**Alguns aspectos locais de envolveres
de n -esferas a dois parâmetros
em uma forma espacial**

Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti

- SÃO PAULO, Fevereiro de 1990 -

*Dedico este trabalho, com amor,
ao José Roberto
e ao Rafael*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti, um orientador paciente, bastante acessível e exigente que colaborou muito, não só neste trabalho, com a minha formação em Geometria. Como êle também se inclui nos dois grupos que se seguem, agradeço triplamente.

Aos colegas do Grupo de Geometria Diferencial, em especial às Professoras Célia Contin Góes e Maria Elisa G. G. de Oliveira pela disponibilidade frequente em discutir problemas e pelo estímulo e interesse com que acompanharam o meu trabalho.

Aos amigos do IME, de um modo geral, pela torcida e pelo carinho diário. Em especial ao Prof. Sérgio Alves, que me incentivou diariamente e esteve sempre disposto a me ouvir, não só sobre os problemas de Geometria e à Profa. Mary Lilian Lourenço, uma grande amiga.

Aos amigos do ICMSC-USP, que me iniciaram nos conhecimentos de matemática e embora distantes, continuam a torcida. Em especial à Sandra M. Semensato de Godoy e Angela Maria Sitta, grandes amigas, desde os tempos de graduação.

À Cristina Suzuki, amiga de grupo, pela grande colaboração nesta fase decisiva e ao João Carlos de Oliveira pelo apoio e excelente trabalho realizado na edição deste texto.

Às minhas famílias, os “Barreiro” e os “Chaves” pelo grande acompanhamento em todos os momentos, em especial ao José Roberto e ao Rafael, pela compreensão, encorajamento e o amor com que me acolheram, e acolhem todos os dias.

Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves
Fevereiro de 1990

ABSTRACT

In this work we are mainly concerned with the study of (special) 2-parameter envelopes of n -spheres $M^n (n \geq 4)$ in a simply connected space form Q_c^{n+1} ($c = 0, 1$ or -1) which satisfy the Weingarten relation $A + BH + CK = 0$ between the mean curvature H and the Gauss-Kronnecker curvature K of $M^n \rightarrow Q_c^{n+1}$, where A, B and C are real constants; such a relation includes the case $H = \text{constant}$. We obtain some examples of those objects as well some non-existence results. We also study the possibility of a 2-parameter envelope of n -spheres M^n in H^{n+1} (case $c = -1$) be isometrically immersed into R^{n+2} with everywhere zero normal curvature tensor. In our approach, the focal set of the envelope plays a fundamental role in the characterization of the envelope, in the construction of examples and in the proofs of results.

Conteúdo

1	Envolventes a p -parâmetros de n -esferas em Espaços de Curvatura Constante	1
1.1	Preliminares.	1
1.2	Definição e caracterização local das Envolventes a p -parâmetros de n -esferas em Q_c^{n+1}	3
1.3	Considerações sobre Subvariedades e Hipersuperfícies de Weingarten em Q_c^{n+1}	16
1.4	Envolventes a 2-parâmetros especiais em Q_c^{n+1} : tipos I, II, III.	18
2	Envolventes a 2-parâmetros de tipos I, II e III em Q_c^{n+1} com a relação de Weingarten $A + Bn\mathbf{H}^\psi + C\mathbf{K}^\psi = 0$	25
2.1	Estudo do tipo I.	25
2.2	Estudo do tipo II.	34
2.3	Estudo do tipo III.	45

3	Envolventes a p -parâmetros de n -esferas em $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+2}$	53
3.1	Introdução.	53
3.2	Condições necessárias e suficientes para que M^n possa ser isométricamente imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ e em $\mathbb{R}^{n+2}$ com $R^\perp \equiv 0$	55

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar envolventes de n -esferas a dois parâmetros em uma forma espacial Q_c^{n+1} , dada como em (1.1).

O caso euclidiano, isto é, $Q_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ foi estudado em [AD], com o objetivo de obter exemplos de hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$ que pudessem ser localmente isometricamente imersas em S_c^{n+2} , com fibrado normal plano. Observa-se na referência citada que esta questão está relacionada com o conceito de envolventes a 2-parâmetros de n -esferas.

Desde então foram naturalmente colocados alguns problemas, que foram objeto deste nosso estudo. Em princípio, estávamos interessados na caracterização das envolventes a 2-parâmetros mínimas em $\mathbb{R}^{n+1}$ e consequentemente estendemos a mesma análise para $\mathbb{H}^{n+1}$ e S^{n+1} . Em algum momento percebemos que os argumentos utilizados permitiam caracterizar também as envolventes a 2-parâmetros com curvatura média constante e mais geralmente as envolventes a 2-parâmetros que admitem uma relação linear de Weingarten (§1.3) entre as suas curvaturas média $\mathbf{H}$ e de Gauss-Kronnecker $\mathbf{K}$, isto é, tais que $A + Bn\mathbf{H} + C\mathbf{K} = 0$, onde A , B e C são constantes reais, não simultaneamente nulas.

Para isto, estendemos no capítulo 1, a caracterização local das envolventes a p -parâmetros, dada em [AD], para os outros dois ambientes S^{n+1} e $\mathbb{H}^{n+1}$ (ver teorema 1.2.8). Isto se obtém facilmente devido a [CR], onde a noção de conjunto focal, já é dada para os três ambientes e pelo fato da caracterização local citada acima depender fortemente desta noção. Obtivemos ainda neste capítulo uma caracterização dos pontos regulares destas envolventes, em função da regularidade de um operador que atua no espaço tangente do conjunto focal da envolvente (ver proposição 1.2.23). Este resultado foi sugerido pela leitura de [DG], onde há esta preocupação ao se caracterizar os pontos regulares de uma hipersuperfície imersa em Q_c^{n+1} , com nulidade relativa constante $n - k$.

Para abordarmos o problema de caracterização das 2-envolventes tais que $A + Bn\mathbf{H} + C\mathbf{K} = 0$, obtivemos primeiramente a expressão da matriz da sua segunda forma fundamental (ver (1.2.34)), em função dos operadores que surgiram naturalmente na proposição acima e consequentemente as expressões de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{K}$ em função dos mesmos operadores. Ao substituírmos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{K}$ na expressão $A + Bn\mathbf{H} + C\mathbf{K} = 0$, a equação resultante, que depende do conjunto focal e de sua segunda forma fundamen-

tal, é bastante complicada, como se pode ver no corolário (1.3.4). Por isso, colocamos hipóteses adicionais na envolvente e consequentemente no seu conjunto focal, passando a estudar as 2-envolventes especiais (ver definição (1.4.1), teorema (1.4.2)), através de três tipos.

No capítulo 2, estudamos separadamente cada um destes tres tipos. Em geral, obtivemos mais resultados de não existência, do que resultados em que se apresentam exemplos. Mesmo assim são resultados de algum interesse, que destacaremos em seguida.

Com relação ao tipo I, destacamos o teorema (2.1.30) em que a 2-envolvente satisfaz uma relação particular de Weingarten se e somente se o conjunto focal é mínimo. Salientamos ainda o corolário (2.1.35) sobre a não existência de 2-envolventes com $H = \text{constante}$ e, em particular, sobre a não existência de mínimas, nestas condições.

Com relação ao tipo II, temos o corolário (2.2.35) sobre as condições necessárias e suficientes para termos uma 2-envolvente com curvatura $K \equiv 0$; o corolário (2.2.36) sobre a não existência de 2-envolventes de tipo II em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo $A + BnH + CK \equiv 0$ ($B \neq 0$) (em particular, sobre a não existência de tais envolventes com H constante) e o teorema (2.2.37) sobre a existência de exemplo em Q_c^{n+1} , $c \neq 0$, satisfazendo uma relação particular de Weingarten, se a função r é constante. Este mesmo teorema registra a não existência de exemplos de tipo II em Q_c^{n+1} , $c \neq 0$, com H constante.

