do seguinte tipo:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ {}_B M_k & B \end{pmatrix}$$

onde B é uma k -álgebra de dimensão finita e ${}_B M_k$ é um $B-k$ -bimódulo. Estas álgebras de matrizes triangulares têm a vantagem de que a categoria dos módulos finitamente gerados é equivalente a uma categoria cuja estrutura, muitas vezes, é de mais fácil manuseio quanto a determinação, por exemplo, dos objetos projetivos indecomponíveis, objetos injetivos indecomponíveis, das ARS, etc.

Com relação à classificação das álgebras hereditárias de tipo de representação finito, temos um teorema, também conhecido como Teorema de Gabriel, que é:

Teorema I.10.1 : (Gabriel)(ver Teor.1, sec.8, cap.III em [21] ou em [16], [17]) *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica, conexa e hereditária (isto é, $\Lambda \cong kQ$). Λ é de tipo de representação finito se e somente se o quiver Q , quiver ordinário de Λ , é tal que seu diagrama subjacente é um dos seguintes Diagramas de Dynkin:*

Capítulo II

Módulos determinados por fatores de composição

O principal objetivo deste capítulo é descrever em que condições algumas álgebras de Artin Λ têm a propriedade de que todo Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição e, em alguns casos, quando um dado Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição. De uma maneira informal, queremos dizer que um módulo é unicamente determinado por seus fatores de composição se conhecida uma de suas séries de composição conhecemos a sua classe de isomorfia em $\Lambda\text{-mod}$.

Com esse objetivo, organizamos este capítulo como segue.

A seção II.1 contém a definição e resultados básicos sobre o Grupo de Grothendieck de uma álgebra de Artin, que ensinam a definição formal de módulo unicamente determinado por seus fatores de composição e módulos livres de multiplicidade. Além disso, fornece alguns exemplos clássicos de álgebras de Artin, cujos módulos indecomponíveis são unicamente determinados por seus fatores de composição.

Na seção II.2 apresentamos as álgebras de Nakayama, conhecidas também como álgebras uniserais generalizadas, cujas caracterizações e propriedades principais serão apenas citadas, uma vez que elas aparecem muito bem detalhadas nas notas de um curso de Auslander [2]. Tais álgebras de Nakayama tem uma propriedade ímpar que é a de aceitarem um belo e especial “algoritmo” para a determinação dos fatores de composição de seus projetivos indecomponíveis. Esta propriedade foi fundamental para obtermos condições necessárias e suficientes muito simples para o reconhecimento de cada classe de isomorfia dos seus módulos indecomponíveis ; este é o conteúdo das proposições II.2.5 e II.2.6 e dos teoremas II.2.1 e II.2.2.

A seção II.3 trata das álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado para as quais estabelecemos algumas condições necessárias para que todo módulo indecomponível seja unicamente determinado por seus fatores de composição. Tais condições aparecem explicitamente sob a forma de restrições sobre o quiver ordinário e o sistema de relações que determinam a álgebra.

Em especial, nos casos das álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, ou seja, álgebras do tipo $k(Q, R)$, determinamos que restrições devem ser impostas sobre o quiver Q e sobre o sistema de relações R para garantir a viabilidade de tal propriedade.

II.1 Sobre os grupos de Grothendieck

Seja Λ uma álgebra de Artin. Para cada M em $\Lambda\text{-mod}$, denotamos por $[M]$ a classe de isomorfia de M em $\Lambda\text{-mod}$. Sejam G o grupo abeliano livre que tem por base o conjunto $\{[M] : M \text{ em } \Lambda\text{-mod}\}$ e G_0 o subgrupo de G gerado pelos elementos $[M] - [M'] - [M'']$, associados a cada sequência exata curta $(0) \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow (0)$ em $\Lambda\text{-mod}$. O grupo quociente G/G_0 é denominado *grupo de Grothendieck* de Λ e denotado por $K_0(\Lambda)$.

Para cada M em $\Lambda\text{-mod}$, vamos denotar também por $[M]$ o elemento correspondente em $K_0(\Lambda)$.

Embora tenhamos definido o grupo de Grothendieck para álgebras de Artin, essa mesma definição pode ser feita para anéis arbitrários. Essa noção mais geral pode ser encontrado em [14].

Seja $\{[S_1], [S_2], \dots, [S_n]\}$ o conjunto das classes de isomorfia dos Λ -módulos simples. Do fato de que Λ é um anel artiniano, pelo Teorema de Krull-Schmidt, resulta que $K_0(\Lambda) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[S_i]$ ou seja, $K_0(\Lambda)$ é um grupo abeliano livre de base $\{[S_1], [S_2], \dots, [S_n]\}$, ou ainda é um grupo abeliano livre de posto n , onde n é o número de classes de isomorfia dos Λ -módulos simples. (A demonstração pode ser encontrada também em [14]).

Assim, se $[M] = \sum_{i=1}^n m_i[S_i]$, com $m_i \geq 0$, em $K_0(\Lambda)$, m_i indica a multiplicidade do simples S_i como fator de composição de M . Portanto, dados M e N em $\Lambda\text{-mod}$, M e N tem os mesmos fatores de composição se e somente se $[M] = [N]$ em $K_0(\Lambda)$. Isto motiva as seguintes definições:

Definição II.1.1 : *Seja M em $\Lambda\text{-mod}$. M é unicamente determinado por seus fatores de composição se $M \cong N$ quando $[M] = [N]$ em $K_0(\Lambda)$.*

Definição II.1.2 : *Seja M em $\Lambda\text{-mod}$. Dizemos que M é livre de multiplicidade se a multiplicidade de cada fator de composição de M é um, isto é, a relação $[M] = \sum_{i=1}^n m_i[S_i]$, em $K_0(\Lambda)$, implica $m_i = 0$ ou $m_i = 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.*

Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de $\Lambda\text{-mod}$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é determinada por fatores de composição se todo módulo em $\mathcal{C}$ é unicamente determinado por fatores de composição.

Através do grupo de Grothendieck, podemos dar uma outra caracterização das álgebras semisimples que é também um resultado clássico de classificação de Representações de Álgebra :

Uma álgebra Λ é semisimples se e somente se a categoria $\Lambda\text{-mod}$ é determinada por fatores de composição.

Através do grupo de Grothendieck também é possível caracterizar as álgebras de Artin hereditárias que são tipo de representação finito e garantir que essas têm a propriedade de que a categoria $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição.

Tal caracterização e propriedade dos módulos indecomponíveis estão baseados essencialmente no fato de que para álgebras de Artin hereditárias cada um dos conjuntos $\{[P(S_1)], [P(S_2)], \dots, [P(S_n)]\}$ e $\{[I(S_1)], [I(S_2)], \dots, [I(S_n)]\}$ forma uma base de $K_0(\Lambda)$, onde $P(S_i)$ denota a cobertura projetiva do simples S_i e $I(S_i)$ a envolvente injetiva do simples S_i .

II.2 As álgebras de Nakayama

Antes de definir o que é uma álgebra de Nakayama, gostaríamos de relembrar que todos os módulos a que nos referimos são finitamente gerados e a definição de módulos uniseriais.

Dizemos que um Λ -módulo M é *uniserial* se admite uma única série de composição ou, equivalentemente, se a sequência ascendente dos radicais:

$(0) = \text{rad}^m M \subseteq \text{rad}^{m-1} M \subseteq \dots \subseteq \text{rad} M \subseteq M$ é uma série de composição de M .

Observamos que se M é um módulo uniserial então M é indecomponível e o seu comprimento, $l(M)$, é tal que

$$l(M) = L(M) := \min\{t \in \mathbb{N} : \text{rad}^t M = (0)\} = S(M) := \min\{t \in \mathbb{N} : \text{soc}^t M = M\}.$$

Definição II.2.1 : Uma álgebra de Artin Λ é uma álgebra de Nakayama se e somente se cada Λ -módulo projetivo (respectivamente injetivo) indecomponível é uniserial.

Proposição II.2.1 : (ver Cap.III, Proposição 2.11 em [2]) Seja Λ uma álgebra de Nakayama e suponhamos que $\Lambda \cong \bigoplus_{i=1}^n P_i^{n_i}$ é uma decomposição de Λ em projetivos indecomponíveis, com $P_i \not\cong P_j$, para $i \neq j$, e $n_i \geq 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Então todo Λ -módulo indecomponível é isomorfo a exatamente um dos módulos $P_i / \text{rad}^j P_i$, para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq l(P_i)$ e o número total de classes de isomorfia de Λ -módulos indecomponíveis é igual a $\sum_{i=1}^n l(P_i)$.

A proposição conta-nos que uma álgebra de Nakayama é de tipo de representação finito e que todo módulo indecomponível é *local*, ou seja é quociente de um projetivo indecomponível.

Além disso, sobre uma álgebra de Nakayama valem as seguintes propriedades:

- (i) Sejam M e N em Λ -ind. $M \cong N$ se e somente se $\text{top } M \cong \text{top } N$ e $l(M) = l(N)$;
- (ii) Se M está em Λ -ind e é não projetivo, então $l(M) = l(\tau M)$, onde τM indica o translado de Auslander-Reiten de M .
- (iii) Se M está em Λ -ind e é não injetivo, então $l(M) = l(\tau^{-1} M)$, onde $\tau^{-1} M$ indica o translado inverso de M .

Na verdade, as propriedades (ii) e (iii) caracterizam as álgebras de Nakayama (teorema 5.7.cap III em [2]).

Levando em conta que os Λ -módulos indecomponíveis sobre uma álgebra de Nakayama são locais, estudar seus fatores de composição significa conhecer o comportamento

dos fatores de composição dos Λ -módulos projetivos indecomponíveis. Mas, por seu lado, conhecer os fatores de composição dos projetivos indecomponíveis passa pela correspondência biunívoca que existe entre as classes de isomorfia dos Λ -módulos simples e as classes de isomorfia dos projetivos indecomponíveis, uma vez que cada projetivo indecomponível P é determinado, a menos de isomorfismo, pelo simples $P/\text{rad } P = \text{top } P$.

Para o que segue nesta seção, Λ é uma álgebra de Nakayama. O lema abaixo mostra uma forma interessante de exibir os fatores de composição de um projetivo indecomponível a partir do seu topo.

Lema II.2.1 : (ver Lema 6.1, cap.III em [2]) *Seja P um Λ -módulo projetivo indecomponível, com $P/\text{rad } P \cong S$. Então para $0 \leq i \leq l(P) - 1$, $\text{rad}^i P / \text{rad}^{i+1} P \cong \tau^i S$, ou seja todos os fatores de composição de P são obtidos pela aplicação repetida do transladado de Auslander-Reiten τ ao seu topo.*

O lema II.2.1 e o fato de que, numa álgebra de Nakayama, todo módulo indecomponível M satisfaz $l(M) = l(\tau^{-m} M)$, para todo $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^{-m} M$ está definido, sugerem que estudemos mais de perto a ação dos transladados τ e τ^{-1} sobre as classes de isomorfia dos Λ -módulos simples.

Seja então $\mathcal{S}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfia dos Λ -módulos simples. Conforme o comentário do parágrafo acima, $\tau^{-m} S \in \mathcal{S}$, para todo $S \in \mathcal{S}$ e para todo $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^{-m} S$ está definido. Assim os operadores τ^{-m} induzem uma ação sobre os elementos de $\mathcal{S}$, determinando uma partição em $\mathcal{S}$ em órbitas disjuntas $\theta_S = \{T \in \mathcal{S} : T = \tau^{-m} S, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\}$. Do lema II.2.1 decorre que esta partição de $\mathcal{S}$ determina uma correspondente partição num conjunto de representantes das classes de isomorfia dos Λ -módulos projetivos indecomponíveis.

Auslander provou, em [2], que a partição de $\mathcal{S}$, determinada pela ação induzida pelos operadores τ^{-m} , produzem uma decomposição da álgebra Λ em um produto de álgebras de Nakayama conexas (ver cap.III, proposição 6.2 em [2]). Segue, pois, daí que se Λ é uma álgebra de Nakayama conexa, a ação dos operadores τ^{-m} sobre um conjunto de representantes das classes dos módulos simples determinam sobre esse conjunto uma única órbita, ou seja, vale a seguinte proposição:

Proposição II.2.2 : *Seja Λ uma álgebra de Nakayama conexa. Seja $\mathcal{S}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfia dos Λ -módulos simples. Então $\mathcal{S} = \theta_S$, para algum simples $S \in \mathcal{S}$ fixado.*

A proposição acima nos remete, pois, ao estudo da órbita $\mathcal{S} = \theta_S$, para algum $S \in \mathcal{S}$ fixado.

Com a mesmas notações, suponhamos que θ_S contenha algum simples projetivo S_1 . Então $\theta_S = \{\tau^{-m} S_1 : m \geq 0 \text{ e } \tau^{-m} S_1 \text{ está definido}\}$. Como S_1 é projetivo, é fácil ver

que $\tau^{-i} S_1 \neq \tau^{-j} S_1$, para $i \neq j$. Logo, da finitude de θ_S , existe um menor número inteiro positivo m tal que $\tau^{-m} S_1$ não está definido; em outras palavras, existe um menor inteiro positivo m tal que $\tau^{-(m-1)} S_1$ é um injetivo simples.

Analogamente, se θ_S contém um injetivo simples S' , então existe um menor inteiro positivo m tal que $\tau^m S'$ é um projetivo simples.

Então θ_S contém exatamente um simples projetivo e um simples injetivo ou θ_S não contém nem projetivos, nem injetivos simples.

Neste segundo caso, temos que $\tau^{-m} S$ está definido para todo $m \in \mathbb{Z}$ e, desde que θ_S é finito, existe um $m \geq 1$ tal que $\tau^{-m} S = S$. Isto significa, pois, que a ação de τ^{-1} em θ_S é uma permutação cíclica finita.

Dizemos por isso que temos dois casos para a álgebra Λ : o primeiro *não cíclico* quando θ_S contém precisamente um projetivo simples e um injetivo simples e o segundo *cíclico* quando não contém nenhum projetivo e nenhum injetivo simples.

A descrição acima das órbitas, permite ordenar, linear ou ciclicamente, os Λ -módulos projetivos indecomponíveis, não isomorfos, sobre uma álgebra de Nakayama conexa. Isso é consequência da proposição abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada na referência citada.

Proposição II.2.3 : (ver Proposição 6.3, cap.III em [2]) *Seja Λ uma álgebra de Nakayama conexa. Então existe uma sequência completa de representantes $P_1, P_2, \dots, P_n$ das classes de isomorfia dos Λ -módulos projetivos indecomponíveis, satisfazendo as condições:*

- (i) $P_{i+1}/\text{rad } P_{i+1} \cong \tau^{-1}(P_i/\text{rad } P_i)$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$ e se $l(P_1) \neq 1$, $P_1/\text{rad } P_1 \cong \tau^{-1}(P_n/\text{rad } P_n)$;
- (ii) $l(P_i) \geq 2$, para todo $i = 2, 3, \dots, n$;
- (iii) $l(P_{i+1}) \leq l(P_i) + 1$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $l(P_1) \leq l(P_n) + 1$.

A sequência $P_1, P_2, \dots, P_n$, nas condições desta última proposição, é chamada a *série de Kupisch* de Λ , que é única no caso em que $l(P_1) = 1$ (é o caso de órbita não cíclica) e é única, a menos de uma permutação cíclica, quando $l(P_1) \geq 2$ (caso de órbita cíclica).

Observação II.2.1 : É a descrição dada pela série de Kupisch que, junto com o lema II.2.1, fornece o “algoritmo” que mencionamos no início. Vejamos como.

Se $l(P_1) = 1$ e $n \geq 2$, então $l(P_2) = 2$ e $2 \leq l(P_i) \leq i$, para todo $i = 3, 4, \dots, n$. Neste caso, $S = \theta_{S_1} = \{S_1, \tau^{-1} S_1, \dots, \tau^{-(n-1)} S_1\}$, onde $S_1 = P_1$ e $\tau^{-(n-1)} S_1$ é um simples injetivo. Neste caso, podemos escrever que $\text{top } P_i \cong \tau^{-(i-1)} S_1$, para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

O lema II.2.1 deste capítulo, garante então que cada projetivo indecomponível sobre Λ é livre de multiplicidade, pois $[P_i] = [\tau^{-(i-1)} S_1] + [\tau^{-(i-2)} S_1] + \dots + [\tau^{-(i-j)} S_1]$, em $K_0(\Lambda)$, onde $j = l(P_i)$, para todo $i = 2, 3, \dots, n$.

Desta forma, se $l(P_n) = n$, é fácil ver, usando ainda o lema II.2.1, que $\text{rad } P_i = P_{i-1}$, para todo $i = 2, 3, \dots, n$, o que implica que a álgebra Λ é uma álgebra de Nakayama hereditária.

Se $n = 1$ e $l(P_1) = 1$, estamos no caso que Λ é simples.

Se $l(P_1) \geq 2$, então para qualquer projetivo indecomponível P , com $l(P) \leq 2$ e $\text{top } P \cong S$, utilizando a série de Kupisch, temos que n é o menor inteiro positivo tal que $\tau^{-n} S = S$. Portanto, se $l(P) = an + m$, com $a \in \mathbb{N}$ e $0 \leq m \leq n - 1$, do lema II.2.1 segue que $[P] = (a + 1)[S] + (a + 1)[\tau S] + \dots + (a + 1)[\tau^{m-1} S] + a[\tau^m S] + \dots + a[\tau^{n-1} S]$ em $K_0(\Lambda)$.

Desta última igualdade decorre imediatamente que P é livre de multiplicidade se e somente se $l(P) \leq n$.

Observação II.2.2 : Através da série de Kupisch é possível provar também que toda álgebra de Nakayama conexa contém pelo menos um projetivo indecomponível que é injetivo. A prova é baseada no fato de que para os elementos da série de Kupisch vale que $l(P_{i+1}) \leq l(P_i)$ se e somente se P_i é um injetivo (ver corol.6.6, cap.III em [2]).

Um caso especial das álgebras de Nakayama é o que cada P_i tem comprimento maximal, isto é, tem comprimento $L(\Lambda) = \min\{t : \text{rad}^t \Lambda = (0)\}$.

Definição II.2.2 : Uma álgebra de Artin é auto-injetiva se todo módulo projetivo é também injetivo.

Proposição II.2.4 : (ver proposição 6.6.cap.III em [2]) *Seja Λ uma álgebra de Nakayama auto-injetiva conexa. Então todos os Λ -módulos projetivos indecomponíveis tem o comprimento comum $L(\Lambda)$.*

Queremos observar agora que se $n = 1$, para qualquer dos casos $l(P_1) = 1$ ou $l(P_1) \neq 1$, a álgebra de Nakayama é auto-injetiva.

Com base na existência da série de Kupisch e nas considerações contidas na observação II.2.1 acima, podemos estabelecer condições para que um Λ -módulo indecomponível seja unicamente determinado por seus fatores de composição.

Proposição II.2.5 : *Seja Λ uma álgebra de Nakayama conexa. Se existe um Λ -módulo projetivo simples então Λ -ind é determinada por fatores de composição.*

Demonstração: Seja $P_1, P_2, \dots, P_n$ a série de Kupisch de Λ com $l(P_1) = 1$.

Se $n = 1$, então Λ é simples e o resultado é imediato.

Se $n \geq 2$, conforme a observação II.2.1, para cada $i = 2, 3, \dots, n$, $2 \leq l(P_i) \leq i$ e $\text{top } P_i \cong \tau^{-(i-1)} S_1$, onde S_1 indica o projetivo simples P_1 . Portanto, $[P_i] = [\tau^{-(i-1)} S_1] + [\tau^{-(i-2)} S_1] + \dots + [\tau^{-(i-l(P_i))} S_1]$, em $K_0(\Lambda)$.

Logo, $[P_i] \neq [P_j]$, se $i \neq j$. Donde concluímos que cada projetivo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição.

Sejam M e N Λ -módulos indecomponíveis, não projetivos, tais que $[M] = [N]$.

Como $l(M) = l(N) = m$, pela proposição II.2.1, então M é isomorfo a exatamente um $P_i / \text{rad}^m P_i$, com $1 \leq i \leq n$ e N é isomorfo a exatamente um $P_j / \text{rad}^m P_j$, com $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq m < \min\{l(P_i), l(P_j)\}$.

Portanto, $[M] = [\tau^{-(i-1)} S_1] + \dots + [\tau^{-(i-m)} S_1]$ e $[N] = [\tau^{-(j-1)} S_1] + \dots + [\tau^{-(j-m)} S_1]$.

Novamente de $[M] = [N]$ implica que $[\tau^{-(i-m)} S_1]$ é um fator de composição de N , mas $[\tau^{-(i-m-1)} S_1]$ não. Logo da igualdade acima para $[N]$ segue que $\tau^{-(i-m)} S_1 \cong \tau^{-(j-m)} S_1$ e, consequentemente, que $i = j$. Ou seja, $M \cong N$.

Portanto, todo Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição. □

Para o caso em que Λ não admite projetivo indecomponível simples vale o resultado que segue.

Proposição II.2.6 : *Seja Λ uma álgebra de Nakayama conexa tal que $l(P) \geq 2$, para todo projetivo indecomponível P . Indiquemos por n o posto de $K_0(\Lambda)$.*

(i) *Se $n = 1$ então todo Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição.*

(ii) *Se $n \geq 2$, um Λ -módulo indecomponível M , não projetivo, é unicamente determinado por seus fatores de composição se e somente se n não divide $l(M)$.*

Demonstração: (i) Quando $n = 1$, vale que $M \cong N$ se e somente se $l(M) = l(N)$, quaisquer que sejam M e N em $\Lambda\text{-mod}$. Portanto, a tese é imediata.

(ii) Seja M um Λ -módulo indecomponível, não projetivo, com $l(M) \geq 2$. Suponhamos, por absurdo, que $l(M) = an$, para algum $0 \neq a \in \mathbb{N}$.

Seja P projetivo indecomponível tal que $M \cong P / \text{rad}^{an} P$ e $\text{top } P \cong S \cong \text{top } M$. Como M é não projetivo então $l(P) \geq an + 1$.

De outro lado, a hipótese de que todo Λ -módulo projetivo indecomponível tem comprimento maior ou igual a dois, implica que a órbita θ_S é cíclica, com $\tau^n S \cong S \cong \tau^{-n} S$.

Portanto, podemos escrever que $[M] = a[S] + a[\tau S] + \dots + a[\tau^{n-1} S]$.

Consideremos o Λ -módulo $N = \text{rad } P / \text{rad}^{an+1} P$. É imediato que N é indecomponível (pois é local), que $\text{top } N \cong \text{top } \text{rad } P \cong \tau S$ e $l(N) = an$. Além disso, em $K_0(\Lambda)$, $[N] = a[\tau S] + a[\tau^2 S] + \dots + a[\tau^{n-1} S] + a[S]$, pois $\text{rad}^{an} P / \text{rad}^{an+1} P \cong \tau^n S \cong S$.

Segue, então, que $[M] = [N]$, mas com $M \not\cong N$, o que leva a uma contradição.

Reciprocamente, seja M um Λ -módulo indecomponível, não projetivo, tal que $2 \leq l(M) = an + m$, com $a \in \mathbb{N}$ e $1 \leq m \leq n - 1$.

Suponhamos que exista um Λ -módulo indecomponível N que verifique $[M] = [N]$.

Seja P um projetivo indecomponível tal que $M \cong P / \text{rad}^{l(M)} P$ e $\text{top } P \cong S \cong \text{top } M$. Como já vimos, nestas condições, o conjunto $\{S, \tau^{-1} S, \dots, \tau^{-(n-1)} S\}$, onde $\tau^{-n} S = S$, é um conjunto completo de representantes dos Λ -módulos simples, não isomorfos. Donde, podemos escrever que $[M] = (a+1)[S] + (a+1)[\tau S] + \dots + (a+1)[\tau^{m-1} S] + a[\tau^m S] + \dots + a[\tau^{n-1} S]$.

Como por hipótese N é indecomponível e $l(N) = l(M)$, então $N \cong Q / \text{rad}^{l(M)} Q$, para um projetivo indecomponível Q tal que $\text{top } Q \cong \tau^{-j} S$, para algum $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Queremos mostrar que $\text{top } M \cong \text{top } N$, o que implica, desde que $l(M) = l(N)$, $M \cong N$.

De $\text{top } N \cong \tau^{-j} S$ temos que $\tau^{-(j-m+1)} S$ e $\tau^{-(j-m)} S$ são fatores de composição de N , com multiplicidade $a+1$ e a , respectivamente. Da igualdade $[M] = [N]$, segue que eles são fatores de composição de M com a mesma multiplicidade; logo $\tau^{-(j-m)} S \cong \tau^m S$ e, portanto, $\tau^{-j} S \cong S$.

E a recíproca está, pois, verificada. □

Tendo em mãos as proposições II.2.5 e II.2.6, foi possível estabelecermos condições para que todo módulo indecomponível sobre uma álgebra de Nakayama conexa seja unicamente determinado por seus fatores de composição.

