UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**APROXIMAÇÃO E NÚCLEOS
ORTONORMALIZANTES**

Mariella Violeta Sotelo Campos

Dissertação apresentada para obtenção do Grau de
Mestre em Matemática

São Paulo

- 1989 -

AGRADECIMENTOS

Ao Professor *Pedro Nowossad* pela sua orientação dedicada e apoio em todos os sentidos para a realização deste trabalho.

Aos professores e colegas do IME.

oOo

Í N D I C E

Pág.

INTRODUÇÃO	01
------------------	----

CAPÍTULO I - APROXIMAÇÃO POLINOMIAL E RACIONAL NO DOMÍNIO COMPLEXO

1. Teorema de Aproximação de Runge	04
2. Lemas	10
3. O Teorema de Mergelyan	16
4. Extensão do Teorema de Mergelyan para Domínios Multiplamente Conexos	27

CAPÍTULO II - A INTEGRAL DE CAUCHY - FÓRMULAS DE PLEMELJ

1. Definição da Integral de Cauchy em uma curva Γ	30
2. Extensão da função $f(\zeta)$ numa Vizinhança do arco $\ell \subset \Gamma$	32
3. Comportamento da Integral de Cauchy nas Proximidades da Curva de Integração	36
4. Propriedades de Fronteira da Integral de Cauchy. Fórmulas de Plemelj	37

CAPÍTULO III - NÚCLEOS ORTONORMALIZANTES PARA CURVAS FECHADAS SIMPLES

1. Definição e Forma explícita do Produto Interno	40
2. Propriedades do operador $\tilde{K}$	51
3. Uma Base Ortonormal para o Espaço $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$	53

4. Outra Base Ortonormal para o Espaço $H_r(\Gamma, <, >)$	57
5. Caracterizações do Completamento de $H_r(\Gamma, <, >)$	64
6. Construção de um Espaço de Hilbert de Funções Analíticas	76
 CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO À FORMA DIFERENCIAL $\bar{z}dz$	 86
 BIBLIOGRAFIA	 92

oOo

INTRODUÇÃO

Seja S^1 o círculo unitário no plano complexo. Sabemos que o conjunto $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal complexo em $L^2(S^1)$ em relação ao produto interno usual.

Se $f \in L^2(S^1)$, definimos seu n -ésimo coeficiente de Fourier

$$(e^{int}, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e a série de Fourier de f é dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{int}, f) e^{int},$$

a qual converge a f no sentido de L^2 .

Neste trabalho, definiremos um produto interno numa curva Γ fechada e simples no plano, de modo que as potências z^n , n inteiro relativo, formem uma base ortogonal em relação a este produto interno. Este resultado generaliza num determinado sentido o conceito de séries de Fourier associado ao círculo unitário acima citado.

Veremos que, dada uma curva Γ e escolhidas a origem no seu interior Ω e o disco $D(o; r) \subset \Omega$, $0 < r < 1$, o espaço $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$, das funções Hölder contínuas munido deste produto interno que definiremos possui a base o.n. $\left\{ \theta_m = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi r^{|m+1|}}} \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$

Dada uma função $f \in C(\Gamma)$ definiremos sua série formal de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ usando o Teorema de Mergelyan do Capítulo I, para domínios multiplamente conexos. Esta série, puramente formal em $C(\Gamma)$, convergirá a f no sentido de $H_r(\Gamma, <, >)$.

Daí segue a seguinte propriedade dos coeficientes de Laurent:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{2|n+1|} |a_n|^2 < +\infty$$

Mostraremos que quando $\Gamma = S^1$ e $r \rightarrow 1$, nosso espaço $H_r(S^1, <, >)$ coincide com o espaço $L^2(S^1)$.

Também, construímos um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções analíticas em $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, associado aos espaços $H_r(\Gamma, <, >)$.

Finalmente, no Capítulo IV veremos uma consequência não trivial para o estudo da forma diferencial $\bar{\zeta} d\zeta$, dependendo da geometria da curva Γ .

CAPÍTULO I

APROXIMAÇÃO POLINOMIAL E RACIONAL
NO DOMÍNIO COMPLEXO

Seja $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e $K^0 = \text{int}(K)$.

Denotemos por

$$P(K) = \{f: K \rightarrow \mathbb{C}; \exists \text{ seqüência } \{P_n\} \text{ de polinômios com } P_n(z) \xrightarrow[K]{\text{unif}} f(z)\}$$

o germe de K , e

$$R(K) = \{f: K \rightarrow \mathbb{C}; \exists \text{ seqüência } \{R_n\} \text{ de funções racionais com polos fora de } K \text{ e } R_n \xrightarrow[K]{\text{unif}} f\}.$$

Seja f uma função contínua em K e holomorfa em K^0 .

Neste primeiro capítulo estudaremos o seguinte problema da teoria de aproximação qualitativa: Sob que condições a função f pode ser aproximada por polinômios ou funções racionais em K ?

Se $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$, o Teorema de Aproximação de Weierstrass afirma:

$$P(K) = C(K).$$

Por outro lado, o Teorema de Runge afirma que toda função $f \in C(K)$ que tenha extensão holomorfa a algum conjunto aberto $\Omega \supset K$ pertence a $R(K)$ desde que tomemos como conjunto dos polos um conjunto com pontos em cada componente conexa de K^c . No caso especial, em que K^c é conexo, todos os polos podem se mover para ∞ : neste caso, toda função holomorfa em $K \cap \Omega$ pertence a $P(K)$.

Finalmente, o Teorema de Mergelyan afirma que, se o compacto K não separa o plano (i.e. K^c é conexo) e f é contínua em K e holomorfa em K^0 então $f \in P(K)$. Caso K^c possua um número finito de componentes, temos $f \in R(K)$.

1. Teorema de Aproximação de Runge.

Teorema I.1.1 - Seja $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e $\{\alpha_j\}$ um conjunto que contém um ponto de cada componente de $S^2 \setminus K$. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto tal que $K \subset \Omega$, $f \in A(\Omega)$, e seja $\epsilon > 0$ então existe uma função racional R , tal que todos os seus polos estão contidos no conjunto $\{\alpha_j\}$ e

$$(I.1.1) \quad |f(z) - R(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K.$$

Observação: $S^2 \setminus K$ possui no máximo um conjunto enumerável de componentes.

Prova - Consideremos o espaço de Banach $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ onde $C(K) = \{f: K \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ contínua}\}$ e $\|\cdot\|_\infty$ é a norma do supremo. Temos que $R(K)$ é subespaço fechado de $C(K)$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, (Ver 6, pag. 131) todo funcional linear contínuo $\mathcal{L}$ sobre $C(K)$ é dado por uma única medida complexa boreliana μ sobre K tal que

$$\mathcal{L}(f) = \int_K f d\mu \quad \forall f \in C(K).$$

Assim, pelo Teorema de Separação de Hahn-Banach (Ver 6, pag. 108, teorema 5.19), a função f em $C(K)$ pertence ao subespaço fechado $R(K)$ se e somente se para todas as medidas μ sobre K que sejam ortogonais a $R(K)$, sejam também ortogonais para f : $\int_K f d\mu = 0$.

Portanto, o teorema estará provado se demonstrarmos a

seguinte

Afirmção: Se μ é uma medida complexa de Borel sobre K tal que

$$(I.1.2) \quad \int_K R \, d\mu = 0$$

para toda função racional R com polos somente no conjunto $\{a_j\}$, então para todo $f \in A(\Omega)$ vale

$$(I.1.3) \quad \int_K f \, d\mu = 0$$

Prova - Assuma que existe μ medida complexa de Borel satisfazendo (I.1.2). Defina

$$(I.1.4) \quad h(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in S^2 \setminus K$$

então $h \in H(S^2 \setminus K)$, De fato considerando o disco aberto de centro a e raio r $D(a;r) \subset S^2 \setminus K$, com $a \in S^2 \setminus K$ e $r > 0$, desde que $\zeta \in K$, temos $|\zeta - a| > r$ e

$$(I.1.4') \quad \left| \frac{z-a}{z-\zeta} \right| < \frac{|z-a|}{r} < 1 \quad \forall z \in D(a;r) \text{ e } \forall \zeta \in K.$$

Portanto, a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{1}{\zeta-z}$$

converge uniformemente sobre K , para todo $z \in D(a;r)$. Daí substituindo a série (I.1.4') em (I.1.4) e integrando termo a termo obtemos

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_K \frac{d\mu(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n \quad \text{para todo } z \in D(a;r)$$

Então f possui uma representação em séries de potências em $S^2 \setminus K$, logo $f \in A(S^2 \setminus K)$. Agora, seja V_j uma componente de $S^2 \setminus K$ tal que $\alpha_j \in V_j$ e suponha que $D(\alpha_j; r) \subset V_j$, $r > 0$

Vamos considerar dois casos:

a) Se $\alpha_j \neq \infty$, seja $z \in D(\alpha_j; r)$ fixo, temos

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - \alpha_j} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha_j}{\xi - \alpha_j}}$$

Já que

$$\left| \frac{z - \alpha_j}{\xi - \alpha_j} \right| < 1 \quad \forall \xi \in K$$

então

$$(I.1.5) \quad \frac{1}{\xi - z} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(z - \alpha_j)^n}{(\xi - \alpha_j)^{n+1}}$$

converge uniformemente $\forall \xi \in K$.

Como cada uma das funções $\sum_{n=0}^N \frac{(z-\alpha_j)^n}{(\zeta-\alpha_j)^{n+1}}$ é uma função racional, então pode-se aplicar (I.1.2), daí:

$$h(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in D(\alpha_j; r)$$

Logo $h(z) = 0$ para todo $z \in V_j$.

b) Se $\alpha_j = \infty$, seja $\zeta \in K$ e $|z| > r$, z fixo.

Como K é compacto e estamos considerando os $z \in D(\infty; r) = \{W \in \mathbb{C}; |W| > r\} \cup \{\infty\}$, então $|\zeta| < |z|$, portanto $|\frac{\zeta}{z}| < 1$ e

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}.$$

As funções $\sum_{n=0}^N \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$ satisfazem (I.1.2), portanto

$$h(z) = 0 \quad \text{em } D(\infty; r)$$

logo $h(z) = 0$ em V_j .

Assim, de (I.1.2) segue-se

$$(I.1.6) \quad h(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in S^2 \setminus K.$$

Agora, escolhemos intervalos da reta orientados $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ em $\Omega \setminus K$ $[\gamma_1, \dots, \gamma_n]$ é um caminho poligonal fechado em Ω/K contendo K no seu interior. Com $f \in A(\Omega)$, temos que para toda $z \in K$ vale a fórmula de Cauchy.

$$(I.1.7) \quad f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Integrando (I.1.7) em relação a μ temos:

$$\int_K f(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_K d\mu(\zeta) \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-\zeta} dw \right].$$

Pelo Teorema de Fubini

$$\int_K f(\xi) d\mu(\zeta) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(w) \left[\int_K \frac{d\mu(\zeta)}{w-\zeta} \right] dw$$

Usando (I.1.4) obtemos

$$\int_K f d\mu = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(w) h(w) dw.$$

Como cada γ_j é um intervalo em $S^2 \setminus K$, então $h(w) = 0$ para $w \in \gamma_j$ com $j = 1, \dots, n$. Portanto

$$\int_K f d\mu = 0.$$

Logo, está demonstrado (I.1.3).

O seguinte caso particular é de especial interesse,

Teorema 1.2 - Seja $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto, $S^2 \setminus K$ conexo e $f \in A(\Omega)$, onde $\Omega \supset K$, Ω aberto. Então existe uma seqüência de polinômios $\{P_n\}$ tal que $P_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente em K .

Prova - Temos que $S^2 \setminus K$ possui uma só componente, então precisamos de somente um ponto α_j para aplicar o Teorema I.1.1, e podemos considerar $\alpha_j = \infty$. O Teorema I.1.1 implica $f \in R(K)$, isto é, existe uma seqüência $\{P_n\}$ de funções racionais com polo no infinito, logo, os P_n são polinômios, tal que $P_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente em K .

Observação - O resultado precedente é falso para todo compacto $K \subset \mathbb{C}$ tal que $S^2 \setminus K$ é não conexo. Porque neste caso $S^2 \setminus K$ possui uma componente limitada V

Escolha $\alpha \in V$ e defina

$$f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$$

e $m = \max\{|z-\alpha|; z \in K\}$.

Seja P um polinômio tal que

$$|P(z)-f(z)| < \frac{1}{m} \text{ para todo } z \in K$$

Então,

$$(I.1.8) \quad |(z-\alpha) P(z)-1| < 1 \text{ para todo } z \in K.$$

A desigualdade (I.1.8) é válida se $z \in \partial V$ e como $\bar{V}$ é compacto, pelo princípio do módulo máximo, (I.1.8) é válido para todo $z \in V$. Então, fazendo $z = \alpha$, obtemos $1 < 1$. Logo a aproximação uniforme não é possível.

2. Lemas

Lema I.2.1- Seja D um disco aberto de raio $r > 0$, $E \subset D$, E compacto e conexo tal que $\Omega = S^2 \setminus E$ também é conexo, e $\text{diam } E \geq r$. Então existe uma função $g \in H(\Omega)$ e uma constante b , com a seguinte propriedade: Se

$$(I.2.1) \quad Q(\zeta, z) = g(z) + (\zeta - b) g^2(z)$$

as desigualdades

$$(I.2.2) \quad |Q(\zeta, z)| < \frac{100}{r}$$

$$(I.2.3) \quad \left| Q(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \right| < \frac{1000 r^2}{|z - \zeta|^3}$$

são válidas para todo $z \in \Omega$ e para todo $\zeta \in D$.

Prova - Vamos supor que o centro de D está na origem, i.e., $D = D(0; r)$.

Sendo Ω e $S^2 \setminus \Omega$ conexos, então Ω é simplesmente conexo (note que $\infty \in \Omega$). Pelo Teorema da Aplicação Riemann existe uma aplicação conforme F de U o disco unitário sobre Ω tal que $F(0) = \infty$. Então F tem uma expressão da forma

$$(I.2.4) \quad F(w) = \frac{a}{w} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n \quad (w \in U).$$

Defina

$$(I.2.5) \quad g(z) = \frac{1}{a} F^{-1}(z) \quad (z \in \Omega)$$

onde $F^{-1}: \Omega \rightarrow U$ é a aplicação inversa de F e seja

(I.2.6)

$$b = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} zg(z) dz$$

onde $r = C(0, r)$ está positivamente orientado.

Escolha $c \in E$, então $F-c$ não possui zero em U .

Por (I.2.4) temos $\frac{a}{F-c} \in \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é a classe de todas as $F \in A(U)$ que são 1-1 em U e satisfazem:

$$f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 1$$

De fato

$$f(w) = \frac{1}{F(w)-c} = \frac{1}{\frac{1}{w} + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^{n-c}}$$

e

$$f'(w) = \frac{+\frac{1}{w^2} - \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n w^{n-1}}{\left[\frac{1}{w} + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n - c \right]^2}$$

Então $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Portanto $f(w) = \frac{a}{F(w)-c} \in \mathcal{S}$.

Temos, usado o seguinte teorema se $w_1, w_2 \notin \frac{F}{a}(U)$ então $|w_1 - w_2| \leq 4$.

Teorema I.2.1 - Se $1/F \in \mathcal{S}$, $w_1 \in F(U)$ e $w_2 \in F(U)$, então $|w_1 - w_2| \leq 4$.

Prova: - Seja $f = 1/(F-w_1)$, então $f \in \mathcal{S}$, daí $f(U) \supset D(0; \frac{1}{4})$ (Ver 6, pag. 278, teorema 14.14) de modo que a imagem de U sob $F - w_1$ contém todos os pontos w tal que $|w| > 4$. Desde que $w_1 - w_2 \in F(U)$, temos $|w_1 - w_2| > 4$.