Com relação ao tipo III, embora tenhamos chegado numa equação diferencial a derivadas parciais para a função r , nos três ambientes, pela dificuldade em analisá-la, optamos por uma abordagem mais geométrica. Mesmo assim, por enquanto, só foram obtidos resultados no ambiente euclideano, mas acreditamos que, com um pouco mais de tempo, poderemos também obter resultados de mesma natureza para os outros ambientes. Convém destacar o teorema (2.3.29), que diz em particular, que uma 2-envolvente de tipo III, nas condições lá citadas, é mínima em $\mathbb{R}^{n+1}$ se e somente se é um cilindro sobre um catenóide em $\mathbb{R}^n$ (ver (2.3.27)).

No capítulo 3, estudamos uma outra questão, ligada principalmente com o capítulo 1 e colocada naturalmente pela leitura de [AD]. Conforme justificamos na introdução (3.1), o objetivo deste capítulo foi obter exemplos de hipersuperfícies de H^{n+1} que pudessem ser localmente isometricamente imersas em $\mathbb{R}^{n+2}$, com fibrado normal plano. Como este é um problema paralelo ao de [AD], utiliza-se a noção de 2-envolventes em H^{n+1} , dada no capítulo 1. Na definição (1.2.1) de 2-PES (ou p -PES) aparece uma

restrição para λ , que está de acordo com a caracterização do conjunto focal, dada em [CR] ($\lambda \neq 0$ no caso euclidiano e $|\lambda| > 1$ no caso hiperbólico). Consequentemente, conforme mostra-se no teorema (1.2.8), as folhas umbílicas da distribuição D_λ se restringem, também no ambiente hiperbólico, às esferas e pelo menos por esta técnica não aparecem as outras subvariedades umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$, como esperávamos no princípio. Deste modo, o estudo neste capítulo, seguiu de perto os passos de [AD]. Destacamos as definições de cone e produto de curvas que adaptamos ao espaço hiperbólico, bem como o fato de conhecermos as hipersuperfícies de rotação de $\mathbb{H}^3$, dadas em [CD]₂, para podermos obter o resultado principal deste capítulo, teorema (3.2.24).

Capítulo 1

Envolventes a p -parâmetros de n -esferas em Espaços de Curvatura Constante

1.1 Preliminares.

Usaremos a notação Q_c^N para indicar a variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ de curvatura seccional constante $c = 0, 1$ ou -1 . Mais precisamente:

1.1.1 Se $c = 0$, Q_c^N é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ munido com a métrica canônica $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

1.1.2 Se $c = 1$, Q_c^N é a esfera unitária S^N centrada na origem de $\mathbb{R}^{N+1}$ e com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ restrição da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ de $\mathbb{R}^{N+1}$.

1.1.3 Se $c = -1$, denote por $\mathbb{L}^{N+1}$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^{N+1}$ munido com a métrica de Lorentz

$$\langle x, y \rangle_{-1} = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{N+1} y_{N+1},$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N+1})$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N+1})$. Neste caso, Q_c^N é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^N$ definido como uma hipersuperfície de $\mathbb{L}^{N+1}$, por

$$\mathbb{H}^N = \{x \in \mathbb{L}^{N+1}; \langle x, x \rangle_{-1} = -1, \quad x_1 > 0\}.$$

É fato conhecido que a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ a $\mathbb{H}^N$ define uma métrica Riemanniana de curvatura seccional constante -1 .

Nos capítulos 1 e 2, estaremos considerando $N \geq 5$.

1.1.4 Seja $x : M^n \rightarrow Q_c^N$, $2 \leq n < N$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n .

Tomamos em M^n a métrica induzida por x , tornando assim M^n Riemanniana e x isométrica.

Seja $\alpha : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental de x em $p \in M$, onde $T_p M$ e $(T_p M)^\perp$ denotam, respectivamente, os espaços tangente e normal à M em p . Denotando por TM e $TM^\perp$ os respectivos fibrados tangente e normal à imersão x , temos que $TQ_c^N = TM \oplus TM^\perp$ ao longo de x .

Sejam η um campo normal unitário à imersão x e A_η a aplicação linear auto-adjunta de espaços tangentes, correspondente à segunda forma fundamental de x ao longo de η , isto é :

$$\langle A_\eta X, Y \rangle_c = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle_c$$

onde X, Y são tangentes à M e $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ denota tanto a métrica induzida quanto a do ambiente.

Como esta M^n aqui apresentada assumirá dois papéis, denotemos por enquanto ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M^n e Q_c^N , respectivamente.

Serão úteis as seguintes fórmulas, apresentadas em [C].

FÓRMULA DE GAUSS : $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \quad \forall X, Y \in TM$.

FÓRMULA DE WEINGARTEN : $\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi \quad \forall X \in TM, \xi \in TM^\perp$
onde $\nabla_X^\perp \xi = (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp$ ($\nabla^\perp$ é a conexão normal de x).

Usando-se estas duas fórmulas, derivamos as equações básicas para uma imersão isométrica que em espaços de curvatura constante se simplificam bastante. Antes definimos o tensor curvatura R de M^n (analogamente $\tilde{R}$ de Q_c^N) e o tensor curvatura normal $R^\perp$ de $TM^\perp$ por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in TM$$

e

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi, \quad \forall X, Y \in TM, \quad \forall \xi \in TM^\perp.$$

Obtemos então, $\forall X, Y, Z, W \in TM, \xi, \eta \in TM^\perp$,

(1) EQUAÇÃO DE GAUSS :

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = c \{ \langle Y, Z \rangle_c \langle X, W \rangle_c - \langle X, Z \rangle_c \langle Y, W \rangle_c \} + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle_c - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle_c,$$

(2) EQUAÇÃO DE CODAZZI :

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) &= (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) \quad \text{onde} \\ (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) &= \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

(3) EQUAÇÃO DE RICCI :

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle_c = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle_c.$$

1.1.5 Seja agora $x : M^n \longrightarrow Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica como em (1.1.4) e suponha sempre que M^n é conexa e orientável, com uma dada orientação. Neste caso denotamos por N a normal unitária à x que dá a orientação de M e por $k_1, k_2, \dots, k_n$ os autovalores (reais) de A_N . Vamos denotar por $\bar{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M^n e Q_c^{n+1} respectivamente.

A seguir, exporemos algumas definições e resultados básicos, sendo que boa parte deles pode ser encontrada em [AD] para o caso $c = 0$.

1.2 Definição e caracterização local das Envolventes a p -parâmetros de n -esferas em Q_c^{n+1} .

Definição 1.2.1 Dizemos que uma imersão isométrica $x : M^n \longrightarrow Q_c^{n+1}$ como em (1.1.5), com $n \geq 4$, é uma envolvente a p -parâmetros de n -esferas em Q_c^{n+1} , $p \leq n - 2$ (brevemente, p -PES) quando em cada ponto de M temos

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-p} = \lambda \quad \text{e} \quad k_j \neq \lambda \quad \text{se} \quad n - p + 1 \leq j \leq n,$$

onde $\lambda \neq 0$ nos casos $c = 0$ e 1 e $|\lambda| > 1$ no caso $c = -1$.