Teorema II.2.1 : *Sejam Λ uma álgebra de Nakayama e $n = \text{posto de } K_0(\Lambda)$.*

- (i) *Se $n = 1$ então Λ -ind é determinada por fatores de composição;*
- (ii) *Se $n \geq 2$ e existe um Λ -módulo projetivo simples então Λ -ind é determinada por fatores de composição;*
- (iii) *Se $n \geq 2$ e todo Λ -módulo projetivo indecomponível tem comprimento maior ou igual a dois então Λ -ind é determinada por fatores de composição se e somente se todo Λ -módulo projetivo indecomponível tem comprimento no máximo n e existe no máximo um deles de comprimento n .*

Demonstração: (i) e (ii) já foram verificadas através da proposição II.2.5. e da proposição II.2.6.(i).

(iii) Suponhamos, por absurdo, que exista um Λ -módulo projetivo indecomponível P de comprimento maior ou igual a $n + 1$.

Consideremos o Λ -módulo $M = P/\text{rad}^n P$. É imediato que M é indecomponível, não projetivo e $l(M) = n$. Portanto, como $n \geq 2$, por (ii) da proposição II.2.6, M não é unicamente determinado por seus fatores de composição.

Logo todo projetivo indecomponível tem comprimento menor ou igual a n .

Sejam P e Q dois Λ -módulos projetivos indecomponíveis tais que $l(P) = l(Q) = n$. Da observação II.2.1, segue que $[P] = [Q]$ e, portanto, da hipótese de Λ -ind ser determinada por fatores de composição, $P \cong Q$. Assim a condição necessária está provada.

Reciprocamente, suponhamos que todo projetivo indecomponível tenha comprimento no máximo n e que no máximo um destes tenha comprimento n .

Como todo Λ -módulo indecomponível M é local, as hipóteses sobre o comprimento dos projetivos indecomponíveis implicam que $l(M) \leq n$. Logo, se M é não projetivo, então $l(M) < n$ e, pela proposição II.2.6.(ii), M é unicamente determinado por seus fatores de composição.

Assim para completar a recíproca basta verificar que os projetivos indecomponíveis também são unicamente determinados por seus fatores de composição.

Sejam, pois, P e Q projetivos indecomponíveis, com $[P] = [Q]$. Logo, $l(P) = l(Q) = m$, com $2 \leq m \leq n$.

Se $m = n$, pelas hipóteses assumidas então $P \cong Q$.

Se $m < n$, então a observação II.2.1 implica que

$$[P] = [S] + [\tau S] + \dots + [\tau^{m-1} S] \text{ e } [Q] = [S'] + [\tau S'] + \dots + [\tau^{m-1} S'],$$

onde $S \cong \text{top } P$ e $S' \cong \text{top } Q$.

Com as hipóteses sobre o comprimento de cada projetivo indecomponível, podemos novamente usar o argumento de que a órbita θ_S é cíclica e garantir que $S' \cong \tau^j S$, para algum j , $0 \leq j \leq n - 1$. Como S' é fator de composição de P , garantimos, na verdade, que $0 \leq j \leq m - 1$.

Então $\tau^{j+m-1} S \cong \tau^{m-1} S'$ é um fator de composição de P (pois é de Q) e $\tau^{j+m} S \cong \tau^m S'$ não é um fator de composição de P (pois, não é de Q), o que implica, utilizando a forma de $[P]$ acima, que $\tau^{j+m} S \cong \tau^{an+m} S$, para algum $a \in \mathbb{N}$. Ou seja, $S' \cong \tau^j S \cong \tau^{an} S \cong S$. Logo, P e Q têm topos isomorfos e são por isso isomorfos. $\square$

O teorema II.2.1, quando aplicado ao caso das álgebras de Nakayama de dimensão

finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica e conexa, pode ter as suas condições reescritas, sob a ótica de álgebra de quiver com relações, em termos do comprimento dos caminhos em seu quiver.

Antes, no entanto, dessa aplicação, queremos dizer que tais álgebras podem ser caracterizadas por ‘tipo’ de quiver. Isto está contemplado na proposição que vem a seguir e cuja demonstração pode ser encontrada em [12].

Proposição II.2.7 : (ver Proposição 6.4.2 em [12]) *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica e conexa. Λ é uma álgebra de Nakayama se e somente se o quiver ordinário Q de Λ é um dos seguintes quivers:*

$$(a) \quad \begin{array}{ccccccc} \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \cdots & \bullet & \leftarrow & \bullet \\ 1 & & 2 & & 3 & & n-1 & & n \end{array} \quad \text{com } n = \text{posto de } K_0(\Lambda) = |Q_0|;$$

ou

$$(b) \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & \longrightarrow & 2 & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ n & & & & 3 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ n-1 & & & & 4 \\ & \cdot & & & \cdot \\ & \cdot & & & \cdot \\ & \cdot & & & \cdot \end{array} \quad \text{com } n = \text{posto de } K_0(\Lambda) = |Q_0|.$$

Observamos que quando $n = 1$, o primeiro quiver é somente um ponto ($\Lambda \cong k$) e no segundo caso é um laço. Além disso, não é exigido condição especial alguma para o ideal admissível $R \subseteq kQ$.

Através da caracterização dada pela proposição acima e do teorema II.2.1, temos o teorema abaixo, onde estaremos utilizando as notações e resultados do capítulo I.

Teorema II.2.2 : *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica, conexa e de Nakayama. Denotamos por (Q, R) o quiver com relações tal que $\Lambda = k(Q, R)$.*

(i) *Se Q é o quiver (a) então Λ -ind é determinada por fatores de composição;*

(ii) *Se Q é o quiver (b), com $n = 1$, isto é, Q é um laço com flecha α e R o ideal gerado por α^m , para algum $m \geq 2$, então Λ -ind é determinada por fatores de composição;*

(iii) *Se Q é o quiver (b), com $n \geq 2$, então Λ -ind é determinada por fatores de composição se e somente se existe no máximo um caminho em Q , de comprimento $n - 1$, que não está em R .*

Demonstração: (i) Se Q é o quiver (a), então o Λ -módulo projetivo indecomponível P_1 , associado ao vértice 1 de Q , é simples. O resultado segue de Teorema II.2.1.(i), se $n=1$, ou de (ii) do mesmo teorema, se $n \geq 2$.

(ii) Imediato do teorema II.2.1.

(iii) Se Q é o quiver (b), com $n \geq 2$, como R é um ideal admissível de kQ , temos que $l(P_i) \geq 2$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, onde P_i denota o Λ -módulo projetivo associado ao vértice i de Q .

De outro lado, conforme vimos na proposição I.6.1, para cada $i, j = 1, 2, \dots, n$, $P_i(j) = Q(i, j)/R(i, j)$, onde $Q(i, j)$ denota o k -espaço vetorial que tem como base os caminhos de Q que tem origem em i e terminam em j . Logo, é fácil verificar que cada P_i tem comprimento no máximo n e apenas um deles tem comprimento n se e somente se existe no máximo um caminho em Q , de comprimento $n-1$, que não está em R . E o resultado decorre de (iii) do teorema II.2.1. □

O teorema II.2.2.(iii) mostra que se Q é um quiver (b), com $n=2$, então existem sempre Λ -módulos indecomponíveis que não são unicamente determinados por fatores de composição.

Por exemplo, os Λ -módulos indecomponíveis, cujo comprimento, que é igual a sua dimensão como k -espaço vetorial, é um número par! Na verdade, esse fato ocorre para as álgebras de Nakayama conexas em geral, pela proposição II.2.6.(ii), quando $n=2$ e todo projetivo indecomponível tem comprimento maior ou igual a 2.

II.3 O algoritmo de Ringel e algumas condições necessárias

Nesta seção estabeleceremos algumas condições necessárias para que a categoria $\Lambda\text{-ind}$ seja determinada por fatores de composição, no caso em que Λ é uma álgebra dada por quivers e relações.

O algoritmo de Ringel, que descreveremos sucintamente a seguir, tem um papel fundamental no estabelecer dessas condições. Através dele é possível ter certo controle da categoria $\Lambda\text{-mod}$ de $\Lambda = k(Q, R)$, quando se eliminam, por exemplo, vértices e flechas do quiver Q .

Portanto, ele permite obter certas análises da categoria $\Lambda\text{-mod}$ através de quivers “menores” e mais “simples”, o que leva a obtenção de condições necessárias para algumas propriedades, como por exemplo para a álgebra ser de tipo de representação finito ou ser

tal que sua Λ -ind seja determinada por fatores de composição.

O referido algoritmo pode ser encontrado com bons detalhes em [27].

Veremos inicialmente o algoritmo de Ringel. Veremos também que uma das condições necessárias está estreitamente ligada ao tipo de representação da álgebra. Outras condições estarão essencialmente ligadas ao tipo de quiver e relações.

No final desta seção, faremos a ponte entre essas condições. Por esse motivo, comecemos com alguns resultados bem conhecidos sobre álgebras de quivers e relações que são de tipo de representação finito, que são o lema II.3.1 e as proposições II.3.2 e II.3.3.

O algoritmo de Ringel

Sejam k um corpo e (Q, R) um quiver com relações.

Consideremos $\{\rho_i : i \in J, J \text{ finito}\}$ um conjunto de geradores do ideal R de kQ .

Alg.R.1 - Eliminando vértices- Sejam $x \in Q_0$ e Q' o quiver obtido de Q pela eliminação do vértice x e de todas as flechas de Q_1 que incidem no vértice x . Quanto às relações, eliminamos de qualquer $\rho_i \in R$, os somandos que são múltiplos dos caminhos de Q que passam pelo vértice x e chamamos a combinação restante de ρ'_i .

Seja $J' = \{i \in J : \rho'_i \neq 0\}$ e consideremos o quiver com relações (Q', R') , onde R' é o ideal de kQ' gerado pelas relações ρ'_i , para todo $i \in J'$. É fácil ver que as k -representações de (Q', R') formam a subcategoria plena de todas as k -representações V de (Q, R) que satisfazem $V(x) = (0)$. Portanto, temos que existe um embedding pleno e exato de (Q', R') -Mod em (Q, R) -Mod que torna a subcategoria (Q', R') fechada por extensões.

Alg.R.2 - Eliminando flechas Seja $\beta : x \rightarrow y$ uma flecha der Q_1 . Consideremos o quiver Q' obtido de Q , conservando os vértices, mas eliminando a flecha β . Se um caminho μ , que contém a flecha β , é um somando de algum $\rho_i \in R$, $i \in J$, então eliminamos esse somando de ρ_i , obtendo assim uma relação ρ'_i ou 0. Seja $J' = \{i \in J : \rho'_i \neq 0\}$ e (Q', R') , como acima.

É fácil verificar que as k -representações de (Q', R') formam uma subcategoria plena das k -representações V de (Q, R) que satisfazem $V(\beta) = 0$ e existe um embedding pleno e exato de (Q', R') -Mod em (Q, R) -Mod que torna as imagens fechadas por extensão.

Observamos que estes dois processos, de eliminar flecha ou eliminar vértice, são de fácil aplicação e podem ser aplicados iterada e alternadamente um número qualquer de vezes, obtendo-se sempre subcategorias plenas de (Q, R) -Mod.

Para o que segue, (Q, R) é um quiver com relações, onde Q é um quiver finito conexo, R é um ideal admissível de kQ , onde, salvo menção explícita, o corpo k é algebricamente fechado e as álgebras consideradas são as álgebras $\Lambda = k(Q, R) = kQ/R$. Estaremos

também utilizando todas as notações e resultados introduzidos no capítulo I.

Proposição II.3.1 *Seja $\Lambda = k(Q, R)$. Se Λ -ind é determinada por fatores de composição então Λ é uma álgebra de tipo de representação finito.*

Demonstração: Suponhamos que Λ seja de tipo de representação infinito. Então por Brauer-Thrall II (ver em [23], [26] ou em [8]) existe uma sequência infinita de números naturais $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_i < \dots$, tais que para cada i existem uma infinidade de módulos em Λ -ind, não isomorfos, de comprimento d_i , o que contraria o fato de que Λ -ind é determinada por fatores de composição. □

O resultado abaixo é bem conhecido, mas daremos sua demonstração para facilitar a leitura do texto.

Lema II.3.1 : *Seja Q' é um quiver do tipo: $\bullet \xrightarrow{\quad} \bullet$ e k um corpo arbitrário. Então a álgebra kQ' não é de tipo de representação finito.*

Demonstração: Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, M_n dado por: $k^{n+1} \xrightleftharpoons[\psi]{\phi} k^n$, onde $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, sendo que 1 indica o k -morfismo identidade em k^n . É fácil verificar que cada M_n , $n \in \mathbb{N}$, é um kQ' -módulo indecomponível.

Portanto, existem infinitos kQ' -módulos indecomponíveis não isomorfos. □

A álgebra kQ' do Lema II.3.1 é a conhecida *álgebra de Kronecker*.

Proposição II.3.2 : *Se $\Lambda = k(Q, R)$, onde k é um corpo arbitrário, é de tipo de representação finito então Q não contém flechas múltiplas.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que Q contenha flechas múltiplas.

Se Q é um quiver como o do lema II.3.1, o resultado já está verificado. Se Q contém propriamente um subquiver Q' como do lema II.3.1, então aplicando os Alg.R.1 (se existirem outros vértices em Q que não sejam de Q') e Alg.R.2 um número de vezes necessário para a redução a Q' , concluímos que a categoria kQ' -mod é a subcategoria plena dos Λ -módulos M , satisfazendo $M(i) = (0)$, para todo $i \in Q_0 - Q'_0$ e $M(\gamma) = 0$, para toda $\gamma \in Q_1 - Q'_1$.

Logo, como kQ' não é de tipo de representação finito (pelo Lema II.3.1), Λ não é de tipo de representação finito também. □

Definição II.3.1 : Dizemos que um quiver é de tipo $\tilde{A}_n$, se o diagrama a ele subjacente

Proposição II.3.3 : Seja $\Lambda = k(Q, R)$. Se Q contém um subquiver Q' de tipo $\tilde{A}_n$, $n \geq 3$ e tal que $kQ' \cap R = (0)$, então Λ não é de tipo de representação finito.

Demonstração: Das hipóteses de que a dimensão de Λ sobre k é finita e $kQ' \cap R = (0)$, resulta que a orientação de Q' é tal que nem todas suas flechas têm a mesma direção (isto é Q' não é um ciclo).

Utilizando um argumento análogo ao usado na demonstração da proposição II.3.2, bastaria provar que uma k -álgebra dada por um quiver de tipo $\tilde{A}_n$, que não seja um ciclo, sem relações, é tipo infinito. Este último fato é um resultado bem conhecido de Dlab e Ringel (em [15]). M3

Definição II.3.2 : O subquiver Q' de tipo $\tilde{A}_n$, $n \geq 3$, de Q tal que $kQ' \cap R = (0)$ é chamado de subquiver de tipo $\tilde{A}_n$ sem relações.

Vejamos, agora algumas das condições, que falamos na introdução dessa seção, sobre a propriedade da categoria Λ -ind ser determinada por fatores de composição.

Lema II.3.2 : Seja $\Lambda = k(Q, R)$, onde Q é o quiver $\begin{matrix} \circ_1 & \xrightarrow{\beta} & \circ_2 \end{matrix}$. Se $\beta\alpha \notin R$ então Λ -ind não é determinada por fatores de composição.

Demonstração: Como R é um ideal admissível de kQ e $\beta\alpha \notin R$, existem r, s números inteiros, $r, s \geq 2$, tais que $\alpha^r \in R$, $\beta\alpha^s \in R$ e r, s minimais com essa propriedade. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $r = s = 2$.

Seja $P_1 = \Lambda(\epsilon_1 + R)$ o Λ -módulo projetivo indecomponível, associado ao vértice 1 de Q . Temos que $\text{rad } P_1 = \Lambda(\alpha + R) \oplus \Lambda(\beta + R)$, com $\Lambda(\beta + R) = k(\beta + R) \cong S_2$ e $\text{rad}^2 P_1 = \Lambda(\beta\alpha + R) = k(\beta\alpha + R) \cong S_2$.

Portanto, $[P_1] = 2[S_1] + 2[S_2]$ em $K_0(\Lambda)$.

Seja $I_2 = \text{DP}_2^* = \text{D}\Lambda^{\text{op}}(\epsilon_2 + R^*)$, o Λ -módulo injetivo indecomponível, associado ao vértice 2 de Q . Lembrando que $\Lambda^{\text{op}} = k(Q^*, R^*)$, que α^* e β^* denotam as flechas de Q^* , obtidas de α e β , respectivamente, pela inversão de sentido, temos que:

$$\text{rad } P_2^* = \Lambda^{\text{op}}(\beta^* + R^*) \text{ e } \text{rad}^2 P_2^* = \Lambda^{\text{op}}(\alpha^* \beta^* + R^*) = k(\alpha^* \beta^* + R^*) \cong S_1.$$

Donde $[P_2^*] = 2[S_1] + [S_2]$ em $K_0(\Lambda^{op})$ e, portanto, $[I_2] = [DP_2^*] = 2[S_1] + [S_2]$ em $K_0(\Lambda)$.

Consideremos agora o Λ -módulo $M = P_1 / \text{rad}^2 P_1$. M é indecomponível (pois é local) e tal que $[M] = 2[S_1] + [S_2]$. Obtivemos assim em $\Lambda\text{-ind}$ dois módulos M e I_2 tais que $[M] = [I_2]$ e $M \not\cong I_2$, uma vez que $\text{soc } I_2 = S_2$ e $\text{soc } M = \Lambda(\beta + R) \oplus \Lambda(\alpha + R) / \Lambda(\beta\alpha + R) = S_1 \oplus S_2$. $\square$

Observação II.3.1 : O lema acima ainda é válido se trocamos Q por seu quiver oposto e a condição $\beta\alpha \notin R$ por $\alpha\beta \notin R$.

Corolário II.3.1 : Seja $\Lambda = k(Q, R)$, onde Q é um quiver sem flechas múltiplas. Se Q contém um subquiver Q' formado por um laço de flecha α e por uma flecha β , como no Lema II.3.2 (ou como na observação II.3.1), e $\beta\alpha \notin R$ (ou correspondentemente, $\alpha\beta \notin R$) então $\Lambda\text{-ind}$ não é determinada por fatores de composição.

Demonstração: Se $Q = Q'$ o resultado segue da aplicação direta do Lema II.3.2.

Suponhamos que Q' é um subquiver próprio de Q . Como Q não contém flechas múltiplas então $|Q_0| > |Q'_0|$. Aplicando iterada e alternadamente o Alg.R.1 e o Alg.R.2, sobre todas as flechas que passam pelos vértices removidos e sobre as flechas que passam pelos vértices de Q' , mas sejam distintas de α e de β , obtemos um quiver com relações (Q', R') , com $\beta\alpha \notin R'$. Além disso, $(Q', R')\text{-mod}$ é a subcategoria plena de $(Q, R)\text{-mod}$ formada por suas k -representações M que satisfazem $M(i) = (0)$, para todo $i \in Q_0 - Q'_0$, e $M(\gamma) = 0$, para toda flecha γ diferente de α e de β .

Portanto, do lema II.3.2 resulta que a álgebra $\Lambda' = k(Q', R')$ é tal que $\Lambda'\text{-ind}$ não é determinada por fatores de composição e, consequentemente, $\Lambda\text{-ind}$ não é determinada por fatores de composição. $\square$

Lema II.3.3 : Seja $\Lambda = k(Q, R)$, onde Q é um quiver sem flechas múltiplas. Se Q contém um 2-ciclo: $\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet$ então $\Lambda\text{-ind}$ não é determinada por fatores de composição.

Demonstração: A demonstração é análoga a do corolário acima e consequência do teorema II.2.2.(iii). $\square$

Podemos então resumir os resultados desta seção na seguinte proposição:

Proposição II.3.4 : Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica e conexa. Se $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição então o quiver com relações (Q, R) tal que $\Lambda = k(Q, R)$ tem as seguintes propriedades:

(i) Q não contém flechas múltiplas, nem subquivers do tipo $\hat{A}_n$, $n \geq 3$, sem relações;

(ii) Q não contém subquivers do tipo $\begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \end{array} \xrightarrow{\beta} \bullet$ (ou o quiver oposto deste) com $\alpha\beta \notin R$ (ou $\beta\alpha \notin R$), nem 2-ciclos $\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet$.

Demonstração: (i) É consequência direta das proposições II.3.1, II.3.2 e II.3.3. (ii) Decorre imediatamente do corolário II.3.1.(i) e dos lemas II.3.2 e II.3.3. $\square$

A proposição II.3.4 em (ii) exclui de Q os 2-ciclos e a condição (i) exclui os r -ciclos sem relações. Surge, então uma pergunta natural: nas condições da proposição II.3.4, (Q, R) pode admitir um subquiver Q' que é um r -ciclo, com $r \geq 3$, mas tal que $kQ' \cap R \neq (0)$?

Na seção 2 deste capítulo vimos que sim, no caso em que Λ é uma álgebra de Nakayama (teorema II.2.2.(iii)), desde que no máximo um caminho de comprimento $r - 1$ esteja fora de R .

Vejamos o que podemos dizer para o caso mais geral.

Lema II.3.4 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$, onde k é um corpo algebricamente fechado. Se Q contém um r -ciclo μ , $r \geq 3$, tal que $\mu \notin R$ e todo caminho contido em μ não é somando de nenhum gerador de R , então Λ -ind não é determinada por fatores de composição.*

Demonstração: Seja Q' o quiver do r -ciclo μ . Utilizando aqui mais uma vez o algoritmo de Ringel, via Alg.R.1 e/ou Alg.R.2, para remover convenientemente certos vértices e flechas, obtemos um quiver com relações (Q', R') , tal que o r -ciclo μ , pelas condições dadas, não está em R' e tal que a categoria (Q', R') -mod é uma subcategoria plena dos Λ -mod.

De outro lado, pela proposição II.2.7, $k(Q', R')$ é uma álgebra de Nakayama. Portanto, o resultado segue usando o teorema II.2.2.(iii). $\square$

Assim à proposição II.3.4 podemos acrescentar mais uma exclusão e a reescrevemos como proposição II.3.5.

Proposição II.3.5 : *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica e conexa. Se Λ -ind é determinada por fatores de composição então o quiver com relações (Q, R) tal que $\Lambda = k(Q, R)$ tem as seguintes propriedades:*

- (i) Q não contém flechas múltiplas, nem subquivers do tipo $\hat{A}_n$, $n \geq 3$, sem relações;
- (ii) Q não contém subquivers do tipo $\begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \end{array} \xrightarrow{\beta} \bullet$ (ou o quiver oposto deste) com $\alpha\beta \notin R$ (ou $\beta\alpha \notin R$), nem 2-ciclos $\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet$;
- (iii) Q não contém r -ciclos μ , $r \geq 3$, tais que $\mu \notin R$ e todo caminho contido em μ não é somando de nenhum gerador de R .

Demonstração: É consequência da proposição II.3.4 e do lema II.3.4. $\square$

Capítulo III

Módulos livres de multiplicidade

No capítulo anterior tratamos dos módulos indecomponíveis, sobre uma álgebra de Artin, do ponto de vista de determinar sua classe de isomorfismo através de seus fatores de composição, isto é, analisando a propriedade “ser unicamente determinado por seus fatores de composição”.

Neste capítulo eles serão tratados do ponto de vista da multiplicidade com que tais fatores comparecem na sua imagem no Grupo de Grothendieck, ou seja analisando a propriedade “ser livre de multiplicidade”. Estaremos sobretudo interessados na possível relação que possa existir entre tais propriedades.

Em [24], Pogorzały e Skowroński provaram que se Λ é uma k -álgebra de dimensão finita, onde k é um corpo algebricamente fechado, tal que todo Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade então Λ é biserial de tipo de representação finito. No mesmo trabalho estabeleceram que se Λ é quociente de uma álgebra hereditária (isto é, seu quiver ordinário não contém laços, nem circuitos) então as propriedades “todo Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade” e “ Λ é biserial e todo Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição” são equivalentes.

Pretendemos, neste capítulo, explorar que implicações entre as propriedades citadas acima permanecem quando admitimos que Λ é uma k -álgebra cujo quiver admite circuitos. Por isso, este capítulo está organizado como segue.

A seção III.1 contém exemplos, que julgamos, clássicos de álgebras cujos módulos indecomponíveis são livres de multiplicidade. Além desses, tratamos das álgebras de Nakayama, para as quais estabelecemos também, como no capítulo anterior, condições necessárias e suficientes para que seus módulos indecomponíveis sejam livres de multiplicidade. Este é o conteúdo do teorema III.1.1.

Observamos agora que é entre as k -álgebras de Nakayama, cujo quiver é um r -ciclo, com $r \geq 3$, que encontramos exemplo de uma k -álgebra biserial que não é quociente de nenhuma k -álgebra hereditária em que a propriedade “todo módulo indecomponível é livre de multiplicidade” não implica a propriedade “todo módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição”.