Logo dian $((\frac{F}{a})(U))^c = \sup \{|w_1 - w_2|; w_1, w_2 \in ((\frac{F}{a})(U))^c\} \leq 4$

Como $E \subset (F(U))^c$, então $\text{diam } E \leq 4|a|$. Como $\text{diam } E \geq r$, segue-se que

$$(I.2.7) \quad |a| \geq \frac{r}{4}$$

Sendo g uma aplicação conforme de Ω sobre o disco $D(0; \frac{1}{|a|})$, (I.2.7) mostra que

$$(I.2.8) \quad |g(z)| = \frac{1}{|a|} |F^{-1}(z)| < \frac{4}{r} \quad (z \in \Omega)$$

e como Γ é um caminho em Ω , de comprimento $2\pi r$, de (I.2.6)

$$|b| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |zg(z)| |dz|$$

usando (I.2.8) tem-se

$$(I.2.9) \quad |b| < 4r.$$

Se $\zeta \in D$, então $|\zeta| < r$, portanto (I.2.1), (I.2.8) e (I.2.9) implicam

$$|Q(\zeta, z)| = |g(z) + (\zeta - b)g^2(z)| < \frac{4}{r} + 5r\left(\frac{16}{r^2}\right) < \frac{100}{r}.$$

Assim

$$(I.2.10) \quad |Q(\zeta, z)| < \frac{100}{r}$$

e (I.2.2) está demonstrado.

Fixemos $\zeta \in D$ e seja $z = F(w)$.

$$\text{Temos} \quad g(z) = g(F(w)) = \frac{1}{a} F^{-1}(F(w)) = \frac{w}{a}$$

$$\text{então} \quad zg(z) = \frac{wF(w)}{a}.$$

Por outro lado, de

$$wF(w) = a + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^{n+1} \quad (w \in U)$$

temos que $wF(w) \rightarrow a$ quando $w \rightarrow 0$, então $zg(z) \rightarrow 1$ quando $z \rightarrow \infty$. Daí, g possui uma expansão da forma:

$$(I, 2.11) \quad g(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \frac{\lambda_2(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^3} + \dots, \quad \text{se } |z-\zeta| > 2r.$$

Seja $\Gamma_0 = C(0; R)$ com raio $R \gg r$, positivamente orientado.

Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} (z-\zeta)g(z)dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} dz + \lambda_2(\zeta) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{z-\zeta} + \\ &+ \lambda_3(\zeta) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{dz}{(z-\zeta)^2} + \dots \end{aligned}$$

Já que $\int_{\Gamma_0} dz = 0$ e $\int_{\Gamma_0} \frac{dz}{(z-\zeta)^n} = 0$ para todo $n \geq 2$, pois

dz e $\frac{dz}{(z-\zeta)^n}$ são formas diferenciais exatas; e como

$$\int_{\Gamma_0} \frac{dz}{z-\zeta} = 2\pi i \operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(\zeta) = 2\pi i \quad \text{onde } \operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(\zeta) \text{ é o índice de } \Gamma_0$$

em relação a ζ que é igual a 1, então

$$\begin{aligned} \lambda_2(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} (z-\zeta)g(z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} zg(z)dz - \zeta \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(z)dz. \end{aligned}$$

Sendo $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(z) dz = \text{Res}(g; \zeta) = 1$, tem-se

$$(I.2.12) \quad \lambda_2(\zeta) = b - \zeta$$

Agora consideremos a função

$$(I.2.13) \quad \varphi(z) = \left[Q(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \right] (z-\zeta)^3.$$

De (I.2.1) temos que

$$\varphi(z) = \left[g(z) + (\zeta - b) g^2(z) - \frac{1}{(z-\zeta)} \right] (z-\zeta)^3$$

Substituindo o valor de $\lambda_2(\zeta)$ em (I.2.11), chegamos a

$$\varphi(z) = \lambda_3(\zeta) + \frac{(\zeta - b)^3}{(z-\zeta)} + \frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^3} + \dots$$

Daí, $|\varphi(z)| = |\lambda_3(\zeta)|$ quando $z \rightarrow +\infty$, isto é, φ é limitada quando $z \rightarrow +\infty$. Portanto φ possui uma singularidade removível em $+\infty$.

Se $z \in \Omega \cap D$, então $|z-\zeta| < 2r$. Assim (I.2.2) e (I.2.13) implicam

$$(I.2.14) \quad |\varphi(z)| = \left| \left(Q(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \right) (z-\zeta)^3 \right| < 8r^3 |Q(\zeta, z)| + 4r^2 < 1000r^2.$$

Então, pelo princípio do módulo máximo

$$\left| Q(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \right| < \frac{1000r^2}{|z-\zeta|^3} \quad \text{para toda } z \in \Omega.$$

Logo (I.2.3) está provado.

Lema 2 - Seja $f \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ e consideremos o operador de Cauchy-Riemann

$$(I.2.15) \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Então é válida a "fórmula de Cauchy" dada por:

$$(I.2.16) \quad f(z) = - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\bar{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta} \quad (\zeta = \xi + i\eta)$$

Prova - Defina $\varphi(r, \theta) = f(z + re^{i\theta})$ com $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

Se $\zeta = z + re^{i\theta}$, da regra da cadeia temos que

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\text{Então} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) e^{-i\theta}.$$

Portanto

$$(I.2.17) \quad (\bar{\partial} f)(\zeta) = \frac{e^{i\theta}}{2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]$$

$$\text{e} \quad \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right], \quad d\zeta d\bar{\zeta} = r dr d\theta$$

Então, o lado direito de (I.2.16) é igual ao limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$ de

$$(I.2.18) \quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] d\theta dr.$$

Como para cada $r > 0$, φ é uma função periódica, com período

2π , então

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta = 0.$$

Por outro lado

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) dr = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\epsilon}^M \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) dr = -\varphi(\epsilon, \theta) + \lim_{M \rightarrow +\infty} \varphi(M, \theta)$$

como $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ implica $\varphi(M, \theta) = 0 \quad \forall M > 0$ suficientemente grande. Então

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) dr = -\varphi(\epsilon, \theta)$$

Portanto

$$(I.2.19) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\epsilon, \theta) d\theta.$$

Como $\varphi(\epsilon, \theta) \rightarrow f(z)$ uniformemente em θ quando $\epsilon \rightarrow 0$, tem-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) d\theta = f(z).$$

Assim, (I.2.16) está provado.

3. O Teorema de Mergelyan

Teorema 3.1 - Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto tal que K^c é conexo. Se $f \in C(K)$ e $f \in A(K^o)$ e se é dado $\epsilon > 0$, então existe um polinômio P tal que

$$|f(z) - P(z)| < \epsilon \quad \text{para todo } z \in K$$

Prova - Sendo $\mathbb{C}$ um espaço de Hausdorff localmente compacto, o teorema de extensão de Tietze (Ver 6, pag 385) implica que existe uma função $F \in C_c(\mathbb{C})$ tal que $F(x) = f(x)$ para toda $x \in K$. Então, assumamos que $f \in C_c(\mathbb{C})$ e $f \in A(K^0)$.

Para todo $\delta > 0$, seja

$$w(\delta) = \sup_{|z_1 - z_2| \leq \delta} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

Como f é uniformemente contínua, temos

$$(I.3.1) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} w(\delta) = 0.$$

Agora, consideremos um δ fixo. Provaremos que existe um polinômio P tal que

$$(I.3.2) \quad |f(z) - P(z)| < 10.000 w(\delta) \quad \text{para todo } z \in K$$

Então, de (I.3.1) o teorema estaria demonstrado.

Passo 1. Da convolução de f com uma identidade aproximada suave A com suporte pequeno, constrói-se uma função aproximada Φ de classe $C_c^1(\mathbb{R}^2)$ a qual é igual a f num dado subconjunto de K .

Para mostrar isto, provaremos a seguinte

Afirmção - Dado $\delta > 0$, existe uma função $\Phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ tal que para todo z

$$(I.3.3) \quad |f(z) - \Phi(z)| \leq w(\delta),$$

$$(I.3.4) \quad |(\bar{\partial}\Phi)(z)| < \frac{2w(\delta)}{\delta},$$

$$(I.3.5) \quad \Phi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_X \frac{(\bar{\partial}\Phi(\zeta))}{(\zeta-z)} d\bar{\zeta}d\zeta \quad \zeta = \xi+i\eta$$

onde $X = \{z \in \text{supp } \Phi; \text{dist}(z, K^c) \leq \delta\}$

Prova - Seja a função $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(I.3.6) \quad a(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r > \delta \\ \frac{3}{\pi\delta^2} \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^2, & \text{se } 0 \leq r \leq \delta \end{cases}$$

e defina

$$(I.3.7) \quad A(z) = a(|z|)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Então, $A \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$.

Agora, mostraremos que

$$(I.3.8) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} A = 1,$$

$$(I.3.9) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{\partial}A = 0,$$

$$(I.3.10) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} |\bar{\partial} A| = \frac{24}{158} < \frac{2}{\delta}$$

Prova de (I.3.8):

Usando coordenadas polares, temos que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} A = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} a(r) r dr d\theta + \int_\delta^{+\infty} \int_0^{2\pi} a(r) r dr d\theta =$$

De (I.3.6)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} A &= \int_0^\delta \int_0^{2\pi} a(r) r dr d\theta = \\ &= \frac{3}{\pi \delta^2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^2 r dr d\theta = \frac{6}{\delta^2} \int_0^\delta \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^2 r dr = \\ &= \frac{6}{\delta^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2\delta^2} + \frac{r^6}{\delta^4}\right) \Big|_0^\delta = 1. \end{aligned}$$

Prova de (I.3.9):

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \bar{\partial} A = \iint_{|z| > \delta} \bar{\partial} A + \iint_{|z| \leq \delta} \bar{\partial} A = \iint_{|z| \leq \delta} \bar{\partial} A, \quad \text{pois}$$

$$A(z) = 0 \quad \text{para todo } |z| > \delta$$

Como $\bar{\partial} A = \frac{1}{2} e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) a(r) = \frac{1}{2} e^{i\theta} a'(r)$, então

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \bar{\partial} A = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} e^{i\theta} a'(r) r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\delta r a'(r) dr \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0$$

Prova de (1.3.10):

Defina $\varphi(r, \theta) = A(z + re^{i\theta})$. Da regra da cadeia, tem-se

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\partial A}{\partial y}\right) e^{-i\theta}$$

portanto $\bar{\partial}A = \frac{e^{i\theta}}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}\right)$.

Como $\frac{\partial A}{\partial \theta} = 0$, então $\bar{\partial}A = \frac{1}{2} e^{i\theta} \frac{\partial A}{\partial r}$. Mas $\frac{\partial A}{\partial r} = a'(r)$ e sendo

$$a'(r) = -\frac{12r}{\pi\delta^4} \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right) < 0, \quad \text{para todo } r \in [0, \delta]$$

então $|\frac{\partial A}{\partial r}| = -a'(r)$ e $|\bar{\partial}A| = -\frac{a'(r)}{2}$ se $r \in [0, \delta]$. Se $r > \delta$, temos que $|\bar{\partial}A| = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |\bar{\partial}A| &= \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} -a'(r) r dr d\theta = \\ &= \frac{6}{\pi\delta^4} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{r^4}{\delta^2}\right) dr d\theta = \frac{12}{\delta^4} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5\delta^2}\right] \Big|_0^\delta = \frac{24}{15\delta} < \frac{2}{\delta}. \end{aligned}$$

Agora defina:

$$(1.3.11) \quad \Phi(z) = (f * A)(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(z-\zeta) A(\zeta) d\bar{\zeta} d\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} A(z-\zeta) f(\zeta) d\bar{\zeta} d\eta.$$

Desde que $\text{supp } f$ e $\text{supp } A$ são compactas, então $\text{supp } \Phi$ é compacto. Por outro lado usando (1.3.8), tem-se

$$(1.3.12) \quad \Phi(z) - f(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} [f(z-\zeta) - f(z)] A(\zeta) d\bar{\zeta} d\eta$$

Como $A(\zeta) = 0$ se $|\zeta| > \delta$, então

$$\begin{aligned} |\phi(z) - f(z)| &= \left| \iint_{|\zeta| \leq \delta} [f(z-\zeta) - f(z)] A(\zeta) d\xi d\eta \right| \leq \\ &\leq \iint_{|\zeta| \leq \delta} |f(z-\zeta) - f(z)| |A(\zeta)| d\xi d\eta \end{aligned}$$

Mas $|f(z-\zeta) - f(z)| \leq w(\delta)$ e por (I.3.8)

$$|\phi(z) - f(z)| \leq w(\delta) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Logo, está demonstrado (I.3.3)

Agora, dado que $A \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$, temos que existe $\frac{\partial A}{\partial x}$ e $\frac{\partial A}{\partial y}$ e são contínuas. Daí a última expressão em (I.3.11) pode-se diferenciar sob o sinal da integral, obtendo-se

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}\phi)(z) &= \iint_{\mathbb{R}^2} (\bar{\partial}A)(z-\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \\ (I.3.13) \quad &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(z-\zeta) (\bar{\partial}A)(-\zeta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

Usando (I.3.9) segue-se

$$(\bar{\partial}\phi)(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(z-\zeta) (\bar{\partial}A)(-\zeta) d\xi d\eta.$$

Então

$$|(\bar{\partial}\phi)(z)| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(z-\zeta) - f(z)| |\bar{\partial}A(\zeta)| d\xi d\eta \leq w(\delta) \iint_{\mathbb{R}^2} |(\bar{\partial}A)(\zeta)| d\xi d\eta < \frac{2}{\delta} w(\delta)$$

e (I.3.4) está provado.

Escrevendo

$$\Phi_x(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A_x(z-\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \quad \text{e} \quad \Phi_y(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A_y(z-\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta$$

temos que Φ_x e Φ_y são contínuas, então $\Phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$. Daí, pelo Lema I.2.2, aplicado a Φ

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\bar{\partial}\Phi)(\zeta)}{z-\bar{\zeta}} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

Assim, (I.3.5) segue-se se provamos que $\bar{\partial}\Phi = 0$ em G , onde

$$G = \{z \in K; \text{dist}(z, K^c) > \delta\}$$

Provaremos isto, mostrando que

$$(I.3.14) \quad \bar{\partial}f = 0 \quad (z \in G);$$

observe que $\bar{\partial}f = 0$ em G , já que $f \in A(K^0)$ e $G \subset K$.

De fato, seja $z \in G$, então $z-\zeta \in K^0$ para todo ζ com $|\zeta| < \delta$. A propriedade do valor médio para funções harmônicas dá, para a primeira equação em (I.3.11).

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \int_0^\delta a(r) r dr \int_0^{2\pi} f(z - re^{i\theta}) d\theta = \\
 (I.3.15) \quad &= 2\pi f(z) \int_0^\delta a(r) r dr = f(z) \int_0^\delta \int_0^{2\pi} a(r) r dr d\theta = f(z) \iint_{\mathbb{R}^2} A = f(z)
 \end{aligned}$$

para todo $z \in G$. Como $\mathbb{R}^2 = G \cup X \cup (\text{supp } \Phi)^C$ e $\bar{\partial}\Phi \equiv 0$ em $(\text{supp } \Phi)^C$, então

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi} \int \int_X \frac{(\bar{\partial}\Phi)(\zeta)}{(z-\zeta)} d\bar{\zeta} d\zeta$$

onde $X = \{Z \mid \text{supp } \Phi; \text{dist}(Z, K^C) < \delta\}$. Logo, a afirmação está provada.

Passo 2. Dividimos $X \setminus \text{supp } \bar{\partial}\Phi$ em pequenas peças e aproximamos $\frac{1}{z-\zeta}$ localmente em relação a ζ e globalmente em relação a z , por combinações lineares

$$Q(\zeta, z) = \sum_i c_i(\zeta) h_i(\zeta)$$

de funções holomorfas sobre K , com coeficientes contínuos $c_i(\zeta)$.

Então, pelo Teorema de Runge, é suficiente aproximar Φ por uma função holomorfa numa vizinhança de K .

Como X é compacto, e não se estende sobre K mais que uma distância δ de ∂K , existe um número finito de discos abertos $D_1, D_2, \dots, D_n$ tal que $D_j = D(x_j; 2\delta)$ com centro $x_j \notin K$ e $X \subset \bigcup_{j=1}^n D_j$. Como $S^2 \setminus K$ é conexo, então cada x_j pode se ligar ao ∞ por um caminho poligonal em $S^2 \setminus K$ sem auto-interseções. Daí, cada disco D_j contém um compacto E_j tal que $\text{diam}(E_j) \geq 2\delta$, de modo que $S^2 \setminus E_j$ é conexo e $E_j \cap K = \emptyset$ para toda j .

