ALGUNS ASPECTOS DE DINÂMICA
DE FOLHEAÇÕES

Carlos Corrêa Filho

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
NO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: Geometria
Orientador: **Prof. Dr. Cláudio Possani**

– São Paulo, março de 1995 –

ALGUNS ASPECTOS DE DINÂMICA DE FOLHEAÇÕES

Este exemplar corresponde à redação
da dissertação devidamente corrigida
e apresentada por Carlos Corrêa Filho e aprovada
pela Comissão Julgadora

São Paulo, 10 de março de 1995

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Cláudio Possani (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito - IME-USP
- Prof. Dr. Carlos Frederico B. Palmeira - PUC-RJ

Resumo

Neste trabalho introduziremos dois conceitos fundamentais da chamada dinâmica de folheações: o de entropia geométrica e a expansividade para folheações em variedades compactas, conceitos estes que generalizam, de uma certa maneira, os conceitos de entropia e expansividade existentes para fluxos. Desenvolveremos os principais resultados sobre entropia geométrica e expansividade, caracterizando totalmente tais noções para folheações de codimensão 1. Iremos então demonstrar que se uma folheação (em codimensão qualquer) é expansiva, então, sua entropia geométrica é necessariamente positiva.

Abstract

In this work we study two basic concepts in the theory of foliations from the dynamical viewpoint: geometric entropy and expansiveness for foliations of compact manifolds. These concepts generalize the classical notions of entropy and expansiveness for dynamical systems.

We develop the basic theory concerning these ideas, and then we study the codimension one foliations with details.

Finally we prove that a expansive foliation, of any codimension, has positive entropy.

Agradecimentos

A todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Agradecimentos especiais:

- Prof. Cláudio Possani, pelo paciente trabalho de orientação, pela indicação deste trabalho, e pela amizade;
- Prof. Alfredo Jorge Aragona Vallejo, pela sua amizade e pelo incentivo dado para o término deste trabalho;
- Prof. Francisco Rui Tavares de Almeida, pela sua amizade, seu constante interesse e apoio;
- Renata Grunberg, pelo seu companheirismo e pela força dada ao longo de todos estes últimos anos;
- Ao pessoal da biblioteca em geral, que me auxiliaram sempre e que me “aguentaram” por todos esses anos;
- Ao Walter, pela digitação;
- Aos meus pais e meu irmão, por tudo;
- À Rosângela Toledo Kulcsar, pelo seu carinho, companheirismo, compreensão, pela força dada, sem os quais dificilmente este trabalho seria realizado.

À Rosângela

Índice

Introdução	1
Capítulo 1	
Folheações e conceitos básicos	4
1.1 Introdução	4
1.2 Definições e exemplos	4
1.3 Topologia das folheações	18
1.4 Holonomia	25
1.5 Minimais locais, níveis e crescimento de folhas	29
Capítulo 2	
Entropia geométrica das folheações	36
2.1 Introdução	36
2.2 Entropia de um pseudogrupo de homeomorfismos	37
2.3 Entropia de um pseudogrupo de holonomia	45
2.4 Entropia geométrica de uma folheação	52
2.5 Entropia de folheações de codimensão 1	69
2.6 Comentários finais	92
Capítulo 3	
Folheações expansivas	94
3.1 Introdução	94
3.2 Folheações expansivas de codimensão 1	94
3.3 Folheações expansivas de codimensão maior que 1	95
Referências	117

Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo de dois conceitos fundamentais da chamada dinâmica de folheações: o de entropia geométrica e o de expansividade para folheações definidas em variedades compactas. O conceito de entropia geométrica apareceu pela primeira vez no artigo de E. Ghys, R. Langevin e P. Walczak, “Entropie geometrique des feuilletages”, de 1988 ([G;L;W]). Já a definição de expansividade para folheações aparece pela primeira vez no artigo “Expansive foliations”, de T. Inaba e N. Tsuchiya ([I;T]), em 1992.

No Capítulo 1, iremos expor as principais definições e resultados necessários da teoria clássica de folheações, todos sem demonstração. Procuramos incluir os principais exemplos conhecidos e que usaremos posteriormente ao longo do texto. O material deste capítulo é mais do que o suficiente para a leitura dos demais, embora pressupomos que o leitor seja familiarizado com as idéias e resultados fundamentais sobre variedades diferenciáveis, geometria riemanniana e topologia algébrica.

No Capítulo 2, definiremos, como em [G;L;W], a noção de entropia relacionada com pseudogrupos de homeomorfismos em espaços métricos compactos e usaremos tal noção para definir uma entropia para folheações em variedades compactas, entropia essa relacionada aos diversos pseudogrupos de holonomia para a folheação. Tal noção de entropia generaliza, como veremos, aquela dada por Rufus Bowen em [Bo-1] para aplicações uniformemente contínuas em espaços métricos compactos via (n, ε) -separação. A seguir, daremos a definição de entropia geométrica para folheações em variedades compactas

(que de uma certa maneira generaliza a noção de entropia topológica existente para fluxos) e demonstraremos a estreita relação existente entre esta entropia e aquela dada em relação aos pseudogrupos de holonomia da folheação. Iremos ainda neste capítulo dar uma condição necessária e suficiente para que a entropia geométrica de uma folheação de codimensão 1 seja positiva: a existência de uma folha-mola. Procuramos dar vários exemplos de folheações com entropia geométrica positiva e nula.

No Capítulo 3, definiremos expansividade para folheações de codimensão 1. Novamente uma definição que generaliza a idéia correspondente para fluxos, como aquela dada por Bowen em [Bo-2]. Demonstraremos então que uma tal folheação é expansiva se e somente se certas condições sobre a topologia da folheação estiverem verificadas. Decorre daí que se uma folheação de codimensão 1 for expansiva, então ela terá uma folha-mola, ou seja, que sua entropia geométrica é positiva. Para codimensão maior do que 1, os resultados obtidos são mais restritos: definiremos a noção de forte expansividade e daremos uma condição necessária para que a folheação seja fortemente expansiva. Ainda neste caso demonstraremos que a forte-expansividade é condição suficiente para que a entropia geométrica de tais folheações seja positiva. Daremos então um exemplo de uma folheação com entropia geométrica positiva mas não expansiva.

Omitiremos neste trabalho, por motivos alheios à nossa vontade, a demonstração de que a entropia geométrica de uma folheação orientável de dimensão 1 coincide com o dobro da entropia topológica do fluxo unitário e sem singularidades induzido na variedade pela folheação. Ao leitor interessado, remetemos a [G;L;W], teorema 3.2. Iremos omitir ainda um possível estudo sobre a relação existente entre a entropia geométrica e o invariante de Godbillon-Vey da folheação, por supormos que tal estudo fugiria dos objetivos deste trabalho. Pelos mesmos motivos, não nos aprofundamos no estudo da relação existente entre expansividade de fluxos e folheações.

Recentemente, no artigo “Some invariants measuring dynamics of codimension-one

foliations” (Universidade de Tokyo, preprint, fevereiro de 1994), R. Langevin e P. Walczak introduziram alguns invariantes medindo a complexidade da dinâmica de folheações de codimensão 1, comparando alguns desses invariantes com a entropia geométrica. Outros trabalhos recentes na área são [Eg], [Hu], [LW].

Capítulo 1

Folheações e conceitos básicos

1.1 Introdução

O objetivo deste primeiro capítulo é desenvolver a teoria básica das folheações, sem a preocupação em demonstrar os resultados (o leitor encontrará ao longo do texto as referências necessárias). Nos três primeiros parágrafos expomos o que já é considerado a teoria clássica das folheações (exemplos clássicos, topologia das folheações, holonomia); apenas o último parágrafo contém conceitos e resultados mais recentes (cerca de duas décadas), que serão, no entanto, necessários posteriormente.

Para a leitura deste primeiro capítulo, o leitor deve ser familiarizado com os conceitos básicos da teoria das variedades diferenciáveis e da geometria riemanniana; nada que não possa ser encontrado nos textos de [Lima-1] e [Car]. No que diz respeito às folheações, porém, o texto é mais que auto-suficiente para a leitura dos capítulos posteriores.

1.2 Definições e exemplos

Nosso objetivo neste parágrafo é fazer uma exposição rápida, sem demonstrações, da definição de folheação e de alguns resultados e exemplos básicos. Para um maior aprofundamento nos fatos que aqui expomos, sugerimos ao leitor os textos [Ca, Lins] e [Lima-1].

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^∞ .

Definição 1.1 Uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão q (ou de dimensão p , onde $p + q = m$) e classe C^r está definida por uma coleção de cartas locais

$$U_i \subset M \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^m, \quad i \in I$$

da variedade tais que

- (1) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$;
- (2) se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $h_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ tem a forma $h_{ji}(x, y) = (h^1(x, y), h^2(y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{m-q} \times \mathbb{R}^q$. Além disso, as h_{ij} são de classe C^r (ver figura 1.1).

Figura 1.1

As componentes conexas de $\varphi_i^{-1}(x, y_0)$, com $y_0 \in \mathbb{R}^q$ sendo constantes, são denominadas as placas de $\mathcal{F}$ em U_i , ou simplesmente placas de U_i . Elas são subvariedades mergulhadas de U_i de codimensão q . A condição (2) expressa que se $\alpha_i \subset U_i$, $\beta_j \subset U_j$ são placas, então ou $\alpha_i \cap \beta_j = \emptyset$ ou $\alpha_i \cap \beta_j$ é aberto em α_i e β_j .

Uma folha L de $\mathcal{F}$ é um subconjunto conexo, que é união maximal de placas de $\mathcal{F}$, isto é, se L é uma folha e α é uma placa com $\alpha \cap L \neq \emptyset$, então $\alpha \subset L$. Da definição segue que toda folha é uma variedade imersa de codimensão q e que M é a união disjunta das folhas de $\mathcal{F}$. Assim, uma folheação $\mathcal{F}$ sobre M induz sobre esta uma partição em subvariedades conexas e disjuntas, de codimensão q , que são “localmente paralelas”, em um sentido que se torna preciso pela definição acima.

As folhas de $\mathcal{F}$ podem não ser subvariedades mergulhadas; de fato, uma folha L de $\mathcal{F}$ pode vir a ser (localmente) densa em M .

Se $\pi_2 : \mathbb{R}^{m-q} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ é a segunda projeção $\pi_2(x, y) = y$, definimos $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ por $f_i = \pi_2 \circ \varphi_i$. As placas de U_i são então as componentes conexas de $f_i^{-1}(y_0)$, para cada $y_0 \in \mathbb{R}^q$. Podemos tomar a seguinte definição equivalente de folheação:

Definição 1.2 *Uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão q e classe C^r está definida por uma coleção de submersões*

$$U_i \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}^q, \quad i \in I,$$

tais que:

- (1) para todo $i \in I$, U_i é aberto em M e $\bigcup_{i \in I} U_i = M$;
- (2) se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existem homeomorfismos de classe C^r , $g_{ji} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$, tais que $f_j = g_{ji} \circ f_i$ em $U_i \cap U_j$ (veja Figura 1.2).

As aplicações f_i são denominadas aplicações distinguidas de $\mathcal{F}$ e as subvariedades $f_i^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^q$, placas de U_i . É claro que as definições 1.1 e 1.2 são equivalentes (veja [Ca-Lima], p.28).

Se denotarmos cada ponto $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$, decorre da definição 1.1 que as mudanças de coordenadas h_{ji} são tais que

$$\frac{\partial(h_{ji}^k)}{\partial x_l} = 0 \quad \text{se} \quad m - p + 1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq l \leq p,$$

Figura 1.2

onde $h_{ji} = (h_{ji}^1, h_{ji}^2, \dots, h_{ji}^m)$.

Dado um inteiro positivo $p \leq m$, uma distribuição P , de dimensão p sobre M , é definida pela associação, a cada ponto $x \in M$, de um subespaço vetorial P_x de dimensão p do espaço tangente $T_x M$. A distribuição P é C^∞ se para todo $x_0 \in M$ existir uma vizinhança aberta U de x_0 e p campos de vetores C^∞ , $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_p$ sobre U , cujos valores geram P_x para cada $x \in U$.

Seja P uma distribuição de dimensão p , C^∞ sobre M . Um campo de vetores $\vec{X}$, de classe C^∞ , é tangente a P se, para cada $x \in M$, $\vec{X}(x) \in P_x$ (se $\vec{X}$ e P estivessem definidos apenas em um aberto $U \subset M$, as definições seriam análogas). O conjunto Ω_p de todos os campos vetoriais $\vec{X}$ desta forma é um submódulo do módulo $\Omega(M)$ de todos os campos de vetores classe C^∞ sobre o anel das funções classe C^∞ definidas em M . Diremos que Ω_p é o submódulo dos campos de vetores associados a P e, se $\vec{X} \in \Omega_p$, simplesmente diremos que $\vec{X}$ é um campo associado a P .

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão q e classe C^∞ sobre M , e seja $p = m - q$. Para cada $x \in M$, seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma carta da folheação $\mathcal{F}$, cujo domínio U contém x , e seja $(x^1, \dots, x^{m-q}, y^1, \dots, y^q)$ as correspondentes coordenadas por φ . Seja P_x o subespaço vetorial de dimensão p de $T_x M$ gerado pelos vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x^p}(x)$. É claro que a distribuição P assim definida não depende da carta escolhida e é C^∞ . P é dita a distribuição associada à folheação $\mathcal{F}$ e P determina completamente $\mathcal{F}$. Muitas vezes denotaremos P_x por $T_x \mathcal{F}$ (e P por $T\mathcal{F}$).

Consideremos uma cobertura de M por abertos $\{U_i\}_{i \in I}$ tal que, para cada $i \in I$, a restrição $P|_{U_i}$ é definida por p campos de vetores (contínuos) $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_p$. Para cada $x \in U_i$, as bases $B_x = \{\vec{X}_1(x), \dots, \vec{X}_p(x)\}$ e $B'_x = \{-\vec{X}_1(x), \vec{X}_2(x), \dots, \vec{X}_p(x)\}$ definem duas orientações distintas de P_x , digamos, $O_i^+(x)$ e $O_i^-(x)$. Dizemos que a escolha de O é contínua se $O|_{U_i} = O_i^+$ para todo i e se, sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $O_i^+ = O_j^+$ na intersecção. Se $p = \dim(M)$ e $P_x = T_x M$ diremos que M é orientável.

Sejam $\widetilde{M} = \{(x, O) | x \in M \text{ e } O \text{ é uma das orientações de } P_x\}$. Seja $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ a projeção $\pi(x, O) = x$. Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x) = \{(x, O), (x, -O)\}$, onde O é uma das orientações em P_x e $-O$ a outra. Dado $(x_0, O_0) \in \widetilde{M}$, seja U vizinhança de x_0 em M onde está definida uma orientação contínua O de $P|_U$ (podemos supor $O(x_0) = O_0$). Definimos então uma vizinhança V de (x_0, O_0) em $\widetilde{M}$ como $V = \{(x, O(x)) | x \in U\}$. É fácil ver que o conjunto de todos os V construídos desta maneira formam uma base de abertos para uma topologia em $\widetilde{M}$ que torna π um homeomorfismo local. Pode então ser demonstrado que podemos definir em $\widetilde{M}$ uma estrutura diferenciável C^∞ , compatível com a topologia co-induzida por π e tal que π é um difeomorfismo local C^∞ . O recobrimento duplo orientável de P é então, por definição a distribuição $\pi^*(P)$ definida em cada x por

$$\pi^*(P_x) = D^{-1}(\pi_x) \cdot P_{\pi(x)} .$$

Temos então o seguinte resultado, cuja demonstração encontramos em [Ca; Lins] (p.37):

Teorema 1.1 *Suponhamos que M é conexa e seja P uma distribuição de dimensão p contínua em M . Seja $(\widetilde{M}, \pi, \pi^*(p))$ o recobrimento duplo de P . Então:*

(a) $\pi^*(P)$ é orientável;

(b) $\widetilde{M}$ é conexa se e somente se P é não orientável. $\square$

Corolário 1.1 *Se M é simplesmente conexa, então toda distribuição p -dimensional é orientável ($1 \leq p \leq \dim(M)$). Em particular, M é orientável. $\square$*

Dada uma distribuição p -dimensional em M , diremos que $\tilde{P}$ é uma distribuição complementar ou transversal a P se, para todo $x \in M$, tivermos $P_x + \tilde{P}_x = T_x M$ e $P_x \cap \tilde{P}_x = \{0\}$. É claro que $\tilde{P}$ é uma distribuição de codimensão p . Por exemplo, fixemos em M uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Coloquemos $P_x^\perp = \{v \in T_x M \mid \langle u, v \rangle_x = 0, \forall u \in P_x\}$. É claro que $P^\perp$ é então uma distribuição complementar à distribuição P , de mesma classe de diferenciabilidade.

Se P é uma distribuição contínua de dimensão p , diremos que P é transversalmente orientável se existe uma distribuição complementar e contínua a P , que seja orientável.

Pode ser provado que se P é transversalmente orientável, qualquer distribuição contínua e complementar de P é orientável.

Teorema 1.2 *Seja P uma distribuição de dimensão p e classe C^r em M . Valem então as propriedades:*

(a) *se P é orientável e transversalmente orientável, então M é orientável;*

(b) *se M é orientável, então P é orientável se e somente se é transversalmente orientável.* $\square$

Uma folheação $\mathcal{F}$, classe C^r ($r \geq 1$) é orientável se a distribuição $T\mathcal{F}$ for orientável. Similarmente, $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável se $T\mathcal{F}$ for transversalmente orientável.

Se $\mathcal{F}$ não for orientável (respectivamente, transversalmente orientável) podemos considerar o recobrimento duplo orientável de $T\mathcal{F}$ (respectivamente, de $T\mathcal{F}^t$, onde $T\mathcal{F}^t$ é uma distribuição transversal a $T\mathcal{F}$). Essa construção é usada na demonstração de muitos teoremas na teoria das folheações a fim de reduzir os argumentos ao caso em que P é orientável ou transversalmente orientável.

Resumindo tudo o que foi dito acima, podemos dizer que toda folheação $\mathcal{F}$ de dimensão p e classe C^r ($r \geq 1$) define uma distribuição de dimensão p e classe C^{r-1} , tangente à $\mathcal{F}$. Além do mais, sempre podemos tomar tal distribuição orientável.

Em particular, se M não admitir uma tal distribuição então M não possui uma folheação de dimensão p .

Nem sempre uma distribuição P de dimensão p definida em M nos dá uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão p tal que P seja tangente a $\mathcal{F}$. Uma condição necessária e suficiente para que tal aconteça nos é dada pelo teorema de Frobenius, o qual enunciamos a seguir. Antes, algumas definições; diremos que uma distribuição P é involutiva se, dados dois campos de vetores $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ tais que, para todo $x \in M$, $\vec{X}(x)$ e $\vec{Y}(x)$ pertencem à P_x , então $[\vec{X}, \vec{Y}](x) \in P_x$, onde $[\vec{X}, \vec{Y}]$ é o colchete de Lie dos campos $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ (para a definição de colchete de Lie veja, por exemplo, [Car] ou [Lima-3]).

Teorema 1.3 (Frobenius) *Seja P uma distribuição de dimensão p e classe C^r , $r \geq 1$ em M . Se P é involutiva então existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão p e classe C^r em M tal que $T_x\mathcal{F} = P_x$, $\forall x \in M$. Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ é uma folheação de classe C^r e P é a distribuição tangente à $\mathcal{F}$, então P é involutiva.* $\square$

Em particular, se $p = 1$, P é sempre involutiva. Neste caso, o teorema se reduz ao teorema de existência e unicidade das soluções de uma equação diferencial ordinária.

Muitas vezes diremos também que uma distribuição involutiva é completamente integrável.

Pode ser demonstrado o seguinte: uma distribuição de codimensão q e classe C^r ($r \geq 0$) pode ser definida localmente como núcleo de q 1-formas linearmente independentes de classe C^r . Reciprocamente, se $\omega^1, \dots, \omega^q$ são 1-formas de classe C^r linearmente independentes, então $P_x = \{v \in T_x M | \omega_x^1(v) = \dots = \omega_x^q(v) = 0\}$ define uma distribuição de codimensão q e classe C^r . Isto sugere que deve haver uma formulação do teorema de Frobenius em termos de formas diferenciais. Com efeito, tal versão é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 1.4 (Frobenius, 2ª versão) *Seja P uma distribuição de codimensão q e classe C^r definida em um aberto $U \subset M$ por q 1-formas de classe C^r linearmente independentes $\omega^1, \dots, \omega^q$. Então P é involutivo se e somente se para todo $j \in \{1, \dots, q\}$ tivermos*

$$d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^q = 0 .$$

□

Na sequência, daremos alguns exemplos básicos de folheações que nos serão úteis na sequência deste trabalho.

Exemplo 1.1 Folheações definidas por submersões:

Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão de classe C^r . Então, pela forma local das submersões e pela definição 1.2, é fácil ver que f define uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r e de codimensão $= \dim N$ sobre M onde as folhas de $\mathcal{F}$ são as componentes conexas de $f^{-1}(c)$, $c \in N$; é claro que as folhas de $\mathcal{F}$ são mergulhadas. Além disso, se para todo $c \in \text{Im } f \subset N$, $f^{-1}(c)$ é conexa, diremos que a folheação $\mathcal{F}$ sobre M é simples.

O exemplo mais trivial de uma folheação definida por submersão é o da folheação em $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, dada pela segunda projeção $\pi_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$. Neste caso, cada folha da folheação $\mathcal{F}$ é o “plano” p -dimensional $\mathbb{R}^p \times \{c\}$ ($c \in \mathbb{R}^q$).

É claro que tal folheação é simples.

Outro exemplo interessante de folheação determinada por uma submersão é o seguinte: seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^r e codimensão q sobre uma variedade M e seja (U, f) uma carta distinguida para $\mathcal{F}$, como na definição 1.2. Então a submersão $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ define uma folheação sobre U , a saber, a folheação restrição de $\mathcal{F}$ sobre U ($\mathcal{F}|_U$), onde as placas de U são as folhas de $\mathcal{F}|_U$. É claro que tal folheação é simples.

Um exemplo mais específico é o seguinte: seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ com $g(1) = 0$, $g(0) = 1$ e se $t > 0$ então $g'(t) < 0$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = g(x^2 + y^2) \cdot e^z$. É fácil ver que f é uma submersão C^∞ . Seja $\mathcal{F}$ a folheação do $\mathbb{R}^3$ definida por f . Se $c \in \mathbb{R}$ é positivo, a folha $f^{-1}(c)$ é o gráfico da função $u : D^2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$) dada por $u(x, y) = \ln(c/g(x^2 + y^2))$. Tal folha então é homeomorfa ao $\mathbb{R}^2$. Se $c = 0$, $f^{-1}(c)$ é o cilindro $c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ e as folhas $f^{-1}(c)$, se $c < 0$, são todas homeomorfas ao cilindro c (ver figura a seguir).

Figura 1.3

Uma observação: se $\mathcal{F}$ é uma folheação simples de M definida por uma submersão

$f : M \rightarrow N$ então é fácil ver que o quociente $M/\mathcal{F}$ pode ser identificado com $f(M) \subset N$, pois neste caso a topologia de $f(M)$ é exatamente a topologia quociente e sua estrutura de variedade é totalmente determinada pela condição de que a projeção canônica $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ seja uma submersão. Porém, se $\mathcal{F}$ não é simples, nem sempre esta identificação pode ser feita (consulte, por exemplo, [Mo], cap. I).

Exemplo 1.2 Se N e M são variedades diferenciáveis e $\mathcal{F}$ é uma folheação em M , diremos que uma aplicação diferenciável $g : N \rightarrow M$ é transversal à $\mathcal{F}$ se para todo $p \in N$ tivermos:

$$Dg(p).T_p N + T_q(\mathcal{F}) = T_q M$$

(onde $q = g(p)$ e $T_q(\mathcal{F})$ o espaço tangente à folha de $\mathcal{F}$ passando por q).

O teorema abaixo (cuja demonstração pode ser encontrada em [Ca; Lins], p.32) nos dá então uma gama variada de exemplos de folheações.

Teorema 1.5 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de M de classe C^r e $g : N \rightarrow M$ de classe C^r que é transversal a $\mathcal{F}$. Então existe uma única folheação $g^*(\mathcal{F})$ em N de classe C^r e cuja codimensão é igual à codimensão de $\mathcal{F}$ em M cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos $g^{-1}(L)$, onde L é uma folha de $\mathcal{F}$.*

Exemplo 1.3 (Folheação de Reeb do toro $D^2 \times S^1$) Consideremos a submersão $f : D^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \exp(-\exp[1 - (x^2 + y^2)]^{-1}). \exp(z) = \exp(-\exp[1 - (x^2 + y^2)]^{-1} + z) .$$

Pelo exemplo 1.1 f define sobre $D^2 \times \mathbb{R}$ uma folheação cujas folhas são os gráficos das funções: $z = \exp[1 - (x^2 + y^2)]^{-1} + k$ (onde $k \in \mathbb{R}$) e se estende a uma folheação C^∞ do $\mathbb{R}^3$ cujas folhas no exterior de $D^2 \times \mathbb{R}$ são os cilindros $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, onde $r > 1$ (ver figura abaixo).

Figura 1.4

Agora, em $D^2 \times [0, 1]$ identificamos os pontos do bordo da seguinte maneira: $(x, y, 1) \sim (x_1, y_1, 0)$ se e somente se $(x, y) = (x_1, y_1)$. A variedade quociente $D^2 \times [0, 1] / \sim$ é difeomorfa ao toro $D^2 \times S^1$ e como a folheação definida em $D^2 \times \mathbb{R}$ é invariante por translações ao longo do eixo z , ela induz uma folheação de classe C^∞ em $D^2 \times S^1$, chamada folheação de Reeb (orientável) do toro (ver figura abaixo).

Nesta folheação o bordo $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ é uma folha (compacta) e todas as outras folhas são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e se acumulam apenas no bordo. É claro que esta folheação não é dada (globalmente) por uma submersão.

Exemplo 1.4 Campos de vetores sem singularidades

Seja $\vec{X}$ um campo de vetores classe C^r ($r \geq 1$) sem singularidades sobre uma variedade M . Pelo teorema de existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias, é fácil ver que as curvas integrais do campo $\vec{X}$ definem em M uma folheação de dimensão 1 e classe C^r .

Figura 1.5 Folheação de Reeb do toro $D^2 \times S^1$

Reciprocamente, toda folheação sobre uma variedade M sempre aparece como a família de soluções de um sistema não singular de equações diferenciais. Estudar a folheação é estudar o comportamento global dessas soluções.

Como exemplo específico de uma folheação de dimensão 1 induzida em uma variedade M por um campo de vetores sem singularidades temos a folheação $\mathcal{F}$ obtida pela suspensão de um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$, classe C^r , definida da seguinte maneira: sobre o produto $M \times \mathbb{R}$, consideremos a relação de equivalência dada por $(x, t) \sim (x', t')$ se e somente se $t - t' = n \in \mathbb{Z}$ e $x' = f^n(x)$, onde $f^n = f \circ \dots \circ f$, n vezes, $f^0 = id_M$ e se $n < 0$, $f^n = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$, $|n|$ vezes. Seja $N = M \times \mathbb{R} / \sim$ a variedade quociente com a topologia quociente e $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ a projeção da relação de equivalência. Pode ser então provado que podemos munir N de uma estrutura de variedade diferenciável tal que π seja um difeomorfismo local C^r e $\dim(N) = \dim(M) + 1$.

Em $M \times \mathbb{R}$ consideremos a folheação $\mathcal{F}_0$, cujas folhas são as linhas $\{x\} \times \mathbb{R}$ ($x \in M$),

as quais são tangentes ao campo de vetores $\vec{X}_0(x, t) = (0, 1)$ em $M \times \mathbb{R}$. É claro que $\mathcal{F}_0$ e $\vec{X}_0$ são invariantes pela relação $\sim$. Nestas condições, pode ser demonstrado que existem uma folheação $\mathcal{F}$ e um campo $\vec{X}$ em N tal que $\mathcal{F}_0 = \pi^*(\mathcal{F})$ e $\vec{X}_0 = \pi^*(\vec{X})$. As curvas integrais do campo $\vec{X}$ são as folhas de $\mathcal{F}$. A folheação $\mathcal{F}$ é chamada a suspensão do difeomorfismo f e o campo $\vec{X}$ o campo suspensão de f .

Como um exemplo específico desta situação, consideremos o difeomorfismo $f_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ dado por $f_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z$. Este difeomorfismo é uma rotação do círculo unitário de ângulo $2\pi\alpha$. A suspensão de f_α é uma folheação definida sobre T^2 , a qual denotaremos por $\mathcal{F}_\alpha$. Se $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, p e q inteiros relativamente primos, então todos os pontos de S^1 são periódicos para f ou seja, existe um inteiro n tal que $f_\alpha^n(z) = z$, para todo $z \in S^1$; neste caso, todas as folhas de $\mathcal{F}_\alpha$ são homeomorfas a S^1 e cortam $\pi(S^1 \times \{0\})$ q vezes. Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, pode ser provado que as folhas de $\mathcal{F}_\alpha$ são densas em T^2 (veja, por exemplo, [Pa; Me], cap. I). Suspensões de difeomorfismos nos serão úteis no capítulo 3.

Exemplo 1.5 Espaços fibrados e folheações

Um espaço fibrado (E, π, B, F) é constituído de variedades diferenciáveis E , chamado o espaço total, B a base, e F a fibra do fibrado e uma aplicação diferenciável $\pi : E \rightarrow B$ chamada a projeção do fibrado. Além disso, E possui uma estrutura de produto local definida por uma cobertura $(U_i)_{i \in I}$ de B e por difeomorfismos $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$, $i \in J$, que tornam os diagramas do tipo abaixo comutativos:

$$\begin{array}{ccc} & U_i & \\ \pi \nearrow & & \nwarrow p \\ \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times F \end{array}$$

isto é, $\pi = p \circ \varphi_i$, onde p é a primeira projeção. Em particular π é uma submersão sobre B e E é localmente difeomorfo ao produto de um aberto em B por F .

Se $x \in B$, a subvariedade $F_x = \pi^{-1}(x)$ é chamada a fibra de E sobre x . Admitiremos que todas as variedades e aplicações envolvidas na definição de fibrado são classe C^∞ .

Dados $i, j \in I$ tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, podemos definir $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Dif}(F)$ (onde $\text{Dif}(F)$ é o conjunto dos difeomorfismos de F em F) de forma que a aplicação Φ_{ij} , a qual faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ \varphi_i \swarrow & & \searrow \varphi_j \\ (U_i \cap U_j) \times F & \xrightarrow{\phi_{ij}} & (U_i \cap U_j) \times F \end{array}$$

se escreva $\Phi_{ij}(x, y) = (x, h_{ij}(x, y))$. Para cada $x \in U_i \cap U_j$ a aplicação $h_{ij}^x : F \rightarrow F$ dada por $h_{ij}^x = h_{ij}(x, y)$ é claramente um difeomorfismo. Colocamos então $g_{ij}(x) = h_{ij}^x$. Quando F e as fibras são espaços vetoriais e todos os h_{ij}^x são automorfismos lineares de F , diremos que (E, π, B, F) é um espaço fibrado vetorial.

Diremos que (E, π, b, F) tem grupo estrutural discreto se, para quaisquer i e j , a aplicação $x \rightarrow h_{ij}^x$ é localmente constante. Neste caso, as folheações de $\pi^{-1}(U_i)$ dada pelas submersões

$$\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times F \xrightarrow{q} F, \quad q(x, y) = y.$$

definem as aplicações distinguidas de uma folheação cujas folhas são transversais às fibras de (E, π, B, F) . As placas da folheação em $\pi^{-1}(U_i)$ são os conjuntos $(q \circ \varphi_i)^{-1}(y)$, onde $y \in F$.