A partir da seção III.2 trabalhamos apenas com k -álgebras biseriais. Na seção III.2 estabelecemos, no teorema III.2.2, que as k -álgebras biseriais cujo quiver ordinário não contém laços e são tais que a categoria dos módulos indecomponíveis é determinada por fatores de composição têm os seus módulos projetivos indecomponíveis e injetivos indecomponíveis livres de multiplicidade. E este é o primeiro passo para a análise dos demais módulos indecomponíveis. Além disso, nesta seção, através dos resultados de Pogorzały e Skowroński, provamos que dentre as k -álgebras hereditárias de tipo de representação finito, apenas a álgebra kQ cujo grafo subjacente a Q é um diagrama A_n é tal que kQ -ind é livre de multiplicidade.

A seção III.3 contém dois resultados básicos para o nosso objetivo. Estes resultados formam o conteúdo do corolário III.3.1 e o do teorema III.3.2. De modo informal,

podemos dizer que o referido corolário caracteriza localmente o quiver dos módulos indecomponíveis, cujo quociente por um submódulo simples é soma direta de dois módulos (não necessariamente indecomponíveis), garantindo que existem exatamente duas flechas distintas que terminam no vértice associado a esse simples. Já o teorema III.3.2, nas mesmas condições sobre a álgebra, garante que o quociente de um módulo indecomponível por um submódulo simples, quando decomponível, tem exatamente dois somandos diretos indecomponíveis. A dualidade $\text{Hom}_k(-, k)$ nos permitirá formular as formas duais desses resultados, ou seja com relação aos somandos diretos do topo de um dado módulo.

Na seção III.4, através dos lemas III.4.1, III.4.2, III.4.3, apresentamos o modelo combinatório dos módulos cujo quociente por um submódulo simples é de tipo A_n , $n \geq 2$, quando a álgebra é biserial de tipo de representação finito e seu quiver ordinário não contém laços. Como biserialidade é uma propriedade preservada pela dualidade $\text{Hom}_k(-, k)$, os citados lemas têm de forma natural suas versões duais e, portanto, fornecem o modelo combinatório dos módulos que contém um submódulo de tipo A_n .

Essa combinatória foi fundamental para provarmos as proposições III.4.2 e III.4.3 e enunciarmos suas respectivas duais. Elas tratam essencialmente da multiplicidade dos fatores de composição do socle e do topo, respectivamente, de um Λ -módulo indecomponível, quando Λ é uma k -álgebra biserial, cujo quiver ordinário não contém laços e a categoria Λ -ind determinada por fatores de composição. Elas garantem que, neste caso, tais fatores têm multiplicidade 1.

Finalmente na seção III.5 apresentamos dois teoremas: teoremas III.5.1 e III.5.2.

O teorema III.5.1 classifica os módulos indecomponíveis livres de multiplicidade sobre uma k -álgebra biserial de tipo de representação finito, cujo quiver ordinário Q não contém laços e tal que todo circuito de Q pertence ao sistema de relações. Esses módulos indecomponíveis são classificados segundo seus quivers em dois tipos: os biseriais livres e os de tipo A_n .

Esta classificação dos módulos indecomponíveis livres de multiplicidade do teorema III.5.1, segundo o tipo de quiver, junto com as proposições III.4.2. e III.4.3 e suas duais, permitiram provar o teorema III.5.2. Este teorema, objetivo principal deste trabalho, estabelece que se Λ é uma k -álgebra biserial, cujo quiver ordinário Q não contém laços e todo Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição então todo Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade. Ou seja, uma das direções da equivalência provada por Pogorzały e Skowroński, para k -álgebras que são quociente de alguma hereditária, é mantida mesmo que a álgebra admita circuitos no seu quiver.

Seja Λ uma álgebra de Artin. Para simplificar a notação vamos denotar por proprie-

dade P.II a seguinte propriedade:

Propriedade P.II: Cada Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade.

Convencionamos que se uma álgebra Λ é tal que $\Lambda\text{-ind}$ verifica P.II diremos que Λ tem a propriedade P.II ou ainda que $\Lambda\text{-ind}$ é livre de multiplicidade. Além disso, em todo este capítulo ao nos referirmos a uma k -álgebra de dimensão finita está suposto sempre, salvo menção explícita, que k é um corpo algebricamente fechado.

III.1 Algumas álgebras que têm a propriedade P.II

Dentre os exemplos de álgebras clássicas temos as álgebras semisimples, cujos módulos indecomponíveis, porque são simples, são todos livres de multiplicidade

As álgebras de Artin hereditárias, outro exemplo clássico, quando de tipo de representação finito, conforme vimos no capítulo anterior, são tais que $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição. O que podemos dizer delas quanto a propriedade P.II, ou ainda quanto à multiplicidade dos fatores de composição de seus objetos?

Conforme vimos no capítulo anterior, a conjectura de Brauer-Thrall II (ver em [23], [8], [11]), que se verifica para álgebras de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, garante que tais álgebras são de tipo de representação finito se a categoria $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição. No entanto, é o teorema de Roiter (ver em [3]) que garante o mesmo fato para as álgebras de Artin, quando estas têm a propriedade P.II! Assim, o estudo das álgebras de Artin que têm a propriedade em questão passa necessariamente pela classe das álgebras de tipo de representação finito também. Por esse motivo, a nossa pergunta acima se resume, dentre os exemplos clássicos, às hereditárias que são de tipo de representação finito.

Com relação às álgebras hereditárias de tipo de representação finito Λ , que foram classificadas por Gabriel (ver teorema I.10.1), conforme veremos adiante, apenas as $\Lambda \cong kQ$, onde Q é o quiver cujo grafo subjacente é o A_n , $n \geq 1$, têm a propriedade P.II.

Exemplo III.1.1 : Seja $\Lambda = kQ$, onde Q é o quiver:

A álgebra Λ deste exemplo é básica, conexa, hereditária e de tipo de representação finito, pois o diagrama subjacente a Q é um D_5 . Portanto, conforme vimos no capítulo anterior, a categoria $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição. Utilizando as ARS, construímos os módulos indecomponíveis $\tau^{-1}P_3$, $\tau^{-2}P_3$ e $\tau^{-1}P_4$, onde P_3 , P_4 indicam, respectivamente, os projetivos indecomponíveis associados aos vértices 3 e 4; estes módulos,

em $K_0(\Lambda)$, são tais que

$$[\tau^{-1}P_4] = [S_1] + [S_2] + 2[S_3] + [S_4] + [S_5]$$

$$[\tau^{-1}P_3] = [S_1] + [S_2] + 2[S_3] + [S_4]$$

$$[\tau^{-2}P_3] = [S_1] + [S_2] + 2[S_3] + 2[S_4] + [S_5]$$

e são os únicos módulos indecomponíveis que não são livres de multiplicidade. Este exemplo mostra que o estabelecimento de alguma relação entre as propriedades “ser unicamente determinado por seus fatores de composição” e “ser livre de multiplicidade” vai exigir necessariamente alguma outra restrição às álgebras, além da de ser de tipo de representação finito, conforme veremos adiante.

Antes, no entanto, trataremos das álgebras de Artin que são de Nakayama. Para estas, usando os resultados do capítulo II, seção 2 (em especial os comentários da observação II.2.1 e o teorema II.2.1), estabelecemos dois resultados - os teoremas III.1.1 e III.1.3. O teorema III.1.1 caracteriza as álgebras de Nakayama que têm a propriedade “todo módulo indecomponível é livre de multiplicidade”. O teorema III.1.3 estabelece uma condição suficiente para que as propriedades “todo módulo indecomponível é livre de multiplicidade” e “todo módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição” sejam ambas verificadas.

Teorema III.1.1 : *Seja Λ uma álgebra de Artin, conexa e de Nakayama. Indiquemos por n o posto de $K_0(\Lambda)$. Para que Λ -ind seja livre de multiplicidade é necessário e suficiente que o comprimento de qualquer Λ -módulo projetivo indecomponível seja menor ou igual a n .*

Demonstração: A demonstração decorre imediatamente das considerações contidas na observação II.2.1 e do fato de que todo Λ -módulo indecomponível é local. $\square$

Para o caso particular de uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica, conexa e de Nakayama, o teorema acima pode ser reescrito como segue, em termos de condições sobre o quiver com relações (Q, R) que a determina (cf. teorema II.2.7).

Teorema III.1.2 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ básica, conexa e de Nakayama e seja n o posto de $K_0(\Lambda)$.*

- (i) *Se Q é o quiver $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \cdots \leftarrow n-1 \leftarrow n$, com $n \geq 1$, então Λ -ind é livre de multiplicidade;*
- (ii) *Se Q é um laço de flecha α então existe um único Λ -módulo livre de multiplicidade, que é o único módulo simples sobre Λ .*

multiplicidade se e somente se o ideal R contém todos os caminhos de Q de comprimento n .

Demonstração: Deixamos como exercício, pois ela é análoga à do teorema II.2.2. □

O teorema III.1.1 e o teorema II.2.1, nos permitiram demonstrar que, sobre certas condições, numa álgebra de Nakayama as propriedades “ Λ -ind é determinada por fatores de composição” e “ Λ -ind é livre de multiplicidade” são simultaneamente verificadas. Este é o conteúdo do teorema III.1.3.

Teorema III.1.3 : *Sejam Λ uma álgebra de Artin, conexa e de Nakayama e n o posto de $K_0(\Lambda)$. Suponhamos que todo Λ -módulo projetivo indecomponível tenha comprimento no máximo n e que exista no máximo um desses de comprimento n . Então Λ -ind é determinada por fatores de composição e também livre de multiplicidade.*

Demonstração: O resultado decorre imediatamente do teorema III.1.1 acima e do teorema II.2.1. □

Queremos observar que existem exemplos de álgebras de Nakayama em que apenas a propriedade “ Λ -ind é livre de multiplicidade” se verifica e existem exemplos em que ambas as propriedades “ Λ -ind é determinada por fatores de composição” e “ Λ -ind é livre de multiplicidade” não se verificam.

Vejamos um desses exemplos.

Exemplo III.1.2 : Sejam k um corpo e Q o 2-ciclo: $1 \rightleftarrows 2$. Consideremos as k -álgebras de Nakayama $\Lambda_1 = k(Q, R_1)$ e $\Lambda_2 = k(Q, R_2)$, onde $R_1 = F^2$ e $R_2 = F^3$ (relembrando, F é o ideal de kQ gerado pelas flechas de Q).

Sobre a álgebra Λ_1 , os projetivos indecomponíveis P_1 e P_2 , associados aos vértices 1 e 2, têm comprimento 2, são ambos livres de multiplicidade e tais que $[P_1] = [P_2] = [S_1] + [S_2]$ em $K_0(\Lambda)$. Porém, como eles não são isomorfos, temos que Λ_1 -ind é apenas livre de multiplicidade.

Sobre a álgebra Λ_2 , os projetivos indecomponíveis P_1 e P_2 , correspondentes, respectivamente, aos vértices 1 e 2, têm comprimento 3 e são tais que $[P_1] = 2[S_1] + [S_2]$ e

$[P_2] = [S_1] + 2[S_2]$. Portanto, Λ_2 -ind não é livre de multiplicidade. Além disso, se considerarmos os módulos $M = P_1/\text{rad}^2 P_1$ e $N = P_2/\text{rad}^2 P_2$, temos que $[M] = [N] = [S_1] + [S_2]$, mas M e N não são isomorfos, uma vez que $\text{top } M \cong S_1$ e $\text{top } N \cong S_2$. Portanto, Λ_2 -ind não é determinada por fatores de composição.

O teorema III.1.3, para o caso em que Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, pode ser reescrito em termos do quiver (Q, R) tal que $\Lambda = k(Q, R)$, utilizando para isso os resultados do teorema III.1.2 e do teorema II.2.2.

Além das álgebras de Nakayama nas condições do teorema III.1.1, que outras de tipo de representação finito têm a propriedade P.II?

Em [24], Pogorzaly e Skowroński provaram que necessariamente tais álgebras são biseriais, das quais as de Nakayama são exemplos. Vejamos então as álgebras biseriais.

III.2 Sobre as álgebras biseriais e a propriedade P.II

Definição III.2.1 : *Seja Λ uma álgebra de Artin. Dizemos que Λ é uma álgebra biserial se o radical de todo Λ -módulo projetivo indecomponível, à esquerda ou à direita, não uniserial, é soma de dois submódulos uniseriais, cuja intersecção é nula ou um módulo simples.*

São exemplos bem conhecidos de álgebras biseriais as álgebras de Nakayama, as álgebras dadas por árvores de Brauer (em [19]), as álgebras inclinadas generalizadas de tipo A_n (em [1]), etc. Um exemplo interessante de álgebra biserial de tipo de representação infinito é a álgebra de Kronecker, ou seja a álgebra kQ , onde Q é o quiver: $\bullet \rightrightarrows \bullet$.

Segue da definição, via a dualidade $D = \text{Hom}_C(-, I_0): \Lambda\text{-mod} \rightarrow \Lambda^{\text{op}}\text{-mod}$, onde C denota o centro de Λ e I_0 a envolvente injetiva de $C/\text{rad } C$, que os Λ -módulos injetivos indecomponíveis I são: (a) uniseriais ou (b) caso contrário, tais que $I/\text{soc } I$ é soma direta de dois submódulos uniseriais, não nulos, ou $\text{top } I$ é simples e $\text{rad } I/\text{soc } I$ é soma direta de dois submódulos uniseriais, não nulos (este último é o caso em que I é projetivo).

Proposição III.2.1 : (Proposição 1 em [24]) *Seja Λ uma álgebra de Artin. Suponhamos que todo Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade. Então Λ é de tipo de representação finito, biserial e Schurian (isto é, a álgebra dos endomorfismos de cada um de seus módulos indecomponíveis é um anel com divisão).*

Tendo em vista que o nosso propósito é o de estudar as álgebras cujos módulos indecomponíveis são livres de multiplicidade, a proposição acima nos transporta à classe

das álgebras biseriais de tipo de representação finito.

Skowroński e Waschbüsch, em [31], trabalhando com álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, introduziram a definição de álgebras especiais. Neste trabalho, provaram que toda álgebra especial é uma álgebra biserial; provaram também que toda álgebra distributiva (em [20]) e biserial é uma álgebra especial. Portanto, as álgebras biseriais de tipo de representação finito são álgebras especiais no sentido de Skowroński e Waschbüsch.

No entanto, foi com base num trabalho, datado de 1957, de Jans [20], que introduziu certo tipo de ciclos, chamados na literatura de “ciclos no sentido de Jans”, que eles provaram que *toda álgebra distributiva e biserial, sem ciclos no sentido de Jans, admite uma base multiplicativa de Cartan*. Este resultado possibilitou a Pogorzały e Skowroński enunciarem, como consequência, o teorema seguinte sobre a estrutura das álgebras biseriais de tipo de representação finito.

Teorema III.2.1 : (teorema 2 em [24]) *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, conexa, básica, biserial e de tipo de representação finito. Então Λ é isomorfa a uma álgebra de quivers com relações $k(Q, R)$, onde (Q, R) satisfaz as condições:*

- (SP) 1. *O número de flechas que começam (terminam) em cada vértice de Q é no máximo 2;*
2. *Para cada flecha α em Q existe no máximo uma flecha β e no máximo uma flecha γ tal que $\beta\alpha \notin R$ e $\alpha\gamma \notin R$;*
3. *Existe um limitante superior para o comprimento dos caminhos de Q que estão fora de R ;*
4. *O ideal R é gerado por um conjunto de caminhos e pelas diferenças de pares de caminhos paralelos em Q .*

Observação III.2.1 : (a) Dois caminhos em um quiver Q , de comprimento maior ou igual a 2, são ditos *paralelos* se têm a mesma origem e o mesmo término. No entanto, em quiver com relações (Q, R) que satisfazem as condições (SP) 1 e 2, é fácil ver que os caminhos paralelos de Q , fora de R , não contém flechas em comum e seus vértices, exceto a origem e o término, que são incidentes a alguma flecha de um dos caminhos não são incidentes às flechas do outro.

(b) Uma álgebra $k(Q, R)$ que satisfaz as condições (SP) 1, 2 e 3 do teorema III.2.1 é uma *álgebra especial*, no sentido de Skowroński e Waschbüsch. É fácil ver que: dada uma álgebra especial $k(Q, R)$ que satisfaz a condição (SP) 4 e dado um caminho $\mu \in kQ - R$, então para qualquer caminho μ' contido propriamente em μ não

existe caminho paralelo a μ' fora de R : portanto μ' não é somando de nenhum gerador de R .

(c) Seja x um vértice de Q e α um flecha com origem em x . Suponhamos que exista em Q um circuito, fora de R , que começa na flecha α . Consideremos u_α o circuito, fora de R , de menor comprimento entre os circuitos que começam com α e estão fora de R (isto é uma volta completa, partindo de α). Suponhamos que u_α esteja sujeito às seguintes condições: um caminho fora de R que contenha alguma flecha de u_α é um subcaminho de u_α e um circuito fora de R com início e término em algum vértice de u_α , distinto de x , é um subcaminho de u_α . Nestas condições é imediato que u_α é um r -ciclo, $r \geq 2$ ou contém propriamente um r -ciclo μ , $r \geq 2$, que não contém a flecha α e tal que qualquer subcaminho de μ não é somando de nenhum gerador de R .

(d) Dada uma flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Q , fica determinado, pelas condições (SP) 1, 2 e 3, um único caminho, que denotaremos por w_α , fora de R , que começa na flecha α e que é maximal entre todos os caminhos u_α , fora de R que começam em α . Além disso, qualquer um desses caminhos u_α é um subcaminho de w_α . Se Q não contiver laços então as flechas consecutivas de w_α são distintas. Ainda mais, se w_α não contiver subcaminhos que sejam r -ciclos, $r \geq 2$, então todas as flechas de w_α são distintas e cada um dos seus vértices, exceto a origem e o final, é incidente a exatamente duas de suas flechas. Um análogo vale para caminhos que terminam na flecha α .

O teorema III.2.1 conta-nos que, para as álgebras biseriais de tipo de representação finito, é possível fazer uma escolha adequada do ideal R (ou seja, do sistema de relações) de forma que Λ seja isomorfa a álgebra $k(Q, R)$ e admita, para essa escolha, uma k -base multiplicativa de Cartan. Uma base B de Λ , sobre k , é uma *base multiplicativa de Cartan* se o produto de dois elementos quaisquer de B é zero ou é um elemento de B e existe uma decomposição de $\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$, com Λe_i indecomponíveis, e_i são idempotentes de Λ , tal que, para todo $1 \leq i, j \leq n$ e todo $t = 0, 1, 2, \dots$, a base B contenha uma base do subespaço $e_i(\text{rad}^t \Lambda)e_j$. Para detalhes ver o corolário do lema 1 e o teorema 2 em [31].

A observação III.2.1, bem como este último comentário sobre a adequação do ideal R , transporta-nos ao estudo dos caminhos em (Q, R) , quando este satisfaz as condições (SP) e quando Q não contém laços.

Dado um caminho w em Q , vamos denotar por w_1 o conjunto das flechas de w e por w_0 o conjunto dos vértices que são incidentes a alguma flecha de w_1 . Vamos convencionar também que usaremos a notação “um caminho u_α ” para caracterizar que u é um caminho que começa com a flecha α , quando isto se fizer necessário. Além disso, $\hat{u}_\alpha$ denotará o circuito de menor comprimento entre os circuitos (caso existam) que começam por α e estão fora de R . Com estas convenções e com a notação da observação III.2.1.(d) podemos enunciar o seguinte lema.

Lema III.2.1 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ tal que (Q, R) satisfaz as condições (SP), Q não contém laços, nem flechas paralelas (flechas duplas). Seja i um vértice em Q . Com as notações anteriores temos:*

(a) *Se i é origem de uma única flecha $\alpha : i \rightarrow j$ então:*

(a.1) *Se $e(w_\alpha) = i$ então $w_\alpha = (\hat{u}_\alpha)^r$, para algum $r \geq 1$;*

(a.2) *Se $e(w_\alpha) \neq i$ então ou (i) $w_\alpha = u'_\alpha (\hat{u}_\alpha)^r$, para algum $r \geq 1$, onde u'_α é um subcaminho próprio de $\hat{u}_\alpha$ ou (ii) w_α não contém circuitos de origem i ;*

(b) *Se i é origem de duas flechas distintas $\alpha : i \rightarrow j_1$ e $\beta : i \rightarrow j_2$ então:*

(b.1) *Se existirem em Q circuitos, fora de R , que começam em α e em β , respectivamente, então $w_\alpha = \hat{u}_\alpha$ e $w_\beta = \hat{u}_\beta$ e tais circuitos são paralelos (portanto, $w_\alpha - w_\beta \in R$);*

(b.2) *Se $e(w_\alpha) = i$ e $e(w_\beta) \neq i$ então $w_\alpha = (\hat{u}_\alpha)^r$, para algum $r \geq 1$, w_β não contém circuitos que começam em i , $(w_\alpha)_0 \cap (w_\beta)_0 = i$ e $(w_\alpha)_1 \cap (w_\beta)_1 = \emptyset$;*

(b.3) *Se $e(w_\alpha) = e(w_\beta) \neq i$ então ou (i) um deles, por exemplo, w_α contém um circuito, fora de R , que começa em α e, neste caso, $w_\alpha = w_\beta \hat{u}_\alpha$ e $\hat{u}_\alpha$ não contém a flecha β , ou (ii) w_α e w_β são paralelos (portanto, $w_\alpha - w_\beta \in R$);*

(b.4) *Se $e(w_\alpha) \neq e(w_\beta)$ e distintos de i então ou (i) $w_\alpha = u'_\alpha (\hat{u}_\alpha)^r$, para algum $r \geq 1$, onde u'_α é um subcaminho próprio de $\hat{u}_\alpha$, w_β não contém circuitos que começam com β , $(w_\alpha)_0 \cap (w_\beta)_0 = i$ e $(w_\alpha)_1 \cap (w_\beta)_1 = \emptyset$ ou (ii) $w_\alpha = u_\beta \hat{u}_\alpha$ e $w_\beta = \gamma u_\beta$, onde u_β é um subcaminho próprio de w_β que termina em $e(w_\alpha)$, γ é um subcaminho de w_β com origem em $e(w_\alpha)$ e tais que $(\hat{u}_\alpha)_0 \cap (w_\beta)_0 = i$ e $(\hat{u}_\alpha)_1 \cap (w_\beta)_1 = \emptyset$ ou (iii) w_α e w_β não contém circuitos que começam em i , que é o único vértice comum entre eles e não têm flechas em comum.*

Demonstração: (a) é imediata da definição de w_α .

(b.1) Consideremos os circuitos $\hat{u}_\alpha$ e $\hat{u}_\beta$. Então $\hat{u}_\alpha$ não contém a flecha β e $\hat{u}_\beta$ não contém a flecha α e são subcaminhos de w_α e de w_β , respectivamente. É fácil verificar, usando a (SP) 2, que $\hat{u}_\alpha$ e $\hat{u}_\beta$ não contém flechas em comum e, por (SP) 2 e 4, que o único vértice comum é o vértice i . Logo $\hat{u}_\alpha$ e $\hat{u}_\beta$ são caminhos paralelos e, portanto, $\hat{u}_\alpha - \hat{u}_\beta \in R$ (pela (SP) 4). Deste último resulta, pela condição (SP) 2, que $\gamma \hat{u}_\alpha$ e $\gamma \hat{u}_\beta$ estão em R , para toda flecha γ que tem origem em i . Donde $w_\alpha = \hat{u}_\alpha$ e $w_\beta = \hat{u}_\beta$ e a afirmação está verificada.

(b.2) De $e(w_\alpha) = i$, temos que existe um circuito que começa em α , fora de R , contido em w_α . De $e(w_\beta) \neq i$, usando (b.1), resulta que w_β não contém circuitos que começam em β , donde β não é flecha de w_α . Então $w_\alpha = (\hat{u}_\alpha)^r$, para algum $r \geq 1$. A condição (SP) 2 garante, então, que $\hat{u}_\alpha$ e w_β não contém flechas comuns; e essa mesma condição mais a (SP) 4 garantem que eles têm apenas um vértice em comum - o vértice i . Portanto, o

mesmo acontece para os caminhos w_α e w_β .

(b.3) Por (b.1) temos ou (i) existe apenas um circuito, fora de R , que começa em i ou (ii) i não é origem de nenhum circuito.

Suponhamos que o circuito em questão comece na flecha α . Então w_α contém esse circuito e w_β não contém circuitos, fora de R , começando por β . Portanto, $\hat{u}_\alpha$ é um subcaminho de w_α e não contém a flecha β . Pelo mesmo argumento usado na demonstração de (b.2), obtemos que $\hat{u}_\alpha$ e w_β têm apenas o vértice i como vértice comum e nenhuma flecha em comum. Assim, como w_α e w_β terminam no mesmo vértice, resulta que β é uma flecha de w_α e, portanto, por (SP) 2, $\alpha\hat{u}_\alpha \in R$. Logo, é fácil ver que $w_\alpha = w_\beta\hat{u}_\alpha$.

Se i não é origem de nenhum circuito, fora de R , então qualquer subcaminho de w_α ou de w_β , que não contenha a flecha α ou a flecha β não passa pelo vértice i . Portanto, como antes, segue facilmente, via (SP) 2 e 4, que tais subcaminhos não tem flechas em comum, nem vértices comuns a não ser o $e(w_\alpha) = e(w_\beta)$. Logo w_α e w_β são paralelos.