Aplicando o Lema 1.2.1 com $r = 2\delta$, existem funções $g_j \in A(S^2 \setminus E_j)$ e constantes b_j de maneira que as desigualdades

$$(1.3.16) \quad |Q_j(\zeta, z)| < \frac{50}{\delta}$$

$$(1.3.17) \quad \left| Q_j(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \right| < \frac{4000\delta^2}{|z - \zeta|^3}$$

são válidas para todo $z \notin E_j$ e $\zeta \in D_j$, se

$$(1.3.18) \quad Q_j(\zeta, z) = g_j(z) + (\zeta - b_j) g_j^2(z)$$

Seja $\Omega = \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right)^c$. Então Ω é aberto e $K \subset \Omega$.

Seja $X_1 = X \cap D_1$ e $X_j = (X \cap D_j) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} X_i \right)$ para todo $2 \leq j \leq n$.

Definamos

$$(1.3.19) \quad R(\zeta, z) = Q_j(\zeta, z) \quad (\zeta \in X_j, \quad z \in \Omega)$$

e

$$(1.3.20) \quad F(z) = \frac{1}{\pi} \iint_X \bar{\partial} \phi(\zeta) R(\zeta, z) d\bar{\zeta} d\eta \quad (z \in \Omega).$$

Mostraremos que F satisfaz os requerimentos estabelecidos na primeira parte da demonstração (Passo 2).

Como

$$(1.3.21) \quad F(z) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \iint_{X_j} \bar{\partial} \phi(\zeta) R(\zeta, z) d\bar{\zeta} d\eta \quad \text{para toda } z \in \Omega.$$

então $F \in A(\Omega)$, pois (1.3.18) mostra que F é uma combinação linear finita das funções g_j e g_j^2 .

Portanto, de (1.3.20), (1.3.4) e (1.3.5) temos

$$(1.3.22) \quad \begin{aligned} |F(z) - \phi(z)| &\leq \frac{1}{\pi} \iint_X |(\bar{\partial} \phi)(\zeta)| \left| R(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \right| d\bar{\zeta} d\eta \leq \\ &\leq \frac{2w(\delta)}{\pi \delta} \iint_X \left| R(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \right| d\bar{\zeta} d\eta \end{aligned}$$

para todo $z \in \Omega$.

Agora, vejamos que a escolha da função F para aproximar ϕ é bastante boa. Para $\zeta \in X$ e $z \in \Omega$, as desigualdades (1.3.16) e (1.3.17) são válidas para a função $R(\zeta, z)$, pois se $\zeta \in X$

então $\zeta \in X_j$ para algum j , daí segue-se $R(\zeta, z) = Q_j(\zeta, z)$ para todo $z \in \Omega$.

Fixemos $z \in \Omega$, e seja $\zeta = z + \rho e^{i\theta}$. Se $\rho < 4\delta$, usando (I.3.16) temos:

$$\begin{aligned} \iint_X |R(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta}| d\xi d\eta &< \int_X (|Q_j(\zeta, z)| + |\frac{1}{z-\zeta}|) d\xi d\eta < \\ &< \int_0^{4\delta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{50}{\delta} + \frac{1}{\rho} \right) \rho d\rho d\theta = 2\pi \left[\frac{50}{\delta} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) + \rho \right] \Big|_0^{4\delta} \end{aligned}$$

segue-se

$$(I.3.23) \quad \iint_X |R(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta}| d\xi d\eta < 808 \pi \delta$$

Se $\rho \geq 4\delta$, usando (I.3.17) temos:

$$(I.3.24) \quad \iint_X |R(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta}| d\xi d\eta < 8000 \pi \delta^2 \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{4\delta}^N \frac{d\rho}{\rho^2} = 2000 \pi \delta.$$

De (I.3.22)

$$\begin{aligned} |F(z) - \bar{\Phi}(z)| &< \frac{2w(\delta)}{\delta} \iint_X |R(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta}| d\xi d\eta = \\ &= \frac{2w(\delta)}{\delta} \left[\int_0^{4\delta} \int_0^{2\pi} |R(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta}| d\xi d\eta + \int_{4\delta}^{+\infty} \int_0^{2\pi} |R(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta}| d\xi d\eta \right] \end{aligned}$$

($z \in \Omega$).

Substituindo (I.3.23) e (I.3.24) na expressão anterior, obtemos:

$$|F(z) - \bar{\Phi}(z)| < 6000 w(\delta) \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Desde que $F \in H(\Omega)$, $K \subset \Omega$ e $S^2 \setminus K$ conexo, o Teorema de Runge (Teorema 1.2) implica que existe uma seqüência de polinômios $P_n(z) \rightarrow F(z)$ uniformemente em K .

Portanto, para todo $z \in K$

$$\begin{aligned} |f(z) - P_n(z)| &\leq |f(z) - \phi(z)| + |\phi(z) - F(z)| + |F(z) - P_n(z)| < \\ &< 6200 w(\delta) + |F(z) - P_n(z)|. \end{aligned}$$

Como $P_n \xrightarrow[K]{\text{unif}} F$, dado $\epsilon = 3900 w(\delta) > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_0$ implica

$$|f(z) - P_n(z)| < 10000 w(\delta) \quad \text{para todo } z \in K.$$

Como queríamos demonstrar.

4. Extensão do Teorema de Mergelyan para Domínios Multiplamente Conexos.

Teorema 4.1 - Seja $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto tal que $S^2 \setminus K$ possui um número finito de componentes: $G_1, \dots, G_n, \Delta_\infty$. Seja $f \in C(K)$ e $f \in A(K^0)$, se $\{\alpha_j\}$ é um conjunto que contém um ponto $\alpha_j \in G_j(\Delta_\infty)$, dado $\epsilon > 0$ existe uma seqüência de funções racionais $\{R_n\}$ com todos seus polos contidos no conjunto $\{\alpha_j\}$ tal que $R_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente em K .

Prova - O passo 1 é análogo ao do Teorema de Mergelyan no caso $S^2 \setminus K$ conexo.

Passo 2: Seja $\delta_0 > 0$ tal que

$$4\delta_0 = \min_{j=1, \dots, n} \{\text{diam } G_j; G_j \text{ é componente limitada de } S^2 \setminus K\}.$$

Considere $0 < \delta < \delta_0$. Sendo X compacto e como para todo $z \in X$, $\text{dist}(z, K^c) \leq \delta$ existe um número finito de discos abertos $D_1, \dots, D_m$ tal que $D_j = D(x_j, 2\delta)$ com centro $x_j \notin K$ tal que $X \subset \bigcup_{j=1}^m D_j$.

Seja Δ_∞ a componente não limitada de $S^2 \setminus K$, então $x_j \in \Delta_\infty$ pode ser ligado ao ∞ por um caminho poligonal em Δ_∞ . Assim, cada disco $D_i = D(x_i, 2\delta)$ com $x_i \in \Delta_\infty$ contém um compacto E_i tal que $\text{diam}(E_i) \geq 2\delta$, de modo que $S^2 \setminus E_i$ é conexo e $E_i \cap K = \emptyset$.

Agora, para cada componente limitada G_j de $S^2 \setminus K$, considere o arco de Jordan γ_i contido em $G_j \cap D_i$, que parte de x_i e que intercepta a fronteira de D_i , com comprimento $\iota(\gamma_i) > 2\delta$. Se $\gamma_i^* \subset \gamma_i$ é um arco de Jordan, tal que, ainda temos $\iota(\gamma_i^*) > 2\delta$, considerando uma vizinhança compacta E_i de γ_i^* contida em

$D_i \cap G_j$, conclui-se que: cada disco $D_i = D(x_i; 2\delta)$ com $x_i \in G_j$ contém um compacto E_i tal que $\text{diam}(E_i) \geq 2\delta$, com $S^2 \setminus E_i$ conexo e $E_i \cap K = \emptyset$. De modo análogo, como no Passo 2 da demonstração do Teorema de Mergelyan (Teorema I.1.3) usamos o Lema 1 e o mesmo processo para aproximar a função $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ por uma função holomorfa F no aberto $\Omega = \left(\bigcup_{j=1}^m E_j\right)^c \supset K$.

Pelo Teorema de Runge, sendo $F \in A(\Omega)$, $K \subset \Omega$, e dado o conjunto $\{\alpha_j\}$ que contém um ponto de cada componente de $S^2 \setminus K$, existe uma seqüência de funções racionais $\{R_n\}$ com todos os polos no conjunto $\{\alpha_j\}$ tal que $R_n(z) \rightarrow F(z)$ uniformemente em K . Daí, segue-se o teorema.

CAPÍTULO II

A INTEGRAL DE CAUCHY

FORMULAS DE PLEMELJ

Neste capítulo apresentaremos os elementos básicos da teoria da integral de Cauchy.

1. Definição e Algumas Propriedades da Integral de Cauchy

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto limitado com fronteira $\Omega = \Gamma \in C^1$ e seja $f \in C(\Gamma)$

Defina

$$(II.1.1) \quad w(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma.$$

A integral (II.1.1) é chamada de integral de Cauchy, a qual é analítica por partes com salto na curva Γ , i.e., $w_f \in A(\Gamma^c)$. Escreveremos $w = (w_f^i, w_f^e)$ onde $w_f^i = w|_{\Omega}$ e $w_f^e = w|_{\Omega^c}$.

Com o propósito de dar o significado à integral (II.1.1) no caso $z = \zeta \in \Gamma$, consideremos uma certa classe de funções sobre

Γ .

Definição - A função $f(z)$ é chamada Hölder contínua e escrevemos $f \in H(\Gamma)$, se satisfaz

$$(II.1.2) \quad |f(z') - f(z'')| \leq k(f) |z - z'|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

para qualquer par de pontos $z', z'' \in \Gamma$, onde α e $k(f)$ são ditas expoente de Hölder e a constante de Hölder da função $f(z)$, respectivamente.

Então, se $f \in H(\Gamma)$, a integral tipo Cauchy sobre Γ

$$(II.1.3) \quad w_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

existe no sentido do valor principal de Cauchy para todos os valores $z \in \Gamma$ (para $z \notin \Gamma$ a integral existe no sentido comum). Isto é.

$$w_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Gamma$$

onde $\Gamma_\epsilon = \Gamma - \ell$, e ℓ é um arco cujos pontos extremos ζ' e ζ'' satisfazem a condição $|z - \zeta'| = |z - \zeta''| = \epsilon$, $z \in \ell$.

Para provar esta afirmação representemos $w_f(z)$ na forma

$$w_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

onde a primeira integral existe como integral imprópria em vista da condição $f \in H(\Gamma)$. Usando os fatos, $|\zeta' - z| = |\zeta'' - z|$ e que o ângulo $\beta(s) = \arg(\zeta' - z) - \arg(\zeta'' - z)$ tende para $+\pi$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\zeta' - z}{\zeta'' - z} = \pi i.$$

Assim,

$$(II.1.4) \quad w_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2} f(z).$$

Logo está provada a afirmação.

2. Extensão da função $f(\zeta)$ numa vizinhança do arco $\ell \subset \Gamma$.

Seja Γ um arco suave em $\mathbb{C}$ definida pela equação:

$z = \zeta(s)$, $s \in [0, s_{\Gamma}]$, onde s é o comprimento de Γ . Sejam $\zeta_0 = \zeta(s_0)$ e $\zeta = \zeta(s)$ pontos de Γ , α_0 um ângulo agudo, $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, e seja $\theta = \theta(s)$ o ângulo que formam a tangente a Γ no ponto $\zeta(s)$ e o eixo OX . Como $\Gamma \in C^1$, $\theta(s)$ é uma função contínua.

A continuidade do ângulo tangente $\theta(s)$ para Γ implica a existência de um $\varepsilon > 0$ tal que o ângulo não-obtuso $\alpha = \alpha(s)$ que formam as tangentes a Γ nos pontos ζ_0 e $\zeta = \zeta(s)$ não excede α_0 .

quando $|s_0 - s| < \varepsilon$, i.e.,

$$(II.2.1) \quad |\alpha(s)| = |\theta(s_0) - \theta(s)| \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Agora considere $\beta(s)$ o ângulo não-obtuso que formam o segmento de retas que liga os pontos $\zeta_0 = \zeta(s_0)$ e $\zeta = \zeta(s)$ e a tangente a Γ num ponto arbitrário $\zeta_1 = \zeta(s_1)$, $s_1 \in [s_0, s]$. Então, desde que Γ contenha um ponto $\zeta_* = \zeta(s_*)$, $s_* \in [s_0, s]$, no qual a tangente a Γ é paralelo a $\overline{\zeta_0 \zeta}$, a desigualdade (II.2.1) implica que

$$(II.2.2) \quad \beta(s_1) = |\theta(s_*) - \theta(s_1)| \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Seja $r = |\zeta_0 - \zeta|$, então $\left| \frac{dr}{ds} \right| = \cos \beta(s)$ e

$$(II.2.3) \quad k_0 |s_0 - s| \leq |\zeta(s_0) - \zeta(s)| \leq |s_0 - s|$$

onde $0 < k_0 = \cos \alpha_0 < 1$. Observe que (II.2.3) é válido para qualquer par de pontos $\zeta_1 = \zeta(s_1)$ e $\zeta_2 = \zeta(s_2)$ sobre Γ , não necessariamente próximos. Assim, fixemos $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ e $\varepsilon > 0$ correspondente a este valor fixo α_0 , e considere um arco suave $\ell \subset \Gamma$ arbitrário com pontos extremos

$$a = \zeta(s_a), \quad b = \zeta(s_b) \quad (0 \leq s_0 < s_b = s_a + \varepsilon).$$

Seja π_ζ um segmento de reta arbitrário que passa pelo ponto $\zeta = \zeta(s) \in \Gamma$, $s \in [s_a, s_b]$, e que forma um ângulo não-obtuso β , $0 < \alpha_0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$, com a tangente a ℓ no ponto fixo $\zeta_0 = \zeta(s_0)$. Agora, seja n_a a normal no ponto extremo a do arco ℓ e faça uma translação paralela de ℓ à uma distância ε_0 à ambos lados de ℓ , tomando os pontos extremos à direita das curvas ℓ' e ℓ'' sobre a

e, por (II.2.1), o ângulo γ no vértice ζ_1 satisfaz a desigualdade $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha_0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$. Então

$$\begin{aligned} |z_0 - \zeta_2|^2 &= |z_0 - \zeta_1|^2 + |\zeta_2 - \zeta_1|^2 - 2 \cos \gamma | \zeta_1 - \zeta_2 | |z_0 - \zeta_1| \geq \\ &\geq \sin^2 \frac{\gamma}{2} (|z_0 - \zeta_1| + |\zeta_1 - \zeta_2|)^2, \end{aligned}$$

donde, por (II.2.1),

$$|z_1 - z_2| = |z_0 - \zeta_2| \geq \sin \frac{\gamma}{2} (|r_1 - r_2| + k_0 |s_1 - s_2|) \geq k(\alpha_0) \rho(z_1, z_2)$$

onde $k(\alpha_0) = k_0 \sin \frac{\gamma}{2} \geq \cos \alpha_0 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_0}{2} \right) > 0$. Assim,

$$(II.2.4) \quad k_\rho(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2| \leq \rho(z_1, z_2), \quad k = k(\alpha_0) > 0.$$

Tomando $\rho(z_1, z_2) \geq \{|s_1 - s_2|, |r_1 - r_2|\}$, por (II.2.4), temos

$$(II.2.5) \quad |s_1 - s_2| \leq \frac{1}{k} |z_1 - z_2|, \quad |r_1 - r_2| \leq \frac{1}{k} |z_1 - z_2|.$$

Agora suponha que $f(\zeta) \in H(\ell)$, sobre o arco $\ell \subset \Gamma$, onde Γ é uma curva suave arbitrária, tal que $s_b - s_a = \varepsilon$, onde $a = \zeta(s_a)$ e $b = \zeta(s_b)$ são os pontos extremos de ℓ , e ε se escolhe de maneira que (II.2.1) é válido. Seja $f(z) = f(\zeta)$, onde $\zeta = -\zeta(s) \in \ell \cap L$ e L é a reta que passa por z paralela à normal n_a em a .

