**Um Teorema sobre Índices de 1-formas
em Variedades com Bordo**

Claudio Gorodski

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria**
Orientador: **Prof. Dr. Paulo Ferreira Leite**

– SÃO PAULO, maio de 1988 –

*A meus pais e
a Fabio*

PREFÁCIO

Este trabalho visa demonstrar um teorema sobre índices de 1-formas em variedades com bordo de Arnol'd através da aplicação de algumas técnicas de teoria de intersecção e transversalidade. Esse teorema generaliza o resultado clássico sobre índices de campos de vetores em variedades sem bordo de Poincaré-Höpf. Como coproduto desse esforço, conseguimos provar um teorema sobre índices de campos que é independente do teorema de Arnol'd e que é um pouco mais abrangente do que o enunciado clássico.

Gostaríamos de expressar nosso reconhecimento maior pelos anos de dedicação do Prof. Paulo Leite como orientador, empenhado desde os tempos da graduação em nos direcionar para uma formação matemática com base sólida e visão ampla, e principalmente pela amizade com a qual ele nos distingue até hoje.

Nossos agradecimentos sinceros aos Profs. Odilon O. Luciano e Vera Lúcia C. Zanetic pelas discussões iluminadoras e pelas valiosas sugestões que permitiram enriquecer este trabalho.

Agradecemos também ao Prof. Maurício Peixoto por nos comunicar a existência da referência [Pugh].

São Paulo, maio de 1988

Claudio Gorodski

ÍNDICE

PREFÁCIO	v
INTRODUÇÃO	ix
Capítulo 0: Preliminares	1
Capítulo 1: Teoria de Intersecção Adequada	9
Capítulo 2: O Teorema de Poincaré-Höpf	17
Capítulo 3: Singularidades de Bordo	35
Capítulo 4: Uma Relação entre Índices de 1-formas	53
Capítulo 5: O Teorema de Poincaré-Höpf com Singularidades no Bordo	67
Apêndice A: Variedade Dupla de uma Variedade com Bordo ..	71
Apêndice B: Equivalência das Definições de Característica de Euler	79
Apêndice C: Estabilidade em Variedades com Bordo	83
Apêndice D: Resultados Gerais	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91

INTRODUÇÃO

Consideremos campos de vetores definidos em variedades compactas sem bordo. É um resultado simples que num ponto de uma variedade em que um campo não se anula ele é localmente equivalente a um campo constante (não-nulo). Isso mostra que o comportamento interessante do campo está localizado em torno de suas singularidades (zeros). Por razões de ordem técnica, suporemos sempre que elas são isoladas.

Informações importantes sobre o comportamento do campo nas imediações de uma singularidade são fornecidas pelo índice do campo. O índice é um número inteiro que, de maneira informal, pode ser pensado como o número (orientado) de pontos de uma pequena esfera centrada na singularidade onde o campo aponta numa direção e sentido pré-fixados.

Um resultado clássico que revela a importância do índice é dado pelo teorema de Poincaré-Höpf o qual afirma ser a soma dos índices das singularidades de um campo de vetores com singularidades isoladas definido numa variedade compacta sem bordo igual à característica de Euler da variedade ([Guillemin], p. 134).

É fácil constatar que esse resultado não se estende diretamente para o caso de variedades com bordo. Por exemplo, um campo de vetores constante não-nulo em um disco bidimensional nunca se anula e, no entanto, a característica de Euler do disco é $+1$. Apesar disso, podemos mostrar que o teorema permanece verdadeiro se o campo apontar para fora no bordo ([Milnor], p. 35). Mas o que dizer se o campo se anular num ponto do bordo? Como definir o índice de um tal ponto singular?

Uma resposta para essa questão foi dada pelo matemático russo V. I. Arnol'd: uma generalização da teoria de singularidades para esse caso é possível se campos de vetores são substituídos por 1-formas diferenciais. Em [Arnol'd 1978] aparece publicada pela primeira vez a definição de singularidade de bordo de uma 1-forma, juntamente com um teorema de classificação. Num artigo publicado no ano seguinte, ele mostra que a definição é consistente com a teoria usual de singularidades (interiores) no sentido de que aqui também vale um resultado sobre a soma dos índices: a soma dos índices das singularidades (interiores e de bordo) de toda 1-forma com singularidades isoladas numa variedade com bordo é igual à característica de Euler da variedade.

Para uma 1-forma definida numa variedade com bordo, um ponto interior é uma singularidade interior se a 1-forma se anular no espaço tangente à variedade naquele ponto, e a definição de índice nesse caso é formalmente análoga à definição correspondente para

campos. Por razões que ficarão claras mais adiante (pois é dessa maneira que valerá o teorema sobre a soma dos índices), é conveniente chamar de *singularidade de bordo* da 1-forma um ponto do bordo onde ele se anular apenas no espaço tangente ao bordo. O índice desse tipo de singularidade é obtido considerando-se um pequeno hemisfério centrado nela e contando-se o número (orientado) de pontos do hemisfério onde a 1-forma é positivamente proporcional à diferencial de uma equação não-degenerada para o bordo (uma espécie de “função distância” ao bordo definida na variedade (cf. (0.18))).

No caso de campos de vetores existem definições correspondentes, mas somos obrigados a fixar uma métrica Riemanniana na variedade. Para um campo de vetores numa variedade Riemanniana com bordo, um ponto do bordo é uma singularidade de bordo se ele for ortogonal ao bordo no ponto. Aqui o índice é o número de pontos (com sinais) de um pequeno hemisfério centrado na singularidade nos quais o campo é múltiplo positivo do gradiente da equação não-degenerada (esse gradiente é, de certa forma, a “normal interior” ao bordo). Enquanto que para 1-formas as definições de singularidade de bordo e do seu índice são invariantes por difeomorfismos quaisquer, no caso de campos essas noções são preservadas apenas por difeomorfismos isométricos (que preservam métrica) — o ponto crucial aqui é que difeomorfismos sempre preservam o bordo, mas em geral não preservam a métrica — e é essa a vantagem de se trabalhar com 1-formas. Mas observemos que, uma vez fixada uma métrica Riemanniana na variedade, campos e 1-formas duais terão as mesmas singularidades com os mesmos índices.

Os métodos utilizados por Arnol'd em seu artigo são basicamente homológicos. A proposta do nosso trabalho, sugerida pelo Prof. Paulo F. Leite, foi a de desenvolver essas idéias por meio de técnicas de transversalidade e teoria de intersecção. Além dos argumentos de transversalidade terem uma natureza mais geométrica, esse enfoque, na nossa opinião, tem a vantagem de requerer um aparato matemático menos especializado. Dessa maneira, o conceito básico com o qual trabalharemos é o número de intersecção.

Em [Guillemin], o número de intersecção para aplicações entre variedades sem bordo é definido como um invariante homotópico e é utilizado para estabelecer a teoria usual de singularidades interiores. Para que possamos empregá-lo também na formalização da teoria de singularidades de bordo, é necessário adaptar os argumentos de [Guillemin] de maneira a levar em consideração o fato de um hemisfério ser uma variedade com bordo. A seguinte figura ilustra o problema de se obter um invariante homotópico no caso de variedades com bordo. Consideremos dois segmentos compactos incluídos no plano se interceptando como em (a). É claro que eles devem ter número de intersecção não-nulo (± 1 , conforme as orientações escolhidas). Mas uma deformação homotópica de um dos segmentos de maneira a se obter a situação de (c) faz com que o número de intersecção

se anule. O problema está ocorrendo em (b), no exato instante em que o bordo de um segmento está interceptando o outro.

Para que o número de intersecção fique bem definido, consideraremos sempre intersecções adequadas, isto é, intersecções em que os bordos não participarão. E dessa forma obteremos um invariante por homotopias adequadas, ou seja, homotopias nas quais a intersecção é adequada em todo instante. Essas técnicas, como é fácil ver, funcionarão sem modificações para variedades com canto.

A seguir comentaremos rapidamente o conteúdo de cada capítulo deste trabalho.

O capítulo 0 consiste de uma resenha de fatos que serão utilizados nos capítulos seguintes. Embora ele tenha apenas a função de servir como ponto de referência para o leitor no sentido de introduzir o contexto e por causa disso a sua leitura não seja essencial, algumas seções cobrem um material não muito usualmente conhecido (por exemplo, variedades com canto).

O capítulo 1 refaz a teoria de intersecção do capítulo 3 de [Guillemin] para o caso de variedades com canto baseado na idéia de aplicação adequada. Para introduzir o número de intersecção aqui é preciso estabelecer teoremas sobre a genericidade das aplicações transversais nesse novo contexto. Deliberadamente evitamos falar em jatos, topologias em espaços de aplicações, etc. Optamos por simplificar a exposição através de uma exposição mais elementar dentro do espírito de [Guillemin]. Por exemplo, ao invés de dizer algo do tipo “as aplicações $M \rightarrow W$ que são transversais a $N \subset W$ formam um conjunto residual com a topologia C^∞ de Whitney”, diríamos que “toda aplicação lisa $M \rightarrow W$ é homotópica a uma aplicação transversal a $N \subset W$ ”, ou ainda, “dada $f : M \rightarrow W$ lisa, existe uma família lisa de aplicações lisas $\{f_s : M \rightarrow W\}_{s \in S}$ indexada numa bola S de um espaço euclidiano tal que $f_0 = f$ e $f_s \bar{\cap} N$ para quase todo $s \in S$ ”.

O capítulo 2 trata de singularidades interiores. A primeira parte é reservada ao

estudo de campos, onde definimos o índice e damos uma demonstração do teorema de Poincaré-Höpf para campos em variedades com bordo que apontam para fora no bordo (teorema I). Segundo o nosso ponto de vista de evitar os recursos homológicos, a nossa definição de característica de Euler é “diferencial”. Contudo, achamos fundamental incluir um apêndice (B) onde estabelecemos a equivalência dessa definição com a tradicional. Na segunda parte, extendemos esses resultados para 1-formas. Como 1-formas e campos duais numa variedade Riemanniana tem as mesmas singularidades com os mesmos índices, o teorema sobre a soma dos índices interiores vale para 1-formas numa variedade com bordo as quais são duais, em relação a alguma métrica Riemanniana, de campos que apontam para fora no bordo. Surpreendentemente, se agora tomarmos essas 1-formas e considerarmos os campos que lhe são duais, obteremos uma classe de campos para a qual vale o teorema e que inclui mais campos do que só aqueles que apontam para fora. Pode-se mostrar com um pouco de Álgebra Linear que essa classe engloba não somente os campos que apontam para fora no bordo, mas também aqueles que podem ser obtidos destes através de uma homotopia adequada em relação ao campo nulo. Obtemos assim um teorema sobre a soma dos índices interiores para campos (teorema II) que é mais geral do que o teorema clássico.

Essa foi a ordem em que descobrimos as coisas. No presente trabalho a ordem está um pouco diferente, pois percebemos ser mais simples demonstrar diretamente o teorema mais geral para campos para depois tirar facilmente o teorema para 1-formas. A hipótese para que um campo satisfaça esse teorema mais geral é a de que ele não seja ortogonal ao bordo nos pontos onde ele não aponta para fora. A hipótese correspondente para a 1-forma satisfazer o teorema é a de que ela seja positiva nos vetores que apontam para fora num ponto do bordo onde ela se anula no espaço tangente ao bordo. Apesar desses resultados serem independentes do conceito de singularidade de bordo a ser introduzido no capítulo seguinte, é interessante notar que essa condição sobre a 1-forma vai implicar que ela tenha índice zero em cada singularidade de bordo isolada.

As definições de singularidade de bordo e do seu índice, para 1-formas e para campos, aparecem então no capítulo 3. Incluimos aí também alguns exemplos e a prova de que a correspondência canônica entre campos e 1-formas numa variedade Riemanniana preserva as singularidades e os seus índices.

O teorema sobre a soma dos índices no caso de singularidades de bordo (teorema III) está no capítulo 5. O esquema da demonstração é o que segue. A toda variedade com bordo é possível associar a sua variedade dupla que consiste de duas cópias da variedade original identificadas através de seu bordo (apêndice A). Dada uma 1-forma com singularidades isoladas na variedade original, ela induz 1-formas com singularidades isoladas no duplo e no bordo. Para essas 1-formas que estão definidas em variedades sem

bordo podemos aplicar o teorema de Poincaré-Höpf. Relações entre as características de Euler das três variedades e entre os índices das 1-formas completam a demonstração.

O método de demonstração exposto acima depende essencialmente do capítulo 4. É aí que demonstramos a relação fundamental existente entre o índice da 1-forma dada numa singularidade de bordo e os índices das outras duas 1-formas nas singularidades correspondentes. É interessante notar que a relação entre as características de Euler das três variedades também provém da relação fundamental entre os índices (e do teorema de Poincaré-Höpf II).

Agora, um pequeno comentário a respeito dos vários teoremas de Poincaré-Höpf. É claro que o teorema II generaliza o "I". Aparentemente o "III" é o mais geral dos três. Mas há um ponto sutil aqui. Consideremos o caso de campos de vetores. É hipótese do teorema III que o campo só possua um número finito de singularidades, tanto interiores como de bordo. Note que apesar dos teoremas I e II não mencionarem o termo singularidade de bordo, elas podem até existir e os teoremas I e II serem aplicáveis, desde que o campo aponte para fora no ponto em questão. Nesse caso, se a singularidade for isolada, é claro que o índice será zero. Mas isso acaba incluindo a possibilidade de um número infinito de singularidades de bordo, algumas delas não isoladas, possibilidade que o teorema III não prevê. Um exemplo muito simples em que isso ocorre é o campo radial no disco bidimensional com uma singularidade tipo fonte no centro.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Aproveitaremos este capítulo inicial para fixar um pouco de terminologia e para recapitular alguns resultados conhecidos que serão necessários para os capítulos subseqüentes. O leitor, a seu critério, pode começar a leitura a partir do capítulo 1 e voltar a este capítulo para consultar algum tópico em particular quando julgar necessário.

Generalidades

(0.1) Seja $m \geq 1$ um inteiro. $\mathbf{R}^m$ designará o *espaço euclidiano de dimensão m* , cujos elementos são m -uplas de números reais $x = (x_1, \dots, x_m)$ (se $m = 0$, $\mathbf{R}^0 = \{0\}$). Indicaremos a *norma euclidiana* de x com $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$. Se $m = 1$, $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ é a reta real; nesse caso, pomos $\|x\| = |x|$. Usaremos I para denotar o *intervalo fechado unitário* $[0, 1] \subset \mathbf{R}$. $\mathbf{R}_+^m$ e $\mathbf{R}_-^m$ serão os *semi-espaços fechados* definidos por $x_1 \geq 0$ e $x_1 \leq 0$, respectivamente. A *esfera unitária de dimensão $m - 1$* formada pelos elementos de $\mathbf{R}^m$ de norma um será denotada com S^{m-1} . Escreveremos também $S_+^{m-1} = S^{m-1} \cap \mathbf{R}_+^m$, $S_-^{m-1} = S^{m-1} \cap \mathbf{R}_-^m$ e $S_0^{m-1} = \mathbf{R}^m \cap \{x_1 = 0\}$. Se S é um subconjunto arbitrário de um espaço euclidiano, diremos que uma propriedade P relacionada com os pontos de S *vale para quase todo ponto de S* (ou *vale quase sempre em S*) se o conjunto dos pontos de S nos quais P não for verdadeira tiver medida de Lebesgue zero.

(0.2) Assumiremos como conhecidos os conceitos básicos da teoria de *variedades diferenciáveis*, as quais serão sempre supostas *lisas*, i.e., de classe $\mathcal{C}^\infty$. Também diremos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ entre variedades é *lisa* se ela for diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nesse caso, sua *derivada* num ponto $x \in M$ será denotada com $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$.

Regularidade e transversalidade

(0.3) Uma aplicação lisa $f : M \rightarrow N$ entre variedades será dita *regular* num ponto $x \in M$ se f for uma submersão em x ; nesse caso, x será um *ponto regular* de f . Um ponto de M que não for um ponto regular de f será chamado de um *ponto crítico* de f . Diremos

$y \in N$ é um *valor crítico* para f se y for imagem de um ponto crítico de f ; caso contrário, y será um *valor regular* para f .

(0.4) *Teorema de Sard.* Quase todo ponto de N é um valor regular para $f : M \rightarrow N$.

(0.5) *Teorema da pré-imagem.* A pré-imagem de um valor regular por $f : M \rightarrow N$ é uma subvariedade de M .

(0.6) *Teorema da pilha de discos.* ([Guillemin], p. 26 ou [Lima], p. 507) Suponha que y é um valor regular de $f : M \rightarrow N$, onde M é compacta e tem a mesma dimensão que N . Então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_p\}$ e existe uma vizinhança V de y em N tal que $f^{-1}(V)$ é uma reunião disjunta $U_1 \cup \dots \cup U_p$ onde cada U_i é uma vizinhança aberta de x_i e f aplica U_i difeomorficamente sobre V .

(0.7) Um aplicação lisa entre variedades $f : M \rightarrow W$ é dita *transversal* a uma subvariedade N de M em um subconjunto C de M se

$$df_x T_x M + T_{f(x)} N = T_{f(x)} W$$

para todo $x \in f^{-1}(N) \cap C$. Indica-se $f \pitchfork N$ em C . Se $C = M$, dizemos simplesmente que f é transversal a N e escrevemos $f \pitchfork N$. Note que $f \pitchfork \{y\}$ se e somente se $y \in N$ é valor regular para f .

(0.8) *Teorema.* ([Guillemin], p. 28) Se $f : M \rightarrow W$ é transversal a N , então $f^{-1}(N)$ é uma subvariedade de M de mesma codimensão que N .

(0.9) *Proposição.* ([Guillemin], p. 33) Sejam $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow W$ lisas com $g \pitchfork Z$. Então $f \pitchfork g^{-1}(Z)$ se e somente se $g \circ f \pitchfork Z$.

(0.10) *Teorema.* ([Guillemin], p. 68) Se $F : M \times S \rightarrow W$ é uma aplicação lisa entre variedades que é transversal a uma subvariedade N de W , então $f_s = F|_{M \times \{s\}}$ é transversal a N para quase todo $s \in S$.

O seguinte resultado decorre facilmente de [Guillemin], pp. 68-73:

(0.11) *Teorema.* Seja $f : M \rightarrow W$ transversal a N , subvariedade fechada de W , em C , subconjunto fechado de M . Então existe $F : M \times S \rightarrow W$ lisa, onde S é a bola aberta unitária de um espaço euclidiano, tal que $(f_s = F|_{M \times \{s\}}, s \in S)$: $f_0 = f$; $f_s = f$ numa vizinhança de C em M para todo $s \in S$; e $f_s \pitchfork N$ para quase todo $s \in S$.

Variedades com canto

(0.12) Um *quadrante* Q de $\mathbf{R}^m$ de ordem k ($0 \leq k \leq m$) é um subconjunto de $\mathbf{R}^m$ da forma $Q = \{x \in \mathbf{R}^m \mid l_1(x) \geq 0, \dots, l_k(x) \geq 0\}$ onde $\{l_1, \dots, l_k\}$ é um subconjunto

linearmente independente de $(\mathbf{R}^m)^*$. Se $x \in Q$ e $l_i(x) = 0$ para exatamente j dos l_i 's, então x é um *canto de ordem j* de Q ; a ordem de um canto não depende do sistema $\{l_1, \dots, l_k\}$ que descreve Q . Dizemos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ definida num aberto U de um quadrante Q é *lisa* se é a restrição de uma aplicação lisa definida num aberto de $\mathbf{R}^m$ que contém U ; nesse caso, sua *derivada* num ponto $x \in U$ está bem definida como a derivada em x de qualquer extensão a um aberto de $\mathbf{R}^m$ (isso decorre do fato de sempre existir uma base de $\mathbf{R}^m$ formada por vetores "pertencentes" a Q). Sejam U_1 e U_2 abertos de quadrantes $Q_1 \subset \mathbf{R}^{m_1}$ e $Q_2 \subset \mathbf{R}^{m_2}$, respectivamente, e $f : U_1 \rightarrow U_2$. Diremos que f é *lisa* se $f : U_1 \rightarrow \mathbf{R}^{m_2}$ for lisa e diremos que f é um *difeomorfismo* se f for inversível e se f e f^{-1} forem ambas lisas. Um difeomorfismo $f : U_1 \rightarrow U_2$ preserva a ordem dos cantos.

(0.13) Seja $m \geq 0$ um inteiro. Tomando por modelos os abertos de quadrantes de ordem $k \leq m$ e por mudanças de coordenadas os difeomorfismos, nós obtemos a categoria das *variedades com canto de dimensão m* . Seja M uma variedade com canto de dimensão m . Um ponto $x \in M$ é um *canto de ordem j* de M se existe uma carta $\phi : U \subset M \rightarrow \phi(U) \subset Q \subset \mathbf{R}^m$ com $x \in U$ e tal que $\phi(x)$ é um canto de ordem j de Q (a ordem de x não depende da carta escolhida e é invariante por difeomorfismos). Chamaremos de *j -bordo* de M a $\partial^j M$, o conjunto dos cantos de M com ordem maior ou igual a j . $\partial M = \partial^1 M$ será também chamado de *bordo* de M e $M' = M - \partial M$ será o *interior* de M . Se $\partial^2 M = \emptyset$, então diremos que M é uma *variedade com bordo*. O *espaço tangente* a M em x , $T_x M$, o *fibrado tangente* de M , TM , e o *fibrado cotangente* de M , T^*M , são definidos da maneira usual. Se $\phi : U \subset M \rightarrow \phi(U) \subset Q \subset \mathbf{R}^m$ é uma carta de M centrada em x , então a pré-imagem de Q por $d\phi_x$ é o *quadrante interior* $QT_x M$ (ele não depende da carta escolhida centrada em x). Diremos que um vetor tangente $v \in T_x M$ *aponta para fora* se $v \notin QT_x M$. O conceito de aplicação lisa entre variedades com canto é definido como para variedades ordinárias, assim como os conceitos de imersão, submersão, etc. Diremos que $N \subset M$ é uma *subvariedade* de M de dimensão n se para todo $x \in N$ existir uma carta $\phi : U \subset M \rightarrow \phi(U) \subset Q \subset \mathbf{R}^m$ de M centrada em x e existir um quadrante $\hat{Q} \subset \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^m$ tal que $\hat{Q} \subset Q$ e $\phi(N \cap U) = \phi(U) \cap \hat{Q}$.

(0.14) Se $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^{n_i}$ é uma aplicação lisa definida no aberto U_i do quadrante $Q_i \subset \mathbf{R}^{m_i}$ de ordem j_i , onde $i : 1, 2$, então a *aplicação produto* $f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} = \mathbf{R}^{n_1+n_2}$, definida no aberto $U_1 \times U_2$ do quadrante $Q_1 \times Q_2 \subset \mathbf{R}^{m_1+m_2}$ por $f_1 \times f_2(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$, também é lisa. A partir disso, é fácil ver que se M_1 e M_2 são variedades com canto de dimensões m_1 e m_2 , respectivamente, então está bem definida a *variedade produto* $M_1 \times M_2$, para cujas cartas tomamos os produtos de cartas de M_1 pelas de M_2 . Note que $\partial(M_1 \times M_2) = \partial M_1 \times M_2 \cup M_1 \times \partial M_2$.

(0.15) Se uma aplicação entre variedades sem bordo (i.e., para as quais o 1-bordo

é vazio) é um mergulho, então sua imagem é uma subvariedade do contradomínio. Isso deixa de valer para variedades com canto em geral. Considere, por exemplo, a seção gráfica $t \in \mathbf{R} \mapsto (t, f(t)) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ da aplicação $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(t) = t^2$. No entanto, não é difícil provar que:

(i) Se M é uma variedade com canto, então a diagonal $\Delta_M = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$ é uma subvariedade de $M \times M$.

(ii) Se f é uma aplicação lisa entre variedades com canto e $\partial N = \emptyset$, então o gráfico de f é uma subvariedade de $M \times N$ (aqui a hipótese $\partial N = \emptyset$ é essencial: veja o contra-exemplo mais acima).

(iii) Se $X : M \rightarrow TM$ é um campo de vetores liso na variedade com canto M , então $X(M)$ é uma subvariedade de TM .

A referência básica para variedades com canto é [Michor].

Variedades com bordo

(0.16) Uma *variedade com bordo* (cf. (0.13)) é uma variedade com canto M tal que o 2-bordo de M , $\partial^2 M$, é vazio (observe que uma variedade sem bordo é uma variedade com bordo cujo bordo $\partial M = \partial^1 M$ é vazio); nesse caso, o bordo de M , ∂M , é uma subvariedade sem bordo de M de codimensão um.

(0.17) Um *colar* do bordo ∂M de uma variedade com bordo M é um mergulho $h : \partial M \times [0, +\infty) \rightarrow M$ tal que $h(x, 0) = x$ para todo $x \in \partial M$. Existe um colar de ∂M para toda variedade com bordo M ([Hirsch], p. 152).

(0.18) Uma *equação não-degenerada* para o bordo de uma variedade com bordo M é uma equação $f = 0$ onde $f : M \rightarrow [0, +\infty)$ é uma aplicação lisa tal que 0 é um valor regular para f e $f^{-1}(0) = \partial M$. Existe uma equação não-degenerada para ∂M qualquer que seja a variedade com bordo M ([Guillemin], p. 64; ver também (0.17)).

(0.19) *Teorema de classificação de variedades unidimensionais compactas com bordo.* ([Guillemin], p. 208) Toda variedade compacta, conexa, com bordo, de dimensão um é difeomorfa a S^1 ou a I .

Segue do teor. da pré-imagem o seguinte

(0.20) *Teorema.* Seja $f : M \rightarrow W$ uma aplicação lisa entre variedades com bordo e seja N uma subvariedade com bordo de W . Suponhamos que $f \bar{\cap} N$, $f|_{\partial M} \bar{\cap} N$, $f \bar{\cap} \partial N$ e $f(\partial M) \cap \partial N = \emptyset$. Então a pré-imagem $f^{-1}(N)$ é uma subvariedade com bordo de M de mesma codimensão que N e

$$\partial f^{-1}(N) = f^{-1}(\partial N) \cup (f|_{\partial M})^{-1} = f^{-1}(\partial N) \cup [f^{-1}(N) \cap \partial M].$$

Variedades orientadas

(0.21) Uma *orientação* para M , uma variedade com canto de dimensão positiva, é uma escolha *lisa* de uma orientação para cada espaço tangente $T_x M$ no sentido de que para cada $x_0 \in M$ deve existir uma carta local de M centrada em x_0 , $\phi : U \subset M \rightarrow \phi(U) \subset Q \subset \mathbf{R}^m$, tal que $d\phi_x : T_x M \rightarrow \mathbf{R}^m$ preserva orientação para todo $x \in U$ (nesse caso, diremos que ϕ *preserva orientação*). Se $\dim M = 0$, uma orientação para M é uma escolha de um *número de orientação* ± 1 para cada $x \in M$. Uma alternativa equivalente para a definição acima é dizer que uma orientação para M é um atlas de M no qual todas as mudanças de coordenadas preservam orientação. M é *orientável* se existir uma orientação para M .