Diremos que tais espaços fibrados (E, π, B, F) e (E', π', B, F) são equivalentes se existe um difeomorfismo $f : E \rightarrow E'$ tal que $\pi' \circ f = \pi$ (se os fibrados são vetoriais exigimos que f leve fibras em fibras linearmente).

Pode ser provado que, dado um espaço fibrado (E, π, B, F) existe uma folheação em E transversal às fibras se e somente se (E, π, B, F) é equivalente a um fibrado com grupo estrutural discreto.

Dado um fibrado (E, π, B, F) sempre podemos definir uma folheação em E pela submersão $\pi : E \rightarrow B$; neste caso, para cada $b \in B$, a fibra $\pi^{-1}(b)$ é uma folha desta folheação difeomorfa à F . A codimensão desta folheação é igual à dimensão de B .

Exemplo 1.6 (A folheação de Reeb em S^3)

Consideremos a esfera unitária $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$; S^3 pode ser considerada como a união de dois toros sólidos, T_1 e T_2 , unidos ao longo do bordo por um difeomorfismo que leva meridianos de T_1 em paralelos de T_2 e vice-versa.

Considerando em T_1 e T_2 a folheação de Reeb do exemplo 1.3, obtemos em S^3 a folheação resultante pela união das duas folheações de Reeb de T_1 e T_2 , onde $\partial T_1 \equiv \partial T_2$ é uma folha homeomorfa a $T^2 \cong S^1 \times S^1$. Todas as outras folhas são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e se acumulam na folha compacta acima. Tal folheação é classe C^∞ e codimensão 1. Chamaremos esta folheação de folheação de Reeb do S^3 .

1.3 Topologia das folheações

Neste parágrafo, iremos expor, sem demonstração, os principais resultados sobre a topologia das folheações. As demonstrações de tais fatos podem ser encontradas em [Ca; Lins], [Mo], [God] ou [Reeb].

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão p e classe C^r em uma variedade M . Toda folha L de $\mathcal{F}$ possui naturalmente uma estrutura de variedade C^r e dimensão p tal que o domínio das cartas locais são placas de $\mathcal{F}$. A aplicação $i : L \rightarrow M$ dada por $i(p) = p$ é uma imersão biunívoca, classe C^r , quando em L considerarmos a estrutura de variedade intrínseca dada acima. Assim, L é uma subvariedade conexa imersa em M .

Devemos, porém, notar que nem sempre L é uma subvariedade mergulhada de M . Pode acontecer que a topologia induzida por M em L não coincida com a topologia induzida em L por sua estrutura intrínseca de variedade. Por exemplo, dada uma carta U de M , uma folha L pode interceptar U infinitas vezes se acumulando sobre ela mesma.

Para que L seja uma subvariedade (mergulhada) C^r de M é necessário e suficiente que a inclusão $i : L \rightarrow M$ seja um mergulho. Neste caso diremos que L é uma folha mergulhada ou própria.

Por exemplo, pode ser provado que toda folha L fechada é própria.

Uma subvariedade Σ de M será dita transversal à $\mathcal{F}$ quando Σ é transversal a todas as folhas de $\mathcal{F}$ que ela encontra (para uma definição detalhada de transversalidade veja, por exemplo, [Lima-1]). Pode ser provado que para todo $p \in M$, sempre existe uma secção transversal Σ à $\mathcal{F}$ passando por p , ou seja, uma subvariedade Σ transversal à $\mathcal{F}$ tal que $\dim(\Sigma) + \dim(\mathcal{F}) = \dim(M)$.

Proposição 1.1 (Uniformidade transversal de $\mathcal{F}$) *Seja L uma folha de $\mathcal{F}$. Dados q_1 e q_2 em L , existem secções transversais à $\mathcal{F}$, Σ_1 e Σ_2 com $q_i \in \Sigma_i$ ($i = 1, 2$) e um difeomorfismo, de mesma classe de diferenciabilidade de $\mathcal{F}$, $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, tal que para toda folha L' de $\mathcal{F}$ tem-se $f(L' \cap \Sigma_1) = L' \cap \Sigma_2$ (se $L' \cap \Sigma_1 = \emptyset$ então $L' \cap \Sigma_2 = \emptyset$). $\square$*

Teorema 1.6 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em M , L uma folha de $\mathcal{F}$, e Σ uma secção transversal de $\mathcal{F}$ tal que $\Sigma \cap L \neq \emptyset$. Temos então três possibilidades:*

- (1) $\Sigma \cap L$ é discreto e, neste caso, L é folha própria;
- (2) O fecho de $\Sigma \cap L$ em Σ contém um aberto. Isto ocorre se e somente se o fecho $\overline{L}$ tem interior não vazio e $\text{int}(\overline{L}) = \overline{L} - \partial\overline{L}$ é um aberto que contém L . Neste caso, dizemos que L é localmente densa;
- (3) O fecho $\overline{\Sigma \cap L}$ é um conjunto perfeito com interior vazio. Neste caso, dizemos que L é folha excepcional. $\square$

Teorema 1.7 *Seja L uma folha de uma folheação $\mathcal{F}$ sobre M . As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i) L é fechada;

- (ii) Se (U, φ) é uma carta da folheação $\mathcal{F}$ tal que $\overline{U}$ é compacto então $U \cap L$ contém um número finito de placas de U .
- (iii) A imersão $i : L \rightarrow M$, dada por $i(x) = x$, é própria (devemos lembrar que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é própria quando, para todo compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ é compacto em X). $\square$

Por exemplo, se $\mathcal{F}$ é a folheação de Reeb do toro sólido $D^2 \times S^1$ (ver parágrafo anterior), a única folha própria de $\mathcal{F}$ é a folha compacta homeomorfa a T^2 .

O espaço das folhas de $\mathcal{F}$, $M/\mathcal{F}$, é o espaço quociente de M pela relação de equivalência que identifica dois pontos se eles estiverem na mesma folha de $\mathcal{F}$. Seja $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ a projeção no quociente.

Dado um conjunto $A \subset M$, o saturado (ou o saturamento) de A por $\mathcal{F}$ é o conjunto $S(A)$ de todos os $x \in M$ tal que existe algum $y \in A$ com x e y na mesma folha L de $\mathcal{F}$. É fácil ver que $S(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} L_x$, onde L_x é a folha de $\mathcal{F}$ contendo x .

É facilmente demonstrado que a projeção π acima é uma aplicação aberta e que, conseqüentemente, o saturamento $S(A)$ de um aberto A de M é aberto.

Diremos que um conjunto $A \subset M$ é invariante ou saturado por $\mathcal{F}$ quando o saturado de A por $\mathcal{F}$ é A mesmo, ou seja, quando $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Neste caso, pode ser provado que $\text{int}(A)$, seu fecho $\overline{A}$ e sua fronteira ∂A são também invariantes por $\mathcal{F}$.

Tudo o que foi dito acima nos permite definir em M uma nova topologia, a chamada topologia saturada de M , onde os abertos são os subconjuntos de M que são abertos e saturados por $\mathcal{F}$, ou seja, as imagens inversas por π dos abertos em $M/\mathcal{F}$. Assim, podemos ter em M três topologias distintas, a saber (da menos fina para a mais fina):

- (a) a topologia saturada;
- (b) a topologia intrínseca de M como variedade diferenciável;

(c) a topologia das folhas (uma base de abertos para esta topologia é, conforme já vimos, a família de todas as placas de $\mathcal{F}$ dada pelas cartas locais de $\mathcal{F}$ como na Definição 1.1).

No que segue, o disco de centro na origem e de raio r em $\mathbb{R}^k$ será denotado por D_r^k .

Seja M uma variedade compacta e $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão p sobre M . Um recobrimento distinguido para $\mathcal{F}$ é uma coleção de abertos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ munidos de cartas locais $\varphi_i : U_i \rightarrow D_1^p \times D_1^q$ (q é a codimensão de $\mathcal{F}$ em M), chamadas as cartas distinguidas para $\mathcal{F}$, com as seguintes propriedades:

- (i) $\bigcup_{i=1}^n U_i \supset M$;
- (ii) se $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} \neq \emptyset$, então $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e $U_i \cap U_j$ é conexo.

Diremos, além disso, que o recobrimento distinguido $\mathcal{U}$ (munido de suas cartas distinguidas) é um recobrimento regular para $\mathcal{F}$ se, para cada i , as cartas φ_i se prolongam em difeomorfismos $\overline{\varphi}_i$ definidos em abertos V_i tal que $U_i \subset V_i$ para todo i , $\overline{\varphi}_i : V_i \rightarrow D_2^p \times D_2^q$, onde os V_i e os $\overline{\varphi}_i$ apresentam as seguintes propriedades:

- (i) para cada $c \in D_1^q$, $\varphi_i^{-1}(D_1^p \times \{c\})$ é uma placa de U_i e para todo $c' \in D_2^q$, $\overline{\varphi}_i^{-1}(D_2^p \times \{c'\})$ é uma placa de V_i . Podemos tomar V_i e $\overline{\varphi}_i$ de forma que para cada $c \in D_1^q$, $\overline{\varphi}_i^{-1}(D_2^p \times \{c\})$ é a única placa de V_i que contém a placa $\varphi_i^{-1}(D_1^p \times \{c\})$ de U_i ;
- (ii) se $i \neq j$, cada placa de V_i intercepta (no máximo) uma placa de V_j .

Podemos ainda tomar os U_i e os V_i de forma que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então existe um aberto V_{ij} satisfazendo as condições anteriores de forma que $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} \subset V_{ij}$ (na sequência, porém, nem sempre iremos exigir que esta condição esteja satisfeita).

Uma variedade compacta M possui recobrimentos regulares (finitos) para $\mathcal{F}$ arbitrários; para uma demonstração deste fato e outros detalhes recomendamos ao leitor os textos de [God] e [Reeb].

Seja M uma variedade compacta, $\mathcal{F}$ uma folheação sobre M e $\mathcal{C} = \{U_1, \dots, U_k\}$ uma seqüência de abertos regulares como acima, com a propriedade $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, \dots, k-1$. Seja $x \in U_1$ e P_1 a placa de U_1 passando por x . Se existirem placas $P_i \subset U_i$, $i = 2, 3, \dots, k$, tal que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ (para $i = 1, \dots, k-1$) diremos que $\mathcal{C}$ é uma cadeia de abertos (regulares) para x (às vezes diremos simplesmente que $\mathcal{C}$ é uma cadeia para x). A seqüência de placas $\{P_1, \dots, P_k\}$ será chamada de cadeia de placas para x associada a $\mathcal{C}$. Diremos que o comprimento da cadeia $\mathcal{C}$ é k .

É evidente da definição que se L_x é a folha de $\mathcal{F}$ passando por x , então cada placa P_i da seqüência acima pertence a L_x .

As demonstrações das proposições abaixo podem ser encontradas em [Reeb] ou [Ta]. As folheações abaixo estão definidas em uma variedade compacta M .

Proposição 1.2 *Seja $\mathcal{C} = \{U_1, \dots, U_k\}$ uma cadeia para $x \in U_1$. O conjunto dos $z \in U_1$ para os quais $\mathcal{C}$ também é uma cadeia é um aberto em U_1 .* $\square$

Proposição 1.3 *Seja L_α uma folha de uma folheação $\mathcal{F}$ e x e y pontos em L_α . Então existe uma cadeia de abertos regulares $\mathcal{C} = \{U_1, \dots, U_m\}$ para x com as seguintes propriedades:*

- (i) $x \in U_1$ e $y \in U_m$;
- (ii) *se $z \in U_1$ e $\mathcal{C}$ é uma cadeia para z , seja L_β a folha passando por z . Seja $\{P'_1, \dots, P'_m\}$ a cadeia de placas para z associada a $\mathcal{C}$ (de forma que $P'_i \subset U_i \cap L_\beta$ para $i = 1, \dots, m$). Então P'_{i+1} é a única placa de U_{i+1} que intercepta P'_i e P'_i é a única placa de U_i que intercepta P'_{i+1} .* $\square$

Proposição 1.4 *Sejam x e y pontos em uma folha L_α . Se U_λ é um aberto regular contendo y , então existe um aberto regular U_μ , com $x \in U_\mu$, tal que, para toda folha L_β com $L_\beta \cap U_\mu \neq \emptyset$, teremos $L_\beta \cap U_\lambda \neq \emptyset$. Além disso, U_μ pode ser escolhido de maneira que se*

P'_1 é uma placa de U_μ com $P'_1 \subset L_\beta$ e $x \notin P'_1$, então L_β contém uma placa P'_2 de U_λ tal que $y \notin P'_2$. $\square$

A generalização dos conceitos acima para variedades não compactas pode ser encontrada nos textos de [God], [Ta] ou [Reeb].

Para finalizarmos este parágrafo, falaremos brevemente do produto folheado $\hat{U}$ de um aberto saturado U . A referência para o que segue é [C-C-1] ou [God].

Seja M uma variedade riemanniana compacta M e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em M . Seja $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ um atlas formado por abertos regulares. Para $\varepsilon, \delta > 0$ podemos assumir que os interiores dos conjuntos $U_i(S, \varepsilon) = \varphi_i^{-1}(D_1^P \times [\delta - 1, 1 - \varepsilon])$ também cobrem M (p é a dimensão da folheação).

Seja $U \subset M$ um aberto saturado por $\mathcal{F}$. Vamos reenumerar os conjuntos U_i de forma que $U_i \subset U$ se e somente se $q < i \leq m$, para algum $q \leq m$. Logo, se $1 \leq i \leq q$, as componentes conexas de $U_i \cap U$ são de uma das três seguintes formas:

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times]a_i; 1]) ; \\ U_i^- &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times [-1; b_i[) ; \\ U_{ik} &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times]a_{i,k}; b_{i,k}[) , \end{aligned}$$

onde k percorre um conjunto de índices que pode ser finito ou infinito.

Vamos definir δU como sendo a união de todas as placas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_i^+ &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times \{a_i\}) \\ P_i^- &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times \{b_i\}) \\ P_{i,k}^+ &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times \{a_{i,k}\}) \\ P_{i,k}^- &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times \{b_{i,k}\}) \end{aligned}$$

onde $1 \leq i \leq q$. Devemos notar que δU não é necessariamente a fronteira topológica de U .

É usual formar uma variedade $\hat{U}$ com fronteira “cortando” a variedade M ao longo das folhas de δU e mantendo apenas as componentes interceptando U . Mais formalmente, seja $i : U \rightarrow M$ a inclusão canônica, e consideremos a métrica riemanniana em U induzida pela imersão i . Seja $\hat{U}$ o completamento de U nesta métrica. Seja $\hat{i} : \hat{U} \rightarrow M$ a extensão canônica de i a uma imersão tal que $\hat{i}(\partial\hat{U}) = \delta U$. É fácil ver então que $\hat{i}$ aplica cada componente de $\partial\hat{U}$ difeomorficamente sobre uma folha de δU (embora duas componentes da fronteira distintas possam ser identificadas).

Seja $\mathcal{F}^t$ uma folheação de dimensão 1 transversal à $\mathcal{F}$ em M (como a codimensão de $\mathcal{F}$ é 1, tal folheação sempre existe, pelo teorema de Frobenius por exemplo). Consideremos agora em $\hat{U}$ as folheações induzidas por $\hat{i}$, $\hat{\mathcal{F}} = \hat{i}^*(\mathcal{F})$ e $\hat{\mathcal{F}}^t = \hat{i}^*(\mathcal{F}^t)$. Um atlas localmente finito para $\hat{\mathcal{F}}$ (e $\hat{\mathcal{F}}^t$) em $\hat{U}$ é definido por adicionar aos abertos $\{U_i\}_{q \leq i \leq m}$ todos os conjuntos da forma:

$$\begin{aligned}\hat{U}_i^+ &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times [d_i; 1]) = U_i^+ \cup P_i^+, \\ \hat{U}_i^- &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times [-1; b_i]) = U_i^- \cup P_i^-, \\ \hat{U}_{i,k} &= \varphi_i^{-1}(D_1^P \times [a_{i,k}; b_{i,k}]) = U_{i,k} \cup P_{i,k}^+ \cup P_{i,k}^-, \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq q$ (a inclusão destes conjuntos em $\hat{U}$ é feita através da imersão $\hat{i}^{-1}$).

O fato seguinte é de fácil verificação: se U é conexo e se cada folha de $\hat{\mathcal{F}}^t$ é um arco compacto, então $\hat{U}$ pode ser identificado com $L^+ \times [-1, 1]$ (via um difeomorfismo adequado), onde L^+ é uma folha de $\hat{\mathcal{F}}$, componente de $\partial\hat{U}$, e para cada x em L^+ , $\{x\} \times [-1; 1]$ é uma folha de $\hat{\mathcal{F}}^t$. Neste caso, $\partial\hat{U}$ tem duas componentes mutuamente difeomorfas, a saber: $L^+ =$ união de todas as P_i^+ e $P_{i,k}^+$ e $L^- =$ união de todas as P_i^- e $P_{i,k}^-$. Nesta situação, diremos que $\hat{U}$ é um produto folheado.

Produtos folheados serão úteis no Capítulo 3.

Proposição 1.5 *Se U é um aberto conexo de uma variedade riemanniana M e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em M , onde U é saturado por $\mathcal{F}$, então $\partial\hat{U}$ tem apenas um*

número finito de componentes. $\square$

Observação: Na verdade, pode ser demonstrado que se U é um aberto conexo saturado por $\mathcal{F}$, então ∂U é a união de um número finito de folhas de $\mathcal{F}$; para uma demonstração veja, por exemplo, [God].

Proposição 1.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em uma variedade riemanniana M e U um aberto conexo saturado; seja $\mathcal{F}^t|_U$ a restrição a U de uma folheação de dimensão 1 transversal a $\mathcal{F}$; se $\hat{U}$ e $\hat{i}$ são como antes, então as folhas da folheação induzida $\hat{i}^*(\mathcal{F}^t|_U)$ são homeomorfas ao intervalo $[0, 1]$ (ou seja, são arcos compactos em $\hat{U}$). $\square$*

1.4 Holonomia

Ao longo deste parágrafo, $\mathcal{F}$ será uma folheação de dimensão p (e codimensão q) e classe C^r ($r \geq 1$) de uma variedade riemanniana de classe C^s ($s \geq r$).

Dada uma folheação $\mathcal{F}$ em M , seja L uma folha de $\mathcal{F}$ e seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ um caminho contínuo. Sejam $x_0 = \gamma(0)$ e $x_1 = \gamma(1)$ em L e consideremos T_0 e T_1 seções transversais à $\mathcal{F}$ passando por x_0 e x_1 , respectivamente; vamos definir uma transformação entre T_0 e T_1 , definida em uma vizinhança de x_0 em T_0 sobre uma vizinhança de x_1 em T_1 , “ao longo das folhas” de $\mathcal{F}$ “sobre” γ da maneira que se segue.

Pelos resultados do §1.3, é fácil ver que existem uma cadeia $\mathcal{C} = \{U_0, \dots, U_k\}$ para x_0 e uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = 1$ de $[0, 1]$ tal que:

- (i) $x_1 \in U_k$;
- (ii) se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então existe um aberto distinguido de $\mathcal{F}$ contendo $\overline{U_i} \cup \overline{U_j}$;
- (iii) $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, para $i = 0, 1, \dots, k$;
- (iv) $t_{i+1} \in U_i \cap U_{i+1}$, para $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Diremos então que $\mathcal{C}$ é uma cadeia subordinada à γ .

Para $i = 1, 2, \dots, k$, fixemos seções transversais $T^i \subset U_{i-1} \cap U_i$ passando por $\gamma(t_i)$ e chamemos $T^0 = T_0$ e $T^{k+1} = T_1$.

Para cada $i = 0, 1, \dots, k$, existem discos de dimensão q $D^i \subset T^i$ tal que $\gamma(t_i) \in D^i$ e para todo x em D^i a placa de U_i passando por x intercepta T^{i+1} em um único ponto $h_\gamma^i(x)$ (é claro a placa passando por $\gamma(t_i)$ intercepta T^{i+1} em $\gamma(t_{i+1})$). Seja $h_\gamma^i : D^i \rightarrow T^{i+1}$ a aplicação que leva cada $x \in D^i$ no ponto $h_\gamma^i(x)$ definido acima.

É claro que a composição

$$h_\gamma = h_\gamma^k \circ h_\gamma^{k-1} \circ \dots \circ h_\gamma^0$$

está bem definida em um disco $D \subset T^0$ contendo x_0 e para cada $x \in D$, $h_\gamma(x)$ é o ponto em $T^{k+1} = T_1$ que é a intersecção (que é única) da placa $P_x^k \subset U_k$ com T_{k+1} e onde $\mathcal{P}_x = \{P_x^0, P_x^1, \dots, P_x^k\}$ é a cadeia de placas para x associada à $\mathcal{C}$.

Definição 1.3 A aplicação h_γ acima será chamada de aplicação de holonomia associada a γ .

As principais propriedades de h_γ vêm resumidas na seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ca; Lins], cap. 4:

Proposição 1.7 (a) A aplicação h_γ independe das seções transversais T^i (para $i = 1, \dots, k$) e da cadeia $\mathcal{C}$; logo, se $\hat{h}_\gamma$ e h_γ são duas aplicações de holonomia associadas à γ , então elas coincidem na intersecção de seus domínios.

(b) $h_\gamma(x_0) = x_1$.

(c) $h_\gamma^{-1} = (h_\gamma)^{-1}$, onde $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$.

(d) Se $\mathcal{F}$ é de classe C^r , as aplicações $h_\gamma^0, h_\gamma^1, \dots, h_\gamma^k$ e, conseqüentemente, h_γ , podem ser tomadas de classe C^r . Como h_γ possui uma inversa, de classe C^r , conclui-se que na verdade h_γ é um difeomorfismo de classe C^r .

- (e) Se $\hat{\gamma}$ é obtida a partir de γ por uma pequena deformação com extremidades fixas, então as suas aplicações de holonomia coincidem em uma vizinhança de x_0 em T_0 .
- (f) Se $T'_0 \subset U_0$ e $T'_1 \subset U_k$ são outras seções transversais a $\mathcal{F}$ passando por x_0 e x_1 , respectivamente, então as projeções ao longo das placas definem difeomorfismos de classe C^r , $\lambda_0 : T'_0 \rightarrow T_0$ e $\lambda_1 : T'_1 \rightarrow T_1$ de modo que a nova aplicação de holonomia $h'_\gamma : D' \subset T'_0 \rightarrow T'_1$ satisfaça a condição

$$h'_\gamma(x) = (\lambda_1^{-1} \circ h_\gamma \circ \lambda_0)(x), \text{ onde } x \in D'.$$

Ainda, se γ é um caminho fechado, com $T_0 = T_1$ e $T'_0 = T'_1$, temos que h'_γ e h_γ são conjugados, ou seja, $h'_\gamma = \lambda^{-1} \circ h_\gamma \circ \lambda$, onde $\lambda = \lambda_0 = \lambda_1$. $\square$

Definição 1.4 Sejam X e Y espaços topológicos e $x \in X$. No conjunto das aplicações $f : V \subset X \rightarrow Y$ (onde V é a única vizinhança de x em X) introduzimos a relação de equivalência $\sim$ da seguinte maneira: $f \sim g$ se existe uma vizinhança W de x tal que $f|_W = g|_W$. Então cada classe de equivalência assim obtida será chamada de germe de f em x e será denotada por $G[f; x]$.

De particular interesse é o conjunto dos homeomorfismos de X em X , definidos em uma vizinhança de x e que deixam x fixo. O conjunto de todos os germes de tais homeomorfismos será denotado por $B(X, x)$. Podemos munir este conjunto com uma estrutura de grupo introduzindo a multiplicação:

$$G[f; x] \circ G[g; x] = G[f \circ g; x]$$

para todo f e g em $G(X, x)$, onde o domínio de $f \circ g$ é a intersecção do domínio de g com g^{-1} (domínio de f). A verificação de que $G(X, x)$ realmente é um grupo com esta estrutura é trivial.

Na seqüência, se α e β são duas curvas: $\alpha : I \rightarrow M$ e $\beta : I \rightarrow M$ (onde $I = [0, 1]$ e M é uma variedade) tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$ a notação $\alpha \cong \beta_{\text{rel}}(0, 1)$ será

usada para indicar que α e β são homotópicas com extremos fixos e se X é um espaço topológico qualquer e $x \in X$, $\pi_1(X, x)$ irá denotar o grupo fundamental de x em X (ao leitor não familiarizado com estas idéias remetemos a [Lima-4]).

Temos agora o seguinte teorema, cuja demonstração o leitor poderá encontrar em [Ca; Lins]:

Teorema 1.8 *Sejam $\gamma_i : I \rightarrow M$ ($i = 0, 1$) caminhos contidos em uma folha L de $\mathcal{F}$ tais que $\gamma_i(0) = x_0$ e $\gamma_i(1) = x_1$, $i = 0, 1$. Sejam T_0 e T_1 seções transversais à $\mathcal{F}$ em x_0 e x_1 , respectivamente, e $h_{\gamma_i} : D_i \subset T_0 \rightarrow T_1$ as aplicações de holonomia associadas à γ_i e sejam ainda $G[h_{\gamma_i}; x_0]$ o germe de h_{γ_i} em x_0 . Então são válidas as seguintes asserções:*

- (i) *se $\gamma_0 \cong \gamma_1 \text{ rel}(0, 1)$, então $G[h_{\gamma_0}, x_0] = G[h_{\gamma_1}, x_0]$;*
- (ii) *se $x_0 = x_1$ e $T_0 = T_1$, então a aplicação que leva γ em $G[h_{\gamma}^{-1}; x_0]$ induz um homomorfismo de grupos assim definido:*

$$\Phi : \pi_1[L, x_0] \rightarrow G(T_0, x_0) \quad \text{com } \Phi([\gamma]) = G[h_{\gamma}^{-1}; x_0] .$$

O subgrupo $\text{Hol}(L; x_0) = \Phi(\pi_1(L, x_0))$ será chamado o grupo de holonomia de L em x_0 . □

Observações

- (1) Dados x_0 e x_1 quaisquer em L , qualquer caminho $\gamma : I \rightarrow L$ com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$ induz um isomorfismo entre $\text{Hol}(L, x_0)$ e $\text{Hol}(L, x_1)$; tal isomorfismo vem da aplicação que associa cada elemento $\Phi[\alpha]$ em $H(L, x_0)$ ao elemento $G[h_{\alpha}; x_0]$ o $\Phi[\alpha] \circ G[h_{\alpha}^{-1}; x_1]$.
- (2) Diremos que uma folha L tem holonomia trivial, ou que L é sem holonomia, se seu grupo de holonomia se reduz à identidade em qualquer ponto de L . Diremos que uma folheação $\mathcal{F}$ é sem holonomia se cada uma de suas folhas for sem holonomia.

1.5 Minimais locais, níveis e crescimento de folhas

Neste parágrafo iremos expor os principais resultados sobre os abertos minimais locais e teoria dos níveis. As demonstrações dos fatos aqui mencionados podem ser encontradas em [Ca; Lins], [C; C-1], [C; C-2], [C; C-3], [Hec], [God], [Sa] e [Pl].

Definição 1.5 *Seja M uma variedade riemanniana onde está definida uma folheação $\mathcal{F}$. Diremos que um subconjunto $X \subset M$ é minimal se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

- (a) X é fechado, $X \neq \emptyset$ e X é saturado por $\mathcal{F}$;
- (b) se $X' \subset X$ é um subconjunto fechado e saturado por $\mathcal{F}$, então $X' = \emptyset$ ou $X' = X$.

Por exemplo, toda folha fechada de $\mathcal{F}$ é um minimal, enquanto que na folheação de Reeb do toro sólido $S^1 \times D^2$ ou do S^3 o único minimal é a folha compacta homeomorfa a T^2 .

Pode ser demonstrado que toda folheação de uma variedade compacta possui um minimal.

De agora em diante, neste parágrafo, todas as folheações terão codimensão 1.

Teorema 1.9 *Seja X um minimal de $\mathcal{F}$. Então valem as propriedades:*

- (a) *toda folha de $\mathcal{F}$ contida em X é densa em X ;*
- (b) *se M é conexa e $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$, então $X = M$;*
- (c) *se $\overset{\circ}{X} = \emptyset$, onde X não é uma folha fechada, e se T é um segmento transversal a $\mathcal{F}$ com $X \cap T \neq \emptyset$ e $\partial T \cap X = \emptyset$, então $X \cap T$ é homeomorfo a um conjunto de Cantor da reta;*
- (d) *todas as folhas de X são do mesmo tipo; mais especificamente, um minimal X de $\mathcal{F}$ é de uma das seguintes formas:*

- (i) uma folha fechada;
- (ii) $X = M$ (neste caso toda folha de $\mathcal{F}$ é densa em M pelo item (a)); diremos também que $\mathcal{F}$ é minimal;
- (iii) X é um minimal onde todas as folhas são excepcionais (tal caso ocorre na situação do item (c) acima). Neste caso diremos também que X é minimal excepcional. $\square$

Definição 1.6 *Seja U um aberto saturado por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}|_U$ a folheação induzida por $\mathcal{F}$ em U . Um minimal de $\mathcal{F}|_U$ em U será chamado de minimal local de $\mathcal{F}$.*

Por exemplo, se considerarmos na folheação de Reeb do toro sólido $D^2 \times S^1$ (ou na folheação de Reeb do S^3) o aberto obtido por remoção da folha compacta homeomorfa ao toro T^2 , cada folha homeomorfa ao $\mathbb{R}^2$ é um minimal local da folheação de Reeb, pois cada tal folha é fechada no aberto considerado acima (note que, no entanto, cada tal folha não é um minimal).

Como consequência do Teorema 1.9, temos que um minimal local pode ser de uma das seguintes formas:

- (i) uma folha fechada de $\mathcal{F}$;
- (ii) um aberto conexo U , saturado por $\mathcal{F}$, no qual toda folha de $\mathcal{F}|_U$ é densa em U ; neste caso diremos que U é um aberto minimal localmente denso;
- (iii) um subconjunto $A \subset U$ cujo fecho tem interior vazio, que é saturado por $\mathcal{F}$ e tal que se T é uma transversal à $\mathcal{F}$ com $T \cap A \neq \emptyset$, então $T \cap A$ é homeomorfo a um conjunto de Cantor; neste caso diremos que o minimal local A é do tipo excepcional.

É claro que os três casos acima são mutuamente exclusivos.

Proposição 1.8 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M de codimensão 1 e $\mathcal{F}^T$ uma folheação de dimensão 1 transversal a $\mathcal{F}$. Seja U um aberto minimal localmente denso tal que $\mathcal{F}|_U$ é sem holonomia. Então, existe um fluxo contínuo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, não singular exatamente sobre U , que leva folhas de $\mathcal{F}|_U$ difeomorficamente sobre folhas de $\mathcal{F}|_U$ e de forma que as linhas de fluxo sejam exatamente as folhas de $\mathcal{F}^T|_U$. Além disso, o conjunto dos reais t tal que Φ_t leva cada folha de $\mathcal{F}|_U$ nela mesma é um sub-grupo (aditivo) de $\mathbb{R}$, que não necessariamente possui um número finito de geradores.*

Demonstração: Ver [C; C-4], proposição 3 e [C;C-2], proposição 1.6. □

Suponhamos agora que M seja uma variedade compacta e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 e classe C^r ($r \geq 2$) sobre M . Seja M_0 a união de todos os minimais de $\mathcal{F}$ em M ; é claro então que M_0 é compacto e que $W = M - M_0$ é um aberto saturado por $\mathcal{F}$. Seja W_0 a união de todos os conjuntos minimais de $\mathcal{F}|_W$; novamente, o conjunto $M_1 = M_0 \cup W_0$ é compacto, de tal forma que $M - M_1$ é um aberto saturado por $\mathcal{F}$ em M . Desta forma temos uma seqüência de subconjuntos compactos de M :

$$\phi = M_{-1} \subset M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_k \subset \cdots \subset M .$$

Proposição 1.9 *A seqüência de conjuntos acima tem as seguintes propriedades:*

- (i) $M_k - M_{k-1}$ é a união dos conjuntos minimais de $\mathcal{F}|_{(M - M_{k-1})}$, para todo $k \geq 0$;
- (ii) todo minimal local é um minimal de $\mathcal{F}|_{(M - M_{k-1})}$ para algum $k \geq 0$;
- (iii) $M_* = \bigcup_{k \geq 0} M_k$ é densa em M .