Então, $f(z) \in H[\sigma(\ell)]$ para a função que estende f definida em $\ell \subset \Gamma$ para a vizinhança standard $\sigma(\ell)$ de ℓ . De fato, usando as desigualdades (II.2.3) e (II.2.4) obtemos

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq k(f) |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha \leq$$

$$\leq k(f) |s_1 - s_2|^\alpha \leq k(f) k_0^{-\alpha} |z_1 - z_2|^\alpha$$

isto é,

$$(II.2.6) \quad |f(z_1) - f(z_2)| \leq \tilde{k}(f) |z_1 - z_2|^\alpha, \text{ onde } \tilde{k}(f) = k(f) k_0^{-\alpha}$$

3. Comportamento da Integral de Cauchy nas Proximidades da Curva de Integração.

Para estudar como se comporta a integral de Cauchy numa vizinhança da curva Γ represente w_f na forma

$$(II.3.1) \quad w_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \sigma(\ell)$$

onde $f(\zeta) \in H(L_0)$, $L_0 \subset \Gamma$, e $f(\zeta)$ é integrável sobre $\Gamma - L_0$, e $f(z)$ é a extensão da $f(\zeta)$ numa vizinhança standard $\sigma(\ell)$ de um arco arbitrário $\ell \subset L_0$ com pontos extremos $a_\ell = t(s_a)$ e $b_\ell = t(s_b)$. Seja

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

As propriedades de F , estão dados pelo seguinte

Teorema II.3.1 - $F(z) \in H(\sigma(\ell))$, $\ell \subset L_0$, com expoente de Hölder $\lambda = \alpha$ para $0 < \alpha < 1$, e $\lambda \in (0, 1)$ arbitrário para $\alpha = 1$. A constante de Hölder $k(F)$ da função $F(z)$ depende de $k(f)$ sobre L_0 , do valor da integral de $f(\zeta)$ sobre $\Gamma - L_0$, da distância dos pontos extremos de L e da geometria de L .

Prova - Ver [4], pag 11, teorema 1.

4. Propriedades de Fronteira da Integral de Cauchy. Fórmulas de Plemelj.

Em primeiro lugar, consideremos os valores de fronteira da integral de Cauchy $w_f(z)$. Para isso, tome $\zeta \in \Gamma$ e denote $w_f^i(\zeta)$ e $w_f^e(\zeta)$ os valores limites sobre Γ da função $w_f(z)$ quando a aproximação é por Ω e por $\bar{\Omega}^c$, respectivamente, caso existam. Suponha que $f(\zeta) \in H(\Gamma)$, $L_0 \subset \Gamma$ (arco), e que $z \in \Omega$ está numa vizinhança $\sigma(\ell)$ do arco $\ell \subset L_0$ contendo o ponto fixo $\zeta \in \Gamma$.

Como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1, \quad z \in \Omega$$

de (II.3.1) tem-se

$$(II.4.1) \quad w_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z)$$

i.e., $w_f(z) = F(z) + f(z)$, onde $f(z)$ é a extensão de $f(\zeta)$ numa vizinhança $\sigma(\ell)$. Passando ao limite em (II.4.1) quando $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$ ($z \in \Omega$), tem-se

$$w_f^i(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + f(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma.$$

A existência dos limites segue-se de que $F(z)$ (Teorema II.3.1) e $f(z)$ são Hölder contínuas. Assim, pela igualdade

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{2}$$

a qual segue-se de (II.1.4) para $f(z) = f(\zeta) = 1$, obtemos

$$(II.4.2) \quad w_f^i(\zeta_0) = \frac{1}{2} f(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\zeta_0 \in \Gamma).$$

Agora, suponha que $z \in (\bar{\Omega})^c$, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0, \quad z \in \bar{\Omega}^c$$

e, em consequência (II.3.1) pode-se re-escrever na forma

$$w_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

a qual, quando $z \rightarrow \zeta_0$ ($z \in \bar{\Omega}^c$), nos dá, pelas mesmas razões que anteriormente,

$$(II.4.3) \quad w_f^e(\zeta_0) = -\frac{1}{2} f(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

As fórmulas (II.4.2) e (II.4.3) são chamadas de fórmulas de Plemelj.

Observe que $w_f^i \in A(\Omega)$ e $w_f^e \in A(\bar{\Omega}^c)$.

Escreveremos também w_f^i para designar w quando $z \in \bar{\Omega}$ e w_f^e para designar w quando $z \in \Omega^c$.

Sobre a curva Γ temos o seguinte resultado (Ver [6], pag. 16, teorema 2)

Teorema II.4.1 (Privalov). Seja $\Gamma \in C^1$ uma curva simples fechada e Ω seu interior. Se $f \in H^\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, então $w_f^i \in H^\lambda(\overline{\Omega})$ e $w_f^e \in H^\lambda(\Omega^c)$ onde $\lambda = \alpha$ se $0 < \alpha < 1$ e λ é qualquer valor em $(0,1)$ se $\alpha = 1$.

CAPÍTULO III

NÚCLEOS ORTONORMALIZADORES PARA CURVAS FECHADAS SIMPLES

Neste capítulo definiremos um produto interno numa curva Γ fechada simples no plano, de modo que as potências z^n , n inteiro relativo, formem um conjunto ortogonal no espaço das funções Hölder contínuas na curva munida do produto interno dado que denotaremos $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$. Também, exibiremos uma base ortonormal para o espaço $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$ e estudaremos as propriedades do operador integral $\tilde{K}$ que define o produto interno, assim como as de seu núcleo.

Além disso, vamos caracterizar o complemento do espaço $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$, analisando em que sentido a série formal de Laurent de uma função $f \in C(\Gamma)$ converge para f ; neste ponto a ferramenta básica é o Teorema de Mergelyan para domínios multiplamente conexo.

1. Definição e Forma Explícita do Produto Interno

Nesta seção, nosso primeiro objetivo é definir um produto interno sobre o espaço de funções $H(\Gamma)$, com expoente $0 < \alpha \leq 1$, de maneira que o conjunto $\{z^n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ seja ortogonal na curva Γ . Para isso, considere $f \in H(\Gamma)$, e defina a aplicação linear.

$$f \in H(\Gamma) \xrightarrow{w} (w_f^i, w_f^e) \in [A(\Omega) \cap H(\bar{\Omega})] \times [A(\bar{\Omega}^c) \cap H(\Omega^c)]$$

Pelas fórmulas de Plemelj, segue-se que a aplicação é injetiva. De fato, se $\zeta \in \Gamma$, temos $w_f^i(\zeta) - w_f^e(\zeta) = f(\zeta)$.

Agora, vamos considerar os casos especiais:

i) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$,

ii) $f(z) = z^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Proposição (III.1.1) - Se $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ temos $w_f^i(z) = z^n$ e $w_f^e(z) = 0$. E se $f(z) = z^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ temos $w_f^i(z) = 0$ e $w_f^e(z) = z^{-n}$.

Prova - Com efeito, se $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ segue $f \in A(\Omega)$. Por (II.1.1),

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^n}{\zeta - z} d\zeta$$

Se $z \in \Omega$, pela fórmula integral de Cauchy

$$w_{z^n}^i(z) = z^n$$

e se $z \in \bar{\Omega}^c$, temos $\frac{\zeta^n}{\zeta - z}$ é analítica, logo $w_{z^n}^e(z) = 0$

No caso $f(z) = z^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, temos $f \in A(\bar{\Omega}^c)$. De (III.1.1),

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^{-n}}{\zeta - z} d\zeta$$

Seja $\zeta' = \frac{1}{\zeta}$ então $d\zeta' = -\frac{1}{\zeta^2} d\zeta$ e

$$w(z') = \frac{z'}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\zeta'^{n-1}}{\zeta' - z'} d\zeta'$$

onde Γ' é a curva obtida de Γ pela transformação $z \rightarrow \frac{1}{z}$, no z' -plano

Se $z' \in \overline{\Omega}^c$, temos $\frac{\zeta^{n-1}}{\zeta' - z'}$ é analítica, então $w_{z',n}^e(z') = 0$, e se

$z' \in \Omega'$, pela fórmula integral de Cauchy $w_{z',n}^i(z') = z'^n$. Mas $w_{z',n}^e(z') = w_{z^n}^i(z)$ e $w_{z',n}^i(z') = w_{z^{-n}}^e(z)$. Como queríamos demonstrar.

Note que

$$z^n \xrightarrow{w} (z^n, 0)$$

e

$$z^{-n} \xrightarrow{w} (0, z^{-n})$$

Suponhamos que $0 \in \Omega$. Tomemos $C_i = C(0; r) \subset \Omega$ um círculo de centro 0 e raio $0 < r < 1$, e $C_e = C(0; r^{-1})$ um círculo de centro 0 e raio r^{-1} , com $C_e \subset \overline{\Omega}^c$, como na figura.

Definição do Produto Interno

Sejam $a > 0$ e $b > 0$ constantes. Defina a função $\langle, \rangle: H(\Gamma) \times H(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$(III.1.1) \quad \langle f, h \rangle := a \oint_{C_i} \overline{w_f^i} w_h^i ds + b \oint_{C_e} \overline{w_f^e} w_h^e ds, \quad f, h \in H(\Gamma)$$

onde ds é o elemento de arco, $\oint_{C_i}$ e $\oint_{C_e}$ denotam integração sobre C_i e C_e respectivamente, com orientação positiva.

É imediato que $\langle, \rangle$ é um produto interno em vista de sua definição e da injetividade da aplicação W .

Fazendo $f(z) = z^m$ e $h(z) = z^n$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$, temos, obviamente,

$$\langle z^m, z^n \rangle = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

Desta maneira $\{z^n\}$ é um conjunto ortogonal em $H(\Gamma, \langle, \rangle)$.

Forma Explícita do Produto Interno

$$\text{Em } C_i, w_f^i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{e} \quad w_h^i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta ; \quad \text{em}$$

$$C_e, w_f^e(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{e} \quad w_h^e(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta ,$$

Daí

$$\begin{aligned}
\langle f, h \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ a \oint_{C_i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(\zeta)}{(\bar{\zeta} - \bar{z})} d\bar{\zeta} \cdot \int_{\Gamma} \frac{h(\zeta')}{(\zeta' - z)} d\zeta' \right\} ds + \\
&+ b \oint_{C_e} \left(\int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(\zeta)}{(\bar{\zeta} - \bar{z})} d\bar{\zeta} \cdot \int_{\Gamma} \frac{h(\zeta')}{(\zeta' - z)} d\zeta' \right) ds \Bigg\} = \\
&= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \bar{f}(\zeta) h(\zeta') \left(\int_{aC_i - bC_e} \frac{\left(\frac{1}{4\pi^2}\right)}{(\bar{\zeta} - \bar{z})(\zeta' - z)} ds \right) d\bar{\zeta} d\zeta'.
\end{aligned}$$

para $f, h \in H(\Gamma)$.

Agora, defina

$$K(\zeta, \zeta') = \int_{aC_i - bC_e} \frac{\left(\frac{1}{4\pi^2}\right)}{(\bar{\zeta} - \bar{z})(\zeta' - z)} ds.$$

Então

$$\langle f, h \rangle = \iint_{\Gamma \Gamma} \bar{f}(\zeta) h(\zeta') K(\zeta, \zeta') d\bar{\zeta} d\zeta'.$$

Suponha que a curva Γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco s , i.e., $\Gamma: \zeta = \zeta(s)$;

Então, $d\zeta = e^{i\theta(\zeta)} ds$ e $d\zeta' = e^{i\theta(\zeta')} ds'$, onde $\theta = \theta(\zeta)$ é o ângulo entre a tangente $\hat{t}_{\zeta}$ a Γ no ponto ζ , e o eixo OX . Logo

$$\langle f, h \rangle = \iint_{\Gamma \Gamma} \bar{f}(\zeta) h(\zeta') e^{i(\theta(\zeta') - \theta(\zeta))} K(\zeta, \zeta') ds ds'$$

para todo $f, h \in H(\Gamma)$

Seja

$$\tilde{K}(\zeta, \zeta') = K(\zeta, \zeta') e^{i(\theta(\zeta') - \theta(\zeta))}, \quad (\zeta = \zeta(s) \text{ e } \zeta' = \zeta'(s'))$$

e defina o operador integral $\tilde{K}: H(\Gamma) \rightarrow H(\Gamma)$ por

$$(\tilde{K} h)(\zeta) = \int_{\Gamma} \tilde{K}(\zeta, \zeta') h(\zeta') ds'$$

Considerando o espaço $L^2(\Gamma)$, com a medida de Lebesgue, onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno usual, tem-se

$$\langle f, h \rangle = (f, \tilde{K} h) \quad f, h \in H(\Gamma)$$

Agora, determinemos a forma geral do produto interno. Assim, seja $C_i = C(0, r)$ o círculo de centro na origem e raio $0 < r < 1$ e $z = re^{i\theta}$

então $\bar{z} = re^{-i\theta}$, $ds = r d\theta$ e

$$\begin{aligned}
\oint_{C_i} \frac{ds}{(\bar{\zeta}-\bar{z})(\zeta'-z)} &= \int_0^{2\pi} \frac{d(re^{i\theta})}{(\bar{\zeta}-re^{-i\theta})(\zeta'-re^{i\theta})} = -i \int_0^{2\pi} \frac{d(re^{i\theta})}{(e^{i\theta}\bar{\zeta}-r)(\zeta'-re^{i\theta})} \\
&= -i \oint_{C_i} \frac{dz}{(r^{-1}z\bar{\zeta}-r)(\zeta'-z)} \\
&= -i \oint_{C_i} \frac{r}{\bar{\zeta}} \frac{dz}{(z-\frac{r^2}{\bar{\zeta}})(\zeta'-z)}
\end{aligned}$$

Como $\frac{r^2}{\bar{\zeta}} \in D(0;r)$ e $\frac{1}{\zeta'-z}$ é uma função analítica em $D(0;r)$, usando o teorema dos resíduos, tem-se

$$\begin{aligned}
\oint_{C_i} \frac{ds}{(\bar{\zeta}-\bar{z})(\zeta'-z)} &= 2\pi \frac{r}{\bar{\zeta}} \operatorname{Res} \frac{1}{(z-\frac{r^2}{\bar{\zeta}})(\zeta'-z)} ; \frac{r^2}{\bar{\zeta}} = \\
&= 2\pi \frac{r}{\bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta'-\frac{r^2}{\bar{\zeta}}} = \frac{2\pi r}{\bar{\zeta}\zeta'-r^2}.
\end{aligned}$$

Como

$$\oint_{C_i} \bar{w}_f^i w_h^i ds = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \bar{f}(\zeta) h(\zeta') \left(\oint_{C_i} \frac{ds}{(\bar{\zeta}-\bar{z})(\zeta'-z)} \right) d\bar{\zeta} d\zeta'$$

então

$$\oint_{C_i} \bar{w}_f^i w_h^i ds = \frac{r}{2\pi} \iint_{\Gamma\Gamma} \frac{\bar{f}(\zeta) h(\zeta')}{(\bar{\zeta}\zeta'-r^2)} d\bar{\zeta} d\zeta'.$$

Analogamente, seja $C_e = C(0;r^{-1})$, $0 < r < 1$ e $z = r^{-1} e^{i\theta}$

Então $\bar{z} = r^{-1}e^{-i\theta}ds = r^{-1}d\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\oint_{C_e} \frac{ds}{(\bar{\zeta} - \bar{z})(\zeta' - z)} = - \oint_{C_e} \frac{ds}{(\bar{\zeta} - \bar{z})(\zeta' - z)} = - \int_0^{2\pi} \frac{r^{-1}d\theta}{(\bar{\zeta} - r^{-1}e^{-i\theta})(\zeta' - z)} =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \frac{-ie^{-i\theta}d(r^{-1}e^{i\theta})}{(\bar{\zeta} - r^{-1}e^{-i\theta})(\zeta' - z)} = +i \oint_{-C_e} \frac{1}{r\bar{\zeta}} \cdot \frac{dz}{(z - r^{-2}\bar{\zeta}^{-1})(z - \zeta')}$$