1.2.2 Sejam $L = L^p$ variedade diferenciável p -dimensional dada por parâmetros $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ e $g : L \longrightarrow Q_c^{n+1}$ uma imersão. Tomamos em L a métrica

induzida por g , tornando assim L Riemanniana e g isométrica. Seja ainda $r \in C^\infty(L)$ uma função positiva nos casos $c \leq 0$ e tal que não anule $\alpha(r)$ nem $\beta(r)$ dadas por (1.2.3), no caso $c = 1$. Além disto, se r não é constante, deve ocorrer $0 < \|\nabla r\|^2 < 1$ onde ∇r é o gradiente de r na métrica de L .

Consideremos ainda as funções:

$$1.2.3 \quad \begin{cases} \alpha(r) = \cos r, \\ \beta(r) = \sin r, \text{ no caso em que } c = 1, \\ \alpha(r) = \cosh r, \\ \beta(r) = \sinh r, \text{ no caso em que } c = -1. \end{cases}$$

Conforme [AD], no caso $c = 0$, sabe-se que classicamente uma p -PES é, localmente, uma solução $x = (u_1, u_2, \dots, u_p, t_1, t_2, \dots, t_{n-p})$ do sistema

$$1.2.4 \quad \begin{cases} (a) & \|x - g\|^2 = r^2, \\ (b) & \left\langle x - g, \frac{\partial g}{\partial u_j} \right\rangle_0 = -r \frac{\partial r}{\partial u_j}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \end{cases}$$

sendo g e r dados como acima e $u_1, u_2, \dots, u_p, t_1, t_2, \dots, t_{n-p}$ os parâmetros de x descritos na referência citada.

Em [AD], apresenta-se neste ponto, para o caso $c = 0$, uma construção local de uma envolvente a p -parâmetros de esferas. Mostraremos que esta construção também pode ser obtida nos casos $c = \pm 1$.

Por conveniência de cálculos, vamos apresentar a envolvente como uma imersão de um fibrado normal unitário, definido a seguir em Q_c^{n+1} . Esta técnica, utilizada em [DG], facilitou uma caracterização dos pontos regulares (1.2.23) e a análise dos resultados no capítulo 2.

1.2.5 Consideremos $g : L \rightarrow Q_c^{n+1}$, $r \in C^\infty(L)$ como em (1.2.2) e as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ como em (1.2.3). Seja ainda Λ^1 o fibrado normal unitário sobre a imersão g , cujos pontos são da forma (y, ξ_y) , onde $y \in L$ e ξ_y é um vetor normal unitário à imersão g no ponto y .

Notemos que para cada y, ξ_y descreve uma $(n - p)$ -esfera unitária, centrada na origem de um $(n - p + 1)$ -espaço ortogonal a g que pode ser dada por parâmetros ortogonais $t_1, t_2, \dots, t_{n-p}$.

Seja $\psi : \Lambda^1 \longrightarrow Q_c^{n+1}$ a aplicação dada por :

1.2.6

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi(y, \xi_y) = g(y) - r(y)\nabla r(y) - r(y)\sqrt{1 - |\nabla r(y)|^2}\xi_y & (c = 0), \\ = \cos r(y)g(y) - \sin r(y)\nabla r(y) + \sin r(y)\sqrt{1 - |\nabla r(y)|^2}\xi_y & (c = 1), \\ = \cosh r(y)g(y) - \sinh r(y)\nabla r(y) + \sinh r(y)\sqrt{1 - |\nabla r(y)|^2}\xi_y & (c = -1). \end{array} \right.$$

Para simplificar a notação vamos, daqui para frente, tirar o ponto y no lado direito das três últimas expressões e usar a notação (1.2.3).

Observações 1.2.7

- (1) No caso em que $c = 0$, a imagem de ψ coincide com a imagem da parametrização $x(u_1, u_2, \dots, u_p, t_1, \dots, t_{n-p})$ dada em (1.4) de [AD]. Além disto, nos pontos regulares (1.2.23), a aplicação ψ define uma hipersuperfície em Q_c^{n+1} , pois depende de n parâmetros.
- (2) Convém ressaltar que se o ponto $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$ o ponto $(y, -\xi_y)$ também está em Λ^1 e portanto $\psi(y, \xi_y)$ e $\psi(y, -\xi_y)$ são dois pontos da envolvente situados na mesma $(n - p)$ -esfera, veja (1.2.5).

A seguir vamos enunciar um teorema que caracteriza localmente as p -PES. A demonstração, para o caso $c = 0$, de [AD], sugere naturalmente esta generalização e esclarece a denominação “subvariedade focal” que usaremos para g .

Teorema 1.2.8 *A aplicação $\psi : \Lambda^1 \longrightarrow Q_c^{n+1}$ dada por (1.2.6), no subconjunto aberto dos pontos regulares, é uma envolvente a p -parâmetros de esferas (p -PES).*

Reciprocamente, toda p -PES, pode ser localmente dada por (1.2.6) para $r = 1/\lambda$ se $c = 0$, para $r = \cot^{-1} \lambda$ se $c = 1$ e para $r = \coth^{-1} \lambda$ se $c = -1$.

Demonstração. Faremos para o caso $c = -1$, já que para $c = 1$ o raciocínio é análogo.

Sejam $g : L \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, $r \in C^\infty(L)$ como em (1.2.2) e $\psi : \Lambda^1 \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ como em (1.2.6) ($c = -1$). É imediato, pela proposição (1.2.23), demonstrada a seguir, que nos pontos regulares $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$, ψ é uma p -PES. Notemos que a condição $\lambda > 1$ se verifica pois neste caso tomamos $\lambda = \frac{\alpha(r)}{\beta(r)}$ onde $\alpha(r) = \cosh r$ e $\beta(r) = \sinh r$.

Para demonstrar a recíproca, seja $x : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma p -PES, como na definição (1.2.1) e $D_\lambda : M \rightarrow TM$ a distribuição diferenciável dada por

$$D_\lambda(q) = \{X \in T_q M \mid A_N(X) = \lambda X\}, \text{ para cada } q \in M.$$

Por [R], temos que D_λ é diferenciável e involutiva, que λ é constante ao longo de cada folha Σ_λ de D_λ e que Σ_λ é uma $(n-p)$ -subvariedade umbílica de M^n e de $\mathbb{H}^{n+1}$.

Consideremos então, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-p}, U_1, U_2, \dots, U_p, N$ um referencial tangente a $\mathbb{H}^{n+1}$ tal que

$$\langle \eta_i, U_j \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-p, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

e

$$\begin{aligned} A_N(\eta_i) &= \lambda \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-p, \\ A_{U_j}(\eta_i) &= \delta_j \eta_i, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Por [Sp] (Teorema 29), temos que Σ_λ^{n-p} é uma subvariedade totalmente geodésica, ou uma esfera geodésica, ou uma horoesfera, ou uma hipersuperfície equidistante contida em alguma subvariedade totalmente geodésica Σ^{n-p+1} de $\mathbb{H}^{n+1}$. Deste modo Σ_λ^{n-p} é também umbílica em Σ^{n-p+1} .

Seja S a normal unitária a Σ_λ^{n-p} em Σ^{n-p+1} e $\{w_i, i = 1, 2, \dots, n-p\}$ o conjunto obtido pela ortonormalização do conjunto $\{\eta_i, i = 1, 2, \dots, n-p\}$.

Logo $A_S(w_i) = \alpha w_i$ para $i = 1, 2, \dots, n-p$, onde α é a curvatura principal de Σ_λ^{n-p} , na direção S . Notemos que S pode ser escolhido de modo que $\alpha \geq 0$, pois α é constante.

Em [Sp] mostra-se que para cada variação de α , temos uma das subvariedades umbílicas. Assim as totalmente geodésicas correspondem a $\alpha = 0$, as equidistantes correspondem a $0 < \alpha < 1$, as horoesferas a $\alpha = 1$ e as esferas geodésicas a $\alpha > 1$.