Demonstração: Ver [C;C-3], teorema 2. □

Definição 1.7 *Diremos que uma folha L de $\mathcal{F}$ tem nível $k \geq 0$ se $L \subset (M_k - M_{k-1})$. Se $L \subset (M - M_*)$ diremos que L tem nível infinito.*

É claro que M_k é a união de todas as folhas de nível l , onde $0 \leq l \leq k$. Ainda colocaremos $M_\infty = M - M_*$.

Por exemplo, na folheação de Reeb de $D^2 \times S^1$ (ou do S^3), a folha compacta homeomorfa ao toro T^2 tem nível 0 e todas as outras folhas homeomorfas ao $\mathbb{R}^2$ tem nível 1.

Pode ser provado que uma folha L de $\mathcal{F}$ tem nível finito se e somente se seu fecho $\bar{L}$ em M é uma união finita de conjuntos minimais locais.

Dada uma folha L de $\mathcal{F}$, coloquemos

$$S(L) = \bar{L} \cap \left(\bigcup_{k \leq \text{nível}(L)} M_k \right).$$

Temos então:

Proposição 1.10 *Uma folha L de $\mathcal{F}$ tem nível infinito se e somente se $S(L)$ é denso em $\bar{L}$. Neste caso, para todo inteiro positivo k , existe uma folha em $S(L)$ de nível exatamente k e $\bar{L} \cap M_\infty = \bar{L} - S(L)$ é uma união não enumerável de folhas, cada uma das quais é densa em $\bar{L}$.*

Demonstração: Ver [C;C-3], teorema 5 e [C;C-1], parágrafo 5. □

Definição 1.8 *Seja $C(\mathbb{R}_+)$ o conjunto das funções $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, com f crescente. Se f e g são dois elementos de $C(\mathbb{R}_+)$ diremos que f é dominada por g (ou ainda que g domina f) se existem números reais positivos A , B e x_0 tais que:*

$$f(x) \leq Ag(Bx), \quad \forall x \geq x_0.$$

Seja $\sim$ a relação de equivalência em $C(\mathbb{R}_+)$ definida da seguinte maneira: $f \sim g$ se e somente se f é dominada por g e g é dominada por f . A classe de equivalência de uma função $f \in C(\mathbb{R}_+)$ será denotada por $\text{cresc}(f)$.

A relação $\sim$ acima estabelece uma ordem parcial em $C(\mathbb{R}_+)/\sim$ da seguinte maneira: diremos que $\text{cresc}(f)$ é menor ou igual a $\text{cresc}(g)$ (e denotaremos isto por $\text{cresc}(f) \leq \text{cresc}(g)$) se f é dominada por g (mas não necessariamente ocorre o contrário).

Definição 1.9 (i) Diremos que $f \in C(\mathbb{R}_+)$ tem crescimento polinomial de grau n se existe um polinômio $p \in C(\mathbb{R}_+)$ de grau n tal que

$$\text{cresc}(f) \leq \text{cresc}(p) .$$

(ii) Diremos que $f \in C(\mathbb{R}_+)$ tem crescimento exatamente polinomial de grau n se existe um polinômio $p \in C(\mathbb{R}_+)$ de grau n tal que

$$\text{cresc}(f) = \text{cresc}(p) .$$

(iii) Diremos que $f \in C(\mathbb{R}_+)$ tem crescimento exponencial se

$$\text{cresc}(f) \geq \text{cresc}(\exp) .$$

onde $\exp$ é a restrição da função exponencial e^x a $\mathbb{R}_+$.

É fácil ver que as definições acima podem ser estendidas às funções $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ crescentes.

Iremos supor no restante deste parágrafo que $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 e classe C^r , $r \geq 2$, de uma variedade riemanniana compacta M .

Fixemos uma cobertura birregular $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ de M . Dada uma folha L de $\mathcal{F}$, fixemos uma placa P_0 de L . Vamos definir a função crescimento de L da maneira que se segue.

Consideremos o conjunto C_r de todas as cadeias de placas contidas em L tendo P_0 como primeiro elemento da seqüência e de comprimento r (r um inteiro positivo). Seja ainda P^r o conjunto das placas de L contido em algum elemento de C_r . Agora, para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, consideremos o número $g_L(m)$ como sendo a cardinalidade do conjunto

$\bigcup_{\substack{0 \leq r \leq m \\ r \in \mathbb{Z}_+}} P^r$. É claro que $g_L(m)$ está bem definido em $\mathbb{Z}_+$ e cresce conforme m também cresce; a função assim obtida $g_L : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é chamada a função crescimento da folha L .

Por tudo o que foi dito acima, tem sentido então a seguinte definição:

Definição 1.10 *O tipo de crescimento da folha L , $\text{cresc}(L)$, é igual ao tipo de crescimento da função g_L ; ou seja:*

$$\text{cresc}(L) = \text{cresc}(g_L) .$$

Pela compacidade de M , segue que $\text{cresc}(L)$ independe da cobertura escolhida ou da placa P_0 como acima. Segue ainda da compacidade de m que uma folha L tem crescimento exponencial se $\liminf_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{m} \ln(g_L(m)) \right) \neq 0$. Caso contrário, diremos que L tem crescimento não exponencial.

Observação: Alternativamente, poderíamos ter definido como função crescimento da folha L a função $g_L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, onde para cada $R \in \mathbb{R}_+$, $g_L(R)$ é o número de placas interceptadas por todas as curvas $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ com origem em um ponto x_0 fixo em L e de comprimento menor ou igual a R . Dentro das hipóteses feitas acima sobre M e $\mathcal{F}$ é fácil ver que a definição acima independe do ponto x_0 escolhido e que o tipo de crescimento de L obtido desta forma coincide com o anterior. Ao longo do texto, usaremos uma ou outra definição conforme seja mais conveniente.

Proposição 1.11 *Suponhamos que M e $\mathcal{F}$ satisfaçam as condições acima. Sejam L uma folha de $\mathcal{F}$, $x_0 \in L$ um ponto e $B_L(x_0, R) \subset L$ a bola de centro x_0 e raio $R > 0$ contida em L . Consideremos então a função*

$$\begin{aligned} \bar{g}_{x_0} &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ R &\rightarrow \text{vol}(B_L(x_0, R)) \end{aligned}$$

(onde $\text{vol}(B_L(x_0, R))$ denota o volume da bola $B_L(x_0, R)$ em relação à métrica riemanniana escolhida).

Então $\text{cresc}(\bar{g}_{x_0}) = \text{cresc}(L)$ (como definido anteriormente); além disso, $\text{cresc}(L)$ dado desta forma independe da escolha do ponto x_0 ou da métrica riemanniana escolhida.

Demonstração: Ver [He]. □

Enunciaremos a seguir alguns resultados que serão usados no texto. As demonstrações podem ser encontradas em [He], [C;C-1] e [C;C-2].

Proposição 1.12 *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 e classe C^r ($r \geq 2$) sobre uma variedade compacta M , então*

$$\text{cresc}(L) \leq \text{cresc}(\exp)$$

para toda folha L de $\mathcal{F}$. □

Proposição 1.13 *Toda folha L de um minimal (ou minimal local) excepcional tem crescimento polinomial.* □

Proposição 1.14 *Seja L uma folha de $\mathcal{F}$ tal que $\bar{L} \subset M$ é uma reunião de folhas próprias. Se L tem nível finito n , então L tem crescimento exatamente polinomial de grau n .* □

Proposição 1.15 *Seja L_1 uma folha de nível finito. Se $L_1 \subset \bar{L}_2$, então $\text{cresc}(L_1) \leq \text{cresc}(L_2)$. Em particular, toda folha de nível infinito tem crescimento não polinomial.* □

Capítulo 2

Entropia geométrica de folheações

2.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos o conceito de entropia geométrica de folheações, que pode ser vista como uma extensão do conceito de entropia topológica para homeomorfismos de espaços compactos, que, por sua vez, foi formalizada por Rufus Bowen em [Bo-1]. A noção de entropia geométrica para folheações foi definida por E. Ghys, R. Langevin e P. Walczak em [G;L;W]. Inicialmente daremos uma noção de entropia de um pseudogrupo de homeomorfismos locais em relação a um sistema finito de geradores, noção esta que aplicaremos aos pseudogrupos de holonomia de uma folheação correspondentes aos diversos tipos de recobrimentos (por abertos regulares) da variedade ambiente. Na sequência, então, definiremos a entropia geométrica de folheações que, essencialmente, mede a “velocidade média” com a qual as folhas se afastam umas das outras; mostraremos então que esta entropia pode ser medida em função das entropias de seus diversos pseudogrupos de holonomia, o que permitirá obter estimações superiores ou inferiores da entropia geométrica. Finalmente, daremos uma condição necessária e suficiente para que as folheações de codimensão 1 tenham entropia geométrica positiva.

2.2 Entropia de um pseudogrupo de homeomorfismos

Definição 2.1 *Dado um espaço topológico X , um pseudogrupo Γ de transformações sobre X é um conjunto de aplicações definidas em partes de X satisfazendo aos seguintes axiomas:*

- (i) *se $f \in \Gamma$, então f é um homeomorfismo de um conjunto aberto de X (o domínio de f , ou $\text{dom } f$) sobre outro aberto de X (a imagem de f , ou $\text{Im } f$);*
- (ii) *se $f \in \Gamma$ e se U é um aberto contido no domínio de f , então $f|_U \in \Gamma$ (onde $f|_U$ é a restrição de f a U);*
- (iii) *se $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, onde cada U_i é um aberto em X , se $f_i \in \Gamma$, onde $\text{dom } f_i = U_i$ para todo $i \in I$, e se $f_i = f_j$ em $U_i \cap U_j$, então $f \in \Gamma$, onde $f : U \rightarrow X$ é dado por $f|_{U_i} = f_i$, para todo $i \in I$;*
- (iv) *para todo aberto $U \subset X$, $\text{id}_U \in \Gamma$; em particular $\text{id}_X \in \Gamma$ (aqui, se $A \subset X$, id_A é a identidade do conjunto A);*
- (v) *se $f \in \Gamma$, então $f^{-1} \in \Gamma$;*
- (vi) *se $f \in \Gamma$ é um homeomorfismo de U sobre V e se $g \in \Gamma$ é um homeomorfismo de U' sobre V' , e se $V \cap U' \neq \emptyset$, então o homeomorfismo $g \circ f$ do aberto $f^{-1}(V \cap U')$ sobre o aberto $g(V \cap U')$ também pertence a Γ*

Seja (X, d) um par, onde X é um espaço métrico com métrica d . Seja H_1 uma coleção finita de homeomorfismos entre abertos de X , de forma que $\text{id}_X \in H_1$ e de maneira que se $f \in H_1$, então $f^{-1} \in H_1$. Seja H o pseudogrupo de homeomorfismos locais gerado por H_1 (deve-se notar que se $f, g \in H_1$ não necessariamente tem-se que $\text{Im}(g) \subset \text{dom } f$; assim a aplicação $f \circ g$ será definida em $g^{-1}(\text{dom } f)$ que eventualmente pode ser um conjunto vazio). Denotaremos por H_n o conjunto das compostas de no máximo n elementos de H_1

$(n \in \mathbb{N})$, ou seja, $H_n = \{f \in H \mid f = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_m, f_i \in H_1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } m \leq n\}$.

Agora dado um real $\varepsilon > 0$ e $x, x' \in X$, diremos que x e x' são (n, ε) -separados se existe $f \in H_n$, com $x, x' \in \text{dom } f$ e tal que $d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$. Diremos que um subconjunto $A \subset X$ é (n, ε) -separado se seus elementos são (n, ε) -separados dois a dois. Denotaremos por $N_d(H, H_1, n, \varepsilon)$ a cardinalidade máxima dos subconjuntos de X que são (n, ε) -separados. Coloquemos ainda:

$$h_d(H, H_1, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_d(H, H_1, n, \varepsilon)$$

e

$$h_d(H, H_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_d(H, H_1, \varepsilon) .$$

Definição 2.2 O número real $h_d(H, H_1)$ definido acima é chamado a entropia de H em relação ao sistema de geradores H_1 .

Proposição 2.1 Se duas métricas d e d' sobre X são equivalentes, então $h_d(H, H_1) = h_{d'}(H, H_1)$.

Demonstração: Como d e d' são equivalentes, existem constantes reais positivas C_1 e C_2 tal que

$$C_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C_2 d(x, y)$$

para quaisquer x e y em X .

Suponhamos que x e y sejam tais que $d(x, y) \geq \varepsilon$; então $d'(x, y) \geq C_1 \varepsilon$, o que por sua vez implica que $d(x, y) \geq \frac{C_1}{C_2} \varepsilon$.

Observemos agora que se um conjunto $A \subset X$ é (n, ε) -separado na métrica d , então A é $(n, C_1 \varepsilon)$ -separado na métrica d' , o que por sua vez implica que A é $(n, \frac{C_1}{C_2} \varepsilon)$ -separado na métrica d . Logo:

$$N_d(H, H_1, n, \varepsilon) \leq N_{d'}(H, H_1, n, C_1 \varepsilon) \leq N_d(H, H_1, n, \frac{C_1}{C_2} \varepsilon) ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{n} \log N_d(H, H_1, n, \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \log N_{d'}(H, H_1, n, C_1 \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \log N_d(H, H_1, n, \frac{C_1}{C_2} \varepsilon) .$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$ na última desigualdade obtemos que:

$$h_d(H, H_1, \varepsilon) \leq h_{d'}(H, H_1, C_1 \varepsilon) \leq h_d(H, H_1, \frac{C_1}{C_2} \varepsilon) .$$

Nesta última desigualdade, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ teremos:

$$h_d(H, H_1) \leq h_{d'}(H, H_1) \leq h_d(H, H_1) ,$$

ou seja,

$$h_d(H, H_1) = h_{d'}(H, H_1) .$$

□

Proposição 2.2 *Seja X um aberto relativamente compacto de $\mathbb{R}^q$ (munido da métrica euclidiana usual) e seja H_1 um conjunto de homeomorfismos lipschitzianos entre abertos de X com as propriedades $id_X \in H_1$ e se $f \in H_1$, então $f^{-1} \in H_1$. Seja L o limite superior das constantes de Lipschitz de elementos de H_1 . Então:*

$$h(H, H_1) \leq q \log(L)$$

(onde $h(H, H_1)$ denota a entropia em relação à métrica usual).

Demonstração: Para quaisquer x e x' em $\mathbb{R}^q$ e $f \in H_1$ temos que $\|f(x) - f(x')\| \leq L\|x - x'\|$ (onde $\| \cdot \|$ denota a métrica usual do $\mathbb{R}^q$). Além disso, como $id_X \in H_1$, é claro que $L \geq 1$.

Agora, se x e x' são (n, ε) -separados, existe $g \in H_n$ tal que $\|g(x') - g(x)\| \geq \varepsilon$; além disso, existe um inteiro m entre 0 e n tal que $\|g(x') - g(x)\| \leq L^m \|x - x'\|$; assim, $\|x - x'\| \geq \varepsilon L^{-m}$ e como $L \geq 1$ e $m \leq n$ segue que $\|x - x'\| \geq \varepsilon L^{-n}$.

Como X é um aberto relativamente compacto de $\mathbb{R}^q$, $\overline{X}$ (o fecho de X em $\mathbb{R}^q$) tem volume q -dimensional $V > 0$; vamos agora recobrir $\overline{X}$ por cubos de dimensão q e diâmetro εL^{-n} , de forma que suas arestas tenham comprimento $C\varepsilon L^{-n}$ (onde C é uma constante positiva menor que 1). Cada tal cubo tem volume q -dimensional igual a $(C\varepsilon L^{-1})^q$. Desta forma, se um conjunto $A \subset X$ é (n, ε) -separado, então, evidentemente, ele não contém mais que $V[C\varepsilon L^{-n}]^{-q}$ elementos.

Concluimos então que:

$$N(H, H_1, n, \varepsilon) \leq V[C\varepsilon L^{-n}]^{-q}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log N(H, H_1, n, \varepsilon) &\leq \frac{1}{n} \log(V(C\varepsilon)^{-q} L^{nq}) \\ &= \frac{1}{n} [\log V - q \log C\varepsilon + nq \log L] . \end{aligned}$$

Uma vez que V , C , L e q são fixos, da última desigualdade vem que:

$$h(H, H_1, \varepsilon) \leq q \log(L)$$

donde

$$h(H, H_1) \leq q \log(L) .$$

□

Observação: Quando não houver possibilidade de confusão em relação à métrica usada, indicaremos a entropia em relação a H simplesmente por $h(H, H_1)$.

Exemplo 2.1 Seja (X, d) um espaço métrico totalmente limitado (ou seja: para todo $\varepsilon > 0$ existe um número finito de conjuntos $U_1, \dots, U_n$ cada um dos quais com diâmetro menor que ε e tal que $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$) e H_1 formado de isometrias entre abertos de X tal que $id_X \in H_1$ e se $f \in H_1$, então $f^{-1} \in H_1$.

Vamos mostrar que $h(H, H_1) = 0$. Em primeiro lugar, observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, H_n é formado apenas por isometrias. Assim, $N(H, H_1, n, \varepsilon)$ não depende de n e sim, apenas, de ε . Fixando $\varepsilon > 0$, como X é totalmente limitado, existe um número finito de abertos, $U_1, \dots, U_k$, que cobrem X e cujo diâmetro é menor que ε . Logo, se $E \subset X$ é $(1, \varepsilon)$ -separado, $E \cap U_i$ tem no máximo um elemento, para $i = 1, \dots, k$. Concluimos que E tem, no máximo, k -elementos. Agora, como para todo n , $N(H, H_1, n, \varepsilon)$ é o mesmo, conforme observado acima, concluimos que $N(H, H_1, n, \varepsilon) \leq k$ para todo n , ou seja, $N(H, H_1, n, \varepsilon)$ é finito e não depende de n , de onde concluimos que:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{n} \log N(H, H_1, n, \varepsilon) \right\} = 0 ,$$

ou seja, $h(H, H_1) = 0$.

Exemplo 2.2 Dado um ponto $C \in \mathbb{R}^2$ e um número real $r > 0$, podemos definir em $\mathbb{R}^2 - \{C\}$ a aplicação i de inversão em relação ao círculo c de centro C e raio $r > 0$ como a aplicação que a cada ponto $P \in \mathbb{R}^2 - \{C\}$ associa o ponto $i(P) = P'$, onde P' é tal que $d(C, P') \cdot d(C, P) = r^2$ e de maneira que P' pertence à semi-reta determinada por C e P (aqui, d é a distância usual do $\mathbb{R}^2$).

As demonstrações das seguintes propriedades das inversões podem ser encontradas em [M], cap. 25.

- (i) $i(\mathbb{R}^2 - \{C\}) = \mathbb{R}^2 - \{C\}$;
- (ii) A restrição de i ao círculo c coincide com a identidade de c ;
- (iii) Se $d(C, P) < r$ (respectivamente $d(C, P) > r$), então $d(C, i(P)) > r$ (respectivamente $d(C, i(P)) < r$);
- (iv) A inversa i^{-1} de i é a própria aplicação i ;
- (v) Se c_1 é um círculo em $\mathbb{R}^2 - \{C\}$, então $i(c_1)$ também é um círculo em $\mathbb{R}^2 - \{C\}$;
- (vi) i é um homeomorfismo em $\mathbb{R}^2 - \{C\}$.

Consideremos agora o espaço métrico (X, d) , onde X é a bola unitária fechada do $\mathbb{R}^2$ com centro na origem O do $\mathbb{R}^2$ e d é a métrica euclidiana do $\mathbb{R}^2$. Seja ainda c a circunferência de raio 1 e centro O .

Sejam c_1, c_2, c_3 três círculos disjuntos e ortogonais a c (veja a Figura 2.1) e consideremos as inversões i_1, i_2, i_3 relativamente a estes círculos.

As seguintes afirmações decorrem facilmente das propriedades acima e das propriedades de círculos ortogonais (veja [M]):

- (i) $i_k(X - \overset{\circ}{c}_k) \subset \overset{\circ}{c}_k \cap X$ e $i_k(\overset{\circ}{c} \cap X) \subset X - \overset{\circ}{c}_k$, para $k = 1, 2, 3$ (aqui, $\overset{\circ}{c}_k$ indica a região interior ao círculo C_k).
- (ii) $i_k(c - \overset{\circ}{c}_k) \subset c \cap \overset{\circ}{c}_k$ e $i_k(c \cap \overset{\circ}{c}_k) \subset c - \overset{\circ}{c}_k$ ($k = 1, 2, 3$).
- (iii) Se $k \neq l$, $i_k(c_l)$ é uma circunferência ortogonal a c .

Consideremos agora em (X, d) o pseudogrupo de homeomorfismos H gerado por $H_1 = \{id_X, i_1, i_2, i_3\}$.

Agora observamos que podemos tomar c_1, c_2 e c_3 de forma que os pontos $i_k(0)$, $k = 1, 2, 3$, são os vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro O e raio $a = d(0, i_k(0))$ (veja a Figura 2.1). Assim, o conjunto $\{i_1(0), i_2(0), i_3(0)\}$ é $(1, a)$ -separado por H .

A Figura 2.2 nos mostra agora um conjunto com 9 elementos que é $(2, a)$ -separado por elementos de H e a Figura 2.3 um conjunto com 21 elementos que é $(3, a)$ -separado por elementos de H .

Em geral, é fácil ver que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto com $3(2^n - 1)$ elementos que é (n, a) -separado por H . Assim,

$$N_d(H, H_1, n, a) \geq 3(2^n - 1)$$

donde

$$h(H, H_1) \geq \log 2 > 0$$

Figura 2.1 Conjunto $(1, a)$ -separado com 3 elementos.

Figura 2.2 Conjunto $(2, a)$ -separado com 9 elementos.

Figura 2.3 Conjunto $(3, a)$ -separado com 21 elementos.

o que nos mostra que a entropia em relação a H_1 é estritamente positiva.

2.3 Entropia de um pseudogrupo de holonomia

Neste parágrafo, aplicaremos a noção de entropia associada a um pseudogrupo de homeomorfismos, vista no parágrafo anterior, à teoria das folheações. Aqui $\mathcal{F}$ denotará uma folheação de dimensão p e codimensão q , de classe C^r , definida sobre uma variedade riemanniana compacta M de dimensão $m = p + q$ e de classe C^s ($s \geq r \geq 1$).

Conforme já visto no parágrafo 1.3, como M é compacta, existe (pelo menos) um atlas $A = \{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$ sobre M , onde $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ é um recobrimento regular finito para $\mathcal{F}$ com as seguintes propriedades:

- (i) $\varphi_i(U_i) = D_1^p \times D_1^q$;
- (ii) Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, existe um aberto V_i contendo $\overline{U_i}$ e um difeomorfismo $\overline{\varphi}_i : V_i \rightarrow D_2^p \times D_2^q$ e tal que $\overline{\varphi}_i|_{U_i} = \varphi_i$;
- (iii) Para cada $c \in D_1^q$, $\varphi_i^{-1}(D_1^p \times \{c\})$ é uma placa U_i e para todo $c' \in D_2^q$, $\overline{\varphi}_i^{-1}(D_2^p \times \{c'\})$ é uma placa de V_i . Além disso, podemos tomar V_i e $\overline{\varphi}_i$ de forma que para cada $c \in D_1^q$, $\overline{\varphi}_i^{-1}(D_2^p \times \{c\})$ é a única placa de V_i contendo a placa $\varphi_i^{-1}(D_1^p \times \{c\})$ de U_i ;
- (iv) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $U_i \cap U_j$ é conexo e cada placa de U_i encontra apenas uma placa de U_j ;
- (v) Cada placa de V_i intercepta no máximo uma placa de V_j ;
- (vi) Ainda podemos tomar $\mathcal{U}$ de forma que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então existe um aberto V_{ij} satisfazendo às condições anteriores e tal que $\overline{U_i} \cup \overline{U_j} \subset V_{ij}$.

A título de fixar notações, diremos que π_i , $i = 1, 2$, é a i -ésima projeção de $D_1^p \times D_1^q$ em D_1^p e D_1^q , respectivamente. A mesma notação será usada para denotar as respectivas projeções de $D_2^p \times D_2^q$.

Fixado um recobrimento regular $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ podemos considerar o espaço X_i das placas de $\mathcal{F}$ em U_i , para $i = 1, 2, \dots, n$. Denotaremos por X a reunião formal disjunta dos X_i . Ainda para cada placa $P \subset U_i \subset V_i$ denotaremos por P^V a placa (única) de V_i contendo P . Também chamaremos cada placa de V_i de uma V -placa.

Para todo $i = 1, 2, \dots, n$, vamos dotar o conjunto X_i de uma métrica d_H , denominada métrica de Hausdorff, que nos dará uma distância entre duas placas de X_i da seguinte forma: se P_1 e P_2 são duas placas em X_i , então a distância d_H entre elas será definida como

$$d_H(P_1, P_2) = \max \left\{ \sup_{x_1 \in P_1} d(x_1, P_2); \sup_{x_2 \in P_2} d(x_2, P_1) \right\}$$

(aqui $d(x_i, P_j) = \inf_{y \in P_j} \{d(x_i, y)\}$, onde d é a métrica riemanniana da variedade).

É fácil ver que d_H realmente define uma métrica sobre X_i , para todo i , e que existem pontos y_1 e y_2 nas V -placas P_1^V e P_2^V , respectivamente, e tal que $d_H(P_1, P_2) = d(y_1, y_2)$.

Vamos agora dotar o conjunto X de uma métrica d_X tal que a restrição desta métrica sobre cada X_i coincide com a métrica de Hausdorff em X_i . Na realidade, a escolha da métrica d_X pouco importa; o importante é que se $i \neq j$, $d_X(X_i, X_j) > 0$, ou seja, $P_i \in X_i$ e $P_j \in X_j$, $d_X(P_i, P_j) > 0$.

Lema 2.1 *Para cada X_i , existe uma constante $C_i > 0$ tal que, para todo par de placas P' e P'' em X_i e para todo $x' \in P'$ e $x'' \in P''$, temos:*

$$d_H(P', P'') \leq C_i d(x', x'') .$$

Demonstração: Dadas duas placas, P' e P'' de U_i com $P' \neq P''$, coloquemos

$$C_i(P', P'') = \frac{d_H(P', P'')}{\inf_{\substack{x' \in P' \\ x'' \in P''}} d(x', x'')} .$$

É claro que $C_i(P', P'')$ está bem definida (pois $\inf_{\substack{x' \in P' \\ x'' \in P''}} d(x', x'') > 0$) e que é positiva. Ainda, se x' e x'' são pontos quaisquer de P' e P'' , respectivamente, então:

$$d_H(P', P'') \leq C_i(P', P'') d(x', x'') . \quad (1)$$

Se $P' = P''$, fazemos $C_i(P', P'') = 1$ (ou qualquer constante positiva); então (1) ainda estará verificado (uma vez que, neste caso, obviamente, $d_H(P', P'') = 0$).

Seja $A = \{C_i(P', P'') | P', P'' \in X_i\}$. Se A for limitado superiormente, o lema estará verificado; basta, realmente, colocarmos $C_i = \sup\{C_i(P', P'')\} < \infty$.

Suponhamos, então, por absurdo, que A não seja limitado superiormente; pela definição de d_H e ainda pelo fato de $\overline{U}_i$ ser compacto, é fácil ver que isto acontece se e somente se existirem duas seqüências de placas de X_i , $\{P'_n\}$ e $\{P''_n\}$ e duas seqüências de pontos de U_i , $\{x'_n\}$ e $\{x''_n\}$ com $x'_n \in P'_n$ e $x''_n \in P''_n$, $\forall n$, tal que $d(x'_n, x''_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e tal que para cada n a seguinte desigualdade se verifica:

$$n \cdot d(x'_n, x''_n) < d_H(P'_n, P''_n) \quad (2)$$

(devemos notar que sempre podemos tomar todos os elementos da seqüência $\{P''_n\}$ distintos de qualquer elemento da seqüência $\{P'_n\}$).

Para cada n , sejam y'_n e y''_n respectivamente contidos nas V -placas $P_n^{V'}$ e $P_n^{V''}$ e tais que

$$d_H(P'_n, P''_n) \leq d(y'_n, y''_n) \quad (3)$$

(devemos notar que tais pontos sempre existem). De (2) e (3) vem que:

$$n \cdot d(x'_n, x''_n) < d(y'_n, y''_n), \quad \forall n. \quad (4)$$

Seja agora $x_0 \in \overline{U}_i$ tal que $x'_n \rightarrow x_0$ e $x''_n \rightarrow x_0$. Seja também $y_0 \in V_i$ (onde V_i é um aberto regular contendo U_i) com $y'_n \rightarrow y_0$ e $y''_n \rightarrow y_0$ (note que, pelas nossas suposições, $d_H(P'_n, P''_n) \rightarrow 0$ e, portanto, os pontos y'_n e y''_n sempre podem ser tomados de forma que $d(y'_n, y''_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$; além disso, é claro que y_0 está em uma V -placa que tem intersecção não vazia com $\overline{U}_i$, o que evidentemente implica que $y_0 \in V_i$).

É claro agora que os pontos x_0 e y_0 estão contidos na mesma V -placa, digamos, P_0^V . Também é fácil ver o seguinte: sempre podemos tomar as seqüências $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$, $\{y'_n\}$ e

$\{y_n''\}$ (passando a subseqüências ou “perturbando” levemente os pontos x_n' , x_n'' , y_n' e y_n'' de modo que (4) ainda se verifique) de maneira que as duas primeiras estejam contidas em uma transversal T_1 passando por x_0 , e as duas últimas contidas em uma transversal T_2 passando por y_0 .

Tomemos vizinhanças compactas Σ_1 e Σ_2 de x_0 e y_0 em T_1 e T_2 , respectivamente, de maneira que $\Sigma_1 \subset V_i$ e $\Sigma_2 \subset V_i$. Consideremos a aplicação de holonomia $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$; pela Proposição 1.2(d), podemos tomar h como um difeomorfismo de classe C^r ($r \geq 1$) entre Σ_1 e Σ_2 ; além disso, é claro que existe um inteiro m_0 tal que se $n \geq m_0$ então $h(x_n') = y_n'$ e $h(x_n'') = y_n''$. É óbvio também que $h(x_0) = y_0$.

Como h é (pelo menos) de classe C^1 , e Σ_1 e Σ_2 compactos, existem constantes positivas k_1 e k_2 tal que:

$$k_1 d(p_0, p_1) \leq d(h(p_0), h(p_1)) \leq k_2 d(p_0, p_1), \quad \forall p_0, p_1 \in \Sigma_1. \quad (5)$$

Mas é claro então que (5) é uma contradição com (4), o que então demonstra o lema. $\square$

Observações:

- (1) Dado um recobrimento regular $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de M , para cada $U_i \in \mathcal{U}$, seja C_i uma constante como no lema acima e seja $C = \max\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$; então podemos dizer que se P' e P'' são duas placas de um mesmo aberto U_i e x' e x'' são pontos quaisquer em P' e P'' , respectivamente, então $d_h(P', P'') \leq C d(x', x'')$.