Como a função $\frac{1}{z - r^{-2}\bar{\zeta}^{-1}}$ é analítica em $\bar{\Omega}^C$ e $\frac{1}{z - \zeta'}$ tem um polo em $z = \zeta' \in D(0; r^{-1})$ ($r < |\zeta'| < r^{-1}$), pelo teorema dos resíduos temos

$$\oint_{C_e} \frac{ds}{(\bar{\zeta} - \bar{z})(\zeta' - z)} = - \frac{2\pi}{r\bar{\zeta}} \text{Res} \left(\frac{1}{(z - \zeta')(z - r^{-2}\bar{\zeta}^{-1})}; \zeta' \right) =$$

$$= - \frac{2\pi}{r\bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta' - r^{-2}\bar{\zeta}^{-1}} = - \frac{2\pi r^{-1}}{\bar{\zeta}\zeta' - r^{-2}}.$$

Sendo

$$\oint_{C_e} \bar{w}_f^e w_h^e ds = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma\Gamma} \bar{f}(\zeta) h(\zeta') \left(\oint_{C_e} \frac{ds}{(\bar{\zeta}-\bar{z})(\zeta'-z)} \right) d\bar{\zeta} d\zeta'$$

segue-se

$$\oint_{C_e} \bar{w}_f^e w_h^e ds = - \frac{r^{-1}}{2\pi} \iint_{\Gamma\Gamma} \frac{\bar{f}(\zeta) h(\zeta')}{(\bar{\zeta}\zeta' - r^{-2})} d\bar{\zeta} d\zeta'.$$

Substituindo (III.1.7) e (III.1.8) em (III.1.1), obtemos a forma geral do produto interno

$$(III.1.9) \quad \langle f, h \rangle = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma\Gamma} \bar{f}(\zeta) h(\zeta') \left(\frac{ar}{\bar{\zeta}\zeta' - r^2} - \frac{br^{-1}}{\bar{\zeta}\zeta' - r^{-2}} \right) d\bar{\zeta} d\zeta'$$

então

$$K(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{ar}{\bar{\zeta}\zeta' - r^2} - \frac{br^{-1}}{\bar{\zeta}\zeta' - r^{-2}} \right)$$

é o núcleo do operador integral $\mathbb{K}$ e

$$\tilde{K}(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{ar}{\bar{\zeta}\zeta' - r^2} - \frac{br^{-1}}{\bar{\zeta}\zeta' - r^{-2}} \right) e^{i(\theta(\zeta') - \theta(\zeta))}$$

é o núcleo do operador integral $\tilde{\mathbb{K}}$.

Tomando $a = r$ e $b = r^{-1}$, $0 < r < 1$, sem perda de generalidade, tem-se

$$K(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta' - r^2} - \frac{r^{-2}}{\bar{\zeta}\zeta' - r^{-2}} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta'} \left(\frac{1}{1 - \frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta'}} \right) + \frac{1}{1 - r^2 \bar{\zeta}\zeta'} \right)$$

Como para todo $\zeta \in \Gamma$, $r < |\zeta| < r^{-1}$, então $r^2 < |\zeta'\bar{\zeta}| < r^{-2}$.
Portanto $\left| \frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta'} \right| < 1$ e $r^2 |\bar{\zeta}\zeta'| < 1$. Então

$$K(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta'} + \left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta'} \right)^2 + \dots + 1 + r^2 \bar{\zeta}\zeta' + \dots + (r^2 \bar{\zeta}\zeta')^2 + \dots \right)$$

ou seja

$$K(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{2|n|} (\bar{\zeta}\zeta')^n \quad \text{para todo } (\zeta, \zeta') \in \Gamma \times \Gamma.$$

Assim,

$$\tilde{K}(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{2|n|} e^{-i\theta(\zeta)} (\bar{\zeta}\zeta')^n r^{i\theta(\zeta')} \quad \text{para todo}$$

$$(\zeta, \zeta') \in \Gamma \times \Gamma.$$

Como para todo $\zeta, \zeta' \in \Gamma$ temos $|r^2 \bar{\zeta}\zeta'| < 1$ e $\left| \frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta'} \right| < 1$, as séries (III.1.13) e (III.1.14) convergem absoluta e uniformemente sobre $\Gamma \times \Gamma$.

Observação: O núcleo do operador integral K se comporta como a delta de Dirac $\delta(\zeta - \zeta')$ quando $r \rightarrow 1$, isto é, quando $\Gamma = S^1$.

Com efeito, de (III.1.10) temos

$$K(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta' - r^2} - \frac{r^{-2}}{\bar{\zeta}\zeta' - r^{-2}} \right)$$

para $a = r$ e $b = r^{-1}$, $0 < r < 1$.

Então, se $\zeta \neq \zeta'$ temos

$$K(\zeta, \zeta') \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow 1$$

Se $\zeta = \zeta'$, temos

$$\begin{aligned} K(\zeta, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2}{1-r^2} - \frac{r^{-2}}{1-r^{-2}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2 - r^{-2}}{2 - (r^2 + r^{-2})} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r + r^{-1}}{r^{-1} - r} \end{aligned}$$

de onde $K(\zeta; \zeta) \rightarrow +\infty$ quando $r \rightarrow 1$.

Denote por $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$ o espaço $H(\Gamma)$ munido do produto interno $\langle, \rangle$, quando $a = r$ e $b = r^{-1}$, em $0 < r < 1$.

Observe que $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$ possui uma estrutura de álgebra sem elemento unidade. De fato, se $f, g \in A(\Omega) \cap H(\Gamma)$ temos

$$w_f^i = f, \quad w_g^i = g \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad w_f^e = 0, \quad w_g^e = 0 \quad \text{em } \bar{\Omega}^c$$

então,

$$w_f^i w_g^i = fg = w_{fg}^i \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad w_f^e w_g^e = 0 = w_{fg}^e \quad \text{em } \bar{\Omega}^c.$$

então,

$$w_f^i w_g^i = 0 = w_{fg}^i \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad w_f^e w_g^e = 0 = w_{fg}^e \text{ em } \bar{\Omega}^c.$$

Analogamente, se $f, g \in A(\bar{\Omega}^c) \cap H(\Gamma)$ temos

$$w_f^i = 0, w_g^i = 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad w_f^e = f, w_g^e = g \text{ e, } \bar{\Omega}^c$$

então,

$$w_f^i w_g^i = 0 = w_{fg}^i \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad w_f^e w_g^e = fg = w_{fg}^e \text{ em } \bar{\Omega}^c ;$$

Por outro lado, se e é a identidade, então $e|_{\Omega} = 1$ e $e|_{\bar{\Omega}^c} = 1$.

Daí

$$w_e^i|_{\Gamma} = w_e^e|_{\Gamma} = 1$$

e portanto $e|_{\Gamma} = w_e^i|_{\Gamma} - w_e^e|_{\Gamma} = 0$. Mas $e|_{\Gamma} = 0$, então $e \equiv 0$.
Absurdo.

2. Propriedades do Operador $\tilde{K}$

1) $\tilde{K}$ é limitado na norma $L^2(\Gamma)$.

De fato, pela convergência uniforme de (III.1.13) e pela compacidade de $\Gamma \times \Gamma$, existe $M < +\infty$ tal que $|\tilde{K}(\zeta, \zeta')| < M$

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |\tilde{K}(\zeta, \zeta')|^2 ds ds' < M^2 \iint_{\Gamma \times \Gamma} ds ds' < +\infty$$

2) $\tilde{K}$ é um operador compacto em $L^2(\Gamma)$

Com efeito, pela convergência uniforme em $\Gamma \times \Gamma$ da série (III.1.13) de termos contínuos em $\Gamma \times \Gamma$ segue $K(\zeta; \zeta') \in C(\Gamma \times \Gamma)$. Combinando isto com o fato de Γ ser compacto, conclui-se $\tilde{K}$ é um operador compacto em $L^2(\Gamma)$.

3) $\tilde{K}$ é autoadjunto em $L^2(\Gamma)$.

Basta provar que

$$\overline{\tilde{K}(\zeta', \zeta)} = \tilde{K}(\zeta, \zeta').$$

De fato,

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{K}(\zeta', \zeta)} &= \frac{1}{2\pi} \overline{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{2|n|} e^{-i\theta(\zeta')} (\overline{\zeta' \zeta})^n e^{i\theta(\zeta)}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{2|n|} e^{-i\theta(\zeta)} (\overline{\zeta \zeta'})^n e^{i\theta(\zeta')} = \tilde{K}(\zeta, \zeta'). \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes propriedades do núcleo $\tilde{K}$.

1') $\tilde{K}$ é de quadrado integrável sobre $\Gamma \times \Gamma$ tal que

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |\tilde{K}(\zeta, \zeta')|^2 ds ds' < +\infty.$$

2') $\tilde{K} \in C(\Gamma \times \Gamma)$:

3') $\tilde{K}$ é hermiteano.

Em consequência, o produto interno $\langle, \rangle$ é contínuo no sentido de $L^2(\Gamma)$. De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| = |(f, \tilde{K}g)_{L^2(\Gamma)}| \leq \|f\|_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{K}g\|_{L^2(\Gamma)}$$

Mas

$$\|\tilde{K}g\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\tilde{K}\|_{L^2(\Gamma)} \|g\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Portanto

$$\|\langle f, g \rangle\| \leq \|\tilde{K}\|_{L^2(\Gamma)} \|f\|_{L^2(\Gamma)} \|g\|_{L^2(\Gamma)}$$

Logo $L^2(\Gamma)$ está contido no complemento de $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$.

3) Uma Base Ortonormal para o Espaço $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$

Temos definido em $H(\Gamma)$ o produto interno $\langle, \rangle$ que satisfaz

$$\langle f, g \rangle = (f, \tilde{K}g) \quad f, g \in H(\Gamma)$$

Vamos mostrar que o conjunto $\{z^m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ é ortogonal em relação a este produto interno. Primeiro, analisemos o efeito do operador $\tilde{K}$ nas funções z^m , $m \in \mathbb{Z}$.

Multiplicando (III.1.13) por ζ'^m , obtemos:

$$(III.3.1) \quad \zeta'^m \tilde{K}(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{2|n|} \bar{\zeta}^n \zeta'^{(n+m)} e^{i(\theta(\zeta') - \theta(\zeta))}$$

Integre ambos membros de (III.3.1) em relação a ζ' na curva Γ . Pela convergência uniforme da série em (III.3.1) em $\Gamma \times \Gamma$ combinado com o fato

$$\int_{\Gamma} \zeta'^{(n+m)} d\zeta' = \begin{cases} 0, & \text{se } n+m \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{se } n+m = -1 \end{cases}$$

Segue-se

$$(III.3.2) \quad [\tilde{K}(z^m)](\zeta) = \int_{\Gamma} \tilde{K}(\zeta, \zeta') \zeta'^m ds = i r^{2|m+1|} \bar{\zeta}^{-(m+1)} e^{-i\theta(\zeta)}$$

$$\langle z^n, z^m \rangle = i r^{2|m+1|} \int_{\Gamma} \bar{\zeta}^{[n-(m+1)]} d\bar{\zeta}$$

mas

$$\int_{\Gamma} \bar{\zeta}^{[n-(m+1)]} d\bar{\zeta} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ -2\pi i, & \text{se } n = m \end{cases}$$

então

$$\langle z^n, z^m \rangle = 2\pi r^{2|n+1|} \delta_{m,n}$$

onde $\delta_{m,n}$ é o delta de Krönecker.

Em consequência, o conjunto $\{z^m\}$ é ortogonal em relação ao produto interno $\langle, \rangle$ com

$$\|z^m\|_{\langle, \rangle} = \sqrt{2\pi} r^{|m+1|}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Tomando

$$(III.3.3) \quad \theta_m = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi} r^{|m+1|}}$$

obtemos que o conjunto $\{\theta_m\}$ é ortonormal em $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$.

Agora provaremos que o conjunto ortonormal $\{\theta_m\}$ é maximal em $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$. De fato, se $f \in H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$ então $f \in C(\Gamma)$, e pelo Teorema de Mergelyan (I.5.1) existe uma sequência de funções racionais $\{\phi_p: \phi_p \text{ tem polo em } 0 \in \Omega \text{ e em } \infty\}_{p=1}^\infty$ tal que $\phi_p \xrightarrow{C(\Gamma)} f$ quando $p \rightarrow +\infty$, i.é., dado $\varepsilon > 0$ existe uma função racional com polos em 0 e no ∞ tal que

$$\|\phi - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{L} (\|\tilde{K}\|_{L^2(\Gamma)} + 1)^{1/2}}$$

onde $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma do supremo em Γ e L é o comprimento da curva Γ .

Daí existe $F \subset \mathbb{Z}$ finito, tal que $\phi = \sum_{m \in F} \lambda_m^\varepsilon \theta_m$ onde $\lambda_m^\varepsilon \in \mathbb{C}$.

Por outro lado, a convergência uniforme sobre a curva Γ implica a convergência em $L^2(\Gamma)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{m \in F} \lambda_m^\varepsilon \theta_m \right\|_{L^2(\Gamma)} &\leq \left\| f - \sum_{m \in F} \lambda_m^\varepsilon \theta_m \right\|_\infty \left(\int_\Gamma |ds| \right)^{1/2} < \\ &< \frac{\varepsilon}{(\|\tilde{K}\|_{L^2(\Gamma)} + 1)^{1/2}} \end{aligned}$$

Como por (III.2.1), temos

$$\left\| f - \sum_{m \in F} \lambda_m^\varepsilon \theta_m \right\|_{H_r(\Gamma, <, >)}^2 \leq \|\tilde{K}\|_{L^2(\Gamma)} \left\| f - \sum_{m \in F} \lambda_m^\varepsilon \theta_m \right\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

segue-se

$$\left\| f - \sum_{m \in F} \lambda_m^\varepsilon \theta_m \right\|_{H_r(\Gamma, <, >)} < \varepsilon$$

Pela propriedade fundamental de conjuntos ortonormais (Ver [6], pag. 83, teorema 4.16) tem-se

$$\left\| f - \sum_{m=-N}^N \langle \theta_m, f \rangle \theta_m \right\|^2 \leq \left\| f - \sum_{m=-N}^N \lambda_m^\varepsilon \theta_m \right\|^2 < \varepsilon^2$$

o qual nos diz que toda função $f \in H_r(\Gamma, <, >)$ pode-se escrever da forma

$$(III.3.4) \quad f = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle \theta_m, f \rangle \theta_m$$

Combinando isto com o Teorema da base (Ver [1], pag. 61, teorema 4.6) vemos que o conjunto ortonormal $\{\theta_m\}$ é uma base ortonormal do espaço $H_r(\Gamma, <, >)$.

Note que (III.3.4) é a expansão em séries de Fourier da função f . Também, observe que a expressão (III.1.13) não é a decomposição espectral do núcleo $\tilde{K}$ em $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$, pois $\zeta^n \perp \zeta^m$ no sentido de $\langle, \rangle$ em Γ mas não no sentido $L^2(\Gamma)$.

4. Outra Base para o Espaço $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$

Exibiremos uma base para o espaço $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$ formada pelas autofunções de um operador neste espaço definido usando o operador integral $\tilde{K}$.

Primeiro, vamos definir este novo operador e calcular suas auto-funções.