Pela equação de Gauss da imersão Σ_λ^{n-p} em Σ^{n-p+1} , temos

1.2.9 $\langle R(w_i, w_j)w_j, w_i \rangle_{-1} = -1 + \alpha^2$, onde R é o tensor de curvatura de Σ_λ^{n-p} .

Vamos agora olhar a equação de Gauss de Σ_λ^{n-p} em $\mathbb{H}^{n+1}$. Temos

1.2.10 $\langle R(w_i, w_j)w_j, w_i \rangle_{-1} = \langle \tilde{R}(w_i, w_j)w_j, w_i \rangle_{-1} + \langle B_{ii}, B_{jj} \rangle_{-1} - \langle B_{ij}, B_{ij} \rangle_{-1}$
 $\forall i, j$ onde $B_{ij} = B(w_i, w_j)$ é a segunda forma fundamental de Σ_λ^{n-p} em $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\tilde{R}$ o tensor curvatura de $\mathbb{H}^{n+1}$.

Consideremos $\{U'_j, j = 1, 2, \dots, p\}$ o conjunto obtido pela ortonormalização do conjunto $\{U_j, j = 1, 2, \dots, p\}$. Deste modo,

$$U'_j = \sum_{k=1}^p a_{jk} U_k, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Com simples cálculos mostra-se

$$\langle B_{ii}, B_{jj} \rangle_{-1} = \lambda^2 + \sum_{k=1}^p (\sum_{r=1}^p a_{kr} \delta_r)^2 \text{ e } B_{ij} = 0$$

Substituindo-se (1.2.11) e (1.2.9) em (1.2.10), obtemos

$$\alpha^2 = \lambda^2 + \sum_{k=1}^p (\sum_{r=1}^p a_{kr} \delta_r)^2$$

Como x é uma p -PES, temos por (1.2.1) a restrição $\lambda > 1$ e por (1.2.12) obtemos $\alpha > 1$. Portanto Σ_λ^{n-p} é uma esfera geodésica em $\mathbb{H}^{n+1}$ que chamaremos simplesmente de esfera. Usaremos as coordenadas $(u_1, u_2, \dots, u_p, t_1, t_2, \dots, t_{n-p})$ para x , de modo que para cada $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ fixo $(t_1, t_2, \dots, t_{n-p})$ parametrizam uma folha de D_λ . Deste modo

$$A_N \left(\frac{\partial x}{\partial t_i} \right) = \lambda \frac{\partial x}{\partial t_i} \quad i = 1, 2, \dots, n-p.$$

Como $\lambda > 1$, é possível definir $r = \coth^{-1}(\lambda)$. Tomando-se $\alpha(r) = \cosh r$ e $\beta(r) = \sinh r$, tem-se $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$.

Esta relação entre r e λ aparece em [CR] e nos permite obter o *conjunto focal* de x , relativo a λ , dado na referência citada por $g = \alpha x + \beta N$, onde N é a normal

unitária a x . (No caso $c = 0$, definimos $r = \frac{1}{\lambda}$ e $g = x + rN$ [AD] e no caso $c > 0$, definimos $r = \cot^{-1}(\lambda)$ e $g = \alpha x + \beta N$, onde $\alpha(r) = \cos r$ e $\beta(r) = \sin r$).

Como $\frac{\partial \lambda}{\partial t_i} = 0$ segue que $\frac{\partial r}{\partial t_i} = 0$, $\frac{\partial \alpha}{\partial t_i} = 0$ e $\frac{\partial \beta}{\partial t_i} = 0$.

$$\text{Logo } \frac{\partial g}{\partial t_i} = \frac{\partial(\alpha x + \beta N)}{\partial t_i} = \alpha \frac{\partial x}{\partial t_i} + \beta \frac{\partial N}{\partial t_i} = \alpha \frac{\partial x}{\partial t_i} - \beta \lambda \frac{\partial \beta}{\partial t_i} = 0.$$

Portanto g não depende dos $(n-p)$ -parâmetros associados a Σ_λ^{n-p} , ou seja $g = g(u_1, u_2, \dots, u_p)$. No teorema (3.1) de [CR], prova-se que g é uma subvariedade de $\mathbb{H}^{n+1}$ que indicaremos por $g : L \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$. Temos ainda

$$1.2.13 \quad \begin{cases} \left\langle N, \frac{\partial g}{\partial u_j} \right\rangle_{-1} = \left\langle N, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} x + \alpha \frac{\partial x}{\partial u_j} + \frac{\partial \beta}{\partial u_j} N + \beta \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle_{-1} = \\ = \frac{\partial \beta}{\partial u_j} = \alpha \frac{\partial r}{\partial u_j}, \end{cases}$$

$$1.2.14 \quad \langle N, g \rangle_{-1} = \langle N, \alpha x + \beta N \rangle_{-1} = \beta.$$

Consideremos $\{b_i, i = 1, 2, \dots, p\}$, referencial ortonormal tangente a g . Por (1.2.13), temos que

$$\langle N, b_i \rangle_{-1} = \langle \nabla \beta, b_i \rangle_{-1} = \langle \alpha \nabla r, b_i \rangle_{-1}.$$

Portanto, podemos decompor N em $\mathbb{L}^{n+2}$ do seguinte modo:

$$N = -\beta g + \alpha \nabla r + d\xi,$$

onde ξ é algum vetor unitário, normal a g em $\mathbb{H}^{n+1}$. Como $\langle N, N \rangle_{-1} = 1$, segue que $-\beta^2 + \alpha^2 |\nabla r|^2 + d^2 = 1$. Tomando-se $d = -\alpha \sqrt{1 - |\nabla r|^2}$ segue-se que

$$N = -\beta g + \alpha \nabla r - \alpha \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi$$

e como $g = \alpha x + \beta N$, obtemos

$$1.2.15 \quad x = \alpha g - \beta \nabla r + \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi.$$

Observemos agora que podemos considerar o fibrado normal unitário Λ^1 ao longo da subvariedade focal g dada acima. Dissemos no início que para cada $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ fixo, $(t_1, t_2, \dots, t_{n-p})$ estaria parametrizando uma folha de D_λ . Isto corresponde a dizer que para cada y fixo em L , se $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$, então ξ_y descreve a folha Σ_λ^{n-p} de D_λ . Portanto, podemos dizer que x dada localmente por (1.2.15), também pode ser dada, localmente, por

$$\psi(y, \xi_y) = \alpha(y)g(y) - \beta(y)\nabla r(y) + \beta(y)\sqrt{1 - |\nabla r|^2}(y)\xi_y.$$

□

1.2.16 Seja $g : L \rightarrow Q_c^{n+1}$ como em (1.2.2) e ∇ a conexão de Levi-Civita definida em L , por sua métrica. Seja $A_\xi : T_y L \rightarrow T_y L$ como em (1.1.4). Vimos em (1.2.5) como, a partir de g e r , definir $\psi : \Lambda^1 \rightarrow Q_c^{n+1}$ e no teorema (1.2.8), como obter g e r a partir de ψ .

Vamos a seguir demonstrar uma proposição que caracteriza os pontos regulares de ψ . Em sua demonstração, aparecem naturalmente algumas aplicações, que vamos apresentar antes, para facilitar o enunciado.

Deste modo, todas estas aplicações estarão definidas no ponto $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$ e portanto variam com y e ξ_y , sendo que para cada y , ξ_y varia numa $(n-p)$ -esfera unitária, como em (1.2.5). Apenas para facilitar, suprimimos o ponto na expressão dos operadores.