(b.4) Como em (b.3) temos que i é origem de um único circuito, fora de R , ou i não é origem de nenhum circuito em Q .

Suponhamos que o único circuito, fora de R , com origem em i comece na flecha α . Portanto, o circuito $\hat{u}_\alpha$ é um subcaminho próprio de w_α e não contém a flecha β . Como no caso (b.3.i), $\hat{u}_\alpha$ e w_β não contêm flechas em comum e i é o único vértice comum. De outro lado, como os vértices finais de w_α e de w_β são distintos, temos que $e(w_\alpha)$ é um vértice de $\hat{u}_\alpha$, distinto de i , ou $e(w_\alpha)$ não é vértice de $\hat{u}_\alpha$.

No primeiro caso, temos que $\alpha\hat{u}_\alpha \notin R$ e, em consequência da (SP)2, que $\beta\hat{u}_\alpha \in R$. Destas condições, resulta que $w_\alpha = u'_\alpha(\hat{u}_\alpha)^r$, para algum $r \geq 1$ e algum subcaminho u'_α contido propriamente em $\hat{u}_\alpha$. Desta forma, é imediato que w_α e w_β não têm flechas comuns e i é o único vértice comum a ambos. Assim (b.4.i) é uma alternativa.

No segundo caso, β é uma flecha de w_α ; portanto $\alpha\hat{u}_\alpha \in R$ (por (SP) 2) e a flecha final de w_α é uma flecha de w_β e $e(w_\alpha)$ é um vértice de w_β . Logo, existe um caminho u_β , não trivial, contido em w_β tal que $w_\alpha = u_\beta\hat{u}_\alpha$. Como $e(u_\beta) = e(w_\alpha) \neq e(w_\beta)$ e por ser w_β maximal entre os caminhos, fora de R , que começam em β , temos que u_β é um subcaminho próprio de w_β ; portanto, existe um subcaminho γ de w_β , não trivial, de origem em $e(w_\alpha)$ e término em $e(w_\beta)$, tal que $w_\beta = \gamma u_\beta$. Observamos que γ não contém a flecha β . Esse é portanto o caso (b.4.ii).

Agora vamos analisar o caso em que i não é origem de nenhum circuito, fora de R ; ou seja, quando w_α não contém a flecha β e w_β não contém a flecha α . Como $e(w_\alpha) \neq e(w_\beta)$, temos que as flechas terminais de w_α e de w_β são distintas; logo, usando o mesmo argumento de (b.3.ii), dados u_α e u_β subcaminhos quaisquer de w_α e w_β , respectivamente, temos que tais caminhos não têm flechas comuns e o único vértice comum entre eles é o vértice i . □

A estrutura dada pelo teorema III.2.1, a descrição de caminhos contida no lema III.2.1 e a proposição II.3.5, permitiram-nos estabelecer algo sobre a multiplicidade dos fatores de composição dos módulos projetivos e dos módulos injetivos, sobre uma álgebra biserial em que todo módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição. Este é o conteúdo do teorema III.2.2 abaixo.

Estaremos a partir de agora usando para os Λ -módulos as notações e resultados que se encontram no capítulo I, ou seja usando a linguagem das k -representações.

Teorema III.2.2 : *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica, conexa, biserial. Suponhamos que o quiver ordinário Q de Λ não contenha laços e que Λ -ind seja determinada por fatores de composição. Então todos os Λ -módulos projetivos indecomponíveis e injetivos indecomponíveis são livres de multiplicidade.*

Demonstração: Pelo fato de que propriedades como ser biserial e ser livre de multiplicidade são preservadas pela dualidade $D = \text{Hom}_k(-, k)$, faremos a demonstração apenas para os Λ -módulos projetivos indecomponíveis.

Como Λ -ind é determinada por fatores de composição, pela proposição II.3.1, temos que Λ é biserial de tipo de representação finito. Portanto, pelo teorema III.2.1, $\Lambda \cong k(Q, R)$, onde (Q, R) satisfaz as condições (SP) 1, 2, 3 e 4. Além disso, valem as restrições, que estão listadas na proposição II.3.5, para o quiver (Q, R) , ou sejam: Q não contém flechas duplas, subquivers de tipo $\tilde{A}_n$ sem relações, 2-ciclos, nem r -ciclos, $r \geq 3$, fora de R tais que todo um seu subcaminho não é somando de nenhum gerador de R .

Suponhamos, por absurdo, que exista um Λ -módulo projetivo indecomponível P e um Λ -módulo simples S tal que S é fator de composição de P com multiplicidade maior ou igual a 2. Portanto, $P \cong P_i$ para algum $i \in Q_0$, $S \cong S_j$, para algum $j \in Q_0$ e $\dim_k P(j) \geq 2$.

1º caso: $S \cong S_i$ (isto é, $i = j$).

Então existe pelo menos um circuito em Q , que não está em R , que começa em i . Dependendo se i é origem de apenas uma flecha α ou de duas flechas distintas α e β , temos um dos casos (a.1), (a.2.i), (b.1), (b.2), (b.3.i), (b.4.i) ou (b.4.ii) do Lema III.2.1.

Se é o caso (b.1) então os caminhos maximais w_α e w_β , fora de R , que começam, respectivamente, em α e β , são paralelos (portanto, sua diferença está em R). Neste caso, $\text{rad } P_i = \Lambda(\alpha + R) + \Lambda(\beta + R)$ e $\text{soc } P_i = k(w_\alpha + R) = k(w_\beta + R) \cong S_i$. Sejam os Λ -módulos $M = P_i / \Lambda(\beta + R)$ e $N = \Lambda(\alpha + R)$. Tais módulos são uniseriais, têm os mesmos fatores de composição, que são os simples associados aos vértices de w_α , mas não são isomorfos, pois $\text{top } M \cong S_i$ e $\text{top } N \cong S_{j_1}$, onde j_1 é o vértice final de α . E isto contradiz a hipótese de Λ -ind ser determinada por fatores de composição.

Em qualquer dos casos (a.1), (a.2.i), (b.2), (b.3.i), (b.4.i) ou (b.4.ii), com as notações do lema III.2.1, podemos considerar o circuito $\hat{u}_\alpha$. Tal circuito, pela observação III.2.1.(b), é tal que qualquer um de seus subcaminhos não é somando de nenhum gerador de R . Além

disso, por construção, ele também satisfaz as condições da observação III.2.1.(c), ou sejam: um caminho, fora de R , que contenha alguma flecha de $\hat{u}_\alpha$ é um subcaminho de $\hat{u}_\alpha$ e um circuito, fora de R , com início ou término em algum vértice de $\hat{u}_\alpha$, distinto de i , é um subcaminho de $\hat{u}_\alpha$. Portanto, pela observação III.2.1.(c), temos que $\hat{u}_\alpha$ é um r -ciclo ($r \geq 2$) ou contém propriamente um r -ciclo (que, portanto, está fora de R), cujos subcaminhos não são somandos de nenhum gerador de R . Obtemos assim uma contradição sobre as hipóteses sobre (Q, R) .

2º caso: $S \not\cong S_i$ (ou seja $i \neq j$).

Então não existe em Q circuitos, fora de R , que começam no vértice i . Como caminhos paralelos estão em R e $\dim_k P(j) = \dim_k P_i(j) \geq 2$, resulta que existe um caminho w , fora de R , de i para j , contendo propriamente um circuito μ de origem em j tal que μ não contém nenhuma flecha com origem em i . Logo, dependendo do número de flechas que têm origem em i , estamos, com relação ao vértice i , em um dos casos restantes do Lema III.2.1, ou seja, casos (a.2.ii), (b.3.ii) ou (b.4.ii).

No caso (a.2.ii), temos que μ é um subcaminho próprio de w_α e j em w_α é vértice final de duas flechas γ e γ' , com γ' em μ , e origem de pelo menos uma flecha δ' , com δ' em μ , para as quais vale que $\mu\gamma' \notin R$ e $\delta'\gamma' \in R$ (se existir em w_α uma outra flecha δ , com origem em j , então $\delta\mu\gamma \notin R$). Portanto, j é origem de um único circuito de Q , fora de R , o circuito μ ; além disso, $\mu = \hat{u}_{\delta'}$ (pois, $\delta'\gamma' \in R$).

No caso (b.3.ii), por serem w_α e w_β paralelos, temos que o circuito μ é um subcaminho (próprio) de apenas um desses caminhos maximais, por exemplo, e que j não é vértice final de nenhum deles. Logo, j é vértice final, em w_α de duas flechas distintas γ e γ' , com γ' em μ e origem de duas flechas distintas δ e δ' , com δ' em μ , tais que $\delta\mu\gamma \notin R$ (o que implica que $\delta'\gamma' \in R$ e $\delta\gamma \in R$). Como em (a.2.ii), j é então origem de um único circuito de Q , fora de R , o circuito μ e igualmente $\mu = \hat{u}_{\delta'}$.

Se estamos no caso (b.4.ii), como w_α e w_β não têm flechas comuns e i é o único vértice comum entre eles, temos que μ está contido propriamente em apenas um deles e o vértice j , quanto à incidência de flechas, se comporta como no caso (a.2.ii).

Portanto, em qualquer uma dessas possibilidades, como no 1º, existe em Q um circuito, o circuito $\hat{u}_{\delta'}$, nas condições da observação III.2.1.(c), o que acarreta pela mesma que Q contém um 2-ciclo ou um r -ciclo, $r \geq 3$, fora de R , cujos subcaminhos não são somandos de nenhum gerador de R . Novamente obtemos uma contradição às hipóteses sobre (Q, R) .

Logo, qualquer projetivo indecomponível é livre de multiplicidade. □

Observação III.2.2 : Queremos ressaltar agora que na demonstração deste último teorema, na verdade mostramos que todo circuito de Q está em R . Assim se no teorema acima, ao invés de impormos que Λ -ind seja determinada por fatores de composição, impusermos que todo circuito de Q é um elemento de R , o resultado se mantém. E a

demonstração, como a escrita acima, é baseada no lema III.2.1. Portanto, temos que os Λ -módulos projetivos indecomponíveis que não são simples, tem uma das seguintes representações, com relação ao seu suporte:

As duas primeiras representações nos mostram que os projetivos associados a elas são de tipo A_n , $n \geq 2$, sendo que na primeira o projetivo é uniserial e na segunda é não uniserial e o seu radical é soma direta de dois submódulos uniserais. A terceira representação é de um projetivo-injetivo P , que está sujeito a relação $P(u - v) = 0$, onde u e v denotam os caminhos paralelos do quiver de P .

Observação III.2.3 : Por dualidade, podemos inferir que os Λ -módulos injetivos indecomponíveis não simples, têm umas das representações opostas às de acima, ou seja:

As duas primeiras representações nos mostram que os injetivos a que correspondem são de tipo A_n , $n \geq 2$, onde o primeiro é uniserial e o segundo é não uniserial e é igual a soma de dois submódulos uniserais cuja intersecção é um simples. A terceira representação é de um injetivo-projetivo I , que está sujeito a relação $I(u - v) = 0$, onde u e v denotam os caminhos paralelos do quiver de I .

Observação III.2.4 : Se estamos nas hipóteses do teorema III.2.2, ou se trocamos apenas a hipótese de Λ -ind é determinada por fatores de composição por todo circuito de Q está em R , a observação anterior, nos diz que todo submódulo próprio de um injetivo indecomponível (uniserial ou não uniserial) é um Λ -módulo de tipo A_r , $r \geq 1$, cuja representação é uma das duas primeiras que aparecem na observação citada.

Surge agora a pergunta natural: Dada uma k -álgebra biserial, cujo quiver ordinário não contenha laços, a condição de que cada um de seus módulos indecomponíveis é unicamente determinado por seus fatores de composição é suficiente para garantir que cada um de seus módulos indecomponíveis é livre de multiplicidade?

Para as álgebras de Nakayma $\Lambda = k(Q, R)$, tais que Q não é um laço e Λ -ind é determinada por fatores de composição a resposta é afirmativa, segundo os teoremas II.2.2 e III.1.2.

E para as álgebras biseriais mais em geral?

Em [24], Pogorzaly e Skowroński estudaram esse problema para as álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado que são quociente de alguma álgebra hereditária (Lembra mos que tais álgebras são as álgebras de quiver (Q, R) tais que Q não contém laços, nem circuitos.).

O resultado que foi provado, por Pogorzaly e Skowroński, sobre k -álgebras que são quociente de hereditárias é o que segue.

Teorema III.2.3 : (teorema 1 em [24]) *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Suponhamos que Λ seja fator de uma álgebra hereditária. São equivalentes as seguintes condições:*

- (i) *Cada Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade;*
- (ii) *Λ é de tipo de representação finito. Schurian e $\beta(\Lambda) \leq 2$;*
- (iii) *Λ é de tipo de representação finito. $\beta(\Lambda) \leq 2$ e todo Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição;*
- (iv) *Λ é biserial e não existe nenhuma sequência de Λ -módulos locais, não isomorfos, $L_0, L_1, \dots, L_t$, com $t \geq 1$, tal que L_0 é uniserial, $L_1, \dots, L_t$ são não uniserials, $\text{soc } L_0 \cong S_0$, $\text{soc } L_i \cong S_{i-1} \oplus S_i$, para $i = 1, \dots, t$ e $\text{top } L_0 \cong S_t$.*

Nota: Lembramos que $\beta(\Lambda)$, no enunciado do teorema III.2.3, indica o maior número possível de somandos indecomponíveis, não projetivos e nem injetivos, do termo médio de qualquer ARS de Λ (cf. definição na página 12).

Com o objetivo de tecermos comentários sobre algumas consequências do teorema de Pogorzaly e Skowroński, bem como de estabelecermos algumas questões sobre algumas de suas condições, no caso em que a álgebra não seja fator de hereditária, vamos abordar mais alguns resultados sobre as álgebras biseriais de tipo de representação finito.

Auslander e Reiten, em [7], provaram que *qualquer álgebra de Artin de tipo de representação finito com $\beta(\Lambda) \leq 2$ é biserial*. No entanto, Skowroński e Waschbüsch, em

[31], estenderam esse resultado, no caso de álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, e provaram que *a classe das álgebras Λ de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado que são de tipo de representação finito e têm $\beta(\Lambda) \leq 2$ coincide com a classe das álgebras biseriais de tipo de representação finito* (corolário do teorema 1 em [31])

Estamos agora em condições de garantir nossa afirmação no início da seção III.1, com relação às álgebras hereditárias de tipo de representação finito.

Corolário III.2.1 : *Seja kQ uma álgebra de dimensão finita, conexa, hereditária de tipo de representação finito. Então $kQ\text{-ind}$ é livre de multiplicidade se e somente se o grafo subjacente ao quiver Q é um diagrama de Dynkin A_n .*

Demonstração: Como kQ é hereditária de tipo de representação finito, pelo teorema de Gabriel (teorema I.10.1) temos que o grafo subjacente a Q é um dos seguintes diagramas de Dynkin: A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 ou E_8 .

É fácil ver que, para qualquer orientação de qualquer um dos diagramas de Dynkin D_n , E_6 , E_7 ou E_8 , o quiver $(Q, R=(0))$ não satisfaz a condição (SP) 1 ou 2. Portanto, uma vez que $R=(0)$, pelo teorema III.2.1, as álgebras kQ , cujo grafo subjacente é um dos diagramas D_n , E_6 , E_7 ou E_8 não são biseriais; donde, pela proposição III.2.1, elas admitem módulos indecomponíveis que não são livres de multiplicidade. Logo, para as álgebras kQ , quando Q tem como grafo subjacente um dos diagramas D_n , E_6 , E_7 e E_8 , temos que $kQ\text{-ind}$ não é livre de multiplicidade.

Quanto à álgebra $\Lambda = kQ$, cujo grafo subjacente a Q é o diagrama A_n , também é fácil ver que, para qualquer orientação de A_n , os módulos projetivos indecomponíveis, à esquerda ou à direita, satisfazem a definição III.2.1 (de álgebra biserial). Portanto, elas são as únicas entre as hereditárias de tipo de representação finito que são biseriais. O corolário do teorema 1 em [31] garante então que esta álgebra é tal que $\beta(\Lambda) \leq 2$; logo, pelo teorema acima, $\Lambda\text{-ind}$ é livre de multiplicidade, uma vez que $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição. □

Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Recordemos que no capítulo II adotamos a expressão $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição para dizer que cada Λ -módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição. Consideremos então a propriedade:

Propriedade P.I : Λ é biserial e $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição.

Tendo em mente, que a classe das k -álgebras biseriais de tipo de representação finito coincide com a classe das k -álgebras de tipo finito tais que $\beta(\Lambda) \leq 2$, o teorema III.2.3, de

uma forma mais resumida, estabelece que quando Λ é quociente de uma álgebra hereditária as propriedades P.I e P.II são equivalentes.

E esta forma mais resumida deu origem, de maneira natural, a duas questões que são:

Questão 1. Se Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado tais que as propriedades P.I e P.II são verificadas então Λ é fator de alguma álgebra hereditária?

Questão 2. Se Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, cujo quiver ordinário admita um laço ou um circuito, alguma das implicações $P.I \Rightarrow P.II$ ou $P.II \Rightarrow P.I$ é sempre verdadeira?

A resposta à Questão 1 é negativa. Um contra-exemplo pode ser encontrado, conforme o teorema III.1.4, entre as álgebras de Nakayama, cujo quiver ordinário é um circuito formado de n flechas, com $n \geq 3$. Mais concretamente, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo III.2.1 : Seja $\Lambda = k(Q, R)$, onde Q é o quiver abaixo e R o sistema de relações dado por $\alpha\gamma = 0$ e $\gamma\beta = 0$.

A álgebra Λ dada é uma k -álgebra de Nakayama de dimensão 7. Os Λ -módulos projetivos indecomponíveis P_1, P_2, P_3 , são tais que $l(P_1) = 3$, que é o posto de $K_0(\Lambda)$, $l(P_2) = l(P_3) = 2$. Portanto, pelo teorema III.1.4, Λ -ind é determinada por fatores de composição e livre de multiplicidade. No entanto, Λ não é fator de nenhuma álgebra hereditária, pois seu quiver ordinário coincide com o quiver dado, que é um circuito.

Quanto à resposta da Questão 2, conforme dissemos na Introdução, é o objetivo desse trabalho responder.

A implicação $P.II \Rightarrow P.I$ nem sempre se verifica. Também entre as álgebras de Nakayama, cujo quiver é um circuito, podemos encontrar contra-exemplos desse fato. No entanto, vamos exibir um contra-exemplo em que a álgebra dada não é de Nakayama.

Exemplo III.2.2 : Seja a álgebra $\Lambda = k(Q, R)$, onde Q é o quiver abaixo e R o sistema de relações $\gamma\beta\alpha = 0$ e $\alpha\gamma = 0$.

É fácil ver $F^4 \subseteq R \subseteq F^2$ e que $\dim_k \Lambda = 12$. Os Λ -módulos projetivos indecomponíveis P_i , para $i = 2, 3, 4$, são uniseriais, com $l(P_2) = 4$, $l(P_3) = 3$ e $P_4 = S_4$. O projetivo

indecomponível P_1 é não uniserial e tal que $\text{rad } P_1 = P_4 \oplus N$, onde $N \cong P_2/\text{rad}^2 P_2$, e $[P_1] = [P_2]$.

Os Λ -módulos injetivos indecomponíveis I_i , para $i = 1, 2, 3, 4$ são uniserials e tais que $l(I_1) = l(I_3) = 3$, $I_4 \cong P_2$ e $l(I_2) = 2$. Portanto, Λ é biserial. No entanto, $\Lambda\text{-ind}$ não é determinada por fatores de composição, pois P_1 e P_2 são dois módulos indecomponíveis não isomorfos que têm os mesmos fatores de composição.

Para garantir que todo Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade, construímos o quiver de Auslander-Reiten, onde os módulos indecomponíveis estão representados na forma simplificada (i.e, com a indicação apenas das dimensões em cada vértice de Q), que apresentamos abaixo. Além disso, o quiver abaixo mostra também que o número de classes de isomorfia em $\Lambda\text{-ind}$ é exatamente 14.

Quanto à implicação $P.I \Rightarrow P.II$, o teorema III.2.2 garante que, se o quiver ordinário da álgebra não contém laços, $P.I$ implica que os projetivos indecomponíveis e os injetivos indecomponíveis são livres de multiplicidade.

III.3 Extensões indecomponíveis de um simples ou por um simples

No final da seção III.22, vimos que a condição $P.I$ implica que os módulos projetivos indecomponíveis e os injetivos indecomponíveis são livres de multiplicidade, quando supomos que o quiver ordinário da álgebra em questão não contém laços.

Queremos estender esta implicação a todos os módulos indecomponíveis. Para caminhar nesta direção, vamos nesta seção dar dois passos básicos e interdependentes.

O primeiro caracteriza localmente o quiver dos módulos indecomponíveis com relação aos vértices associados a somandos diretos do socle. O estudo da vizinhança de tais vértices no quiver de um módulo é efetivado através do teorema III.3.1 e seu corolário III.3.1.

O segundo passo, que é o teorema III.3.2, determina exatamente o número de somandos diretos indecomponíveis do quociente de um módulo indecomponível por um submódulo simples.

Para o que segue Λ denota uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, básica e conexa. Convencionaremos que ao nos referirmos a uma álgebra Λ que é biserial de tipo de representação finito, estamos assumindo que $\Lambda \cong k(Q, R)$, onde o quiver com relações (Q, R) é tal que satisfaz as condições (SP) do teorema III.2.1 e o quiver Q não contém flechas duplas (pela proposição II.3.2), nem subquivers do tipo $\tilde{A}_n$ sem relações (pela proposição II.3.3). Utilizaremos para os módulos em $\Lambda\text{-mod}$ as notações das k -representações, introduzidas no capítulo I.

Começamos provando o seguinte lema técnico.

Lema III.3.1 : *Seja Λ uma álgebra biserial de tipo de representação finito tal que Q não contenha laços e todo circuito de Q esteja em R . Sejam N um Λ -módulo, com $l(N) \geq 2$, e $v \in N$ tal que o simples $S = kv \subseteq N$ não é somando direto de N . Denotemos por i_s o vértice de Q ao qual S está associado.*

(i) *Então existe pelo menos um caminho $\bullet \xrightarrow{\sigma_r} \bullet \xrightarrow{\sigma_{r-1}} \cdots \bullet \xrightarrow{\sigma_2} \bullet \xrightarrow{\sigma_1} \bullet_{y_0=i_s}$, $r \geq 1$, e existe uma família $(v_r, v_{r-1}, \dots, v_1, v_0 = v)$, com $v_i \in N(y_i)$ para $0 \leq i \leq r$, tais que $N(y_i) = k(v_i) \oplus N'(y_i)$, $N(\sigma_i)(v_i) = v_{i-1} \in N(\sigma_i)(N'(y_i)) \subseteq N'(y_{i-1})$ para $1 \leq i \leq r$, e $\text{Im } N(\delta) \subseteq N'(y_r)$, para qualquer flecha δ com vértice final em y_r .*

(ii) *Se existir em Q as flechas $\sigma : y \rightarrow i_s$ e $\bar{\sigma} : \bar{y} \rightarrow i_s$, com $\sigma \neq \bar{\sigma}$, tais que $v \in \text{Im } N(\sigma) \cap \text{Im } N(\bar{\sigma})$ então existe em Q_N , quiver próprio de N , um subquiver $\bullet \xrightarrow{\sigma_r} \bullet \xrightarrow{\sigma_{r-1}} \cdots \bullet \xrightarrow{\sigma_2} \bullet \xrightarrow{\sigma_1} \bullet_{y_0=i_s} \xleftarrow{\bar{\sigma}_1} \bullet \xleftarrow{\bar{\sigma}_2} \cdots \xleftarrow{\bar{\sigma}_r} \bullet$, com $r, m \geq 1$, $\sigma_1 = \sigma$, $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$. Para este subquiver existem as famílias $(v_r, v_{r-1}, \dots, v_1, v_0 = v)$, onde $v_i \in N(y_i)$, $0 \leq i \leq r$, $(\bar{v}_m, \bar{v}_{m-1}, \dots, \bar{v}_1, \bar{v}_0 = v)$, onde $\bar{v}_i \in N(\bar{y}_i)$, $0 \leq i \leq m$, para as quais $N(y_i) = kv_i \oplus N'(y_i)$, $N(\sigma_i)(v_i) = v_{i-1}$, $N(\sigma_i)(N'(y_i)) \subseteq N'(y_{i-1})$, $1 \leq i \leq r$, $N(\bar{y}_i) = \bar{v}_i \oplus N'(\bar{y}_i)$, $N(\bar{\sigma}_i)(\bar{v}_i) = \bar{v}_{i-1}$, $N(\bar{\sigma}_i)(N'(\bar{y}_i)) \subseteq N'(\bar{y}_{i-1})$, $1 \leq i \leq m$. Além disso, $\text{Im } N(\delta) \subseteq N'(y_r)$, para toda flecha δ que termina em y_r e $\text{Im } N(\bar{\delta}) \subseteq N'(\bar{y}_m)$, para toda flecha $\bar{\delta}$ que termina em $\bar{y}_m$.*

Demonstração: Observemos primeiramente que dos fatos de que Q não contém laços e de que todo circuito está em R , pela observação III.2.3, cada Λ -módulo injetivo indecomponível I é de tipo A_n ou um biserial livre; portanto, $I(x) \cong k$, para todo $x \in \text{sup } I$, e $I(\alpha) \cong 1$, para toda flecha α em Q_I , quiver de I .