Seja J o operador de conjugação. De (III.3.2) segue

$$J\tilde{K}z^m = -ir^2 |m+1| z^{-(m+1)} e^{i\theta(z)}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

de onde

$$(III.4.1) \quad ze^{-i\theta} J\tilde{K}z^m = -ir^2 |m+1| z^{-m}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Defina o operador $\hat{K}: H(\Gamma, \langle, \rangle) \rightarrow H(\Gamma, \langle, \rangle)$ por

$$\hat{K} := ze^{-i\theta} J\tilde{K}$$

De (III.4.1), vemos que o efeito deste operador sobre as funções z^m , $m \in \mathbb{Z}$, é dado por

$$(III.4.2) \quad \hat{K}z^m = \begin{cases} -ir^2 |m+1| z^{-m}, & m \in \mathbb{Z}^* \\ -ir^2 \cdot 1, & m = 0 \end{cases}$$

de onde segue

$$(III.4.3) \quad (\hat{K})^2 z^m = ir^{2|m+1|} \hat{K} z^{-m} = r^{2(|m+1|+|m-1|)} z^m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Podemos concluir que os sub espaços gerados pelas potências z^m e z^{-m} são invariantes por $\hat{K}$, portanto as autofunções deste operador serão combinações lineares delas.

Descreveremos as autofunções de $\hat{K}$ (não esquecer o fato de que $\hat{K}$ é um operador antilinear).

Com efeito, de (III.4.2) segue

$$(III.4.4) \quad \begin{aligned} \hat{K} (r^{-1} z^m \pm r z^{-m}) &= -ir^{2m} (r z^{-m} \pm r^{-1} z^m) \\ &= \pm ir^{2m} (r^{-1} z^m \pm r z^{-m}), \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

e

$$\hat{K}.1 = -ir^2.1, \quad m = 0$$

Logo $\{1, [r^{-1} z^m \pm r z^{-m}]\}_{m=1}^{+\infty}$ é o conjunto de todas as autofunções de $\hat{K}$.

Agora, vamos mostrar que o conjunto $\{1, [r^{-1} z^m \pm r z^{-m}]\}_{m=1}^{+\infty}$ é ortonormal em $\langle, \rangle$. Em primeiro lugar, achemos o efeito do operador $\tilde{K}$ sobre este conjunto.

Pela definição de $\hat{K}$, temos $\tilde{K} = J e^{i\theta} z^{-1} \hat{K}$. De (III.4.4), segue

$$\begin{aligned}
 \text{(III.4.5)} \quad \tilde{K} (r^{-1} z^m \pm r z^{-m}) &= J e^{i\theta} z^{-1} \tilde{K} (r^{-1} z^m \pm r z^{-m}) \\
 &= \frac{i r^{2m} e^{-i\theta}}{\bar{z}} (r^{-1} \bar{z}^m \pm r \bar{z}^{-m}), \quad m \geq 1
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{(III.4.6)} \quad \tilde{K}.1 &= J e^{i\theta} z^{-1} \tilde{K}.1 \\
 &= \frac{i r^2 e^{-i\theta}}{\bar{z}}, \quad m = 0
 \end{aligned}$$

Definamos as funções $A_m^\pm$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ por

$$\begin{aligned}
 A_m^\pm &= r^{-1} z^m \pm r z^{-m}, \quad m \geq 1 \\
 &= 1, \quad m = 0
 \end{aligned}$$

Temos o seguinte resultado

Lema III.4.1

$$\langle A_m^\pm, A_n^\pm \rangle = \|A_m^\pm\| \delta_{m,n}, \quad \text{onde}$$

$$\|A_m^\pm\| = \begin{cases} 2\sqrt{\pi} r^m, & m=n, m \geq 1 \\ \sqrt{2\pi} r, & m=n=0 \end{cases}$$

Prova - Seja $m \neq n$, $m, n > 0$. De (III.4.5)

$$\begin{aligned}
 \langle A_m^\pm, A_n^\pm \rangle &= (A_m^\pm, \tilde{K} A_n^\pm) \\
 &= \pm i r^{2m} \int_{\Gamma} (r^{-1} \bar{z}^m \pm r \bar{z}^{-m}) (r^{-1} \bar{z}^n \pm r \bar{z}^{-n}) \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \\
 &= \pm i r^{2m} \int_{\Gamma} (r^{-1} z^m \pm r z^{-m}) (r^{-1} z^n \pm r z^{-n}) \frac{dz}{z} \\
 &= \pm i r^{2m} \int_{\Gamma} (r^{-2} z^{m+n} + r^2 z^{-(m+n)} \pm z^{-m+n} \pm z^{m-n}) \frac{dz}{z}
 \end{aligned}$$

Se $m+n > 0$ as integrais $\int_{\Gamma} z^{m+n} \frac{dz}{z}$ e $\int_{\Gamma} z^{-(m+n)} \frac{dz}{z}$ são nulas.

Por outro lado, como $m \neq n$ e positivos, temos

$$\int_{\Gamma} z^{-m+n} \frac{dz}{z} = \int_{\Gamma} z^{m-n} \frac{dz}{z} = 0$$

Então

$$\langle A_m^{\pm}, A_n^{\pm} \rangle = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$$

No caso $m \geq 1$ e $n = 0$, de (III.4.6) tem-se

$$\begin{aligned} \langle A_m^{\pm}, A_0 \rangle &= (A_m^{\pm}, \tilde{K} A_0) \\ &= \int_{\Gamma} (r^{-1} \bar{z}^m \pm r \bar{z}^{-m}) \frac{ir^2 e^{-i\theta}}{\bar{z}} ds \\ &= ir^2 \int_{\Gamma} (r^{-1} z^m \pm r z^{-m}) \frac{dz}{z} = 0 \end{aligned}$$

No caso $m, n > 0$; $n = m$

$$\begin{aligned} \langle A_m^{\pm}, A_m^{\pm} \rangle &= (A_m^{\pm}, \tilde{K} A_m^{\pm}) \\ &= \int_{\Gamma} (r^{-1} \bar{z}^m \pm r \bar{z}^{-m}) \left(\frac{\pm ir^{2m}}{\bar{z}} (r \bar{z}^1 \bar{z}^m \pm r \bar{z}^{-m}) \right) d\bar{z} \\ &= \pm ir^{2m} \int_{\Gamma} \bar{z}^{-1} (r^{-1} \bar{z}^m \pm r \bar{z}^{-m})^2 d\bar{z} \\ &= \pm ir^{2m} \int_{\Gamma} (r^{-2} \bar{z}^{2m-1} \pm 2 + r^2 \bar{z}^{-2m-1}) d\bar{z} \\ &= \pm 2ir^{2m} \int_{\Gamma} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \end{aligned}$$

$$\text{pois, } \int_{\Gamma} z^{2m-1} dz = \int_{\Gamma} z^{-2m-1} dz = 0 \quad \text{para } m \geq 1.$$

Logo

$$\langle A_m^+, A_m^+ \rangle = 4\pi r^{2m}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \langle A_m^+, A_m^- \rangle &= (A_m^+, \tilde{K} A_m^-) \\
 &= \int_{\Gamma} (r^{-1} \bar{z}^m + r \bar{z}^{-m}) \left(-\frac{ir^{2m}}{\bar{z}} (r^{-1} \bar{z}^{-m} - r \bar{z}^{-m}) e^{-i\theta} \right) ds \\
 &= -ir^{2m} \overline{\int_{\Gamma} (r^{-2} z^{2m} - r^2 z^{-2m}) \frac{dz}{z}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Se $m = 0$, temos

$$\begin{aligned}
 \langle A_0, A_0 \rangle &= (A_0, \tilde{K} A_0) \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{ir^2 e^{-i\theta}}{\bar{z}} ds \\
 &= ir^2 \overline{\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}} \\
 &= 2\pi r^2
 \end{aligned}$$

Dai, obtemos

$$\|A_m^{\pm}\| = \begin{cases} 2\sqrt{\pi} r^m, & m \geq 1 \\ \sqrt{2\pi} r, & m = 0 \end{cases}$$

Portanto

$$\langle A_m^{\pm}, A_n^{\pm} \rangle = \|A_m^{\pm}\|^2 \delta_{m,n}$$

Como queríamos demonstrar.

Segue-se do lema anterior que o conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} r}, \frac{1}{2\sqrt{\pi} r^m} [r^{-1} z^m \pm r z^{-m}] \right\}_{m=1}^{+\infty} \text{ é ortonormal em } H_r(\Gamma, \langle, \rangle).$$

Ele é uma base ortonormal de $H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$, pois gera a base $\{\theta_m\}$.

Note que, quando $r \rightarrow 1$ obtemos o conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \frac{i}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Sen} m\theta \right\}_{m=1}^{+\infty}$$

ortonormal em $L^2(S^1)$, como na teoria clássica.

Faremos mais simples a notação, escrevendo

$$\alpha_m^\pm = \frac{1}{2\sqrt{\pi}r^m} [r^{-1}z^m \pm rz^{-m}], \quad m \geq 1$$

e

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}r}$$

Observação

Uma primeira observação é que o operador $e^{i\theta} \tilde{K}$ aplica funções analíticas em funções anti-analíticas.

Com efeito, de (III.4.5) e (III.4.6) segue

$$(III.4.7) \quad (e^{i\theta} \tilde{K}) . 1 = \frac{ir^2 . 1}{\bar{z}}$$

e

$$(III.4.8) \quad (e^{i\theta} \tilde{K}) . [r^{-1}z^m \pm rz^{-m}] = \pm \frac{ir^{2m}}{\bar{z}} [r^{-1}\bar{z}^m \pm r\bar{z}^{-m}]$$

de onde,

$$[e^{i\theta} \tilde{K}] (\alpha_m^\pm) = \pm \frac{i}{\bar{z}} r^{2m} \bar{\alpha}_m^\pm, \quad m \geq 1$$

e

$$[e^{i\theta} \tilde{K}] (\alpha_0) = \frac{i}{\bar{z}} r^2 \alpha_0$$

Então a representação do operador linear $e^{i\theta} \tilde{\mathbb{K}}$ do espaço das funções analíticas com base $(\alpha_0, \alpha_m^+)_{m=1}^{+\infty}$ mp espaço das funções anti-analíticas com base $(\alpha_0, \bar{\alpha}_m^-)_{m=1}^{+\infty}$ é dada pela matriz

$$(e^{i\theta} \tilde{\mathbb{K}}) = \frac{i}{z} \begin{bmatrix} m & \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r^{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r^2 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Oval} \end{array} \\ 0 & r^2 & \\ -m & \begin{array}{c} \text{Oval} \end{array} & \begin{array}{c} -r^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -r^{2m} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \end{bmatrix}$$

0

onde $0 < r < 1$. Quando $r \rightarrow 1$, obtemos

$$\tilde{\mathbb{K}} = i \begin{bmatrix} m & \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Oval} \end{array} \\ 0 & 1 & \\ -m & \begin{array}{c} \text{Oval} \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -1 \\ \cdot \end{array} \end{bmatrix}$$

0

5. Caracterizações do Completamento de $H_r(\Gamma, <, >)$

Por Mergelyan, dada $f \in C(\Gamma)$ existe uma sequência $\left\{ R_N = \sum_{n=-N}^N a_n^N z^n \right\}$ de funções racionais com polos em $0 \in \Omega$ (no interior de Γ) e em Ω que converge uniformemente para f em Γ .

Usando a fórmula integral de Cauchy, pelo dito acima segue

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_N}{z^{m+1}} dz \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f}{z^{m+1}} dz := a_m$$

Por definição a série de Laurent formal de f é

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

Esta série é puramente formal. Mas dada a curva Γ e escolhidas a origem no seu interior Ω e o disco $D(0; r) \subset \Omega$, $0 < r < 1$, mostraremos que a série converge no sentido de $H_r(\Gamma, <, >)$. Observe primeiramente, que valem as inclusões contínuas

$$C(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset \hat{H}_r(\Gamma, <, >);$$

isto vem de (III.2.1). De onde $R_N \rightarrow f$ em $L^2(\Gamma)$ e portanto $R_N \rightarrow f$ em $\hat{H}_r(\Gamma, <, >)$.

Em particular $\langle R_N, \theta_m \rangle \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \langle f, \theta_m \rangle$, mas

$$\begin{aligned}
\langle R_N, \theta_m \rangle &= (R_N, \tilde{K} \theta_m) = i r^{|m+1|+|m|} \int_{\Gamma} \bar{R}_N \bar{\theta}_{-(m+1)} d\bar{z} \\
&= \frac{i r^{|m+1|}}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{\Gamma} R_N z^{-(m+1)} dz} \\
&= \frac{i r^{|m+1|}}{\sqrt{2\pi}} (-2\pi i) a_m^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi} r^{|m+1|} \bar{a}_m
\end{aligned}$$

pelo resultado anterior.

Logo

$$(III.5.1) \quad \langle f, \theta_m \rangle = \sqrt{2\pi} r^{|m+1|} \bar{a}_m \quad \text{e} \quad \langle \theta_m, f \rangle_{\theta_m} = a_m z^m$$

portanto

$$(III.5.2) \quad f = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^m \quad \text{em} \quad \hat{H}_r(\Gamma, <, >)$$

Daí, segue o resultado

Teorema III.5.1 - A série formal de Laurent de $f \in C(\Gamma)$ converge a f no sentido de $\hat{H}_r(\Gamma, <, >)$.

Note que nossa construção permite definir série de Laurent não só para $f \in C(\Gamma)$ mas para todo elemento de $\hat{H}_r(\Gamma, <, >)$.

Agora, considere $f \in C(\Gamma)$. Seja $a > 0$ o raio do maior disco aberto contido em Ω e $b > 0$ o raio do menor disco contendo Γ .

Teorema III.5.2 - Para todo $r < \min(a, \frac{1}{b})$, tem-se

$$(III.5.3) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{2|n+1|} |a_n|^2 < +\infty$$

Prova - Usar a identidade de Parseval em relação à base or-
tonormal $\{\theta_n\}$ combinado com (III.5.1)

No caso especial $\Gamma = S^1$ e $r \rightarrow 1$, temos que

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

é a série de Fourier de $f \in C(S^1)$ com $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$.

Logo $L^2(S^1) = \hat{H}_1(S^1, \langle, \rangle)$.

Outra caracterização de $H_r(\Gamma, <, >)$

Dada a curva Γ e escolhidas a origem no seu interior Ω e o disco $D(0; r) \subset \Omega$, $0 < r < 1$, considere a função $h \in \hat{H}_r(\Gamma, <, >)$ com série

$$(III.5.4) \quad h = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$$

Tomando $|z| = \rho < r$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz em $H_r(\Gamma, <, >)$ e de (III.5.3) tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \rho^m &= \sum_{m=0}^{+\infty} (r^m |a_m| \left(\frac{\rho}{r}\right)^m) \leq \\ &\leq \left(\sum_{m=0}^{+\infty} r^{2m} |a_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2m} \right)^{1/2} < +\infty \end{aligned}$$

Logo, o raio de convergência R_i da série (III.5.4), satisfaz $R_i \geq r$.

Analogamente, dada uma função $g \in \hat{H}_r(\Gamma, <, >)$ com série

$$(III.5.5) \quad g = \sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m} z^{-m}$$

temos que se $|z| = \rho_1 > r^{-1}$; da desigualdade de Cauchy-Schwarz em $H_r(\Gamma, <, >)$ e de (III.5.3) segue

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} |a_{-m}| \rho_1^{-m} &= \sum_{m=1}^{+\infty} (r^m |a_{-m}| (r \rho_1)^{-m}) \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^{+\infty} r^{2m} |a_{-m}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} (r \rho_1)^{-2m} \right)^{1/2} < +\infty \end{aligned}$$

De onde, o raio de convergência R_e da série (III.5.5) satisfaz $R_e \leq r^{-1}$.

Em consequência,

$$\hat{H}_r(\Gamma, <, >) \subset A(D(0; r)) \cap A(D(\infty; r^{-1}))$$

Nosso objetivo agora é caracterizar o espaço $\hat{H}_r(\Gamma, <, >)$ no sentido das normas $L^2(S_r)$ e $L^2(S_{r-1})$.