Mas se P' e P'' não pertencem ao mesmo aberto regular, nem sempre existe uma constante tal que a desigualdade acima se verifique.

- (2) Segue imediatamente do lema que os abertos em X_i são exatamente os abertos saturados em U_i ; de fato, é claro que se A é um aberto saturado em U_i e que se A' é o subconjunto de X_i constituído das placas contidas em A , então A' é aberto em X_i ; por outro lado, se A' é um aberto em X_i , consideremos o conjunto

$A \subset U_i$ constituído dos pontos pertencentes às placas de U_i contidas em A' . É claro que A é saturado. Suponhamos que exista $x_0 \in A$, tal que para todo $\delta > 0$, $B_\delta(x_0) \cap (U_i - A) \neq \emptyset$. Por outro lado, consideremos a placa $P_0 \in X_i$ e tal que $x_0 \in P_0$; como P_0 é interior a A' , existe $\varepsilon > 0$ tal que se $d_H(P_0, P) < \varepsilon$, então $P \in A'$. Seja C_i uma constante como no lema acima; fazendo $\delta_0 = \frac{\varepsilon}{C_i}$, temos que existe $y \in B_{\delta_0}(x_0)$ e tal que $y \notin A$. Logo, a placa P_y de X_i contendo y não pertence a A' ; por outro lado, pelo lema anterior temos que $d_H(P_0, P_y) \leq C_i d(x_0, y) < C_i \frac{\varepsilon}{C_i} = \varepsilon$, o que implica $P_y \in A'$, uma contradição. Logo, A é aberto em U_i . Segue daí que a topologia em X_i vinda da métrica d_H o torna equivalente (como espaço topológico) ao espaço quociente $U_i/\mathcal{F}|_{U_i}$ com a topologia quociente dada pela projeção canônica no quociente $\pi : U_i \rightarrow U_i/\mathcal{F}|_{U_i}$. Logo existe um homeomorfismo $h_i : X_i \rightarrow D_1^q$ que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 U_i & \xrightarrow{\pi_2 \circ \varphi_i} & D_1^q \\
 \pi \downarrow & & \nearrow h_i \\
 & X_i &
 \end{array}$$

Em outras palavras, a topologia em X_i com d_H é equivalente à topologia saturada. Vamos agora dotar o conjunto X de uma família $H_1(\mathcal{U})$ de homeomorfismos locais. $H_1(\mathcal{U})$ será constituída da identidade de X (Id_X) e de aplicações f_{ij} definidas da maneira que se segue. Se P_i e P_j são placas de U_i e U_j , respectivamente, e $P_i \cap P_j \neq \emptyset$, então $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ é tal que $f_{ij}(P_i) = P_j$. Como $\mathcal{U}$ é um recobrimento regular, é claro que cada f_{ij} está bem definida. Agora pelo exposto acima e pelas definições de folheação vistas no capítulo 1, sabemos que existem difeomorfismos de classe C^r $g_{ij} : D_1^q \rightarrow D_1^q$ que tornam o diagrama abaixo comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
& (U_i \cap U_j) & \\
\pi_2 \circ \varphi_i \swarrow & & \searrow \pi_2 \circ \varphi_j \\
D_1^q & \xrightarrow{g_{ij}} & D_1^q
\end{array}$$

Agora, conforme a observação (2) que segue do lema acima, existem homeomorfismos h_i e h_j de X_i e X_j , respectivamente sobre D_1^q , tal que se A é o domínio de f_{ij} em X_i e B sua imagem em X_j , então o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f_{ij}} & B \\
h_i \downarrow & & \downarrow h_j \\
D_1^q & \xrightarrow{g_{ij}} & D_1^q
\end{array}$$

É claro então que $f_{ij} = h_j^{-1} \circ g_{ij} \circ h_i$ é um homeomorfismo.

Assim, $H_1(\mathcal{U})$ realmente é uma família finita de homeomorfismos locais de X e assim podemos falar no pseudogruppo $H(\mathcal{U})$ gerado por $H_1(\mathcal{U})$. $H(\mathcal{U})$ será o pseudogruppo de holonomia associado ao recobrimento regular $\mathcal{U}$ e a entropia deste pseudogruppo será denotada por $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$. Segue da proposição 2.1 que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ não depende da escolha da métrica riemanniana sobre M . Além disso, como $\mathcal{F}$ é de classe C^1 (pelo menos) podemos ver facilmente (com uma argumentação análoga à usada na demonstração do lema anterior, por exemplo) que cada f_{ij} é lipschitziana. Segue então daí, do fato de que podemos considerar X como uma reunião disjunta de abertos relativamente compactos de $\mathbb{R}^q$ (cujos interiores são também disjuntos) munido da distância euclidiana, e da proposição 2.2 que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ é finito.

Vamos dar agora uma interpretação geométrica para a (n, ε) -separação por $H_1(\mathcal{U})$.

Diremos que dois pontos x e y são $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$ -separados se uma das seguintes condições se verifica:

- (i) Não existe $U \in \mathcal{U}$ contendo x e y simultaneamente;
- (ii) Existe uma n -cadeia $u = (U_1, \dots, U_n)$ para x e y , constituída de abertos pertencentes a $\mathcal{U}$ tal que se $(u_x^1, \dots, u_x^n)$ e $(u_y^1, \dots, u_y^n)$ são respectivamente as cadeias de placas para x e y associadas a u , então $d_H(u_x^n; u_y^n) > \varepsilon$.

Devemos observar que o comprimento de uma tal cadeia não precisa ser necessariamente n ; na verdade, toda p -cadeia com $p \leq n$ permite a construção de uma n -cadeia pela eventual repetição de um dos elementos da cadeia (U_1 , por exemplo).

Tomemos agora $\varepsilon_0 = \min_{i \neq j} \{d(X_i, X_j)\}$; pelo que vimos anteriormente é claro que $\varepsilon_0 > 0$. Se $\varepsilon < \varepsilon_0$, é fácil ver então que $N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon) = N(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ (onde $N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$ denota a cardinalidade máxima de um conjunto $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$ -separado em M). Assim, para $\varepsilon < \varepsilon_0$, temos que

$$\begin{aligned} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon). \end{aligned}$$

Na seqüência, usaremos fortemente a equivalência entre o $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$ -separação e $(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ -separação, conforme seja mais conveniente usar um ou outro.

Observação: É fácil ver que, mesmo que $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ (como acima), $N(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ e $N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$ irão diferir *no máximo* de uma constante multiplicativa, o que não altera os resultados.

2.4 Entropia geométrica de uma folheação

Neste parágrafo iremos expor a noção de uma entropia geométrica para folheações. Tal noção apareceu pela primeira vez nos trabalhos de Ghys, Langevin e Walczak ([G.L.W.]). O principal resultado deste parágrafo nos dará então uma relação entre esta entropia geométrica e aquela relativa a pseudogrupos de holonomia vista no parágrafo anterior.

Seja M uma variedade riemanniana compacta (indicaremos a métrica riemanniana da variedade por g) e seja $\mathcal{F}$ uma folheação sobre M de dimensão p e codimensão q . Sem perda de generalidade podemos supor daqui em diante que tanto M como $\mathcal{F}$ é de classe C^∞ .

Dado $x \in M$, seja $T_x L_x$ o espaço tangente em x à folha L_x de $\mathcal{F}$ contendo x em x . Denotaremos por $\exp^{\mathcal{F}} : T_x L_x \rightarrow L_x$ a aplicação exponencial de L_x em x , por $B_{\mathcal{F}}(O_x, r)$ a bola aberta de centro O e raio r em $T_x L_x$ e por $B_{\mathcal{F}}(x, r)$ a bola aberta de centro x e raio r em L_x (as respectivas bolas fechadas serão denotadas por $\overline{B}_{\mathcal{F}}(O_x, r)$ e $\overline{B}_{\mathcal{F}}(x, r)$). Ainda, se $y \in L_x$, denotaremos por $d_{\mathcal{F}}(x, y)$ a distância entre x e y em L_x (note que $d(x, y) \leq d_{\mathcal{F}}(x, y)$, onde d é a distância sobre M vinda da métrica riemanniana g). Se x e y são dois pontos quaisquer em M , denotaremos por $\Omega(x, y, r)$ o conjunto das aplicações contínuas $f : \overline{B}_{\mathcal{F}}(O_x, r) \rightarrow L_y$ tal que $f(O_x) = y$. Ainda, se $f \in \Omega(x, y, r)$, colocaremos:

$$\begin{aligned}\delta(f) &= \sup\{d(\exp^{\mathcal{F}}(v), f(v)) \mid v \in \overline{B}_{\mathcal{F}}(O_x, r)\} \\ \delta_r(x, y) &= \inf\{\delta(f) \mid f \in \Omega(x, y, r)\} + \inf\{\delta(g) \mid g \in \Omega(y, x, r)\} .\end{aligned}$$

Definição 2.3 *Um conjunto $A \subset M$ será dito $(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon)$ -separado (onde $r > 0$ e $\varepsilon > 0$) se $\delta_r(x, y) \geq \varepsilon$, para todo par de pontos x e y distintos em A .*

De maneira análoga ao caso da entropia de um pseudogruppo de holonomia colocaremos

$$\begin{aligned}N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon) &= \max\{\text{card } A \mid A \text{ é } (\mathcal{F}, g, r, \varepsilon)\text{-separado}\} ; \\ h(\mathcal{F}, g, \varepsilon) &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon) ; \\ h(\mathcal{F}, g) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h(\mathcal{F}, g, \varepsilon) .\end{aligned}$$

Definição 2.4 *O número $h(\mathcal{F}, g)$ como acima será chamado de entropia geométrica de $\mathcal{F}$ em relação à métrica riemanniana g (quando não houver possibilidade de confusão, nos referiremos à $h(\mathcal{F}, g)$ simplesmente como a entropia geométrica de $\mathcal{F}$).*

Na seqüência, indicaremos uma variedade riemanniana compacta M dotada de uma métrica riemanniana g e de uma estrutura de folheação $\mathcal{F}$ por $(M, \mathcal{F}, g)$.

Proposição 2.3 *Se $(M, \mathcal{F}, g)$ e $(M', \mathcal{F}', g')$ são duas variedades riemannianas compactas folheadas e se $\phi : M \rightarrow M'$ é um homeomorfismo que leva folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{F}'$ isometricamente, então $h(\mathcal{F}, g) = h(\mathcal{F}', g')$.*

Demonstração: Como M e M' são compactas, $\phi : M \rightarrow M'$ e $\phi^{-1} : M' \rightarrow M$ são uniformemente contínuas. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ (onde podemos tomar $\varepsilon_2 < \varepsilon$) e tal que, para todo $x', y' \in M'$, $d_{M'}(x', y') < \varepsilon_1$ implica $d_M(\phi^{-1}(x'), \phi^{-1}(y')) < \varepsilon$ e tal que para todo $x, y \in M$, se $d_M(x, y) < \varepsilon_2$, então $d_{M'}(\phi(x), \phi(y)) < \varepsilon_1$, independentemente da escolha de x, y, x' e y' (aqui d_M e $d_{M'}$ indicam as distâncias riemannianas nas variedades M e M' , respectivamente).

Seja $A \subset M$ seja $(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon)$ -separado, ou seja, para todo $x, y \in A$, $\delta_r(x, y) \geq \varepsilon$ de forma que para todo $f \in \Omega(x, y, r)$ e todo $g \in \Omega(y, x, r)$ temos $\delta(f) + \delta(g) \geq \varepsilon$; suponhamos então por absurdo que existam $f' \in \Omega(\phi(x), \phi(y), r)$ e $g' \in \Omega(\phi(y), \phi(x), r)$ com $\delta(f') + \delta(g') < \varepsilon_1$.

Seja $\pi_{\phi(x)} : \overline{B}_{\mathcal{F}'}(O_{\phi(x)}, r) \rightarrow \overline{B}_{\mathcal{F}}(O_x, r)$ o isomorfismo linear que associa cada vetor $\vec{v} \in \overline{B}_{\mathcal{F}'}(O_{\phi(x)}, r)$ ao mesmo vetor $\vec{v} \in \overline{B}_{\mathcal{F}}(O_x, r)$ (evidentemente $\pi_{\phi(x)}(O_{\phi(x)}) = O_x$).

Analogamente, definimos a aplicação $\pi_{\phi(y)} : \overline{B}_{\mathcal{F}'}(O_{\phi(y)}, r) \rightarrow \overline{B}_{\mathcal{F}}(O_y, r)$. Sejam agora as aplicações $f : \overline{B}_{\mathcal{F}}(O_x, r) \rightarrow L_y$ e $g : \overline{B}_{\mathcal{F}}(O_y, r) \rightarrow L_x$ definidas pelas relações:

$$\begin{cases} f = \phi^{-1} \circ f' \circ \pi_{\phi(x)}^{-1} \\ g = \phi^{-1} \circ g' \circ \pi_{\phi(y)}^{-1} \end{cases}.$$

É claro que f e g são funções contínuas e que $f(O_x) = y$ e $g(O_y) = x$. Assim, $f \in \Omega(x, y, r)$ e $g \in \Omega(y, x, r)$. Agora, pela definição de f e g , pelo fato de $\delta(f') + \delta(g') < \varepsilon_1$ e pelo fato de ϕ^{-1} levar folhas de $\mathcal{F}'$ isometricamente em folhas de $\mathcal{F}$ temos que $\delta(f) + \delta(g) < \varepsilon$, contrariando a afirmação feita anteriormente. Assim $N(\mathcal{F}', g', r, \varepsilon_1) \geq N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon)$.

De maneira inteiramente análoga, se demonstra que $N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon_2) \geq N(\mathcal{F}', g', r, \varepsilon_1)$.

Assim, obtemos a relação:

$$N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon) \leq N(\mathcal{F}', g', r, \varepsilon_1) \leq N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon_2) .$$

Fazendo $r \rightarrow +\infty$ obtemos, a partir da relação acima que:

$$h(\mathcal{F}, g, \varepsilon) \leq h(\mathcal{F}', g', \varepsilon_1) \leq h(\mathcal{F}, g, \varepsilon_2) .$$

Fazendo agora $\varepsilon \rightarrow 0^+$, e ainda do fato que $\varepsilon_2 < \varepsilon$, obtemos a relação:

$$h(\mathcal{F}, g) \leq h(\mathcal{F}', g') \leq h(\mathcal{F}, g)$$

ou seja: $h(\mathcal{F}', g') = h(\mathcal{F}, g)$. □

Em particular, se a aplicação ϕ como na proposição for um difeomorfismo, é claro que as folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ têm a mesma entropia geométrica.

Vamos agora enunciar o principal resultado deste parágrafo, que estabelece uma relação entre a entropia geométrica em relação à métrica g de $\mathcal{F}$ e a entropia associada a pseudo-grupos de holonomia.

Teorema 2.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação sobre a variedade riemanniana M com métrica g . Então:*

$$h(\mathcal{F}, g) = \sup_{\mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{\text{diam } \mathcal{U}} \cdot h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \right\} ,$$

onde $\mathcal{U}$ percorre todos os recobrimentos regulares de M e onde $\text{diam } \mathcal{U}$ designa o supremo dos diâmetros das placas de $\mathcal{U}$ em relação à métrica $d_{\mathcal{F}}$.

A demonstração do teorema requer uma série de proposições e lemas.

Primeiramente, demonstraremos a desigualdade $\sup_{\mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{\text{diam } \mathcal{U}} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \right\} \leq h(\mathcal{F}, g)$. Para isto, começaremos com o

Lema 2.2 *Dado um recobrimento regular $\mathcal{U}$ de N , existe uma constante $C_{\mathcal{U}}$ (que depende de $\mathcal{U}$) com a seguinte propriedade: se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, se n é um inteiro positivo qualquer e $r = n \text{diam} \mathcal{U}$, então, se dois pontos x e y em M são tais que $\delta_r(x, y) < \varepsilon$, eles não são $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, C_{\mathcal{U}}\varepsilon)$ -separados.*

Demonstração: Seja λ o número de Lebesgue do recobrimento regular $\mathcal{U}$ de M (tal número existe, uma vez que M é compacta). Tomemos $\varepsilon > 0$ de forma que $\varepsilon < \lambda/3$ e suponhamos que $\delta_r(x, y) < \varepsilon$, onde x e y pertencem a M , é claro então que $d(x, y) < \varepsilon < \lambda$; sendo assim, existe um aberto regular $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_0$ e $y \in U_0$. Podemos construir então uma cadeia de comprimento n para x e y (repetindo, se necessário, os conjuntos): $u = (U^0, U^1, \dots, U^n)$.

Como $r = n \text{diam} \mathcal{U}$, existe uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow L_x$ (onde L_x é a folha de $\mathcal{F}$ passando por x) de comprimento inferior a r tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = z \in P_n^x$ (onde $P_x = \{P_0^x, P_1^x, \dots, P_n^x\}$ é uma cadeia de placas para x associada a u) e tal que u é uma cadeia para γ (ou seja, para todo $t \in [0, 1]$ existe $P_i^x \in P_x$ e tal que $\gamma(t) \in P_i^x$). Podemos tomar então uma geodésica $\bar{\gamma} : [0, l] \rightarrow L_x$ com as propriedades:

- (i) $\bar{\gamma}$ é homotópica à extremidades fixas à curva γ (daí, $\bar{\gamma}(0) = \gamma(0) = x$ e $\bar{\gamma}(1) = \gamma(1) = z$);
- (ii) $\|\bar{\gamma}'(t)\| = 1, \forall t \in [0, l]$;
- (iii) $l \leq r$.

Decorre de (ii) e (iii) que $\text{comp}(\bar{\gamma}) = l < r$.

Agora, como $\delta_r(x, y) < \varepsilon$, existe $f \in \Omega(x, y, r)$ tal que $\delta(f) < \varepsilon$. Colocando $v = \bar{\gamma}'(0)$, como $\|v\| = 1$ vem que para todo $t \in [0, l]$, $\|tv\| \leq \|lv\| \leq r$ e assim tem sentido falar na curva $\alpha : [0, l] \rightarrow L_y$ dada pela relação $\alpha(t) = f(tv)$ (é claro que $\alpha(0) = y$).

Como para todo $t \in [0, l]$, $\bar{\gamma}(t) = \exp_x^{\mathcal{F}}(tv)$ e como $\delta(f) < \varepsilon$, temos que $d(\bar{\gamma}(t), \alpha(t)) < \varepsilon$. Além disso, para todo $t \in [0, l]$, existe um intervalo $[t_i, t_{i+1}] \subset [0, l]$ com $t \in [t_i, t_{i+1}]$

tal que $\text{comp}(\bar{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]})$ e $\text{comp}(\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]})$ sejam menores que ε . Logo, $\text{comp}(\bar{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}) + \text{comp}(\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}) + d(\bar{\gamma}(t_i), \alpha(t_i)) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon < \lambda$, o que por sua vez implica que existe um conjunto $\bar{U}_i \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ e $\bar{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}$ pertencem a $\bar{U}_i$.

Concluimos então que existem reais $t_0, t_1, \dots, t_k$ tais que $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k = l$ e uma cadeia de comprimento k , $\bar{u} = \{\bar{U}_1, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_k\}$ tal que $\bar{\gamma}(t)$ e $\alpha(t)$ pertencem a um mesmo aberto $\bar{U}_i \in \bar{u}$, para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. A cadeia $\bar{u}$ é, portanto, uma cadeia para $x = \bar{\gamma}(0)$ e $y = \alpha(0)$. É claro então que podemos tomar $\bar{U}_0 = U_0$ e $\bar{U}_k = U_n$. Seja $P_y = \{P_0^y, P_1^y, \dots, P_n^y\}$, $\bar{P}_x = \{\bar{P}_0^x, \dots, \bar{P}_k^x\}$ e $\bar{P}_y = \{\bar{P}_0^y, \dots, \bar{P}_k^y\}$ as cadeias de placas para y subordinada a u , para x subordinada a $\bar{u}$ e para y subordinada a $\bar{u}$, respectivamente. É claro então que $P_0^x = \bar{P}_0^x$, $\bar{P}_k^x = P_n^x$, $P_0^y = \bar{P}_0^y$ e $\bar{P}_k^y = P_n^y$.

Agora, pela observação (1) que segue o Lema 2.1, temos que existe uma constante C_u (que depende apenas de $\mathcal{U}$) tal que P e P' são placas de um mesmo aberto $U \in \mathcal{U}$, e x e x' são pontos arbitrários em P e P' , respectivamente, então:

$$d_H(P, P') \leq C_u d(x, x') .$$

Segue então, do que foi dito acima, que:

$$d_H(P_n^x; P_n^y) = d_H(\bar{P}_k^x, \bar{P}_k^y) \leq C_u d(\bar{\gamma}(l), \alpha(l)) < C_u \varepsilon .$$

Como o mesmo resultado segue para toda n -cadeia para x e y , segue então que x e y não são $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, C_u \varepsilon)$ -separados, como queríamos. $\square$

Corolário 2.1 *Para todo recobrimento regular $\mathcal{U}$ de M temos:*

$$\frac{1}{\text{diam } \mathcal{U}} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \leq h(\mathcal{F}, g) .$$

Demonstração: O resultado do lema nos diz que se um conjunto A não é $(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon)$ -separado (onde $r = n \text{diam } \mathcal{U}$, n um inteiro positivo) então não será também $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, C_u \varepsilon)$ -separado. Logo:

$$N(H(\mathcal{U}); H_1(\mathcal{U}); n, C_u \varepsilon) < N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, C_u \varepsilon) \leq N(\mathcal{F}, g, n \text{diam } \mathcal{U}, \varepsilon) .$$

Ou seja:

$$\frac{1}{n} \log N(H(\mathcal{U}); H_1(\mathcal{U}), n, C_U \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \log N(\mathcal{F}, g, n \text{diam}(\mathcal{U}), \varepsilon)$$

o que implica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \text{diam} \mathcal{U}} \log N(H(\mathcal{U}); H_1(\mathcal{U}), n, C_U \varepsilon) &\leq \frac{1}{n \text{diam} \mathcal{U}} \log N(\mathcal{F}, g, n \text{diam} \mathcal{U}, \varepsilon) \\ &= \frac{1}{r} \log N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon) . \end{aligned}$$

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos:

$$\frac{1}{n \text{diam} \mathcal{U}} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}, C_U \varepsilon) \leq h(\mathcal{F}, g, \varepsilon) .$$

Fazendo agora $\varepsilon \rightarrow 0^+$, temos enfim (já que C_U é constante):

$$\frac{1}{\text{diam} \mathcal{U}} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \leq h(\mathcal{F}, g) .$$

□

É claro agora que $\sup_{\mathcal{U}} \{ \frac{1}{\text{diam} \mathcal{U}} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \} \leq h(\mathcal{F}, g)$, ou seja, demonstramos uma parte do teorema.

Para mostrar a desigualdade inversa, introduziremos alguns conceitos e resultados.

Começaremos por construir um recobrimento regular para $\mathcal{F}$ da maneira que se segue (a idéia da demonstração é devida da Ghys, Langevin e Walczak; ver [G.L.W]).

Seja Δ_0 um real positivo tal que $\exp^{\mathcal{F}}$ envie todas as bolas $B_{\mathcal{F}}(O_x, 4\Delta_0)$ difeomorficamente sobre bolas abertas estritamente convexas da folha L_x contendo x , para todo $x \in M$ (uma vez que M é compacta, tal Δ_0 existe). Seja $\Delta > 0$ com $\Delta < \Delta_0$ e tomemos $\rho > 0$ com $\rho \ll \Delta$. Seja $T'_x = \exp(B_{\mathcal{F}^\perp}(O_x, 2\rho))$, onde $B_{\mathcal{F}^\perp}(O_x, r)$ designa a bola aberta de centro O_x e raio r contida no sub-fibrado ortogonal a $T_x L_x$ em $T_x M$. Seja $V_x = \bigcup_{y \in T'_x} B_{\mathcal{F}}(y, 2\Delta)$. Se Δ e ρ são suficientemente pequenos, é fácil ver então que para todo $x \in M$, V_x é um aberto regular. Da mesma forma, se $T_x = \exp(B_{\mathcal{F}^\perp}(O_x, \rho))$ e $U_x = \bigcup_{y \in T_x} B_{\mathcal{F}}(y, \Delta)$, U_x é um aberto regular. Intuitivamente, pela nossa construção de U_x , podemos pensar neste aberto como um “moeda” de espessura 2ρ e raio Δ (ver figura).

Figura 2.4

Seja α suficientemente pequeno de maneira que $B_\alpha(x) \subset U_x$, para todo $x \in M$ ($B_\alpha(x)$ é a bola de centro em x e raio α na variedade M).

Seja $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ um subconjunto de M tal que $M \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\alpha/2}(z_i)$ (como M é compacta, tal subconjunto sempre existe).

Vamos escolher $\tau \in]0, 1]$ e $\lambda > 0$ convenientemente pequenos de forma que se $x \in B_{\alpha/2}(z_i)$ para algum i então $d_{\mathcal{F}}(x, z') < (1 - \tau)\Delta - \lambda/2$, para algum $z' \in T_{z_i}$. É claro que podemos tomar τ e λ de forma que $(1 - \tau)\Delta - \lambda/2 < \alpha/2$.

Lema 2.3 *Existe $\beta > 0$ tal que se x_1 e x_2 são pontos de uma mesma folha L com $d_{\mathcal{F}}(x_1, x_2) = 2\Delta - \lambda$ e se y_1 e y_2 são pontos nas transversais T_{x_1} e T_{x_2} respectivamente, com $d(x_1, y_1) < \beta$ e $d(x_2, y_2) < \beta$, onde y_1 e y_2 estão em uma mesma folha L' contidos em um disco de raio $4\Delta_0$, então $d_{\mathcal{F}}(y_1, y_2) < 2\Delta$.*

Demonstração: Se a asserção do lema fosse falsa, para cada $n \in \mathbb{N}$ haveriam pontos x_n^1 ,

x_n^2, y_n^1 e y_n^2, x_n^1 e x_n^2 na mesma folha, com $d_{\mathcal{F}}(x_n^1, x_n^2) < 2\Delta - \lambda$ e y_n^1 e y_n^2 também em uma mesma folha, onde $y_n^i \in T_{x_n^i}$ e $d(y_n^i, x_n^i) < \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2$) e tal que $d_{\mathcal{F}}(y_n^1, y_n^2) > 2\Delta$.

Consideremos então as seqüências $\{x_n^i\}, \{y_n^i\}, i = 1, 2$; reduzindo a subsequências, se necessário, vem (do fato de M ser compacta) que cada uma dessas seqüências tem um ponto de acumulação em M . Fazendo $n \rightarrow \infty$, é fácil ver que $\{x_n^1\}$ e $\{y_n^1\}$ convergem a um ponto comum $z_1 \in M$ e analogamente $\{x_n^2\}$ e $\{y_n^2\}$ convergem a $z_2 \in M$.

Ora, como para todo n , $d_{\mathcal{F}}(x_n^1, x_n^2) < 2\Delta - \lambda$, é fácil ver que $d_{\mathcal{F}}(z_1, z_2) \leq 2\Delta - \lambda$ (é claro que z_1 e z_2 estão na mesma folha).

Por outro lado, pela nossa escolha de $\{y_n^1\}$ e $\{y_n^2\}$, temos para cada n que $d_{\mathcal{F}}(y_n^1, y_n^2) > 2\Delta$, o que implica que $d_{\mathcal{F}}(z_1, z_2) \geq 2\Delta$, uma contradição. Isto demonstra o lema. $\square$

Observação: Suponhamos que $x_i \in T_{z_i}, i = 1, 2$ (z_i em Z) com $d(x_i, z_i) < \alpha$, e com $d_{\mathcal{F}}(x_1, x_2) < 2\Delta - \lambda$ (x_1 e x_2 estão na mesma folha). Então é fácil ver que podemos escolher β como no lema acima de maneira que se $y_1 \in T_{z_1}$ e $d(y_1, x_1) < \beta/2$, então a folha de y_1 interceptará T_{z_2} em um ponto y_2 de forma que $d(x_2, y_2) < \beta$. Tal escolha de β é possível, uma vez que Z é finito.

Agora, para uma escolha arbitrária de um conjunto Z como acima, é fácil ver que

$$\mathcal{U}_{\Delta} = \{U_{z_1}, \dots, U_{z_k}\}$$

é um recobrimento regular para $\mathcal{F}$ tal que $\text{diam } \{U_{\Delta}\} = 2\Delta$ e de forma que, para cada i , $U_{z_i} \subset V_{z_i}$. De agora em diante, fixaremos um tal recobrimento $\mathcal{U}_{\Delta}$.

Lema 2.4 *Para uma escolha arbitrária de um conjunto $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ com as propriedades acima, se $\varepsilon > 0$ for escolhido suficientemente pequeno, então a seguinte propriedade se verifica: para todo par de pontos x e y em M que não sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_{\Delta}, n+1, \varepsilon)$ -separado ($n \geq 1$), com $d(x, y) < \varepsilon$, e para toda geodésica γ com imagem na folha L_x que passa por x , onde $\text{comp}(\gamma) = r < 2\tau_n\Delta$ e $\gamma(0) = x$, existe uma $(n+1)$ -cadeia $u = \{U_{z_{i_0}}, \dots, U_{z_{i_n}}\}$*

ao longo de γ , onde $z_{i_j} \in Z$, para $j = 0, \dots, n$, de forma que u seja uma $(n+1)$ -cadeia para x e y simultaneamente.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $\gamma : [0, r] \rightarrow L_x$ (com $\gamma(0) = x$) seja tal que $\|\gamma'(t)\| = 1$, para todo $t \in [0, r]$.

Seja $t_j = \frac{j}{n}r$, para $j = 0, \dots, n$, de forma que, pela nossa escolha de γ , $\text{comp}(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} = \frac{r}{n} < 2\tau\Delta$.

Pela nossa escolha de Z , para cada j , existe $i_j \in \{1, \dots, k\}$ de maneira que $d(\gamma(t_j), z_{i_j}) < \alpha/2$ (onde $z_{i_j} \in Z$) e tal que $d_{\mathcal{F}}(\gamma(t_j); z'_{i_j}) < (1 - \tau)\Delta - \lambda/2$, para um certo z'_{i_j} de $t_{z_{i_j}}$ na mesma folha que $\gamma(t_j)$. Seja $u = (U_{z_{i_0}}, \dots, U_{z_{i_n}})$; pela nossa escolha de α (veja as observações que antecedem o Lema 2.3) é claro que $\gamma(t_j) \in U_{z_{i_j}}$, para $j = 0, \dots, n$. Logo:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}}(z'_{i_j}; z'_{i_{j+1}}) &\leq d_{\mathcal{F}}(z'_{i_j}, \gamma(t_j)) + d_{\mathcal{F}}(\gamma(t_j); \gamma(t_{j+1})) + d_{\mathcal{F}}(\gamma(t_{j+1}); z'_{i_{j+1}}) \\ &< 2(1 - \tau)\Delta - \lambda + 2\tau\Delta = 2\Delta - \lambda. \end{aligned}$$

Conclui-se então que as placas de $U_{z_{i_j}}$ e $U_{z_{i_{j+1}}}$ contendo z'_{i_j} e $z'_{i_{j+1}}$, respectivamente, se interceptam. $\square$

Afirmção: $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} \subset B_{\mathcal{F}}(z'_{i_j}, \Delta) \cup B_{\mathcal{F}}(z'_{i_{j+1}}, \Delta)$.