(0.22) Sejam M e N variedades com canto *orientadas* (i.e., para as quais já foi especificada uma orientação). A *orientação produto* em $M \times N$ é aquela na qual uma base positiva de $T_{(x,y)}(M \times N) = T_x M \times T_y N$ é $\{(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\}$, onde $\{v_1, \dots, v_m\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ são respectivamente bases positivas de $T_x M$ e de $T_y N$, para todos $x \in M$ e $y \in N$.

(0.23) Seja M uma variedade orientada com bordo. A *orientação natural* de ∂M é aquela na qual uma base positiva de $T_x(\partial M)$ é $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ se $\{w_0, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ for uma base positiva de $T_x M$ onde $w_0 \in T_x M$ a.p.f..

(0.24) Por exemplo, $\mathbf{R}^m$ induz naturalmente uma orientação em B^m , a bola fechada unitária de $\mathbf{R}^m$. Consideraremos sempre a esfera S^{m-1} orientada como bordo de B^m , e os hemisférios S_+^{m-1} e S_-^{m-1} com a orientação induzida de S^{m-1} . Note que dessa maneira, $S_0^{m-1} = \partial S_+^{m-1} = -S_-^{m-1}$, como variedades orientadas (se M é uma variedade orientada, indicamos com $-M$ a variedade com a *orientação oposta*, obtida invertendo-se a orientação de cada espaço tangente).

(0.25) Consideremos I com a orientação induzida de $\mathbf{R}$. Então $\partial I = \{0, 1\}$ e o número de orientação de $T_x(\partial I)$ ($x = 0, 1$) é o sinal da base $\{w_0\}$ de $T_x I = \mathbf{R}$, onde $w_0 \in T_x I$ a.p.f.. Portanto, a orientação em $T_1 \partial I$ é $+1$ (tomamos $w_0 = 1$) e em $T_0 \partial I$ é -1 (tomamos $w_0 = -1$). Trocar a orientação de I tem o efeito de simplesmente inverter a orientação em cada ponto do bordo. Como os pontos do bordo de uma variedade unidimensional compacta orientada com bordo M são unidos por cópias difeomorfas de I (ver (0.19)), segue que a *soma dos números de orientação dos pontos de M é zero*.

(0.26) Um último exemplo importante é o produto $I \times M$, onde M é uma variedade sem bordo orientada. Se $x \in M$, então $(1, 0) \in T_{(1,x)}(I \times M)$ a.p.f. e $(-1, 0) \in T_{(0,x)}(I \times M)$ a.p.f.. Portanto, não é difícil ver que

$$\partial(I \times M) = M_1 \cup (-M_0) = M_1 - M_0$$

como variedades orientadas, onde cada fatia $M_t = \{t\} \times M$ está orientada como cópia de M .

(0.27) Se V , V_1 e V_2 são espaços vetoriais com $V = V_1 \oplus V_2$, então orientações em dois quaisquer desses espaços determinam uma *orientação soma direta* no terceiro. Basta se tomar bases ordenadas β_1 e β_2 de V_1 e de V_2 , respectivamente, considerar a base formada $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ de V , e pôr $\text{ sinal}(\beta) = \text{ sinal}(\beta_1) \cdot \text{ sinal}(\beta_2)$. Em geral, sendo

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata curta de espaços vetoriais, orientações de dois desses espaços induzem uma orientação no terceiro (de fato, $V \cong U \oplus W$).

(0.28) Sejam M , N e W variedades orientadas, onde M é com bordo, $\partial M = \partial W = \emptyset$ e N é subvariedade de W . Se $f : M \rightarrow W$ é uma aplicação lisa tal que $f \cap N$ e $f|_{\partial M} \cap N$, então $f^{-1}(N)$ é uma subvariedade de M com bordo $\partial f^{-1}(N) = f|_{\partial M}^{-1}(N) = f^{-1}(N) \cap \partial M$ (ver (0.20)). Seja $x \in f^{-1}(N)$ e seja H um subespaço de $T_x M$ que é complementar a $T_x[f^{-1}(N)]$. Então as equações (de fácil verificação)

$$\begin{cases} df_x H \oplus T_{f(x)} N = T_{f(x)} W \\ H \oplus T_x[f^{-1}(N)] = T_x M \end{cases}$$

definem uma orientação natural em $T_x[f^{-1}(N)]$ (a qual não depende da escolha de H). De fato, $df_x H$ recebe uma orientação soma direta pela primeira equação (ver (0.27)) e então H fica orientado de modo que o isomorfismo $df_x|_H : H \rightarrow df_x H$ preserve orientação. Finalmente, a segunda equação define uma orientação soma direta em $T_x[f^{-1}(N)]$. A *orientação pré-imagem* de $f^{-1}(N)$ é obtida orientando-se cada espaço tangente $T_x[f^{-1}(N)]$ pelo processo acima descrito.

(0.29) Note que $f^{-1}(N)$ com a orientação pré-imagem induz uma orientação natural no seu bordo $\partial f^{-1}(N)$, conforme vimos antes. Por outro lado, poderíamos também orientar o bordo como a pré-imagem de N pela aplicação $f|_{\partial M} : \partial M \rightarrow W$. É uma aplicação simples das definições provar que essas orientações em $\partial f^{-1}(N)$ diferem pelo sinal $(-1)^{\text{codim } N}$ (ver [Guillemin], p. 101).

Grau de uma aplicação lisa

(0.30) Sejam M e N variedades orientadas sem bordo de mesma dimensão. Suponhamos ainda que M é compacta e que N é conexa. Se $f : M \rightarrow N$ é lisa, então o *grau*

de f , denotado com $\deg f$, é igual a $I(f, \{y\})$, onde $y \in W$ é arbitrário (e está orientado positivamente). Como N é conexa, mostra-se que $I(f, \{y\})$ é o mesmo para qualquer $y \in N$.

(0.31) *Invariança homotópica do grau.* ([Guillemin], p. 109) Aplicações homotópicas têm o mesmo grau.

(0.32) *Teorema do bordo.* ([Guillemin], p. 110) Seja $f : M \rightarrow N$ lisa onde M é compacta, N é conexa, $\dim M = \dim N$ e W é uma variedade com bordo tal que $\partial W = M$. Se existe uma extensão lisa de f a W , então $\deg f = 0$.

CAPITULO 1

TEORIA DE INTERSECÇÃO ADEQUADA

Pretendemos generalizar a teoria de intersecção desenvolvida em [Guillemin] e [Hirsch] para o caso de variedades com bordo. Para isso, introduziremos o conceito de aplicação adequada. Nesse contexto, a hipótese de que as variedades em questão têm canto (ver (0.13)) não apresentará nenhuma dificuldade extra sobre o caso de variedades apenas com bordo.

Todas as variedades e aplicações (inclusive homotopias) consideradas neste capítulo (e nos demais) serão supostas lisas.

Transversalidade adequada

Nesta seção, M , N e W designarão variedades com canto sendo que suporemos que N é uma subvariedade fechada de W .

O primeiro teorema está relacionado com a densidade das aplicações transversais e será o nosso resultado básico de transversalidade.

(1.1) **Teorema.** *Seja $f : M \rightarrow W$ e suponhamos que existem abertos $U \subset M'$ (notação: $M' = M - \partial M$) e $V \subset W'$ tais que $f(U) \subset V$, $V \cap \partial N = \emptyset$ e $f \bar{\cap} N$ em $M - U$. Então existe $F : M \times S \rightarrow W$, onde S é a bola aberta unitária de um espaço euclidiano, tal que, sendo $f_s : M \rightarrow W$ dada por $f_s(x) = F(x, s)$ para cada $s \in S$, temos: $f_0 = f$; $f_s(U) \subset V$ para todo $s \in S$; $f_s = f$ numa vizinhança de $M - U$ para todo $s \in S$; e $f_s \bar{\cap} N$ para quase todo $s \in S$.*

Demonstração. Seja $\hat{f} : U \rightarrow V$ a restrição de f . Existe um fechado $F \subset U$ tal que $f \bar{\cap} N$ em $M - F$, pois para cada $x \in M - U$, $f \bar{\cap} N$ em x implica $f \bar{\cap} N$ numa vizinhança de x (ver dem. do item (d) da parte (i) do teor. (C.1)).

Seja G um aberto em M tal que $F \subset G \subset \tilde{G} \subset U$ (fig. 1-1). Então $U - G$ é um fechado em U e $\hat{f} \bar{\cap} N \cap V$ em $U - G$, pois $U - G \subset M - F$. Tendo que U , V e $N \cap V$ são variedades sem bordo e que $N \cap V$ é fechada em V , existe $\hat{F} : U \times S \rightarrow V$, onde S é a bola aberta unitária aberta de algum espaço euclidiano, tal que, sendo $\hat{f}_s : U \rightarrow V$ dada

Figura 1-1

por $\hat{f}_s(x) = \hat{F}(x, s)$ para cada $s \in S$, temos $\hat{f}_0 = \hat{f}$, $\hat{f}_s = \hat{f}$ numa vizinhança de $U - G$ e $\hat{f}_s \cap N \cap V$ para quase todo $s \in S$ (ver (0.11)).

Definimos $F : M \times S \rightarrow W$ por

$$F(x, s) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in M - \bar{G}; \\ \hat{F}(x, s), & \text{se } x \in U. \quad \square \end{cases}$$

A próxima definição é importante na medida em que o número de intersecção será definido para aplicações adequadas e será invariante por homotopias adequadas. *No que segue suporemos sempre que $N' \subset W'$.*

(1.2) **Definições.** Seja $f : M \rightarrow W$.

(i) Diremos que f é adequada em relação a N ou N -adequada se:

- (a) $f(M') \subset W'$;
- (b) $f(M) \cap \partial N = \emptyset$;
- (c) $f(\partial M) \cap N = \emptyset$.

(ii) Suponhamos que f é N -adequada e seja $F : I \times M \rightarrow W$ uma homotopia de f . Diremos que F é uma homotopia N -adequada ou que F é uma N -homotopia se $f_t : x \in M \mapsto F(t, x) \in W$ for uma aplicação N -adequada para todo $t \in I$. Nesse caso, sendo $f_0 = f$ e $f_1 = g$, diremos que f é N -homotópica a g .

Note que se as variedades em questão não têm bordo, então toda aplicação $M \rightarrow W$ é trivialmente N -adequada. Além disso, é fácil ver que N -homotopia é uma relação de equivalência na classe das aplicações N -adequadas $M \rightarrow W$.

(1.3) **Proposição.** *Se $f : M \rightarrow W$ é N -adequada e transversal a N , então $f^{-1}(N)$ é uma subvariedade sem bordo de M' , de mesma codimensão que N .*

Demonstração. De fato, sendo $f' : M' \rightarrow W'$ a restrição de f , temos que $N' \subset W'$ e $f' \pitchfork N'$. Como f é N -adequada, $f^{-1}(N) = (f')^{-1}(N')$, que tem as propriedades desejadas (ver (0.8)). $\square$

Os próximos dois teoremas estão relacionados com a genericidade das aplicações transversais no contexto das aplicações adequadas.

(1.4) **Teorema.** *Seja $f : M \rightarrow W$ N -adequada. Então existe $g : M \rightarrow W$ N -homotópica a f (e portanto N -adequada) e transversal a N .*

Demonstração. Sejam $U = M'$ e $V = W' - \partial N$. Como f é N -adequada, $f(M') \subset W' - \partial N$ e $f \pitchfork N$ em $M - M' = \partial M$. Portanto, U e V são abertos nas hipóteses do teor. (1.1) e existe $F : M \times S \rightarrow W$ tal que $f_0 = f$, $f_s(M') \subset W' - \partial N$ e $f_s = f$ numa vizinhança de ∂M para todo $s \in S$, e $f_s \pitchfork N$ para quase todo $s \in S$. Seja $s_0 \in S$ tal que $g = f_{s_0} \pitchfork N$. Então é claro que f é homotópica a g , a homotopia sendo $t \in I \mapsto f_{ts_0}$; além disso, f_{ts_0} é N -adequada para cada $t \in I$, pois $f_{ts_0}(M') \subset W' - \partial N$ e $f_{ts_0} = f$ numa vizinhança de ∂M . $\square$

(1.5) **Teorema.** *Sejam $f, g : M \rightarrow W$ ambas N -adequadas e transversais a N . Se existe uma homotopia N -adequada entre f e g , então existe uma homotopia N -adequada entre f e g que é transversal a N .*

Demonstração. Seja $F : I \times M \rightarrow W$ uma homotopia entre f e g . Sendo $f_t : M \rightarrow W$ dada por $f_t(x) = F(t, x)$ para $t \in I$, temos então que $f_0 = f$, $f_1 = g$ e f_t é N -adequada para todo $t \in I$.

Sejam $U = I' \times M'$ e $V = W' - \partial N$ e verifiquemos que U e V estão nas hipóteses do teor. (1.1). De fato, que $F(I' \times M') \subset W' - \partial N$ é consequência do fato de F ser uma homotopia N -adequada. Também temos que $F \pitchfork N$ em $\partial I \times M = (\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M)$, pois $f_0, f_1 \pitchfork N$. Como $F(I \times \partial M) \cap N = \emptyset$, resulta que $F \pitchfork N$ em

$$(\partial I \times M) \cup (I \times \partial M) = (I \times M) - (I' \times M') \quad (= \partial(I \times M)).$$

Assim, pelo teor. (1.1) existe $G : I \times M \rightarrow W$ (homotópica a F) tal que $G \pitchfork N$, $G(I' \times M') \subset W' - \partial N$ e $G = F$ numa vizinhança de $\partial(I \times M)$. Dessas duas últimas propriedades segue que G é uma homotopia N -adequada entre f e g . $\square$

Número de intersecção adequado

Definiremos agora o nosso invariante mais importante. Sejam W uma variedade orientada com canto de dimensão $m + n$ e $N \subset W$ uma subvariedade fechada orientada de dimensão n tal que $N' \subset W'$. Seja também M uma variedade compacta orientada com canto de dimensão m .

(1.6) **Definições.** *Seja $f : M \rightarrow W$ N -adequada.*

(i) *Se f é transversal a N , então $f^{-1}(N)$ é uma subvariedade compacta de M' de dimensão zero (prop. (1.3)), portanto um conjunto finito de pontos de M' . Como no caso de variedades sem bordo (ver [Guillemin], pp. 107-108), para cada $x \in f^{-1}(N)$ fica definido o número de intersecção (local) de f com N em x , indicado com $I_x(f, N)$: como $f \pitchfork N$, temos que*

$$df_x[T_x M] \oplus T_{f(x)} N = T_{f(x)} W$$

e df_x é um isomorfismo sobre a imagem. Considerando a imagem com a orientação induzida por df_x , temos $I_x(f, N) = +1$ ou -1 , conforme $T_{f(x)} W$ tenha ou não a orientação soma direta de $df_x[T_x M]$ e $T_{f(x)} N$ (ver (0.27)).

(ii) *Feito isso, definimos o número de intersecção (global) de f com N para f transversal a N como sendo*

$$I(f, N) = \sum_{x \in f^{-1}(N)} I_x(f, N).$$

Se além disso f for um mergulho cuja imagem é uma subvariedade de W , escreveremos também que $I(f(M), N) = I(f, N)$.

(iii) *Quando f não é necessariamente transversal a N , nós utilizamos o teor. (1.4) para definir*

$$I(f, N) = I(g, N)$$

onde $g : M \rightarrow W$ é qualquer aplicação N -homotópica a f e transversal a N . A dificuldade que surge agora é que se $h : M \rightarrow W$ é outra aplicação N -homotópica a f e transversal a N , então é preciso mostrar que $I(h, N) = I(g, N)$. Mas como nesse caso g e h são N -homotópicas e ambas transversais a N , isso segue da prop. (1.7).

(1.7) **Proposição.** *Sejam $g, h : M \rightarrow W$ N -adequadas e transversais a N . Se g e h são N -homotópicas, então $I(g, N) = I(h, N)$.*

Demonstração. Pelo teor. (1.5) existe uma homotopia N -adequada $G : I \times M \rightarrow W$ entre g e h tal que $G \pitchfork N$. Seja $G' : I \times M' \rightarrow W'$ a restrição de G . Então temos

que $G \pitchfork N'$ e $G|_{\partial(I \times M')} \pitchfork N'$. Portanto, $(G')^{-1}(N')$ é uma subvariedade compacta de dimensão um de $I \times M'$ (fig. 1-2) com bordo (ver (0.20))

$$\partial(G')^{-1}(N') = (G')^{-1}(N') \cap \partial(I \times M').$$

Figura 1-2

Considerando $I \times M'$ com a orientação produto, $(G')^{-1}(N')$ adquire uma orientação pré-imagem e induz uma orientação no seu bordo, isto é, determina um número de orientação $+1$ ou -1 para cada ponto de $\partial(G')^{-1}(N')$ (ver (0.21)). Conforme observado em (0.25), a soma dos números de orientação dos pontos do bordo de $(G')^{-1}(N')$ é zero.

Por outro lado, podemos considerar os pontos do bordo de $(G')^{-1}(N')$ orientados como pré-imagem de N' pela restrição $G'|_{\partial(I \times M')}$. Nesse caso também devemos obter que a soma dos números de orientação é zero (cf. (0.29)). Temos que $(G')^{-1}(N') = G^{-1}(N)$, pois G é homotopia N -adequada. Assim,

$$\begin{aligned} G'|_{\partial(I \times M')}^{-1}(N') &= \partial(G')^{-1}(N') \\ &= G^{-1}(N) \cap \partial(I \times M') \\ &= (\{1\} \times h^{-1}(N)) \cup (-\{0\} \times g^{-1}(N)) \end{aligned}$$

como variedades orientadas, pois a orientação que $I \times M'$ induz em seu bordo é tal que $\partial(I \times M') = (\{1\} \times M') \cup (-\{0\} \times M')$ como variedades orientadas (ver (0.26)). Como a soma dos números de orientação de $g^{-1}(N)$ é $I(g, N)$ e a soma dos números de orientação dos pontos de $h^{-1}(N)$ é $I(h, N)$, resulta que a soma dos números de orientação dos pontos do bordo de $(G')^{-1}(N')$ é

$$I(h, N) - I(g, N).$$

Como esse número já era zero, segue que $I(h, N) = I(g, N)$. $\square$

Como N -homotopia é uma relação de equivalência, é imediato verificar que o resultado da prop. (1.7) também vale para aplicações adequadas arbitrárias, isto é,

(1.8) **Corolário.** *Sejam $g, h : M \rightarrow W$ N -adequadas arbitrárias. Se g e h são N -homotópicas, então $I(g, N) = I(h, N)$.*

Número de intersecção adequado de duas aplicações

Sejam M, N e W variedades com canto.

(1.9) **Definições.** *Diremos que $f : M \rightarrow W$ e $g : N \rightarrow W$ são adequadas entre si se:*

- (i) $f(M') \subset W'$ e $g(N') \subset W'$;
- (ii) $f(M) \cap g(\partial N) = \emptyset$ e $f(\partial M) \cap g(N) = \emptyset$.

Nesse caso, também diremos que f é g -adequada ou que g é f -adequada.

É claro que se N é uma subvariedade de W com $N' \subset W'$ e g é a inclusão $N \hookrightarrow W$, então f e g são adequadas entre si se e somente se f é N -adequada.

(1.10) **Proposição.** *Se $f : M \rightarrow W$ e $g : N \rightarrow W$ são adequadas entre si, então $f \times g : M \times N \rightarrow W \times W$ é Δ_W -adequada (e reciprocamente).*

Demonstração. Aqui $f \times g$ é definida por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ para todo $(x, y) \in M \times N$ e Δ_W é a diagonal de $W \times W$.

Note que $\Delta'_W = \Delta_{W'} \subset W' \times W' = (W \times W)'$. Além disso:

$$\begin{aligned} (f \times g)((M \times N)') &= f(M') \times g(N') \\ &\subset W' \times W' \\ &= (W \times W)'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \times g)(M \times N) \cap \partial \Delta_W &= f(M) \times g(N) \cap \Delta_{\partial W} \\ &= f(M) \cap g(N) \cap \partial W \\ &= f(M) \cap g(\partial N) \cap \partial W \\ &= \emptyset; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \times g)(\partial(M \times N)) \cap \Delta_W &= (f(M) \times g(N) \cup f(\partial M) \times g(N)) \cap \Delta_W \\ &= (f(M) \cap g(\partial N)) \cup (f(\partial M) \cap g(N)) \\ &= \emptyset. \quad \square \end{aligned}$$

Suponhamos agora que M e N são variedades compactas orientadas com canto de dimensões m e n , respectivamente, e que W é uma variedade orientada com canto de dimensão $m + n$.

(1.11) **Definição.** *Sejam $f : M \rightarrow W$ e $g : N \rightarrow W$ adequadas entre si. Definimos o número de intersecção de f com g como sendo*

$$I(f, g) = (-1)^n I(f \times g, \Delta_W).$$

(1.12) **Observações.** Suponhamos que $f : M \rightarrow W$ e $g : N \rightarrow W$ são adequadas entre si.

(i) Se $f_t : M \rightarrow W$ e $g_t : N \rightarrow W$ são homotopias de f e de g , respectivamente, então $I(f_t, g_t) = I(f, g)$ para todo t , desde que f_t e g_t sejam adequadas entre si para todo t . De fato, nesse caso temos que $f_t \times g_t$ é uma homotopia Δ_W -adequada de $f \times g$.

(ii) No caso de g ser um mergulho cuja imagem $g(N)$ é uma subvariedade de W temos que $I(f, g) = I(f, g(N))$, pois é fácil verificar que (veja, por exemplo, [Guillemin], pp. 113–114):

(a) $f \times g \bar{\cap} \Delta_W$ se e somente se $f \bar{\cap} g(N)$.

(b) Se $f(x) = g(y) = z \in g(N)$ e

$$df_x[T_x M] \oplus T_z[g(N)] = T_z W$$

como espaços vetoriais orientados, então

$$T_{(f \times g)(x, y)}(W \times W) = T_z W \times T_z W$$

tem a orientação soma direta de

$$d(f \times g)_{(x, y)}[T_{(x, y)}(M \times N)] = df_x[T_x M] \times dg_y[T_y N]$$

e

$$T_{(z, z)}\Delta_W = \Delta_{T_z W}$$

se e somente se n é par.

(iii) Verifica-se também, sem maiores dificuldades, que:

(a) $I(g, f) = (-1)^n I(f, g)$ (cf. [Guillemin], p. 115).

(b) Se $\dim M = \dim W$, $y \in W'$ e f é $\{y\}$ -adequada, então (cf. [Hirsch], p. 140)

$$I(f, \{y\}) = (-1)^m I(\text{gráfico}(f), M \times \{y\}).$$

CAPÍTULO 2

O TEOREMA DE POINCARÉ-HÖPF

Neste capítulo vamos começar a estudar campos de vetores numa variedade compacta orientada com bordo e vamos relacionar suas propriedades globais, diretamente vinculadas à topologia da variedade em questão, com as suas propriedades locais relacionadas com o seu comportamento em torno de suas singularidades. Aqui ainda consideraremos apenas campos com singularidades interiores; o estudo de singularidades no bordo será feito no próximo capítulo. Concluiremos este capítulo com alguns resultados similares para 1-formas.

Todas as variedades e aplicações (inclusive homotopias, campos de vetores e 1-formas diferenciais) serão supostas lisas.

Campos de vetores e a característica de Euler

Seja M uma variedade compacta orientada com bordo de dimensão m . Como primeira aplicação da teoria de intersecção adequada, vamos atribuir a M um invariante diferencial.

Indicaremos com $Z : M \rightarrow TM$ a seção nula do fibrado tangente TM de M , isto é, Z é o campo de vetores em M dado por $Z(x) = (x, 0)$ para todo $x \in M$.

(2.1) **Definição.** *Seja $X : M \rightarrow TM$ um campo de vetores em M que aponta para fora (a.p.f.) em ∂M .^{*} Chamaremos de característica de Euler de M ao número de intersecção*

$$\chi(M) = \chi_X(M) = I(Z, X) = I[Z(M), X(M)].$$

(2.2) Observações.

(i) Se $\partial M = \emptyset$, então não há restrição sobre X e podemos tomar inclusive $X = Z$, obtendo $\chi(M) = I(Z(M), Z(M))$. Nesse caso, é consequência do teorema da vizinhança tubular que $I(Z(M), Z(M)) = I(\Delta_M, \Delta_M)$, onde Δ_M é a diagonal de $M \times M$ (ver [Guillemin], pp. 76 e 140).

---

^{*} Isto é, $X_x \in T_x M$ a.p.f. para todo $x \in \partial M$.

(ii) Há, no caso geral, pelo menos duas maneiras de se conseguir um campo em M que a.p.f. no bordo. A primeira é tomar um colar $h : \partial M \times [0, +\infty) \rightarrow M$ de ∂M (ver (0.17)), definir um campo Y em $\partial M \times [0, +\infty)$ que a.p.f. no bordo (trivial) e considerar o campo h_*Y definido numa vizinhança de ∂M em M que pode ser facilmente estendido a todo M através de uma partição da unidade. A outra maneira é fixar uma métrica Riemanniana em M , considerar uma equação não-degenerada $f = 0$ para ∂M (ver (0.18)) e tomar o campo oposto ao campo gradiente de f .

(iii) Como X e Z são seções de TM , temos que

$$X(M'), Z(M') \subset T_{M'}M = (TM)'$$

onde $T_{M'}M = \{(x, v) \in TM \mid x \in M'\}$. Além disso,

$$X(\partial M) \cap Z(M) = X(M) \cap Z(\partial M) = X(\partial M) \cap Z(\partial M) = \emptyset,$$

pois X não se anula em ∂M . Assim, X e Z são adequados entre si (def. (1.9)) e está bem definido $\chi_X(M) = I(Z, X)$. Além disso, se $Y : M \rightarrow TM$ é outro campo em M que a.p.f. em ∂M , então $\chi_Y(M) = \chi_X(M)$. De fato, $X^t : M \rightarrow TM$ definido por

$$X_x^t = (1-t)X_x + tY_x$$

é um campo em M que a.p.f. em ∂M para todo $t \in I$, e portanto, é uma homotopia Z -adequada entre X e Y (isto é, X^t e Z são adequados entre si para todo $t \in I$ —ver obs. (1.12.i)). Dizemos que X^t é a *homotopia linear* entre X e Y .