Seja $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \in \hat{H}_r(\Gamma, <, >)$, temos

$$w_f^i(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{e} \quad w_f^e(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n}$$

com

$$(III.5.6) \quad \|w_f^i\|_{L^2(S_r)}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} |a_n|^2 < +\infty$$

$$(III.5.7) \quad \|w_f^e\|_{L^2(S_{r-1})}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{-2n} |a_{-n}|^2 < +\infty$$

Se $0 < \rho < r$, defina

$$w_{f,\rho}^i(z) := w_r^i\left(\frac{\rho}{r}z\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n z^n \in L^2(S_r)$$

segue de $|\frac{\rho}{r}a_n| < |a_n|$ combinado com (III.5.6)

Mostraremos que $\|w_f^i - w_{f,\rho}^i\|_{L^2(S_r)} \longrightarrow 0$ quando

$\rho \rightarrow r$

Pela identidade de Parseval em $L^2(S_r)$, tem-se

$$\begin{aligned} \|w_r^i - w_{f,\rho}^i\|_{L^2(S_r)}^2 &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n z^n \right\|_{L^2(S_r)}^2 \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n [1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^n] z^n \right\|_{L^2(S_r)}^2 \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} [1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^n]^2 \end{aligned}$$

Por (III.5.6), dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(III.5.8) \quad 2\pi \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Note que se $N \geq n$, tem-se $[1 - (\frac{\rho}{r})^n] < [1 - (\frac{\rho}{r})^N]$
então

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} [1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^n]^2 &< 2\pi [1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^N]^2 \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \leq \\ &\leq 2\pi M [1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^N]^2 \end{aligned}$$

onde M é soma da série em (III.5.6).

Como $\lim_{\rho \rightarrow r} [1 - (\frac{\rho}{r})^N]^2 = 0$, dado $\varepsilon > 0 \exists 0 < \rho_0 < r$;

$\rho_0 < \rho < r$ tal que

$$1 - \left(\frac{\rho_0}{r}\right)^N < \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi M}}$$

Então,

$$(III.5.9) \quad 2\pi \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} [1 - (\frac{\rho}{r})^n]^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Segue-se, de (III.5.8) e (III.5.9) que dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $0 < \rho_0 < r$ tal que $\rho_0 < \rho < r$ implica

$$\|w_f^i - w_{f,\rho}^i\|_{L^2(S_r)}^2 < \varepsilon^2$$

Analogamente, se $0 < \rho < r$ defina

$$w_{f,\rho}^e(z) := w_f^e(\frac{r}{\rho} z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (\frac{\rho}{r})^n z^{-n}$$

Note que $w_{f,\rho}^e \in L^2(S_{r^{-1}})$.

Mostraremos que $\|w_f^e - w_{f,\rho}^e\|_{L^2(S_{r^{-1}})}^2 \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow r$

Usando a identidade de Parseval em $L^2(S_{r^{-1}})$, tem-se

$$\begin{aligned} \|w_f^e(z) - w_{f,\rho}^e(z)\|_{L^2(S_{r^{-1}})}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (\frac{\rho}{r})^n z^{-n} \right\|_{L^2(S_{r^{-1}})}^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} [1 - (\frac{\rho}{r})^n] a_{-n} z^{-n} \right\|_{L^2(S_{r^{-1}})}^2 \\ &= 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} [1 - (\frac{\rho}{r})^n]^2 |a_{-n}|^2 r^{-2n} \end{aligned}$$

Por (III.5.7), dado $\varepsilon_1 > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(III.5.10) \quad 2\pi \sum_{n=N_1+1}^{+\infty} |a_{-n}|^2 r^{-2n} < \frac{\varepsilon_1^2}{2}$$

Por outro lado, pelo mesmo raciocínio feito na demonstração anterior tem-se

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{n=1}^N [1 - (\frac{\rho}{r})^n]^2 |a_{-n}|^2 r^{-2n} &< 2\pi [1 - (\frac{\rho}{r})^{N_1}] \sum_{n=1}^N |a_{-n}|^2 r^{-2n} \leq \\ &\leq 2\pi M_1 [1 - (\frac{\rho}{r})^{N_1}]^2 \end{aligned}$$

onde M_1 é a série em (III.5.7)

Como $[1 - (\frac{\rho}{r})^{N_1}]^2 \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow r$, temos para $\varepsilon_1 > 0$ existe $0 > \rho'_0 < r$; $\rho'_0 < \rho < r$ e

$$1 - (\frac{\rho_0}{r})^{N_1} < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{4\pi M_1}}$$

Então,

$$(III.5.11) \quad 2\pi \sum_{n=1}^N |a_{-n}|^2 r^{-2n} [1 - (\frac{\rho}{r})^n]^2 < \frac{\varepsilon_1^2}{2}$$

Segue-se de (III.5.10) e (III.5.11) que dado $\varepsilon_1 > 0$ $\exists$ $0 < \rho'_0 < r$ tal que $\rho'_0 < \rho < r$ implica

$$\|w_f^e - w_{f,\rho}^e\|_{L^2(S_{r^{-1}})}^2 < \varepsilon_1^2$$

Observe que dada uma função $f \in H_r(\Gamma, \langle, \rangle)$ a função w_f^i além de ser analítica no disco $D(0;r)$ ela é o limite de funções analíticas no disco $D(0;\rho)$, com $\rho < r$, no sentido de $L^2(S_r)$ quando $\rho \rightarrow r$. Analogamente, w_f^e é analítica no disco $D(0;r^{-1})$ e é o limite de funções analíticas no disco

$D(0; \rho'^{-1})$, $\rho' < r$, no sentido de $L^2(S_{r-1})$ quando $\rho' \rightarrow r$.

Denotemos por

$$\Pi^+ = A(D(0; r)) \cap L^2(S_r)^+$$

e

$$\Pi^- = A(D(\infty; r^{-1})) \cap L^2(S_{r-1})^-$$

onde as intersecções são no sentido do parágrafo anterior e

$$L^2(S_r)^+ = L^2(S_r) \cap_{n \geq 0} \quad \text{e} \quad L^2(S_{r-1})^- = L^2(S_{r-1}) \cap_{n < 0}.$$

Portanto

$$(III.5.12) \quad \hat{H}_r(\Gamma, <, >) \subset \Pi^+ \cap \Pi^-$$

Na verdade, temos uma igualdade em (III.5.12). Com efeito, seja $f \in \Pi^+ \cap \Pi^-$, $f = g + h$; $g \in \Pi^+$ e $h \in \Pi^-$. Se $g \in \Pi^+$, temos

$$(III.5.13) \quad g = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\sqrt{2\pi} r^{(n+1)}) \theta_n$$

Seja $0 < \rho < r$ e defina

$$(III.5.14) \quad g_\rho(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2\pi} a_n r^{n+1}) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \theta_n$$

De (III.1.1), pela proposição (III.1.1) temos

$$\|g - g_\rho\|_{H_r(\Gamma, <, >)}^2 = r \|g - g_\rho\|_{L^2(S_r)}^2$$

então, $g_{\rho} \frac{L^2(S_r)}{\rho \rightarrow r} g$ implica $g_{\rho} \frac{H_r(\Gamma, <, >)}{\rho \rightarrow r} g$

Segue-se, usando a identidade de Parseval em relação a base ortonormal $\{\theta_n\}$ combinado com o resultado de acima,

$$2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2n} |a_n|^2 r^{2(n+1)} = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^{2n} r^2 |a_n|^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow r}$$

$$2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2(n+1)} |a_n|^2 < +\infty$$

Se $h \in \Pi^-$, temos

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2\pi} a_{-n} r^{(1-n)} \theta_{-n}$$

Para $0 < \rho < r$, defina

$$h_{\rho}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{2\pi} a_{-n} r^{1-n}) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \theta_{-n}$$

De (III.1.1), pela proposição (III.1.1), temos

$$\|h - h_{\rho}\|_{H_r(\Gamma, <, >)}^2 = r^{-1} \|h - h_{\rho}\|_{L^2(S_{r^{-1}})}^2$$

segue, $h_{\rho} \frac{L^2(S_{r^{-1}})}{\rho \rightarrow r} h$ implica $h_{\rho} \frac{H_r(\Gamma, <, >)}{\rho \rightarrow r} h$. Usando a identidade de Parseval em relação a base ortonormal $\{\theta_n\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2n} |a_{-n}|^2 r^{2(n-1)} &= 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n r^{-2} |a_{-n}|^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow r} \\
&\longrightarrow 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}|^2 r^{2(n-1)} < +\infty
\end{aligned}$$

De (III.5.15) e (III.5.16), segue

$$2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2|n+1|} < +\infty$$

Portanto $f \in \hat{H}_r(\Gamma, <, >)$. De onde

$$\hat{H}_r(\Gamma, <, >) \supset \Pi^+ \cap \Pi^-$$

Em consequência, temos o

Teorema (III.5.3) $\hat{H}_r(\Gamma, <, >) = \Pi^+ \cap \Pi^-$

Note que, dada a condição

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{2|n+1|} |a_n|^2 < +\infty$$

vamos ter uma família infinita de curvas satisfazendo a condição

(III.5.17) $D(0; r) \subset \Omega \subset D(0; r^{-1})$

Proposição (III.5.1) - Para quaisquer curvas Γ e Γ' satisfazendo (III.5.17), tem-se

$$\hat{H}_r(\Gamma, <, >) \cong \hat{H}_r(\Gamma', <, >')$$

onde $\cong :=$ isomorfismo de espaços de Hilbert.

Prova - Considere duas curvas Γ e Γ' que satisfazem a condição (III.5.17).

Seja $f \in R(\Gamma) = \{g: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}; g \text{ é uma função racional com polos em } 0 \text{ e no } \infty\}$.

Temos que, conhecer $f \in R(\Gamma)$ determina conhecer $f \in R(\Gamma')$ e como

$$\|f\|_{H_r(\Gamma, <, >)} = \|f\|_{H_r(\Gamma', <, >')}$$

então, existe uma isometria A de $R(\Gamma, <, >)$ sobre $R(\Gamma', <, >')$. Sendo $R(\Gamma)$ e $R(\Gamma')$ denso em $C(\Gamma)$ e $C(\Gamma')$, respectivamente, podemos estender a isometria A aos completamentos, i.e., existe um isomorfismo isométrico de $H_\Gamma(\Gamma, <, >)$ em $H_{\Gamma'}(\Gamma', <, >')$.

Logo está demonstrada a proposição.

6. Construção de um Espaço de Hilbert de Funções Analíticas

Em primeiro lugar, é conveniente fazer a seguinte observação: existem funções analíticas em $D(0;1)$ definidas por

$$(III.6.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| < 1$$

que não podemos estender analiticamente a nenhum domínio contendo $D(0;1)$ propriamente. Por exemplo, as séries "Lacunares" são do tipo (III.6.1) tal que a "maioria" dos coeficientes c_n são nulos, isto é, as séries "Lacunares" são da forma

$$(III.6.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad a_k \neq 0$$

onde

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{n_k} = 0.$$

Esta última condição é suficiente para que a série não possua uma extensão analítica a nenhum domínio $\mathcal{D} \supset D(0;1)$. Este resultado é estabelecido no Teorema do "gap" de Hadamard cujo enun-

ciado é

Teorema (Ver [1], pag. 88, teorema II.7.1) - As séries (III.6.2) tem o círculo de convergência como fronteira natural sempre que exista um número fixo $\lambda > 1$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda$$

Dada uma curva Γ com $0 \in \Omega$ e $0 < r < 1$, construiremos um espaço de Hilbert de funções analíticas em $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Pelo Teorema (III.5.1)

$$\hat{H}_r(\Gamma, <, >) = \Pi^+ \cap \Pi^-$$

Se $f \in \hat{H}_r(\Gamma, <, >)$, temos $w_f^i \in \Pi^+$ e $w_f^e \in \Pi^-$. Note que w_f^i e w_f^e nem sempre possuem extensões analíticas para todo o domínio Ω e $\bar{\Omega}^c$ respectivamente.

Consideremos o conjunto

$$\bigcap_{z_0 \in \Omega} \hat{H}(\Gamma, z_0, r_{z_0}, <, >_{z_0})$$

onde $\hat{H}(\Gamma, z_0, r_{z_0}, <, >_{z_0}) = \Pi_{z_0}^+ \cap \Pi_{z_0}^-$ com $\Pi_{z_0}^+ = A(D(z_0; r_{z_0})) \cap L^2(S_{r_{z_0}})$ e $\Pi_{z_0}^- = A(D(z_0; r_{z_0}^{-1})^c) \cap L^2(S_{r_{z_0}^{-1}})$, $0 < r_{z_0} < 1$.

Agora, aplique a transformação conforme $z \mapsto \frac{1}{z}$ à curva Γ , como no desenho.

Então, todo $z \in \bar{\Omega}^c$ é levado por esta transformação em $z' = \frac{1}{z} \in \Omega'$. Considere o conjunto

$$(III.6.3) \quad \bigcap_{z'_0 \in \Omega'} \hat{H}(\Gamma', z'_0, r'_{z'_0}, <, >_{z'_0})$$

onde os espaços $\hat{H}(\Gamma', z'_0, r'_{z'_0}, <, >_{z'_0})$ estão definidos de modo análogo aos espaços $\hat{H}(\Gamma, z_0, r_{z_0}, <, >_{z_0})$.

Por aplicação da transformação conforme $z' \mapsto \frac{1}{z}$, o conjunto definido em (III.6.3) é levado em

$$(III.6.4) \quad \bigcap_{z_0 \in \bar{\Omega}^c} \hat{H}(\Gamma, z_0, r_{z_0}^{-1}, <, >_{z_0})$$

Note que os produtos internos em (III.6.3) e (III.6.4) são os mesmos.

Dada a cobertura aberta $\mathcal{Q} = \{D(z_0; r_{z_0})\}$ de Ω , e a cobertura aberta $\mathcal{Q}' = \{D(z'_0; r_{z'_0})\}_{z'_0 \in \Omega'}$ de Ω' , pelo Teorema de Lindelöf, existem subcoberturas enumeráveis

$$\Omega \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} D(z_n; r_n) \quad \text{e} \quad \Omega' \subseteq \bigcup_{m=1}^{+\infty} D(z'_m; r_m)$$

Porém, a imagem da cobertura enumerável $\bigcup_{m=1}^{+\infty} D(z'_m; r_m)$ de Ω' pela aplicação $z' \rightarrow \frac{1}{z'} = z$ é uma cobertura enumerável de $\bar{\Omega}^C$. Desde que a cada espaço $\hat{H}(\Gamma, z_n, r_{z_n}, \langle, \rangle_{z_n})$ se associa um disco $D(z_n; r_{z_n})$ (o mesmo acontece com os espaços $H(\Gamma', z'_m, r_m, \langle, \rangle_{z'_m})$) obtemos o conjunto enumerável $\{\hat{H}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ de espaços, onde $\hat{H}_n = \hat{H}(\Gamma, z_n, r_n, \langle, \rangle_{z_n})$, $z_n \in \Omega$. Analogamente, obtemos o conjunto enumerável $\{\hat{H}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ de espaços, onde $\hat{H}_m = H(\Gamma, z_m, r_m^{-1}, \langle, \rangle_{z_m})$, $z_m \in \bar{\Omega}^C$.

Tomando

$$\mathcal{H}^i = \{g \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \hat{H}_n ; g \equiv 0 \text{ em } \bar{\Omega}^C\}$$

$$\mathcal{H}^e = \{h \in \bigcup_{m=1}^{+\infty} \hat{H}_m ; h \equiv 0 \text{ em } \Omega\}$$

definamos

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}^i \dot{\cup} \mathcal{H}^e$$

onde $\dot{\cup} :=$ união disjunta

Note que por construção, toda $g \in \mathcal{H}^i$ é analítica em Ω e toda $h \in \mathcal{H}^e$ é analítica em $\bar{\Omega}^C$.

Considere o conjunto enumerável

$$\{\hat{H}_j ; \hat{H}_j = \hat{H}_n \text{ se } j \text{ é ímpar e } \hat{H}_j = \hat{H}_m \text{ se } j \text{ é par}\}_{j=1}^{+\infty}$$

Vamos munir o espaço $\mathcal{H}$ de um produto interno tal que ele seja completo em relação à norma definida por esse produto interno.