Para cada $b \in T_y L$, vamos denotar por

$$1.2.17 \quad b(r) = \langle \nabla r, b \rangle_c \quad e$$

$$1.2.18 \quad \text{Hess}_r b = \nabla_b (\nabla r) .$$

Seja $P : T_y L \rightarrow T_y L$ o operador linear dado por:

$$1.2.19 \quad \begin{cases} P(b) = b - b(r)\nabla r - r\text{Hess}_r b + r\sqrt{1 - |\nabla r|^2}A_\xi(b) & (c = 0) \\ \quad = \alpha b - \alpha b(r)\nabla r - \beta\text{Hess}_r b - \beta\sqrt{1 - |\nabla r|^2}A_\xi(b) & (c \neq 0) \end{cases}$$

sendo α e β dadas por (1.2.3).

Consideremos também o operador linear $T : T_y L \longrightarrow T_y L$

$$1.2.20 \quad \begin{cases} T(b) = -\text{Hess}_r b + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} A_\xi(b) & (c = 0) , \\ = - \left[\alpha \left(\text{Hess}_r b + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} A_\xi(b) \right) + \epsilon \beta (b - b(r) \nabla r) \right] & (c \neq 0) , \end{cases}$$

onde $\epsilon = 1$ para $c = 1$ e $\epsilon = -1$ para $c = -1$.

Tomando-se $\{b_j\}_{j=1,2,\dots,p}$ um referencial ortonormal de TL , obteremos que o espaço $\psi_{*(y,\xi_y)}(T\Lambda^1)$ se decompõe numa soma direta dos subespaços H (horizontal) e V (vertical) onde H é gerado pelos vetores $\{e_j\}$ para $j = 1, 2, \dots, p$, dados por

$$1.2.21 \quad e_j = b_j + \frac{\Sigma}{\sqrt{1 - |\nabla r|^2}} b_j(r) \xi$$

sendo $\Sigma = -1$ para $c = 0$ e $\Sigma = 1$ para $c = 1$ e $c = -1$ e V é gerado por vetores $\{\eta_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n - p$, ortogonais a ξ e à imersão $g : L \longrightarrow Q_c^{n+1}$.

Seja ainda $U : T_y L \longrightarrow H$ a aplicação dada por:

$$1.2.22 \quad U(b) = T(b) + \frac{\Sigma}{\sqrt{1 - |\nabla r|^2}} \langle T(b), \nabla r \rangle_c \xi .$$

Proposição 1.2.23 *Com as notações de (1.2.16), temos*

(i) $\psi : \Lambda^1 \longmapsto Q_c^{n+1}$ tem posto máximo n em (y, ξ_y) se e somente se é não singular a aplicação linear $P' : T_y L \longrightarrow H$, dada por

$$1.2.24 \quad P'(b) = P(b) + \frac{\Sigma}{\sqrt{1 - |\nabla r|^2}} \langle P(b), \nabla r \rangle_c \xi .$$

(ii) Nos pontos regulares (y, ξ_y) dados por (i), o campo normal unitário N de ψ é dado por

$$1.2.25 \quad \begin{cases} N = \nabla r + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi & (c = 0) \\ = \epsilon \beta g + \alpha \left(\nabla r - \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi \right) & (c \neq 0) \end{cases} ,$$

a segunda forma fundamental A_N de ψ é tal que $A_N|_V = \lambda \cdot I$ e $A_N|_H = UP'^{-1}$ e todos os auto-valores de UP'^{-1} são diferentes de λ , em qualquer ponto.

Demonstração. Vamos demonstrar para $c=0$. Com raciocínio idêntico mostra-se para $c = -1$ e $c = 1$.

(i) Vamos primeiramente fazer o cálculo de $\psi_{*(y, \xi_y)} : T_{(y, \xi_y)} \Lambda^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sendo ψ dada por (1.2.6).

(1) Vamos mostrar que ψ_* restrita à componente vertical de $T\Lambda^1$ é múltipla da identidade.

Seja v pertencente à componente vertical de $T\Lambda^1$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \Lambda^1$ uma curva $\gamma(t) = (y, \xi(t))$ tal que $\gamma(0) = (y, \xi_y)$ e $\dot{\gamma}(0) = \dot{\xi}(0) = v$.

Logo

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_{*(y, \xi_y)}(v) &= \frac{d}{dt} (\psi \circ \gamma)'(t) |_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(g(y) - r(y) \nabla r(y) - r(y) \sqrt{1 - |\nabla r|^2(y)} \xi(t) \right) |_{t=0} = \\ &= -r(y) \sqrt{1 - |\nabla r|^2(y)} v . \end{aligned} \right.$$

(2) Para calcular ψ_* restrita à componente horizontal de $T\Lambda^1$, notemos que qualquer vetor tangente, nesta componente, pode ser escrito como $\xi_*(b)$ onde $b \in T_y L$ e ξ é uma secção local de Λ^1 , pelo ponto (y, ξ_y) . Vamos identificar $g_{*y}(b) \simeq b$.

Chamando-se α a segunda forma fundamental de g , obtemos

$$1.2.26 \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_*(\xi_*(b)) &= (\psi \circ \xi)_*(b) = \\ &= \tilde{\nabla}_b (\psi \circ \xi) = \\ &= \tilde{\nabla}_b \left(g - r \nabla r - r \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi \right) = \\ &= \left(Id - \langle \nabla r, \cdot \rangle \nabla r - r \text{Hess}_r + r \sqrt{1 - |\nabla r|^2} A_\xi \right) (b) - \\ &\quad - b \left(r \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \right) \xi - r \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \nabla_b^\perp \xi - r \alpha(b, \nabla r) . \end{aligned} \right.$$

Nesta fórmula vê-se o aparecimento natural do operador $P(b)$ definido em (1.2.19).

Observando-se que

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla r|^2}} \langle P(b), \nabla r \rangle_0 \xi = \left[-b \left(r \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \right) - r \langle \alpha(b, \nabla r), \xi \rangle_0 \right] \xi$$

e chamando-se $\alpha_1(b, \nabla r)$ a componente de $\alpha(b, \nabla r)$ ortogonal a ξ , vemos que (1.2.26) se simplifica para

$$1.2.27 \quad \psi_*(\xi_*(b)) = P'(b) - rQ(b)$$

onde $P'(b)$ é dado por (1.2.24) (para $c = 0$) e $Q : T_y L \rightarrow V$ é dado por

$$Q(b) = \alpha_1(b, \nabla r) + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \nabla_b^\perp \xi .$$

Um simples cálculo mostra que $P'(b)$ é ortogonal a $Q(b)$ na métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

Agora observando-se que

$$1.2.28 \quad \text{Im } \psi_* = \text{Im } P' \oplus V$$

e $\dim V = n - p$, provamos (i).

(ii) Para mostrar que $N = \nabla r + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi$ é normal a ψ basta mostrar que N é normal aos geradores de H e V .

De fato:

$$\begin{aligned} & \left\langle b_j - \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla r|^2}} b_j(r) \xi, \nabla r + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi \right\rangle_0 = b_j(r) - b_j(r) = 0 \\ & \text{e} \\ & \left\langle \eta_i, \nabla r + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi \right\rangle_0 = 0 \end{aligned}$$

onde $\eta_i = \psi_*(v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n - p$ e os vetores $\{v_i\}$ são geradores da componente vertical de $T_{(y, \xi_y)} \Lambda^1$, dados como em (i - 1).

Para mostrar que N é unitário basta ver que

$$\langle N, N \rangle_0 = \left\langle \nabla r + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi, \nabla r + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi \right\rangle_0 = |\nabla r|^2 + 1 - |\nabla r|^2 = 1 .$$

Calculemos agora $A_N|_V$ e $A_N|_H$, respectivamente

Para calcular $A_N|_V$, seja $\eta = \psi_*(v) \in V$ onde v é dado como em (i - 1).