Consideremos $N(i_s) = kv \oplus N'(i_s)$. Sejam $\iota: S \hookrightarrow N$ a inclusão de $S = kv$ em N e $j: S \hookrightarrow I_S$ a envolvente injetiva de S .

Existe um k -morfismo $\lambda = (\lambda_x)_x: N \rightarrow I_S$ tal que $\lambda \circ \iota = j$. Como $I_S(i_s) = kv$, então $\ker \lambda_{i_s} = N'(i_s)$.

Como S não é somando direto de N , então o submódulo $\text{Im} \lambda$ de I_S contém propriamente S ; ou seja $\text{Im} \lambda$ é indecomponível de comprimento maior ou igual a 2. Logo, por ser I_S , como comentamos acima, de tipo A_n ou um biserial livre, existe pelo menos um caminho $\mu: y_r \xrightarrow{\sigma_r} y_{r-1} \dots y_2 \xrightarrow{\sigma_2} y_1 = y \xrightarrow{\sigma_1} y_0 = i_s$, $r \geq 1$, contido no quiver de $\text{Im} \lambda$ tal que $(\text{Im} \lambda_{y_i})(\sigma_i) \cong \mathbb{1}$, $0 \leq i \leq r$, e $\lambda_x = 0$, para os vértices x que são origem de alguma flecha que termina em y_r . Em outras palavras, μ é o caminho de maior comprimento que termina em σ_1 que tem a propriedade $(\text{Im} \lambda)(\mu) \cong \mathbb{1}$. Além disso, para cada $i = 1, 2, \dots, r$, como $\lambda_{y_i} \neq 0$, cada diagrama como o que segue é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} N(y_i) & \xrightarrow{\lambda_{y_i}} & I_S(y_i) \cong k \\ \downarrow N(\sigma) & & \downarrow \cong 1 \\ N(y_{i-1}) & \xrightarrow{\lambda_{y_{i-1}}} & I_S(y_{i-1}) \cong k \end{array}$$

Uma vez que $\text{Im} \lambda \cong N/\ker \lambda$, e da comutatividade dos diagramas mencionados, podemos escolher, de modo conveniente, uma família de elementos $(v_r, v_{r-1}, \dots, v_1, v_0 = v)$, com os $v_i \in N(y_i)$, tais que $N(y_i) = kv_i \oplus N'(y_i)$, com $N'(y_i) = \ker \lambda_{y_i}$ e de forma que $N(\sigma_i)(v_i) = v_{i-1}$ e $N(\sigma_i)(N'(y_i)) \subseteq N'(y_{i-1})$, para $1 \leq i \leq r$. De $\lambda_x = 0$, para os vértices x que são origem de alguma flecha que termina em y_r , resulta que $\lambda_{y_r} \circ N(\delta) = 0$, para toda flecha δ que termina em y_r ; ou seja, $\text{Im} N(\delta) \subseteq \ker \lambda_{y_r} = N'(y_r)$. Assim a parte (i) está provada.

Sejam $\sigma: y \rightarrow i_s$ e $\bar{\sigma}: \bar{y} \rightarrow i_s$, duas flechas distintas em Q para as quais $v \in \text{Im} N(\sigma) \cap \text{Im} N(\bar{\sigma})$. Como Q não contém laços, nem flechas múltiplas, então $\bar{y} \notin \{y, i_s\}$. Neste caso temos que I_S é um injetivo não uniserial e é fácil ver que o comprimento de $\text{Im} \lambda$ é maior ou igual 3 e λ_y e $\lambda_{\bar{y}}$, são não nulas. Portanto, $\text{Im} \lambda$ é um submódulo, não uniserial de I_S , contendo propriamente S , cujo quiver próprio é do tipo: $y_r \xrightarrow{\sigma_r} y_{r-1} \dots y_2 \xrightarrow{\sigma_2} y_1 = y \xrightarrow{\sigma_1} y_0 = i_s \xleftarrow{\bar{\sigma}_1} \bar{y}_1 = \bar{y} \xleftarrow{\bar{\sigma}_2} \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{m-1} \xleftarrow{\bar{\sigma}_m} \bar{y}_m$, com $r, m \geq 1$, $\sigma_1 = \sigma$, $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$.

Queremos chamar a atenção para o fato de que podemos ter $\bar{y}_m = y_r$, que é o caso em que I_S é um biserial livre e λ um epimorfismo.

E o resto da demonstração segue de modo análogo a parte (i), uma vez que existem exatamente duas flechas distintas em Q que terminam em i_s e para cada uma dessas flechas existe exatamente um caminho, fora de R , de comprimento maximal que termina nessa flecha, sendo que esses dois caminhos ou são paralelos ou têm apenas o vértice terminal em comum. □

Observação III.3.1 : Queremos agora chamar a atenção para alguns fatos que decorrem do lema acima. Sejam, então, Λ e N nas hipóteses do lema III.3.1.

(1) A afirmação de que, para toda δ que termina em y_r , $Im N(\delta) \subseteq N'(y_r)$ é equivalente a que o simples $T = kv_r$ é um somando direto do $top N$, conforme a proposição I.7.1.(i).

(2) Suponhamos que $\sigma : y \rightarrow i_s$ e $\bar{\sigma} : \bar{y} \rightarrow i_s$ sejam flechas distintas de Q , de forma que $v \in Im N(\sigma)$, mas $v \notin Im N(\bar{\sigma})$. É fácil verificar, nestas condições, que é possível escolher uma base conveniente de $N(\bar{y})$ de forma que a imagem dos vetores dessa base, sobre o k -morfismo linear $N(\bar{\sigma})$, estejam em $N'(i_s)$ e, portanto, comute o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} N(\bar{y}) & \xrightarrow{\lambda_{\bar{y}}=0} & I_S(\bar{y}) \cong k \\ N(\bar{\sigma}) \downarrow & & \downarrow \cong \mathbb{I} \\ kv \oplus N'(i_s) & \xrightarrow{\lambda_{i_s}} & I_S(i_s) \cong k \end{array}$$

Observação III.3.2 : Sejam Λ e N nas hipóteses do lema 3.1 acima. Usando a observação acima e as propriedades de (Q, R) , em particular a (SP) 2, podemos descrever mais detalhadamente $N = (N(x)_x, N(\alpha)_\alpha)$, com relação aos vértices y_i , $0 \leq i \leq r$, e $\bar{y}_i$, $1 \leq i \leq m$, conforme v esteja ou não em $Im N(\sigma) \cap Im N(\bar{\sigma})$, bem como os k -morfismos lineares $N(\alpha)$, quando α são flechas que incidem em tais vértices.

A condição (SP) 2, garante-nos que se α é uma flecha, com $o(\alpha) = y_i$, mas distinta de σ_i , $1 \leq i \leq r-1$, então $N(\alpha)(v_i) = 0$, pois uma vez que $N(\sigma_i \circ \sigma_{i+1})(v_{i+1}) = v_{i-1} \neq 0$ implica que $N(\alpha \circ \sigma_{i+1}) = 0$. Analogamente, se α é uma flecha, com $e(\alpha) = y_i$, mas $\alpha \neq \sigma_{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$, então $Im N(\alpha) \subseteq N'(y_i)$, $1 \leq i \leq r$.

Vejamos então a descrição, conforme os dois casos:

1º caso: $v \in Im N(\sigma)$ e $v \notin Im N(\bar{\sigma})$

$N(y_i) = kv_i \oplus N'(y_i)$ para $0 \leq i \leq r$, onde $v_0 = v$ e $y_0 = i_s$.

Para as flechas α que incidem nos vértices $\bar{y}$, y_i , $0 \leq i \leq r$, temos:

(f.1) Se $\alpha = \sigma_i$, $1 \leq i \leq r$ então $N(\sigma_i)(v_i) = v_{i-1}$ e $Im N'(\sigma_i) \subseteq N'(y_{i-1})$;

(f.2) Se $\alpha \neq \sigma_i$, $1 \leq i \leq r-1$, com $o(\alpha) = y_i$ ou se $o(\alpha) = i_s$ então $N(\alpha)(v_i) = 0$, $0 \leq i \leq r-1$;

(f̄) Se $\alpha = \bar{\sigma}$ então $Im N(\bar{\sigma}) \subseteq N'(i_s)$;

(f.3) Se $\alpha \neq \sigma_{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$, com $e(\alpha) = y_i$ ou se $e(\alpha) = y_r$ então $\text{Im } N(\alpha) \subseteq N'(y_i)$, $1 \leq i \leq r$,

onde $\sigma_1 = \sigma$ e, com abuso de notação, $N'(\alpha)$ indica a restrição de $N(\alpha)$ a $N'(o(\alpha))$.

2º caso: Se $v \in \text{Im } N(\sigma) \cap \text{Im } N(\bar{\sigma})$

$$N(x) = \begin{cases} kv_i \oplus N'(y_i) & \text{se } x = y_i, 0 \leq i \leq r; \\ k\bar{v}_i \oplus N'(\bar{y}_i) & \text{se } x = \bar{y}_i, 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Com relação às flechas α que incidem nos vértices y_i , $0 \leq i \leq r$, e $\bar{y}_i$, $1 \leq i \leq m$, valem as condições (f.1), (f.2) e (f.3) do 1º caso e mais os seguintes:

(f.4) Se $\alpha = \bar{\sigma}_i$, $1 \leq i \leq m$, então $N(\bar{\sigma}_i)(\bar{v}_i) = \bar{v}_{i-1}$ e $\text{Im } N'(\bar{\sigma}_i) \subseteq N'(\bar{y}_{i-1})$;

(f.5) Se $\alpha \neq \bar{\sigma}_i$, $o(\alpha) = \bar{y}_i$, $1 \leq i \leq m-1$, então $N(\alpha)(\bar{v}_i) = 0$, para $1 \leq i \leq m-1$;

(f.6) Se $\alpha \neq \bar{\sigma}_{i+1}$, $e(\alpha) = \bar{y}_i$, $1 \leq i \leq m-1$, ou se $e(\alpha) = \bar{y}_m$ então $\text{Im } N(\alpha) \subseteq N'(\bar{y}_i)$, para $1 \leq i \leq m$.

O lema III.3.1 e as observações III.3.1 e III.3.2 nos permitem estabelecer o teorema abaixo que, por sua vez, permite estabelecer uma relação entre indecomponibilidade de um módulo e o número de flechas do quiver do módulo que terminam nos vértices associados aos somandos do seu socle.

Teorema III.3.1 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, tal que Q não contém laços e todo circuito de Q está em R . Seja M em $\Lambda\text{-mod}$ tal que $M = N + X$, com $l(N), l(X) \geq 2$ e existe um vetor, não nulo, $v \in M$ de forma que $N \cap X = kv$. Denotemos por S o simples kv e por i_s o vértice de quiver Q ao qual S está associado .*

Se existe uma flecha σ terminando em i_s para a qual $v \in \text{Im } N(\sigma) \cap \text{Im } X(\sigma)$ então M é decomponível.

Demonstração : De um lado, temos que $M(\alpha)(v) = 0$, para toda flecha α de Q , que tem origem em i_s , pois $kv \subseteq M$. De outro lado, colocando $N(i_s) = kv \oplus N'(i_s)$ e $X(i_s) = kv \oplus X'(i_s)$, podemos reescrever $M = (M(x)_x, M(\alpha)_\alpha)$ da seguinte forma:

$$(1) \quad \begin{aligned} M(x) &= \begin{cases} N(x) \oplus X(x) & \text{se } x \neq i_s \\ kv \oplus N'(i_s) \oplus X'(i_s) & \text{se } x = i_s \end{cases} \\ M(\alpha) &= \begin{cases} N(\alpha) \oplus X(\alpha) & \text{se } o(\alpha) \neq i_s \text{ e } e(\alpha) \neq i_s; \\ N(\alpha) + X(\alpha) & \text{se } e(\alpha) = i_s \\ N'(\alpha) \oplus X'(\alpha) & \text{se } o(\alpha) = i_s, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $X'(\alpha)$ e $N'(\alpha)$ indicam, respectivamente, a restrição de $X(\alpha)$ ao subespaço $X(o(\alpha))$ e de $N(\alpha)$ ao subespaço $N(o(\alpha))$. Além disso, como $S = kv$ não é somando direto de M , é imediato que S não é somando direto de N e nem de X .

Seja, então, uma flecha $\sigma : y \rightarrow i_s$ tal que $v \in \text{Im } N(\sigma) \cap \text{Im } X(\sigma)$. Do lema III.3.1 parte (i) e da observação III.3.2, aplicados a N , X e a σ , temos que existe um caminho $\sigma_1 \mu: y_r \xrightarrow{\sigma_r} y_{r-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_{s+1}} y_s \xrightarrow{\sigma_s} y_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow y_2 \xrightarrow{\sigma_2} y_1 = y \xrightarrow{\sigma_1} y_0 = i_s$, com $1 \leq s \leq r$, $\sigma_1 = \sigma$. Para este caminho, existem as famílias $(v_r, v_{r-1}, \dots, v_1, v_0 = v)$ e $(w_s, w_{s-1}, \dots, w_1, w_0 = v)$, $v_i \in N(y_i)$, com $0 \leq i \leq r$, $w_j \in X(y_j)$, com $0 \leq j \leq s$, tais que $X(y_j) = kw_j \oplus X'(y_j)$, $0 \leq j \leq s$, $N(y_i) = kv_i \oplus N'(y_i)$, $0 \leq i \leq r$, e tais que os k -morfismos $X(\alpha)$, $N(\alpha)$, quando α é uma flecha de Q_M que incide num dos vértices y_i , são como em (f.1), (f.2) e (f.3).

Analisemos agora X e N , com relação às possibilidades das flechas que terminam em i_s , que são no máximo em número de duas por (SP) 1. Já temos, por hipótese, que existe uma $\sigma : y \rightarrow i_s$ tal que $v \in \text{Im } N(\sigma) \cap \text{Im } X(\sigma)$. Se existir uma $\bar{\sigma} : \bar{y} \rightarrow i_s$ em Q , distinta de σ , temos que $y \neq \bar{y}$ e os seguintes casos a analisar:

- I. $v \notin \text{Im } N(\bar{\sigma}) + \text{Im } X(\bar{\sigma})$;
- II. $v \in \text{Im } X(\bar{\sigma})$ e $v \notin \text{Im } N(\bar{\sigma})$ ou $v \notin \text{Im } X(\bar{\sigma})$ e $v \in \text{Im } N(\bar{\sigma})$;
- III. $v \in \text{Im } X(\bar{\sigma}) \cap \text{Im } N(\bar{\sigma})$.

Faremos a demonstração para um dos casos de II e para o caso III, pois os demais têm demonstração absolutamente análoga.

Caso II. Isto é, $v \in \text{Im } N(\bar{\sigma})$ e $v \notin \text{Im } X(\bar{\sigma})$.

Por (ii) do lema III.3.1, aplicado a N , temos que existe em Q_N , um subquiver $\mu: y_r \xrightarrow{\sigma_r} y_{r-1} \dots \rightarrow y_s \xrightarrow{\sigma_s} \dots \rightarrow y_2 \xrightarrow{\sigma_2} y_1 = y \xrightarrow{\sigma_1} y_0 = i_s \xleftarrow{\bar{\sigma}_1} \bar{y}_1 = \bar{y} \xleftarrow{\bar{\sigma}_2} \bar{y}_2 \leftarrow \dots \bar{y}_{m-1} \xleftarrow{\bar{\sigma}_m} \bar{y}_m$, com $r, m \geq 1$, $\sigma_1 = \sigma$, $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$, e uma família de $\bar{v}_i \in N(\bar{y}_i)$, $0 \leq i \leq m$, $\bar{v}_0 = v$ tais que $N(\bar{y}_i) = k\bar{v}_i \oplus N'(\bar{y}_i)$, $0 \leq i \leq m$, e os k -morfismos $N(\alpha)$ são como em (f.1), (f.2), ..., (f.6) na observação III.3.2, quando α é uma flecha que incide num dos vértices $\bar{y}_i$, $1 \leq i \leq m$. Sobre os vértices y_i , $0 \leq i \leq r$ e sobre as flechas que neles incidem, N e X são como acima.

Além disso, de $v \notin \text{Im } X(\bar{\sigma})$, pelo item (2) da observação III.3.1, resulta que $\text{Im } X(\bar{\sigma}) \subseteq X'(i_s)$.

Vamos mostrar que, neste caso, N é um somando direto de M , tendo X/kv como um módulo suplementar.

Seja $\iota = (\iota_x)_x: N \rightarrow M$, onde $\iota_x: N(x) \rightarrow M(x)$ é a inclusão do subespaço $N(x)$ em $M(x)$. É imediato que ι é um monomorfismo de k -representações.

Afirmamos que ι cinde, ou seja existe um morfismo de representações $p = (p_x)_x: M \rightarrow N$ tal que $p \circ \iota = \text{Id}_N$. De fato, consideremos $p = (p_x)_x$, onde $p_x: M(x) \rightarrow N(x)$ é a função definida, em cada vértice x de Q da seguinte forma:

Se $x \neq y_i$, $1 \leq i \leq s$, p_x é a projeção canônica de $M(x) = N(x) \oplus X(x)$ sobre $N(x)$;

Se $x = y_i, 1 \leq i \leq s$, definimos $p_{y_i}: kv_i \oplus N'(y_i) \oplus kw_i \oplus X'(y_i) \rightarrow kv_i \oplus N'(y_i)$ por $p_{y_i}(av_i + n' + bw_i + x') = (a + b)v_i + n'$, onde $a, b \in k, n' \in N'(y_i), x' \in X'(y_i)$.

É claro que p_x é um k -epimorfismo linear e $p_x \circ \iota_x = \mathbb{I}_{N(x)}$, para cada $x \in Q_0$. Pela definição I.5.2, para garantir que a família $(p_x)_x$ é morfismo de k -representações em (Q, R) , temos que verificar que para cada flecha $\alpha: x \rightarrow z$ em Q , vale que $N(\alpha) \circ p_x = p_z \circ M(\alpha)$. Faremos a verificação da igualdade apenas para alguns tipos de flechas que incidem nos vértices $y_i, \bar{y}_j$, pois para as demais os argumentos são similares. Vejamos:

(a) Se $\alpha = \sigma_i: y_i \rightarrow y_{i-1}, 1 \leq i \leq s$, então, para $a, b \in k, x' \in X'(y_i)$ e $n' \in N'(y_i)$,

$$\begin{aligned} (N(\sigma_i) \circ p_{y_i})(av_i + n' + bw_i + x') &= N(\sigma_i)((a + b)v_i + n') \stackrel{(f.1)}{=} (a + b)v_{i-1} + N'(\sigma_i)(n') \\ &\quad \text{e} \\ (p_{y_{i-1}} \circ M(\sigma_i))(av_i + n' + bw_i + x') &\stackrel{(1)}{=} p_{y_{i-1}}(N(\sigma_i)(av_i + n') + X(\sigma_i)(bw_i + x')) \stackrel{(f.1)}{=} \\ p_{y_{i-1}}(av_{i-1} + N'(\sigma_i)(n') + bw_{i-1} + X'(\sigma_i)(x')) &= (a + b)v_{i-1} + N'(\sigma_i)(n'). \end{aligned}$$

(b) Se $\alpha = \bar{\sigma}_j: \bar{y}_j \rightarrow \bar{y}_{j-1}, 1 \leq j \leq m$, então, para $a \in k, n' \in N'(\bar{y}_j)$ e $x \in X(\bar{y}_j)$,

$$\begin{aligned} (N(\bar{\sigma}_j) \circ p_{\bar{y}_j})(a\bar{v}_j + n' + x) &= N(\bar{\sigma}_j)(a\bar{v}_j + n') \stackrel{(f.4)}{=} a\bar{v}_{j-1} + N'(\bar{\sigma}_j)(n') \\ &\quad \text{e} \\ (p_{\bar{y}_{j-1}} \circ M(\bar{\sigma}_j))(a\bar{v}_j + n' + x) &\stackrel{(1)}{=} p_{\bar{y}_{j-1}}(N(\bar{\sigma}_j)(a\bar{v}_j + n') + X(\bar{\sigma}_j)(x)) \stackrel{(f.4)}{=} \\ p_{\bar{y}_{j-1}}(a\bar{v}_{j-1} + N'(\bar{\sigma}_j)(n') + X(\bar{\sigma})(x)) &= a\bar{v}_{j-1} + N'(\bar{\sigma}_j)(n'). \end{aligned}$$

(c) Se $\alpha: y_i \rightarrow x, \alpha \neq \sigma_i, s + 1 \leq i \leq r - 1$, então, para $a \in k, n' \in N'(y_i)$ e $x \in X(y_i)$,

$$\begin{aligned} (N(\alpha) \circ p_{y_i})(av_i + n' + x) &= N(\alpha)(av_i + n') \stackrel{(f.2)}{=} N'(\alpha)(n') \\ &\quad \text{e} \\ (p_x \circ M(\alpha))(av_i + n' + x) &\stackrel{(1)}{=} p_x(N(\alpha)(av_i + n') + X(\alpha)(x)) \stackrel{(f.2)}{=} p_x(N'(\alpha)(n') + X(\alpha)(x)) \\ &= N'(\alpha)(n'). \end{aligned}$$

Portanto, a inclusão ι de N em M é um monomorfismo de k -representações que cinde; e é fácil ver que o *coker* ι é a k -representação X/kv ; donde $M = N \oplus X/kv$

Caso III. Ou seja, $v \in \text{Im } N(\bar{\sigma}) \cap \text{Im } X(\bar{\sigma})$

Por (ii) do lema III.3.1, aplicado aos módulos X e N , existe em Q_N um subquiver $\mu_N: y_r \xrightarrow{\sigma_r} y_{r-1} \dots \rightarrow y_s \xrightarrow{\sigma_s} \dots \rightarrow y_2 \xrightarrow{\sigma_2} y_1 = y \xrightarrow{\sigma_1} y_0 = i_s \xleftarrow{\bar{\sigma}_1} \bar{y}_1 = \bar{y} \xleftarrow{\bar{\sigma}_2} \bar{y}_2 \leftarrow \dots \bar{y}_{m-1} \xleftarrow{\bar{\sigma}_m} \bar{y}_m$, com $r, m \geq 1, \sigma_1 = \sigma, \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$, e existe no quiver Q_X de X um subquiver μ_X

$\mu_X: y_s \xrightarrow{\sigma_1} \dots \rightarrow y_2 \xrightarrow{\sigma_2} y_1 = y \xrightarrow{\sigma_1} y_0 = i_s \xleftarrow{\bar{\sigma}_1} \bar{y}_1 = \bar{y} \xleftarrow{\bar{\sigma}_2} \bar{y}_2 \leftarrow \dots \bar{y}_{q-1} \xleftarrow{\bar{\sigma}_q} \bar{y}_q$, com $q \geq 1$, $1 \leq s \leq r$, $\sigma_1 = \sigma$, $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$. Para estes caminhos, existem as famílias de elementos $\bar{v}_i \in N(\bar{y}_i)$, $0 \leq i \leq m$, $\bar{w}_j \in X(\bar{y}_j)$, $0 \leq j \leq q$, $\bar{v}_0 = \bar{w}_0 = v$, tais que $N(\bar{y}_i) = k\bar{v}_i \oplus N'(\bar{y}_i)$, $0 \leq i \leq m$, e $X(\bar{y}_j) = k\bar{w}_j \oplus X'(\bar{y}_j)$, $0 \leq j \leq q$, e os k -morfismos lineares $X(\alpha)$ e $N(\alpha)$ são como em (f.4), (f.5) e (f.6) da observação III.3.2, para o caso em que α é flecha que incide $\bar{y}_i$. Como no caso anterior, sobre os vértices y_i e sobre as flechas que incidem nestes vértices N e X já estão dados no início.

Como todos os caminhos de Q , fora de R , que terminam em $\bar{\sigma}$, pela (SP) 2, estão ordenados pelo seu comprimento e $s \leq r$, temos μ_N é um subquiver de μ_X ou μ_X é um subquiver de μ_N . Portanto, $q \leq m$ ou $m \leq q$.

No primeiro caso, com as mesmas construções que fizemos no caso II, é possível provar que N é um somando de M , tendo X/kv como um módulo suplementar.

Suponhamos, então, que $1 \leq m \leq q$.