Passemos agora a estudar campos de vetores do ponto de vista local.

(2.3) Definições. Seja $X : M \rightarrow TM$ um campo de vetores na variedade com bordo M .

(i) Uma singularidade (ou zero) de X é um ponto $x \in M$ tal que $X_x = 0$. Diremos que x é uma singularidade interior de X se, além disso, tivermos que $x \in M'$. Finalmente, diremos que x é uma singularidade isolada de X se existir uma vizinhança U de x em M tal que x seja a única singularidade de X em U (trabalharemos exclusivamente com singularidades isoladas, de modo que algumas vezes omitiremos o adjetivo por brevidade).

(ii) Se x é uma singularidade interior (isolada) de X , existe uma carta ϕ de M centrada em x (i.e., $\phi(x) = 0$) e definida num aberto $U \subset M'$ que só contém x como singularidade de X . Fica definido então um campo

$$\phi_*X = T\phi \circ X \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow T[\phi(U)] = \phi(U) \times \mathbb{R}^m$$

em $\phi(U)$ com uma única singularidade (interior) na origem.* O índice de X em x (denotado com $\text{ind}_x(X)$) é o grau da aplicação composta (chamada de uma aplicação esférica de X em x)

$$S^{m-1} \xrightarrow{j} \phi(U) - \{0\} \xrightarrow{\overline{\phi_* X}} T_1 \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^m \times S^{m-1} \xrightarrow{p_2} S^{m-1}$$

onde

$$j : x \in S^{m-1} \mapsto \epsilon \cdot x \in \phi(U) - \{0\},$$

com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno;

$$\overline{\phi_* X} : \phi(U) - \{0\} \rightarrow T_1[\phi(U) - \{0\}] \hookrightarrow T_1 \mathbf{R}^m$$

é a seção no fibrado tangente unitário† de $\phi(U) - \{0\}$ determinada por $\phi_* X$: $\overline{\phi_* X}$ é o campo unitário definido em $\phi(U) - \{0\}$ por $(\overline{\phi_* X})_x = (\phi_* X)_x / \|(\phi_* X)_x\|$; e

$$p_2 : \mathbf{R}^m \times S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$$

é a projeção na segunda coordenada. Assim, temos que

$$\text{ind}_x(X) = \text{ind}_0(\phi_* X) = \deg(p_2 \circ \overline{\phi_* X} \circ j).$$

(2.4) Observações.

(i) Na definição anterior, a única restrição que impusemos à escolha de ϵ foi a de que a imagem da aplicação j estivesse contida em $\phi(U) - \{0\}$. Mas observe que se ϵ_0 e ϵ_1 são ambos reais positivos satisfazendo essa condição e consideramos

$$\begin{aligned} j_0 : x \in S^{m-1} &\mapsto \epsilon_0 \cdot x \in \phi(U) - \{0\} \quad \text{e} \\ j_1 : x \in S^{m-1} &\mapsto \epsilon_1 \cdot x \in \phi(U) - \{0\}, \end{aligned}$$

---

* A aplicação tangente $Tf : TM \rightarrow TN$ de uma aplicação lisa entre variedades $f : M \rightarrow N$ é definida por $Tf(x, v) = (f(x), df_x(v))$.

† O fibrado tangente unitário (ou fibrado esférico) de uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é

$$T_1 M = \{(x, v) \in TM \mid \langle v, v \rangle_x = 1\}.$$

Analogamente define-se o fibrado cotangente unitário (ou fibrado coesférico) $T_1^* M$.

então $\deg(p_2 \circ \overline{\phi_* X} \circ j_0) = \deg(p_2 \circ \overline{\phi_* X} \circ j_1)$; de fato, sendo

$$j_t : x \in S^{m-1} \mapsto [(1-t)\epsilon_0 + t\epsilon_1] \cdot x \in \phi(U) - \{0\},$$

temos que

$$p_2 \circ \overline{\phi_* X} \circ j_t : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$$

é uma homotopia bem definida, pois $\phi_* X$ não se anula em $\phi(U) - \{0\}$.

(ii) Além disso, o índice de X em x independe da carta escolhida para definir a aplicação esférica. Com efeito, se ψ é uma outra carta de M centrada em x e definida noutro aberto $V \subset M'$ que só contém x como singularidade de X , então

$$\psi_* X = (\psi \circ \phi^{-1})_* \phi_* X$$

onde $h = \psi \circ \phi^{-1}$ é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^m$ tal que $h(0) = 0$. A afirmação segue então da proposição (2.5).

(iii) Em vista das observações anteriores, tomaremos a liberdade de cometer um abuso de linguagem e usar a notação $\text{esf}_{x_0}(X) : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ para representar uma aplicação esférica de X em x_0 . De acordo com a definição acima,

$$\text{ind}_{x_0}(X) = \deg \text{esf}_{x_0}(X).$$

(2.5) Proposição. *Seja $h : U \rightarrow V$ um difeomorfismo entre dois abertos U, V de $\mathbb{R}^m$, vizinhanças de 0, tal que $h(0) = 0$. Se X é um campo de vetores em U com uma singularidade em 0, então $h_* X$ é um campo em V com uma singularidade em 0 e $\text{ind}_0(h_* X) = \text{ind}_0(X)$.*

Outra consequência da proposição acima é que o índice de uma singularidade interior de um campo numa variedade com bordo é invariante por difeomorfismos, isto é, se $h : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre duas variedades com bordo e X é um campo em M com uma singularidade interior em x , então $h_* X$ é um campo em N com uma singularidade interior em $h(x)$ e $\text{ind}_{h(x)}(h_* X) = \text{ind}_x(X)$.

Precisamos de alguns resultados preliminares antes de demonstrar a prop. (2.5).

(2.6) Lema. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função lisa definida no aberto convexo U de $\mathbb{R}^m$ com $f(0) = 0$. Então existem funções lisas $g_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, com $j : 1, \dots, m$, tais que:*

$$(a) \quad f(x) = \sum_{j=1}^m x_j g_j(x) \quad \text{para } x = (x_1, \dots, x_m) \in U;$$

$$(b) \quad g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) \quad \text{para } j : 1, \dots, m.$$

Demonstração. Basta tomar $g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt$. $\square$

(2.7) **Lema.** *Seja $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação lisa definida no aberto convexo U de $\mathbb{R}^m$ tal que $h(0) = 0$. Então existe uma homotopia lisa $H : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ entre h e dh_0 . Além disso, se h é um mergulho, então a aplicação $x \in U \mapsto H(t, x)$ é um mergulho para cada $t \in I$.*

Demonstração. Seja $H : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$H(t, x) = \begin{cases} h(tx)/t, & \text{se } 0 < t \leq 1; \\ dh_0(x), & \text{se } t=0. \end{cases}$$

Basta ver que H é lisa. De fato, sendo $h_1, \dots, h_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ as componentes de h , pelo lema (2.5) existem $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $i, j : 1, \dots, m$, tais que

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^m x_j g_{ij}(x) \quad \text{para } x = (x_1, \dots, x_m) \in U$$

$$\text{e } g_{ij}(0) = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}.$$

Segue imediatamente que

$$H(t, x) = \left(\sum_{j=1}^m x_j g_{1j}(tx), \dots, \sum_{j=1}^m x_j g_{mj}(tx) \right)$$

para todo $(t, x) \in I \times U$. Logo, H é lisa. $\square$

(2.8) **Lema.** *(de Álgebra Linear) Se $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear, então existe uma homotopia $\{A_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m\}_{t \in I}$ tal que $A_0 = A$, A_t é um isomorfismo linear para todo $t \in I$, e A_1 é a identidade de $\mathbb{R}^m$ ou a reflexão $(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_m)$, conforme A preserve ou inverta a orientação canônica de espaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Ver [Guillemin], pp. 128 e 130, ou [Lima], p. 527.

Demonstração da prop. (2.5). Suponhamos inicialmente que $dh_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo que preserva orientação. Sabemos então pelo lema (2.8) que dh_0 é homotópico através de isomorfismos à identidade de $\mathbb{R}^m$. Pelo lema (2.7) (podemos supor

U convexo), segue que existe uma homotopia $h_t : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ tal que $h_0(x) = h(x)$ e $h_1(x) = x$ para todo $x \in U$, e onde cada h_t é um mergulho.

Como $\bigcap_{t \in I} h_t(U)$ é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbf{R}^m$ (ver lema (D.1)), existe $\epsilon > 0$ tal que $j : x \in S^{m-1} \mapsto \epsilon \cdot x \in h_t(U) - \{0\}$ para todo $t \in I$. Portanto,

$$p_2 \circ \overline{(h_t)_* X} \circ j : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$$

é uma homotopia bem definida (o ponto aqui é que $(h_t)_* X$ não se anula em $h_t(U) - \{0\}$) e assim,

$$\text{ind}_0(h_* X) = \deg(p_2 \circ \overline{(h_0)_* X} \circ j) = \deg(p_2 \circ \overline{(h_1)_* X} \circ j) = \text{ind}_0(X).$$

No caso de h inverter orientação em 0, compondo h com a involução

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_m) = (-x_1, x_2, \dots, x_m)$$

obtemos um difeomorfismo $\sigma \circ h$ que preserva orientação em 0 ao qual podemos aplicar o caso anterior. Como

$$h_* X = \sigma_*(\sigma \circ h)_* X,$$

é suficiente provar a proposição para σ .

De fato, é fácil ver que uma aplicação esférica de $\sigma_* X$ satisfaz

$$p_2 \circ \overline{\sigma_* X} \circ j = \sigma \circ (p_2 \circ \overline{X} \circ j) \circ \sigma,$$

de onde, tendo que $\deg \sigma = -1$, vem

$$\begin{aligned} \text{ind}_0(\sigma_* X) &= \deg(p_2 \circ \overline{\sigma_* X} \circ j) \\ &= (\deg \sigma)(\deg(p_2 \circ \overline{X} \circ j))(\deg \sigma) \\ &= \deg(p_2 \circ \overline{X} \circ j) \\ &= \text{ind}_0(X). \quad \square \end{aligned}$$

Enunciamos a seguir o principal resultado deste capítulo, o teorema de Poincaré-Höpf na forma em que ele está enunciado (sem demonstração) para variedades com bordo em [Milnor], p. 35.

(2.9) **Teorema.** (*Poincaré-Höpf I para campos*) *Seja M uma variedade compacta orientada com bordo. Se X é um campo de vetores em M com um número finito de singularidades interiores e que a.p.f. em ∂M , então*

$$\chi(M) = \sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X)$$

(2.10) *Observações.*

(i) Se X é um campo de vetores numa variedade M de dimensão m com uma singularidade interior em x_0 , então é claro que x_0 também é uma singularidade para o campo oposto de X , $-X$, definido em M por $(-X)_x = -X_x$. Seja $A : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ a aplicação antípoda. Como

$$\text{esf}_{x_0}(-X) = A \circ \text{esf}_{x_0}(X),$$

temos que

$$\text{ind}_{x_0}(-X) = (\deg A)(\deg \text{esf}_{x_0}(X)) = (-1)^m \text{ind}_{x_0}(X).$$

(ii) Se M é uma variedade compacta orientada sem bordo de dimensão ímpar então $\chi(M) = 0$. Pois se X é um campo de vetores em M com um número finito de singularidades (por exemplo, o gradiente de uma função de Morse em M), segue do teor. (2.9) e da parte (i) que

$$\chi(M) = \sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X) = - \sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X) = -\chi(M).$$

O teor. (2.9) é consequência imediata da def. (2.1) e da seguinte proposição:

(2.11) **Proposição.** *Seja X um campo de vetores na variedade compacta orientada com bordo M tal que X tem um número finito de singularidades interiores e suponhamos que X não se anula em ∂M . Então*

$$I(Z, X) = \sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X)$$

Lembremos que $Z : M \rightarrow TM$ denota a seção nula de TM . Note que $X_x = 0$ se e somente se $X(x) = (x, 0) = Z(x) \in Z(M)$. Observe também que as aplicações X e Z são adequadas entre si (cf. def. (1.9)), pois como X e Z são seções do fibrado tangente, isso é equivalente a dizer que X não se anula em ∂M (ver também obs. (2.2.iii)).

Antes de demonstrar a prop. (2.11), provemos

(2.12) **Lema.** *Seja X um campo de vetores na variedade orientada com bordo M com uma singularidade interior em x . Seja*

$$\pi : T_{(x,0)}(TM) = T_{(x,0)}[Z(M)] \oplus T_{(x,0)}(T_x M) \rightarrow T_{(x,0)}(T_x M) \cong T_x M$$

a projeção natural e suponhamos que $X \nmid Z(M)$ em x . Então a aplicação linear (chamada “derivada intrínseca” de X em x)

$$\pi \circ dX_x : T_x M \rightarrow T_x M$$

é um isomorfismo tal que

$$\text{sign}(\pi \circ dX_x) = \frac{\det(\pi \circ dX_x)}{|\det(\pi \circ dX_x)|} = I_x(Z, X)$$

Demonstração. Sabemos que

$$T_{(x,0)}[Z(M)] \oplus T_{(x,0)}(T_x M) = T_{(x,0)}(TM)$$

Além disso, como $X \cap Z(M)$ em x , temos também que

$$T_{(x,0)}[Z(M)] \oplus dX_x(T_x M) = T_{(x,0)}(TM)$$

e que $dX_x : T_x M \rightarrow T_{(x,0)}(TM)$ é um isomorfismo sobre a imagem.

As duas somas diretas acima fornecem o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{(x,0)}[Z(M)] & \longrightarrow & T_{(x,0)}(TM) & \longrightarrow & dX_x(T_x M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \pi|_{dX_x(T_x M)} \\ 0 & \longrightarrow & T_{(x,0)}[Z(M)] & \longrightarrow & T_{(x,0)}(TM) & \xrightarrow{\pi} & T_{(x,0)}(T_x M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde as linhas são seqüências exatas curtas. Segue então que $\pi|_{dX_x(T_x M)}$ é um isomorfismo, e portanto, $\pi \circ dX_x$ também o é (fig. 2-1).

Figura 2-1

Além disso, $T_{(x,0)}(TM)$ tem a orientação induzida pela linha de baixo e $dX_x(T_x M)$ tem a orientação induzida por dX_x . Por definição, temos que $I_x(Z, X) = +1$ se e somente se $T_{(x,0)}(TM)$ tiver a orientação induzida pela linha de cima (cf. def. (1.6)), e isso ocorre se e somente se $\pi|_{dX_x(T_x M)}$ preservar orientação, ou, o que é o mesmo, $\pi \circ dX_x$ preservar orientação. $\square$

Demonstração da prop. (2.11). Seja $X^{-1}(Z(M)) = \{x_1, \dots, x_p\} \subset M'$ o conjunto dos zeros de X .

Primeiro caso: suponhamos que $X \not\equiv 0$ em $Z(M)$. É suficiente provar que $I_{x_i}(Z, X) = \text{ind}_{x_i}(X)$ para cada $i : 1, \dots, p$.

Seja $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$ uma carta local de M centrada em x_i . Então $(\phi_i)_* X$ é um campo de vetores em $\phi_i(U_i)$ com uma singularidade na origem e define uma função $g_i : \phi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $g_i(x) = [(\phi_i)_* X]_x$ (fig. 2-2). O índice de X em x_i é o grau de

$$x \in S^{m-1} \mapsto \text{esf}_{x_i}(X)(x) = \frac{g_i(\epsilon x)}{\|g_i(\epsilon x)\|} \in S^{m-1}$$

com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno (cf. def. (2.3)).

$$\begin{array}{ccc} U_i \subset M & \xrightarrow{X} & TU_i \subset TM \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow T\phi_i \\ \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(\phi_i)_* X = (id, g_i)} & T[\phi_i(U_i)] = \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Figura 2-2

Seja $A_i = d(g_i)_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então A_i é um isomorfismo cujo sinal é $I_{x_i}(Z, X)$ (cf. lema (2.12) e fig. 2-3).

$$\begin{array}{ccccc} T_{x_i} M & \xrightarrow{dX_{x_i}} & T_{(x_i,0)}(TM) \cong T_{(x_i,0)}[Z(M)] \oplus T_{x_i} M & \xrightarrow{\pi} & T_{x_i} M \\ \downarrow d(\phi_i)_{x_i} & & \downarrow d(T\phi_i)_{(x_i,0)} = (d(\phi_i)_{x_i}, d(\phi_i)_{x_i}) & & \downarrow (d\phi_i)_{x_i} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(id, A_i)} & T_{(0,0)}(T[\phi_i(U_i)]) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Figura 2-3

Por outro lado, como g_i é um difeomorfismo local em 0, aplicando o lema (2.7) concluímos que

$$x \mapsto \frac{g_i(\epsilon x)}{\|g_i(\epsilon x)\|} \quad \text{e} \quad x \mapsto \frac{A_i(\epsilon x)}{\|A_i(\epsilon x)\|} \quad (x \in S^{m-1})$$

são homotópicas se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Como A_i é homotópico através de isomorfismos à identidade de $\mathbf{R}^m$ ou à reflexão $(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_m)$ conforme preserve ou inverta orientação (ver lema (2.8)), temos que

$$\deg\left(x \mapsto \frac{A_i(\epsilon x)}{\|A_i(\epsilon x)\|}\right) = \text{sign}(A_i),$$

de onde,

$$\text{ind}_{x_i}(X) = \deg\left(x \mapsto \frac{g_i(\epsilon x)}{\|g_i(\epsilon x)\|}\right) = \text{sign}(A_i).$$

Segundo caso: No caso geral, seja $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i)$ como anteriormente e tomemos B_i bola aberta centrada na origem tal que $\bar{B}_i \subset \phi_i(U_i)$. Escolhemos as B_i 's de modo que $\phi_i^{-1}(\bar{B}_i) \cap \phi_j^{-1}(\bar{B}_j) = \emptyset$ se $i \neq j$.

Pelo teor. (1.1) existe uma família lisa de aplicações lisas $\{X^s : M \rightarrow TM\}_{s \in S}$ indexada numa bola aberta S de um espaço euclidiano (a família é lisa no sentido de que a aplicação $(x, s) \in M \times S \mapsto X^s(x) \in TM$ é lisa) tal que $X^0 = X$, $X^s = X$ numa vizinhança de $M - \bigcup_{i=1}^p \phi_i^{-1}(B_i)$ para todo $s \in S$ e $X^s \cap Z(M)$ para quase todo $s \in S$. O problema que surge aqui é que as aplicações X^s não precisam ser seções de TM se $s \neq 0$, isto é, se $p_1 : TM \rightarrow M$, $p_1(x, v) = x$ é a submersão canônica, então $h_s = p_1 \circ X^s$ não é necessariamente a identidade para $s \neq 0$. Mas sabemos que $h_0 = \text{id}_M$ é um difeomorfismo e que $h_s(\partial M) = \partial M$ para todo $s \in S$; portanto, pelo teorema de estabilidade (C.1) existe $\delta > 0$ tal que h_s é um difeomorfismo para $\|s\| < \delta$. Tomamos então $s_0 \in S$ tal que $\|s_0\| < \delta$ e $X^{s_0} \cap Z(M)$ e pomos $\hat{X} = X^{s_0} \circ h_{s_0}^{-1} : M \rightarrow TM$. Segue que $\hat{X}$ é um campo em M transversal a $Z(M)$ e tal que $\hat{X} = X$ numa vizinhança de $M - \bigcup_{i=1}^p \phi_i^{-1}(B_i)$.

Como $\hat{X} \cap Z(M)$ e $\hat{X}$ a.p.f. em ∂M , pelo primeiro caso,

$$I(Z, \hat{X}) = \sum_{\hat{X}_x=0} \text{ind}_x(\hat{X}).$$

Além disso,

$$I(Z, \hat{X}) = I(Z, X),$$

pois a homotopia linear entre X e $\hat{X}$ (ver obs. (2.2.iii)) é Z -adequada. Só falta mostrar que

$$\text{ind}_{x_i}(X) = \sum_{\substack{\hat{X}_x=0 \\ x \in \phi_i^{-1}(B_i)}} \text{ind}_x(\hat{X})$$

para $i : 1, \dots, p$.

De fato, $(\phi_i)_*X$ e $(\phi_i)_*\hat{X}$ são campos em $\phi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^m$ que definem respectivamente aplicações $g_i, \hat{g}_i : \phi_i(U_i) \rightarrow \mathbf{R}^m$, dadas por

$$g_i(x) = [(\phi_i)_*X]_x \quad \text{e} \quad \hat{g}_i(x) = [(\phi_i)_*\hat{X}]_x.$$

Para cada i , ϕ_i faz corresponder o único zero de X em U_i , x_i , ao único zero de g_i em $\phi_i(U_i)$, a origem, e faz corresponder os zeros de $\hat{X}_i$ em U_i aos zeros de $\hat{g}_i$ em $\phi_i(U_i)$. Sejam $\hat{B}_{j_1}, \dots, \hat{B}_{j_{n(i)}}$ bolas fechadas centradas cada uma num zero de $\hat{g}_i$ de modo que elas estejam todas contidas em B_i e sejam disjuntas duas a duas. Então

$$\begin{aligned} \text{ind}_{x_i}(X) &= \deg \left(\frac{g_i}{\|g_i\|} \Big|_{\partial \hat{B}_i} \right) \\ &= \deg \left(\frac{\hat{g}_i}{\|\hat{g}_i\|} \Big|_{\partial \hat{B}_i} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n(i)} \deg \left(\frac{\hat{g}_i}{\|\hat{g}_i\|} \Big|_{\partial \hat{B}_{j_k}} \right) \\ &= \sum_{\substack{\hat{X}_x=0 \\ x \in \phi_i^{-1}(B_i)}} \text{ind}_x(\hat{X}), \end{aligned}$$

onde aplicamos o teorema do bordo (0.32) para a terceira igualdade. $\square$

As técnicas aqui desenvolvidas permitem-nos obter uma versão um pouco mais geral do teorema de Poincaré-Höpf clássico (teor. (2.9)).

(2.13) **Teorema.** (*Poincaré-Höpf II para campos*) *Seja M uma variedade compacta orientada com bordo e consideremos um campo de vetores X em M com um número finito de singularidades interiores. Se existir uma métrica Riemanniana em M em relação à qual tivermos que X_x não é ortogonal a $T_x(\partial M)$ nos pontos $x \in \partial M$ em que X_x não aponta para fora, então*

$$\chi(M) = \sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X).$$

Note que um campo de vetores nas condições do teorema acima não se anula em nenhum ponto do bordo de M .

Demonstração do teor. (2.13). Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma tal métrica Riemanniana em M e tomemos um campo de vetores $\hat{X}$ em M que a.p.f. em ∂M e tal que $\hat{X}_x$ é ortogonal a $T_x(\partial M)$ em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ para todo $x \in \partial M$ (para obter $\hat{X}$ veja o final da obs. (2.2.ii)).

Como X e $\hat{X}$ não se anulam em ∂M , as aplicações $X, \hat{X} : M \rightarrow TM$ são Z -adequadas (ver obs. (2.2.iii)). Consideremos $X^t : M \rightarrow TM$, a homotopia linear entre X e $\hat{X}$. Para todo $x \in \partial M$, $X_x \neq -\hat{X}_x$ implica que $X_x^t \neq 0$ para $t \in I$. Portanto, X^t é uma homotopia Z -adequada entre X e $\hat{X}$. Decorre de (2.1), (1.12.i) e (2.11) que

$$\chi(M) = I(Z, \hat{X}) = I(Z, X) = \sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X). \quad \square$$

1-formas diferenciais

É conveniente agora reenunciar em termos de 1-formas diferenciais alguns resultados sobre singularidades interiores de campos de vetores da seção precedente.

(2.14) **Definições.** *Seja M uma variedade com bordo de dimensão m e consideremos uma 1-forma diferencial (lisa) em M , $\omega : M \rightarrow T^*M$.*

(i) *Diremos que um ponto $x \in M$ é uma singularidade (ou zero) de ω se $\omega_x = 0$. Uma singularidade x de ω é interior se $x \in M'$, e isolada se existir uma vizinhança U de x em M tal que x seja a única singularidade de ω em U (todas as singularidades de 1-formas consideradas aqui serão isoladas).*

(ii) *Seja x uma singularidade interior de ω e tomemos uma carta ϕ de M centrada em x e definida num aberto $U \subset M'$ que só contém x como singularidade de ω . Então o “pull-back”*

$$(\phi^{-1})^*\omega : \phi(U) \rightarrow T^*\phi(U) = \phi(U) \times (\mathbb{R}^m)^*$$

é uma 1-forma em $\phi(U)$ com uma singularidade (interior) na origem.* Como $(\phi^{-1})^*\omega$ não se anula em $\phi(U) - \{0\}$, determina uma seção no fibrado cotangente unitário† de $\phi(U) - \{0\}$, a qual será denotada com

$$\overline{(\phi^{-1})^*\omega} : \phi(U) - \{0\} \rightarrow T_1^*[\phi(U) - \{0\}]$$

Estamos considerando em $\phi(U) - \{0\}$ a métrica Riemanniana usual induzida por $\mathbb{R}^m$; temos

$$T_1^*[\phi(U)] - \{0\} \hookrightarrow T_1^*\mathbb{R}^m$$

---

* O “pull-back” $h^*\omega$ de uma 1-forma ω em N por uma aplicação lisa $h : M \rightarrow N$ é definido como sendo a 1-forma em M dada por $(h^*\omega)_x = \omega_{h(x)} \circ dh_x$ para $x \in M$.