De fato, se a afirmação fosse falsa, existiria $t' \in [t_j, t_{j+1}]$ tal que

$$\gamma(t') \notin B_{\mathcal{F}}(z'_{i_j}, \Delta) \cup B_{\mathcal{F}}(z'_{i_{j+1}}, \Delta).$$

Logo:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}}(\gamma(t'), \gamma(t_j)) &\geq d_{\mathcal{F}}(z'_{i_j}, \gamma(t')) - d_{\mathcal{F}}(z'_{i_j}, \gamma(t_j)) \\ &> \Delta - (1 - \tau)\Delta + \lambda/2 = \tau\Delta + \lambda/2 > \tau\Delta \end{aligned}$$

e, analogamente, $d_{\mathcal{F}}(\gamma(t'), \gamma(t_{j+1})) > \tau\Delta$.

Como $\text{comp}(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) = \text{comp}(\gamma|_{[t_j, t'_j]}) + \text{comp}(\gamma|_{[t'_j, t_{j+1}]})$ e como γ é uma geodésica (da folha L_x), as desigualdades acima nos dizem então que $\text{comp}(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) > 2\tau\Delta$, o que é evidentemente uma contradição. Isto demonstra a afirmação.

Concluimos assim que u é uma $(n+1)$ -cadeia para $x = \gamma(0)$ ao longo de γ .

Nos resta mostrar que u é uma $(n+1)$ -cadeia para y também. Vamos fazê-lo por recorrência.

Se tomarmos $\varepsilon < \alpha/2$, temos:

$$d(y, z_{i_0}) \leq d(y, x) + d(x, z_{i_0}) < \varepsilon + \alpha/2 < \alpha.$$

Assim, $y \in U_{z_{i_0}}$.

Suponhamos agora que $u' = \{U_{z_{i_0}}, \dots, U_{z_{i_n}}\}$ seja uma cadeia simultânea para x e y ($m \leq n+1$). Sejam $(P_1^x, \dots, P_m^x)$ e $(P_1^y, \dots, P_m^y)$ cadeias de placas para x e y , respectivamente, associadas a u' .

Como x e y não são $(\mathcal{F}, U_\Delta, n, \varepsilon)$ -separados, segue que $d_H(P_m^x, P_m^y) < \varepsilon$.

Vamos agora observar o seguinte: o ε escolhido acima pode ser tomado de maneira que se $d_H(P_1, P_2) < \varepsilon$, onde P_1 e P_2 são placas de um mesmo aberto regular $U_z \in \mathcal{U}_\Delta$ ($z \in Z$), então $T_z \cap P_1$ e $T_z \cap P_2$ estão a uma distância (na métrica de M') menor que $\beta/2$ (β como no Lema 2.3).

Sejam então $z'_{i_m} = P_m^x \cap T_{z_{i_m}}$ e $y_1 = P_m^y \cap T_{z_{i_m}}$. Pela nossa escolha de ε , $d(z'_{i_m}, y_1) < \beta/2$. Além disso, $d(z'_{i_m}, z_{i_m}) \leq d(z'_{i_m}, \gamma(t_{i_m})) + d(\gamma(t_{i_m}), z_{i_m}) < \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$, e, conforme já vimos, $d(z'_{i_m}, z'_{i_{m+1}}) < 2\Delta - \lambda$. Então, pela observação que segue ao Lema 2.3, temos que a folha passando por y_1 intercepta $T_{z_{i_{m+1}}}$ em um ponto y_2 tal que $d(z'_{i_{m+1}}, y_2) < \beta$. Segue então do Lema 2.3 que $d_{\mathcal{F}}(y_1, y_2) < 2\Delta$, ou seja, $U_{z_{i_{m+1}}} \cap P_m^y \neq \emptyset$, o que mostra que $\{U_{z_{i_0}}, \dots, U_{z_{i_m}}, U_{z_{i_{m+1}}}\}$ é uma cadeia para y também, conforme queríamos. $\square$

Podemos agora terminar a demonstração do Teorema 2.1.

Sejam Δ, ε suficientemente pequenos, seja $U \in \mathcal{U}_\Delta$, P e Q duas placas de U tais que $d_H(P, Q) < \varepsilon$. Seja L_Q a folha de $\mathcal{F}$ contendo a placa Q . Vamos definir então a aplicação $\pi_{PQ} : P \rightarrow L_Q$ que envia cada ponto z de P sobre o ponto de intersecção de L_Q com $\exp(B_{\mathcal{F}^\perp}(O_z, \overline{C}\varepsilon))$ (onde $\overline{C}$ é uma constante que depende apenas do recobrimento $\mathcal{U}_\Delta$). É fácil ver que, para uma escolha conveniente de $\Delta, \varepsilon, \overline{C}$, π_{PQ} está bem definida e é contínua. Além disso, se U_1 é outro aberto de $\mathcal{U}_\Delta$ com $P \cap P_1 \neq \emptyset$ e $Q \cap Q_1 \neq \emptyset$, então as aplicações π_{PQ} e $\pi_{P_1Q_1}$ coincidem na intersecção dos seus domínios.

Agora, sejam x e y dois pontos que não sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ -separados e tais que $d(x, y) < \varepsilon$, onde Δ, ε e $\mathcal{U}_\Delta$ verificam as condições anteriores (é claro que x e y estão em um mesmo aberto de $\mathcal{U}_\Delta$). Consideremos a aplicação $\bar{\pi} : B_{\mathcal{F}}(O_x, 2\tau n\Delta) \rightarrow L_y$ (a folha passando por y) dada por

$$\bar{\pi}(v) = \pi_{PQ}(\exp^{\mathcal{F}}(v)) ,$$

onde P e Q são respectivamente as n -ésimas placas de x e y em relação a uma n -cadeia u ao longo da geodésica $\gamma(t) = \exp^{\mathcal{F}}(tv)$ ($t \in [0, 1]$) construída como no último lema. Pelo Lema 2.4 e pelas considerações acima, é claro que $\bar{\pi}$ está bem definida, é contínua, e verifica

$$\sup_{\|v\| \leq 2\tau n\Delta} d(\exp^{\mathcal{F}}(v), \bar{\pi}(v)) \leq \overline{C}\varepsilon .$$

Embora o ponto $\bar{\pi}(0)$ não coincida necessariamente com y , podemos fazer uma pequena modificação local de $\bar{\pi}$, obtendo uma aplicação $\bar{\pi}' \in \Omega(x, y, 2\tau n\Delta)$, de maneira que $\delta(\bar{\pi}') \leq \overline{C}'\varepsilon$ (onde $\overline{C}'$ é outra constante que depende apenas de $\mathcal{U}_\Delta$). A $\bar{\pi}'$ assim obtida pode ser considerada como a composição de $\bar{\pi}$ com uma isometria $i : B_{\mathcal{F}}(\bar{\pi}(O_x), 4\Delta_0) \rightarrow B_{\mathcal{F}}(y, 4\Delta_0)$ e tal que $i(\bar{\pi}(0)) = \bar{\pi}'(O_x) = y$.

De maneira análoga, podemos obter uma aplicação $\bar{\pi}'' \in \Omega(y, x, 2\tau n\Delta)$ de maneira que $\delta(\bar{\pi}'') \leq \overline{C}''\varepsilon$ ($\overline{C}''$ é outra constante como acima).

Seja $\overline{C}_0 = \max\{\overline{C}', \overline{C}''\}$; então é claro que $\delta_{2\tau n\Delta}(x, y) \leq 2\overline{C}_0\varepsilon$.

Ora, o que acabamos de mostrar é que se $\delta_{2\tau n\Delta}(x, y) > 2\overline{C}_0\varepsilon$, então x e y verificam uma das seguintes alternativas:

- (i) ou x e y são $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ -separados;
- (ii) ou $d(x, y) \geq \varepsilon$.

Consideremos um recobrimento de M por bolas de raio $\varepsilon/2$ e seja $N(\varepsilon)$ o número de conjuntos neste recobrimento. Então, uma das alternativas se verifica:

- (i) $N(\mathcal{F}, g, 2\tau n\Delta, 2\overline{C}_0\varepsilon) \leq N(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$;
- (ii) $N(\mathcal{F}, g, 2\tau n\Delta, 2\overline{C}_0\varepsilon) \leq N(\varepsilon)$.

Daí, e do fato que $N(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ são inteiros positivos, vem que:

$$N(\mathcal{F}, g, 2\tau n\Delta, 2\overline{C}_0\varepsilon) \leq N(\varepsilon) \cdot N(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$$

ou seja

$$\frac{1}{2\tau n\Delta} \log N(\mathcal{F}, g, 2\tau n\Delta, 2\overline{C}_0\varepsilon) \leq \frac{1}{2\tau n\Delta} [\log N(\varepsilon) + \log N(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)] .$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, da última desigualdade segue que:

$$h(\mathcal{F}, g, \overline{C}_0\varepsilon) \leq \frac{1}{2\tau\Delta} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, \varepsilon) .$$

Fazendo agora $\varepsilon \rightarrow 0^+$, e como $2\Delta = \text{diam}(\mathcal{U}_\Delta)$, da última desigualdade vem que:

$$h(\mathcal{F}, g) \leq \frac{1}{\tau \text{diam} \mathcal{U}_\Delta} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta) .$$

Como τ pode ser tomado arbitrariamente próximo de 1 na última desigualdade, segue que

$$h(\mathcal{F}, g) \leq \frac{1}{\text{diam} \mathcal{U}_\Delta} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta) .$$

Ou seja,

$$h(\mathcal{F}, g) \leq \sup_{\mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{\text{diam} \mathcal{U}} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \right\} .$$

O estabelecimento desta última desigualdade conclui então a demonstração do Teorema 2.1. $\square$

Corolário 2.2 *Sejam g e g' duas métricas riemannianas sobre M e C_1 e C_2 duas constantes reais positivas tais que, para todo vetor v tangente a $\mathcal{F}$ tenhamos:*

$$C_1 \|v\|_g \leq \|v\|_{g'} \leq C_2 \|v\|_g \quad (*)$$

(onde $\|v\|_g$ e $\|v\|_{g'}$ designam, respectivamente, as normas de v nas métricas g e g').

Então:

$$C_2^{-1} h(\mathcal{F}, g) \leq h(\mathcal{F}, g') \leq C_1^{-1} h(\mathcal{F}, g) . \quad (**)$$

Em particular, o fato da entropia geométrica de $\mathcal{F}$ ser nula independe da métrica riemanniana.

Demonstração: Por (*), é fácil ver que se x_1 e x_2 são dois pontos em uma mesma folha de $\mathcal{F}$, então:

$$C_1 d_{\mathcal{F}}^g(x_1, x_2) \leq d_{\mathcal{F}}^{g'}(x_1, x_2) \leq C_2 d_{\mathcal{F}}^g(x_1, x_2)$$

(onde $d_{\mathcal{F}}^g(x_1, x_2)$ e $d_{\mathcal{F}}^{g'}(x_1, x_2)$ designa a distância de x_1 e x_2 na folha $\mathcal{F}$ em relação à métrica g e g' , respectivamente). Assim, fixado um recobrimento $\mathcal{U}$ regular para $\mathcal{F}$, e se P é uma placa qualquer de um aberto regular em $\mathcal{U}$, teremos que:

$$C_1 \text{diam}_g(P) \leq \text{diam}_{g'}(P) \leq C_2 \text{diam}_g(P)$$

(onde $\text{diam}_g(P)$ e $\text{diam}_{g'}(P)$ designam o diâmetro de P em relação às métricas g e g' , respectivamente).

É claro então que:

$$(C_2 \text{diam}_g(P))^{-1} \leq (\text{diam}_{g'}(P))^{-1} \leq (C_1 \text{diam}_g(P))^{-1} .$$

Segue então que:

$$(C_2 \text{diam}_g(\mathcal{U}))^{-1} \leq (\text{diam}_{g'}(\mathcal{U}))^{-1} \leq (C_1 \text{diam}_g(\mathcal{U}))^{-1} .$$

Como a última desigualdade é verdadeira para todo recobrimento regular de $\mathcal{F}$, pela proposição 2.1 e pelo Teorema 2.1, segue (**).

A segunda asserção do corolário segue do fato de que, sendo M compacta, sempre existem constantes C_1 e C_2 como no enunciado (ver Prop. 3.1). $\square$

Corolário 2.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão q sobre uma variedade compacta riemanniana (M, g) . Então existe uma constante $a \geq 1$ tal que*

$$h(\mathcal{F}, g) \leq 2qa . \quad (2.1)$$

Em particular, a entropia geométrica de $\mathcal{F}$ é finita.

Demonstração: Ver [G;L;W], corolário 3.6. $\square$

Na seqüência, daremos alguns exemplos da entropia geométrica de algumas folheações.

Exemplo 2.3 Seja M uma variedade riemanniana compacta com métrica g e $\mathcal{F}$ uma folheação riemanniana sobre M (veja [Mo], cap. 3). Então, dado qualquer recobrimento regular $\mathcal{U}$ para $\mathcal{F}$, o gerador $H_1(\mathcal{U})$ do pseudogrupo de holonomia de $\mathcal{F}$ em relação a $\mathcal{U}$ é constituído apenas de isometrias; segue então do Exemplo 2.1 e do Teorema 2.1 acima que $h(\mathcal{F}, g) = 0$.

Por exemplo, uma folheação $\mathcal{F}$ onde todas as folhas são compactas e tem holonomia finita é riemanniana e, portanto, sua entropia geométrica é nula. Uma conjectura de [G; L; W] é a seguinte: uma folheação (não riemanniana) onde todas as folhas são compactas tem, necessariamente, entropia geométrica nula.

Exemplo 2.4 Novamente, seja M uma variedade riemanniana compacta. Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo classe C^r ($r \geq 1$) satisfazendo às seguintes condições:

- (1) Existem sub-fibrados E^s e E^u do fibrado tangente TM tal que $TM = E^s \oplus E^u$.
- (2) E^s e E^u são invariantes por df , ou seja, para todo $x \in M$, $df_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ e $df_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u$.
- (3) Existe uma métrica riemanniana g em M e uma constante $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|df_x^n(v)\|_g \leq \lambda^n \|v\|_g \quad (\text{onde } v \in E_x^s, n \in \mathbb{N}) ;$$

$$\|df_x^{-n}(v)\|_g \leq \lambda^n \|v\|_g \quad (\text{onde } v \in E_x^u, n \in \mathbb{N})$$

($\| \cdot \|_g$ indica a norma em relação à métrica g).

Um difeomorfismo satisfazendo às condições acima é chamado de difeomorfismo de Anosov. Pode ser demonstrado (ver [A]) que E^s e E^u são completamente integráveis, determinando duas folheações transversais em M , $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$ chamadas, respectivamente, de folheação estável e instável. Tais folheações são de classe C^r .

Um exemplo típico de tais difeomorfismos são fornecidos por automorfismos hiperbólicos (veja [Pa; Me], cap. 4, §4) sobre o toro de dimensão m , T^m .

Afirmção: $h(\mathcal{F}^s, g) = 0$.

De fato: Consideremos em M a métrica f^*g , onde, para todo $x \in M$ e $v \in T_x M$, $\|v\|_{f^*g} = \|df_x^{-1}(v)\|_g$. Como df preserva E^s e como f é um difeomorfismo, temos que

$$h(\mathcal{F}^s, g) = h(\mathcal{F}^s, f^*g) . \tag{1}$$

Agora, pelo item (3) da definição acima, temos, para todo v tangente a $\mathcal{F}^s$ em x que:

$$\|df_x(v)\|_g \leq \lambda \|v\|_g$$

donde

$$\lambda^{-1} \|v\|_g \leq \|v\|_{f^*g} .$$

Pelo Corolário 2.2, temos então que

$$h(\mathcal{F}^s, f^*g) \leq \lambda h(\mathcal{F}^s, g) . \quad (2)$$

De (1), (2), e do fato que $\lambda < 1$ vem que $h(\mathcal{F}^s, g) = 0$, conforme afirmamos.

De maneira análoga, podemos provar que $h(\mathcal{F}^u, g) = 0$.

Seja agora $\Phi_t : M \rightarrow M$ ($t \in \mathbb{R}$) um fluxo não singular de M , onde M é como antes.

Φ_t será dito um fluxo de Anosov se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

- (1) Existem sub-fibrados E, E^s e E^u do fibrado tangente TM tal que $TM = E \oplus E^s \oplus E^u$.
- (2) E é o sub-fibrado de dimensão 1 tangente a Φ_t .
- (3) E^s e E^u são invariantes por $d(\Phi_t)$, ou seja, para todo $x \in M$, $d(\Phi_t)_x(E_x^s) = E_{\Phi_t(x)}^s$ e $d(\Phi_t)_x(E_x^u) = E_{\Phi_t(x)}^u$.
- (4) Existe uma métrica g em M e uma constante $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\|d(\Phi_t)_x(v)\|_g \leq \lambda^t \|v\|_g \quad (v \in E_x^s, t \geq 0)$$

$$\|d(\Phi_{-t})_x(v)\|_g \leq \lambda^t \|v\|_g \quad (v \in E_x^u, t \geq 0) .$$

Da mesma maneira que para difeomorfismos de Anosov, pode ser provado que $E \oplus E^s$, $E \oplus E^u$, E^s e E^u determinam folheações, respectivamente, a folheação fracamente estável $\mathcal{F}^{ws}$, a folheação fracamente instável $\mathcal{F}^{wu}$, a folheação fortemente estável $\mathcal{F}^{ss}$ e a folheação fortemente instável $\mathcal{F}^{su}$.

Um exemplo típico de fluxo de Anosov nos é dado pelo fluxo geodésico de uma variedade compacta riemanniana M com curvatura negativa.

Outro exemplo é o seguinte: se M é uma variedade riemanniana compacta e $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de Anosov, consideremos $M_t = M \times \mathbb{R} / \sim$, onde $(f(x), s) \sim (x, s + 1)$; consideremos então o fluxo em M_f dado por $f_t([x, s]) = [x, s + t]$ (onde $[x, s] \in M_t$). Pode ser demonstrado então que f_t é um fluxo de Anosov.

Da mesma maneira que antes, pode ser provado que a entropia geométrica de $\mathcal{F}^{SS}$ e $\mathcal{F}^{SW}$ é nula.

2.5 Entropia de folheações de codimensão 1

Neste parágrafo, iremos estabelecer uma condição necessária (e suficiente) para a não nulidade da entropia geométrica $h(\mathcal{F}, g)$ de uma folheação de codimensão 1 de uma variedade compacta M com métrica riemanniana g . Novamente iremos supor que a classe da folheação seja C^r , onde $r \geq 2$.

Começaremos por definir uma folha que, em um certo sentido, apresenta um fenômeno de recorrência.

Definição 2.5 *Diremos que uma folha L de uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão 1 é uma folha-mola se existir uma curva fechada γ em L e um arco T transversal à $\mathcal{F}$ contendo $\gamma(0)$ tal que:*

- (i) *existe um ponto x de $L \cap T$, $x \neq \gamma(0)$, que pertence ao domínio de definição de h_γ (a aplicação de holonomia associada a γ em $\gamma(0)$);*
- (ii) *$h_\gamma^n(x) \rightarrow \gamma(0)$ quando $n \rightarrow +\infty$.*

Pictoricamente, L se espirala em torno dela mesma, como uma mola (ver figura 2.6).

Vamos então enunciar e demonstrar o resultado principal desta seção, que nos fornece uma condição necessária e suficiente para a não nulidade da entropia geométrica de uma folheação de codimensão 1 em termos de uma folha-mola.

Teorema 2.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 de uma variedade riemanniana compacta com métrica g . Então $h(\mathcal{F}, g) = 0$ se e somente se $\mathcal{F}$ não contém nenhuma folha-mola.*

Figura 2.5

Demonstração da condição necessária

Vamos começar por demonstrar o seguinte:

Lema 2.5 *Seja $X = [a, b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, I_1 e I_2 dois intervalos abertos, com $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset$, ambos contidos em $I =]a, b[$. Sejam f_1 e f_2 homeomorfismos de I sobre I_1 e I_2 , respectivamente. Sejam ainda $H_1 = \{id_x, f_1, f_2, f_1^{-1}, f_2^{-1}\}$ e H o pseudo-grupo de homeomorfismos gerado por H_1 . Então $h(H, H_1) \geq \log 2$.*

Demonstração: Seja $i_1, i_2, \dots, i_n$ uma seqüência de inteiros iguais a 1 ou 2 e coloquemos:

$$I_{i_1, i_2, \dots, i_n} = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_n}(I) .$$

Suponhamos ainda que $\varepsilon > 0$ seja tal que $d(I_1, I_2) > \varepsilon$.

Vamos escolher um ponto c de I e colocar

$$x(i_1, i_2, \dots, i_n) = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_n}(c) .$$

O conjunto de todos os tais pontos contém 2^n elementos distintos. Consideremos agora dois pontos distintos quaisquer deste conjunto, digamos:

$$x_1 = x(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n)$$

$$x_2 = x(i_1, i_2, \dots, i_k, j_{k+1}, \dots, j_n)$$

com $0 \leq k < n$ e $j_{k+1} \neq i_{k+1}$.

Consideremos o elemento $\varphi = f_{i_k}^{-1} \circ f_{i_{k-1}}^{-1} \circ \dots \circ f_{i_1}^{-1}$ de H_n ; é claro que φ está definido sobre o intervalo $I_{i_1, i_2, \dots, i_k}$. É claro também que este intervalo contém os pontos x_1 e x_2 . Segue então que $\varphi(x_1) \in I_{i_{k+1}}$ e $\varphi(x_2) \in I_{j_{k+1}}$. Como $i_{k+1} \neq j_{k+1}$, temos então que $d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) > d(I_1, I_2) > \varepsilon$ (aqui, a distância entre conjuntos é a distância habitual entre subconjuntos de $\mathbb{R}$). Logo, os pontos x_1 e x_2 são (H, H_1, n, ε) -separados, ou seja, $N(H, H_1, n, \varepsilon) \geq 2^n$. O lema segue então se fizermos duas vezes a passagem ao limite. $\square$

Vamos agora demonstrar a condição necessária do Teorema 2.2.

É claro que a existência de uma folha-mola é invariante por recobrimentos finitos, além disso, a nulidade de $h(\mathcal{F}, g)$ também é invariante por tais recobrimentos, como podemos ver facilmente. Assim, podemos supor que $\mathcal{F}$ seja transversalmente orientável.

Suponhamos então que $\mathcal{F}$ possua uma folha-mola. A idéia é encontrar um recobrimento regular $\mathcal{U}$ onde o pseudo-grupo de holonomia $H(\mathcal{U})$ contenha um subpseudo-grupo isomorfo àquele do lema anterior; seguirá então, do Teorema 2.1, que $h(\mathcal{F}, g) > 0$.

Para um conveniente recobrimento $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$, a existência de uma folha-mola implica na existência em $H(\mathcal{U})$ de dois homeomorfismos locais de $\mathbb{R}$, digamos f e g , e tais que, para um certo $x_0 \in \mathbb{R}$, se tenha:

- (a) $x_0 \in \text{dom } f$ e $f(x_0) > x_0$;
- (b) $[x_0, f(x_0)] \subset \text{dom } g$;
- (c) quando $n \rightarrow +\infty$, $g^n(f(x_0)) \rightarrow x_0^+$.

Logo, para todo $t \in]x_0, f(x_0)]$, $g(t) < t$.

Seja agora I um intervalo do tipo $]x_0, y[$. Se y está suficientemente próximo de x_0 e se n é grande o suficiente, $g^n \circ f = f_1$ está definido em I e $I_1 = f_1(I) \subset I$. Da mesma forma, se p é grande o suficiente, $f_2 = g^p$ está definido em I e verifica $I_2 = f_2(I) \subset I$ e, além disso, $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset$.

Uma vez que f e g estão em $H(\mathcal{U})$, f_1 e f_2 também estão. Logo, o sub-pseudogruppo $\{Id_I, f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}\}$ está contido em $H(\mathcal{U})$ e, como este sub-pseudogruppo é isomorfo àquele do lema anterior, temos que, conforme já observamos, $h(\mathcal{F}, g) > 0$. Isto demonstra a condição necessária do teorema. $\square$

A demonstração da condição suficiente é mais longa e trabalhosa, e irá depender de uma série de resultados e lemas.

Iremos rever aqui algumas definições e conceitos, já vistos no Capítulo 1, a título de facilitar a exposição da demonstração (aconselhamos ao leitor ver a seção 1.5). Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 sobre uma variedade compacta M e Ω um aberto saturado. Um minimal local de Ω será um fechado (em Ω) que é não vazio, saturado e minimal em relação a estas propriedades. Um minimal local só pode ser de um dos três seguintes tipos:

- (1) uma folha própria;
- (2) uma componente conexa Ω_0 de Ω onde todas as folhas são densas em Ω_0 ;
- (3) um minimal local do tipo “excepcional”.

A reunião de minimais locais de Ω é denominado o centro de Ω e denotado por $C(\Omega)$. Quando $\mathcal{F}$ é C^2 , $C(\Omega) \neq \emptyset$ e é fechado em Ω . Se define então uma seqüência de fechados saturados M_p em M da maneira seguinte:

$$M_0 = C(M)$$

$$M_p - M_{p-1} = C(M - M_{p-1}) .$$

As folhas de $M_p - M_{p-1}$ são ditas de nível p . Se $\mathcal{F}$ é de classe C^2 (pelo menos) a reunião dos M_p é densa em M .

Recordemos o resultado de dois teoremas, cuja demonstração pode ser encontrada em [C; C-2], seção 3:

Teorema: *Seja L uma folha de $\mathcal{F}$ como nas condições anteriores. Suponha que por I passe uma folha-mola. Então L tem crescimento exponencial.* $\square$

Teorema: *Seja Ω_0 um minimal local de $\mathcal{F}$ do tipo excepcional. Então, existe uma folha-mola em Ω_0 .* $\square$

Assim, se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 sobre M sem folha-mola, um minimal local de $\mathcal{F}$ não pode ser do tipo (3) acima. Quanto aos minimais locais do tipo (2), eles têm necessariamente holonomia trivial; caso contrário, a densidade das folhas em Ω_0 permitiria a construção de uma folha-mola. Resumindo, se $\mathcal{F}$ não possui folha-mola, seus minimais locais só podem ser de um dos seguintes tipos:

- (1)' uma folha própria;
- (2)' um aberto saturado com holonomia trivial.

Sobre os minimais locais do tipo (1)', recordemos que as folhas próprias de nível finito têm crescimento exatamente polinomial (ver parágrafo 1.5). As folhas de nível infinito, assim como as contidas em abertos do tipo (2)', podem vir a ter um crescimento exponencial.

Quanto à estrutura dos abertos do tipo (2)', observemos que:

- (i) todas as suas folhas estão no mesmo nível;

- (ii) existe um fluxo contínuo sobre M , que é não singular exatamente sobre $\overline{\Omega}$, levando folhas de $\mathcal{F}$ difeomorficamente sobre folhas de $\mathcal{F}$. As linhas deste fluxo em $\overline{\Omega}$ são arcos compactos transversais a $\mathcal{F}$ (ver parágrafo 1.5);
- (iii) se Ω é de nível p , a fronteira $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$ é constituída de folhas próprias de nível estritamente inferior (ver [C; C-1], lema 3.6).

Podemos dar então prosseguimento à demonstração do Teorema 2.2.

Vamos supor que $\mathcal{F}$ não possua folha-mola. Nosso objetivo é mostrar que daí irá decorrer que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) = 0$ para todo recobrimento regular $\mathcal{U}$. O Teorema 2.2 seguirá então do Teorema 2.1.

Fixemos de agora em diante um tal recobrimento regular $\mathcal{U}$. Observemos que o pseudo-grupo de holonomia $H(\mathcal{U})$ associado a $\mathcal{U}$ opera sobre um espaço X que é uma reunião disjunta de um número finito de intervalos realivamente compactos de $\mathbb{R}$. Seja $P \subset X$ a reunião dos pontos x que estão em uma órbita (por elementos de $H(\mathcal{U})$) tendo crescimento polinomial. Cada ponto em P corresponde a uma placa de $\mathcal{U}$ contida em uma folha de crescimento polinomial. Sejam K a aderência de P em X e Ω uma componente conexa de $X - K$.

Lema 2.6 *As folhas de $\mathcal{F}$ passando por placas de $\mathcal{U}$ correspondentes aos pontos de Ω em X estão em um aberto do tipo (2)' e a fronteira de Ω em X está em P .*

Demonstração: Como a reunião dos M_p é densa em M , existe um ponto x de Ω tal que a folha L_x , passando pela placa correspondente em M , é de nível finito. Como $x \notin P$, L_x não é do tipo (1)', caso contrário, L_x teria crescimento polinomial. Logo, L_x pertence a um aberto do tipo (2)'.

Tal aberto determina em X um aberto contendo x . Seja $I \subset X$ a componente conexa deste aberto contendo x . Pelas considerações feitas antes da demonstração da condição suficiente do Teorema 2.2, as órbitas passando por pontos da fronteira de I correspondem

às placas de folhas de $\mathcal{F}$ que são próprias e com crescimento polinomial. Assim os pontos da fronteira de I estão em P , donde se conclui que $\Omega = I$ (já que, obviamente, $I \subset \Omega$). $\square$

Seja $A \subset X$ um conjunto $(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ -separado de cardinalidade máxima e consideremos os intervalos I contidos em X , componentes conexas de $X - A$ que tenham extremidades em A (tais intervalos podem ser abertos ou fechados). É fácil ver que a diferença entre a cardinalidade de A e o número destes intervalos I é majorada pelo número de componentes conexas de X . Portanto, para estudarmos $h(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \varepsilon)$, é suficiente estudarmos o crescimento das componentes I quando $n \rightarrow +\infty$.

Consideremos P e K como no lema precedente. Um intervalo I do tipo considerado acima será dito do tipo (a) se $I \cap K \neq \emptyset$ e do tipo (b) caso contrário. Decorre então do Lema 2.6 que os intervalos do tipo (b) estão contidos em um aberto saturado com holonomia trivial.

Sejam $N_a(n, \varepsilon)$ e $N_b(n, \varepsilon)$ o número de intervalos do tipo (a) e (b), respectivamente. Nosso objetivo é demonstrar que estes dois números crescem polinomialmente com n se ε é suficientemente pequeno.

Lema 2.7 *Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $N_a(n, \varepsilon)$ tem crescimento no máximo polinomial quando n cresce.*

Demonstração: Consideremos um conjunto finito $Z \subset P$ que verifica as seguintes condições:

- (i) K é coberto por bolas de centro em pontos de Z e raio $\varepsilon/3$;
- (ii) para toda componente conexa de $X - K$ de comprimento superior a $\varepsilon/3$, as extremidades (ou extremidade) desta componente em K está em Z (note que existe apenas um número finito de tais componentes). Pelo lema anterior, devemos notar que o bordo das componentes de $X - K$ está em P , o que torna possível escolher um tal conjunto Z .

Seja $Z_n = \{f(Z) | z \in Z \text{ e } f \in H_n(\mathcal{U})\}$. Seja então I um intervalo do tipo (a), como acima. Já que A é $(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ -separado, e as extremidades de I estão em A , existe um elemento $h \in H_n(\mathcal{U})$ tal que o comprimento de $h(I)$ é maior ou igual a ε . Como $I \cap K \neq \emptyset$, temos que $h(I) \cap K$ contém, necessariamente, pelo menos um ponto de Z . Logo, I contém pelo menos um elemento de $h^{-1}(Z) \subset Z_n$, ou seja, $Z_n \cap I \neq \emptyset$. Concluimos então que a cardinalidade destes intervalos, ou seja, $N_a(n, \varepsilon)$ é majorada pela cardinalidade de Z_n . Mas, uma vez que $Z \subset P$, a cardinalidade de Z_n tem crescimento no máximo polinomial quando n cresce, e assim, também $N_a(n, \varepsilon)$ cresce no máximo polinomialmente com n . O lema está demonstrado. $\square$

A demonstração de que $N_b(n, \varepsilon)$ também tem crescimento no máximo polinomial com n é um pouco mais extensa. Começemos com:

Lema 2.8 *Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então, o número de componentes conexas de $X - K$ que contém um intervalo I do tipo (b) tem crescimento no máximo polinomial quando n cresce.*

Demonstração: Sejam Ω_1 e Ω_2 duas componentes de $X - K$. Diremos que a distância entre Ω_1 e Ω_2 é m (inteiro positivo) se este número for o menor dos inteiros positivos n tal que existe $h \in H_n(\mathcal{U})$ e $x_1 \in \text{dom}(h) \cap \Omega_1$ (ou $x_2 \in \text{dom}(h) \cap \Omega_2$) tal que $h(x_1) \in \Omega_2$ (ou $h(x_2) \in \Omega_1$). Se não existir tal m , diremos que esta distância é infinita.