Seja $Z = (Z(x)_x, Z(\alpha)_\alpha)$ onde:

$$Z(x) = \begin{cases} kv_i \oplus N'(y_i) \oplus X'(y_i) & \text{se } x = y_i, 0 \leq i \leq s; \\ kv_i \oplus N'(y_i) \oplus X(y_i) & \text{se } x = y_i, s+1 \leq i \leq r; \\ N'(\bar{y}_j) \oplus k\bar{w}_j \oplus X'(\bar{y}_j) & \text{se } x = \bar{y}_j, 1 \leq j \leq m; \\ N(\bar{y}_j) \oplus k\bar{w}_j \oplus X'(\bar{y}_j) & \text{se } x = \bar{y}_j, m+1 \leq j \leq q; \\ N(x) \oplus X(x) & \text{para os demais vértices.} \end{cases}$$

e

$$Z(\alpha) = \begin{cases} N(\sigma_i) \oplus X'(\sigma_i) & \text{se } \alpha = \sigma_i, 1 \leq i \leq s; \\ N'(\bar{\sigma}_i) \oplus X(\bar{\sigma}_i) & \text{se } \alpha = \bar{\sigma}_i, 1 \leq i \leq m; \\ N(\alpha) \oplus X(\alpha) & \text{para as demais flechas.} \end{cases}$$

sendo que $N'(\bar{\sigma}_i)$ e $X'(\sigma_i)$ indicam, respectivamente, a restrição de $N(\bar{\sigma}_i)$ ao subespaço $N(\bar{y}_i)$ e de $X(\sigma_i)$ ao subespaço $X(y_i)$, e os k -morfismos lineares $N(\alpha)$, $X(\alpha)$ satisfazem (f.1), (f.2), $\dots$, (f.6) da observação III.3.2, para o caso em α tem seus vértices incidentes entre os vértices y_i , $0 \leq i \leq r$, e $\bar{y}_j$, $1 \leq j \leq q$.

Claramente temos que Z é uma k -representação de (Q, R) , uma vez que é fácil verificar que $Z(\rho) = 0$, para todo $\rho \in R$.

Seja agora a família $\iota = (\iota_x)_x: Z \rightarrow M$, onde $\iota_x: Z(x) \rightarrow M(x)$ é a inclusão do espaço vetorial $Z(x)$ em $M(x)$. Verifica-se trivialmente que ι faz de Z uma subrepresentação de M e afirmamos que esse morfismo admite um morfismo inverso à esquerda.

De fato, consideremos $p = (p_x)_x: M \rightarrow Z$, onde $p_x: M(x) \rightarrow Z(x)$, para cada vértice x de Q , é a função dada por:

Se $x = y_i$, $1 \leq i \leq s$, definimos $p_{y_i}: kv_i \oplus N'(y_i) \oplus kw_i \oplus X'(y_i) \rightarrow kv_i \oplus N'(y_i) \oplus X'(y_i)$ por $p_{y_i}(av_i + n' + bw_i + x') = (a+b)v_i + n' + x'$, onde $a, b \in k$, $x' \in X'(y_i)$ e $n' \in N'(y_i)$;

Se $x = \bar{y}_i$, $1 \leq i \leq m$, definimos $p_{\bar{y}_i} : k\bar{v}_i \oplus N'(\bar{y}_i) \oplus k\bar{w}_i \oplus X'(\bar{y}_i) \longrightarrow N'(\bar{y}_i) \oplus k\bar{w}_i \oplus X'(\bar{y}_i)$ por $p_{\bar{y}_i}(a\bar{v}_i + n' + b\bar{w}_i + x') = (a + b)\bar{w}_i + n' + x'$, onde $a, b \in k$, $n' \in N'(\bar{y}_i)$ e $x' \in X'(\bar{y}_i)$;

Para os demais vértices x , definimos $p_x : N(x) \oplus X(x) \longrightarrow N(x) \oplus X(x)$ como sendo a função identidade.

É trivial verificar que, para cada x , p_x é k -morfismo linear e que $p_x \circ \iota_x = \text{id}_{Z(x)}$. Para mostrar que p é morfismo de k -representações de $k(Q, R)$, o procedimento é análogo ao que utilizamos no caso II e por isso deixaremos de repeti-lo aqui. Logo, Z é uma subrepresentação de M , que é um somando direto de M , com um suplementar não trivial. Ou seja, $M = Z \oplus Z'$, onde $S = kv \subseteq Z$. □

Corolário III.3.1 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, cujo quiver Q não contém laços e todo circuito de Q está em R . Seja $M = N + X$, com $l(N), l(X) \geq 2$ e $N \cap X = S$, onde S é um módulo simples. Sejam $v \in M$ tal que $S = kv$ e i_s o vértice correspondente a S em Q . Se M é indecomponível então existe um única flecha $\sigma : y \longrightarrow i_s$ tal que $v \in \text{Im } N(\sigma)$ e existe uma única flecha $\bar{\sigma} : \bar{y} \longrightarrow i_s$, com $\sigma \neq \bar{\sigma}$, tal que $v \in \text{Im } X(\bar{\sigma})$.*

Demonstração : Como M é indecomponível então S não é somando direto de M , o que traz como consequência que S não é somando direto de N e nem de X . Logo, o lema III.3.1 garante-nos que existe pelo menos uma flecha $\sigma : y \longrightarrow i_s$ tal que $v \in \text{Im } N(\sigma)$ e pelo menos uma flecha $\bar{\sigma} : \bar{y} \longrightarrow i_s$ tal que $v \in \text{Im } X(\bar{\sigma})$. Pelo teorema III.3.1, por ser M indecomponível segue que $\sigma \neq \bar{\sigma}$ e que σ é a única com a propriedade $v \in \text{Im } N(\sigma)$ e analogamente para $\bar{\sigma}$, em relação a X . □

Teorema III.3.2 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, cujo quiver Q não contém laços e todo circuito em Q está em R . Sejam M um Λ -módulo e S um módulo simples tais que $S \subseteq M$ e $M/S = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t$, com $t \geq 2$ e M_j indecomponível, $j = 1, 2, \dots, t$. Se M é indecomponível então $t = 2$.*

Demonstração : Seja $v \in M$, não nulo, tal que $S = kv \subseteq M$.

Seja $\pi : M \longrightarrow M/S = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$, $t \geq 2$, o epimorfismo canônico. Para cada $j = 1, 2, \dots, t$, indiquemos $N_j = \pi^{-1}M_j$ a imagem recíproca de M_j por meio de π . É claro que $M = \sum_{j=1}^t N_j$ e $N_i \cap N_j = S$, quando $i \neq j$. Além disso, $N_j/kv = M_j$, para $1 \leq j \leq t$.

As hipóteses sobre M e M/S garantem, de um lado, que S não é somando direto de N_j e, de outro, que N_j é também indecomponível, qualquer que seja $j = 1, 2, \dots, t$.

Suponhamos, por absurdo, que $t \geq 3$.

Escrevemos, então, $M = N_1 + X$, onde $X = N_2 + N_3 + \dots + N_t$. Temos, pois, que $N_1 \cap X = kv$. Por ser M indecomponível, o corolário III.3.1 garante-nos que existe uma única flecha σ terminando em i_s tal que $v \in \text{Im } N_1(\sigma)$ e uma única flecha $\bar{\sigma}$, terminando também em i_s , tal que $v \in \text{Im } X(\bar{\sigma})$, com σ distinta de $\bar{\sigma}$.

Logo, do lema III.3.1, aplicado a cada N_j , $j \geq 2$ (pois S não é somando direto de N_j) e do fato de que $\bar{\sigma}$ é a única flecha que termina em i_s tal que $v \in \text{Im } X(\bar{\sigma}) = \sum_{j=2}^t \text{Im } N_j(\bar{\sigma})$, segue que $v \in \text{Im } N_j(\bar{\sigma})$, para todo $j = 2, 3, \dots, t$.

Aplicando o teorema III.3.1 ao módulo $X' = N_2 + (N_3 + \dots + N_t)$, resulta que $X' = X_1 \oplus X_2$, com $X_i \neq (0)$, $i = 1, 2$, e onde $S = kv \subseteq X_1$.

Portanto, $M = N_1 + (X_1 \oplus X_2) = X_2 + (N_1 + X_1)$. Usando o fato de que $M/S = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t$ e a construção dos $N_j = \pi^{-1}M_j$, $1 \leq j \leq t$, deduzimos que $X_2 \cap (N_1 + X_1) = (0)$; donde $M = X_2 \oplus (N_1 + X_1)$, o que contraria a hipótese de que M é indecomponível. $\square$

Os resultados que estabelecemos até agora, nesta seção, baseiam-se fundamentalmente na existência de caminhos de (Q, R) , fora de R , que terminam em um dado vértice, no quiver de um dado módulo, quando o simples associado àquele vértice, a menos de isomorfismo, é um somando direto do seu socle. Pois bem, por dualidade, através da análise de existência no quiver de um dado módulo de caminhos de (Q, R) , fora de R , que começam em um dado vértice, podemos estabelecer as formulações duais do teorema III.3.1, do corolário III.3.1 e do teorema III.3.2. Vejamos.

Teorema III.3.1* : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, tal que Q não contém laços e todo circuito de Q está em R . Seja M um Λ -módulo tal que $M = N + X$, com $N(i) \cap X(i) = kv$, para algum $v \in M(i) \neq (0)$, e $N(x) \cap X(x) = (0)$, para todo $x \neq i$, e $l(N), l(X) \geq 2$. Suponhamos que existe um epimorfismo de M sobre o módulo simples $T = kv$. Se existir uma flecha σ em Q com origem em $i = i_\tau$ para a qual $v \notin \ker N(\sigma) + \ker X(\sigma)$ então M é decomponível.*

Corolário III.3.1* : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, tal que Q não contém laços e todo circuito de Q está em R . Seja M um Λ -módulo tal que $M = N + X$, com $N(i) \cap X(i) = kv$, para algum $v \in M(i)$, não nulo, e $N(x) \cap X(x) = (0)$, para todo $x \neq i$, e $l(N), l(X) \geq 2$. Suponhamos que existe um epimorfismo de M sobre o módulo simples $T = kv$. Se M é indecomponível então existe uma única flecha σ com origem em $i = i_\tau$ e uma única $\bar{\sigma}$ com origem em i_τ , distinta de σ tais que $v \notin \ker N(\sigma)$ e $v \notin \ker X(\bar{\sigma})$.*

Teorema III.3.2* : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma k -álgebra biserial de tipo de representação finito, tal que Q não contém laços e todo circuito de Q está em R . Seja M um Λ -módulo e T um Λ -módulo simples para os quais existe um epimorfismo p de M sobre T . Se M é indecomponível e se $\ker p = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t$, com $t \geq 2$ então $t = 2$.*

III.4 A combinatória dos módulos com um quociente do tipo A_n

Esta seção tem como objetivo medir a multiplicidade dos submódulos simples S de um dado módulo M indecomponível na sua imagem no Grupo de Grothendieck, seja quando M/S é um módulo de tipo A_n , $n \geq 2$, seja quando M/S é soma direta de dois módulos deste tipo. Isto é feito para o caso em que a k -álgebra é suposta biserial, com quiver sem laços e com sua categoria dos módulos indecomponíveis determinada por fatores de composição.

Dualmente, queremos aferir também a multiplicidade dos módulos simples que têm uma cópia no topo de um dado módulo indecomponível como fatores de composição deste módulo, nos casos em que M contém um submódulo de tipo A_n ou uma soma direta de dois submódulos deste tipo.

Para isso explicitamos inicialmente os tipos de representação de módulos cujo quociente por um submódulo simples é um módulo de tipo A_n , $n \geq 2$; explicitamos essas que estão contempladas nos lemas III.4.1, III.4.2 e III.4.3. A combinatória contida nestes lemas e o teorema III.3.2, da seção anterior, permitiram-nos alcançar o objetivo através das proposições III.4.2 e III.4.3.

A versão dual dos referidos lemas, bem como a do teorema III.3.2, garantem a aferição das multiplicidades dos simples relativos ao topo - isto está contemplado nas proposições III.4.2* e III.4.3*.

Vamos introduzir algumas notações e nomenclaturas que, julgamos, abreviam e facilitam a escrita combinatória dos módulos em questão.

Num quiver Q' , cujo grafo subjacente é um A_n , $n \geq 2$, sabemos que cada vértice, exceto dois em que incidem apenas uma flecha, são incidentes a exatamente duas flechas de Q' . Os dois vértices em que há incidência de apenas uma flecha, chamamos de *vértices extremantes*; os demais chamaremos de *vértices interiores*.

Ainda vamos fazer uma distinção entre os vértices extremantes de Q' . Se x é origem da única flecha de Q' que nele incide, vamos denominá-lo de *extremante inicial*; se, no entanto, é vértice de chegada, vamos denominá-lo de *extremante terminal*.

Entre estes vértices interiores, também vamos fazer uma distinção de três ordens: aqueles que são origem das duas flechas que neles incidem, denominaremos *2-fonte*, os que são vértices terminais das duas flechas incidentes, denominaremos *2-sumidouro*, e, finalmente, aqueles que são origem de uma das flechas e terminal da outra flecha, são chamados, por isso, *nem fonte, nem sumidouro*.

Queremos agora anotar ainda uma observação sobre o comportamento dos k -morfismos lineares $N(\alpha)$, quando N é uma representação de $k(Q, R)$, sendo (Q, R) um quiver com relações que satisfaz as condições (SP) do teorema III.2.1.

Observação III.4.1 : Seja i um vértice de Q tal que $i \in \sup N$, isto é, $N(i) \neq (0)$. Se existirem em Q duas flechas σ e δ , onde $i = e(\sigma) = o(\delta)$ e tais que $N(\sigma)$ é um epimorfismo e $N(\delta)$ um monomorfismo então $N(\gamma) = 0$, para toda flecha γ em Q que termina em i e distinta de σ ou tem origem em i e distinta de γ .

Este fato é decorrência imediata da condição (SP) 2.

Para o que segue vamos adotar algumas convenções que descrevemos abaixo.

Se S é um Λ -módulo (ou k -representação) simples, denotaremos sempre por i_s o vértice de Q ao qual S está associado.

Seja M' uma k -representação de tipo A_n , $n \geq 2$. Sempre que o quiver de M' contiver um subquiver próprio tal que a orientação das flechas nele contidas não é relevante convencionamos que a figura tipo zig-zag, como por exemplo,

deverá ser entendida como a parte de M' correspondente a este subquiver desde que sobre cada um desses vértices tenha apenas uma cópia de k e sobre cada uma de suas flechas o k -morfismo linear correspondente seja a identidade.

Nos lemas que seguem usaremos as notações k_1 e k_2 para distinguir certas cópias do corpo k .

Lema III.4.1 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, tal que Q não contém laços. Seja M uma k -representação de (Q, R) , cujo quiver próprio Q_M é conexo. Consideremos $v \in M$, não nulo, e o simples $S = kv \subseteq M$. Suponhamos que $\overline{M} = M/S$ seja de tipo A_n , $n \geq 2$ e exista um elemento $\bar{v} \in \overline{M}(i_s)$, não nulo, tal que $k\bar{v} \subseteq \overline{M}$. Então M é uma das seguintes k -representações, relativamente ao seu suporte:*

Além disso, se M é uma representação de A.1 ou de A.2, com λ_i nulo, para $i=1,2$, ou isomorfo a identidade, para $i=1,2$, então $S = kv$ é um somando direto de M .

Observação III.4.2 : Se M é uma representação de A.2, com λ_1 nulo e λ_2 isomorfo a identidade (ou ao contrário) então, como veremos na demonstração que segue, M é isomorfo a soma direta de M_1 e M_2 , que são respectivamente as representações abaixo, e nesse caso M/S não é de tipo A_n .

Demonstração : Desde que $\overline{M} = M/kv$ é de tipo A_n , $n \geq 2$, podemos escrever que $M(i_s) = kv \oplus k\overline{v}$ e $M(x) = \overline{M}(x) \cong k$, para todo $x \neq i_s$. Além disso, temos que $M(\delta)(v) = 0$, para toda δ com origem em i_s , pela proposição I.7.1.(ii) (pois kv é um somando do $\text{soc } M$), e $M(\alpha) = \overline{M}(\alpha)$, para toda flecha α que não incide em i_s .

De outro lado, da hipótese de que $k\overline{v} \subseteq \overline{M}$, pela proposição I.7.1.(ii), segue que $\overline{M}(\delta)(\overline{v}) = 0$, para toda δ que tem origem em i_s , ou seja o quiver de $\overline{M}$ não contém flechas com origem em i_s . Portanto, $M(\delta): kv \oplus k\overline{v} \rightarrow M(x)$ é nula; ou seja o quiver Q_M não contém flechas com origem em i_s e este vértice é vértice terminal de pelo menos uma flecha (pois, este quiver é conexo e contém o quiver de $\overline{M}$) e no máximo de duas.

Como destacamos na observação I.8.1, o quiver $Q_{\overline{M}}$, quiver próprio de $\overline{M}$, é obtido de Q_M pela eventual eliminação de flechas que incidem em i_s ; portanto, faz-se necessário examinar a incidência de flechas que terminam em i_s daquele subquiver.

1º caso: i_s é um 2-sumidouro em $Q_{\overline{M}}$.

Neste caso, temos, pelo que foi observado acima, que $Q_M = Q_{\overline{M}}$ e i_s é também um 2-sumidouro em Q_M . Se σ_1 e σ_2 denotam as flechas distintas em Q_M que incidem em i_s , tendo esse vértice como vértice terminal, então $M(\sigma_i) \cong \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$, para $i = 1, 2$, onde $\lambda_i: M(y_i) \cong k \rightarrow kv$, é tal que $\lambda_i = 0$ ou $\lambda_i \cong \mathbb{I}$. Portanto, M é a representação do tipo A.2.

Mostremos que, se λ_i é nula ou $\lambda_i \cong \mathbb{I}$, para $i = 1, 2$, S é um somando direto de M .

Se λ_i é nula, para $i = 1, 2$, é imediata a verificação de que a inclusão de kv em M é um monomorfismo de representações que cinde, pois kv , pela proposição I.7.1.(i), é um somando direto do $\text{top } M$, o que faz com que a projeção canônica de M sobre S seja uma sua inversa à esquerda.

Se $\lambda_i \cong \mathbb{I}$, para $i = 1, 2$, consideremos, de novo, a inclusão de kv em M . Esta inclusão agora também admite uma inversa à esquerda $p = (p_x)_x: M(x) \rightarrow S(x)$, que é dada por: $p_x = 0$, se $x \neq i_s$ e $p_{i_s}(av + b\overline{v}) = (a - b)v$. Deixaremos ao leitor a verificação de que p assim definida é de fato um morfismo de representações e que é o inverso à esquerda da inclusão.

Resta agora provarmos que, no caso em que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \cong \mathbb{I}$ (ou $\lambda_1 \cong \mathbb{I}$ e $\lambda_2 = 0$), M é isomorfo a soma direta das representações M_1 e M_2 consideradas na observação III.4.2, e tais que $\text{soc } M_1 = k\bar{v}$ e $\text{soc } M_2 = kv$. Assim M/S não é de tipo A_n e esta possibilidade deve ser excluída.

É imediato que M_1 e M_2 são subrepresentações de M . Consideremos a soma direta $M_1 \oplus M_2$, que é a representação:

e definimos a função $f = (f_x)_x: M \longrightarrow M_1 \oplus M_2$, onde $f_x: M(x) \longrightarrow M_1(x) \oplus M_2(x)$ é dada por: $f_x = \mathbb{I}_{M(x)}$ se $x \neq i_s$ e $f_{i_s}(av + b\bar{v}) = av + (b - a)\bar{v}$, para $a, b \in k$.

Segue facilmente, da forma pela qual foi definida, que f é um isomorfismo de representações.

2º caso: i_s é um vértice extremante terminal de $Q_{\bar{M}}$.

Denotemos por $\sigma_1: y_1 \longrightarrow i_s$ a única flecha do quiver de $\bar{M}$ que incide em i_s . Portanto, $M(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, onde $\lambda_1: k \longrightarrow kv$, é nulo ou isomorfo a identidade.

Suponhamos que exista, em Q , uma outra flecha $\sigma_2: y_2 \longrightarrow i_s$, distinta de σ_1 (portanto, com $y_1 \neq y_2$, pois Q não contém flechas duplas) tal que $M(\sigma_2)$ seja não nulo. Como $\text{sup } M = \text{sup } \bar{M}$ e $\bar{M}(\sigma_2)$ é nulo então y_2 é um vértice do quiver de $\bar{M}$ e $M(\sigma_2) \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De outro lado, y_2 , que é distinto de i_s e de y_1 , é um vértice do quiver de $\bar{M}$, que não é obviamente um 2-fonte em $Q_{\bar{M}}$ e, pela observação III.4.1, não é também um vértice de tipo nem fonte, nem sumidouro. Logo y_2 é um vértice extremante de $Q_{\bar{M}}$, isto é, y_2 é incidente a uma única flecha α em $Q_{\bar{M}}$ e para a qual $M(\alpha) \cong \mathbb{I}$.

Portanto, o quiver de M é do tipo $\tilde{A}_n$, $n \geq 3$, sem relações, o que contraria o fato de Λ é de tipo de representação finito, conforme a proposição II.3.3.

Logo $M(\sigma_2) = 0$ e σ_1 é a única flecha de Q que termina em i_s que está no quiver de M . Assim os quivers de M e de $\bar{M}$ coincidem e estamos, então, no caso A.1. Usando argumentos similares aos dos dois primeiros subcasos do caso acima verifica-se que inclusão de $S = kv$ em M cinde, ou seja S é um somando direto de M . □

Vamos agora enunciar um lema que é uma espécie de dual do lema acima, uma vez que tratará da representação de M que admite no topo um somando direto isomorfo a um somando de seu socle.

Lema III.4.2 : *Seja Λ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, cujo quiver Q não contém laços. Seja M uma k -representação de Λ tal que o quiver Q_M seja conexo. Consideremos $v \in M$, não nulo, e o simples $S = kv \subseteq M$. Suponhamos que $\overline{M} = M/S$ seja de tipo A_n , com $n \geq 2$. Se existir um vetor $\bar{v} \in \overline{M}$, não nulo, e um epimorfismo de $\overline{M}$ sobre $k\bar{v} = \overline{S}$, então M , com relação ao seu suporte, é uma das seguintes representações:*

B.1

B.3

B.2

B.4

B.5

Além disso, nos casos B.1 e B.3 vale que $S = kv$ é um somando direto de M .

Demonstração: Como no lema anterior, $M(i_s) = kv \oplus k\bar{v}$ e $M(x) = \bar{M}(x)$, para todo $x \neq i_s$, $M(\alpha) = \bar{M}(\alpha)$, para toda flecha α que não incide em i_s e $M(\delta)(v) = 0$, para toda flecha δ em Q com origem em i_s .

Como no lema anterior, são sobre as flechas de Q que incidem em i_s que temos observações a fazer, pois são elas que diferenciam o quiver de M do de $\bar{M}$.

A hipótese de que existe um epimorfismo de $\bar{M}$ sobre o simples $k\bar{v}$ e o fato de que $\bar{M}$ é de tipo A_n , pela proposição I.7.1, implicam que $\bar{M}(\gamma) = 0$, para toda γ em Q , que termina em i_s ; ou seja, o vértice i_s é um 2-fonte ou i_s é um vértice extremante inicial em $Q_{\bar{M}}$. Mais ainda, a existência do epimorfismo $M \rightarrow \bar{M} \rightarrow k\bar{v}$, via também a proposição I.7.1, garante-nos que $k\bar{v} \cap \sum_{\gamma} \text{Im } M(\gamma) = (0)$, quando γ percorre as flechas de Q que terminam em i_s .

Recaímos aqui, como no lema anterior, em princípio, em dois casos.

1º caso: i_s é um 2-fonte em $Q_{\bar{M}}$.

Sejam $\delta_1 : i_s \rightarrow t_1$ e $\delta_2 : i_s \rightarrow t_2$ as duas flechas distintas de Q (portanto, $t_1 \notin \{i_s, t_2\}$) tais que $\bar{M}(\delta_1) \cong \mathbb{I} \cong \bar{M}(\delta_2)$. Temos que $M(\delta_1) \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cong M(\delta_2)$.

Analisemos, neste caso, as possibilidades quanto às flechas γ de Q que terminam em i_s (se existirem) serem flechas do quiver Q_M de M . E as possibilidades são em número de três, a saber:

1.1. $M(\gamma) = 0$ para qualquer γ .

Essa condição implica que os quivers de M e de $\bar{M}$ coincidem e, portanto M é a representação B.3.

1.2. $M(\gamma) \neq 0$ para uma única γ .

Como $\sup M = \sup \bar{M}$, temos que $x = o(\gamma) \neq i_s$ é um vértice de $Q_{\bar{M}}$. Logo, sendo $\bar{M}$ de tipo A_n , pela observação III.4.1, x não é um 2-fonte, não é um 2-sumidouro e não é também um nem fonte, nem sumidouro em $Q_{\bar{M}}$. Portanto, x é um vértice extremante do quiver de $\bar{M}$. Do fato de que Q não contém flechas duplas, nem subquivers de tipo $\tilde{A}_r$, $r \geq 3$, sem relações, segue que x é um vértice extremante terminal do único subcaminho (de comprimento maior ou igual a um) do quiver de $\bar{M}$ que liga i_s a x .