† Ver nota de rodapé da página 19.

e

$$T_1^* \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^m \times (S^*)^{m-1}$$

onde $(S^*)^{m-1}$ representa os funcionais lineares de norma um do espaço dual de $\mathbf{R}^m$, $(\mathbf{R}^m)^*$, o qual está dotado do produto interno no qual $\{dx_1 = e^1, \dots, dx_m = e^m\}$ é uma base ortonormal. $(S^*)^{m-1}$ é a "esfera" de $(\mathbf{R}^m)^*$. Seja

$$p_2 : T_1^* \mathbf{R}^m \rightarrow (S^*)^{m-1}$$

a projeção na segunda coordenada e consideremos $j : x \in S^{m-1} \rightarrow \epsilon \cdot x \in \phi(U) - \{0\}$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Chamaremos de índice de ω em x (e denotaremos com $\text{ind}_x(\omega)$) ao grau da aplicação composta (a qual será chamada de uma aplicação esférica para ω em x):

$$S^{m-1} \xrightarrow{j} \phi(U) - \{0\} \xrightarrow{(\phi^{-1})^* \omega} T_1^* \mathbf{R}^m \xrightarrow{p_2} (S^*)^{m-1}$$

Portanto,

$$\text{ind}_x(\omega) = \text{ind}_0((\phi^{-1})^* \omega) = \deg(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j).$$

(2.15) *Observação.* Apesar da aplicação esférica de ω não estar univocamente definida, o seu grau está. De fato, a prova da irrelevância da escolha do ϵ é como em (2.4.i). Além disso, se nós escolhemos outra carta ψ de M centrada em x para definir a aplicação esférica de ω , então teremos que

$$(\psi^{-1})^* \omega = (\phi \circ \psi^{-1})^* (\phi^{-1})^* \omega$$

onde $h = \phi \circ \psi^{-1}$ é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbf{R}^m$ tal que $h(0) = 0$. Portanto, decorre da prop. (2.16) a seguir que o índice de ω em x não depende da carta de M utilizada para definir a aplicação esférica. Assim sendo, daqui para a frente vamos algumas vezes tomar a liberdade de denotar apenas com $\text{esf}_{x_0}(\omega) : S^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$ uma aplicação esférica de ω em x_0 ; desse modo podemos já escrever que $\text{ind}_{x_0}(\omega) = \deg \text{esf}_{x_0}(\omega)$.

(2.16) **Proposição.** *Seja $h : U \rightarrow V$ um difeomorfismo entre dois abertos U e V de $\mathbf{R}^m$, vizinhanças de 0, tal que $h(0) = 0$. Se ω é uma 1-forma diferencial em V com uma singularidade em 0, então $h^* \omega$ é uma 1-forma em U com uma singularidade em 0 e $\text{ind}_0(h^* \omega) = \text{ind}_0(\omega)$.*

Também segue da prop. (2.16) que se $h : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre variedades com bordo e ω é uma 1-forma em N com uma singularidade interior em N' , então $h^* \omega$ tem uma singularidade interior em $h^{-1}(x) \in M'$ e $\text{ind}_{h^{-1}(x)}(h^* \omega) = \text{ind}_x(\omega)$.

Demonstração da prop. (2.16). Inicialmente vamos supor que $dh_0 : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ preserva orientação. Como na demonstração da prop. (2.5), sabemos que existe uma homotopia $h_t : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ com $t \in I$, tal que $h_0(x) = h(x)$ e $h_1(x) = x$ para todo $x \in U$, onde cada h_t é um mergulho. Diminuindo U , se necessário, podemos supor ainda que $h_t(U) \subset V$, para todo $t \in I$ (ver lema (D.1)). Tomando $\epsilon > 0$ de modo que $j : x \in S^{m-1} \mapsto \epsilon \cdot x \in U - \{0\}$, temos que

$$p_2 \circ \overline{h_t^* \omega} \circ j : S^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$$

é uma homotopia bem definida, pois $(h_t^* \omega)_x \neq 0$ para $x \in U - \{0\}$ e $t \in I$ (senão ω teria outras singularidades em V). Assim,

$$\text{ind}_0(h^* \omega) = \deg(p_2 \circ \overline{h_0^* \omega} \circ j) = \deg(p_2 \circ \overline{h_1^* \omega} \circ j) = \text{ind}_0(\omega).$$

A demonstração segue análoga à demonstração da prop. (2.5) no caso em que dh_0 inverte orientação. $\square$

Surge agora uma pergunta natural. Fixada uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na variedade com bordo M , fica estabelecida uma bijeção natural entre campos de vetores e 1-formas diferenciais em M , a saber,

$$X \mapsto \omega,$$

onde $\omega(x) = (x, \omega_x)$ e $\omega_x \in (T_x M)^*$ é dada por

$$\omega_x(v) = \langle X_x, v \rangle_x \quad \text{para todo } v \in T_x M,$$

e onde temos que $X_x \in T_x M$ é tal que $X(x) = (x, X_x)$ para $x \in M$. É claro que $x_0 \in M'$ será uma singularidade interior isolada para ω se e somente o for para X . A questão que resta é saber se $\text{ind}_{x_0}(\omega) = \text{ind}_{x_0}(X)$.

(2.17) **Definições.** Sejam M e N variedades Riemannianas cujas métricas indicaremos respectivamente com $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle^N$.

(i) Se X é um campo de vetores em M e ω é uma 1-forma diferencial em M , diremos que X e ω estão associados através da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ (ou são duais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$) se

$$\omega_x = \langle X_x, \cdot \rangle_x^M$$

para todo $x \in M$.

(ii) Se $h : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, chamaremos de métrica induzida por h em N à métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle^h$ dada para $y \in N$ e $w_1, w_2 \in T_y N$ por

$$\langle w_1, w_2 \rangle_y^h = \langle v_1, v_2 \rangle_x^M$$

onde $x \in M$ e $v_1, v_2 \in T_x M$ são tais que $h(x) = y$ e $w_i = dh_x(v_i)$, $i : 1, 2$.

(iii) Diremos que h preserva a métrica (ou que é uma isometria) se

$$\langle \cdot, \cdot \rangle^h = \langle \cdot, \cdot \rangle^N.$$

(2.18) **Proposição.** *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com bordo. Suponhamos que X é um campo de vetores em M e que ω é a 1-forma diferencial associada a X através da métrica Riemanniana de M . Se X e ω têm ambos uma singularidade interior em $x_0 \in M'$, então $\text{ind}_{x_0}(X) = \text{ind}_{x_0}(\omega)$. Assim, campos de vetores e 1-formas duais têm as mesmas singularidades interiores com os mesmos índices.*

Demonstração. Sejam $m = \dim M$ e $\phi = (x^1, \dots, x^m)$ uma carta local de M centrada em x_0 e definida num aberto $U \subset M'$ que só contém x_0 como singularidade de X (e de ω).

Para cada $t \in I$, definamos uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle^t$ em U que é dada por

$$\langle v, w \rangle_x^t = (1 - t)\langle v, w \rangle_x + t\langle v, w \rangle_x^{\phi^{-1}}$$

para $x \in U$ e $v, w \in T_x M$.

É fácil ver que $\langle \cdot, \cdot \rangle^t$ é de fato uma métrica Riemanniana. Indiquemos com X^t o campo de vetores em U que é dual de ω em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle^t$. Note então que $X^0 = X$. Além disso, para cada $t \in I$, x_0 é a única singularidade de X^t em U . Assim sendo, a aplicação esférica de X^t em x_0 é uma homotopia bem definida entre as aplicações esféricas de X e de X^1 em x_0 . Daí segue que (cf. (0.31))

$$\begin{aligned} \text{ind}_{x_0}(X) &= \deg \text{esf}_{x_0}(X) \\ &= \deg \text{esf}_{x_0}(X^1) \\ &= \text{ind}_{x_0}(X^1). \end{aligned}$$

Agora é só observar que $\text{ind}_{x_0}(X^1) = \text{ind}_{x_0}(\omega)$, pois as aplicações esféricas de X^1 e de ω em x_0 são iguais (de fato, as coordenadas de X_x^1 em relação a $\{\partial/\partial x^1|_x, \dots, \partial/\partial x^m|_x\}$

são iguais às coordenadas de ω_x em relação à $\{(dx^1)_x, \dots, (dx^m)_x\}$, pois o sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^m)$ é ortonormal em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\phi^{-1}} = \langle \cdot, \cdot \rangle^1$. $\square$

O próximo passo é estabelecer um teorema de Poincaré-Höpf para 1-formas. Note que o teor. (2.19) é uma versão que corresponde ao teor. (2.13).

(2.19) **Teorema.** (*Poincaré-Höpf II para 1-formas*) *Seja M uma variedade compacta orientada com bordo e consideremos uma 1-forma diferencial ω em M com um número finito de singularidades interiores. Suponhamos ainda que ω satisfaça a seguinte condição: para cada $x \in \partial M$ tal que ω_x se anula em $T_x(\partial M)$ temos que ω_x é positiva nos vetores de $T_x M$ que apontam para fora. Com essas hipóteses,*

$$\chi(M) = \sum_{\omega_x=0} \text{ind}_x(\omega).$$

Seja ω uma 1-forma em M tal que num ponto $x_0 \in \partial M$ tenhamos que ω_{x_0} se anula em $T_{x_0}(\partial M)$. Há três possibilidades: calculada nos vetores de $T_{x_0} M$ que apontam para fora, ω_{x_0} é positiva, negativa ou nula. Nos dois primeiros casos o núcleo de ω_{x_0} coincide com $T_{x_0}(\partial M)$, enquanto que no terceiro, ω_{x_0} se anula em todo $T_{x_0} M$. A condição do teor. (2.19) pede que ocorra sempre a primeira possibilidade.

Demonstração do teor. (2.19). Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Riemanniana qualquer em M e consideremos o campo de vetores X associado a ω através de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. É fácil ver então que X está nas condições do teor. (2.13). De fato, em primeiro lugar, X só tem um número finito de singularidades interiores (exatamente as mesmas que ω). Em segundo lugar, para cada $x \in \partial M$, seja $n_x \in T_x M$ o vetor unitário normal a $T_x(\partial M)$ que a.p.f.. Note que X_x a.p.f. se e somente se $\langle X_x, n_x \rangle > 0$. Se $x \in \partial M$ é tal que X_x não a.p.f., então $\omega_x(n_x) = \langle X_x, n_x \rangle_x \leq 0$. Mas então, por hipótese, ω_x não se anula em $T_x(\partial M)$, isto é, X_x não é ortogonal a $T_x(\partial M)$.

O teorema segue então do teor. (2.13) e da prop. (2.18). $\square$

(2.20) *Observação.* Vimos na demonstração do teor. (2.19) que, se ω é uma 1-forma nas condições do enunciado do referido teorema, então o campo associado a ω através de qualquer métrica Riemanniana em M é um campo nas condições do teor. (2.13). No entanto, mostra-se através de técnicas elementares de Álgebra Linear, sempre existe uma métrica Riemanniana em M tal que o campo associado a ω através dessa métrica é um campo que a.p.f. em todos os pontos do bordo de M (e portanto está nas condições do teor. (2.9)). Na verdade, a primeira demonstração de (2.19) que obtivemos utilizava esse

fato e era consequência de (2.9) e (2.18). Ela apareceu quando buscávamos para 1-formas o teorema equivalente ao tradicional (2.9) e acabou sugerindo o teor. (2.13), que nesse contexto era provado como consequência de (2.19).

CAPÍTULO 3

SINGULARIDADES DE BORDO

O teorema clássico de Poincaré-Höpf para campos de vetores numa variedade com bordo exige que o campo em questão aponte para fora no bordo da variedade onde ele está definido. Mesmo na versão mais geral desse teorema que nós obtivemos (teor. (2.13)) o campo não pode se anular no bordo da variedade. Neste capítulo nós estenderemos a classe de campos em estudo permitindo que eles tenham singularidades no bordo da variedade considerada. Ao fazermos isso, seremos levados a considerar tipos mais gerais de singularidades no bordo, as *singularidades de bordo*.

As definições precisas de singularidade de bordo de um campo e do seu índice são dadas na segunda seção deste capítulo. A primeira seção é reservada ao tratamento da questão análoga para 1-formas; somente no caso das 1-formas é que obteremos um invariante diferencial. Os exemplos são deixados para a última seção. Versões dos teoremas (2.13) e (2.19) nesse novo contexto só serão demonstradas no capítulo 5.

1-formas diferenciais

Faremos agora o segundo uso da teoria de intersecção adequada.

Se $h : M \rightarrow N$ é uma aplicação entre duas variedades, indicaremos com $\text{Gr}(h) : M \rightarrow M \times N$ a seção gráfica de h , isto é, $\text{Gr}(h)$ será a aplicação dada por $\text{Gr}(h)(x) = (x, h(x))$ para $x \in M$.

(3.1) **Definições.** *Seja M uma variedade com bordo de dimensão m , consideremos uma equação não-degenerada $f = 0$ para o bordo de M (ver (0.18)) e seja $\omega : M \rightarrow T^*M$ uma 1-forma diferencial em M .*

(i) *Diremos que um ponto $x_0 \in M$ é uma singularidade de bordo de ω se ω se anular no espaço tangente ao bordo de M em x_0 , ou seja, se $\omega_{x_0}|_{T_{x_0}(\partial M)} = 0$. Diremos que uma singularidade de bordo x_0 de ω é isolada se existir uma vizinhança U de x_0 em M tal que ω não tenha outras singularidades (de bordo ou interiores) em U além de x_0 . Todas as singularidades de bordo de 1-formas consideradas aqui serão isoladas.*

(ii) *Seja $x_0 \in \partial M$ uma singularidade de bordo de ω e consideremos uma carta ϕ de M centrada em x_0 e definida no aberto U de M que só contém x_0 como singularidade*

de ω . O "pull-back" $(\phi^{-1})^*\omega : \phi(U) \rightarrow T^*\phi(U) = \phi(U) \times \mathbf{R}_+^m$ de ω por ϕ^{-1} é uma 1-forma no aberto $\phi(U)$ de $\mathbf{R}_+^m$. Para todo $x \in \partial\phi(U) = \phi(U) \cap \partial\mathbf{R}_+^m$, temos que

$$[(\phi^{-1})^*\omega]_x|_{T_x(\partial\phi(U))} = \omega_{\phi^{-1}(x)} \circ d(\phi^{-1})_x|_{T_x(\partial\phi(U))} = \omega_{\phi^{-1}(x)} \circ d(\phi^{-1}|_{\partial\phi(U)})_x,$$

onde $d(\phi^{-1}|_{\partial\phi(U)})_x$ é um isomorfismo de $T_x(\partial\phi(U)) = \{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ sobre $T_x(\partial U) = T_x(\partial M)$. O ponto essencial aqui é o fato de difeomorfismos preservarem bordo. É fácil ver então que 0 é a única singularidade (e é de bordo) de $(\phi^{-1})^*\omega$ em U . Como $(\phi^{-1})^*\omega$ não se anula em $\phi(U) - \{0\}$, determina uma seção no fibrado cotangente unitário de $\phi(U) - \{0\}$ que denotaremos com

$$\overline{(\phi^{-1})^*\omega} : \phi(U) - \{0\} \rightarrow T_1^*[\phi(U) - \{0\}] \hookrightarrow T_1^*\mathbf{R}_+^m$$

Prosseguindo a analogia com a def. (2.14), temos que

$$T_1^*\mathbf{R}_+^m = \mathbf{R}_+^m \times (S^*)^{m-1}$$

onde $(S^*)^{m-1} \approx S^{m-1}$ é a "esfera" de $\mathbf{R}_+^m$; consideremos a projeção na segunda coordenada

$$p_2 : T_1^*\mathbf{R}_+^m \rightarrow (S^*)^{m-1}$$

e seja $j^+ : x \in S_+^{m-1} \mapsto \epsilon \cdot x \in \phi(U) - \{0\}$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Chamaremos de uma aplicação hemisférica de ω em x_0 à composta

$$S_+^{m-1} \xrightarrow{j^+} \phi(U) - \{0\} \xrightarrow{\overline{(\phi^{-1})^*\omega}} T_1^*\mathbf{R}_+^m \xrightarrow{p_2} (S^*)^{m-1}.$$

Se U é escolhido de modo que f não tenha pontos críticos em U (o que é possível pois f é regular em x_0) então também está definida a aplicação esférica de df em x_0 :

$$S_+^{m-1} \xrightarrow{j^+} \phi(U) - \{0\} \xrightarrow{\overline{(\phi^{-1})^*df}} T_1^*\mathbf{R}_+^m \xrightarrow{p_2} (S^*)^{m-1}.$$

Chamaremos de índice de ω em x_0 (e denotaremos com $\text{ind}_{x_0}^+(\omega)$) ao número de intersecção das seções gráficas das aplicações hemisféricas de df e de ω , nessa ordem, ou seja,

$$\text{ind}_{x_0}^+(\omega) = I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^*df} \circ j^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^*\omega} \circ j^+)]$$

(note bem: a aplicação hemisférica da diferencial da equação para o bordo é usada aqui para calcular o índice de ω em x_0 ; não tem sentido calcular o índice de df em x_0 , pois x_0 é singularidade não isolada de df).

Intuitivamente falando, o índice indica o número de pontos em um pequeno hemisfério centrado na singularidade nos quais ω é positivamente proporcional a df .

Verifiquemos que a definição acima está correta e não depende das escolhas feitas. Feito isso, poderemos denotar uma aplicação hemisférica de ω em x_0 simplesmente com $\text{hsf}_{x_0}(\omega) : S^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$ e escrever que

$$\text{ind}_{x_0}^+(\omega) = I[\text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(df)), \text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(\omega))].$$

(3.2) Observações.

(i) Em primeiro lugar, o número de intersecção da def. (3.1) está bem definido, pois as aplicações em questão são adequadas entre si. De fato, as seções gráficas das aplicações hemisféricas de df e de ω são aplicações $S_+^{m-1} \rightarrow S_+^{m-1} \times (S^*)^{m-1}$ e levam $(S_+^{m-1})'$ em $(S_+^{m-1})' \times (S^*)^{m-1} = (S_+^{m-1} \times (S^*)^{m-1})'$ pela definição de seção gráfica. Isso mostra que a primeira condição da def. (1.9) está verificada. Além disso, como estamos lidando com seções gráficas, notemos que a segunda condição da def. (1.9) é equivalente a exigir que

$$\text{Gr}(p_2 \circ (\phi^{-1})^* df \circ j^+) (\partial S_+^{m-1}) \cap \text{Gr}(p_2 \circ (\phi^{-1})^* \omega \circ j^+) (\partial S_+^{m-1}) = \emptyset.$$

Essa exigência só não estará satisfeita se existir $x \in \partial S_+^{m-1}$ tal que

$$p_2 \circ (\phi^{-1})^* df \circ j^+(x) = p_2 \circ (\phi^{-1})^* \omega \circ j^+(x),$$

ou seja, se

$$\frac{[(\phi^{-1})^* df]_{\epsilon x}}{\|[(\phi^{-1})^* df]_{\epsilon x}\|} = \frac{[(\phi^{-1})^* \omega]_{\epsilon x}}{\|[(\phi^{-1})^* \omega]_{\epsilon x}\|},$$

ou, o que é o mesmo, se $(\phi^{-1})^* \omega$ for positivamente proporcional a $(\phi^{-1})^* df$ em ϵx . Isso não pode acontecer, pois senão ω seria positivamente proporcional a df em $\phi^{-1}(\epsilon x)$. Como f é constante em ∂M , temos que df se anula no espaço tangente a ∂M em $\phi^{-1}(\epsilon x)$. Então ω também se anulava aí e portanto teria uma singularidade de bordo em $\phi^{-1}(\epsilon x)$, contrariando a hipótese de que x_0 é isolada.

(ii) O número de intersecção da def. (3.1) independe do $\epsilon > 0$ escolhido para definir j^+ . Com efeito, sejam $\epsilon_0, \epsilon_1 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} j_0^+ : x \in S_+^{m-1} &\mapsto \epsilon_0 \cdot x \in \phi(U) - \{0\}, \\ j_1^+ : x \in S_+^{m-1} &\mapsto \epsilon_1 \cdot x \in \phi(U) - \{0\}. \end{aligned}$$

Definimos

$$j_t^+ : x \in S_+^{m-1} \mapsto [(1-t)\epsilon_0 + t\epsilon_1]x \in \phi(U) - \{0\}$$

para $t \in I$. Como f não tem pontos críticos em U e ω não tem singularidades em $U - \{x_0\}$, temos que as aplicações

$$p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df} \circ j_t^+, p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j_t^+ : S_+^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$$

estão definidas para $t \in I$. Portanto,

$$\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df} \circ j_t^+) \quad \text{e} \quad \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j_t^+)$$

são homotopias bem definidas e são adequadas entre si (para verificar essa última afirmação basta lembrar que f é constante em ∂M , que ω não tem singularidades de bordo em $\partial U - \{x_0\}$, e proceder como no item anterior); logo, pela obs. (1.12.i),

$$\begin{aligned} I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df} \circ j_0^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j_0^+)] \quad \text{e} \\ I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df} \circ j_1^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j_1^+)] \end{aligned}$$

são iguais.

(iii) O índice de ω em x_0 não depende da equação não-degenerada $f = 0$ escolhida para ∂M . De fato, seja $g = 0$ uma outra equação não-degenerada para ∂M . Nós definimos $f_t : M \rightarrow [0, +\infty)$ por

$$f_t = (1 - t)f + tg$$

para $t \in I$. Fixemos $t_0 \in I$ e verifiquemos que $f_{t_0} = 0$ é uma equação não-degenerada para ∂M . É claro que $f_{t_0}^{-1}(0) = \partial M$. Além disso, se $x \in \partial M$, então f_{t_0} é submersão em x . Para ver isso, note que f e g são nulas em ∂M e positivas em M' . Portanto, df_x e dg_x se anulam em $T_x(\partial M)$ e são positivas nos vetores de $T_x M$ que apontam para dentro. Daí segue que df_x e dg_x são positivamente proporcionais e assim, é não nula a derivada

$$d(f_{t_0})_x = (1 - t_0)df_x + t_0 dg_x.$$

Logo, f_{t_0} é uma submersão em ∂M . Em particular, existe uma vizinhança de x_0 em M onde f_{t_0} não tem pontos críticos. É claro que para t suficientemente próximo de t_0 , f_t também não terá pontos críticos nessa vizinhança. Como I é compacto, podemos tomar uma única vizinhança U de x_0 em M onde f_t não tem pontos críticos qualquer que seja $t \in I$. Segue então que

$$p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df_t} \circ j^+ : S_+^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$$

está definida para $t \in I$, e portanto,

$$\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df_t} \circ j^+) : S_+^{m-1} \rightarrow S_+^{m-1} \times (S^*)^{m-1}$$

é uma homotopia bem definida entre

$$\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df} \circ j^+) \quad \text{e} \quad \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* dg} \circ j^+).$$

Como a homotopia é adequada em relação a $\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j^+)$ (isto é, em qualquer instante $t \in I$ não há coincidência de $p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j^+$ com $p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df_t} \circ j^+$ num ponto de ∂S_+^{m-1} , pois ω não pode ser proporcional à diferencial de uma equação não-degenerada num ponto de $\partial U - \{x_0\}$ conforme o argumento das observações anteriores), segue pela obs. (1.12.i) que são iguais

$$\begin{aligned} I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df} \circ j^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j^+)] & \quad \text{e} \\ I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* dg} \circ j^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j^+)]. \end{aligned}$$

No caso particular em que $M = \mathbf{R}_+^m$, é natural escolher $f : \mathbf{R}_+^m \rightarrow \mathbf{R}$ como sendo a projeção na primeira coordenada $f(x_1, \dots, x_m) = x_1$. Nesse caso, $df_{(x_1, \dots, x_m)} = dx_1$ e $p_2 \circ \overline{df} \circ j^+(x) = e^1$ para todo $x \in S_+^{m-1}$. Portanto, (cf. obs. (1.12.iii))

$$\begin{aligned} \text{ind}_0^+(\omega) &= I(S_+^{m-1} \times \{e^1\}, \text{Gr}(p_2 \circ \overline{\omega} \circ j^+)) \\ &= (-1)^m I(\text{Gr}(\omega +), S_+^{m-1} \times \{e^1\}) \\ &= I(p_2 \circ \overline{\omega} \circ j^+, \{e^1\}). \end{aligned}$$

(iv) O número de intersecção independe da carta de M escolhida para definir as aplicações hemisféricas de ω e de df . Isso pode ser comprovado da seguinte maneira. Note inicialmente que

$$(\phi^{-1})^* df = d((\phi^{-1})^* f) = d(f \circ \phi^{-1})$$

onde $f \circ \phi^{-1} = 0$ é uma equação não-degenerada para $\partial \phi(U) = \phi(U) \cap \partial \mathbf{R}_+^m$. Portanto, a def. (3.1) nos dá que

$$\begin{aligned} \text{ind}_{x_0}^+(\omega) &= I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* df} \circ j^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j^+)] \\ &= I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{d(f \circ \phi^{-1})} \circ j^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^* \omega} \circ j^+)] \\ &= \text{ind}_0^+((\phi^{-1})^* \omega) \end{aligned}$$

onde $\text{ind}_0^+((\phi^{-1})^*\omega)$ já está bem definido, pois não depende de cartas (está implícito na def. (3.1) que se M é um aberto de $\mathbf{R}_+^m$ que contém $x_0 = 0$, então a carta tomada é sempre a identidade). Agora, tomando outra carta ψ de M centrada em x_0 para definir as aplicações hemisféricas de ω e de df em x_0 , a mesma def. (3.1) fornece

$$\text{ind}_{x_0}^+(\omega) = \text{ind}_0^+((\psi^{-1})^*\omega).$$

O que temos a provar é que

$$\text{ind}_0^+((\psi^{-1})^*\omega) = \text{ind}_0^+((\phi^{-1})^*\omega).$$

Mas como

$$(\psi^{-1})^*\omega = (\phi \circ \psi^{-1})(\phi^{-1})^*\omega$$

onde $h = \phi \circ \psi^{-1}$ é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbf{R}_+^m$, a prop. (3.3) liquida o problema.

(v) Segue das observações (iii) e (iv) a importante fórmula:

$$\text{ind}_{x_0}^+(\omega) = \text{ind}_0^+((\phi^{-1})^*\omega) = I(p_2 \circ \overline{(\phi^{-1})^*\omega} \circ j^+, \{e^1\}) = I(\text{hsf}_{x_0}(\omega), \{e^1\}).$$

(note que isso é equivalente a escolher $x^1 = 0$ como equação para $\partial U = \partial M \cap U$, onde $\phi = (x^1, x^2, \dots, x^m)$).

(3.3) Proposição. *Seja $h : U \rightarrow V$ um difeomorfismo entre dois abertos U, V de $\mathbf{R}_+^m$, vizinhanças de 0, tal que $h(0) = 0$. Se ω é uma 1-forma em V com uma singularidade de bordo em 0, então $h^*\omega$ é uma 1-forma em U com uma singularidade de bordo em 0 e $\text{ind}_0^+(h^*\omega) = \text{ind}_0^+(\omega)$.*

A demonstração da prop. (3.3), a ser feita mais adiante, segue as linhas da prop. (2.16) mas precisa do seguinte lema.