Deste modo $\eta = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma(t))|_{t=0} = -r\sqrt{1 - |\nabla r|^2}v$ onde $(y, \xi(t))$ é uma curva em Λ^1 tal que $\gamma(0) = (y, \xi_y)$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.

Definindo-se $\Gamma = (\psi \circ \gamma)(t) = \psi(y, \xi(t))$, temos que $\eta = \dot{\Gamma}(0)$.

Por (1.2.25), podemos definir

$$N(t) = N(\Gamma(t)) = N(\psi(y, \xi(t))) = \nabla r(y) + \sqrt{1 - |\nabla r|^2(y)} \xi(t) .$$

Finalmente

$$1.2.29 \quad \begin{cases} A_N(\eta) &= -(\tilde{\nabla}_\eta N)^T = -(\tilde{\nabla}_{\dot{r}(0)} N)^T = -\left[\frac{DN}{dt}\right]_{t=0}^T = \\ &= -\sqrt{1-|\nabla r|^2}(y)v = \frac{1}{r} \cdot \eta . \end{cases}$$

Para calcular $A_N|_H$, seja $u = \psi_*(\xi_*(b))$ como em (1.2.26).

Como $Q(b) \in V$, temos por (1.2.27) e (1.2.29) que

$$A_N(u) = A_N(P'(b) - rQ(b)) = A_N(P'(b)) - r\lambda Q(b) .$$

Por outro lado, chamando-se G a aplicação normal de Gauss da imersão ψ , tem-se

$$\begin{cases} A_N(u) &= -G_*(u) = \\ &= -(G \circ \psi \circ \xi)_*(b) = \\ &= -\tilde{\nabla}_b \left(\nabla r + \sqrt{1-|\nabla r|^2} \xi \right) = \\ &= -\text{Hess}_r b - \alpha(b, \nabla r) - b \left(\sqrt{1-|\nabla r|^2} \right) \xi + \\ &\quad + \sqrt{1-|\nabla r|^2} A_\xi(b) - \sqrt{1-|\nabla r|^2} \nabla_b^\perp \xi . \end{cases}$$

Comparando-se as duas expressões, tem-se

$$A_N P'(b) = -\text{Hess}_r b + \sqrt{1-|\nabla r|^2} A_\xi(b) - b \left(\sqrt{1-|\nabla r|^2} \right) \xi - \langle \alpha(b, \nabla r), \xi \rangle_0 \xi .$$

Vê-se nesta expressão o aparecimento do operador T definido em (1.2.20) e da aplicação linear U definida em (1.2.22).

Portanto : $A_N P'(b) = U(b)$.

Por (i), nos pontos regulares (y, ξ_y) , P' é inversível o que implica $A_N|_H = U P'^{-1}$.

Vamos agora mostrar que na p -PES, nenhum auto-valor de $U P'^{-1}$ pode ser igual a λ . ([AD])

Fixado um ponto $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$, tomemos

$$\{\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_{n-p}, e'_1, e'_2, \dots, e'_p\}$$

base ortonormal de $T_{(y, \xi_y)} \Lambda^1$, constituída por auto-vetores de A_N tais que

$$A_N(\eta'_i) = \lambda \eta'_i \quad \text{e} \quad A_N(e'_j) = \delta_j e'_j, j = 1, 2, \dots, p .$$

Vamos mostrar que $\delta_j \neq \lambda, \forall j$.

Podemos tomar, para cada $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ referencial local tangente a L , $u_j = \psi_*(\xi_*(b_j))$ como em (1.2.27), de modo que

$$1.2.30 \quad u_j = \sum_{i=1}^{n-p} a_{ji} \eta'_i + \sum_{k=1}^p b_{jk} e'_k.$$

Por outro lado ,

$$u_j = \tilde{\nabla}_{b_j}(\psi \circ \xi) = \tilde{\nabla}_{b_j}(g - rN) = b_j - b_j(r)N - r\tilde{\nabla}_{b_j}N = b_j^T + rA_N(u_j),$$

onde b_j^T denota a projeção de b_j em TM . Então

$$1.2.31 \quad A_N(u_j) = \lambda(u_j - b_j^T).$$

Como $\langle b_j, \eta'_i \rangle = 0$, tem-se que

$$1.2.32 \quad b_j^T = \sum_{k=1}^p c_{jk} e'_k.$$

Substituindo-se (1.2.30) e (1.2.32) em (1.2.31), obtemos

$$1.2.33 \quad \lambda c_{jk} = b_{jk}(\lambda - \delta_k), \quad 1 \leq j, k \leq p.$$

Como (y, ξ_y) é um ponto regular de ψ , segue que

$$N = \nabla r + \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi \notin [b_1, b_2, \dots, b_p].$$

Então é fácil ver que os vetores $b_j^T = b_j - b_j(r)N$ são linearmente independentes. Portanto, não podemos ter $\delta_k = \lambda$ para nenhum k ; caso contrário por (1.2.33) teríamos $c_{jk} = 0$, para este k , $j = 1, 2, \dots, p$, o que é contradição com o fato de $\{b_j^T\}$ $j = 1, 2, \dots, p$, ser linearmente independente, e conclui a demonstração da proposição.

□

Pela proposição (1.2.23), vê-se que a matriz do operador A_N , associado à imersão ψ , tem a forma :

$$1.2.34 \quad [A_N] = \begin{bmatrix} [\lambda I]_{n-p \times n-p} & 0 \\ 0 & [UP'^{-1}]_{p \times p} \end{bmatrix}$$

numa base em que os $(n-p)$ primeiros vetores são tangentes a V e os p -últimos são tangentes a H .

Para obtermos informações sobre $[A_N]$, como por exemplo, traço e determinante, basta analisarmos a matriz do operador $UP'^{-1} : H \rightarrow H$. Fixado $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$, sejam $B = \{b_1(y), b_2(y), \dots, b_p(y)\}$ base ortonormal de $T_y L$ e $E = \{e_1(y), e_2(y), \dots, e_p(y)\}$ a base correspondente em $H_{(y, \xi_y)}$, sendo e_j , $j = 1, 2, \dots, p$ dado por (1.2.21). Lembremos que E , em geral, não é ortonormal, a não ser quando a função r é constante.

Denotando por $[UP'^{-1}]_{E,E}$ a matriz de UP'^{-1} em relação à base E , sabemos que

$$[UP'^{-1}]_{E,E} = [U]_{B,E} \cdot [P'^{-1}]_{E,B}.$$

Com simples cálculos, mostra-se

$$[U]_{B,E} = [T]_{B,B} \text{ e } [P']_{B,E} = [P]_{B,B}.$$

Como $[P'^{-1}]_{E,B} = [P']_{B,E}^{-1}$, obtemos

$$[UP'^{-1}]_{E,E} = [T]_{B,B} \cdot [P]_{B,B}^{-1}.$$

Como nosso interesse maior estará voltado para o caso em que $p = 2$, vamos explicitar $[UP'^{-1}]_{E,E}$ neste caso:

1.2.35

$$[UP'^{-1}]_{E,E} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle_c \langle P(b_2), b_2 \rangle_c - & - \langle T(b_1), b_1 \rangle_c \langle P(b_2), b_1 \rangle_c + \\ - \langle T(b_2), b_1 \rangle_c \langle P(b_1), b_2 \rangle_c & + \langle T(b_2), b_1 \rangle_c \langle P(b_1), b_1 \rangle_c \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle_c \langle P(b_2), b_2 \rangle_c - & - \langle T(b_1), b_2 \rangle_c \langle P(b_2), b_1 \rangle_c + \\ - \langle T(b_2), b_2 \rangle_c \langle P(b_1), b_2 \rangle_c & + \langle T(b_2), b_2 \rangle_c \langle P(b_1), b_1 \rangle_c \end{bmatrix}$$

onde

$$1.2.36 \quad \det P = \langle P(b_1), b_1 \rangle_c \langle P(b_2), b_2 \rangle_c - \langle P(b_1), b_2 \rangle_c \langle P(b_2), b_1 \rangle_c.$$