De outro lado, como $\gamma : x \rightarrow i_s$ é a única flecha de Q tal que $M(\gamma) \neq 0$, segue de $k\bar{v} \cap \text{Im } M(\gamma) = (0)$ que podemos escolher um vetor w , não nulo, em $M(x) \cong k$ tal que $M(\gamma)(w) = v$. Assim, $M(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. E aqui temos que M é a representação B.4.

1.3. Existem duas flechas distintas γ_i com $M(\gamma_i) \neq 0$, $i = 1, 2$.

Indiquemos por x_i a origem de γ_i , $i = 1, 2$. Portanto, x_1 e x_2 são distintos e distintos de i_s . Como no caso 1.2, esses vértices são vértices extremantes no quiver de $\bar{M}$ e cada um deles é vértice terminal do único subcaminho do quiver $Q_{\bar{M}}$, de comprimento maior ou igual a um, de i_s a x_i , $i = 1, 2$. Observamos que tais caminhos têm apenas o vértice

i_s em comum. Logo, o quiver de M é obtido pela reunião de dois ciclos, cada um de comprimento maior ou igual a dois, tendo apenas o vértice i_s em comum.

Também aqui, como no caso 1.2, podemos escrever que $M(\gamma_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Portanto, M é a representação B.5. Resta analisar o segundo caso.

2º caso: i_s é um extremante inicial em $Q_{\overline{M}}$.

Seja $\delta : i_s \rightarrow t$ a única flecha de Q tal que $\overline{M}(\delta) \cong \mathbb{I}$. Decorre imediatamente de $M(\delta)(v) = 0$, para toda flecha que tem origem em i_s , que esta δ é também a única flecha de Q , com origem em i_s , que é flecha de Q_M ; além disso $M(\delta) \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aqui também vamos analisar o comportamento das flechas γ de Q que terminam em i_s (se existirem), quanto a $M(\gamma)$ ser nulo ou não. Lembramos que para tais flechas $\overline{M}(\gamma)$ é nulo.

É fácil ver, pelas considerações feitas nos casos anteriores, com relação a origem de tais flechas, que existe no máximo uma dessas flechas γ em Q tal que $M(\gamma) \neq 0$. Portanto, temos duas possibilidades para o quiver de M que são: Q_M coincide com o quiver $Q_{\overline{M}}$ ou $Q_{\overline{M}}$ é um caminho de comprimento, maior ou igual a um, de i_s à origem de γ , obtido de Q_M pela eliminação de exatamente uma flecha γ , que termina em i_s ou seja Q_M é um n -ciclo. Logo, M é, respectivamente, a representação B.1 ou B.2.

Como antes é muito simples a verificação, em qualquer dos casos B.1 ou B.3, que a inclusão de kv em M cinde, via a projeção canônica, ou seja kv é um somando direto de M . □

Lema III.4.3 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, tal que Q não contém laços. Seja M uma k -representação de Λ tal que o quiver próprio de M seja conexo. Consideremos um elemento não nulo $v \in M$ que define um submódulo simples $S = kv \subseteq M$. Suponhamos que $\overline{M} = M/S$ seja de tipo A_n , $n \geq 2$. Se existir um elemento, não nulo, $\bar{v} \in \overline{M}(i_s)$ tal que o simples $\overline{S} = k\bar{v}$ não é somando direto de $\text{soc } \overline{M}$, nem de $\text{top } \overline{M}$ então M é uma das seguintes representações:*

No caso C.1, $S = kv$ é um somando direto de M .

Demonstração : As hipóteses de que $\overline{M}$ é de tipo A_n , $n \geq 2$, e de que $k\bar{v}$ não é somando de $\text{soc } \overline{M}$, nem de $\text{top } \overline{M} = \text{top } M$ implicam que existe uma única flecha γ e uma única flecha δ , em Q , com $e(\gamma) = o(\delta) = i_s$, $o(\gamma) \neq e(\delta)$ tais que $\overline{M}(\gamma) \cong \mathbb{1} \cong \overline{M}(\delta)$. Portanto, se existir alguma outra flecha δ' , distinta de δ , em Q , com origem em i_s , então $M(\delta') = 0$. Assim a flecha δ acima é também a única flecha de Q , com origem em i_s , que é flecha do quiver de M e desta forma $M(\delta) \cong \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quanto às flechas de Q que terminam em i_s , temos duas possibilidades: ou a flecha γ do quiver $Q_{\overline{M}}$ é também a única flecha de Q , que termina em i_s , que é flecha do quiver de M ou existe uma outra flecha $\bar{\gamma}$, distinta de γ , que termina em i_s , que também é flecha de Q_M . Em qualquer dessas possibilidades, temos que $M(\gamma) \cong \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde $\lambda: k \rightarrow kv$.

A primeira possibilidade faz com que os quivers Q_M e $Q_{\overline{M}}$ coincidam. Neste caso, M é uma representação da forma C.1.

Na segunda possibilidade, decorrente de hipótese de $\overline{M}$ é de tipo A_n e da observação III.4.1, temos que a origem de $\bar{\gamma}$ é um vértice extremante do quiver de $\overline{M}$. Além disso, como Q não contém diagramas de tipo $\tilde{A}_r$, $r \geq 3$, sem relações ou flechas duplas, resulta que a origem de $\bar{\gamma}$ é um vértice terminal do único subcaminho em $Q_{\overline{M}}$ de i_s para $o(\bar{\gamma})$. Assim, o quiver de M contém um r -ciclo, contendo a flecha $\bar{\gamma}$ e $M(\bar{\gamma}) \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Logo, analogamente à demonstração da observação III.4.1, é simples verificar que M é isomorfo a representação C.2.

No caso C.1, sendo λ nulo ou um múltiplo escalar da identidade, é fácil verificar usando, por exemplo, os morfismos utilizados no lema III.4.1, que $S = kv$ é um somando direto de M . □

Proposição III.4.1 : *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, tal que Q não contém laços. Sejam M um Λ -módulo indecomponível e S um Λ -módulo simples tais que $S \subseteq M$ e $\overline{M} = M/S$ é de tipo A_n , com $n \geq 3$. Se $\overline{M}(i_s)$ é não nulo então M é uma das representações B.2, B.4, B.5 ou C.2 nos lemas III.4.2 e III.4.3.*

Demonstração : Seja $v \in M(i_s)$ tal que $kv = S$. Seja $\bar{v} \in \overline{M}(i_s)$, não nulo, e consideremos o módulo simples $k\bar{v}$. Como M é indecomponível, pela proposição I.8.1, o quiver de M , Q_M , é conexo e, pelo lema III.4.1, $k\bar{v}$ não é um somando direto do $\text{soc } M$. Logo o simples $k\bar{v}$ é um fator de composição do $\text{top } M$ ou não. Portanto, o resultado segue dos lemas III.4.2 e III.4.3, uma vez que nos casos B.1, B.3 e C.1 o simples S é um somando direto de M . □

Proposição III.4.2 : *Seja Λ uma álgebra biserial, cujo quiver ordinário não contenha laços, e tal que a categoria $\Lambda\text{-ind}$ seja determinada por fatores de composição. Sejam M um Λ -módulo indecomponível, de comprimento maior ou igual a 3, e S um Λ -módulo simples tais que $S \subseteq M$ e $\overline{M} = M/S$ é de tipo A_n . Então M é livre de multiplicidade.*

Demonstração: Como, por hipótese, a categoria Λ -ind é determinada por fatores de composição, segue da proposição II.3.1. Λ é de tipo de representação finito.

Com as hipóteses sobre M e sobre $\overline{M}$, temos que $M(x) = \overline{M}(x) \cong k$, para todo vértice $x \neq i_s$. Assim para obtermos o resultado, basta provar que $\overline{M}(i_s) = (0)$.

Suponhamos, por absurdo, que $\overline{M}(i_s)$ seja não nulo, ou seja $\overline{M}(i_s) \cong k$. Estamos, então, nas hipóteses da proposição acima, o que implica que M é uma das representações B.2, B.4, B.5 ou C.2.

Em qualquer que seja o caso, é imediato que existe uma subrepresentação N_1 de $M/S \cong M/k_1$ e que M admite uma subrepresentação N_2 , ambas de comprimento maior ou igual a 2, que são:

onde as flechas pontilhadas indicam que o k -morfismo de N_i , $i = 1, 2$, correspondente a essas flechas do quiver de M , é nulo, ou seja as flechas pontilhadas não são flechas do quiver de N_i ; nos demais vértices de M , $N_i = (0)$, para $i = 1, 2$. As subrepresentações N_1 e N_2 são de tipo A_r , $r = l(N_1) = l(N_2)$, portanto indecomponíveis, com os mesmos fatores de composição, mas não são isomorfas, pois $\text{soc } N_1 \not\cong S \cong \text{soc } N_2$. Isto contraria a hipótese de Λ -ind ser determinada por fatores de composição.

Logo, $M(x) \cong k$, para todo $x \in \text{sup } M$. □

Proposição III.4.3 : *Seja Λ uma álgebra biserial, cujo quiver Q não contém laços. Suponhamos que Λ -ind seja determinada por fatores de composição. Sejam M um Λ -módulo indecomponível com $l(M) \geq 3$, e S um Λ -módulo simples tais que $S \subseteq M$ e $\overline{M} = M/S = N_1 \oplus N_2$, onde os módulos N_i são de tipo A_{n_i} , $n_i \geq 1$, para $i = 1, 2$. Então S é livre de multiplicidade em M (isto é, S tem multiplicidade 1 como fator de composição de M)*

Demonstração: Seja $v \in M(i_s)$, não nulo, tal que $S = kv$. Consideremos também $\pi: M \rightarrow \overline{M}$ o epimorfismo canônico e indiquemos por M'_j , $j = 1, 2$, a imagem recíproca de N_j por meio de π .

Temos que $M = M'_1 + M'_2$ e $M'_1 \cap M'_2 = kv$. Além disso, $M'_j(x) = N_j(x) \cong k$, para cada $j = 1, 2$, para cada vértice $x \neq i_s$ e $M(i_s) = kv \oplus N_1(i_s) \oplus N_2(i_s)$.

Queremos mostrar que $N_j(i_s) = (0)$, para todo $j = 1, 2$.

Suponhamos, então, $N_j(i_s) \neq (0)$, para algum $j = 1, 2$; por exemplo, para $j = 1$. Logo $M'_1(i_s) = kv \oplus N_1(i_s)$, com $N_1(i_s) \cong k$ e, portanto, $l(M'_1) \geq 2$.

De outro lado, por ser M indecomponível resulta que kv não é somando direto de M'_1 . Logo, pelo lema III.3.1, existe uma flecha $\sigma : y \rightarrow i_s$, em Q , tal que $v \in \text{Im } M'_1(\sigma)$; donde $l(M'_1) \geq 3$ e $M'_1/S = N_1$ é de tipo A_{n_1} , com $n_1 \geq 2$.

Assim levando em conta a observação III.4.2, temos que M'_1 tem uma das representações dos lemas III.4.1, III.4.2 ou III.4.3. Como $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição, pela proposição III.4.1 e conforme a demonstração da proposição acima, as possibilidades B.2, B.4, B.5 e C.2 estão descartadas. Em consequência segue que M'_1 é uma das representações A.1, A.2, B.1 ou B.3.

E em qualquer desses casos, pelos lemas citados, a conclusão é que S é um somando direto de M'_1 , o que implica que S é um somando direto de M , contra a hipótese de indecomponibilidade de M .

Logo, $M(i_s) = kv$, ou seja, S tem multiplicidade 1 em M . □

Os lemas III.4.1, III.4.2 e III.4.3, podem ser apresentados em sua versão dual, uma vez que a dualidade $\text{Hom}_k(-, k)$ preserva biserialidade e a indecomponibilidade dos módulos. E essas versões duais constituiriam a *Combinatória dos módulos com um submódulo de tipo A_n* . Para explicitar um pouco mais, com as mesmas hipóteses sobre a álgebra Λ eles se referem as possíveis representações de um módulo M , cujo quiver é conexo, tal que existe um epimorfismo p de M sobre um simples S , cujo kernel é um submódulo de M de tipo A_n , $n \geq 2$ e $\ker p(i_s) \cong k$.

Com os duais dos lemas III.4.1, III.4.2 e III.4.3, podemos apresentar também as versões duais das proposições III.4.1, III.4.2 e III.4.3, que são:

Proposição III.4.1* : *Seja Λ uma álgebra biserial de tipo de representação finito, cujo quiver Q não contém laços. Sejam M um Λ -módulo indecomponível e S um Λ -módulo simples tais que existe um epimorfismo p de M sobre S e o $\ker p$ é um submódulo de M de tipo A_n , com $n \geq 2$. Se $\ker p(i_s) \cong k$, então M é uma das representações duais B.2*, B.4*, B.5* ou C.2*.*

Observação III.4.3 : As representações B.2*, B.4*, B.5* e C.2* duais, respectivamente, de B.2, B.4, B.5 e C.2, são obtidas, de forma natural a partir destas, tomando-se o quiver oposto (por inversão do sentido das flechas) e quanto aos k -espaços vetoriais tomando-se o espaço dual, quanto aos k -morfismos lineares tomando-se o transposto (em matrizes a matriz transposta, relativa a base dual).

Proposição III.4.2* : *Seja Λ uma álgebra biserial, cujo quiver não contém laços, e tal que a categoria $\Lambda\text{-ind}$ é determinada por fatores de composição. Se M é um Λ -módulo indecomponível de comprimento maior ou igual a três e S é um Λ -módulo simples tais que existe um epimorfismo p de M sobre S e o $\ker p$ é um submódulo de M de tipo A_n , $n \geq 2$. Então M é livre de multiplicidade.*

Proposição III.4.3* : *Seja Λ uma álgebra biserial tal que o quiver Q de Λ não contém laços. Suponhamos que a categoria Λ -ind seja determinada por fatores de composição. Sejam M um Λ -módulo indecomponível de comprimento maior ou igual a quatro e S um Λ -módulo simples tais que existe um epimorfismo p de M sobre S com $\ker p = N_1 \oplus N_2$. Se os módulos N_i são de tipo A_{n_i} , com $n_i \geq 1$, $i = 1, 2$, então S é livre de multiplicidade em M .*

III.5 A implicação P.I $\Rightarrow$ P.II

A combinatória que estabelecemos na seção anterior e os resultados obtidos no capítulo II, enquanto condições necessárias para que uma k -álgebra seja tal que a categoria dos módulos indecomponíveis é determinada por fatores de composição, nos permitem agora provar dois teoremas que são o conteúdo dessa seção.

No primeiro deles, o teorema III.5.1, fazemos uma classificação, segundo tipo de quiver, dos módulos indecomponíveis e livres de multiplicidade, sobre uma álgebra biserial de tipo de representação finito, que tem seu quiver ordinário sem laços e cujos circuitos estão no sistema de relações.

No segundo, o teorema III.5.2, que é o teorema principal deste trabalho, provamos que numa k -álgebra biserial que tem seu quiver ordinário sem laços e todo módulo indecomponível é unicamente determinado por seus fatores de composição, todo módulo indecomponível é livre de multiplicidade. É este teorema quem garante que uma das implicações da equivalência de Pogorzały e Skowroński, em [24], é mantida mesmo que o quiver da álgebra contenha circuitos.

Observamos também que na seção III.2, através do exemplo III.2.2, mostramos que a implicação contrária pode não se efetivar quando a k -álgebra é biserial, não de Nakayama e seu quiver contém um circuito.

Teorema III.5.1 *Seja $\Lambda = k(Q, R)$ uma álgebra biserial de tipo de representação finito. Suponhamos que o quiver Q de Λ não contenha laços e que todo circuito em Q esteja em R . Se M é um Λ -módulo indecomponível de comprimento maior ou igual a três e livre de multiplicidade, então M é um módulo biserial livre ou M é de tipo A_n , $n = l(M) \geq 3$.*

Demonstração : Como M é livre de multiplicidade, ou seja $M(x) \cong k$, pra todo $x \in \sup M$, basta provar que o quiver de M é um quiver formado de caminhos paralelos μ, ν tais que $\mu - \nu$ estão em R ou o quiver de M é tal que o seu grafo subjacente é um diagrama de Dynkin A_n . Faremos a demonstração por indução sobre o comprimento de M .

Suponhamos que $l(M) = 3$ e seja $\{i_1, i_2, i_3\} = \sup M$. Como M é indecomponível temos que $\text{soc } M$ tem comprimento 1 ou 2.

Se $l(\text{soc } M) = 2$ então $\text{soc } M = \text{rad } M = S_{i_2} \oplus S_{i_3}$. Logo, $M/\text{rad } M$ é simples e, portanto, isomorfo a S_{i_1} . Seja $f: P \rightarrow M$, a cobertura projetiva de M , onde P é um projetivo indecomponível isomorfo ao projetivo indecomponível P_{i_1} . A restrição de f a $\text{rad } P$ é um epimorfismo de $\text{rad } P$ sobre $\text{rad } M = S_{i_2} \oplus S_{i_3}$ e este fato garante que P é um projetivo indecomponível não uniserial e tal que $P/\text{rad}^2 P \cong M$. Neste caso, o quiver de M é do tipo $\begin{smallmatrix} \bullet & \leftarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet \\ i_2 & & i_1 & & i_3 \end{smallmatrix}$, ou seja M é de tipo A_3 .

No entanto, se $l(\text{soc } M) = 1$, temos que M é co-local, isto é, existe um monomorfismo $\lambda: M \hookrightarrow I_S$, onde I_S é a envolvente injetiva do Λ -módulo simples $S = \text{soc } M \cong S_{i_3}$. Analisemos, pois, o quociente M/S .

Se M/S é indecomponível então M/S é uniserial, pois tem comprimento 2. Logo, M é uniserial e livre de multiplicidade; donde o quiver de M é do tipo $\begin{smallmatrix} \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\ i_3 & & i_2 & & i_1 \end{smallmatrix}$, pois $M(\delta) = 0$, para toda flecha δ de Q que tem origem em i_3 .

Se M/S é decomponível, então $M/S \cong S_{i_1} \oplus S_{i_2}$ e I_S/S contém uma cópia de M/S . Logo, I_S é um módulo injetivo indecomponível não uniserial e tal que $\text{soc}^2 I_S \cong M$ é livre de multiplicidade. Portanto, o quiver de M é $\begin{smallmatrix} \bullet & \rightarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\ i_1 & & i_3 & & i_2 \end{smallmatrix}$. E está provado que também nesse caso M é de tipo A_3 .

Seja M de comprimento maior ou igual a 4 e suponhamos que o resultado seja verdadeiro para todo módulo indecomponível livre de multiplicidade, de comprimento maior ou igual a 3 e estritamente menor que o comprimento de M .

Seja S um submódulo simples de M e consideremos o quociente M/S , que é tal que $3 \leq l(M/S) < l(M)$.

Se M/S é indecomponível, da hipótese de indução resulta que M/S é de tipo A_{n-1} , onde $n = l(M)$, ou é biserial livre. Mas M/S não pode ser biserial livre, pois caso contrário M não seria indecomponível. Portanto, M/S é de tipo A_{n-1} .

Indiquemos por $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}\}$ o suporte de M/S , sendo que i_1 e i_{n-1} denotam os vértices extremantes do quiver de M/S . A proposição I.8.1 garante que o quiver Q_M de M é conexo, uma vez que M é indecomponível, donde existe pelo menos uma flecha σ_1 (e no máximo duas flechas distintas σ_1 e σ_2) de Q ligando i_s a algum vértice i_j , $1 \leq j \leq n-1$, que é flecha do quiver de M , com $M(\sigma_1) \cong \mathbb{1}$ (no caso de existir duas, $M(\sigma_1) \cong \mathbb{1} \cong M(\sigma_2)$). Pelo fato de que S é um somando do $\text{soc } M$, a proposição I.7.1.(ii) junto com a observação III.4.1 nos diz que tais flechas tem origem nos vértices extremantes do quiver de M/S , i_1 ou i_{n-1} , e terminam em i_s .

Se o quiver de M/S é um caminho orientado, por exemplo $\begin{smallmatrix} \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \cdots & \bullet & \leftarrow & \bullet \\ i_1 & & i_2 & & i_3 & & i_{n-2} & & i_{n-1} \end{smallmatrix}$, então existe uma única flecha σ_1 no quiver de M de um dos vértices i_1 ou de i_{n-1} a i_s .

De fato, pois, se existissem duas dessas teríamos que o quiver de M é um quiver de tipo $\tilde{A}_n$ sem relações, o que contraria a hipótese de Λ ser de tipo de representação finito. Logo, neste caso, o quiver de Q é um quiver do tipo:

$$\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \cdots \bullet \leftarrow \bullet \\ i_s \quad i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_{n-2} \quad i_{n-1} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \cdots \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_{n-2} \quad i_{n-1} \quad i_s \end{array}$$

o que mostra que, neste caso, M é de tipo A_n .

Se o quiver de M/S é de tipo A_{n-1} , mas não é um caminho, então existe pelo menos um vértice i_m , com $2 \leq m \leq n-2$, tal que i_m é um 2-fonte ou um 2-sumidouro em $Q_{M/S}$.

Se i_m é o único 2-fonte em $Q_{M/S}$, então, neste quiver, existem um caminho μ de i_m a i_1 e um caminho ν de i_m a i_{n-1} , ou seja ele é o quiver $i_1 \leftarrow \cdots \leftarrow i_m \rightarrow \cdots \rightarrow i_{n-1}$.

Quanto às flechas em Q_M relativamente ao vértice i_s , ou existe uma única flecha σ_1 , com origem em i_1 ou em i_{n-1} , terminado em i_s ou existem duas flechas distintas σ_1 e σ_2 , com origem em i_1 e em i_{n-1} , respectivamente, ambas terminando em i_s e tais que a diferença entre os caminhos paralelos $\sigma_1 \mu$ e $\sigma_2 \nu$ esteja em R (por (SP) 4, uma vez que Λ é biserial de tipo de representação finito).

Do primeiro caso, resulta que o quiver de M é um quiver de tipo A_n e, portanto M é de tipo A_n , $n = l(M)$.

No segundo caso, o resultado é que o quiver de M é:

e, conseqüentemente, M é um módulo biserial livre (isto é, projetivo e injetivo indecomponível).

Se, no entanto, i_m não é o único 2-fonte (ou se é um 2-sumidouro no quiver de M/S), como já vimos anteriormente a impossibilidade de que o quiver de M seja de tipo $\tilde{A}_n$ sem relações, implica que existe uma única flecha σ_1 de i_1 ou de i_{n-1} a i_s tal que $M(\sigma_1) \cong \mathbb{L}$. Temos aqui de novo o caso em que o quiver de M é do tipo A_n e, logo, M é de tipo A_n .

Finalmente resta analisarmos o caso em que M/S é decomponível. Pelo teorema III.3.2, $M/S = M_1 \oplus M_2$, com M_i , para $i = 1, 2$, não nulos, indecomponíveis e não projetivos (caso contrário o epimorfismo $M \rightarrow M/S \rightarrow M_i$ cindiria e M não seria indecomponível). Além disso, do fato de que M é livre de multiplicidade implica que os M_i são livres de multiplicidade e têm suporte disjuntos.

Denotando por n_i o comprimento de M_i , para $i = 1, 2$, temos que, se n_i é um ou dois então M_i , por ser indecomponível, é de tipo A_1 ou A_2 e, se n_i é maior ou igual a três então, pela hipótese de indução, é de tipo A_{n_i} (pois biseriais livres são projetivos).

De outro lado, $M = N_1 + N_2$, com $N_1 \cap N_2 = S$, onde N_i é a imagem recíproca de M_i pelo epimorfismo canônico de M sobre M/S , para $i = 1, 2$. Logo, desde que $M(i_s) \cong k$ e $\sup N_1 \cap \sup N_2 = \{i_s\}$, pelo corolário III.3.1, existe uma única flecha $\sigma_1 : y_1 \rightarrow i_s$ tal que

$N(\sigma_1) \cong \mathbb{I}$ e uma única $\sigma_2 : y_2 \rightarrow i_s$ tal que $N(\sigma_2) \cong \mathbb{I}$, com $y_1 \notin \{i_2, i_s\}$, e y_i no suporte de M_i , para $i = 1, 2$. Porém da observação III.3.1 temos novamente que os vértices y_i são vértices extremantes do quiver de M_i . Assim o quiver de M é tal que o grafo subjacente é um diagrama de Dynkin A_n , onde $n = n_1 + n_2 + 1$.

E o teorema está demonstrado. □

Para o teorema que segue vamos adotar a seguinte convenção sobre os quivers de tipo A_n , $n \geq 3$: quando este contiver um subquiver em que a orientação das flechas não são necessárias para a determinação de propriedades ou caracterização de quivers de módulos ilustraremos este subquiver como um grafo, isto é, formado de pontos (vértices) e de arestas (flechas sem explicitação do sentido). Vejamos um exemplo.

Seja Q um quiver do tipo A_5 : $\bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$, onde queremos destacar, por exemplo, apenas as flechas que incidem nos vértices extremantes de Q . Com a convenção adotada Q é redesenhado da seguinte forma: $\bullet \leftarrow \bullet - \bullet - \bullet \leftarrow \bullet$.