(3.4) Lema. *(de Álgebra Linear) Seja $E : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ um isomorfismo linear que que preserva a orientação canônica de espaço vetorial de $\mathbf{R}^m$ e que deixa $\mathbf{R}_+^m$ invariante. Então E é homotópico à identidade $I : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ através de isomorfismos que deixam $\mathbf{R}_+^m$ invariante.*

Demonstração. Sendo $E = (E_{ij})$ a matriz de um isomorfismo E na base canônica $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbf{R}^m$, temos

$$E(\mathbf{R}_+^m) \subset \mathbf{R}_+^m \quad \text{se e somente se} \quad E_{11} > 0 \quad \text{e} \quad E_{1j} \geq 0 \quad \text{para } j \geq 2.$$

Portanto,

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \cdots 0 \\ E' & E'' \end{bmatrix}$$

onde E' e E'' são matrizes $(m-1) \times 1$ e $(m-1) \times (m-1)$, respectivamente.

Pondo

$$E'_t = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \cdots 0 \\ tE' & E'' \end{bmatrix}$$

temos que $E'_t : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ é um isomorfismo que deixa $\mathbf{R}_+^m$ invariante para todo $t \in I$. Podemos assumir desde o começo então que E é da forma

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & E'' \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Temos que $E'' : V \rightarrow V$ é um isomorfismo que preserva orientação, onde V é o subespaço de $\mathbf{R}^m$ gerado por $\{e_2, \dots, e_m\}$ e orientado por essa mesma base, pois

$$\det E = E_{11} \cdot \det E''.$$

Logo, existe uma homotopia $E'_t : V \rightarrow V$ tal que $E''_0 = E_0$, E'_1 é a identidade de V e cada E'_t é um isomorfismo (ver lema (2.8)). Portanto, sendo

$$E_t = \begin{bmatrix} t + (1-t)E_{11} & 0 \cdots 0 \\ 0 & E''_t \end{bmatrix},$$

temos que $E_0 = E$, $E_1 = I$ e E_t é um isomorfismo que deixa $\mathbf{R}_+^m$ invariante para $t \in I$. $\square$

Demonstração da prop. (3.3). Suponhamos em primeiro lugar que $dh_0 : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ é um isomorfismo que preserva orientação. É fácil ver que os lemas (2.6) e (2.7) continuam verdadeiros se modificarmos seus enunciados trocando $\mathbf{R}^m$ por $\mathbf{R}_+^m$. Assim, utilizando essa nova versão do lema (2.7) e o lema (3.4), concluímos que existe uma homotopia $h_t : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ tal que $h_0(x) = h(x)$ e $h_1(x) = x$ para $x \in U$, onde cada h_t é um mergulho com $h_t(0) = 0$. Note que de acordo com a nossa construção, para todo $t \in I$ vale que $h_t(\partial U) \subset \partial \mathbf{R}_+^m$, e diminuindo U , se necessário, podemos supor ainda que $h_t(U) \subset V$ (o lema (D.1) também é adaptável para $\mathbf{R}_+^m$).

Agora, pela obs. (3.2.v), para $j^+(x) = \epsilon \cdot x$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$\begin{aligned} \text{ind}_0^+(\omega) &= I(p_2 \circ \bar{\omega} \circ j^+, \{e^1\}) \quad \text{e} \\ \text{ind}_0^+(h^*\omega) &= I(p_2 \circ \overline{h^*\omega} \circ j^+, \{e^1\}); \end{aligned}$$

além disso, a aplicação

$$p_2 \circ \overline{h_t^* \omega} \circ j^+ : S_+^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$$

está definida para $t \in I$ e é uma homotopia $\{e^1\}$ -adequada (isto quer dizer que, se $x \in \partial S_+^{m-1}$, então $e^1 \neq p_2 \circ \overline{h_t^* \omega} \circ j^+(x) = (h_t^* \omega)_{\epsilon x} / \|(h_t^* \omega)_{\epsilon x}\|$, pois senão $h_t^* \omega$ seria proporcional a dx_1 em ϵx e portanto teria uma singularidade de bordo aí, o que implicaria que ω tem uma singularidade de bordo em $h_t(\epsilon x)$!) entre as aplicações hemisféricas de $h^* \omega$ e ω . Logo, pela obs. (1.12.i),

$$\text{ind}_0^+(h^* \omega) = \text{ind}_0^+(\omega).$$

No caso em que $dh_0 : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ inverte orientação, temos necessariamente que $m \geq 2$, pois $dh_0(\mathbf{R}_+^m) \subset \mathbf{R}_+^m$. Como na prova de (2.5), é suficiente supor que h é dado por $h(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-1}, -x_m)$. Nesse caso, a aplicação hemisférica de $h^* \omega$ em 0 fica

$$p_2 \circ \overline{h^* \omega} \circ j^+ = h \circ (p_2 \circ \overline{\omega} \circ j^+) \circ h,$$

e é fácil checar que

$$\begin{aligned} \text{ind}_0^+(h^* \omega) &= I(h \circ (p_2 \circ \overline{\omega} \circ j^+) \circ h, \{e^1\}) \\ &= I(p_2 \circ \overline{\omega} \circ j^+, \{e^1\}) \\ &= \text{ind}_0^+(\omega). \quad \square \end{aligned}$$

(3.5) *Observação.* E consequência imediata da prop. (3.3) que se $h : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre variedades com bordo e ω é uma 1-forma em N com uma singularidade de bordo em $x_0 \in \partial N$, então $h^* \omega$ tem uma singularidade de bordo em $h^{-1}(x_0) \in \partial M$ e $\text{ind}_{h^{-1}(x_0)}^+(h^* \omega) = \text{ind}_{x_0}^+(\omega)$.

Campos de Vetores

A obs. (3.5) nos conta que o índice de uma singularidade de bordo de uma 1-forma é um invariante diferencial. Constataremos que o conceito correspondente que será definido agora para campos numa *variedade Riemanniana* não terá essa propriedade: ele dependerá da métrica Riemanniana da variedade em questão.

(3.6) **Definições.** *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com bordo de dimensão m e suponhamos fixada uma equação não-degenerada $f = 0$ para o bordo de M . Vamos considerar um campo de vetores $X : M \rightarrow TM$ em M .*

(i) Diremos que um ponto $x_0 \in \partial M$ é uma singularidade de bordo de X se X for ortogonal ao espaço tangente ao bordo de M em x_0 , ou seja, se $X_{x_0} \perp T_{x_0}(\partial M)$. Diremos que uma singularidade de bordo x_0 de X é isolada se existir uma vizinhança U de x_0 em M tal que X não tenha outras singularidades (de bordo ou interiores) em U além de x_0 .

(ii) Seja $x_0 \in \partial M$ uma singularidade de bordo (isolada) de X e consideremos uma carta ϕ de M centrada em x_0 e definida num aberto U de M que só contém x_0 como singularidade de X . Nesse caso, temos que

$$\phi_* X = T\phi \circ X \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow T[\phi(U)] = \phi(U) \times \mathbf{R}^m$$

é um campo de vetores no aberto $\phi(U)$ de $\mathbf{R}_+^m$ que não se anula em $\phi(U) - \{0\}$ e portanto define uma seção no fibrado tangente unitário de $\mathbf{R}_+^m$

$$\overline{\phi_* X} : \phi(U) - \{0\} \rightarrow T_1[\phi(U) - \{0\}],$$

dada por

$$\overline{\phi_* X}(x) = (x, (\phi_* X)_x / \|(\phi_* X)_x\|).$$

Consideremos a projeção na segunda coordenada

$$p_2 : T_1 \mathbf{R}_+^m = \mathbf{R}_+^m \times S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$$

e seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$j^+ : x \in S_+^{m-1} \rightarrow \epsilon \cdot x \in \phi(U) - \{0\}.$$

Chamaremos de uma aplicação hemisférica de X em x_0 à aplicação composta

$$S_+^{m-1} \xrightarrow{j^+} \phi(U) - \{0\} \xrightarrow{\overline{\phi_* X}} T_1 \mathbf{R}_+^m \xrightarrow{p_2} S^{m-1}.$$

Como f é uma submersão em x_0 , é possível tomar U de maneira que f não tenha pontos críticos em U . Nesse caso, o campo gradiente de f não tem singularidades em U e também está definida a aplicação hemisférica de $\text{grad } f$ em x_0 :

$$S_+^{m-1} \xrightarrow{j^+} \phi(U) - \{0\} \xrightarrow{\overline{\phi_* \text{grad } f}} T_1 \mathbf{R}_+^m \xrightarrow{p_2} S^{m-1}.$$

Chamaremos de índice de X em x_0 (e denotaremos com $\text{ind}_{x_0}^+(X)$) ao número de intersecção das seções gráficas das aplicações hemisféricas em x_0 de $\text{grad } f$ e X , nessa ordem, isto é,

$$\text{ind}_{x_0}^+(X) = I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{\phi_* \text{grad } f} \circ j^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{\phi_* X} \circ j^+)].$$

Podemos dizer, grosso modo, que o índice conta o número de pontos (com sinais) em um pequeno hemisfério centrado na singularidade nos quais o campo X é múltiplo positivo de $\text{grad } f$.

(3.7) *Observações.*

(i) As aplicações envolvidas no número de intersecção da def. (3.6) são adequadas entre si. Com efeito, em analogia com a obs. (3.2.i), verifica-se que vale (1.9.i). Quanto a (1.9.ii), note que num ponto do bordo do pequeno hemisfério centrado na singularidade não pode acontecer do campo X ser múltiplo positivo de $\text{grad } f$, pois este é sempre ortogonal ao bordo de M enquanto que X não pode sê-lo nesse ponto, pois x_0 é a única singularidade de bordo de X numa vizinhança de x_0 que contém o hemisfério.

(ii) Para que a definição de $\text{ind}_{x_0}^+(X)$ seja boa é necessário que ela não dependa das várias escolhas que foram feitas. A prova da independência do ϵ e da f é como no caso de 1-formas (cf. obs. (3.2.ii) e (3.2.iii)). Seja então ψ uma outra cartade M centrada em x_0 que nós escolhemos para definir a aplicação hemisférica de X em x_0 . Desejamos verificar que

$$I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{\psi_* \text{grad } f} \circ j^+), \text{Gr}(p_2 \circ \overline{\psi_* X} \circ j^+)] = I[\text{Gr}(p_2 \circ \overline{\phi_* \text{grad } f} \circ j^+), \text{Gr}(\phi_* X)].$$

Ora, $h = \phi \circ \psi^{-1}$ é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}_+^m$ tal que $h(0) = 0$ e para o qual existe uma homotopia $h_t : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ tal que $h_0(x) = h(x)$ e $h_1(x) = x$ em $\psi(U \cap V)$ e onde cada h_t é um mergulho (cf. dem. da prop. (3.3)). É fácil ver agora que as aplicações

$$\text{Gr}(p_2 \circ \overline{h_t^* \text{grad } f} \circ j^+) \quad \text{e} \quad \text{Gr}(p_2 \circ \overline{h_t^* X} \circ j^+)$$

estão bem definidas para $t \in I$ e são homotopias adequadas entre si (pois se elas se interceptassem num ponto $x \in \partial S_+^{m-1}$ para algum $t \in I$, então os campos $h_t^* \text{grad } f$ e $h_t^* X$ seriam (positivamente) proporcionais em ϵx , o que implicaria que $\text{grad } f$ e X também o são em $h_t^{-1}(\epsilon x)$).

Daí segue que $\text{ind}_{x_0}^+(X)$ está bem definido. Em particular, podemos utilizar a notação simplificada $\text{hsf}_{x_0}(X) : S_+^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$ para denotar uma aplicação hemisférica de X em x_0 ; então,

$$\text{ind}_{x_0}^+(X) = I[\text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(df)), \text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(\omega))].$$

No entanto, em geral não é verdade que (veja o item seguinte)

$$\text{ind}_{x_0}^+(X) = I(\text{hsf}_{x_0}(X), \{e_1\}).$$

(iii) Note que, em contraste com (3.2.iv), em geral

$$\phi_* \text{grad } f \neq \text{grad } \phi_* f (= \text{grad}(f \circ \phi^{-1}))$$

a não ser que ϕ preserve métrica. Se ϕ preservar métrica, então $\phi_* X$ terá uma singularidade de bordo em 0 e (cf. obs. (3.9))

$$\text{ind}_{x_0}^+(X) = \text{ind}_0^+(\phi_* X).$$

Note que para um campo Y em $\mathbf{R}_+^m$ com uma singularidade de bordo em 0 nós temos que $\text{ind}_0^+(Y) = I(p_2 \circ \bar{Y} \circ j^+, \{e_1\})$; basta tomar $f = x_1$. Portanto, se ϕ preserva a métrica,

$$\text{ind}_{x_0}^+(X) = I(p_2 \circ \overline{\phi_* X} \circ j^+, \{e_1\}).$$

Por outro lado, se ϕ não preservar a métrica, então 0 nem precisa ser singularidade de bordo de $\phi_* X$.

(3.8) Proposição. *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com bordo de dimensão m e suponhamos que X é um campo de vetores em M com uma singularidade de bordo em x_0 . Chamemos de ω a 1-forma diferencial em M dual de X . Então ω tem uma singularidade de bordo em x_0 e $\text{ind}_{x_0}^+(\omega) = \text{ind}_{x_0}^+(X)$. Assim, campos de vetores e 1-formas duais têm as mesmas singularidades de bordo com os mesmos índices.*

Demonstração. Fixemos uma equação não-degenerada $f = 0$ para ∂M . Já sabemos que as singularidades interiores de X são singularidades interiores de ω , e vice-versa. O mesmo vale para as singularidades de bordo: se $x \in \partial M$ e $v \in T_x(\partial M)$, então

$$\omega_x(v) = \langle X_x, v \rangle_x,$$

de maneira que $\omega_x|_{T_x(\partial M)} = 0$ se e somente se $X_x \perp T_x(\partial M)$. Portanto, podemos conseguir uma carta (U, ϕ) de M e um ϵ que servem para definir ambas as aplicações hemisféricas de X e de ω em x_0 .

Para cada $t \in I$, definamos uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle^t$ em U como fizemos na prova da prop. (2.18) pondo

$$\langle v, w \rangle_x^t = (1-t)\langle v, w \rangle_x + t\langle v, w \rangle_x^{\phi^{-1}}$$

para $x \in U$ e $v, w \in T_x M$.

Sendo X^t e Y^t os campos de vetores em U respectivamente associados a ω e a df através de $\langle \cdot, \cdot \rangle^t$, nós temos que $X^0 = X$ e $Y^0 = \text{grad } f$. Além disso, como

$$\omega_x = \langle X^t, \cdot \rangle_x^t \quad \text{e} \quad df_x = \langle Y^t, \cdot \rangle_x^t$$

para $x \in U$, temos que x_0 é singularidade de bordo de X^t em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle^t$ (e é a única singularidade de X^t em U), Y^t não se anula em U e $Y_x^t \perp T_x(\partial M)$ em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle^t$ para $x \in \partial U = U \cap \partial M$.

Dessa maneira, a aplicação hemisférica de X^t em x_0 é uma homotopia bem definida entre as aplicações hemisféricas de X e de X^1 em x_0 , e a aplicação hemisférica de Y^t em x_0 é uma homotopia bem definida entre as aplicações hemisféricas de $\text{grad } f$ e de Y^1 em x_0 . Além disso, essas homotopias são adequadas entre si (pois se X^t fosse múltiplo de Y^t num ponto de ∂U , teria uma singularidade de bordo aí). Segue da obs. (1.12.i) que

$$I[\text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(\text{grad } f)), \text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(X))] = I[\text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(Y^1)), \text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(X^1))].$$

Agora só falta provar que

$$I[\text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(Y^1)), \text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(X^1))] = I[\text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(df)), \text{Gr}(\text{hsf}_{x_0}(\omega))].$$

Mas isso é imediato: como Y^1 e df são duais em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\phi^{-1}}$ e X^1 e ω também o são, nós temos que $\text{hsf}_{x_0}(Y^1) = \text{hsf}_{x_0}(df)$ e $\text{hsf}_{x_0}(X^1) = \text{hsf}_{x_0}(\omega)$ (ver final da prova da prop. (2.18)). $\square$

(3.9) *Observação.* Segue da prop. (3.8) que se $h: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre variedades Riemannianas com bordo que preserva a métrica e X é um campo de vetores em M com uma singularidade de bordo em $x_0 \in \partial M$, então h_*X é um campo em N com uma singularidade de bordo em $h(x_0) \in \partial N$ e $\text{ind}_{h(x_0)}(h_*X) = \text{ind}_{x_0}(X)$. De fato, nessas condições é fácil ver que se ω é a 1-forma associada a X através da métrica em M , então $(h^{-1})^*\omega$ é a 1-forma associada a h_*X através da métrica em N , pois para todos $x \in N$ e $v \in T_xN$,

$$\begin{aligned} [(h^{-1})^*\omega]_{x_0}(v) &= \omega_{h^{-1}(x_0)}(d(h^{-1})_{x_0}(v)) \\ &= \langle X_{h^{-1}(x_0)}, d(h^{-1})_{x_0}(v) \rangle_{h^{-1}(x_0)}^M \\ &= \langle dh_{h^{-1}(x_0)}(X_{h^{-1}(x_0)}), dh_{h^{-1}(x_0)}(d(h^{-1})_{x_0}(v)) \rangle_{x_0}^N \\ &= \langle (h_*X)_{x_0}, v \rangle_{x_0}^N, \end{aligned}$$

onde $\langle , \rangle^M$ e $\langle , \rangle^N$ representam as métricas Riemannianas de M e de N , respectivamente. Resulta da obs. (3.5) que

$$\begin{aligned}\text{ind}_{h(x_0)}^+(h_*X) &= \text{ind}_{h(x_0)}^+((h^{-1})^*\omega) \\ &= \text{ind}_{x_0}^+(\omega) \\ &= \text{ind}_{x_0}^+(X).\end{aligned}$$

Exemplos

Gostaríamos agora de apresentar alguns exemplos de singularidades de bordo. Tendo em vista que a correspondência entre campos de vetores e 1-formas diferenciais numa variedade Riemanniana através da métrica preserva as singularidades e seus índices, vamos considerar aqui campos de vetores, os quais serão representados graficamente através de suas curvas integrais.

(3.10) A partir de exemplos usuais de singularidades interiores de campos em $\mathbf{R}^2$ (poço, fonte, ponto-de-sela) podemos obter exemplos de singularidades de bordo de campos em $\mathbf{R}_+^2 (= \{x_1 \geq 0\})$ (fig. 3-1).

Figura 3-1

De acordo com a obs. (3.7.iii), podemos calcular os índices de cada uma dessas singularidades contando o número de pontos (com sinais) num pequeno hemisfério centrado na singularidade nos quais o campo tem a direção e o sentido do campo $\partial/\partial x_1$ (fig. 3-2). Os sinais devem ser interpretados da seguinte maneira: sendo a aplicação hemisférica do campo em questão transversal a $\{(1,0)\}$ (senão é necessário tomar uma homotopia adequada que seja transversal), cada vez que ela interceptar $\{(1,0)\}$ ela o fará no sentido anti-horário ou no sentido horário (sempre percorrendo o hemisfério do domínio no sentido anti-horário). No primeiro caso o sinal é $+1$, e no segundo, -1 (fig. 3-3). Assim, os índices das singularidades esquematizadas anteriormente são: (a) 1; (b) 0; (c) -1 ; (d) 0.

Figura 3-2

Figura 3-3

Consideremos agora o exemplo dado pela fig. 3-4. Note que o ponto $(1, 0)$ é valor crítico da aplicação hemisférica. Mas, com uma pequena perturbação, é possível fazê-la evitar o ponto $(1, 0)$ de maneira a obter que o índice é zero. Na verdade, observe que uma pequena perturbação do campo em si pode fazer a singularidade desaparecer (fig. 3-5(a)) ou pode decompô-la em duas (fig. 3-5(b)).

Figura 3-4

(a)

(b)

Figura 3-5

Outros exemplos de campos com singularidades de bordo e seus perturbados são mostrados na fig. 3-6. É interessante notar nesses exemplos que quando uma singularidade

Figura 3-6

se desmembra em outras, a soma dos índices das novas singularidades é igual ao índice da singularidade original.

Passemos a analisar agora alguns casos em que o campo tem uma singularidade de bordo num ponto mas não se anula no ponto.

(3.11) Seja X um campo de vetores numa variedade Riemanniana M com bordo na qual uma equação não-degenerada $f = 0$ para ∂M está fixada e suponhamos que $x_0 \in \partial M$ é uma singularidade de bordo de X mas $X_{x_0} \neq 0$. Afirmamos que se X_{x_0} a.p.f., então $\text{ind}_{x_0}^+(X) = 0$. De fato, por um argumento de continuidade, é fácil ver que como $\text{grad } f$ aponta para dentro em x_0 existe um hemisfério centrado em x_0 suficientemente pequeno no qual X e $\text{grad } f$ definem direções e sentidos diferentes em cada ponto. Logo, $\text{ind}_{x_0}^+(X) = 0$.

(3.12) Consideremos agora exemplos de singularidades nas quais o campo aponta

para dentro. O caso bidimensional é simples. A fig. 3-7 indica algumas situações possíveis com os respectivos índices indicados.

Figura 3-7

Afirmamos que, em dimensão dois, esses são os únicos valores que pode assumir o índice de uma singularidade de bordo de um campo que aponta para dentro na singularidade em questão: $+1$, -1 e 0 .

Com efeito, seja $X : \mathbf{R}_+^2 \rightarrow T\mathbf{R}_+^2$ com uma singularidade de bordo em 0 e suponhamos que X_0 aponta para dentro. Escrevendo

$$X_{(x_1, x_2)} = a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x + b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_x$$

para $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}_+^2$, temos que $a(0, 0) > 0$, $b(0, 0) = 0$ e $b(0, x_2) \neq 0$ para $x_2 \neq 0$ suficientemente próximo de 0 . Consideremos então uma vizinhança U de 0 em $\mathbf{R}_+^2$ onde $a > 0$ e onde ocorre um dos seguintes casos (fig. 3-8):

- I) $b(0, x_2) > 0$ se $(0, x_2) \in U$ e $x_2 > 0$, $b(0, x_2) < 0$ se $(0, x_2) \in U$ e $x_2 < 0$;
- II) $b(0, x_2) < 0$ se $(0, x_2) \in U$ e $x_2 > 0$, $b(0, x_2) > 0$ se $(0, x_2) \in U$ e $x_2 < 0$;
- III) $b(0, x_2) > 0$ se $(0, x_2) \in U$ e $x_2 \neq 0$;
- IV) $b(0, x_2) < 0$ se $(0, x_2) \in U$ e $x_2 \neq 0$;

Tomando-se uma aplicação hemisférica de X a partir de um hemisfério centrado em $(0, 0)$ e contido em U , é fácil ver que ela é (linearmente) adequadamente homotópica

em relação a $\{(1, 0)\}$ às aplicações hemisféricas dos campos

$$X^I_{(x_1, x_2)} = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x + x_2 \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x,$$

$$X^{II}_{(x_1, x_2)} = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x - x_2 \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x,$$

$$X^{III}_{(x_1, x_2)} = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x + \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x,$$

$$X^{IV}_{(x_1, x_2)} = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x - \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x,$$

respectivamente nos casos I), II), III) e IV). Mas,

$$\text{ind}_0^+(X^I) = +1,$$

$$\text{ind}_0^+(X^{II}) = -1 \quad \text{e}$$

$$\text{ind}_0^+(X^{III}) = \text{ind}_0^+(X^{IV}) = 0.$$

Figura 3-8

CAPÍTULO 4

UMA RELAÇÃO ENTRE ÍNDICES DE 1-FORMAS

Seja M uma variedade com bordo e suponhamos que Ω é uma 1-forma diferencial em M . Sendo $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ a projeção natural onde $\tilde{M}$ é o duplo de M (ver apêndice A), vamos considerar as 1-formas diferenciais ${}^0\Omega = \Omega|_{\partial M}$, restrição de Ω a ∂M , e $\tilde{\Omega} = \pi^*\Omega$, “pull-back” de Ω em $\tilde{M}$. Queremos determinar as singularidades de ${}^0\Omega$ e $\tilde{\Omega}$ em função das de Ω . Observe que ${}^0\Omega$ e $\tilde{\Omega}$ só podem ter singularidades interiores, pois estão definidas em variedades sem bordo.

Notemos inicialmente que

$${}^0\Omega_x = (\Omega|_{\partial M})_x = \Omega_x|_{T_x(\partial M)}$$

para todo $x \in \partial M$. Assim, vemos que as singularidades de ${}^0\Omega$ são precisamente as singularidades de bordo de Ω .

Consideremos agora $\tilde{\Omega}$. Para $(x, z) \in \tilde{M}$, vale que

$$\tilde{\Omega}_{(x,z)} = \Omega_x \circ d\pi_{(x,z)},$$

e aqui há dois casos a distinguir: $z = 0$ e $z \neq 0$. Se $z \neq 0$, então $d\pi_{(x,z)} : T_{(x,z)}\tilde{M} \rightarrow T_x M$ é um isomorfismo, de modo que $\tilde{\Omega}_{(x,z)} = 0$ se e somente se $\Omega_x = 0$. Por outro lado, se $z = 0$, então a imagem de $d\pi_{(x,z)}$ é exatamente $T_x(\partial M)$ (fig. 4-1). Nesse caso, $\tilde{\Omega}_{(x,z)} = 0$ se e somente se x é singularidade de bordo de Ω . Concluimos então que cada singularidade interior x de Ω em M dá origem a um par de singularidades de $\tilde{\Omega}$ em $\tilde{M}$, mais precisamente ao par de pontos pertencentes a $\pi^{-1}(x)$, ambas com o mesmo índice da singularidade original, pois π é um difeomorfismo local em $z \neq 0$. As demais singularidades de $\tilde{\Omega}$ são os pontos da forma $(x, 0)$ onde x é uma singularidade de bordo de Ω .