Para análise posterior, será muito útil termos a expressão do traço de $[UP'^{-1}]_{E,E}$. Assim

$$1.2.37 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tr } [UP'^{-1}]_{E,E} = \frac{1}{\det P} [\langle T(b_1), b_1 \rangle_c \langle P(b_2), b_2 \rangle_c - \langle T(b_2), b_1 \rangle_c \langle P(b_1), b_2 \rangle_c \\ - \langle T(b_1), b_2 \rangle_c \langle P(b_2), b_1 \rangle_c + \langle T(b_2), b_2 \rangle_c \langle P(b_1), b_1 \rangle_c] \end{array} \right.$$

A expressão do determinante de $[UP'^{-1}]_{E,E}$, no entanto, é mais complicada. Vamos explicitá-la quando for necessário e tivermos hipóteses adicionais que a simplifiquem.

1.3 Considerações sobre Subvariedades e Hipersuperfícies de Weingarten em Q_c^{n+1} .

Sabe-se que uma superfície de $\mathbb{R}^3$ é chamada superfície de Weingarten quando existe uma relação funcional entre suas duas curvaturas principais [E]. A próxima definição, dada em [T], é uma generalização desta noção para subvariedades em espaços de curvatura constante. O interesse nesta definição surgiu naturalmente em nosso estudo. O objetivo inicial era caracterizar as envolventes mínimas em Q_c^{n+1} em função da subvariedade focal g e da função r . Em seguida percebemos que os argumentos utilizados permitiam estudar também as envolventes de curvatura média constante e mais geralmente, as de Weingarten, que como veremos nos exemplos, englobam as outras duas situações como casos particulares.

Definição Dizemos que $x : M^n \rightarrow Q_c^{n+k}$ como em (1.1.4) tem *fibrado normal plano* se o tensor curvatura normal $R^\perp \equiv 0$.

Sabe-se que $R_p^\perp = 0$, onde $p \in M$ se e somente se existe uma base de $T_p M$ que diagonaliza simultaneamente todos os A_ξ , $\forall \xi \in (T_p M)^\perp$.

Definição 1.3.1 Seja Q_c^{n+k} como em (1.1) e $M^n \subset Q_c^{n+k}$ uma subvariedade. M^n é uma subvariedade de *Weingarten* (*W-subvariedade*) se o fibrado normal de M é plano e dado qualquer campo local de referenciais normais paralelos na conexão normal e_α , $\alpha = n+1, \dots, n+k$, existe uma aplicação polinomial $f : \mathbb{R}^{n,k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f((\lambda_{i\alpha})) = c$ (constante), onde $\lambda_{i\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = n+1, \dots, n+k$, são as curvaturas principais de M na direção e_α .

Em particular, para $k = 1$, temos a definição de uma *W-hipersuperfície*. Obviamente, neste caso, o fibrado normal de M é sempre plano.

Em [T] são citados os exemplos conhecidos como : hipersuperfícies de curvatura média constante, em particular hipersuperfícies mínimas. São definidos também os dois exemplos mais simples para codimensão arbitrária .

No primeiro, define-se $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ como *subvariedade esférica local* se M é *W-subvariedade* com a condição de $\lambda_{i\alpha} = c$, $\forall i, \alpha$ onde c é uma constante não nula fixa.

No segundo, define-se $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ como *subvariedade isoparmétrica local* se M é *W-subvariedade* com a condição $\lambda_{i\alpha} = c_{i\alpha}$, onde $c_{i\alpha}$ são constantes.

Em nosso estudo, temos a imersão isométrica $g : L \longrightarrow Q_c^{n+1}$ e a hipersuperfície $\psi : \Lambda^1 \longrightarrow Q_c^{n+1}$, relacionadas anteriormente.

Chamando-se H^ψ a curvatura média de ψ e K^ψ a curvatura de Gauss Kronnecker de ψ , temos por definição, e (1.2.34)

$$1.3.2 \quad H^\psi = \frac{1}{n} \operatorname{tr} A_N = \frac{1}{n} [(n-2)\lambda + \operatorname{tr} (UP'^{-1})] ,$$

$$1.3.3 \quad K^\psi = \det A_N = (\lambda)^{n-2} \cdot \det (UP'^{-1}) .$$

Observamos então, que é natural fazermos hipóteses sobre H^ψ e K^ψ , ou seja : $H^\psi = 0$ (mínimas), $H^\psi = K$ (constante não nula) ou mais geralmente, supor que $A + BnH^\psi + CK^\psi = 0$, onde A, B e C são constantes reais.

Nesta última situação, que engloba as anteriores, teremos segundo (1.3.1), que a envolvente é de Weingarten, com uma relação funcional linear.

Será mostrado no teorema (2.1.30) que uma relação de Weingarten linear para a envolvente, embora particular, equivale à subvariedade focal $g : L \longrightarrow Q_c^{n+1}$ ser mínima, quando $p = 2$.

Estamos agora em condições de enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração é imediata pelas considerações anteriores :

Corolário 1.3.4 *Seja $\psi : \Lambda^1 \longrightarrow Q_c^{n+1}$ uma p -PES ($p \leq n-2$) e A, B, C constantes reais. Para cada ponto $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$ tem-se :*

$$1.3.5 \quad \begin{cases} A + BnH^\psi + CK^\psi = 0 & \text{se e somente se} \\ A + B[(n-2)\lambda + \operatorname{tr} (UP'^{-1})] + C\lambda^{n-2} \det (UP'^{-1}) = 0 . \end{cases}$$

Em particular, para $p = 2$, tem-se:

1.3.6

$$\begin{cases} H^\psi = K \text{ (constante)} \quad \forall (y, \xi_y) \in \Lambda^1 & \text{se e somente se} \\ [(n-2)\lambda - nK] \cdot \det P + [\langle T(b_1), b_1 \rangle_c \langle P(b_2), b_2 \rangle_c - \langle T(b_2), b_1 \rangle_c \langle P(b_1), b_2 \rangle_c \\ - \langle T(b_1), b_2 \rangle_c \langle P(b_2), b_1 \rangle_c + \langle T(b_2), b_2 \rangle_c \langle P(b_1), b_1 \rangle_c] = 0 \quad \forall (y, \xi_y) \in \Lambda^1 , \end{cases}$$

onde P e T são dados respectivamente por (1.2.19) e (1.2.20) e $\{b_1, b_2\}$ é um referencial ortonormal local tangente a L .

Devido à dificuldade para se lidar com estas expressões, optamos por analisar algumas situações particulares que conduziram a exemplos interessantes.

Para isto, vamos precisar da noção e caracterização das *envolventes a p -parâmetros especiais*, contidas em [AD], para o caso $c = 0$.

1.4 Envolventes a 2-parâmetros especiais em Q_c^{n+1} : tipos I, II, III.

Definição 1.4.1 Seja $x : M^n \rightarrow Q_c^{n+1}$ uma p -PES e D_λ a distribuição diferenciável que associa a cada $p \in M$, o auto-espço $(n - p)$ -dimensional de A_N , correspondente ao auto-valor λ . Dizemos que x é uma envolvente a p -parâmetros de esferas especial (p -SPES) se a distribuição $D_\lambda^\perp$ é integrável.