Estamos agora em condições de provar a implicação $P.I \Rightarrow P.II$.

Teorema III.5.2 : *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado biserial, cujo quiver ordinário não contém laços. Suponhamos que Λ -ind seja determinada por fatores de composição. Então todo Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade.*

Demonstração : Observamos primeiramente que com as hipóteses impostas sobre a álgebra $\Lambda \cong k(Q, R)$ e sobre a categoria Λ -ind, pela demonstração do teorema III.2.2 (ou pela observação III.2.2), temos que todo circuito em Q está em R .

Faremos a demonstração por indução sobre o comprimento do módulo, que podemos supor é maior ou igual a três.

Seja M em Λ -ind tal que $l(M) = 3$. É fácil verificar que todo módulo indecomponível de comprimento 3 é local ou co-local. Portanto, pelo teorema III.2.2 resulta que M é livre de multiplicidade.

Suponhamos que M é um Λ -módulo indecomponível de comprimento maior ou igual a quatro e que o resultado seja verdadeiro para todo Λ -módulo indecomponível de comprimento menor que o comprimento de M .

Como as noções de socle e de topo são duais, é suficiente provar que os Λ -módulos simples que são fatores de composição de M , quer sejam do seu socle, quer sejam nem do socle nem do topo, têm multiplicidade um em M .

Seja S um Λ -módulo simples tal que $S \subseteq M$.

Afirmamos que S é livre de multiplicidade em M .

De fato, consideremos o quociente M/S . Se M/S é indecomponível, pela hipótese

de indução, então M/S é livre de multiplicidade e é também não projetivo. Do teorema anterior segue que M/S é de tipo A_{n-1} , onde $n = l(M)$. O resultado, neste caso, é consequência da proposição III.4.2.

Se M/S é decomponível, pelo teorema III.3.2, temos que $M/S = M_1 \oplus M_2$, com os M_i , não nulos, indecomponíveis e não projetivos, para todo $i = 1, 2$. Da hipótese de indução segue que cada M_i é de tipo A_{n_i} , $n_i = l(M_i)$. Logo, pela proposição III.4.3, S é livre de multiplicidade em M .

E a afirmação acima de que todo submódulo simples de M é livre de multiplicidade em M está provada.

Consideremos um Λ -módulo simples T que seja um fator de composição de M , mas não um somando direto de $\text{soc } M$, nem é isomorfo a alguma somando direto de $\text{top } M$. Suponhamos que T tem multiplicidade maior ou igual a dois em M , ou seja que $\dim_k M(i_T) \geq 2$.

Seja S um Λ -módulo simples tal que $S \subseteq M$. Da primeira parte desta demonstração temos que $\dim_k M(i_S) = 1$; portanto, $S \not\cong T$. Consideremos, então, o quociente M/S . Como $\dim_k (M/S)(i_T) \geq 2$, decorre da hipótese de indução que M/S é decomponível. Assim, aplicando o teorema III.3.2, podemos escrever que $M/S = M_1 \oplus M_2$, com M_i , não nulo, indecomponível e, também, não projetivo, para cada $i = 1, 2$.

Da hipótese de indução resulta que $\dim_k M_i(i_T) = 1$, para todo $i = 1, 2$. E segue, imediatamente, deste fato que $\dim_k M(i_T) = 2$. Além disso, como cada M_i é indecomponível e não projetivo, pelos mesmos argumentos usados na primeira parte, segue também que cada M_i é de tipo A_{n_i} , onde $n_i = l(M_i) \geq 1$. Observamos que se um dos M_i tem comprimento 1, o outro tem comprimento maior ou igual a 2.

Seja agora π o epimorfismo canônico de M sobre $M/S = M_1 \oplus M_2$. Os Λ -módulos $N_i = \pi^{-1}M_i$, são submódulos de M tais que $M = N_1 + N_2$, com $N_1 \cap N_2 = kv = S$, onde $v \in M(i_S)$, e $N_i/S = M_i$, para $i = 1, 2$. Além disso, pelo corolário III.3.1, existem as flechas $\sigma_1 : y_1 \rightarrow i_S$ e $\sigma_2 : y_2 \rightarrow i_S$ distintas tais que $\text{Im } N_i(\sigma_i) = kv$, $i = 1, 2$ e $N_i(\sigma_j) = 0$, se $i \neq j$. Logo, cada N_i é de tipo A_{n_i+1} , sendo que i_S é um vértice extremante terminal do quiver deste módulo. Mais ainda, quanto a vizinhança de i_S no quiver de M (ou incidência de flechas em i_S) é da forma $y_2 \xrightarrow{\sigma_2} i_S \xleftarrow{\sigma_1} y_1$ e os vértices i_S e i_T estão no $\text{sup } N_1 \cap \text{sup } N_2$.

Afirmamos que se z é um vértice de Q , distinto de i_S , que está em $\text{sup } N_1 \cap \text{sup } N_2$, então z é um vértice interno que é nem fonte, nem sumidouro do quiver de N_1 e de N_2 .

Com efeito, como $\text{soc } N_i$ é um submódulo de $\text{soc } M$, para todo $i = 1, 2$, todo submódulo simples de M tem multiplicidade 1 em M e $M(x) = N_1(x) \oplus N_2(x)$, para todo $x \neq i_S$, então o simples S_z não é fator de composição do $\text{soc } N_i$. Portanto, em termos de quiver, z não é um extremante terminal, nem 2-sumidouro em Q_{N_1} e em Q_{N_2} . De outro lado, como $\text{top } M = \text{top } M/S = \text{top } N_1 \oplus \text{top } N_2$, e todo fator de composição do $\text{top } M$ tem multiplicidade 1 em M , então nenhum somando do $\text{top } N_i$, para todo $i = 1, 2$ é isomorfo

ao simples S_z , quando $z \in \sup N_1 \cap \sup N_2$. O que a nível de quiver significa que z não é extremante inicial, nem 2-fonte em Q_{N_1} e em Q_{N_2} . E a afirmação está verificada.

Portanto, o conjunto $\sup N_1 \cap \sup N_2$, exceto i_s , contém apenas vértices de M que estão entre os vértices internos dos subquivers Q_{N_1} e Q_{N_2} e que em ambos subquivers são nem fonte, nem sumidouro. Assim a vizinhança desses vértices $z \neq i_s$ em cada um desses subquivers é da forma $x_i \xrightarrow{\alpha_i} z \xrightarrow{\beta_i} w_i$ tal que $N_i(\beta_i \alpha_i) \cong \mathbb{I}$, isto é, $\beta_i \alpha_i \notin R(x_i, w_i)$, para $i = 1, 2$.

Notemos que da (SP) 2 decorre que se $\alpha_1 = \alpha_2$ então $\beta_1 = \beta_2$ e se $\alpha_1 \neq \alpha_2$ então $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta_2 \alpha_1 \in R(x_1, w_2)$ e $\beta_1 \alpha_2 \in R(x_2, w_1)$. Assim, desta observação, a vizinhança de qualquer um desses vértices no quiver de M é de uma das seguintes formas:

$$(5.1) \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \alpha_1 \\ x_1 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \bullet \\ z \\ \beta_1 \\ w_1 \end{array} \quad \text{com } \beta_1 \alpha_1 \notin R \quad \text{ou} \quad (5.2) \quad \begin{array}{ccc} x_1 & & w_2 \\ & \searrow \alpha_1 & \nearrow \beta_2 \\ & z & \\ & \nearrow \alpha_2 & \searrow \beta_1 \\ x_2 & & w_1 \end{array} \quad \text{com } \beta_i \alpha_i \notin R, i = 1, 2, \\ \beta_2 \alpha_1 \in R \text{ e } \beta_1 \alpha_2 \in R$$

Chamamos a atenção que na forma (5.1) teremos que também x_1 e w_1 estarão no $\sup N_1 \cap \sup N_2$.

Para cada $z \in \sup N_1 \cap \sup N_2$, $z \neq i_s$, e para cada $i = 1, 2$, seja $A_i(i_s, z)$ o passeio de menor comprimento no quiver de N_i entre i_s e z . Cada um desses passeios contém a flecha σ_i e é, em particular, um subquiver de tipo A_{r_i} , onde $r_i = l(A_i(i_s, z)) + 1$ e $l(A_i(i_s, z))$ é o número de flechas contidas no passeio.

Para cada $i = 1, 2$, seja $z_i \in \sup N_1 \cap \sup N_2$, distinto de i_s , tal que $l(A_i(i_s, z_i))$ seja o menor possível entre os vértices z que estão na intersecção daqueles suportes.

1º caso: $z_1 = z_2 = z_0$

Pela minimalidade do comprimento de $A_i(i_s, z_0)$, $i = 1, 2$, temos que a vizinhança de z_0 no quiver de M é da forma (5.2) e que $A_1(i_s, z_0)$ e $A_2(i_s, z_0)$ são subquivers que têm apenas os vértices i_s e z_0 em comum. Logo o quiver de M , consequentemente o quiver Q , contém um dos seguintes subquivers, que é a reunião dos passeios $A_i(i_s, z_0)$, $i = 1, 2$:

onde em (5.3) z_0 é um 2-fonte ou um 2-sumidouro.

Se, em (5.3), para todo $i = 1, 2$, $A_i(i_s, z_0)$ é um caminho de z_0 a i_s , então eles são caminhos paralelos tais que $A_1(i_s, z_0) - A_2(i_s, z_0) \notin R$ (pois, $A_i(i_s, z_0)\alpha_i \notin R$), o que contraria a condição (SP) 4 de (Q, R) .

Se em (5.3), para algum $i = 1, 2$, $A_i(i_s, z_0)$ não é um caminho então, é fácil ver que, o

quiver Q contém um subquiver de tipo $\tilde{A}_r$ sem relações, onde $r = l(A_1(i_s, z_0)) + l(A_2(i_s, z_0))$, o que contraria a hipótese de Λ ser uma álgebra de tipo de representação finito, conforme a proposição II.3.3.

Se temos (5.4), então vamos construir as famílias $N' = (N'(x)_x, N'(\delta)_\delta)$ e $N'' = (N''(x)_x, N''(\delta)_\delta)$ da seguinte forma:

$$N'(x) = \begin{cases} N_2(x) & \text{se } x \text{ é um vértice de } A_2(i_s, z_0), x \neq i_s; \\ N_1(x) & \text{se } x \text{ é vértice de } A_1(i_s, z_0), x \neq z_0, x \neq i_s; \\ kv & \text{se } x = i_s; \\ (0) & \text{nos demais vértices de } Q \end{cases}$$

e

$$N'(\delta) = \begin{cases} N_2(\delta) & \text{se } \delta \text{ é flecha em } A_2(i_s, z_0); \\ N_1(\delta) & \text{se } \delta \text{ é flecha em } A_1(i_s, z_0), \delta \neq \alpha_1; \\ 0 & \text{sobre as demais flechas de } Q \end{cases}$$

$$N''(x) = \begin{cases} N_2(x) & \text{se } x \text{ é um vértice de } A_2(i_s, z_0), x \neq i_s, x \neq z_0; \\ N_1(x) & \text{se } x \text{ é vértice de } A_1(i_s, z_0), x \neq i_s; \\ kv & \text{se } x = i_s; \\ (0) & \text{nos demais vértices de } Q \end{cases}$$

e

$$N''(\delta) = \begin{cases} N_2(\delta) & \text{se } \delta \text{ é flecha em } A_2(i_s, z_0), \delta \neq \beta_2; \\ N_1(\delta) & \text{se } \delta \text{ é flecha em } A_1(i_s, z_0); \\ 0 & \text{sobre as demais flechas de } Q \end{cases}$$

Da forma com que N' e N'' foram definidas é muito simples verificar que elas são k -representações de (Q, R) , ou seja que $N'(\rho) = N''(\rho) = 0$, para todo $\rho \in R$.

Por construção, como escolhemos $N'(\alpha_1) = 0$, temos que o quiver de N' é obtido do quiver em (5.4) pela eliminação da flecha α_1 ; logo, N' é um Λ -módulo de tipo A_r , onde $r = l(A_1(i_s, z_0)) + l(A_2(i_s, z_0))$, tendo no topo um somando isomorfo a S_{z_0} (pois z_0 é um vértice extremante inicial no quiver de N').

De modo análogo, pela escolha de $N''(\beta_2) = 0$, temos que o quiver de N'' é obtido do quiver em (5.4) pela eliminação de apenas a flecha β_2 , donde N'' é um Λ -módulo de tipo A_r , tendo, no entanto, o simples S_{z_0} como um somando de seu socle (pois, no quiver de N'' o vértice z_0 é extremante terminal).

Por construção N' e N'' têm o mesmo suporte e por serem de tipo A_r , temos que eles são indecomponíveis e têm os mesmos fatores de composição, porém não são isomorfos, o que contraria a hipótese de que Λ -ind é determinada por fatores de composição.

2º caso: z_1 e z_2 são distintos.

Também aqui decorre da minimalidade dos comprimentos de $A_1(i_s, z_1)$ e de $A_2(i_s, z_2)$ que estes passeios tem apenas em comum o vértice i_s e, de modo análogo ao primeiro caso,

a vizinhança de z_1 e de z_2 no quiver de M é da forma (5.2). Por isso vamos reindexar as flechas que incidem nesses pontos, bem como os outros vértices a elas incidentes, segundo (5.2) da forma abaixo, onde o primeiro índice i diz respeito qual o ponto z_i , $i = 1, 2$, está sendo referido e o segundo índice j a que quiver de N_j , $j = 1, 2$:

Como o quiver de cada N_i é conexo, podemos considerar os passeios $A_1(z_1, z_2)$ no quiver de N_1 e $A_2(z_1, z_2)$ no quiver de N_2 , que são os passeios de menor comprimento, nesses quivers, que ligam z_1 e z_2 . É claro que os passeios $A_i(i_s, z_i)$ e $A_i(z_1, z_2)$ tem apenas o vértice z_i em comum, para cada $i = 1, 2$.

Temos neste segundo caso várias possibilidades a analisar, conforme as flechas $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, $i, j = 1, 2$, apareçam nos passeios $A_i(i_s, z_i)$ e $A_i(z_1, z_2)$ que são as seguintes:

2.1. Se, para todo $i = 1, 2$, $A_i(i_s, z_i)$ contém a flecha $\beta_{i,i}$.

Nestas condições cada passeio $A_i(z_1, z_2)$ contém a flecha $\alpha_{i,i}$ e exatamente uma das flechas $\alpha_{i,j}$ ou $\beta_{i,j}$, com $i \neq j$. Donde as possibilidades são as seguintes:

2.1.1. Se $A_i(z_1, z_2)$, para algum i , por exemplo $i = 1$, contiver a flecha $\beta_{2,1}$, então o quiver de M , portanto o quiver Q , contém um subquiver que é formado pela reunião dos passeios $A_i(i_s, z_i)$ e $A_1(z_1, z_2)$, que juntos formam um quiver de tipo $\tilde{A}_r$ sem relações, onde r é a soma dos comprimentos desses passeios, que ilustramos a seguir:

o que, segundo a proposição II.3.3, leva a uma contradição ao fato de que Λ é de tipo de representação finito.

2.1.2 Se, no entanto, para algum $i = 1, 2$, por exemplo $i = 1$, $A_1(z_1, z_2)$ contém a flecha $\alpha_{2,1}$, então o quiver de M contém um subquiver formado pela reunião dos passeios $A_i(i_s, z_i)$ e $A_1(z_1, z_2)$, que está ilustrado a seguir.

Sejam as famílias $N' = (N'(x)_x, N'(\alpha)_\alpha)$ e $N'' = (N''(x)_x, N''(\alpha)_\alpha)$ definidas por:

$$N'(x) = \begin{cases} N_2(x) & \text{se } x \text{ é um vértice de } A_2(i_s, z_2), x \neq i_s \text{ e } x \neq z_2; \\ N_1(x) & \text{se } x \text{ é vértice de } A_1(i_s, z_1) \text{ ou de } A_1(z_1, z_2), \text{ com } x \neq i_s; \\ kv & \text{se } x = i_s; \\ (0) & \text{nos demais vértices de } Q \end{cases}$$

e

$$N'(\alpha) = \begin{cases} N_2(\alpha) & \text{se } \alpha \text{ é flecha em } A_2(i_s, z_2) \text{ e } \alpha \neq \beta_{2,2}; \\ N_1(\alpha) & \text{se } \alpha \text{ é flecha em } A_1(i_s, z_1) \text{ ou de } A_1(z_1, z_2); \\ 0 & \text{sobre as demais flechas de } Q \end{cases}$$

$$N''(x) = \begin{cases} N_2(x) & \text{se } x \text{ é um vértice de } A_2(i_s, z_2) \text{ e } x \neq i_s; \\ N_1(x) & \text{se } x \text{ é vértice de } A_1(i_s, z_1) \text{ ou de } A_1(z_1, z_2), x \neq i_s \text{ e } x \neq z_2; \\ kv & \text{se } x = i_s; \\ (0) & \text{nos demais vértices de } Q \end{cases}$$

e

$$N''(\alpha) = \begin{cases} N_2(\alpha) & \text{se } \alpha \text{ é flecha em } A_2(i_s, z_2); \\ N_1(\alpha) & \text{se } \alpha \text{ é flecha em } A_1(i_s, z_1) \text{ ou de } A_1(z_1, z_2), \text{ com } \alpha \neq \alpha_{2,1}; \\ 0 & \text{sobre as demais flechas de } Q \end{cases}$$

Como definimos $N'(\beta_{2,2}) = 0$ e $N''(\alpha_{2,1}) = 0$, resulta que N' e N'' satisfazem a relação $\beta_{2,2}\alpha_{2,1} = 0$. As demais relações são trivialmente satisfeitas, o que garante que N' e N'' são Λ -módulos. Além disso, por construção, o quiver de N' é obtido do quiver acima pela eliminação da flecha $\beta_{2,2}$ e o de N'' pela eliminação da flecha $\alpha_{2,1}$. Por este motivo são ambos de tipo A_r , onde r é a soma dos comprimentos dos passeios envolvidos no referido quiver, e consequentemente são ambos indecomponíveis.

Construímos assim dois Λ -módulos indecomponíveis que tem os mesmos fatores de composição, porém claramente não isomorfos, uma vez que o simples S_{z_2} é um somando do $\text{soc } N'$ (pois, z_2 é um vértice extremante terminal no quiver de N') e o $\text{soc } N''$ não contém somandos isomorfos a ele (de fato, N'' contém no seu topo um somando isomorfo

a S_{z_2} , pois z_2 é um vértice extremante inicial no quiver de N''). De novo, obtivemos uma contradição com o fato de que Λ -ind é determinada por fatores de composição.

2.2. Se, para algum i , por exemplo $i = 1$, $A_1(i_s, z_1)$ contém a flecha $\alpha_{1,1}$.

Nestas condições, $A_1(z_1, z_2)$ contém necessariamente a flecha $\beta_{1,1}$. Quanto às demais flechas que incidem em z_1 e z_2 , temos as seguintes possibilidades:

2.2.1. Se $A_1(z_1, z_2)$ contém a flecha $\beta_{2,1}$ (ou $\alpha_{2,1}$) e $A_2(i_s, z_2)$ contém a flecha $\beta_{2,2}$ (ou $\alpha_{2,2}$), uma vez que $\beta_{1,1}\alpha_{1,1} \notin R$, é fácil comprovar que a reunião dos passeios $A_1(i_s, z_1)$, $A_1(z_1, z_2)$ e $A_2(i_s, z_2)$ formam um subquiver de Q de tipo $\tilde{A}_r$ sem relações, o que contradiz, pela proposição II.3.3, o fato de que Λ é de tipo de representação finito.

Finalmente, restam os dois últimos casos que são:

2.2.2. Se $A_1(z_1, z_2)$ contém a flecha $\beta_{2,1}$ e $A_2(i_s, z_2)$ contém a flecha $\alpha_{2,2}$.

2.2.3. Se $A_1(z_1, z_2)$ contém a flecha $\alpha_{2,1}$ e $A_2(i_s, z_2)$ contém a flecha $\beta_{2,2}$.

Estes casos são similares ao caso 2.1.2, por isso deixaremos ao leitor a verificação de que, em cada um deles, a categoria Λ -ind contém dois módulos não isomorfos, mas com os mesmos fatores de composição.

Portanto, supor que M admite um fator de composição T com multiplicidade maior ou igual a dois, leva a uma contradição às hipóteses impostas sobre a álgebra. Logo, cada Λ -módulo indecomponível é livre de multiplicidade. □

Bibliografia

- [1] I. Assem, D. Happel, *Generalized tilted algebras of type A_n* , Comm. in Algebra **9** (1981) 2101-2125.
- [2] M. Auslander, *Representation of algebras*, notas de um curso ministrado em Brandeis University. 1981.
- [3] M. Auslander, *Representation theory of artin algebras II*, Comm. Alg. **1** (1974) 269-310.
- [4] M. Auslander, I. Reiten, *Representation theory of artin algebras III: Almost split sequences*, Comm. in Algebra **3** (1975), 239-294.
- [5] M. Auslander, I. Reiten, *Representation theory of artin algebras V: Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms*, Comm. in Algebra **5** (1977) 519-554.
- [6] M. Auslander, I. Reiten, *Modules determined by their composition factors*, Illinois J. Math **29**(1985) 280-301.
- [7] M. Auslander, I. Reiten, *Uniserial functors*, in: Representation Theory II, Lecture Notes in Mathematics **832** (1980) 1-47, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [8] R. Bautista, *On algebras of strongly unbounded representation type*, Comm. Math. Helv. **60** (1985) 392-399.
- [9] R. Bautista, S. Brenner, *On the number of terms in the middle of an almost split sequence*, in: Proceedings of ICRA (Mexico 1980), Lecture Notes in Mathematics **903** (1981) 1-8, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [10] R. Bautista, P. Gabriel, V. Rojter, L. Salmerón, *Representation finite algebras and multiplicative bases*, Inv.Math. **81** (1985) 217-289.
- [11] K. Bongartz, *Indecomposables are standard*, Comm. Math. Helv. **60** (1985) 400-410.
- [12] C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón, *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*, México, UNAM, 1982, 111pp.

- [13] F. U. Coelho, *Uma introdução à teoria de representações de álgebras*, notas de um minicurso, a aparecer nas Atas da XII Escola de Álgebra (Diamantina, 1992) 60p.
 - [14] C. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory: with applications to finite groups and orders*, vol.2 New York, 1984.
 - [15] V. Dlab, C. M. Ringel, *Representation of graphs and algebras*, Carleton Math. Lect. Notes 8 (1974).
-
- [16] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math. 6(1972) 71-103.
 - [17] P. Gabriel, *Indecomposable representation II*, Symposia Math. Inst. Naz. Alta Mat. 11(1973) 81-104.
 - [18] P. Gabriel, *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*, Representation Theory I, Lecture Notes in Mathematics 831 (1980) 1-71, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
 - [19] P. Gabriel, C. Riedtmann, *Group representations without groups*, Comment. Math. Helv. 54 (1979) 240-287.
 - [20] J. P. Jans, *On the indecomposable representations of algebras*, Ann. of Math. 66 (1957) 418-429.
 - [21] A. R. Jones, H. A. Merklen, *Representações de álgebras: métodos diagramáticos*, Publicações do IME-USP, São Paulo, 1984, 196 pp.
 - [22] Ma. I. R. Martins, *Módulos determinados por fatores de composição e módulos livres de multiplicidade*, in Trabalhos do Departamento de Matemática do IME-USP, RT-MAT 93-15, ENCONTRO DE ÁLGEBRA, São Paulo (1993) 28-35.
 - [23] L. A. Nazarova, A. V. Rojter, *Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture*, preprint Inst. Math. Acad. Sci., Kiev 1973, German transl. Mitt. Math. Sem. Giessen 115 (1975).
 - [24] Z. Pogorzały, A. Skowroński, *On algebras whose indecomposable modules are multiplicity free*, Proc. London Math. Soc. 47 (1983) 463-479.
 - [25] I. Reiten, A. Skowroński, S. Smalø, *Short chains and short cycles of modules*, Proc. Amer. Math. Soc., 117(2) (1993) 343-354.
 - [26] C. M. Ringel, *Report on the Brauer-Thrall conjectures*, in: Representation Theory I, Lecture Notes in Mathematics 831 (1980) 104-136. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
 - [27] C. M. Ringel, *Tame algebras*, in: Representation Theory I, Lecture Notes in Mathematics 831 (1980) 137-287, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

- [28] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics **1099**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1984).
- [29] A. V. Rojter, *The unboundness of the dimension of the indecomposable representations of algebras that have a finite number of indecomposable representations*, Izv. Acad. Nauk SSR, **32** (1968), 1275-1282.
- [30] E. Scherzler, J. Waschbüsch, *A class of self-injective algebras of finite representation type*, in: Representation Theory II, Lecture Notes in Mathematics **832** (1980) 545-572, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [31] A. Skowroński, J. Waschbüsch, *Representation-finite biserial algebras*, J. Reine Ang. Math. **345** (1983) 172-181.