Suponhamos que Ω tem uma singularidade de bordo isolada num ponto $x_0 \in \partial M$. Do exposto acima temos que x_0 e $(x_0, 0)$ são singularidades isoladas para ${}^0\Omega$ e $\tilde{\Omega}$, respectivamente. O objetivo deste capítulo é estabelecer o seguinte lema fundamental que relaciona os índices dessas singularidades:

(4.1) **Lema.** *Com as notações anteriores, é válida a seguinte relação entre os índices das 1-formas definidas acima:*

$$\text{ind}_{(x_0,0)}(\tilde{\Omega}) = 2\text{ind}_{x_0}^+({}^0\Omega) - \text{ind}_{x_0}({}^0\Omega).$$

Figura 4-1

Considere como exemplo a 1-forma Ω definida em $M = B^2$, a bola fechada unitária de $\mathbf{R}^2$, por $\Omega_{(x_1, x_2)} = dx_1$, onde x_1, x_2 são as coordenadas canônicas de $\mathbf{R}^2$. Note que Ω tem singularidades de bordo em $(1, 0)$ e em $(-1, 0)$. Sendo x_1, x_2, x_3 as coordenadas em $\mathbf{R}^3$ e identificando $\mathbf{R}^2$ com $x_3 = 0$, obtemos que x_2, x_3 é um sistema de coordenadas em $\tilde{M} = S^2$ (cf. ex. (A.3.ii)) e x_2 é um sistema de coordenadas em $\partial M = S^1$, sempre em vizinhanças das singularidades em questão em cada caso. É fácil ver que ${}^0\Omega$ e $\tilde{\Omega}$ são dadas nessas coordenadas por

$${}^0\Omega_{x_2} = \frac{-x_2}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 \quad \text{e}$$

$$\tilde{\Omega}_{(x_2, x_3)} = \frac{-x_2}{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}} dx_2 + \frac{-x_3}{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}} dx_3.$$

As variedades integrais dessas 1-formas são representadas na fig. 4-2. Na fig. 4-3 indicam-se as curvas integrais dos campos associados a essas 1-formas através de métricas Riemannianas em B^2 , S^1 e S^2 obtidas cada uma delas pela restrição da métrica canônica de $\mathbf{R}^3$. Pela prop. (3.8), o índice de uma singularidade de cada um desses campos é igual ao índice que se obtém considerando-se a singularidade para a 1-forma correspondente. Em (a) temos uma singularidade onde o campo a.p.f. (ex. (3.11)) e outra do tipo I do ex. (3.12). Em (b) temos um poço e uma fonte em dimensão um, e em (c), um poço e uma fonte em dimensão dois. É imediato verificar então a fórmula do lema (4.1) nesse caso.

(4.2) **Proposição.** *Seja Ω uma 1-forma diferencial definida numa variedade com bordo M com uma singularidade de bordo em $x_0 \in \partial M$. Com as notações anteriores temos*

Figura 4-2

Figura 4-3

que

(i) Se Ω_{x_0} é positiva nos vetores de $T_{x_0}M$ que apontam para fora, então

$$\text{ind}_{(x_0,0)}(\tilde{\Omega}) = -\text{ind}_{x_0}({}^0\Omega).$$

(ii) Se Ω_{x_0} é negativa nos vetores de $T_{x_0}M$ que apontam para dentro, então

$$\text{ind}_{(x_0,0)}(\tilde{\Omega}) = \text{ind}_{x_0}({}^0\Omega).$$

Demonstração.

(i) É consequência de (4.1), (3.11) e (3.8).

(ii) Neste caso, $-\Omega_{x_0}$ é positiva nos vetores de $T_{x_0}M$ que apontam para fora. Por (i),

$$\text{ind}_{(x_0,0)}(\widetilde{-\Omega}) = -\text{ind}_{x_0}({}^0(-\Omega)).$$

Mas $\widetilde{-\Omega} = -\tilde{\Omega}$ e ${}^0(-\Omega) = -{}^0\Omega$. Segue da obs. (2.10.i) que

$$\begin{aligned} \text{ind}_{(x_0,0)}(\tilde{\Omega}) &= (-1)^m \text{ind}_{(x_0,0)}(-\tilde{\Omega}) \\ &= -(-1)^m \text{ind}_{x_0}(-{}^0\Omega) \\ &= (-1)^{m-1} \text{ind}_{x_0}(-{}^0\Omega) \\ &= \text{ind}_{x_0}({}^0\Omega). \quad \square \end{aligned}$$

(4.3) **Corolário.** *Seja Ω uma 1-forma diferencial definida numa variedade com bordo M com uma singularidade de bordo em $x_0 \in \partial M$. Se Ω_{x_0} é negativa nos vetores de $T_{x_0}(\partial M)$ que apontam para fora, então*

$$\text{ind}_{x_0}^+(\Omega) = \text{ind}_{x_0}({}^0\Omega).$$

Demonstração. De (4.1) e (4.2.ii) vem que

$$\text{ind}_{x_0}^+(\Omega) = \frac{1}{2}(\text{ind}_{(x_0,0)}(\tilde{\Omega}) + \text{ind}_{x_0}({}^0\Omega)) = \text{ind}_{x_0}({}^0\Omega). \quad \square$$

É interessante notar que como em dimensão um os únicos valores possíveis para índices de singularidades de bordo são $+1$, -1 e 0 , o corol. (4.3) fornece outra prova do resulatado do ex. (3.12).

A demonstração do lema (4.1) se reduz à demonstração do seguinte caso particular do mesmo:

(4.4) **Lema.** *Seja ω uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}_+^m$ com uma singularidade de bordo na origem. Se ${}^0\omega$ indica a restrição de ω a $\partial\mathbb{R}_+^m$ e se $\tilde{\omega}$ indica o “pull-back” de ω em $\tilde{\mathbb{R}}_+^m$ pela projeção natural $\pi_+ : \tilde{\mathbb{R}}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ (ver ex. (A.3.i)), então*

$$\text{ind}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) = 2\text{ind}_0^+(\omega) - \text{ind}_0({}^0\omega).$$

Assumamos por um momento o lema (4.4).

Demonstração da prop. (4.1). Seja $f = 0$ uma equação não-degenerada para ∂M de modo que $\tilde{M} = \mathcal{D}_f M$ (def. (A.2)) e tomemos uma carta local de M , $(U, \phi =$

$(x^1, \dots, x^m)$), centrada em x_0 com $x^1 = f$; podemos supor que $\phi(U) = \mathbf{R}_+^m$. Consideremos então a carta local $(\tilde{U} = (U \times \mathbf{R}) \cap \tilde{M}, \tilde{\phi} = (z, x^2, \dots, x^m))$ de $\tilde{M}$, centrada em $(x_0, 0)$, obtida a partir de (U, ϕ) de acordo com a construção do atlas de $\tilde{M}$ feita no início do apêndice A. Note que $\tilde{\phi}(\tilde{U}) = \mathbf{R}^m$.

Sendo $\pi_+ : \tilde{\mathbf{R}}_+^m \rightarrow \mathbf{R}_+^m$ a projeção natural e $\Phi : \tilde{\mathbf{R}}_+^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ o difeomorfismo canônico (ex. (A.3.i)), é imediato verificar que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbf{R}^m & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & \tilde{\mathbf{R}}_+^m \\ \downarrow \pi|_{\tilde{U}} & & & & \downarrow \pi_+ \\ U & \xrightarrow{\phi} & & & \mathbf{R}_+^m \end{array}$$

é comutativo. De acordo com a invariância por difeomorfismos do índice de uma 1-forma (prop. (2.16)), temos que

$$\text{ind}_{(x_0, 0)}(\tilde{\Omega}) = \text{ind}_{(0, 0)}((\tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi)^* \tilde{\Omega}).$$

Mas,

$$\begin{aligned} (\tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi)^* \tilde{\Omega} &= (\tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi)^* \pi^* \Omega \\ &= (\pi \circ \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi)^* \Omega \\ &= (\phi^{-1} \circ \pi_+)^* \Omega \\ &= \pi_+^* (\phi^{-1})^* \Omega, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\text{ind}_{(x_0, 0)}(\tilde{\Omega}) = \text{ind}_{(0, 0)}(\pi_+^* (\phi^{-1})^* \Omega).$$

Além disso,

$$\text{ind}_{x_0}^+(\Omega) = \text{ind}_0^+((\phi^{-1})^* \Omega)$$

e

$$\begin{aligned} \text{ind}_{x_0}({}^0\Omega) &= \text{ind}_0(\phi|_{\partial U}^{-1})^* {}^0\Omega \\ &= \text{ind}_0((\phi^{-1})^* \Omega|_{\partial \mathbf{R}_+^m}). \end{aligned}$$

A relação do lema (4.1) segue então da relação do lema (4.4) aplicada à 1-forma $\omega = (\phi^{-1})^* \Omega$. $\square$

Falta então demonstrar o lema (4.4). Para isso, escrevamos a 1-forma ω dada nesse lema como

$$\omega_x = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \dots + a_m(x)dx_m$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m = \{x_1 \geq 0\}$. Então

$${}^0\omega_x = a_2(x)dx_2 + \dots + a_m(x)dx_m$$

para $x \in \partial\mathbf{R}_+^m = \{x_1 = 0\}$, e

$$\tilde{\omega}_{\tilde{x}} = 2z\tilde{a}_1(\tilde{x})dz + \tilde{a}_2(\tilde{x})dx_2 + \dots + \tilde{a}_m(\tilde{x})dx_m$$

para $\tilde{x} = (z, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m$ e onde $\tilde{a}_i = a_i \circ \pi_+$.

Introduzamos também a 1-forma diferencial lisa θ em $\mathbf{R}_+^m$ (associada a ω) definida por

$$\theta_x = x_1^2 a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \dots + a_m(x)dx_m$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m$. Note que θ tem uma singularidade de bordo (isolada) na origem.

(4.5) **Lema.** *O índice de ω em 0 e o índice de θ em 0 são iguais:*

$$\text{ind}_0^+(\omega) = \text{ind}_0^+(\theta).$$

Demonstração. Podemos trabalhar numa vizinhança aberta U de 0 em $\mathbf{R}_+^m$ que não contém outras singularidades de ω ou de θ , além do próprio 0 (isto quer dizer que vamos sempre considerar aplicações hemisféricas dessas 1-formas tais que a imagem de j^+ esteja contida em $U - \{0\}$; ver def. (3.1.ii)). Para cada $t \in I$, consideremos a 1-forma lisa ω^t em $\mathbf{R}_+^m$, dada por

$$\omega_x^t = (1 - t + tx_1^2)a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \dots + a_m(x)dx_m.$$

Então $\omega^0 = \omega$ e $\omega^1 = \theta$. Como as singularidades de ω^t (interiores e de bordo) não dependem de t , segue que $\text{hsf}_0(\omega^t)$ é uma homotopia $\{e_1\}$ -adequada entre $\text{hsf}_0(\omega)$ e $\text{hsf}_0(\theta)$ (i.e., $\text{hsf}_0(\omega^t)(x) \neq \{e^1\}$ se $x \in \partial S_+^{m-1}$). Logo, (cf. obs. (3.2.v) e corol. (1.8))

$$\begin{aligned} \text{ind}_0^+(\omega) &= I(\text{hsf}_0(\omega), \{e^1\}) \\ &= I(\text{hsf}_0(\theta), \{e^1\}) \\ &= \text{ind}_0^+(\theta). \quad \square \end{aligned}$$

(4.6) **Lema.** *O índice em 0 de ${}^0\omega$ e o índice em 0 da restrição de θ a $\partial\mathbf{R}_+^m$ são iguais:*

$$\text{ind}_0({}^0\omega) = \text{ind}_0(\theta|_{\partial\mathbf{R}_+^m}).$$

Demonstração. De fato, $\omega|_{\partial\mathbf{R}_+^m} = \theta|_{\partial\mathbf{R}_+^m}$. $\square$

A próxima proposição é a razão pela qual nós introduzimos a 1-forma θ .

(4.7) Proposição.

(i) *Seja $f : S_+^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ tal que $f(S_0^{m-1}) \subset S_0^{m-1}$. Se $y_0, y_1 \in S^{m-1} - S_0^{m-1}$ estão no mesmo hemisfério de S^{m-1} , então*

$$I(f, \{y_0\}) = I(f, \{y_1\}).$$

(ii) *Seja $f : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ tal que $f(S_0^{m-1}) \subset S_0^{m-1}$. Se $y \in S^{m-1} - S_0^{m-1}$, então*

$$I(f, \{y\}) = I(f|_{S_+^{m-1}}, \{y\}) + I(f|_{S_-^{m-1}}, \{y\}).$$

Demonstração.

(i) Suponhamos, para fixar idéias, que $y_0, y_1 \in S_+^{m-1} - S_0^{m-1}$. Existe uma curva lisa $c : I \rightarrow S_+^{m-1} - S_0^{m-1}$ tal que $c(0) = y_0$ e $c(1) = y_1$. Como $f(S_0^{m-1}) \subset S_0^{m-1}$, a aplicação c , considerada como homotopia entre as aplicações constantes $S_+^{m-1} \rightarrow \{y_0\}$ e $S_+^{m-1} \rightarrow \{y_1\}$, é adequada em relação a f , pois (cf. def. (1.9)) $c(I) \cap f(\partial S_+^{m-1}) = \emptyset$. A tese segue agora da obs. (1.12.i).

(ii) Aqui também podemos supor sem perda de generalidade que $y \in S_+^{m-1} - S_0^{m-1}$. Seja $z \in S_+^{m-1} - S_0^{m-1}$ um valor regular para f . Então

$$\begin{aligned} I(f, \{y\}) &= I(f, \{z\}) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(z)} I_x(f, \{z\}) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(z) \cap S_+^{m-1}} I_x(f, \{z\}) + \sum_{x \in f^{-1}(z) \cap S_-^{m-1}} I_x(f, \{z\}) \\ &= I(f|_{S_+^{m-1}}, \{z\}) + I(f|_{S_-^{m-1}}, \{z\}) \\ &= I(f|_{S_+^{m-1}}, \{y\}) + I(f|_{S_-^{m-1}}, \{y\}) \end{aligned}$$

onde usamos a parte (i) desta proposição para estabelecer a última igualdade. $\square$

Os dois lemas seguintes são os mais delicados deste capítulo.

(4.8) Lema. *É válida a seguinte relação:*

$$\text{ind}_0(\theta|_{\partial\mathbf{R}_+^m}) = \text{ind}_0^+(\theta) - I(\text{hsf}_0(\theta), \{-e^1\}).$$

Demonstração. Seja $g : S_+^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ a aplicação lisa obtida a partir de $\text{hsf}_0(\theta) : S_+^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$ fazendo-se a identificação de $(S^*)^{m-1}$ com S^{m-1} . É claro que (cf. obs. (3.2.v))

$$\text{ind}_0^+(\theta) = I(\text{hsf}_0(\theta), \{e^1\}) = I(g, \{e_1\}).$$

Como g é lisa, g é a restrição de uma aplicação lisa $G : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ (basta aplicar a definição de aplicação lisa neste caso (ver (0.12)) para construir G localmente e então usar partições da unidade para definir G globalmente). Tendo que $G(S_0^{m-1}) = g(S_0^{m-1}) \subset S_0^{m-1}$, fica induzida uma aplicação lisa $G_{(0)} : S_0^{m-1} \rightarrow S_0^{m-1}$. Note que $G_{(0)}$ se identifica com $\text{esf}_0(\theta|_{\partial \mathbb{R}_+^m}) : S_0^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$.

Seja $y_0 \in S_0^{m-1}$ um valor regular de G (não é claro que deva existir um tal valor regular; mas veja o lema (D.2)) e consideremos $G^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_p\}$. Pelo teorema da pilha de discos (ver (0.6)), existe uma vizinhança conexa V de y_0 em S^{m-1} tal que $G^{-1}(V)$ é uma reunião disjunta $U_1 \cup \dots \cup U_p$, onde U_i é uma vizinhança aberta de x_i em S^{m-1} e G aplica cada U_i difeomorficamente sobre V . Seja B um arco de grande círculo de S^{m-1} que contém y_0 e suponhamos que B tem extremos $y_+ \in V - S_-^{m-1}$ e $y_- \in V - S_+^{m-1}$ (fig. 4-4). Tomando $B \subset V$, temos que $A = G^{-1}(B)$ é uma subvariedade compacta de dimensão um de S^{m-1} com bordo $\partial A = G^{-1}(\{y_+, y_-\})$ e que cada componente $A_i = A \cap U_i$ é uma cópia de I ; seja $\partial A_i = \{x_i^+, x_i^-\}$, onde $\{x_i^+\} = G^{-1}(y_+) \cap U_i$ e $\{x_i^-\} = G^{-1}(y_-) \cap U_i$. A restrição

$$G|_{S_0^{m-1}} : S_0^{m-1} \hookrightarrow S^{m-1} \xrightarrow{G} S^{m-1}$$

sendo transversal a B , vem também que $A = G^{-1}(B) \cap S_0^{m-1}$ (ver (0.9)).

Figura 4-4

Observe que y_0 também é um valor regular para $G_{(0)}$ e que $G_{(0)}^{-1}(y_0) = A \cap S_0^{m-1}$. Portanto, podemos calcular

$$\text{ind}_0(\theta|_{\partial \mathbf{R}_+^m}) = \deg \text{esf}_0(\theta|_{\partial \mathbf{R}_+^m}) = \deg G_{(0)} = I(G_{(0)}, \{y_0\})$$

contando o número de pontos em $A \cap S_0^{m-1}$, cada um com o sinal correto. Para isso, vamos denotar com $G_{(i)} : A_i \rightarrow B$ o difeomorfismo induzido por G para $i : 1, \dots, p$. Além disso, orientemos B de modo que $T_{y_0} B \oplus T_{y_0} S_0^{m-1} = T_{y_0} S^{m-1}$ como espaços vetoriais orientados, e para cada i com $A_i \cap S_0^{m-1} \neq \emptyset$ (i.e., com $x_i \in S_0^{m-1}$), orientemos A_i de modo que $T_{x_i} A_i \oplus T_{x_i} S_0^{m-1} = T_{x_i} S^{m-1}$ também como espaços vetoriais orientados.

Se, para cada índice i com $x_i \in S_0^{m-1}$, indicarmos com $s(G, x_i)$, $s(G_{(0)}, x_i)$ e $s(G_{(i)}, x_i)$, respectivamente, os sinais dos isomorfismos $dG_{x_i} : T_{x_i} S^{m-1} \rightarrow T_{y_0} S^{m-1}$, $d(G_{(0)})_{x_i} : T_{x_i} S_0^{m-1} \rightarrow T_{y_0} S_0^{m-1}$ e $d(G_{(i)})_{x_i} : T_{x_i} A_i \rightarrow T_{y_0} B$, é imediato que

$$s(G, x_i) = s(G_{(i)}, x_i) \cdot s(G_{(0)}, x_i).$$

Como $y_+ \in S_+^{m-1} - S_0^{m-1}$ é um valor regular para G , (cf. prop. (4.7.i))

$$\begin{aligned} \text{ind}_0^+(\theta) &= I(g, \{e_1\}) \\ &= I(g, \{y_+\}) \\ &= I(G|_{S_+^{m-1}}, \{y_+\}) \\ &= \sum_{x_i^+ \in S_+^{m-1}} I_{x_i^+}(G, \{y_+\}) \\ &= \sum_{x_i^+ \in S_+^{m-1}} s(G, x_i^+) \\ &= \sum_{x_i^+ \in S_+^{m-1}} s(G, x_i) \\ &= \sum_{\substack{x_i^+ \in S_+^{m-1} \\ x_i^- \in S_+^{m-1}}} s(G, x_i) + \sum_{\substack{x_i^+ \in S_+^{m-1} \\ x_i^- \in S_-^{m-1}}} s(G, x_i). \end{aligned}$$

Analogamente, tendo que $y_- \in S_-^{m-1} - S_0^{m-1}$ é valor regular para G ,

$$\begin{aligned} I(\text{hsf}_0(\theta), \{-e^1\}) &= I(g, \{-e_1\}) \\ &= I(g, \{y_-\}) \\ &= I(G|_{S_-^{m-1}}, \{y_-\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x_i^- \in S_+^{m-1}} I_{x_i^-}(G, \{y_-\}) \\
&= \sum_{x_i^- \in S_+^{m-1}} s(G, x_i^-) \\
&= \sum_{x_i^- \in S_+^{m-1}} s(G, x_i) \\
&= \sum_{\substack{x_i^- \in S_+^{m-1} \\ x_i^+ \in S_+^{m-1}}} s(G, x_i) + \sum_{\substack{x_i^- \in S_+^{m-1} \\ x_i^+ \in S_-^{m-1}}} s(G, x_i).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{ind}_0^+(\theta) - I(g, \{-e^1\}) &= \sum_{\substack{x_i^+ \in S_+^{m-1} \\ x_i^- \in S_-^{m-1}}} s(G, x_i) - \sum_{\substack{x_i^- \in S_+^{m-1} \\ x_i^+ \in S_-^{m-1}}} s(G, x_i) \\
&= \sum_{\substack{x_i^+ \in S_+^{m-1} \\ x_i^- \in S_-^{m-1}}} s(G_{(i)}, x_i) \cdot s(G_{(0)}, x_i) - \sum_{\substack{x_i^- \in S_+^{m-1} \\ x_i^+ \in S_-^{m-1}}} s(G_{(i)}, x_i) \cdot s(G_{(0)}, x_i) \\
&= \sum_{\substack{x_i^+ \in S_+^{m-1} \\ x_i^- \in S_-^{m-1}}} (+1) \cdot s(G_{(0)}, x_i) - \sum_{\substack{x_i^- \in S_+^{m-1} \\ x_i^+ \in S_-^{m-1}}} (-1) \cdot s(G_{(0)}, x_i) \\
&= \sum_{x_i \in S_0^{m-1}} s(G_{(0)}, x_i) \\
&= \sum_{x_i \in S_0^{m-1}} I_{x_i}(G_{(0)}, \{y_0\}) \\
&= I(G_{(0)}, \{y_0\}) \\
&= \text{ind}_0(\theta|_{\partial \mathbf{R}_+^m}). \quad \square
\end{aligned}$$

No que se segue denotaremos as involuções

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_m)$$

de S^{m-1} e de $(S^*)^{m-1}$ com σ .

(4.9) **Lema.** *É válida a seguinte relação:*

$$\text{ind}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) = \text{ind}_0^+(\theta) + I(\sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}, \{e^1\}).$$

Demonstração. Seja $\Phi : \tilde{\mathbf{R}}_+^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ a carta global canônica (ex. (A.3.i)). Então $\Phi(0,0) = 0$ e $\text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) = \text{esf}_0((\Phi^{-1})^*\tilde{\omega})$, onde

$$\begin{aligned} [(\Phi^{-1})^*\tilde{\omega}]_x &= 2x_1a_1(x_1^2, x_2, \dots, x_m)dx_1 + a_2(x_1^2, x_2, \dots, x_m)dx_2 + \dots \\ &\quad + a_m(x_1^2, x_2, \dots, x_m)dx_m \end{aligned}$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$.

Lembremos que θ é a 1-forma diferencial em $\mathbf{R}_+^m$ dada por

$$\theta_x = x_1^2a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \dots + a_m(x)dx_m.$$

Se U é uma bola aberta em $\mathbf{R}_+^m$ centrada em 0 de raio menor do que um e que não contém outras singularidades (interiores e de bordo) de θ além de 0, então é fácil ver que U também não contém singularidades de $(\Phi^{-1})^*\tilde{\omega}|_{\mathbf{R}_+^m}$ além de 0. De fato, note que se $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in U$, então $(x_1^2, x_2, \dots, x_m) \in U$.

Para cada $t \in I$, seja θ^t a 1-forma diferencial em $\mathbf{R}_+^m$ definida por

$$\begin{aligned} \theta_x^t &= [(1-t)2x_1 + tx_1^2]a_1((1-t)x_1^2 + tx_1, x_2, \dots, x_m)dx_1 \\ &\quad + a_2((1-t)x_1^2 + tx_1, x_2, \dots, x_m)dx_2 + \dots \\ &\quad + a_m((1-t)x_1^2 + tx_1, x_2, \dots, x_m)dx_m. \end{aligned}$$

Observe que para todo $t \in I$, $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in U$ implica que $((1-t)x_1^2 + tx_1, x_2, \dots, x_m) \in U$, e $x_1 > 0$ implica que $(1-t)2x_1 + tx_1^2 > 0$. Portanto as singularidades de θ^t em U não dependem de $t \in I$. Como $\theta^0 = (\Phi^{-1})^*\tilde{\omega}|_{\mathbf{R}_+^m}$ e $\theta^1 = \theta$, segue que $\text{hsf}_0(\theta^t)$ é uma homotopia bem definida entre $\text{hsf}_0((\Phi^{-1})^*\tilde{\omega}|_{\mathbf{R}_+^m}) = \text{esf}_0((\Phi^{-1})^*\tilde{\omega})|_{S_+^{m-1}}$ e $\text{hsf}_0(\theta)$.

Seja $t \in I$. Como $\text{hsf}_0(\theta^t)(S_0^{m-1}) \subset (S^*)_0^{m-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \text{hsf}_0(\theta^t)(x) &\neq \{e^1\} && \text{para todo } x \in \partial S_+^{m-1} \text{ e} \\ \sigma \circ \text{hsf}_0(\theta^t) \circ \sigma(x) &\neq \{e^1\} && \text{para todo } x \in \partial S_-^{m-1}. \end{aligned}$$

Resulta que

$$\text{hsf}_0(\theta^t) \text{ e } \sigma \circ \text{hsf}_0(\theta^t) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}$$

são respectivamente homotopias $\{e^1\}$ -adequadas entre

$$\text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega})|_{S_+^{m-1}} \text{ e } \text{hsf}_0(\theta)$$

e entre

$$\sigma \circ \text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}} \text{ e } \sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}.$$

Observe ainda que

$$\sigma \circ \text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}} = \text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega})|_{S_-^{m-1}}.$$

Logo, (cf. corol. (1.8))

$$\begin{aligned} \text{ind}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) &= \deg \text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) \\ &= I(\text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega}), \{e^1\}) \\ &= I(\text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega})|_{S_+^{m-1}}, \{e^1\}) + I(\text{esf}_{(0,0)}(\tilde{\omega})|_{S_-^{m-1}}, \{e^1\}) \\ &= I(\text{hsf}_0(\theta), \{e^1\}) + I(\sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}, \{e^1\}) \\ &= \text{ind}_0^+(\theta) + I(\sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}, \{e^1\}), \end{aligned}$$

onde aplicamos (4.7.ii) para a terceira igualdade. $\square$

Concluimos o capítulo com a

Demonstração da prop. (4.4). Aplicando os lemas (4.5) e (4.6) às relações dos lemas (4.8) e (4.9), obtemos que

$$\begin{aligned} \text{ind}_0({}^0\omega) &= \text{ind}_0^+(\omega) - I(\text{hsf}_0(\theta), \{-e^1\}) \quad e \\ \text{ind}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) &= \text{ind}_0^+(\omega) + I(\sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}, \{e^1\}). \end{aligned}$$

Somando essas igualdades membro a membro vem que

$$\begin{aligned} \text{ind}_{(0,0)}(\tilde{\omega}) + \text{ind}_0({}^0\omega) &= 2\text{ind}_0^+(\omega) \\ &\quad + (I(\sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}, \{e^1\}) - I(\text{hsf}_0(\theta), \{-e^1\})). \end{aligned}$$

Resta então mostrar que a expressão entre parênteses é nula, ou seja que

$$I(\text{hsf}_0(\theta), \{-e^1\}) = I(\sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}, \{e^1\}).$$

Com efeito, graças ao teor. (1.4) existe uma aplicação $h : S_+^{m-1} \rightarrow (S^*)^{m-1}$ que é $\{-e^1\}$ -homotópica a $\text{hsf}_0(\theta)$ e transversal a $\{-e^1\}$. Não é difícil perceber então que $\sigma \circ h \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}$ é $\{e^1\}$ -homotópica a $\sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S_-^{m-1}}$ e transversal a $\{e^1\}$. Como σ é um difeomorfismo que inverte orientação, segue que

$$\begin{aligned} I(\text{hsf}_0(\theta), \{-e^1\}) &= I(h, \{-e^1\}) \\ &= \sum_{x \in h^{-1}(-e^1)} I_x(h, \{-e^1\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{x \in (\sigma \circ h)^{-1}(e^1)} I_x(\sigma \circ h, \{e^1\}) \\
&= \sum_{x \in (\sigma \circ h \circ \sigma|_{S^{m-1}})^{-1}(e^1)} I_x(\sigma \circ h \circ \sigma|_{S^{m-1}}, \{e^1\}) \\
&= I(\sigma \circ h \circ \sigma|_{S^{m-1}}, \{e^1\}) \\
&= I(\sigma \circ \text{hsf}_0(\theta) \circ \sigma|_{S^{m-1}}, \{e^1\}). \quad \square
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

O TEOREMA DE POINCARÉ-HÖPF COM SINGULARIDADES NO BORDO

(5.1) **Teorema.** (*Poincaré-Höpf III para 1-formas*) Seja M uma variedade compacta orientada com bordo e consideremos uma 1-forma diferencial Ω em M com um número finito de singularidades (interiores e de bordo) em M . Então a soma dos índices das singularidades de Ω (interiores e de bordo) é igual à característica de Euler de M .