Defina uma função $\langle, \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ de modo análogo ao produto interno no espaço H_j , i.é., por

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = (f, \tilde{K}_{\mathcal{H}} g) \quad f, g \in \mathcal{H}$$

onde $\tilde{K}_{\mathcal{H}}$ seja um operador integral expresso em termos dos operadores integrais $\tilde{K}_j$ que definem o produto interno em cada espaço $\hat{H}_j$. Desde que as propriedades do operador $\tilde{K}_j$ depende das propriedades de seu núcleo $\tilde{K}_j$, é natural definir o operador $\tilde{K}_{\mathcal{H}}$ por

$$(III.6.5) \quad \tilde{K}_{\mathcal{H}} (f(\zeta)) = \int_{\Gamma} \tilde{K}_{\mathcal{H}} (\zeta, \zeta') f(\zeta') ds' \quad , \quad f \in \mathcal{H}$$

onde o núcleo $\tilde{K}_{\mathcal{H}}$ é da forma

$$(III.6.6) \quad \tilde{K}_{\mathcal{H}} (\zeta, \zeta') = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \tilde{K}_j (\zeta, \zeta') \quad , \quad (\zeta, \zeta') \in \Gamma \times \Gamma$$

com coeficientes c_j apropriados tal que a série (III.6.6) convirja uniforme e absolutamente em $\Gamma \times \Gamma$. Portanto, deve-se achar um majorante para o módulo dos núcleos $\tilde{K}_j$.

Se j é ímpar, $\hat{H}_j = \hat{H}_n \in \mathcal{H}^1$ e o núcleo $\tilde{K}_j$ está dado por

$$\tilde{K}_j(\zeta, \zeta') = \frac{r_j}{4\pi^2} \oint_{C(z_j; r_j)} \frac{e^{i(\theta(\zeta') - \theta(\zeta))}}{(\bar{\zeta} - \bar{z})(\zeta' - z)} ds$$

isto, pela definição de $\mathcal{H}^i$. Assim,

$$|\tilde{K}_j(\zeta, \zeta')| \leq \frac{r_j}{4\pi^2} \oint_{C(z_j; r_j)} \frac{ds}{|\bar{\zeta} - \bar{z}| |\zeta' - z|}$$

como $\zeta, \zeta' \in \Gamma$ e $z \in C(z_j; r_j)$ onde $0 < r_j < 1$ então

$d_j \leq |\bar{\zeta} - \bar{z}|$ e $d_j \leq |\zeta' - z|$, onde $d_j = \text{dist}(C(z_j; r_j), \Gamma) > 0$.

Portanto

$$|\tilde{K}_j(\zeta, \zeta')| \leq \frac{r_j}{4\pi^2 d_j^2} \oint_{C(z_j; r_j)} ds = \frac{r_j^2}{2\pi d_j^2} < \frac{1}{d_j^2}$$

Então

$$(III.6.7) \quad |\tilde{K}_j(\zeta, \zeta')| < \frac{1}{d_j^2} \text{ para todo } j \text{ ímpar.}$$

Agora, se j é par, tem-se $\hat{H}_j = H_m \in \mathcal{H}^e$. Desde que o espaço $\hat{H}(\Gamma', z'_0, r_{z'_0}, \langle, \rangle_{z'_0})$ e sua imagem $\hat{H}(\Gamma, 1/z'_0, r_{z'_0}, \langle, \rangle_{1/z'_0})$ pela

transformação conforme $z' \longrightarrow \frac{1}{z'}$ possuem o mesmo produto interno, basta analisar o núcleo $\tilde{K}_j$ para o produto interno do espaço $\hat{H}(\Gamma', z'_0, r_{z'_0}, <, >_{z'_0})$, isto, pela definição de $\mathcal{H}^e$.

Analogamente ao caso em que j é ímpar, a expressão do núcleo $\tilde{K}_j$ está dado por

$$K_j\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta'}\right) = \frac{r'_j}{4\pi^2} \oint_{C(z'_j; r'_j)} \frac{e^{i(\theta(1/\zeta') - \theta(1/\zeta))}}{\left(\frac{1}{\zeta} - \bar{z}'\right)\left(\frac{1}{\zeta'} - z'\right)} ds.$$

Então

$$|\tilde{K}_j\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta'}\right)| \leq \frac{r'_j}{4\pi^2} \oint_{C(z'_j; r'_j)} \frac{ds}{\left|\frac{1}{\zeta} - \bar{z}'\right| \left|\frac{1}{\zeta'} - z'\right|}$$

Como $1/\zeta, 1/\zeta' \in \Gamma'$ e $z' \in C(z'_j; r'_j)$ onde $0 < r'_j < 1$, temos

que $d'_j \leq \left|\frac{1}{\zeta} - \bar{z}'\right|$ e $d'_j \leq \left|\frac{1}{\zeta'} - z'\right|$. Portanto

$$|\tilde{K}_j\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta'}\right)| \leq \frac{r'_j}{4\pi^2 d_j'^2} \oint_{C(z'_j; r'_j)} ds = \frac{r_j'^2}{2\pi d_j'^2} < \frac{1}{d_j'^2}$$

Então

$$(III.6.8) \quad |\tilde{K}_j(\frac{1}{\zeta}, \frac{1}{\zeta'})| < \frac{1}{d_j'^2} \quad \text{para todo } j \text{ par, e todo}$$

$$(\zeta, \zeta') \in \Gamma \times \Gamma.$$

Tomando $\delta_j = \min\{d_j, d_j'\}$, de (III.6.7) e (III.6.8), segue-se

$$|\tilde{K}_j(\zeta, \zeta')| < \frac{1}{\delta_j^2} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}^+.$$

Portanto, basta tomar $c_j = \frac{\delta_j^2}{2^j}$ para que a série em (III.6.6) convirja uniforme e absolutamente em $\Gamma \times \Gamma$. De fato,

$$\left| \sum_{j=12}^{+\infty} \frac{\delta_j^2}{2^j} K_j(\zeta, \zeta') \right| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\delta_j^2}{2^j} |\tilde{K}_j(\zeta, \zeta')| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < +\infty.$$

Em consequência, a função $\langle, \rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ definido por

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Gamma} f(\zeta) [\tilde{K}_{\mathcal{H}}(g(\zeta))] ds$$

onde o núcleo $\tilde{K}_{\mathcal{H}}$ do operador integral $\tilde{K}_{\mathcal{H}}$ é da forma

$$(III.6.9) \quad \tilde{K}_{\mathcal{H}}(\zeta, \zeta') = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\delta_j^2}{2^j} K_j(\zeta, \zeta') \quad \text{para todo}$$

$$(\zeta, \zeta') \in \Gamma \times \Gamma$$

é um produto interno para $\mathcal{H}$.

Logo, a norma que provém deste produto interno,

$\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, estará dado por

$$(III.6.10) \quad \|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\delta_j^2}{2^j} \|f\|_{\hat{H}_j}^2 \quad \text{para toda } f \in$$

onde

$$\|f\|_{\hat{H}_j}^2 = 2\pi \sum_{m=-}^{+\infty} r_j^{2|m+1|} |a_{j,m}|^2.$$

Finalmente, provaremos que o espaço $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert.

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$, de (III.6.10) temos que

$\|f_p - f_q\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ quando $p, q \rightarrow +\infty$ implica $\|f_p - f_q\|_{\hat{H}_j} \rightarrow 0$ quando $p, q \rightarrow +\infty$.

No espaço $\hat{H}_j$, se j é ímpar, temos:

$$\|f_p - f_q\|_{\hat{H}_j} = \|w_{f_p}^i - w_{f_q}^i\|_{\hat{H}_j}$$

Segue da definição dos espaços $\hat{H}_j$ e $\mathcal{H}^i$. E como $\hat{H}_j$ é um espaço completo existe $g_j \in \hat{H}_j$; $g_j \equiv 0$ em Ω^c e $\|w_{f_p}^i - g_j\|_{\hat{H}_j} \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow +\infty$.

Se j é par, da definição dos espaços $\hat{H}_j$ e $\mathcal{H}^e$, segue

$$\|f_p - f_q\|_{\hat{H}_j} = \|w_{f_p}^e - w_{f_q}^e\|_{\hat{H}_j}$$

Pelo mesmo raciocínio que anteriormente, existe $h_j \in \hat{H}_j$; $h_j \equiv 0$ em Ω e $\|w_{f_p}^e - h_j\|_{\hat{H}_j} \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow +\infty$.

Defina $g := g_j$ em $\hat{H}_j$, j ímpar e $h := h_j$ em $\hat{H}_j$, j par.
 Vemos que $g \in \mathcal{H}^i$ e $h \in \mathcal{H}^e$.

Tomando $f = g+h$. Segue-se $\|f_p - f\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0$ quando
 $p \longrightarrow +\infty$. Logo $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert.

ooo

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO À FORMA DIFERENCIAL $\bar{z}dz$

Nosso objetivo neste capítulo é utilizar alguns dos resultados do Capítulo III para determinar quando a integral

$$(IV.1) \quad \int_{\Gamma} h(\zeta) \bar{\zeta} d\zeta$$

é diferente de zero, onde h é uma função positiva sobre a curva fechada simples Γ . Veremos que isto vai depender da geometria da curva Γ .

Em primeiro lugar, vejamos que relação existe entre a integral dada em (IV.1) e o produto interno definido no Capítulo III.

Considere a função 1, de (III.3.2) segue

$$(\tilde{\mathbb{K}} 1)(\zeta(s)) = i r^2 \bar{\zeta}(s)^{-1} e^{-i\theta(\zeta(s))}$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } \zeta(s) = \rho e^{i\theta(\zeta(s))}, \text{ então } \bar{\zeta}^{-1}(s) &= \frac{1}{\rho} e^{i\theta(\zeta(s))} = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \bar{\zeta}(s) \text{ onde } \rho = \rho(s) > 0, \text{ portanto} \end{aligned}$$

$$(IV.2) \quad (\tilde{\mathbb{K}} 1)(\zeta(s)) = i \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \bar{\zeta}(s) e^{-i\theta(\zeta(s))}$$

Seja h uma função positiva então $\rho^2 h$ é uma função positiva e temos

$$\langle \rho^2 h, 1 \rangle = \int_{\Gamma} \rho^2 h(\zeta(s)) (\tilde{\mathbb{K}} 1)(\zeta(s)) ds$$

Substituindo (IV.1) no segundo membro da igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 h, 1 \rangle &= ir^2 \int_{\Gamma} \bar{h}(\zeta) \zeta d\bar{\zeta} \\ &= \overline{-ir^2 \int_{\Gamma} h(\zeta) \bar{\zeta} d\zeta} \end{aligned}$$

Então

$$(IV.3) \quad \int_{\Gamma} h(\zeta) \bar{\zeta} d\zeta = \frac{i}{r^2} \overline{\langle \rho^2 h, 1 \rangle}$$

de onde

$$(IV.4) \quad \operatorname{Im} \left(\int_{\Gamma} h(\zeta) \bar{\zeta} d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r^2} \langle \rho^2 h, 1 \rangle \right)$$

Por outro lado, sabemos que

$$(\tilde{K} 1)(\zeta(s)) = \int_{\Gamma} \tilde{K}(\zeta, \zeta') ds'$$

onde

$$\hat{K}(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}\zeta' - r^2} - \frac{r^{-2}}{\bar{\zeta}\zeta' - r^{-2}} \right) e^{i(\theta' - \theta)} \quad \text{para todo } (\zeta, \zeta') \in \Gamma \times \Gamma.$$

Escreva $\tilde{K}(\zeta, \zeta')$ da seguinte forma

$$K(\zeta, \zeta') = K_I(\zeta, \zeta') + K_E(\zeta, \zeta') \quad (\zeta, \zeta') \in \Gamma \times \Gamma$$

onde

$$\tilde{K}_I(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r^2}{\zeta \bar{\zeta}' - r^2} e^{i(\theta' - \theta)}, \quad e$$

$$\tilde{K}_E(\zeta, \zeta') = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r^{-2}}{\bar{\zeta} \zeta' - r^{-2}} e^{i(\theta' - \theta)}.$$

Como a função $1 \in A(\Omega)$, onde Ω é a região limitada por Γ , tem-se

$$(\tilde{K}1)(\zeta(s)) = \int_{\Gamma} \tilde{K}_I(\zeta, \zeta') ds'.$$

Assim, estamos interessados em saber quando $\text{Re}(\tilde{K}_I)$, a parte real de $\tilde{K}_I$ possui sinal constante, Seja $\bar{\zeta} = \rho e^{-i\gamma}$ e $\zeta' = \rho' e^{i\gamma'}$

então

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_I(\zeta, \zeta') &= \frac{r^2}{2\pi} \cdot \frac{e^{i(\theta' - \theta)}}{\rho\rho' e^{-i(\gamma - \gamma')} - r^2} \\
 &= \frac{r^2}{2\pi} \left(\frac{\cos(\theta' - \theta) + i \sin(\theta' - \theta)}{(\rho\rho' \cos(\gamma - \gamma') - r^2) - i\rho\rho' \sin(\gamma - \gamma')} \right) \\
 &= \frac{r^2}{2\pi} \left(\frac{(\rho\rho' \cos((\gamma - \theta) - (\gamma' - \theta')) - r^2 \cos(\theta' - \theta))}{(\rho\rho')^2 - 2\rho\rho' r^2 \cos(\gamma - \gamma') + r^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i(\rho\rho' \sin((\gamma - \theta) - (\gamma' - \theta')) - r^2 \sin(\theta' - \theta))}{(\rho\rho')^2 - 2\rho\rho' r^2 \cos(\gamma - \gamma') + r^4} \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, a parte real de $\tilde{K}_I(\zeta, \zeta')$ está dada por

$$\operatorname{Re}(\tilde{K}_I(\zeta, \zeta')) = \frac{r^2}{2\pi} \left[\frac{\rho\rho' \cos((\gamma - \theta) - (\gamma' - \theta')) - r^2 \cos(\theta' - \theta)}{(\rho\rho')^2 - 2\rho\rho' r^2 \cos(\gamma - \gamma') + r^4} \right].$$

Se $\rho_0 = \min\{\rho, \rho'\}$, temos

$$\begin{aligned}
 &\rho\rho' \cos((\gamma - \theta) - (\gamma' - \theta')) - r^2 \cos(\theta' - \theta) \geq \\
 &\geq \rho_0^2 \cos((\gamma - \theta) - (\gamma' - \theta')) - r^2
 \end{aligned}$$

Suponha que Γ é uma curva que satisfaz

$$\cos((\gamma - \theta) - (\gamma' - \theta')) > \frac{r^2}{\rho_0^2};$$

tomando $\delta_0 = \arccos\left(\frac{r^2}{\rho_0^2}\right)$, segue $0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2}$

de onde

(IV.5)

$$|(\gamma - \theta) - (\gamma' - \theta')| < \delta_0$$

Note que, dado um ângulo fixo Δ_0 , uma curva Γ' que satisfaz

$$(IV.6) \quad |(\gamma - \theta) - \Delta_0| < \frac{\delta_0}{2}$$

também satisfaz (IV.5). Segue-se que o conjunto de curvas Γ' que satisfazem (IV.6) definem uma vizinhança $V(\Gamma)$ de classe C^1 de Γ onde $\text{Re}(\tilde{K}_I)$ possui sinal constante.

No caso $\Gamma = S^1$, temos $\delta_0 = 0$ e $\Delta_0 = \frac{\pi}{2}$.

De (IV.4), segue-se que

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} \bar{h}(\zeta) \bar{\zeta} d\zeta$$

possui sinal constante, se a curva Γ satisfaz (IV.5) e portanto para toda curva Γ' na vizinhança. $V(\Gamma)$.

oOo

BIBLIOGRAFIA

- [1] Hille, E. . Analytic Functions Theory, Vol. II. Gin and Company, Boston, 1962.
- [2] Hönig, Ch.S. . Análise Funcional e o Problema de Sturn-Liouville. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2ª Edição, Rio de Janeiro, 1971.
- [3] Mikhlin, S.G. . Integral Equations and Their Appplications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology. Pergamon Press, London, 1957.
- [4] Monakov, V.N. Boundary - Value Problems with Free Boundaries for Elliptics Systems of Equations. Translations of Mathematical Monographs, 57. Providence - R.I. AMS, 1983.
- [5] Mukherjea, A. and Pothoven, K. . Real and Funcional Analysis. Plemun Press, New York, 1978.
- [6] Rudin, W. . Real and Complex Analysis, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1983.