Fixemos uma componente conexa Ω_0 de $X - K$. Seja $\tilde{\Omega}_0$ o saturamento de Ω_0 por $H(\mathcal{U})$, ou seja, as componentes conexas em $X - K$ dos pontos y tal que existe $x \in \Omega_0$ e $h \in H(\mathcal{U})$ verificando $h(x) = y$. Da definição de $\tilde{\Omega}_0$, da demonstração do Lema 2.6, e por um resultado sobre estrutura de abertos conexos saturados (ver parágrafo 1.3) segue que a reunião das extremidades das componentes conexas de $\tilde{\Omega}_0$ é uma reunião finita de órbitas por elementos de $H(\mathcal{U})$ que têm crescimento polinomial. As folhas correspondentes a estas extremidades são próprias. Daí, o número de componentes conexas de $X - K$ a uma

distância inferior a n de Ω_0 tem crescimento no máximo polinomial com n .

A demonstração do lema é agora uma decorrência de duas observações. A primeira é que se Ω contém um intervalo do tipo (b), então Ω está a uma distância inferior a n de uma componente conexa Ω' de $X - K$ de comprimento superior a ε . A segunda é o fato de existir apenas um número finito de componentes de $X - K$ de comprimento superior a ε . □

Antes de continuarmos a demonstração, precisaremos de alguns resultados.

Seja $N \subset \mathbb{R}$ uma subvariedade de dimensão 1, não necessariamente conexa e possivelmente com bordo não vazio. Seja Γ um pseudogrupo sobre N gerado por uma família finita Γ_0 de difeomorfismos locais de classe C^r , $r \geq 2$, e que preservam orientação. Vamos supor, por simplicidade, que os elementos de Γ tenham domínio aberto.

Seja $\mathcal{J}$ uma coleção de subintervalos compactos de N com interior disjunto. Seja $g \in \Gamma$; diremos que g é uma permutação de $\mathcal{J}$ se $\text{dom}(g)$ é compacto e se, para cada $J \in \mathcal{J}$, tivermos: ou $\text{int}(J) \cap \text{dom}(g) = \emptyset$ ou $J \subseteq \text{dom}(g)$ e $g(J) \in \mathcal{J}$.

Se Γ_0 consistir apenas de permutações de $\mathcal{J}$, diremos que Γ é um pseudogrupo de permutação de $\mathcal{J}$ finitamente gerado. Fixemos esta hipótese de agora em diante.

Vamos supor que $g \in \Gamma$ e que tenha a forma

$$g = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1$$

onde cada $h_i \in \Gamma_0$ e está restrito a uma parte adequada do seu domínio. Seja ainda

$$g_p = h_p \circ h_{p-1} \circ \cdots \circ h_1, \quad 1 \leq p \leq m.$$

(dessa forma, $g = g_m$). Se $J \in \mathcal{J}$ e se $J \subset \text{dom}(g)$, escreveremos $J_p = g_p(J)$, $1 \leq p \leq m$.

Diremos que um elemento $g \in \Gamma$ é uma cadeia simples com base J se $J = \text{dom}(g)$ e se $J, J_1, \dots, J_m$ forem elementos distintos de g . Se $J_1, \dots, J_m$ forem distintos e $J = J_m$, diremos que g é uma cadeia fechada com base J . Se h é uma cadeia simples com base J

e g uma cadeia fechada com base $h(J)$, diremos que $h^{-1}.g.h$ é uma cadeia básica fechada com base J .

Fixemos $J = [x, y] \in \mathcal{J}$ e seja G o conjunto de elementos $g \in \Gamma$ tais que $J = \text{dom}(g)$ e $g(J) = J$. Então G é um grupo de difeomorfismos de J sobre ele mesmo, os quais são classe C^2 e preservam orientação. Seja $G_0 \subset G$ o conjunto das cadeias básicas fechadas com base J . É fácil ver que G_0 é um conjunto (simétrico) de geradores para G (possivelmente infinito). No caso em que G_0 é finito (e este é o caso que irá nos interessar) o lema abaixo é trivial. Uma demonstração para o caso geral pode ser encontrada em [C-C,1], Teorema 2.4.

Lema 2.9 *Seja $b \in]x, y[= \text{int}(J)$. Então existe $a \in]x, b[$ tal que $a < f(b)$, para todo $f \in G_0$.* $\square$

Retornemos à demonstração do Teorema 2.2. Pelo Lema 2.8, para estudar o crescimento de $N_b(n, \varepsilon)$ é suficiente estudar o crescimento de intervalos do tipo (b) contidos em uma componente conexa fixa Ω_0 de $X - K$. Iremos denotar este número por $N_b(n, \varepsilon, \Omega_0)$.

Consideremos o conjunto

$$H_n(\Omega_0) = \{h \in H_n(\mathcal{U}) \mid \exists x \in \text{dom}(h) \cap \Omega_0 \text{ com } h(x) \in \Omega_0\}.$$

Agora, segue da estrutura dos abertos saturados sem holonomia, conforme já vimos, que podemos definir um fluxo Φ_t sobre Ω_0 que leva órbitas de $H(\mathcal{U})$ em órbitas de $H(\mathcal{U})$ e que é não singular precisamente sobre Ω_0 . O caráter local de Φ_t provém do fato de que uma (ou duas) extremidades de Ω_0 podem coincidir com uma extremidade de uma componente conexa de X .

Se $h \in H_n(\Omega_0)$, então h coincide em $\Omega_0 \cap \text{dom}(h)$ com $\Phi_{t(h)}$, onde $t(h)$ é o “período” de h (ou seja, se $x \in \Omega_0 \cap \text{dom } h$, então $\Phi_{t(h)}(x)$ está na intersecção da órbita de h com Ω_0).

Lema 2.10 *Para toda componente conexa Ω_0 de $X - K$, existe uma constante $C > 0$ tal que, se $h \in H_n(\Omega_0)$, então $|t(h)| \leq C.n$.*

Demonstração: Nosso objetivo aqui é usar o Lema 2.9. Para isso devemos notar o seguinte: pelo Lema 2.6, $H(\mathcal{U})$ é um pseudogrupo de permutações para o conjunto de todas as componentes conexas de $X - K$. Além disso, se $h \in H_n(\Omega_0)$ é fácil ver (pela estrutura dos abertos saturados sem holonomia) que se $\Omega_1 = \text{dom } h \cap \Omega_0$, então $h(\Omega_1) = \Omega_1$. É claro que para todo tal h , vale que:

$$h = h_j \circ h_{j-1} \circ \dots \circ h_1 \quad (2.2)$$

onde os $h_i \in H_1(\mathcal{U})$ e $j \leq n$. A decomposição (2.2) determina uma única seqüência

$$\Omega_1, \Omega_1, \dots, \Omega_j \quad (2.3)$$

de sub-intervalos, componentes conexas de $X - K$, com as propriedades:

- (i) $\Omega_1 = \Omega_j$;
- (ii) Ω_i está contido na componente $X - K$ contendo $h_i \circ h_{i-1} \circ \dots \circ h_1(x)$, $x \in \Omega_1$.

Vamos então primeiro provar o lema para as cadeias básicas fechadas com base em um sub-intervalo Ω_1 fixo de Ω_0 .

Fixemos h como sendo uma tal cadeia; então as decomposições em (2.2) e (2.3) nos mostram que existe uma seqüência de intervalos do tipo:

$$\Omega_1, \Omega_{a_1}, \Omega_{a_2}, \dots, \Omega_{a_p}, \Omega_{b_1}, \dots, \Omega_{b_m}, \Omega_{a_p}, \dots, \Omega_{a_1}, \Omega_1 ,$$

onde todas as componentes $\Omega_1, \Omega_{a_1}, \dots, \Omega_{a_p}, \Omega_{b_1}, \dots, \Omega_{b_m}$ são distintas e tal que $\Omega_1 = \text{dom } h \cap \Omega_0$. Seja Φ um fluxo como nas considerações que antecederam ao lema. Se $t(h)$ é um período de h_0 , temos que $h = \Phi_{t(h)}$ em Ω_1 . Pelo Lema 2.9, para cada $b \in \Omega_1$ existe $a \in \Omega_1$ com $a < b$ de forma que, para toda cadeia básica fechada f com base Ω_1 teremos

$f(b) > a$. Tomemos ainda como orientação positiva de Ω_1 aquela dada por Φ_t para valores crescentes de t . Seja agora t_a tal que $\Phi_{t_a}(b) = a$. É claro que $t_a < 0$.

Suponhamos por absurdo que exista uma cadeia básica fechada h' sobre Ω_1 tal que $|t(h')| > |t_a|$. Se $t(h') < 0$, teremos $\Phi_{t(h')}(b) = h'(b) < a$. Se $t(h') > 0$, tomemos a cadeia básica fechada $\Phi_{-t(h')} = (h')^{-1}$, inversa de h' ; é claro então que $(h')^{-1}(b) < a$. Em qualquer dos dois casos, obtemos uma contradição. Assim, existe uma constante positiva C_1 tal que para toda cadeia básica fechada h com base Ω_1 teremos $|t(h)| \leq C_1$.

Observemos agora que existe apenas um número finito de cadeias básicas fechadas com base contida em Ω_0 ; logo, existe uma constante $C > 0$ tal que para toda cadeia básica fechada h com base em Ω_0 teremos $|t(h)| \leq C$.

Para demonstrar o lema no caso geral, devemos notar que todo elemento $h \in H_n(\Omega_0)$ se escreve como produto de no máximo n cadeias básicas fechadas, ou seja:

$$h = h'_l \circ h'_{l-1} \circ \cdots \circ h'_1 ,$$

onde $l \leq n$ e cada h'_i é uma cadeia básica fechada. Assim:

$$h = \Phi_{t(h)} = \Phi_{t(h'_l)} \circ \cdots \circ \Phi_{t(h'_1)} = \Phi_{\sum_{i=1}^l t(h'_i)} .$$

Desta forma:

$$|t(h)| = \sum_{i=1}^l |t(h'_i)| \leq C.n$$

que é a desigualdade desejada. □

Lema 2.11 *Seja Ω_0 uma componente conexa de $X - K$. Existe uma constante $C'(\varepsilon) > 0$ com a seguinte propriedade: se $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$ são pontos de Ω_0 e $h_1, h_2, \dots, h_{k-1}$ são elementos de H_n tal que:*

$$(i) \ h_i(]y_i; y_{i+1}[) \subset \Omega_0;$$

$$(ii) \ h_i(]y_i; y_{i+1}[) \text{ tem comprimento superior a } \varepsilon.$$

Então $k \leq C''(\varepsilon).n$.

Demonstração: De fato: do lema anterior, para cada $i = 1, \dots, k$, h_i coincide sobre $]y_i, y_{i+1}[$ com $\Phi_{t(h_i)}$, onde $|t(h_i)| \leq C.n$. Seja $\varepsilon' > 0$ tal que se $\Phi_t(I) \subset \overline{\Omega}_0$, $\text{comp}(\Phi_t(I)) > \varepsilon$ (onde $\text{comp } I = \text{comprimento do intervalo } I$) e $|t| \leq 1$, então $\text{comp}(I) > \varepsilon'$ (a existência de tal ε' é consequência da continuidade uniforme de Φ em $I \times \overline{\Omega}_0$). Seja $Z \subset \Omega_0$ um conjunto finito tal que $\Omega_0 \subset \bigcup_{z \in Z} B_{\varepsilon'/2}(z)$. Para cada i , seja $l_i = [t(h_i)]$ se $t(h_i) > 0$ ou $l_i = [t(h_i)] + 1$ se $t(h_i) < 0$ (onde $[]$ é a função maior inteiro). É claro então que Φ_{l_i} está definido em $]y_i, y_{i+1}[$. Além disso, $\Phi_{l_i}(]y_i, y_{i+1}[)$ tem comprimento maior que ε' pois

$$\Phi_{t(h_i)-l_i}(\Phi_{l_i}(]y_i, y_{i+1}[)) = \Phi_{t(h_i)}(]y_i, y_{i+1}[) = h_i(]y_i, y_{i+1}[)$$

e evidentemente $h_i(]y_i, y_{i+1}[)$ tem comprimento maior que ε e $|t(h_i) - l_i| < 1$.

Logo, $]y_i, y_{i+1}[\cap \Phi_{-l_i}(Z) \neq \emptyset$. Resulta então que o número de intervalos do tipo $]y_i, y_{i+1}[$ é majorado pela cardinalidade do conjunto $\bigcup_{\substack{i=-[C_n] \\ i \in \mathbb{Z}}}^{[C_n]} \Phi_i(Z)$. É claro que esta cardinalidade cresce linearmente quando n cresce. Assim, existe uma constante $C''(\varepsilon)$ (dependendo apenas de ε) tal que esta cardinalidade é expressa por $C''(\varepsilon)n$. Concluimos assim que $k \leq C''(\varepsilon)n$. $\square$

Lema 2.12 *Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma constante $C'''(\varepsilon)$ tal que, para toda componente conexa Ω de $X - K$ temos que $N_b(n, \varepsilon, \Omega) \leq C'''(\varepsilon)n$.*

Demonstração: Fixemos uma componente conexa Ω_0 de $X - K$. Seja $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ os pontos de $A \cap \Omega_0$. Os intervalos do tipo (b) que iremos considerar são então $]x_1, x_2[,]x_2, x_3[, \dots,]x_{k-1}, x_k[$. Por hipótese, existem elementos $h_1, \dots, h_{k-1}$ de $H_n(\mathcal{U})$ tal que os intervalos $h_i(]x_i, x_{i+1}[)$, para $i = 1, \dots, k-1$ tem todos comprimento maior que ε .

Para simplificar a demonstração, abordaremos o caso mais simples, onde X é o círculo S^1 e H é um grupo de difeomorfismos globais de S^1 gerado por H_1 . Podemos supor que todo elemento de H seja classe C^r , $r \geq 2$. Sejam então $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ as componentes

conexas de $X - K$ que estão na órbita de Ω_0 por h e que tenham comprimento maior que ε . Para cada $i = 1, 2, \dots, m$, pode-se escolher um elemento f_i de H tal que $f_i(\Omega_i) = \Omega_1$. Para cada i , coloquemos $l_i =$ o maior número de elementos de H_1 tal que f_i é produto desses elementos e seja $l = \max\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$. Seja δ o máximo das constantes de Lipschitz das f_i .

Seja $g \in H$ tal que $g(\Omega_0) = \Omega_1$. Conforme já vimos, uma vez que Ω_0 contém um intervalo do tipo (b), podemos supor que g seja produto de no máximo n elementos h_i de H_1 .

Tomando eventuais composições dos h_i com os f_j podemos construir elementos $h'_1, h'_2, \dots, h'_{k-1}$ de H_{n+l} de maneira que $h'_i([x_i, x_{i+1}[[$) estejam todos contidos em Ω_1 , para $i = 1, \dots, k-1$ (devemos notar que se existir i_0 tal que $h_{i_0}([x_{i_0}, x_{i_0+1}[[) \subset \Omega_1$, então $h'_{i_0} = h_{i_0}$). Para $j = 1, 2, \dots, m$, consideremos as constantes de Lipschitz δ_j dos difeomorfismos inversos $f_j^{-1} \in H$ e seja $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \varepsilon/\delta_1, \varepsilon/\delta_2, \dots, \varepsilon/\delta_m\}$. É claro que $\varepsilon' > 0$, e pela definição dos h'_i , segue que para $i = 1, \dots, k-1$, o comprimento de $h'_i([x_i, x_{i+1}[[)$ é maior que ε' .

Consideremos agora os pontos $y_j = g(x_j)$ para $j = 1, \dots, k$ e tomemos $h''_i = h'_i \circ g^{-1} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$, $i = 1, \dots, k-1$.

É claro que cada h''_i é produto de, no máximo, $2n + l$ elementos de H_1 . Como g preserva orientação e $x_1 < \dots < x_k$, segue então que:

- (i) $y_1 < \dots < y_k$;
- (ii) $h''_i([y_i, y_{i+1}[[) \subset \Omega_1$;
- (iii) $h''_i([y_i, y_{i+1}[[)$ tem comprimento superior a ε' .

Segue do lema anterior que existe $C''(\varepsilon')$ tal que:

$$k \leq C''(\varepsilon').(2n + l) \quad (2.4)$$

Pela definição de ε' e pelo fato de que l é fixo, existe uma constante $C'''(\varepsilon)$ tal que

$$0 < \frac{C'(\varepsilon') \cdot (2n + l)}{n} \leq C'''(\varepsilon) \quad (2.5)$$

De (2.4) e (2.5) vem que:

$$k \leq C'''(\varepsilon) \cdot n$$

Concluimos então que o crescimento de $N_b(n, \varepsilon, \Omega_0)$ é limitado superiormente por um crescimento linear em n , o que demonstra o lema no caso em que $X = S^1$ e $H(\mathcal{U})$ é um grupo de difeomorfismos globais de S^1 .

Para demonstrar o lema no caso geral, se utiliza o mesmo método usado para a demonstração que fizemos para S^1 , contanto que se façam restrições adequadas aos domínios de definição dos elementos de $H(\mathcal{U})$ utilizados. Lembremos que H_1 é constituído de um número finito de difeomorfismos lipschitzianos e assim existe uma constante $\delta > 0$ tal que os intervalos $h_i([x_i, x_{i+1}[)$ têm comprimento menor que $\delta\varepsilon$, embora maior que ε . Ainda, os elementos $f_2, \dots, f_m$ utilizados anteriormente podem ser substituídos por uma coleção finita de elementos de $H(\mathcal{U})$ cujos domínios cobrem $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \dots \cup \Omega_m$ e tal que, para cada tal f , $f(\Omega_j \cap \text{dom}(f)) \subset \Omega_1$, para $j = 2, \dots, m$. Se ε for suficientemente pequeno, podemos ainda supor que todo intervalo de comprimento menor que $\delta\varepsilon$ contido em uma das componentes $\Omega_2, \dots, \Omega_m$ está contido também no domínio de definição de um dos f como acima.

O mesmo tipo de restrições deve ser feito para a aplicação g como anteriormente.

Uma vez tomado este tipo de precauções, o lema no caso geral segue facilmente. $\square$

Término da demonstração da condição suficiente do Teorema 2.2

Dos Lemas 2.8 e 2.12, temos que $N_b(n, \varepsilon)$ tem crescimento no máximo polinomial quando n cresce, contanto que ε seja suficientemente pequeno, Do Lema 2.7 temos que este fato também é verdadeiro para $N_a(n, \varepsilon)$. Seja então

$$N(n, \varepsilon) = N_a(n, \varepsilon) + N_b(n, \varepsilon) .$$

É claro que para cada n e ε fixos, $N(n, \varepsilon)$ é finito e tem crescimento no máximo polinomial, conforme n cresce.

Seja $N(X)$ o número de componentes conexas de X . É claro que $N(X)$ é finito e só depende do recobrimento $\mathcal{U}$.

Conforme foi observado anteriormente:

$$N(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon) - N(n, \varepsilon) \leq N(X) .$$

Assim, $N(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ tem crescimento no máximo polinomial quando n cresce, de onde se deduz que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log N(H(\mathcal{U}), H_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon) = 0 ,$$

ou seja, $h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) = 0$. Como este resultado é válido para todo recobrimento regular $\mathcal{U}$, segue do Teorema 2.1 que $h(\mathcal{F}, g) = 0$.

A demonstração do Teorema 2.2 está terminada. $\square$

Corolário 2.4 *Se todas as folhas da folheação $\mathcal{F}$ tem crescimento sub-exponencial, então $h(\mathcal{F}, g) = 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.2 de [C-C; 2], se $\mathcal{F}$ tem uma folha-mola, então $\mathcal{F}$ tem uma folha com crescimento exponencial. O corolário segue então trivialmente. $\square$

A seguir alguns exemplos, aplicações do Teorema 2.2.

Exemplo 2.5 Vamos dar um exemplo de uma folheação de codimensão 1 com entropia geométrica estritamente positiva.

Consideremos o toro sólido em $\mathbb{R}^3$, $T = D^2 \times S^1$, onde $D^2 = \{z_1 \in \mathbb{C} \mid |z_1| \leq 1\}$ e $S^1 = \{z_2 \in \mathbb{C} \mid |z_2| = 1\}$.

Vamos construir uma folheação $\mathcal{F}_1$ sobre T da seguinte maneira. Seja $f : T \rightarrow T$ dada por

$$f(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{4}z_1; z_2^2 \right).$$

Se colocarmos:

$$\begin{cases} z_1 = re^{2\pi\theta i} \\ z_2 = e^{2\pi\rho i} \end{cases},$$

onde $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$ e $0 \leq \rho \leq 1$.

A expressão para f torna-se:

$$f(re^{2\pi\theta i}, e^{2\pi\rho i}) = \left(\frac{1}{2}e^{2\pi\rho i} + \frac{1}{4}re^{2\pi\theta i}, e^{4\pi\rho i} \right).$$

Podemos pensar na imagem de f como sendo um toro $T' \subset T$ que dá duas voltas no interior de T (veja figura 2.6).

Se $\overset{\circ}{T}'$ denota o interior de T' , temos que $T'' = T - \overset{\circ}{T}'$ é uma variedade compacta de dimensão 3 com bordo; podemos então folhear T'' transversalmente ao bordo pelas superfícies $\rho = \text{cte.}$ (ou $z_2 = \text{cte.}$), folheação essa que é dada pela imagem inversa de uma submersão de T'' em S^1 . Cada folha desta folheação é um disco de raio 1 com dois buracos circulares em seu interior (veja figura 2.6). Chamaremos tal folheação de $\mathcal{F}_1$.

Seja agora M^3 o quociente de T'' obtida pela identificação das duas componentes do bordo de T'' (ou seja, o bordo de T com o bordo de T'') pela aplicação f ; M^3 será então uma variedade de dimensão 3, não imersa em $\mathbb{R}^3$. Consideremos agora a folheação “quociente” $\mathcal{F}_2$ em M^3 , obtida pela identificação do bordo das folhas de $\mathcal{F}_1$ através da aplicação f . É claro que $\mathcal{F}_2$ tem codimensão 1. É fácil ver que as folhas de $\mathcal{F}_2$ são de uma das duas formas que a figura 2.7 nos mostra. De toda forma, cada folha de $\mathcal{F}_2$ é não-compacta e tem grupo fundamental infinito.

Consideremos a projeção canônica no quociente $\pi : T'' \rightarrow M^3$. É claro que a restrição de π ao interior de T'' é um homeomorfismo e que para cada folha L de $\mathcal{F}_1$, $\pi(L)$ está contida em uma única folha L' de $\mathcal{F}_2$. Além disso, para cada folha L' de $\mathcal{F}_2$, temos que as

Figura 2.6

Figura 2.7

componentes conexas de $\pi^{-1}(L')$ são folhas de $\mathcal{F}_1$; mais especificamente, se consideramos a aplicação $h : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $h(z) = z^2$, temos que duas folhas z_2^1 e z_2^2 de $\mathcal{F}_1$ estão em $\pi^{-1}(L')$ se e somente se z_2^1 está na órbita de z_2^2 por h (ou vice-versa).

Vamos mostrar que $\mathcal{F}_2$ tem uma folha-mola e, portanto, entropia geométrica positiva. Consideremos em T'' a variedade de dimensão 1 homeomorfa a S^1 dada por

$$\ell = \{(0, z_2) \in T'' \mid z_2 \in S^1\}.$$

É claro que ℓ é transversal a todas as folhas de $\mathcal{F}_1$ e intercepta cada tal folha em apenas um ponto. Pelo Teorema 2, p. 32 de [Ca; Lins] (ou por 2.13, p. 17 de [God]) temos que $\pi(\ell)$ é transversal a todas as folhas de $\mathcal{F}_2$; devemos porém notar que para cada folha L' de $\mathcal{F}_2$ o conjunto $L' \cap \pi(\ell)$ é infinito.

Consideremos agora a folha L_0 de $\mathcal{F}_1$ correspondente a $z_2 = 1$ (ou $\rho = 0$) e seja L'_0 a folha de $\mathcal{F}_2$ tal que $\pi(L_0) \subset L'_0$. Seja $a_0 = (0, 1) = \ell \cap L_0$ e $b_0 = \pi(a_0) \in \pi(\ell) \cap L'_0$. Tomemos então em L'_0 a seqüência $\{b_n\}_{n \geq 1}$ definida do seguinte modo: $b_n = \pi(a_n)$, onde $a_n = \ell \cap L_n$ (L_n é a folha de $\mathcal{F}_1$ dada por $\rho_n = \frac{\pi}{2^n}$). É claro que $b_n \in L'_0$, $\forall n$, uma vez que para todo $n \geq 1$, 1 pertence à órbita de $z = e^{2\pi\rho_n i}$ por h ; além disso, como π restrito ao interior de T'' é um homeomorfismo, temos que $b_n \in \pi(\ell) \cap L_0$, que $b_n \neq b_m$ se $n \neq m$ e que $b_n \neq b_0$, $\forall n \geq 1$.

Agora, como $\frac{\pi}{2^n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $a_n \rightarrow a_0$ (ou seja, $b_n \rightarrow b_0$) quando $n \rightarrow \infty$. Disto tudo, é fácil vermos o seguinte: se $H_\gamma : \pi(\ell) \rightarrow \pi(\ell)$ é a aplicação de holonomia definida em uma vizinhança de b_0 em $\pi(\ell)$ (onde γ é uma curva fechada adequada, com $\gamma(0) = \gamma(1) = b_0$), então existe $n > 0$ tal que $\frac{\pi}{2^n} \in \text{dom } H_\gamma$ e $H_\gamma^m(\frac{\pi}{2^n}) \rightarrow b_0$ quando $m \rightarrow \infty$. Concluimos daí que L'_0 é uma folha-mola de $\mathcal{F}_2$, o que nos mostra que realmente a entropia geométrica de $\mathcal{F}_2$ é positiva.

Observação: Na verdade, as órbitas da aplicação $h : S^1 \rightarrow S^1$ acima nos mostram que não apenas L'_0 , mas todas as folhas de $\mathcal{F}_2$ são densas em M .

Exemplo 2.6 A folheação de Reeb do toro sólido $D^2 \times S^1$ (ou da esfera S^3) claramente não possui nenhuma folha com recorrência, ou seja, não tem nenhuma folha-mola. Assim, a folheação de Reeb tem entropia geométrica nula.

Exemplo 2.7 Seja $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ dado por $R_\alpha(e^{2\pi ti}) = e^{2\pi(t+\alpha)i}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ (R_α é a rotação de ângulo $2\pi\alpha$). Consideremos a folheação do toro T^2 obtida por suspensão de R_α . É claro então que tal folheação tem entropia nula, uma vez que, como pode ser facilmente verificado, esta não possui nenhuma folha-mola.

Podemos também verificar este fato notando que para todo recobrimento regular $\mathcal{U}$ de T^2 , seu pseudogrupo de holonomia é constituído apenas de isometrias.

Exemplo 2.8 O exemplo que descrevermos a seguir é devido a Sacksteder; ele nos dá uma folheação de codimensão 1 e classe C^∞ de uma variedade compacta de dimensão 3 que possui um minimal local excepcional.

Seja T_2 o bitoro (superfície de gênero 2) e $\tilde{b}$ e $\tilde{d}$ duas curvas fechadas não homotópicas em T_2 .

Sejam $\tilde{T}_2 = T_2 - \{\tilde{b} \cup \tilde{d}\}$ e $\tilde{b}_i$ e $\tilde{d}_i$ ($i = 1, 2$) as curvas resultantes da retirada de $\tilde{b}$ e $\tilde{d}$ respectivamente de T_2 (veja figura 2.8)

Figura 2.8

Figura 2.9

Seja $\tilde{M}$ a variedade compacta de dimensão 3 obtida de $\tilde{T}_2 \times [0, 1]$ pela identificação de $\tilde{T}_2 \times \{0\}$ com $\tilde{T}_2 \times \{1\}$ (aqui identificamos pontos que tenham a primeira coordenada igual).

Na figura abaixo temos $\tilde{T}_2 \times [0, 1]$.

O bordo $\partial\tilde{M}$ é constituído de quatro cópias do toro T^2 , a saber, $\tilde{b}_i \times S^1$ e $\tilde{d}_i \times S^1$, $i = 1, 2$. Consideremos os difeomorfismo de identificação $i_b : \tilde{b}_2 \rightarrow \tilde{b}_1$ e $i_d : \tilde{d}_2 \rightarrow \tilde{d}_1$.

Sejam $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ os difeomorfismos definidos da seguinte maneira: $f(\theta) = \theta \cdot e^{2\pi/3 \cdot i}$, $\theta \in S^1$ e $g = \pi \circ \tilde{g} \circ \pi^{-1}(\theta)$, onde $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é dado por $\pi(x) = e^{2\pi xi}$ e $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades: $\tilde{g}(x+k) = \tilde{g}(x) + k$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{g}(x) = \frac{x}{3}$ se $x \in [0, 1/3]$, $\tilde{g}(x) = 3x - 5/3$ se $x \in [2/3, 5/6]$, $\tilde{g}(1) = 1$, $\tilde{g}'(1) = 1/3$, $\tilde{g}^{(k)}(1) = 0$ se $k \geq 2$ e $\tilde{g}$ é de classe C^∞ em $[0, 1]$. Consideremos então a aplicação $\psi : (\tilde{b}_2 \times S^1) \cup (\tilde{d}_2 \times S^1) \rightarrow (\tilde{b}_1 \times S^1) \cup (\tilde{d}_1 \times S^1)$ dada por $\psi(x, y) = (i_b(x), f(y))$ se $(x, y) \in \tilde{b}_2 \times S^1$ e $\psi(x, y) = (i_d(x), g(y))$ se $(x, y) \in \tilde{d}_2 \times S^1$. Seja $\sim$ a relação de equivalência em $\tilde{M}$ definida por $(x, y) \sim (x', y')$ se $x = x'$

ou $(x, y) = \psi(x', y')$ ou $(x, y) = \psi^{-1}(x', y')$ caso $(x', y') \in \partial\tilde{M}$. Desta forma, $M = \tilde{M}/\sim$ é uma variedade compacta de dimensão 3 e temos definida uma submersão $\bar{\pi} : M \rightarrow T_2$ que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} = \tilde{T}_2 \times S^1 & \xrightarrow{\pi_1} & \tilde{T}_2 \\ \tilde{P} \downarrow & & \downarrow P \\ M & \xrightarrow{\bar{\pi}} & T_2 \end{array}$$

onde π_1 é a primeira projeção, $\tilde{p}$ é a projeção no quociente, p a projeção natural de $\tilde{T}_2$ em T_2 . Por construção, $\bar{\pi} : M \rightarrow T_2$ define em M uma estrutura de espaço fibrado com base T_2 e fibra S^1 (veja exemplo 1.4).

Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ a folheação em $\tilde{M}$ cujas folhas são da forma $T_2 \times \{\theta\}$, $\theta \in S^1$. Cada uma dessas folhas intercepta $\partial\tilde{M}$ em quatro círculos: $\tilde{b}_i \times \{\theta\}$ e $\tilde{d}_i \times \{\theta\}$, $i = 1, 2$ (observe que ψ leva $\tilde{b}_2 \times \{\theta\}$ em $\tilde{b}_1 \times \{f(\theta)\}$ e $\tilde{d}_2 \times \{\theta\}$ em $\tilde{d}_1 \times \{g(\theta)\}$); desta forma, ao identificarmos os pontos de $\partial\tilde{M}$ por ψ , colamos o bordo de uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ no bordo de outra folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ (veja figura 2.10).

A folheação $\mathcal{F}$, induzida em M por $\tilde{\mathcal{F}}$, possui então um minimal excepcional (a demonstração de tal fato está detalhadamente feita em [Ca; Lins], p.106).

Usando agora um resultado já mencionado na demonstração do teorema 2.2, de que se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 e classe C^r ($r \geq 2$) de uma variedade compacta M , onde $\mathcal{F}$ possui um minimal excepcional, então $\mathcal{F}$ possui folha-mola, segue do teorema 2.2 que $h(\mathcal{F}, g) > 0$.

Devemos aqui observar que em classe C^1 a conclusão acima nem sempre é verdadeira. Denjoy nos fornece um exemplo de uma folheação de codimensão 1 do toro T^2 com um

Figura 2.10

minimal excepcional (veja [Ca;Lins], p.56). No entanto, tal folheação (de classe C^1) não possui folha-mola (veja observação que segue o teorema 3.3 de [C;C-2]).

O teorema de Denjoy diz que se M é uma variedade compacta de dimensão 2 e classe C^r , $r \geq 2$, então M não possui folheações com minimais excepcionais.

2.6 Comentários finais

Steven Hurder define em [Hu] uma noção alternativa àquela vista neste capítulo para entropia de folheações. Embora essas duas noções de entropia não sejam a mesma, Hurder mostra que ou as duas se anulam simultaneamente ou são ambas positivas. A noção de entropia proposta por Hurder, ao contrário da nossa, não depende de recobrimento sobre a variedade.

Ainda observamos que em [G;L;W] os autores demonstram uma condição necessária (mas não suficiente) para a nulidade da entropia geométrica de uma folheação de codi-

mensão qualquer: a existência de uma medida transversal invariante para a folheação no sentido de J. Plante em [P] (ver Teorema 5.1 de [G;L;W]). Uma condição suficiente para que a entropia geométrica de uma folheação de codimensão qualquer seja positiva será mostrada no próximo capítulo.

Uma das questões deixadas em aberto em [G;L;W] é a seguinte: os autores conjecturam que a nulidade da entropia geométrica implica a nulidade do invariante de Godbillon-Vey para folheações de codimensão qualquer. Outras questões deixadas em aberto em [G;L;W] foram parcialmente respondidas em [Hu].

Capítulo 3

Folheações expansivas

3.1 Introdução

Neste capítulo definiremos a expansividade para folheações, tal qual foi definido por T. Inaba e N. Tsuchiya em [I-T]. Definiremos a noção de expansividade e daremos uma condição necessária e suficiente para que uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão 1 em uma variedade compacta M seja expansiva, tal qual obtida em [I-T]. Decorrerá daí que toda tal folheação tem entropia positiva.

A seguir daremos uma condição necessária para a expansividade de $\mathcal{F}$ em codimensão maior que 1: a folheação tem entropia positiva.

Assim, iremos obter uma condição suficiente para que a entropia geométrica de uma folheação não seja nula. Daremos também um exemplo de folheação com entropia geométrica positiva mas não expansiva.

3.2 Folheações expansivas de codimensão 1

Neste parágrafo, M será uma variedade compacta riemanniana e $\mathcal{F}$ uma folheação em M de codimensão 1. Iremos também supor que M e $\mathcal{F}$ são de classe C^∞ .

Fixaremos também uma folheação $\mathcal{F}^T$ de dimensão 1 transversal à $\mathcal{F}$ (que existe, por exemplo, pelo teorema de Frobenius). Podemos ainda supor que todas as folhas de $\mathcal{F}$ e

$\mathcal{F}^T$ são de classe C^r , $r \geq 2$, e que $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável, passando, se necessário, a um recobrimento duplo orientável adequado de $\mathcal{F}$.

Denominaremos toda curva contida em uma folha de $\mathcal{F}$ de uma $\mathcal{F}$ -curva e a toda curva (mergulhada) contida em uma folha de $\mathcal{F}^T$ de um $\mathcal{F}^T$ -arco.

Uma aplicação contínua $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ será chamado uma *cêrca* se as seguintes condições estiverem verificadas:

- (i) Para todo $t \in [0, 1]$, $f|_{[0,1] \times \{t\}}$ é uma $\mathcal{F}$ -curva de classe C^1 .
- (ii) Para todo $s \in [0, 1]$, $f|_{\{s\} \times [0,1]}$ é um $\mathcal{F}^T$ -arco.

Para todo $t \in [0, 1]$, $f|_{[0,1] \times \{t\}}$ será chamado uma curva horizontal e para todo $s \in [0, 1]$, $f|_{\{s\} \times [0,1]}$ um arco vertical.

Ainda denotaremos o lado inferior, superior, esquerdo e direito de f , respectivamente por $\ell(f)$, $u(f)$, $\lambda(f)$ e $\rho(f)$ (devemos notar que $\ell(f) = f|_{[0,1] \times \{0\}}$, $u(f) = f|_{[0,1] \times \{1\}}$, $\lambda(f) = f|_{\{0\} \times [0,1]}$ e $\rho(f) = f|_{\{1\} \times [0,1]}$).

A aplicação de holonomia associada à f , h_f , é o difeomorfismo entre $\lambda(f)$ e $\rho(f)$ definido por $h_f(f(0, t)) = f(1, t)$, para todo $t \in [0, 1]$.

Definição 3.1 *A folheação $\mathcal{F}$ será dita expansiva se existir $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\mathcal{F}^T$ -arco compacto J , existe uma *cêrca* f tal que $\lambda(f) = J$ e $\text{comp}(\rho(f)) \geq \delta$. A constante δ será chamada então de uma constante de expansividade para $\mathcal{F}$.*

Devemos notar que esta definição independe da métrica riemanniana adotada, uma vez que M é compacta. De fato, sejam g e g' duas métricas riemannianas quaisquer definidas em M . Fixando $p \in M$, uma vez que $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão finita, as normas induzidas por g e g' em $T_p M$ são equivalentes, ou seja, existem constantes C_1 e C_2 tal que para todo $v \in T_p M$, temos: $C_1 \|v\|_{g'} \leq \|v\|_g \leq C_2 \|v\|_{g'}$ (onde $\|\cdot\|_g$ e $\|\cdot\|_{g'}$ são as normas em $T_p M$ induzidas respectivamente por g e g'). Além disso, como g e g'

são de classe C^∞ (M é de classe C^∞) existe uma vizinhança V_p de p tal que para todo $x \in V_p$ e para todo $v \in T_x M$, ainda temos $C_1 \|v\|_{g'} \leq \|v\|_g \leq C_2 \|v\|_{g^2}$. Agora, como M é compacta, existe um número finito de pontos $p_1, p_2, \dots, p_n$ em M com respectivas vizinhanças $V_{p_1}, \dots, V_{p_n}$ como acima tais que $M \subset \bigcup_{i=1}^n V_{p_i}$. Ainda, para $i = 1, 2, \dots, n$, existem constantes C_1^i e C_2^i tal que para todo $x \in V_{p_i}$ e para todo $v \in T_x M$ vale a relação $C_1^i \|v\|_{g'} \leq \|v\|_g \leq C_2^i \|v\|_{g'}$. Sejam $k_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \{C_1^i\}$ e $k_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{C_2^i\}$; então para todo $x \in M$ e todo $v \in T_x M$, vale que: $k_1 \|v\|_{g'} \leq \|v\|_g \leq k_2 \|v\|_{g'}$. Seja agora $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ um $\mathcal{F}^T$ -arco qualquer e suponhamos que $\text{comp}_g(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_g dt \geq \delta$; então

$$\text{comp}_{g'}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{g'} dt \geq \frac{1}{k_2} \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_g dt \geq \frac{\delta}{k_2}.$$

Analogamente, se $\text{comp}_{g'}(\gamma) \geq \delta$, então $\text{comp}_g(\gamma) \geq k_1 \delta$, o que prova então a afirmativa feita.

Podemos resumir o que foi dito acima na

Proposição 3.1 *A definição de expansividade de $\mathcal{F}$ independe da métrica riemanniana g sobre M .*

Agora, fixada uma folheação transversal $\mathcal{F}^T$ de dimensão 1, podemos assumir que $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável, passando a um recobrimento duplo orientável se necessário. Uma $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^T)$ -carta (U, φ) é um par onde $\varphi : D^{p-1} \times D^1 \rightarrow M$ é tal que φ é um difeomorfismo com $\varphi(D^{p-1} \times D^1) = U$, $\varphi|_{D^{p-1} \times \{t\}}$ é um mergulho em uma folha de $\mathcal{F}$ para cada $t \in D^1$ e $\varphi|_{\{x\} \times D^1}$ é um $\mathcal{F}^T$ -arco para todo $x \in D^{p-1}$. Um atlas $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ sobre M é uma cobertura biregular de M se for uma cobertura regular de $\mathcal{F}$ onde cada (U_i, φ_i) é uma $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^T)$ -carta. $R_i = \varphi|_{\{0\} \times D^1}$ será chamado o eixo de U_i . Para o resto deste parágrafo, fixaremos tal cobertura $\mathcal{U}$.

Recordemos que dado um aberto $U \subset M$ que é $\mathcal{F}$ -saturado, dizemos que U é um aberto local minimal do tipo localmente denso se U for conexo e se cada folha de $\mathcal{F}|_U$

for densa em U . Para resumir, diremos neste parágrafo que U é um aberto minimal localmente denso (a.m.l.d.).

Diremos também que um a.m.l.d. U será não trivial se contiver uma folha com homonomia não trivial, ou seja, se existir uma cêrca f cuja imagem estiver contida em U com $\ell(f)$ sendo uma curva fechada e de maneira que o germe de h_f em $\ell(f)(0)$ não seja a identidade.

Lembremos que (ver parágrafo 1.3) se um subconjunto aberto $\mathcal{F}$ -saturado de M é um produto folheado então toda folha de $\hat{i}^*(\mathcal{F}^T)$ é um arco compacto (onde $\hat{i}$ denota a imersão canônica do completamento $\hat{U}$ de U em M). A espessura de um produto folheado U (respectivamente de uma $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^T)$ -carta (U, φ)) será o comprimento máximo das folhas de $i^*(\mathcal{F}^T)$ (respectivamente $\mathcal{F}^T|_U$).

Para demonstrar o principal resultado desta seção precisaremos de uma série de lemas. Começemos pelo:

Lema 3.1 *Suponhamos que $\mathcal{F}$ seja uma folheação expansiva de codimensão 1 e classe C^r ($r > 2$) com constante de expansividade δ . Então $\mathcal{F}$ não possui produto folheado de espessura menor que δ .*

Demonstração: Seja U um produto folheado em M e consideremos um $\mathcal{F}^T$ -arco compacto qualquer J da folheação $\hat{i}^*\mathcal{F}^T$ de $\hat{U}$. É claro que existe então uma cêrca f tal que $\lambda(f) = J$, $\rho(f) \in \hat{U}$ e $\text{comp}(\rho(f)) \geq \delta$. A asserção do lema segue agora trivialmente. $\square$

Observação: Na seqüência podemos assumir que cada elemento U_i de $\mathcal{U}$ tenha espessura menor que $\delta/3$ (tomando subrecobrimentos, se necessário).

Lema 3.2 *Se $\mathcal{F}$ é expansiva, com constante de expansividade δ , então existem um número finito de abertos minimais localmente densos de $\mathcal{F}$ cuja união é densa em M .*

Demonstração: Sejam $U_i(t) = \varphi_i(D^{n-1} \times [-t, t])$, $P_{2i-1}(t) = \varphi_i(D^{n-1} \times \{-t\})$ e $P_{2i} = \varphi_i(D^{n-1} \times \{t\})$, onde $t \in]0, 1[$. Como $\mathcal{U}$ é uma cobertura biregular, para cada $i = 1, \dots, m$,

existe um real positivo $C_i < 1$ tal que $\bigcup_{i=1}^m \varphi_i(D^{n-1} \times] - C_i; C_i[)$ cobre M . Seja $C = \max\{C_1, \dots, C_m\}$. Se $C < t \leq 1$, então $M = \bigcup_{i=1}^m U_i(t)$.

Nestas condições, seja $L_j(t)$ a folha de $\mathcal{F}$ que contém $P_j(t)$, para $j = 1, \dots, 2m$, e seja $S(t) = \bigcup_{j=1}^{2m} L_j(t)$. Fixemos t_0 com $C < t_0 < 1$.

Afirmção 1: $S(t_0)$ é denso em M . De fato, se a afirmação fosse falsa, $M - \overline{S(t_0)}$ teria interior não vazio e como este conjunto é um aberto saturado, ele teria pelo menos uma componente conexa A contida em seu interior. É claro que podemos tomar A como um aberto saturado. Consideremos então a imersão canônica $\hat{i} : \hat{A} \rightarrow A$; é claro que cada folha de $\hat{i}^*(\mathcal{F}^T|_A)$ é um $\mathcal{F}^T$ -arco compacto. Se existisse um tal arco J com $\text{comp}(J) > \delta/3$, então, certamente, da observação que antecede ao lema, J interceptaria pelo menos dois conjuntos, digamos, $U_{i_1}(t_0)$ e $U_{i_2}(t_0)$. Logo, existiria j_0 entre 1 e $2m$ com $J \cap L_{j_0}(t_0) \neq \emptyset$. Uma vez que A é saturado, concluimos então que $L_{j_0}(t_0) \subset A$, uma contradição. Disto tudo vem que a espessura de A seria menor ou igual a $\delta/3$, uma contradição com o lema anterior. A afirmação 1 está demonstrada.

Afirmção 2: Existem um inteiro j_1 entre 1 e $2m$ e reais positivos t_1 e t_2 com $C < t_1 < t_0 < t_2 < 1$ tal que $L_{j_1}(t)$ é localmente denso para cada $t \in]t_1, t_2[$. Se a afirmação é falsa, então, para cada $j = 1, \dots, 2m$, existe s_j arbitrariamente próximo de t_0 de maneira que $L_j(s_j)$ não é localmente denso, ou seja, $\overline{L_j(s_j)}$ tem interior vazio. Agora, $\bigcup_{j=1}^{2m} L_j(s_j)$ é denso em M (a demonstração é completamente análoga à da afirmação anterior) e assim:

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{2m} L_j(s_j)} = M.$$

Como M é completa (como espaço métrico) é um espaço de Baire. Se $x_0 \in \overline{\bigcup_{j=1}^{2m} L_j(s_j)}$, existe uma seqüência $\{x_n\}$ em $\bigcup_{j=1}^{2m} L_j(s_j)$ com $x_n \rightarrow x_0$. Assim, existe j_0 entre 1 e $2m$ tal que $L_{j_0}(s_{j_0})$ contém infinitos elementos de $\{x_n\}$. Se $\{x_n^{j_0}\}$ representa a subsequência de $\{x_n\}$ constituída de tais elementos, é claro que $x_n^{j_0} \rightarrow x_0$, ou seja $x_0 \in \overline{L_{j_0}(s_0)}$; concluimos

então que:

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{2m} L_j(s_j)} \subset \bigcup_{j=1}^{2m} \overline{L_j(s_j)} .$$

Como a inclusão contrária é óbvia, deduzimos que:

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{2m} L_j(s_j)} = \bigcup_{j=1}^{2m} \overline{L_j(s_j)} ,$$

ou seja,

$$M = \bigcup_{j=1}^{2m} \overline{L_j(s_j)} .$$

Segue então do teorema de Baire que existe j_0 entre 1 e $2m$ tal que o interior de $L_{j_0}(s_{j_0})$ em M é não vazio, uma contradição. A afirmação 2 está demonstrada.

Afirmação 3: $U_1 = \bigcup_{t_1 < t < t_2} L_{j_1}(t)$ é um a.m.l.d.

De fato, U_1 é um aberto $\mathcal{F}$ -saturado. É claro também que este é conexo.

Vamos mostrar que para todo $t \in]t_1, t_2[$, $L_{j_1}(t)$ é denso em U_1 . Fixemos $t' \in]t_1, t_2[$. Denotaremos por $\text{int}(\overline{L_{j_1}(t')})$ e $\partial \overline{L_{j_1}(t')}$ o interior e a fronteira de $\overline{L_{j_1}(t')}$, respectivamente. Como $L_{j_1}(t') \subset \text{int}(\overline{L_{j_1}(t')})$ ($L_{j_1}(t')$ é localmente densa), é claro que $\text{int}(\overline{L_{j_1}(t')}) \cap U_1 \neq \emptyset$.

Suponhamos que $\partial \overline{L_{j_1}(t')} \cap U_1 \neq \emptyset$ e seja $y \in \partial \overline{L_{j_1}(t')} \cap U_1$. Então toda vizinhança de y contém pontos de $L_{j_1}(t')$ e pontos que pertencem a $U_1 - \overline{L_{j_1}(t')}$. Seja L_y a folha passando por y ; é claro que $L_y \in U_1$. Fixemos uma vizinhança V_y de y em U_1 de maneira que $L_y \cap V_y$ seja um conjunto denso em V_y (tal vizinhança existe, uma vez que L_y é localmente densa). Seja $x_0 \in V_y$ com $x_0 \notin \overline{L_{j_1}(t')}$. Então existe vizinhança V_{x_0} de x_0 com $V_{x_0} \subset V_y$ e $V_{x_0} \cap L_{j_1}(t') = \emptyset$. Por outro lado, como $L_y \cap V_y$ é densa em V_y , $L_y \cap V_{x_0} \neq \emptyset$; consideremos o saturamento de V_{x_0} , $S(V_{x_0})$, que obviamente é um aberto. É claro que $L_y \subset S(V_{x_0})$ e que $L_{j_1}(t') \cap S(V_{x_0}) = \emptyset$; em particular, existe uma vizinhança de y (contida em $S(V_{x_0})$) cuja intersecção com $L_{j_1}(t')$ é vazia, uma contradição com a nossa escolha de y . Concluimos assim que $\partial \overline{L_{j_1}(t')} \cap U_1 = \emptyset$.

Agora, seja $A = U_1 - \text{int}(\overline{L_{j_1}(t')})$; como não existem pontos de $\partial \overline{L_{j_1}(t')}$ em A , temos que cada ponto de A possui uma vizinhança em A cuja intersecção com $L_{j_1}(t')$ é vazia, donde A

é aberto em U_1 ; conseqüentemente, $\text{int}(\overline{L_{j_1}(t')}) \cap U_1$ é fechado em U_1 . Como $\text{int}(\overline{L_{j_1}(t')}) \cap U_1$ é também um aberto não vazio em U_1 , segue então que $\text{int}(\overline{L_{j_1}(t')}) \cap U_1 = U_1$ já que U_1 é conexo, ou seja, $L_{j_1}(t')$ é densa em U_1 . A afirmação 3 decorre agora do fato de que sempre podemos escolher t_1 e t_2 de modo que U_1 seja maximal em relação às propriedades acima.

Se $\overline{U_1} = M$, a demonstração do lema está terminada; senão, existe j_2 entre 1 e $2m$, com $j_2 \neq j_1$, com a mesma propriedade satisfeita por j_1 , em alguma vizinhança de t_0 , em $M - \overline{U_1}$. De fato, podemos repetir a demonstração da afirmação 2, escolhendo um índice j_2 entre $\{1, \dots, 2m\} - \{j_1\}$ e substituindo M por $M - \overline{U_1}$, de forma que $L_{j_2}(t_0) \not\subset \overline{U_1}$ (a escolha de tal índice é possível, já que $S(t_0)$ é denso em M).

Se $\overline{U_1 \cup U_2} = M$, a demonstração está terminada; caso contrário, repetimos o processo acima. Se este processo se esgotar, seja $U = \overline{\bigcup_{k=1}^{2m} U_{j_k}}$; pela escolha dos U_{j_k} temos que para todo $j \in \{1, \dots, 2m\}$, $L_j(t_0) \subset U$, ou seja, $S(t_0) \subset U$. Pela afirmação 1, segue que U é denso em M . O lema fica portanto demonstrado. $\square$

Lema 3.3 *Se $\mathcal{F}$ é expansiva, todo conjunto a.m.l.d. de $\mathcal{F}$ é não trivial.*

Demonstração: Seja V um a.m.l.d. de $\mathcal{F}$. Vamos mostrar que existe $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $U_{i_0} \subset V$ ($U_i \in \mathcal{U}$). Para isto, tomemos um $\mathcal{F}^T$ -arco compacto arbitrário J em V . Pela expansividade de $\mathcal{F}$, existe uma cêrca f com $\lambda(f) = J$ de forma que $\rho(f) \subset V$ e $\text{comp}(\rho(f)) \geq \delta$. Como cada $U_i \in \mathcal{U}$ tem espessura menor que $\delta/3$, concluímos que existe $U_{i_0} \in \mathcal{U}$ com $U_{i_0} \subset V$.

Seja R_{i_0} o eixo de U_{i_0} . Usando um argumento semelhante ao anterior, é fácil ver que existem uma aplicação de holonomia L_1 e um aberto $U_{i_1} \in \mathcal{U}$ de forma que a imagem $h_1(R_{i_0})$ intercepta transversalmente todas as placas de U_{i_1} . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\text{int}h_1(R_{i_0}) \supset R_{i_1}$.

Continuando este processo, obtemos uma seqüência de aplicações de holonomia $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ e uma seqüência de eixos $\{R_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de forma que $\text{int}h_k(R_{i_{k-1}}) \supset R_{i_k}$, para todo k . Mas,

como o número de tais eixos é finito, existe $p < q$, p e q inteiros, tal que $i_p = i_q$.

Seja $h = h_q \circ \cdots \circ h_{p+1}$; é claro então que $R_{i_p} \subset \text{inh}(R_{i_p})$ e, pela nossa escolha de h , também é claro que $\text{inh}(R_{i_p}) \neq R_{i_p}$; assim $\overline{R_{i_p}} \subset \text{inh}(R_{i_p})$, e portanto $h^{-1}(\overline{R_{i_p}}) \subsetneq R_{i_p}$ e como h (e portanto h^{-1}) pode ser tomado de classe C^2 (a folheação $\mathcal{F}$ é classe C^r com $r \geq 2$) resulta então que h tem um ponto fixo em R_{i_p} . Decorre daí que V contém então uma folha com holonomia não trivial, conforme queríamos. $\square$

Lema 3.4 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação classe C^r ($r \geq 2$) de M de codimensão 1 e V um a.m.l.d. de $\mathcal{F}$. Então $\mathcal{F}|_V$ é expansiva.*

Demonstração: Por hipótese existe uma folha $L \subset V$ e uma cêrca f_0 tal que $\ell(f_0)$ é uma curva fechada em L com $f_0(0,0) = f_0(1,0) = z_0$ e tal que para todo $x \in \lambda(f_0)$ o comprimento do $\mathcal{F}^T$ -arco compacto $[z_0, h_{f_0}(x)]$ é maior que o comprimento de $[z_0, x]$. Seja $\delta_V = \frac{\text{comp}(\lambda(f_0))}{2}$.

Afirmção: δ_V é uma constante de expansividade para $\mathcal{F}|_V$. Para demonstrar a afirmação basta provar que para todo $\mathcal{F}^T$ -arco compacto J em V existe uma cêrca f tal que $\lambda(f) \subset J$ e $\text{comp}(\rho(f)) \geq \delta_V$.

Agora, como L é densa em V , existe (pelo menos um) $w \in \text{int}(J) \cap L$. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow L$ uma $\mathcal{F}$ -curva com $\alpha(0) = w$ e $\alpha(1) = z_0$. Então podemos construir uma cêrca f_1 tal que $\lambda(f_1) \subset J$ e $\rho(f_1) \subset \lambda(f_0)$ com $\ell(f_1) = \alpha$.

Pela nossa escolha de f_0 e δ_V , $\text{comp}(h_{f_0}^N(\rho(f_1))) \geq \delta_V$ para algum N natural, onde $H_{f_0}^N = h_{f_0} \circ h_{f_0} \circ \cdots \circ h_{f_0}$, N -vezes.

Seja f a cêrca com $\lambda(f) = \lambda(f_1)$ e $\ell(f) = \alpha * \ell^N(f_0)$. É fácil ver então que f satisfaz as condições desejadas. $\square$

Podemos agora enunciar e demonstrar o principal resultado deste parágrafo.

Teorema 3.1 *Seja M uma variedade riemanniana compacta e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em M . Suponhamos M e $\mathcal{F}$ classe C^r , $r \geq 2$. Então as seguintes afirmativas*

são equivalentes:

(i) $\mathcal{F}$ é expansiva;

(ii) existe um número finito de a.m.l.d. não triviais cuja união é densa em M .

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) decorre imediatamente dos lemas 3.2 e 3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja J_0 um $\mathcal{F}^T$ -arco compacto em M e $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ uma família de a.m.l.d. como na hipótese. Sem perda de generalidade podemos supor que existe um sub-arco J_1 de J_0 contido em V_1 . De fato, se para todo $x \in J_0$, $x \notin \bigcup_{i=1}^m V_i$, então $A = \bigcup_{x \in J_0} L_x$ (onde L_x é a folha passando por x) é tal que $A \cap (\bigcup_{i=1}^m V_i) = \emptyset$, pois cada V_i é saturado. É claro que o saturamento de A contém um aberto, que obviamente tem intersecção vazia com $\bigcup_{i=1}^m V_i$, uma contradição com a hipótese. Assim, existe um ponto na intersecção de J_0 com $\bigcup_{i=1}^m V_i$, que obviamente é ponto interior de algum V_i , o que prova a afirmação feita.

Agora, pelo Lema 3.4, podemos achar uma cêrca f_1 tal que $\lambda(f_1) = J_1$ e tal que $\text{comp}(\rho(f_1)) \geq \delta_{V_1}$, onde δ_{V_1} é como na demonstração do Lema 3.4. É fácil ver que podemos estender f_1 a uma cêrca f_0 tal que $\lambda(f_0) = J_0$, $\lambda(f_0)|_{J_1} = \lambda(f_1)$ e tal que $\rho(f_0) \supset \rho(f_1)$. É claro que $\text{comp}(\rho(f_0)) \geq \delta_{V_1}$.

Seja agora $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \{\delta_{V_i}\}$. É claro que $\text{comp}(\rho(f_0)) \geq \delta$. Como J_0 é um $\mathcal{F}^T$ -arco compacto qualquer, segue que $\mathcal{F}$ é expansiva, com constante de expansividade δ . $\square$

Corolário 3.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação nas condições da hipótese do Teorema 3.1. Então, a expansividade de $\mathcal{F}$ independe da folheação transversal de dimensão 1.*

Demonstração: Suponhamos $\mathcal{F}$ expansiva em relação à folheação transversal $\mathcal{F}^T$ e seja $\mathcal{F}_0^T$ outra tal folheação.

Como $\mathcal{F}$ é expansiva em relação à $\mathcal{F}^T$, existe um número finito de abertos minimais localmente densos não triviais, digamos, $V_1, \dots, V_n$, cuja união é densa em M . Devemos notar que o fato de cada V_i acima ser um a.m.l.d e da união destes abertos ser densa em

M é invariante por folheações transversais. Resta portanto mostrar que se cada V_i é não trivial em relação à $\mathcal{F}^T$, então também será em relação à $\mathcal{F}_0^T$.

Para isto, fixemos um índice i_0 entre 1 e n e lembremos que o fato de V_{i_0} não ser trivial implica na existência de uma $\mathcal{F}$ -curva fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow L$ (L folha de V_{i_0}) e de um $\mathcal{F}^T$ -arco compacto $J \subset V_{i_0}$, com $\alpha(0) \in J$ tal que o germe da aplicação de holonomia $h : J \rightarrow J$ em $\alpha(0)$ não é a identidade. Seja J_0 um $\mathcal{F}_0^T$ -arco compacto em V_{i_0} contendo $\alpha(0)$. Seja $\phi : J_0 \rightarrow J_1$ o difeomorfismo C^r dado pelas projeções ao longo das folhas de $\mathcal{F}$ (ϕ está obviamente definida em uma vizinhança de $\alpha(0)$ contida em J_0) e consideremos uma aplicação de holonomia de α , $h_0 : J_0 \rightarrow J_0$ dado por $h_0 = \phi^{-1} \circ h \circ \phi : J_0 \rightarrow J_0$. É claro que $h_0(\alpha(0)) = \alpha(0)$ e que o germe de h_0 em $\alpha(0)$ não é a identidade, ou seja, V_{i_0} é não trivial em relação à $\mathcal{F}_0^T$.

Como este fato é verdadeiro para todo V_i acima, e da implicação (ii) $\Rightarrow$ (i) do teorema, o corolário segue. $\square$

Corolário 3.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação nas condições do teorema, $\mathcal{F}$ expansiva. Então $\mathcal{F}$ possui (pelo menos) uma folha-mola. Além disso, a união das folhas-mola de $\mathcal{F}$ é densa em M .*

Demonstração: Como $\mathcal{F}$ é expansiva, segue do teorema que existe pelo menos um a.m.l.d. com holonomia não trivial, digamos, U . A existência de uma folha-mola em U segue então da estrutura dos a.m.l.d. com holonomia não trivial.

Sejam $U_1, \dots, U_n$ como na condição (ii) do teorema. Se $x \in M$, toda vizinhança de x intercepta (pelo menos) um dos conjuntos acima e, portanto, pelo menos uma folha-mola, uma vez que cada U_i acima contém ao menos uma folha-mola em U_i . $\square$

Corolário 3.3 *Se M e $\mathcal{F}$ são como antes e $\mathcal{F}$ é expansiva, então a entropia geométrica $h(\mathcal{F}, g)$ de $\mathcal{F}$ em relação à g (e, conseqüentemente, em relação a qualquer métrica riemanniana em M) é positiva.*

Demonstração: Decorre do Teorema 2.2 e do corolário anterior. $\square$

Exemplo 3.1 O Corolário 3.3 e o Exemplo 2.6 nos dizem que a folheação de Reeb do toro sólido $T = D^2 \times S^1$ (ou do S^3) não é expansiva.

Mais geralmente, decorre do Corolário 3.2 que se uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão 1 contém uma componente de Reeb, então $\mathcal{F}$ não é expansiva (porém pode ter entropia positiva). Particularmente, se $\mathcal{F}$ é obtida por turbilhonização (veja [Ca; Lins], cap. 2, p.44) então $\mathcal{F}$ não é expansiva.

Também como consequência do Corolário 3.3 temos que as folheações obtidas por suspensões de rotações em S^1 (rationais ou irracionais) não são expansivas.

Exemplo 3.2 Se M é uma variedade compacta, diremos que o fluxo $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ é expansivo (confira com [K; S], definição 2.1) se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo $h(0) = 0$, então para cada par de pontos distintos em M , x e y , com $y \neq \Phi_t(x)$ para $|t| < \varepsilon$, existe $t \in \mathbb{R}$ com $d(\Phi_t(x), \Phi_{h(t)}(y)) > \delta$.