Demonstração. Sejam $\tilde{M}$ o duplo de M e $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ a projeção natural (ver apêndice A). Vamos considerar as 1-formas $\tilde{\Omega} = \pi^*\Omega$ e ${}^0\Omega = \Omega|_{\partial M}$.

Das considerações feitas no início do capítulo 4 segue que cada singularidade interior x_0 de Ω em M dá origem a um par de singularidades (interiores) de $\tilde{\Omega}$ em $\tilde{M}$, ambas com o mesmo índice que x_0 porque π é um difeomorfismo local em $z \neq 0$. Além disso, as demais singularidades de $\tilde{\Omega}$ são os pontos da forma $(x_0, 0)$ onde $x_0 \in \partial M$ é uma singularidade de bordo de Ω . Para essas singularidades o lema (4.1) fornece que

$$\text{ind}_{(x_0, 0)}(\tilde{\Omega}) = 2\text{ind}_{x_0}^+(\Omega) - \text{ind}_{x_0}({}^0\Omega).$$

Lembremos também que as singularidades de ${}^0\Omega$ são precisamente as singularidades de bordo de Ω .

Sejam

$\tilde{I}$, a soma dos índices das singularidades de $\tilde{\Omega}$,
 I_0 , a soma dos índices das singularidades de ${}^0\Omega$,
 I , a soma dos índices das singularidades interiores de Ω , e
 I^+ , a soma dos índices das singularidades de bordo de Ω .

Pelo lema (4.1) temos que

$$\tilde{I} = 2I + (2I^+ - I_0) = 2(I + I^+) - I_0,$$

e pelo teor. de Poincaré-Höpf II para 1-formas (teor. (2.19)),

$$\tilde{I} = \chi(\tilde{M}) \quad \text{e} \quad I_0 = \chi(\partial M).$$

Comparando com a relação fornecida pela prop. (A.4)

$$\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M) - \chi(\partial M),$$

resulta que

$$I + I^+ = \chi(M). \quad \square$$

Como corolário do teor. (5.1), temos um resultado correspondente para campos de vetores.

(5.2) **Teorema.** (*Poincaré-Höpf III para campos*) *Seja M uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo e consideremos um campo de vetores X em M com um número finito de singularidades (interiores e de bordo) em M . Então a soma dos índices das singularidades de X (interiores e de bordo) é igual à característica de Euler de M .*

Demonstração. Basta lembrar das props. (2.18) e (3.8) e aplicar o teor. (5.1) à 1-forma dual de X em M . $\square$

(5.3) **Teorema.** (*Poincaré-Höpf relativo*) *Seja M uma variedade compacta orientada com bordo e consideremos um campo de vetores X em M com um número finito de singularidades interiores e que aponta para dentro no bordo. Então*

$$\sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X) = \chi(M) - \chi(\partial M).$$

Em particular, se além disso a dimensão de M for par, então

$$\sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X) = \chi(M).$$

Demonstração. Fixemos uma métrica Riemanniana em M . Podemos supor que X tem um número finito de singularidades de bordo (senão é possível perturbar X numa vizinhança de ∂M , sem alterar as suas singularidades interiores, de maneira a tornar a aplicação $X|_{\partial M} : \partial M \rightarrow T_{\partial M}M$ transversal a $N(\partial M; M)$, o fibrado normal de ∂M em M ; ver a dem. da prop. (D.3)). Seja Ω a 1-forma dual em M de X . Sendo I e I^+ como no teor. (5.1) temos que

$$I + I^+ = \chi(M).$$

Mas (cf. prop. (2.18))

$$I = \sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X)$$

e (cf. corol. (4.3) e teor. (2.19))

$$I^+ = \sum_{{}^0\Omega_x=0} \text{ind}_x({}^0\Omega) = \chi(\partial M).$$

Para justificar a última afirmação do enunciado, basta lembrar da obs. (2.10.ii). $\square$

O teorema a seguir, consequência simples de resultados anteriores, aparece em [Godbillon] (p. 190) para dimensão dois.

(5.4) **Teorema.** *Seja M uma variedade compacta orientada com bordo de dimensão par e consideremos um campo de vetores X em M com um número finito de singularidades interiores. Se X nunca é tangente ao bordo de M , então*

$$\sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X) = \chi(M).$$

Demonstração. Note inicialmente que, por continuidade, em cada componente conexa de ∂M temos que X a.p.f. ou X a.p.d..

Fixada uma métrica Riemanniana em M , podemos assumir que X só tem um número finito de singularidades de bordo (ver dem. do teor. anterior). O resultado desejado seguirá do teor. de Poincaré-Höpf III (teor. (5.2)) se mostrarmos que a soma dos índices das singularidades de bordo de X é zero. Mas o índice de cada singularidade de bordo de X é zero, pois temos que um dos dois, X ou $-X$, aponta para fora em cada uma delas (cf. obs. (2.10.i) e ex. (3.11)). $\square$

(5.5) *Observações finais.*

(i) Se Ω é uma 1-forma nas hipóteses do teor. de Poincaré-Höpf III (teor. (5.1)) e, além disso, em cada singularidade de bordo Ω é positiva nos vetores que apontam para fora, então Ω também está nas hipóteses do teor. de Poincaré-Höpf II (teor. (2.19)). Este último teorema não considera as singularidades de bordo de Ω ; no entanto, note que em vista do ex. (3.11) (e da prop. (3.8)), o índice de cada singularidade de bordo de Ω é zero.

(ii) Em toda variedade compacta com bordo existe um campo de vetores liso que a.p.f. no bordo e só tem um número finito de singularidades interiores (com efeito, primeiro construímos um campo liso que a.p.f. no bordo, de acordo com a obs. (2.2.ii);

depois, através dos teors. (1.1) e (C.1), procedemos como no segundo caso da prova da prop. (2.11) para modificar homotopicamente o campo apenas no interior da variedade de maneira a torná-lo transversal à seção nula do fibrado tangente; resulta que o campo só terá um número finito de singularidades interiores, pois a variedade é compacta). Daí segue que em toda variedade compacta orientada com bordo existe um campo de vetores ao qual pode-se aplicar o teor. de Poincaré-Höpf I (teor. (2.9)) e concluir-se que a característica de Euler da variedade não depende de sua orientação, pois o índice de cada singularidade do campo não depende da orientação da variedade.

(iii) Para uma variedade compacta com bordo que não é orientável pode-se definir a característica de Euler através de seu recobrimento duplo orientável. E não é difícil mostrar-se que nesse contexto valem versões dos teoremas de Poincaré-Höpf I, II e III.

(iv) É consequência do teor. de Poincaré-Höpf II para campos (teor. (2.13)) o seguinte resultado: "Seja M uma variedade compacta orientada com bordo e suponhamos que $\chi(M) \neq 0$. Se X é um campo de vetores em M que não se anula em nenhum ponto de M , então, qualquer que seja a métrica Riemanniana dada em M , sempre existe um ponto $x_0 \in \partial M$ tal que X_{x_0} é ortogonal a $T_{x_0}(\partial M)$ e X_{x_0} aponta para dentro."

APÊNDICE A

VARIEDADE DUPLA DE UMA VARIEDADE COM BORDO

Diversos problemas concernentes às variedades com bordo podem ser resolvidos recaindo-se em variedades sem bordo através da construção que exporemos aqui. Dada uma variedade com bordo M , construiremos uma outra variedade $\tilde{M}$ sem bordo e de mesma dimensão que M , o *duplo* de M ; $\tilde{M}$ será o duplo de M no sentido de que $\tilde{M}$ será constituída por duas cópias de M identificadas pelo bordo ∂M . Para um outro tratamento dessa mesma questão, consultar [Munkres], pp. 56-57 e pp. 63-67.

Seja então M uma variedade com bordo de dimensão m e fixemos uma equação não-degenerada $f = 0$ para o bordo de M (ver (0.18)). Vamos considerar o seguinte subespaço topológico de $M \times \mathbf{R}$ (fig. A-1)

$$\mathcal{D}_f M = \{ (x, z) \in M \times \mathbf{R} \mid z^2 = f(x) \}.$$

Figura A-1

$\mathcal{D}_f M$ é a reunião dos gráficos de $\sqrt{f}$ e $-\sqrt{f}$. Queremos colocar uma estrutura de variedade em $\mathcal{D}_f M$. Para isso, vamos descrever em termos da estrutura diferenciável de M como serão as cartas locais de $\mathcal{D}_f M$ numa vizinhança de um ponto (x, z) . Distinguiremos dois casos: $z \neq 0$ e $z = 0$.

Inicialmente seja $(x, z) \in \mathcal{D}_f M$ com $z \neq 0$. Nesse caso, supondo que $z > 0$ para fixar idéias, (x, z) é um ponto do aberto $\mathcal{D}_f M \cap \{z > 0\}$ onde existe uma projeção natural

Figura A-2

$p_+ : \mathcal{D}_f M \cap \{z > 0\} \rightarrow M'$ que é um homeomorfismo. Como $x = p_+(x, z)$ é um ponto interior de M , existe uma carta local de M em torno de x , (U, ϕ) , tal que $U \subset M'$ e $\phi(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}^m$. Uma carta local de $\mathcal{D}_f M$ em torno de (x, z) será dada por $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ onde $\tilde{U} = p_+^{-1}(U)$ e $\tilde{\phi} = \phi \circ p_+$ (fig. A-2).

Se $(x, z) \in \mathcal{D}_f M$ com $z < 0$, então $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ será dada por $\tilde{U} = p_-^{-1}(U)$ e $\tilde{\phi} = \phi \circ p_-$, onde $p_- : \mathcal{D}_f M \cap \{z < 0\} \rightarrow M'$ é a projeção natural.

Suponhamos agora que $(x, 0) \in \mathcal{D}_f M$. Então $x \in \partial M$ e existe uma carta local de M em torno de x , $(U, \phi = (x^1, x^2, \dots, x^m))$, onde $\phi(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}_+^m$. Como f é uma submersão em x , podemos supor que $x^1 = f$ pela forma local das submersões (fig. A-3).

Figura A-3

Chamando de $z : M \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ a projeção no segundo fator, nós temos que $z \times \phi = (z, x^1, x^2, \dots, x^m)$ é um sistema de coordenadas no cilindro $U \times \mathbf{R}$. A imagem do aberto $\tilde{U} = (U \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{D}_f M$ de $\mathcal{D}_f M$ por $z \times \phi$ é a intersecção do parabolóide $z^2 = x_1$ com o cilindro $\phi(U) \times \mathbf{R}$ (fig. A-4). Como a projeção $(z, x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (z, x_2, \dots, x_m)$ se restringe a um homeomorfismo desse aberto do parabolóide sobre um aberto de $\mathbf{R}^m$, segue que $(\tilde{U}, \tilde{\phi} = (z, x^2, \dots, x^m))$ é um sistemas de coordenadas locais de $\mathcal{D}_f M$ definido numa vizinhança de $(x, 0)$.

Figura A-4

Agora não é difícil verificar que as mudanças de coordenadas do atlas construído acima para $\mathcal{D}_f M$ são lisas. Por exemplo, sejam $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ e $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ cartas locais de $\mathcal{D}_f M$ em torno de um ponto $(x, 0)$, obtidas respectivamente a partir das cartas locais de M $(U, \phi = (f, x^2, \dots, x^m))$ e $(V, \psi = (f, y^2, \dots, y^m))$ em torno de $x \in \partial M$. Como a mudança de coordenadas em M é lisa, existem funções lisas $F_i : \phi(U \cap V) \subset \mathbf{R}_+^m \rightarrow \mathbf{R}$, $i : 2, \dots, m$, tais que

$$y^i = F_i(f, x^2, \dots, x^m).$$

Daí segue que a mudança de coordenadas em $\mathcal{D}_f M$ de $\tilde{\phi} = (z, x^2, \dots, x^m)$ para $\tilde{\psi} = (z, y^2, \dots, y^m)$ também é lisa, pois $z^2 = x^1$ em $\tilde{U}$, e portanto,

$$z = z \quad \text{e} \quad y_i = F_i(z^2, x^2, \dots, x^m), \quad i : 2, \dots, m.$$

Finalmente, consideremos a projeção $\pi : \mathcal{D}_f M \rightarrow M$ definida por $\pi(x, z) = x$. De acordo com o atlas construído acima, verifica-se que em torno de um ponto (x, z) de $\mathcal{D}_f M$

com $z \neq 0$ a representação local em coordenadas de π é a identidade, enquanto que em torno de um ponto $(x, 0) \in \mathcal{D}_f M$ temos que

$$\pi(z, x^2, \dots, x^m) = (x^1, x^2, \dots, x^m) = (z^2, x^2, \dots, x^m).$$

Em particular, π é lisa e é um difeomorfismo local em (x, z) se $z \neq 0$.

A construção do duplo de M já está praticamente terminada. Só falta eliminar a ambiguidade decorrente da escolha arbitrária da equação não-degenerada para ∂M .

(A.1) Proposição. *Sejam $f = 0$ e $g = 0$ equações não-degeneradas para o bordo da variedade com bordo M de dimensão m . Então $\mathcal{D}_f M$ e $\mathcal{D}_g M$ são variedades difeomorfas.*

Demonstração. Com efeito, temos que

$$\mathcal{D}_f M = \{(x, z) \in M \times \mathbb{R} \mid z^2 = f(x)\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{D}_g M = \{(x, w) \in M \times \mathbb{R} \mid w^2 = g(x)\}.$$

Existe uma aplicação natural $H : \mathcal{D}_f M \rightarrow \mathcal{D}_g M$ (fig. A-5) definida por

$$H(x, z) = (x, s(z)\sqrt{g(x)}),$$

onde $s(z) = z/|z|$ se $z \neq 0$ e $s(z) = 0$ se $z = 0$. Provemos que H é um difeomorfismo. Para isso, note que a aplicação inversa de H é $H^{-1}(x, w) = (x, s(w)\sqrt{f(x)})$. Como H^{-1} é do mesmo "tipo" que H , basta mostrar que H é lisa.

Figura A-5

Assim sendo, observemos inicialmente que H é lisa num ponto $(x, z) \in \mathcal{D}_f M$ com $z \neq 0$ porque numa vizinhança de (x, z) temos que $g > 0$ e que s é constante. Falta ver que H é lisa num ponto $(x, 0) \in \mathcal{D}_f M$.

Para isso, sejam $(U, \phi^f = (f, x^2, \dots, x^m))$ e $(U, \phi^g = (g, x^2, \dots, x^m))$ cartas locais de M centradas em $x \in \partial M$ e consideremos as cartas locais respectivamente associadas, $(\tilde{U}^f, \tilde{\phi}^f = (z, x^2, \dots, x^m))$ carta local de $\mathcal{D}_f M$ definida em $\tilde{U}^f = (U \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{D}_f M$ e centrada em $(x, 0)$, e $(\tilde{U}^g, \tilde{\phi}^g = (w, x^2, \dots, x^m))$ carta local de $\mathcal{D}_g M$ definida em $\tilde{U}^g = (U \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{D}_g M$ e centrada em $H(x, 0) = (x, 0)$. Nessas coordenadas vale que

$$H(z, x^2, \dots, x^m) = (s(z) \sqrt{g(z^2, x^2, \dots, x^m)}, x^2, \dots, x^m)$$

e é suficiente mostrar que a aplicação

$$w(z, x^2, \dots, x^m) = s(z) \sqrt{g(z^2, x^2, \dots, x^m)}$$

é lisa no ponto $(x, 0)$.

De fato, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e como $g(x) = 0$,

$$g(z^2, x^2, \dots, x^m) = \int_0^1 z^2 \frac{\partial g}{\partial f}(tz^2, x^2, \dots, x^m) dt.$$

Como $\frac{\partial g}{\partial f}(x) > 0$ (pois $g = 0$ é equação não-degenerada para ∂M), podemos escrever que

$$\frac{\partial g}{\partial f}(tz^2, x^2, \dots, x^m) > 0$$

para (x, z) próximo de $(x, 0)$ e $t \in [0, 1]$. Logo, a aplicação

$$h(z, x^2, \dots, x^m) = \sqrt{\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial f}(tz^2, x^2, \dots, x^m) dt}$$

definida numa vizinhança de $(x, 0)$ é lisa, e portanto,

$$w(z, x^2, \dots, x^m) = z \cdot h(z, x^2, \dots, x^m)$$

também o é. $\square$

(A.2) **Definição.** Se M é uma variedade lisa com bordo, então chamaremos de variedade dupla de M ou de duplo de M à variedade (lisa) $\tilde{M} = \mathcal{D}_f M$, onde $f = 0$ é qualquer equação não-degenerada para ∂M .

Note que pela prop. (A.1) $\tilde{M}$ está definida a menos de difeomorfismos. Além disso, $\tilde{M}$ é uma variedade sem bordo, de mesma dimensão que M , e $\tilde{M}$ é compacta se M o for.

Se $\tilde{M} = \mathcal{D}_f M = \{(x, z) \in M \times \mathbf{R} \mid z^2 = f(x)\}$, então $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ dada por $\pi(x, z) = x$ é lisa e

$$x \mapsto (x, \sqrt{f(x)}), \quad x \mapsto (x, -\sqrt{f(x)})$$

são mergulhos de M em $\tilde{M}$.

(A.3) *Exemplos.*

(i) No espaço euclidiano $\mathbf{R}^m$ com as coordenadas usuais $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ nós consideramos o semi-espaço $\mathbf{R}_+^m$ definido por $x_1 \geq 0$. Nesse caso, $x_1 = 0$ é uma equação não-degenerada para o bordo de $\mathbf{R}_+^m$. Assim, (fig. A-6)

$$\tilde{\mathbf{R}}_+^m = \mathcal{D}_{x_1} \mathbf{R}_+^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, z) \in \mathbf{R}_+^m \times \mathbf{R} \mid z^2 = x_1\}.$$

Obtemos que $(z, x_2, \dots, x_m)$ é um sistema de coordenadas globais em $\tilde{\mathbf{R}}_+^m$, nas quais a projeção $\pi_+ : \tilde{\mathbf{R}}_+^m \rightarrow \mathbf{R}_+^m$ se escreve

$$\pi_+(z, x_2, \dots, x_m) = (z^2, x_2, \dots, x_m).$$

Analogamente, sendo $\mathbf{R}_-^m$ dado por $x_1 \leq 0$, temos que $-x_1 = 0$ é uma equação não-degenerada para $\partial \mathbf{R}_-^m$ e

$$\tilde{\mathbf{R}}_-^m = \mathcal{D}_{-x_1} \mathbf{R}_-^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, z) \in \mathbf{R}_-^m \times \mathbf{R} \mid z^2 = -x_1\}.$$

Aqui $(z, x_2, \dots, x_m)$ também são coordenadas globais, nas quais $\pi_- : \tilde{\mathbf{R}}_-^m \rightarrow \mathbf{R}_-^m$ é dada por

$$\pi_-(z, x_2, \dots, x_m) = (-z^2, x_2, \dots, x_m).$$

Note então que os duplos de $\mathbf{R}_+^m$ e de $\mathbf{R}_-^m$ são ambos difeomorfos a $\mathbf{R}^m$, os difeomorfismos sendo dados por

$$x_1 = z \quad \text{e} \quad x_i = x_i, \quad i : 2, \dots, m.$$

(ii) Se B^m é a bola fechada unitária de $\mathbf{R}^m$, então $f = 0$ é uma equação não-degenerada para $\partial B^m = S^{m-1}$ onde $f(x) = 1 - \|x\|^2$. Segue que

$$\tilde{B}^m = \mathcal{D}_f B^m = \{(x, z) \in B^m \times \mathbf{R} \mid \|x\|^2 + z^2 = 1\}$$

é difeomorfo a S^m .

Figura A-6

(iii) Seja agora M o anel bidimensional

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} \quad (0 < a < b)$$

Nesse caso, $f : M \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$f(x, y) = -(\sqrt{x^2 + y^2} - a)(\sqrt{x^2 + y^2} - b)$$

é tal que $f = 0$ é uma equação não-degenerada para ∂M , e assim, $\tilde{M} = \mathcal{D}_f M$ é dado em $M \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$ por

$$z^2 = f(x, y) = -(x^2 + y^2) + (a + b)\sqrt{x^2 + y^2} - ab,$$

ou,

$$z^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{b+a}{2}\right)^2,$$

que é o toro bidimensional em $\mathbf{R}^3$ gerado pela rotação em torno do eixo z da circunferência

$$z^2 + \left(y - \frac{b+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

contida no plano $x = 0$.

(A.4) **Proposição.** *Seja M uma variedade compacta orientada com bordo. Então*

$$\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M) - \chi(\partial M).$$

Demonstração. Seja ω uma 1-forma diferencial em M nas condições do teorema (2.19) e suponhamos também que $\omega_x|_{T_x(\partial M)} = 0$ somente para um número finito de pontos $x \in \partial M$ (ver o lema (D.3) para a existência de uma tal ω).

Seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ a projeção natural e consideremos as 1-formas $\pi^*\omega$, em $\tilde{M}$, e $\omega|_{\partial M}$, em ∂M . Cada singularidade interior de ω dá origem a um par de singularidades de $\pi^*\omega$ em $\tilde{M}$, ambas com o mesmo índice que ω (ver início do capítulo 4). As demais singularidades de $\pi^*\omega$ são os pontos $(x, 0)$, onde $x \in \partial M$ é uma singularidade de bordo de ω . Para esses pontos, a prop. (4.2.i) implica que

$$\text{ind}_{(x,0)}^+(\pi^*\omega) = -\text{ind}_x(\omega|_{\partial M}).$$

As singularidades de $\omega|_{\partial M}$ são exatamente as singularidades de bordo de ω .

Sendo

$\tilde{I}$, a soma dos índices das singularidades de $\pi^*\omega$,

I , a soma dos índices das singularidades de ω , e

I_0 , a soma dos índices das singularidades de $\omega|_{\partial M}$,

segue das considerações acima que

$$\tilde{I} = 2I + (-I_0) = 2I - I_0.$$

Mas, pelo teorema de Poincaré-Höpf II para 1-formas (teor. (2.19)),

$$\tilde{I} = \chi(\tilde{M}), \quad I = \chi(M) \quad \text{e} \quad I_0 = \chi(\partial M). \quad \square$$

APÊNDICE B

EQUIVALÊNCIA DAS DEFINIÇÕES DE CARACTERÍSTICA DE EULER

Seja M uma variedade compacta orientada com bordo de dimensão m . No decorrer deste apêndice (e somente aqui) denotaremos a característica de Euler de M tal qual ela foi definida em (2.1) com $\chi^d(M)$ ("d" de diferencial). Reservaremos aqui a notação $\chi(M)$ para a característica de Euler de M como ela é definida tradicionalmente, isto é,

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim H^p(M),$$

onde $H^p(M)$ é o p -ésimo espaço de cohomologia real de De Rham de M ([Godbillon], pp. 162 e 190). O objetivo deste apêndice é concluir que $\chi^d(M) = \chi(M)$ (teor. (B.2)). Mas antes, vamos considerar o caso particular em que $\partial M = \emptyset$.

(B.1) **Teorema.** *Seja M uma variedade compacta orientada sem bordo. Então*

$$\chi^d(M) = \chi(M).$$

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ uma função de Morse em M . Como M é compacta, f só tem um número finito de pontos críticos em M . Consideremos uma métrica Riemanniana em M que, numa vizinhança de cada ponto crítico de f , é induzida de $\mathbf{R}^m$ ($m = \dim M$) pelas coordenadas de Morse ([Godbillon], p. 185). Definimos $X : M \rightarrow TM$ como sendo o campo de vetores liso em M dado por $X_x = \frac{1}{2}(\text{grad } f)_x$. Então X só tem um número finito de singularidades (precisamente os pontos críticos de f). Pelo teorema de Poincaré-Höpf I (teor. (2.9)),

$$\chi^d(M) = \sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X).$$

Por outro lado, seja $x_0 \in M$ um ponto crítico de f de índice de Morse k e tomemos um sistema de coordenadas de Morse (U, ϕ) centrado em x_0 . Então

$$f \circ \phi^{-1}(x) = f(x_0) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_m^2$$

para $x = (x_1, \dots, x_m) \in \phi(U) \subset \mathbf{R}^m$; além disso, ϕ_*X é o campo de vetores em $\phi(U)$ dado por

$$\begin{aligned} (\phi_*X)_x &= \frac{1}{2}(\phi_* \text{grad } f)_x = \frac{1}{2}(\text{grad}(f \circ \phi^{-1}))_x \\ &= (-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_m), \end{aligned}$$

pois ϕ preserva a métrica.

Um cálculo rápido mostra que $\text{ind}_{x_0}(X) = \text{ind}_0(\phi_*X) = (-1)^k$. Portanto,

$$\sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \nu_k,$$

onde ν_k é o número de pontos críticos de f de índice de Morse k . Mas é consequência das desigualdades de Morse que a soma alternada dos ν_k 's é $\chi(M)$ ([Godbillon], p. 192). $\square$

Na prop. (A.4) ficou estabelecido que, se M é uma variedade compacta orientada com bordo, então

$$\chi^d(M) = \frac{1}{2}(\chi^d(\tilde{M}) + \chi^d(\partial M)),$$

onde $\tilde{M}$ é o duplo de M (def. (A.2)). A seguir (prop. (B.3)), daremos uma prova independente de que também vale a identidade

$$\chi(M) = \frac{1}{2}(\chi(\tilde{M}) + \chi(\partial M)).$$

Como $\tilde{M}$ e ∂M são variedades sem bordo, seguirá do teor. (B.1) o seguinte

(B.2) **Teorema.** *Se M é uma variedade compacta orientada com bordo então*

$$\chi^d(M) = \chi(M).$$

(B.3) **Proposição.** *Seja M uma variedade compacta orientada com bordo. Se $\tilde{M}$ indica o duplo de M , então*

$$\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M) - \chi(\partial M).$$

Demonstração. Tomando um colar de ∂M (ver (0.17)) é possível conseguir uma vizinhança W de ∂M em M que é difeomorfa ao produto $\partial M \times [0, +\infty)$. Consideremos a projeção $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. Os seguintes subconjuntos de $\tilde{M}$,

$$\tilde{W}_+ = \pi^{-1}(W) \cap \{z \geq 0\} \quad \text{e}$$

$$\tilde{W}_- = \pi^{-1}(W) \cap \{z \leq 0\},$$

Figura B-1

são homeomorfos a W . Portanto, a reunião $\tilde{W}_+ \cup \tilde{W}_- = \tilde{W}$ é homeomorfa ao produto $\partial M \times (-\infty, +\infty)$ (fig. B-1).

Agora, sejam $\tilde{M}_+ = \tilde{M} \cap \{z \geq 0\}$ e $\tilde{M}_- = \tilde{M} \cap \{z \leq 0\}$ as cópias de M dentro de $\tilde{M}$ e consideremos os seguintes abertos de $\tilde{M}$:

$$V_+ = \tilde{M}_+ \cup \tilde{W}_- \quad \text{e} \quad V_- = \tilde{M}_- \cup \tilde{W}_+.$$

Como $\tilde{M} = V_+ \cup V_-$, aplicando a seqüência exata longa de cohomologia de Mayer-Vietoris a $(V_+, V_-, \tilde{M})$ obtemos que (ver [Godbillon], p. 180):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{M}) & \longrightarrow & H^0(V_+) \oplus H^0(V_-) & \longrightarrow & H^0(V_+ \cap V_-) \longrightarrow \dots \\ \dots & \longrightarrow & H^1(\tilde{M}) & \longrightarrow & H^1(V_+) \oplus H^1(V_-) & \longrightarrow & H^1(V_+ \cap V_-) \longrightarrow \dots \\ \dots & \longrightarrow & H^m(\tilde{M}) & \longrightarrow & H^m(V_+) \oplus H^m(V_-) & \longrightarrow & H^m(V_+ \cap V_-) \longrightarrow 0, \end{array}$$

onde $m = \dim M$. Mas numa seqüência exata finita de espaços vetoriais que começa e termina com zero, a soma alternada das dimensões de cada espaço é zero ([Godbillon], p. 183). Por conseguinte,

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p (\dim H^p(\tilde{M}) - \dim[H^p(V_+) \oplus H^p(V_-)] + \dim H^p(V_+ \cap V_-)) = 0.$$

Como $V_+ \cap V_-$ tem o mesmo tipo de homotopia que ∂M (i.e., existem aplicações contínuas $g : V_+ \cap V_- \rightarrow \partial M$ e $h : \partial M \rightarrow V_+ \cap V_-$ tais que $g \circ h$ e $h \circ g$ são continuamente homotópicas às identidades de ∂M e de $V_+ \cap V_-$, respectivamente), segue que $V_+ \cap V_-$ e ∂M

têm os espaços de cohomologia correspondentes isomorfos, i.e., $H^p(V_+ \cap V_-) \cong H^p(\partial M)$ para todo p ([Godbillon], p. 166). Da mesma forma, V_+ e V_- têm o mesmo tipo de homotopia que M , e portanto, $H^p(V_+) \cong H^p(V_-) \cong H^p(M)$ para todo p . Logo

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p (\dim H^p(\tilde{M}) - 2 \dim H^p(M) + \dim H^p(\partial M)) = 0,$$

ou,

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p \dim H^p(\tilde{M}) - 2 \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim H^p(M) + \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim H^p(\partial M) = 0,$$

de onde,

$$\chi(\tilde{M}) - 2\chi(M) + \chi(\partial M) = 0. \quad \square$$

Nota. A referência básica para as definições e resultados relativos a teoria de Morse e cohomologia de variedades é [Godbillon].

APÊNDICE C

ESTABILIDADE EM VARIEDADES COM BORDO

(C.1) **Teorema.** *Sejam M e N variedades com bordo onde M é compacta e seja S uma subvariedade conezada de um espaço euclidiano. Suponhamos ainda que $\{f_s : M \rightarrow N\}_{s \in S}$ é uma família lisa de aplicações lisas (i.e., a aplicação $F : M \times S \rightarrow N$ dada por $F(x, s) = f_s(x)$ é lisa) e seja $f = f_{s_0}$ com $s_0 \in S$ fixado. Então:*

(i) *Consideremos as seguintes classes de aplicações $M \rightarrow N$:*

- (a) *difeomorfismos locais;*
- (b) *imersões;*
- (c) *submersões;*
- (d) *aplicações transversais a uma subvariedade fechada W de N ;*
- (e) *mergulhos.*

Se f pertence a uma das classes listadas acima, então existe $\epsilon > 0$ tal que f_s pertence à mesma classe desde que $\|s - s_0\| < \epsilon$.

(ii) *Se f é um difeomorfismo e $f_s(\partial M) \subset \partial N$ para todo $s \in S$, então existe $\epsilon > 0$ tal que f_s é um difeomorfismo desde que $\|s - s_0\| < \epsilon$.*

O teor. (C.1) generaliza o teor. de estabilidade encontrado na p. 35 de [Guillemin] no qual se supõe que $S = I$ e que $\partial M = \partial N = \partial W = \emptyset$. Devido a estarmos considerando variedades com bordo, é essencial em (ii) acrescentar a hipótese de que cada f_s leva bordo em bordo; veja o exemplo a seguir.

(C.2) **Exemplo.** Consideremos a família lisa $\{f_t : I \rightarrow I\}_{t \in I}$ dada por $f_t(x) = (1 - t)x$. Então f_t é um difeomorfismo se e somente se $t = 0$, pois f_t não é sobrejetora para $t \neq 0$.

Demonstração do teor. (C.1). Podemos começar considerando imersões, pois difeomorfismos locais são imersões no caso particular em que $\dim M = \dim N$. Seja então $x_0 \in M$. Como f é uma imersão em x_0 , a sua matriz jacobiana $n \times m$ ($m = \dim M$ e $n = \dim N$) em x_0 contém uma submatriz $m \times m$ com determinante não-nulo. Mas cada derivada parcial

$$\frac{\partial (f_s)_i}{\partial x_j}(x)$$

é contínua como aplicação $M \times S \rightarrow N$ e a função determinante também é contínua. Portanto, a mesma submatriz deve ser não-singular para (x, s) suficientemente próximo de

(x_0, s_0) , isto é, $d(f_s)_x$ é injetora para (x, s) numa vizinhança de (x_0, s_0) . Como $x_0 \in M$ é arbitrário, mostramos que existe uma vizinhança U de $M \times \{s_0\}$ em $M \times S$ tal que $d(f_s)_x$ é injetora para todo (x, s) em U . A compacidade de M garante a existência de um $\epsilon > 0$ tal que $M \times \{s \in S \mid \|s - s_0\| < \epsilon\} \subset M \times U$.

O caso das submersões é inteiramente análogo ao das imersões.

Para (d), temos que $f \bar{\cap} W$ onde W é uma subvariedade fechada de N . Novamente, é suficiente conseguir uma vizinhança U de $M \times \{s_0\}$ em $M \times S$ tal que $f_s \bar{\cap} W$ em x para todo $(x, s) \in U$, pois M é compacta. Para isso, seja $x_0 \in M$. Se $f(x_0) \notin W$, então como W é fechada, existe uma vizinhança U_{x_0} de (x_0, s_0) em $M \times S$ tal que $f_s(x) \notin W$ para todo $(x, s) \in U_{x_0}$; desse modo, $f_s \bar{\cap} W$ em x trivialmente para todo $(x, s) \in U_{x_0}$. Suponhamos agora que $f(x_0) \in W$; existe uma submersão $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ definida numa vizinhança V de $f(x_0)$ em N , onde $p = n + \dim W$, tal que $g^{-1}(0) = W \cap V$ ([Guillemin], p. 24, ou [Lima], p. 315); como $f \bar{\cap} W$ em x_0 , temos que $g \circ f$ é submersão em x_0 ; por um raciocínio com matrizes análogo ao anterior, vemos que existe uma vizinhança U_{x_0} de (x_0, s_0) em $M \times S$ tal que $g \circ f_s$ é uma submersão em x , isto é, $f_s \bar{\cap} W$ em x , para todo $(x, s) \in U_{x_0}$.

Provemos agora (e). Como M é compacta, dizer que f é um mergulho é equivalente a dizer que f é uma imersão injetora. Em vista de (b), é suficiente provar que f_s é injetora para s suficientemente próximo de s_0 . De fato, seja $G : M \times S \rightarrow N \times S$ lisa definida por $G(x, s) = (f_s(x), s)$. Se (e) fosse falso, existiriam uma sequência $s_i \rightarrow s_0$ e pontos distintos $x_i, y_i \in M$ tais que $G(x_i, s_i) = G(y_i, s_i)$. Como M é compacta, tomando subsequências podemos supor que $x_i \rightarrow x_0$ e $y_i \rightarrow y_0$. Mas então,

$$G(x_0, s_0) = \lim G(x_i, s_i) = \lim G(y_i, s_i) = G(y_0, s_0).$$

Logo, $f(x_0) = f(y_0)$, de onde resulta que $x_0 = y_0$. A matriz jacobiana de G em (x_0, s_0) (em relação a algum sistema de coordenadas) é da forma

$$\begin{pmatrix} & * \\ (df_{x_0}) & \vdots \\ & * \\ 0 \quad \dots \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como f é uma imersão, a matriz de df_{x_0} tem m linhas linearmente independentes. Portanto, a matriz de $dG_{(x_0, s_0)}$ tem $m + 1$ linhas linearmente independentes e G é uma imersão em (x_0, s_0) . Daí segue que G é localmente injetora em (x_0, s_0) , uma contradição, pois $G(x_i, s_i) = G(y_i, s_i)$ com $x_i \neq y_i$ para todo i e $(x_i, s_i), (y_i, s_i) \rightarrow (x_0, s_0)$.

Finalmente, provemos (ii). Podemos supor que M é conexa (senão, trabalhamos numa componente conexa de M). Segue que $N = f(M)$ também é conexa. Por (e), existe

$\epsilon > 0$ tal que f_s é um mergulho desde que $\|s - s_0\| < \epsilon$. Como $\dim M = \dim N$, f_s é um difeomorfismo local se $\|s - s_0\| < \epsilon$. Mas estamos supondo que $f_s(\partial M) \subset \partial N$ para todo $s \in S$, e um difeomorfismo local que preserva bordo é uma aplicação aberta (o fato de difeomorfismos locais entre variedades sem bordo serem aplicações abertas é consequência do teorema da aplicação inversa; quando as variedades têm bordo, é necessário acrescentar a hipótese de que o difeomorfismo local preserve bordo). Portanto, $f_s(M)$ é aberto em N se $\|s - s_0\| < \epsilon$. Além disso, $f_s(M)$ é fechado em N para todo $s \in S$, pois M é compacta. Por um argumento de conexidade segue que f_s é sobrejetora para $\|s - s_0\| < \epsilon$. Mas um mergulho sobrejetor é um difeomorfismo. $\square$

APÊNDICE D

RESULTADOS GERAIS

(D.1) **Lema.** *(de Topologia) Seja $H : I \times U \rightarrow \mathbf{R}^m$ contínua onde U é um aberto de $\mathbf{R}^m$ que contém 0, e suponhamos que para cada $t \in I$ a aplicação $h_t : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ definida por $h_t(x) = H(t, x)$ seja um homeomorfismo sobre a imagem e $h_t(0) = 0$. Então: (i) Dado um aberto V de $\mathbf{R}^m$ que contém 0, temos que $\cap_{t \in I} h_t^{-1}(V)$ é uma vizinhança de 0 em $\mathbf{R}^m$. (ii) $\cap_{t \in I} h_t(U)$ é uma vizinhança de 0 em $\mathbf{R}^m$.*

Demonstração.

(i) Fixemos $t_0 \in I$ arbitrário. Como H é contínua e $H(t_0, 0) = 0$, existem uma vizinhança aberta I_{t_0} de t_0 em I e uma vizinhança aberta U_{t_0} de 0 em $\mathbf{R}^m$ tais que $H(I_{t_0} \times U_{t_0}) \subset V$. Portanto, temos que $h_t(U_{t_0}) \subset V$ para todo $t \in I_{t_0}$. Como I é compacto, existem $t_1, \dots, t_n \in I$ tais que $I = I_{t_1} \cup \dots \cup I_{t_n}$. Basta agora tomar $U_0 = \cap_{i=1}^n U_{t_i}$.

(ii) Suponhamos por absurdo que existe uma seqüência de pontos $\{y_n\}$ em $\mathbf{R}^m - \cap_{t \in I} h_t(U)$ que converge para 0. Então, para todo n , existe $t_n \in I$ tal que $y_n \notin h_{t_n}(U)$. Seja agora B uma bola aberta centrada em 0 cujo fecho está contido em U . Para cada n , o complementar de $h_{t_n}(B)$ em $\mathbf{R}^m$ é fechado; portanto, existe $z_n \notin h_{t_n}(B)$ com $\|z_n\| = \inf_{z \notin h_{t_n}(B)} \|z\|$. É fácil ver que $z_n \in \text{Fr}[h_{t_n}(B)] = h_{t_n}(\text{Fr}(B))$, onde $\text{Fr}(X)$ indica a fronteira topológica de X . Seja pois $x_n \in \text{Fr}(B)$ tal que $h_{t_n}(x_n) = z_n$. Como I e $\text{Fr}(B)$ são compactos, passando a subsequências podemos assumir que $t_n \rightarrow t_0 \in I$ e $x_n \rightarrow x_0 \in \text{Fr}(B)$. Como

$$\|h_{t_n}(x_n)\| = \|z_n\| \leq \|y_n\| \rightarrow 0,$$

segue que $h_{t_0}(x_0) = 0$, de onde, $x_0 = 0$. Contradição. $\square$

(D.2) **Lema.** *Seja $G : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ uma aplicação lisa tal que $G(S_0^{m-1}) \subset S_0^{m-1}$. Então existe uma homotopia lisa $G^t : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ tal que $G^0 = G$, $G^t|_{S_0^{m-1}} = G|_{S_0^{m-1}}$ para todo $t \in I$ e G^1 tem um valor regular $y_0 \in S_0^{m-1}$.*

A relação a ser provada no lema (4.8) é (notações do lema)

$$\deg G_{(0)} = I(G|_{S_+^{m-1}}, \{e_1\}) - I(G|_{S_+^{m-1}}, \{-e_1\}).$$

Note que sendo G^t a homotopia do lema (D.2), temos que a relação acima é verdadeira se e somente o for a relação análoga obtida trocando-se G por G^1 , pois $G|_{S_0^{m-1}} = G^1|_{S_0^{m-1}}$.

$G^1|_{S_0^{m-1}}$ e G , G^1 são $\{e_1\}$ -homotópicas e $\{-e_1\}$ -homotópicas. Como G^1 tem um valor regular em S_0^{m-1} , na prova do lema (4.8) podemos então já assumir que G tem um valor regular em S_0^{m-1} .

Demonstração do lema (D.2). Pelo teorema de Sard (ver (0.4)) existe um valor regular $y_0 \in S_0^{m-1}$ de $G_{(0)}$, a aplicação lisa $S_0^{m-1} \rightarrow S_0^{m-1}$ induzida por G . Seja $H^t : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ definida por

$$H^t(x) = \frac{G(x) + tx_1 e_1}{\|G(x) + tx_1 e_1\|}.$$

Observe que H^t está bem definida e é lisa para $t \in [0, 1)$. Note também que $H^0 = G$ e que $H^t|_{S_0^{m-1}} = G|_{S_0^{m-1}}$ para todo $t \in [0, 1)$. Afirmamos que existe $t_0 \in [0, 1)$ tal que $H^{t_0} \bar{\cap} \{y_0\}$ em S_0^{m-1} .

De fato, um cálculo rápido mostra que

$$d(H^t)_x(e_1) = dG_x(e_1) + te_1$$

para todo $x \in (H^t)^{-1}(y_0) \cap S_0^{m-1}$. Como $(H^t)^{-1}(y_0) \cap S_0^{m-1} = G_{(0)}^{-1}(y_0)$ é finito, é possível escolher $t_0 \in [0, 1)$ para o qual $d(H^{t_0})_x(e_1) \notin T_{y_0} S_0^{m-1}$ para todo x nesse conjunto. Seja agora $x_0 \in (H^{t_0})^{-1}(y_0) \cap S_0^{m-1}$ e mostremos que H^{t_0} é regular em x_0 .

Consideremos uma base $\{e_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}$ de $T_{x_0} S^{m-1}$ onde $\{v_2, \dots, v_{m-1}\}$ é uma base de $T_{x_0} S_0^{m-1}$. É fácil ver que

$$d(H^{t_0})_{x_0}(v_i) = dG_{x_0}(v_i) = d(G_{(0)})_{x_0}(v_i)$$

para $2 \leq i \leq m-1$. Como x_0 é um ponto regular de $G_{(0)}$, temos então que

$$\{d(H^{t_0})_{x_0}(v_2), \dots, d(H^{t_0})_{x_0}(v_{m-1})\}$$

é uma base de $T_{y_0} S_0^{m-1}$. De acordo com a escolha de t_0 , o subespaço gerado pelos $m-1$ vetores

$$d(H^{t_0})_{x_0}(e_1), d(H^{t_0})_{x_0}(v_2), \dots, d(H^{t_0})_{x_0}(v_{m-1})$$

é

$$\mathbb{R} \cdot d(H^{t_0})_{x_0}(e_1) \oplus T_{y_0} S_0^{m-1} = T_{y_0} S^{m-1},$$

e portanto, x_0 é um ponto regular de H^{t_0} .

Já temos que $H^{t_0} \bar{\cap} \{y_0\}$ em S_0^{m-1} . Para completar a demonstração, note que pelo teor. (1.1) existe uma homotopia de H^{t_0} que deixa H^{t_0} fixa numa vizinhança de S_0^{m-1} e é transversal a $\{y_0\}$ em todo S^{m-1} . $\square$

(D.3) **Lema.** *Seja M uma variedade compacta com bordo de dimensão m . Então existe uma 1-forma diferencial lisa ω em M tal que:*

- (i) ω só tem um número finito de singularidades interiores.
- (ii) O conjunto dos pontos $x \in \partial M$ com $\omega_x|_{T_x(\partial M)} = 0$ é finito.
- (iii) Se $x \in \partial M$ é tal que $\omega_x|_{T_x(\partial M)} = 0$, então ω_x é positiva nos vetores de $T_x M$ que apontam para fora.

Demonstração. Seja X um campo de vetores liso em M que aponta para fora em ∂M e que só tem um número finito de singularidades interiores (ver obs. (5.5.ii)). Nós gostaríamos ainda que o conjunto dos pontos $x \in \partial M$ tais que X_x é ortogonal a $T_x(\partial M)$ fosse finito.

Suponhamos que M está mergulhada em $\mathbf{R}^n$ e consideremos em M a métrica Riemanniana induzida de $\mathbf{R}^n$. Para cada $x \in M$, denotemos com $p_x : \mathbf{R}^n \rightarrow T_x M$ a projeção ortogonal.

Seja o fibrado

$$T_{\partial M} M = \{ (x, v) \in TM \mid x \in \partial M \}.$$

Note que $T_{\partial M} M$ é uma subvariedade de TM de codimensão um. Consideremos também o fibrado normal de ∂M em M ,

$$N(\partial M; M) = \{ (x, v) \in T_{\partial M} M \mid v \perp T_x(\partial M) \}.$$

$N(\partial M; M)$ é um subfibrado de $T_{\partial M} M$ e $\dim N(\partial M; M) = m$.

Como X a.p.f. em ∂M , existe uma vizinhança V de ∂M em M onde X não se anula. Como ∂M é compacta, podemos supor que $\bar{V}$ é compacto. Seja $\gamma : M \rightarrow [0, 1]$ uma função lisa tal que

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \partial M; \\ 0, & \text{se } x \notin V. \end{cases}$$

Definimos $\rho : \partial M \times \mathbf{R}^n \rightarrow T_{\partial M} M$ por

$$\rho(x, v) = (x, X_x + p_x(v)).$$

Escrevendo ρ em coordenadas locais, é fácil ver que ρ é uma submersão. Portanto, ρ é transversal a $N(\partial M; M)$. Segue que é denso em $\mathbf{R}^n$ o conjunto dos $v \in \mathbf{R}^n$ tais que aplicação

$$\rho_v : x \in \partial M \mapsto \rho(x, v) \in T_{\partial M} M$$

é transversal a $N(\partial M; M)$ (ver (0.10)).

É fácil ver agora que existe $v_0 \in \mathbf{R}^n$ suficientemente próximo de 0 tal que:

- $\rho_{v_0} \cap N(\partial M; M)$;
- $X_x + p_x(v_0)$ a.p.f. para todo $x \in \partial M$; e
- $X_x + \gamma(x)p_x(v_0) \neq 0$ para todo $x \in V$.

Definimos $\hat{X} : M \rightarrow TM$ pondo

$$\hat{X}(x) = (x, X_x + \gamma(x)p_x(v_0)).$$

Então, $\hat{X}$ é um campo de vetores liso em M que a.p.f. em ∂M , $\hat{X}$ só tem um número finito de singularidades interiores, e, além disso, $\hat{X}$ é ortogonal a ∂M num número finito de pontos de ∂M , pois $\hat{X}_x \perp T_x(\partial M)$ se e somente se $x \in \rho_{v_0}^{-1}[N(\partial M; M)]$, e temos que $\rho_{v_0}^{-1}[N(\partial M; M)]$ é uma subvariedade compacta de ∂M de dimensão zero.

Basta agora tomar para ω a 1-forma diferencial dual de $\hat{X}$. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arnol'd, V. I., "Critical Points of Functions on a Manifold with Boundary, the Simple Lie Groups B_k , C_k , F_4 and Singularities of Evolutes," *Russian Math. Surveys* **33:5** (1978), 91–107.

Primeiro artigo em que é publicada a definição de singularidade de bordo; contém, entre outras coisas, um teorema de classificação.

[2] —, "Indices of Singular Points of 1-forms on a Manifold with Boundary, Convolution of Invariants of Reflection Groups, and Singular Projections of Smooth Surfaces," *Russian Math. Surveys* **34:2** (1979), 1–49.

Inclui a demonstração original do teorema sobre a soma dos índices de 1-formas em variedades com bordo.

[3] Godbillon, C., *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris (1971).

Referência para resultados de cohomologia de variedades e teoria de Morse.

[4] —, *Dynamical Systems on Surfaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1983).

Apresenta uma versão do teorema sobre a soma dos índices interiores de campos de vetores em dimensão dois.

[5] Guillemin, V. e Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

Excelente introdução à Topologia Diferencial, fornece os elementos básicos do número de intersecção em variedades sem bordo e contém uma demonstração do teorema de Poincaré-Höpf em variedades sem bordo.

[6] Hirsch, M., *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York (1976).

Também desenvolve o número de intersecção e indica o caminho para se trabalhar em variedades com bordo.

[7] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro (1981).

Referência para resultados de Análise.

[8] de Mello, A. A. H., Barone Jr., Mario, *Equações Diferenciais, Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, IME-USP, São Paulo (1979).

Contém uma demonstração de M. Peixoto do teorema de Poincaré-Höpf em variedades sem bordo no caso bidimensional.

[9] Michor, P. W., *Manifolds of Differentiable Mappings*, Shiva Publishing Ltd., Kent (1980).

BIBLIOGRAFIA

Este livro contém uma introdução à teoria de variedades com canto e generaliza vários resultados de Topologia Diferencial para esse contexto.

[10] Milnor, J., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, the Univ. Press of Virginia, Charlottesville (1966).

Pioneiro na utilização de técnicas diferenciais para resolver problemas topológicos; enuncia o teorema de Poincaré-Höpf em variedades com bordo para campos de vetores que apontam para fora no bordo.

[11] Munkres, J. R., *Elementary Differential Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton (1963).

Aqui aparece uma maneira diferente de se definir o duplo de uma variedade.

[12] Pugh, C. C., "A Generalized Poincaré Index Formula," *Topology* 7 (1968), 227-232.

Esta é uma outra interessante generalização para variedades com bordo do teorema de Poincaré-Höpf.

ERRATA

Substitui a demonstração do seguinte teorema da pág. 69:

(5.4) **Teorema.** *Seja M uma variedade compacta orientada com bordo de dimensão par e consideremos um campo de vetores X em M com um número finito de singularidades interiores. Se X nunca é tangente ao bordo de M , então*

$$\sum_{X_x=0} \text{ind}_x(X) = \chi(M).$$

Demonstração. Note inicialmente que, por continuidade, em cada componente conexa de ∂M temos que X a.p.f. ou X a.p.d..

Fixada uma métrica Riemanniana em M , podemos assumir que a aplicação $X|_{\partial M} : \partial M \rightarrow T_{\partial M}M$ é transversal a $N(\partial M; M)$ (ver dem. do teor. anterior), de onde X só tem um número finito de singularidades de bordo. O resultado desejado seguirá do teor. de Poincaré-Höpf III (teor. (5.2)) se mostrarmos que a soma dos índices das singularidades de bordo de X é zero.

Provaremos que a soma dos índices das singularidades de bordo em cada componente de ∂M é zero. Numa componente em que o campo a.p.f. isso é imediato, pois o índice de cada singularidade é zero (cf. ex. (3.11)). Consideremos então uma componente C de ∂M em que o campo aponta para dentro. Aplicando o corol. (4.3) à 1-forma dual de X , verificamos que o índice de X em cada singularidade de bordo em C é igual ao índice da projeção ortogonal de X sobre C . Segue pelo teor. de Poincaré-Höpf I (teor. (2.9)) que a soma dos índices das singularidades de bordo de X em C é igual à característica de Euler de C . Mas, de acordo com a obs. (2.10.ii), esse número é zero. $\square$