Se a dimensão de M é 2 e Φ não tem singularidades, então a folheação $\mathcal{F}$ de dimensão e codimensão 1 induzida em M por Φ é expansiva. De fato, seja $\mathcal{F}_0^t$ uma folheação transversal qualquer. Se $\mathcal{F}$ não for expansiva, $\forall \delta > 0$ existe um $\mathcal{F}_0^t$ -arco $J : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}_0^t$, tal que para toda cêrca f com $\lambda(f) = J$ teremos $\text{comp}(\rho(f)) < \delta$. Sejam $x = J(0)$ e $y = J(1)$ e L_x e L_y as folhas de $\mathcal{F}$ passando por x e y , respectivamente. Seja agora $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido da seguinte maneira: para cada $t \in \mathbb{R}$, $h(t)$ é tal que $\Phi_{h(t)}(y) = L_y \cap J_{\Phi_t(x)}$, onde $J_{\Phi_t(x)}$ é o $\mathcal{F}_0^t$ -arco que intercepta L_x em $\Phi_t(x)$. É claro que h é contínua e $h(0) = 0$. Decorre então do fato da não expansividade de $\mathcal{F}$ que $\forall t \in \mathbb{R}, d(\Phi_t(x), \Phi_{h(t)}(y)) \leq \delta$; como evidentemente $y \neq \Phi_t(x), \forall t \in \mathbb{R}$, teremos então que o fluxo Φ é não expansivo, uma contradição.

Exemplo 3.3 A folheação $\mathcal{F}_2$ de M^3 , como no Exemplo 2.5 é expansiva; de fato, conforme observamos naquele exemplo, cada folha de $\mathcal{F}_2$ é densa em M^3 . Além disso, mostramos

que $\mathcal{F}_2$ possui uma folha com holonomia não trivial. A conclusão agora segue do Teorema 3.1.

3.3 Folheações expansivas de codimensão maior que 1

Neste parágrafo definiremos e iremos caracterizar folheações expansivas de codimensão maior que 1. No final, estabeleceremos que o fato de uma folheação ser expansiva é condição suficiente para que ela tenha entropia positiva.

Por todo este parágrafo, M será uma variedade riemanniana compacta com métrica riemanniana g e $\mathcal{F}$ será uma folheação de M de codimensão q maior que 1 e classe C^r ($r \geq 2$).

Nosso primeiro passo será definir folheação expansiva de codimensão maior que 1. Devemos notar, antes de tudo, que neste caso não existe necessariamente folheação transversal a $\mathcal{F}$ de codimensão complementar. Nesse caso, substituiremos a folheação transversal por um sistema de discos transversais à $\mathcal{F}$.

Seja então η o sub-fibrado de TM ortogonal à $\mathcal{F}$ e seja η_r o sub-fibrado associado por discos fechados de raio r . Para cada $x \in M$, seja $D_r(x)$ a imagem do disco q -dimensional transversal a $\mathcal{F}$, contido em η_r pela aplicação exponencial, ou seja, $\exp(D^T(0_x, r)) = D_r(x)$. Para r_x suficientemente pequeno, $D_{r_x}(x)$ é transversal à $\mathcal{F}$.

Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva de classe C^1 contida em uma folha de M . Como no parágrafo anterior, α será chamada de uma $\mathcal{F}$ -curva. Seja N uma vizinhança compacta de 0 em $\mathbb{R}^q$. Dado $r > 0$, diremos que uma aplicação contínua $f : [0, 1] \times N \rightarrow M$ é uma cêrca ao longo de α se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

- (i) $f|_{\{t\} \times N}$ é um mergulho em $D_r(\alpha(t))$, para todo $t \in [0, 1]$;
- (ii) $f|_{[0, 1] \times \{x\}}$ é uma $\mathcal{F}$ -curva classe C^1 , para todo $x \in N$; além disso, $f|_{[0, 1] \times \{0\}} = \alpha$.

Aqui, $f|_{\{0\} \times N}$ e $f|_{\{1\} \times N}$ serão chamados respectivamente de lado esquerdo e lado direito da cêrca f e serão denotados por $\lambda(f)$ e $\rho(f)$ e denotaremos o interior de $\rho(f)$ em $D_r(\alpha(1))$ por $\text{int}_1(\rho(f))$. O difeomorfismo de $\lambda(f)$ em $\rho(f)$ dado por $h_f(f(0, x)) = f(1, x)$ é chamado de aplicação de holonomia associada a f .

Definição 3.2 Diremos que $\mathcal{F}$ é expansiva se existir $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que para todo $x \in M$ e para todo $y \in D_\delta(x) - \{x\}$ podemos achar uma $\mathcal{F}$ -curva α com $\alpha(0) = x$ e uma cêrca f ao longo de α tal que $y \in \lambda(f) \subset D_\delta(x)$ e $h_f(y) \notin D_\delta(\alpha(1))$. Neste caso, δ será chamado de constante de expansividade para $\mathcal{F}$.

É fácil ver que esta definição é equivalente à Definição 3.1 no caso de codimensão 1.

Definição 3.3 Diremos que uma folheação $\mathcal{F}$ é fortemente expansiva se existir $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in M$ e todo $\varepsilon > 0$ existe uma $\mathcal{F}$ -curva α com $\alpha(0) = x$ e uma cêrca f ao longo de α de maneira que $\lambda(f) \subset D_\varepsilon(x)$ e $\text{int}_1 \rho(f) \supset D_\delta(\alpha(1))$. Diremos que δ é uma constante de forte expansividade.

É claro que se $\mathcal{F}$ é fortemente expansiva, então $\mathcal{F}$ é expansiva (a recíproca, no entanto, não é verdadeira).

O próximo lema será essencial na demonstração do principal resultado deste parágrafo.

Lema 3.5 Suponhamos que $\mathcal{F}$ seja fortemente expansiva, com constante de expansividade δ . Então, para todo ε tal que $0 < \varepsilon < \delta$, existe um real $\ell(\varepsilon) > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $x \in M$, existe uma $\mathcal{F}$ -curva α_x e uma cêrca f_x ao longo de α_x de modo que as condições seguintes estejam satisfeitas:

- (1) $\alpha_x(0) = x$;
- (2) $\text{comp}(\alpha_x) \leq \ell(\varepsilon)$;
- (3) $\lambda(f_x) \subset D_\varepsilon(x)$;

$$(4) \text{ int}_1(\rho(f_x)) \supset D_\delta(\alpha_x(1)).$$

Além disso, podemos assumir que existe $\xi > 0$ tal que para todo $x \in M$ e todo $y \in \lambda(f_x)$ se cumpre:

$$\frac{\text{comp}(f_x|_{[0,1] \times \{y\}})}{\text{comp}(\alpha_x)} < \xi.$$

Demonstração: Provemos a primeira asserção do lema. Suponhamos que ela seja falsa. Então existe ε_0 com $0 < \varepsilon_0 < \delta$, uma seqüência $\{\ell_n(\varepsilon_0)\}$ com $\ell_n(\varepsilon_0) \rightarrow +\infty$, uma seqüência $\{x_n\}$ de pontos de M com a propriedade seguinte: se α é uma $\mathcal{F}$ -curva com $\alpha(0) = x_n$ e $\text{comp}(\alpha) \leq \ell_n(\varepsilon_0)$, se f é uma cêrca ao longo de α com $\lambda(f_x) \subset D_{\varepsilon_0}(x)$, então $D_\delta(\alpha(1)) \not\subset \text{int}_1(\rho(f))$. Agora, como M é compacta, existe $x_0 \in M$ tal que $x_n \rightarrow x_0$. Consequentemente, para toda $\mathcal{F}$ -curva α com $\alpha(0) = x_0$ e para toda cêrca f ao longo de α satisfazendo $\lambda(f) \subset D_{\varepsilon_0}(x_0)$ teremos que $D_\delta(\alpha(1))$ não é um subconjunto de $\text{int}(\rho(f))$, uma contradição com o fato de $\mathcal{F}$ ser fortemente expansiva. Isto mostra a primeira parte do lema.

Para provarmos a segunda asserção, tomemos $x_0 \in M$ qualquer e sejam α_{x_0} e f_{x_0} tendo as propriedades de (1) a (4) do enunciado. Pela continuidade de f_{x_0} , é claro que existe $\xi_{x_0} > 0$ tal que

$$\frac{\text{comp}(f_x|_{[0,1] \times \{y\}})}{\text{comp}(\alpha_{x_0})} < \xi_{x_0}.$$

Ainda podemos tomar ξ_{x_0} de forma que para uma certa vizinhança V_{x_0} de x_0 e para todo $x \in V_{x_0}$ se tenha:

$$\frac{\text{comp}(f_x|_{[0,1] \times \{y\}})}{\text{comp}(\alpha_x)} < \xi_{x_0} \quad (*)$$

(onde f_x e α_x são definidos como antes e $y \in \lambda(f_x)$).

Como x_0 é qualquer e M compacta, existem abertos $V_1, \dots, V_k$ cuja união cobre M e de modo que se $x \in V_i$, então existe uma constante positiva ξ_i tal que (*) se verifica. É claro agora que $\xi = \max\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ satisfaz as condições da segunda asserção do lema.

□

Antes de passarmos ao principal resultado deste parágrafo, recordemos que se L é uma folha de $\mathcal{F}$ e $x \in L$, a função de crescimento de L em x pode ser definida por $g_L(r) =$ (número de placas distintas que podem ser ligadas a x por $\mathcal{F}$ -curvas de comprimento $\leq r$). Aqui, como no Capítulo 1, devemos observar que g_L está bem definida, ou seja, para cada r , $g_L(r)$ independe do ponto x em L escolhido.

Diremos que L tem crescimento exponencial (respectivamente quase-exponencial) se $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(g_L(r)) > 0$ (respectivamente se $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(g_L(r)) > 0$).

Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno; para todo $x \in M$, para todo $y \in D_\delta(x)$ e para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos definir

$$B_\varepsilon(y) = \{z \in D_\delta(x) \mid \bar{d}(y, z) \leq \varepsilon\},$$

onde $\bar{d}$ é a distância induzida pela métrica riemanniana g sobre $D_\delta(x)$.

Seja $\eta_{xy} : B_\varepsilon(y) \rightarrow D_\delta(y)$ a aplicação determinada da seguinte forma: para todo $z \in B_\varepsilon(y)$, z e $\eta_{xy}(z)$ estão na mesma placa (ou seja, η_{xy} é a “projeção” de cada $z \in B_\varepsilon(y)$ em $D_\delta(y)$ ao longo da folha de $\mathcal{F}$ que os contém). É claro então que η_{xy} é um mergulho, e é fácil ver, pela compacidade de M , que existe um número $\eta(\varepsilon) > 0$, que não depende de x e y , mas somente de ε , de maneira que para todo $z \in B_\varepsilon(y)$ existe uma $\mathcal{F}$ -curva de comprimento menor que $\eta(\varepsilon)$ ligando z e $\eta_{xy}(z)$.

Podemos enunciar agora o principal resultado deste parágrafo, que nos fornecerá uma condição necessária para que uma folheação $\mathcal{F}$ seja fortemente expansiva.

Teorema 3.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação fortemente expansiva em M de codimensão q , com folhas classe C^r ($r \geq 2$). Então $\mathcal{F}$ possui uma folha com crescimento quase-exponencial.*

Demonstração: Fixemos em M um atlas regular $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ e seja $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ a família dos abertos regulares associados a este atlas. Seja $P_i = \varphi_i^{-1}(D^{n-q} \times \{0\}) \subset U_i$. Tomando, se necessário, refinamentos de $\mathcal{U}$, podemos supor que para todo $x \in M$, $D_\delta(x)$ intercepta (pelo menos) um do P_i 's (onde $\delta > 0$ é a constante de expansividade de $\mathcal{F}$).

Vamos construir uma união disjunta de discos compactos A_n transversais à $\mathcal{F}$ indutivamente, da maneira que segue.

Primeiro, fixemos um ponto x_0 qualquer de M e coloquemos $A_0 = D_\delta(x_0)$. Vamos supor agora que já esteja construído A_n , como união formal disjunta dos discos $A_n^p = D_\delta(x_n^p)$, $x_n^p \in M$, onde $1 \leq p \leq 2n$, ou seja, $A_n = \coprod_{p=1}^{2n} A_n^p$.

Vamos tomar dois pontos x_n^{p+} e x_n^{p-} em $D_\delta(x_n^p)$ tal que $\bar{d}(x_n^{p+}, x_n^{p-}) > \delta$. Fixemos $\varepsilon > 0$ convenientemente próximo de 0 com $0 < \varepsilon < \delta$. Pelo lema anterior, podemos tomar uma cêrca f_n^{p+} ao longo de uma $\mathcal{F}$ -curva α_n^{p+} satisfazendo a seguinte propriedade, que por conveniência chamaremos de propriedade $P(f_n^{p+})$: $\alpha_n^{p+}(0) = x_n^{p+}$, $\lambda(f_n^{p+}) \subset D_\varepsilon(x_n^{p+})$, $\text{comp}(\alpha_n^{p+}) \leq \ell(\varepsilon)$, $\rho(f_n^{p+}) \supset D_\delta(\alpha_n^{p+}(1))$ e $\text{comp}(f_n^{p+}|_{[0,1] \times \{y\}})/\text{comp}(\alpha_n^{p+}) < \xi$ para todo $y \in \lambda(f_n^{p+})$. De maneira análoga, podemos achar uma cêrca f_n^{p-} ao longo de uma $\mathcal{F}$ -curva α_n^{p-} satisfazendo a propriedade $P(f_n^{p-})$ definida de maneira semelhante à $P(f_n^{p+})$.

Para cada i entre 1 e 2^n , vamos colocar $A_{n+1}^{2i-1} = \rho(f_n^{i-})$ e $A_{n+1}^{2i} = \rho(f_n^{i+})$. Então, definimos $A_{n+1} = \coprod_{p=1}^{2^{n+1}} A_{n+1}^p$.

Assim, para todo n , fica definido o conjunto A_n .

Agora, como para cada p e n , $A_n^p = D_\delta(x_n^p)$, temos pela nossa escolha de δ e do recobrimento regular $\mathcal{U}$, que A_n intercepta $\bigcup_{i=1}^m P_i$ no mínimo em 2^n pontos. Isto implica que, para cada n , existe um inteiro i_n tal que $1 \leq i_n \leq m$ e de maneira que $A_n \cap P_{i_n}$ consiste de, no mínimo $[2^n/m]$ pontos (onde $[x]$ indica o maior inteiro menor que x). Como existe um número finito de placas P_i , existe um inteiro i_0 e uma seqüência (divergente) $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de forma que, para cada k , $A_{n_k} \cap P_{i_0}$ consista de, pelo menos, $[2^{n_k}/m]$ pontos.

Pela nossa escolha de δ , pela nossa construção de A_n e pela definição de $\eta(\varepsilon)$ (dada antes do teorema), temos que, para todo $n \geq 1$, todo ponto de A_n^p pode ser ligado a um ponto de A_0 por uma $\mathcal{F}$ -curva cujo comprimento é menor ou igual a $n[\xi\ell(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)]$.

Seja ainda P_{A_0} o conjunto das placas P_x passando por pontos $x \in A_0$.

Fixemos $y_0 \in P_{i_0}$; então, é claro que existem no mínimo $[2^{n_k}/m]$ placas distintas

em P_{A_0} que podem ser ligadas ao y_0 por $\mathcal{F}$ -curvas de comprimento menor ou igual a $n_k[\zeta\ell(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)] + d_{i_0}$ (onde d_{i_0} é o diâmetro da placa P_{i_0}), para todo k .

Seja $g_{L_0}(r)$ a função crescimento da folha L_0 de $\mathcal{F}$ contendo a placa P_{i_0} . Tomamos a sequência $\{r_k\}$, onde para cada k , $r_k = n_k[\zeta\ell(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)] + d_{i_0}$. É claro que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{r_k} \log(g_{L_0}(r_k)) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log(g_{L_0}(r)) . \quad (3.1)$$

Além disso, para cada k suficientemente grande, como consequência do que vimos acima, temos as desigualdades:

$$\frac{1}{r_k} \log([2^{n_k}/m]) \leq \frac{1}{r_k} \log(g_{L_0}(r_k)) \quad (3.2)$$

e

$$\frac{1}{r_k} \log([2^{n_k}/m]) > \frac{1}{r_k} \log\left(\frac{2^{n_k-1}}{m}\right) . \quad (3.3)$$

Agora, pela definição de r_k , vem que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{r_k} \log\left(\frac{2^{n_k-1}}{m}\right) > 0 . \quad (3.4)$$

De (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) decorre que:

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log(g_{L_0}(r)) > 0 ,$$

ou seja, L_0 tem crescimento quase-exponencial, o que demonstra o teorema. $\square$

O Teorema 3.2 nos fornece uma condição necessária, mas não suficiente, para que uma folheação $\mathcal{F}$ seja expansiva em uma variedade compacta M , se a codimensão de $\mathcal{F}$ é maior que 1.

Ainda não se obteve neste caso uma condição suficiente para a expansividade de $\mathcal{F}$. Porém, curiosamente, o fato de $\mathcal{F}$ ser expansiva nos fornece uma condição suficiente para a não nulidade da entropia geométrica $h(\mathcal{F}, g)$ em codimensão qualquer.

Para mostrar isto, começaremos por dar uma definição que lembrará muito aquela definição de “ (n, ε) -separabilidade” dada no capítulo anterior. A idéia desta definição é devida a Hurder (veja [Hu]).

Definição 3.4 *Fixemos um recobrimento regular $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ de M . Diremos que um conjunto $E \subset M$ é $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, r, \varepsilon)$ -separado se dados dois pontos x e y quaisquer de E , uma das seguintes condições se verifica:*

- (i) *não existe U_i tal que $\{x, y\} \subset U_i$;*
- (ii) *existe um aberto U_i de $\mathcal{U}$, com $\{x, y\} \subset U_i$, uma $\mathcal{F}$ -curva α e uma cêrca $f : [0, 1] \times N \rightarrow M$ (vizinhança compacta de 0 em $\mathbb{R}^q$) ao longo de α tal que:*
 - (a) $\lambda(f) \subset U_i$;
 - (b) $\alpha(0) = x$;
 - (c) y e um ponto z de $\lambda(f)$ estão em uma mesma placa de U_i ;
 - (d) $\max_{x \in N} (\text{comp}(f|_{[0,1] \times \{x\}})) \leq r$;
 - (e) $\bar{d}(h_f(x); h_f(z)) \geq \varepsilon$ (onde $\bar{d}$ indica a distância induzida por g sobre $\text{int}_1 \rho(f)$).

Denotamos por $N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, r, \varepsilon)$ a cardinalidade máxima dos conjuntos $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, r, \varepsilon)$ -separados e definiremos:

$$h_r(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \varepsilon) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, r, \varepsilon) .$$

Lema 3.6 *Seja $\mathcal{F}$ fortemente expansiva. Então para um recobrimento regular $\mathcal{U}$ fixo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $h_r(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \varepsilon) > 0$.*

Demonstração: Seja δ a constante de forte expansividade para $\mathcal{F}$. Fixemos ε_0 tal que $0 < \varepsilon_0 < \delta$. Agora, tomemos $\ell(\varepsilon_0)$, A_n , x_n^p , f_n^{p+} , f_n^{p-} , $\eta(\varepsilon_0)$ e ζ como na demonstração do Teorema 3.2.

Denotemos por y_n^p o ponto de A_0 que pode ser ligado a x_n^p por uma $\mathcal{F}$ -curva “ao longo” das $\mathcal{F}$ -curvas relativas às cêrcas $f_i^{j(\pm)}$, para $1 \leq i \leq n$. Seja $E_n = \{y_n^p \mid 1 \leq p \leq 2^n\}$. É claro que E_n tem cardinalidade 2^n e que, além disso, E_n é $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n(\zeta\ell(\varepsilon_0) + \eta(\varepsilon_0)), \varepsilon_0)$ -separado, ou seja,

$$N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n(\zeta\ell(\varepsilon_0) + \eta(\varepsilon_0)), \varepsilon_0) \geq 2^n . \quad (3.5)$$

Agora, seja $r_n = n(\zeta\ell(\varepsilon_0) + \eta(\varepsilon_0))$; é claro que:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, r, \varepsilon_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \log N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, r_n, \varepsilon_0) . \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6) segue que:

$$h_r(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \varepsilon_0) \geq \frac{1}{\zeta\ell(\varepsilon_0) + \eta(\varepsilon_0)} \log 2 > 0 .$$

□

Observação: Devemos notar que quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $h_r(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \varepsilon)$ aumenta; logo, pelo lema acima, se $\mathcal{F}$ é fortemente expansiva, temos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_r(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \varepsilon) > 0$.

Teorema 3.3 *Se $\mathcal{F}$ é fortemente expansiva, então a entropia geométrica $h(\mathcal{F}, g)$ é positiva.*

Demonstração: Em primeiro lugar, devemos notar que não há perda de generalidade se supormos nas definições 3.2 e 3.3 que a curva α (ao longo da qual definimos as cêrcas) seja uma geodésica da folha (é fácil ver que, mesmo com esta hipótese, os resultados seguintes continuam válidos).

Suponhamos então que $\mathcal{F}$ seja fortemente expansiva e fixemos Δ , τ e $\mathcal{U}_\Delta$ como na segunda parte da demonstração do Teorema 2.1. Seja δ a constante de expansividade; pelo lema anterior, existe ε_1 com $0 < \varepsilon_1 < \delta$ tal que $h_r(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, \varepsilon_1) > 0$. Por outro lado, seja ε_2 tendo a propriedade do enunciado do Lema 2.4. Seja então $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Seja $A \subset M$ um conjunto $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, r_n, \varepsilon)$ -separado de cardinalidade máxima (onde $r_n = 2n\tau\Delta$). Vamos supor por absurdo que existam elementos x e y em A que não sejam

$(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ -separados. Podemos então supor que x e y pertençam a um mesmo aberto regular da cobertura $\mathcal{U}_\Delta$ (caso contrário, obviamente, x e y seriam $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ -separados).

Temos então dois casos a considerar:

1º Caso: $d(x, y) < \varepsilon$. Neste caso, pela nossa escolha de ε e pelo Lema 2.4, temos que para toda geodésica α com $\text{comp}(\alpha) \leq r_n$ e com $\alpha(0) = x$, existe uma n -cadeia $u = (U_1, \dots, U_n)$ de abertos em $\mathcal{U}_\Delta$ que é uma cadeia simultânea para x e y ao longo de α . Pela observação feita no início da demonstração, é fácil ver que toda cêrca ao longo de α que tenha as propriedades como em (ii) da Definição 3.4 tem sua imagem contida em u e que $\lambda(f) \subset U_1$ e $\rho(f) \subset U_n$.

Agora, como x e y não são $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ -separados, segue que das definições de $\bar{d}$ e d_H (d_H a distância de Hausdorff entre placas) que

$$\bar{d}(h_f(x), h_f(z)) \leq d_H(P_n^x, P_n^y) < \varepsilon$$

(onde z é como em (ii) da Definição 3.4 e P_n^x e P_n^y são as placas de x e y em U_n). Como toda cêrca f para x e y é dessa forma, segue que x e y não são $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, r_n, \varepsilon)$ -separados, uma contradição.

2º Caso: $d(x, y) \geq \varepsilon$. Neste caso, como $d_H(P^x, P^y) < \varepsilon$, podemos escolher um ponto y' em P^y tal que $d(x, y') \leq d_H(P^x, P^y) < \varepsilon$. É claro que se x e y são $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, r_n, \varepsilon)$ -separados, então x e y' também o são, uma vez que y e y' estão na mesma placa. Logo, a cardinalidade máxima de conjuntos $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, r_n, \varepsilon)$ -separados permanece inalterada se trocarmos y por y' e podemos, portanto, repetir a demonstração do caso anterior para x e y' .

De qualquer forma, provamos que todo conjunto $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, r_n, \varepsilon)$ -separado é $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ -separado, ou seja,

$$N(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon) \geq N(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, r_n, \varepsilon) . \quad (3.7)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} h_r(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, \varepsilon) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, r, \varepsilon) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, r_n, \varepsilon) . \end{aligned} \quad (3.8)$$

De (3.7) e (3.8) segue que:

$$h(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, \varepsilon) \geq h_r(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, \varepsilon) . \quad (3.9)$$

Da nossa escolha de ε e de (3.9) segue então que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, \varepsilon) > 0$.

Passando ao limite, esta última desigualdade nos fornece que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta) > 0$ (veja a observação que vem após o Lema 3.6). Segue então do Teorema 2.1 que $h(\mathcal{F}, g) > 0$, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Exemplo 3.4 Vamos dar um exemplo de uma folheação $\mathcal{F}$ que é não expansiva, mas que tem entropia geométrica positiva.

Antes, vamos definir turbilhonização de uma folheação.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 de uma variedade M de dimensão 3 (compacta ou não). Suponhamos que exista um mergulho

$$\varphi : S^1 \times D^2 \rightarrow M$$

tal que:

- (a) $\varphi|_{S^1 \times \{x\}}$ é transversal a $\mathcal{F}$, para todo $x \in D^2$;
- (b) $\varphi(\theta \times D^2)$ está contido numa folha, para todo $\theta \in S^1$.

Vamos modificar $\mathcal{F}$ no toro sólido $\varphi(S^1 \times D^2)$ sem mudar a folheação no exterior da maneira que se segue: no cilindro sólido $\mathbb{R} \times D^2$ consideremos a folheação C^∞ definida pelo cilindro $x_2^2 + x_3^2 = 1/2$ ($(x_2, x_3) \in D^2$) mais os gráficos das funções $x_1 = \alpha(x_2^2 + x_3^2) + c$, $c \in \mathbb{R}$, nos pontos $(x_2, x_3) \in D^2$ com $x_2^2 + x_3^2 \neq 1/2$. Aqui, $\alpha(r) = 0$ em uma vizinhança

de $r = 1$ e $\frac{d^n \alpha}{dr^n}(r) \rightarrow -\infty$ pela esquerda e direita de $r = 1/2$ e para todo $n \geq 0$. Como esta folheação é invariante por translações ao longo do eixo x_1 ela induz uma folheação no toro $S^1 \times D^2$ que por sua vez induz, via φ , uma folheação $\mathcal{F}'$ de M com uma folha compacta homeomorfa ao toro T^2 (ver Figura 3.1). Se $D_{1/2}$ é o disco de raio $1/2$, temos que na região $\varphi(S^1 \times D_{1/2})$ a folheação $\mathcal{F}'$ possui uma componente de Reeb. Dizemos que $\mathcal{F}'$ é obtida de $\mathcal{F}$ por turbilhonização.

Vamos considerar agora a folheação $\mathcal{F}_1$ da variedade T'' do Exemplo 2.5; seja $\varphi : S^1 \times D^2 \rightarrow T''$ o mergulho do toro sólido $S^1 \times D^2$ em T'' , onde $\varphi(S^1 \times D^2)$ é o toro $T^1 = D_{1/8} \times S^1$ (onde $D_{1/8}$ denota o disco de centro na origem e raio $1/8$). É claro que $T^1 \cap T' = \emptyset$. Usando a notação daquele exemplo, temos que $\pi \circ \varphi : S^1 \times D^2 \rightarrow M^3$ é um mergulho do toro $S^1 \times D^2$ em M^3 , já que T^1 está contido no interior de T'' e π restrito ao interior de T'' é um difeomorfismo. É claro também que as condições (a) e (b) acima se encontram satisfeitas por $\pi \circ \varphi$.

Pelo processo descrito acima, podemos então turbilhonizar a folheação $\mathcal{F}_2$ do referido exemplo, obtendo uma nova folheação $\mathcal{F}'_2$, que contém uma componente de Reeb no interior do toro $\pi \circ \varphi(S^1 \times D_{1/2})$.

Conforme já observamos anteriormente, $\mathcal{F}'_2$ não é expansiva, pois contém uma componente de Reeb. Mas a entropia de $\mathcal{F}_2$ ainda é positiva; de fato, podemos mostrar isto com uma argumentação análoga àquela usada no referido exemplo para provar que a entropia de $\mathcal{F}_2$ é positiva, bastando substituir a transversal ℓ usada anteriormente por outra transversal ℓ' às folhas de $\mathcal{F}_1$ tal que ℓ' está contida no interior de T'' e $\ell' \cap \varphi(S^1 \times D^2) = \emptyset$.

Figura 3.1 Folheação por turbilhonização

Referências

- [A] ANOSOV, D.V. Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. *Proc. Steklov Math. Inst.*, **90**, 1967.
- [Bo-1] BOWEN, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153**, 401–414, 1971.
- [Bo-2] BOWEN, R. Expansive one-parameter flows. *Journal of Differential Equations*, **12**, 180–193, 1972.
- [Ca;Lins] CAMACHO, C. & LINS NETO, A. *Teoria geométrica das folheações*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [C;C-1] CANTWELL, J. & CONLON, L. Poincaré-Bendixon theory for leaves of codimension one. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **265**, 181–209, 1981.
- [C;C-2] CANTWELL, J. & CONLON, L. Nonexponential leaves at finite level. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **269**, 637–661, 1982.
- [C;C-3] CANTWELL, J. & CONLON, L. Theory of levels. *Contemporary Mathematics*, **70**, 1–10, 1988.
- [C;C-4] CANTWELL, J. e CONLON, L. Growth of leaves. *Comment. Math. Helv.*, **53**, 93–111, 1978.
- [Car] Do CARMO, M.P. *Geometria riemanniana*. 2.ed. Projeto Euclides, IMPA, 1988.
- [Eg] EGASHIRA, S. Expansion growth of foliations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **2**, 15–52, 1993.
- [G;L;W] GHYS, E.; LANGEVIN, R. & WALCZAK, P. Entropie geometrique des feuilletages. *Acta Math.*, **60**, 105–142, 1988.

- [God] GODBILLON, C. Feuilletages (Études géométriques). *Progress in Mathematics*, **98**, Birkhäuser Verlag, 1991.
- [He] HECTOR, G. Architecture des feuilletages de class C^2 . *Astérisque*, **107–108**, 243–258, 1983.
- [Hu] HURDER, S. Ergodic theory of foliations and a theorem of Sacksteder. *Lecture Notes in Math.*, **1342**, Springer Verlag, 291–328.
- [I;T] INABA, T. & TSUCHIYA, N. Expansive foliations. *Hokkaido Math. Journal*, **21**, 39–49, 1992.
- [K;S] KEYNES, H.B. & SEARS, M. Real expansive flows and topological dimension. *Ergod. Theory and Dynamical Systems*, **1**, 179–195, 1981.
- [L;W] LANGEVIN, R. & WALCZAK, P. Entropy, transverse entropy and partitions of unity. Preprint, Univ. de Bourgogne, Dijon, France, 1992. (A aparecer em *Ergodic Theory and Dynamical Systems*.)
- [Lima-1] LIMA, E.L. Variedades diferenciáveis. *Monografias de Matemática*, **15**, IMPA, 1973.
- [Lima-2] LIMA, E.L. *Elementos de topologia geral*. 2.ed. Livros Técnicos e Científicos, 1976.
- [Lima-3] LIMA, E.L. *Cálculo tensorial*. Notas de Matemática, nº 32, IMPA, 1965.
- [Lima-4] LIMA, E.L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [M] MOISE, E. *Elementary geometry from an advanced standpoint*. 2.ed. Addison-Wesley Pub. Comp., 1974.
- [Mo] MOLINO, P. Riemannian foliations. *Progress in Mathematics*, **72**, Birkhäuser Verlag, 1988.
- [Pa;Me] PALIS Jr., J. & MELLO, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Projeto Euclides, IMPA, 1978.
- [Pl] PLANTE, J. Foliations with measure preserving holonomy. *Ann. of Math.*, **102**, 327–361.

- [Reeb] REEB, G. Sur certains propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Actual. Sci. Ind.*, **1183**, Hermann, Paris, 1952.
- [Ta] TAMURA, I. Topology of foliations: an introduction. *Trans. of Math. Mon.*, **97**, Am. Math. Soc., 1992.