Para cada $q \in L$, seja $B(q) \subset T_q L$, o subespaço de nulidade relativa da imersão $g : L \rightarrow Q_c^{n+1}$, definido por

$$B(q) = \{X \in T_q L : \alpha(X, Y) = 0, \forall Y \in T_q L\}$$

onde α é a segunda forma fundamental de g .

Teorema 1.4.2 *Seja $x : M^n \rightarrow Q_c^{n+1}$ uma p -PES. Então x é uma p -PES especial (p -SPES) se e somente se $g : L \rightarrow Q_c^{n+1}$ tem fibrado normal plano e $\nabla r(q) \in B(q)$, $\forall q \in L$, onde $r = 1/\lambda$ para $c = 0$, $r = \cot^{-1} \lambda$ para $c = 1$ e $r = \coth^{-1} \lambda$ para $c = -1$.*

Demonstração. Para o caso $c = 0$, ver [AD]. Vamos demonstrar para $c = -1$, sendo que para $c = 1$, o raciocínio é análogo.

Suponhamos que x é uma p -PES. Então temos que $D_\lambda^\perp$ é integrável, bem como D_λ . Logo podemos escolher coordenadas locais $(u_1, u_2, \dots, u_p, t_1, t_2, \dots, t_{n-p})$ para x , onde $u_1, u_2, \dots, u_p$ são coordenadas para as folhas de D_λ e $t_1, t_2, \dots, t_{n-p}$ são coordenadas para as folhas de $D_\lambda^\perp$.

Tomemos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-p+1}$ um referencial ortonormal, normal a g em H^{n+1} , de modo que $\langle \xi_k, g \rangle_{-1} = 0$ e $\left\langle \xi_k, \frac{\partial g}{\partial u_j} \right\rangle_{-1} = 0$, $\forall k = 1, 2, \dots, n-p+1, j = 1, 2, \dots, p$,

onde g é a subvariedade focal associada a x , como no teorema (1.2.8). Por este mesmo teorema, podemos escrever

$$x = \alpha g - \beta \nabla r + \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi,$$

onde

$$\xi = \xi(u_1, u_2, \dots, u_p, t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) = \sum_{k=1}^{n-p+1} \varphi^k(t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) \xi_k(u_1, u_2, \dots, u_p).$$

Como ξ descreve uma $(n-p)$ -esfera unitária, vamos, por conveniência, escolher para ela o seguinte sistema de coordenadas :

$$\begin{aligned} \varphi^1(t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) &= \sin t_1, \\ \varphi^2(t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) &= \cos t_1 \sin t_2, \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \varphi^{n-p+1}(t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) &= \cos t_1 \cos t_2 \dots \cos t_{n-p}. \end{aligned}$$

Segue que $\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t_i}, \frac{\partial \xi}{\partial t_j} \right\rangle_{-1} = 0 \quad \forall i \neq j$, o que implica

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_j} \right\rangle_{-1} = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Por um lado, temos

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial u_j} \left(x - \frac{1}{\alpha} g \right), x - \frac{1}{\alpha} g \right\rangle_{-1} &= \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial u_j} \left(x - \frac{1}{\alpha} g \right), x - \frac{1}{\alpha} g \right\rangle_{-1} + \\ &+ \left\langle \frac{\partial}{\partial u_j} \left(x - \frac{1}{\alpha} g \right), \frac{\partial}{\partial t_i} \left(x - \frac{1}{\alpha} g \right) \right\rangle_{-1} = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial u_j} \left(x - \frac{1}{\alpha} g \right), x - \frac{1}{\alpha} g \right\rangle_{-1} - \\ &- \left\langle \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{\alpha} g \right), \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\rangle_{-1} - \frac{1}{\alpha} \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\rangle_{-1} = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial u_j} \left(x - \frac{1}{\alpha} g \right), x - \frac{1}{\alpha} g \right\rangle_{-1} \end{aligned} \right.$$

$$\text{pois } \left\langle g, \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\rangle_{-1} = 0, \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\rangle_{-1} = 0.$$

Por outro lado

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial u_j} \left(x - \frac{1}{\alpha} g \right), x - \frac{1}{\alpha} g \right\rangle_{-1} &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial u_j} \left(-\frac{\beta}{\alpha} N \right), -\frac{\beta}{\alpha} N \right\rangle_{-1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial u_j} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) N - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial N}{\partial u_j}, -\frac{\beta}{\alpha} N \right\rangle_{-1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) \right] = 0 . \end{aligned} \right.$$

Logo $\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial u_j} \left(x - \frac{1}{\alpha} g \right), x - \frac{1}{\alpha} g \right\rangle_{-1} = 0$ e portanto

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n-p+1} \frac{\partial \varphi^k}{\partial t_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j}, \frac{\beta^2}{\alpha} g - \beta \nabla r + \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \sum_{k=1}^{n-p+1} \varphi^k \xi_k \right\rangle_{-1} = 0 .$$

Como $\left\langle \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j}, g \right\rangle_{-1} = 0$, ficamos com

$$1.4.3 \quad \left\langle \sum_{k=1}^{n-p+1} \frac{\partial \varphi^k}{\partial t_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j}, -\beta \nabla r + \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \sum_{k=1}^{n-p+1} \varphi^k \xi_k \right\rangle_{-1} = 0 .$$

Tomando-se valores convenientes para os parâmetros t_i 's de modo que

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi^k &= \sin t_k \quad \text{se } 1 \leq k \leq \ell \leq n - p + 1 , \\ \varphi^\ell &= \cos t_k , \\ \varphi^m &= 0 \quad \text{se } m \neq k, \ell , \end{aligned} \right.$$

obtemos $\sum_{k=1}^{n-p+1} \varphi^k \xi_k = \sin t_k \xi_k + \cos t_k \xi_\ell$.

Deste modo, (1.4.3) se escreve na forma

$$\left\langle \cos t_k \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j} - \sin t_k \frac{\partial \xi_\ell}{\partial u_j}, -\beta \nabla r + \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} (\sin t_k \xi_k + \cos t_k \xi_\ell) \right\rangle_{-1} = 0 ,$$

ou ainda

$$\cos t_k \left\langle \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j}, -\beta \nabla r \right\rangle_{-1} + \sin t_k \left\langle \frac{\partial \xi_\ell}{\partial u_j}, \nabla r \right\rangle_{-1} + \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \left\langle \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j}, \xi_\ell \right\rangle_{-1} = 0 .$$

Como as funções $\cos t_k$, $\sin t_k$ e $\beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2}$ são linearmente independentes, obtemos :

$$1.4.4 \quad \begin{cases} \text{(i)} & \left\langle \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j}, \nabla r \right\rangle_{-1} = 0, \\ \text{(ii)} & \left\langle \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j}, \xi_\ell \right\rangle_{-1} = 0 \text{ para } 1 \leq k < \ell \leq n-p+1. \end{cases}$$

Pela relação entre a conexão $\tilde{\nabla}$ de $\mathbb{H}^{n+1}$ e a derivação usual de $\mathbb{L}^{n+2}$, que estamos usando, é fácil ver que (1.4.4)(i) implica que $\nabla r(q) \in B(q) \quad \forall q \in L$ e que (1.4.4)(ii) implica que $\{\xi_k\}_{k=1,2,\dots,n-p+1}$ é um referencial normal a g , paralelo na conexão normal $\nabla^\perp$, isto é $\nabla_X^\perp \xi_k = 0 \quad \forall X \in TL, \forall k = 1, 2, \dots, n-p+1$; o que implica $R^\perp \equiv 0$ e portanto g tem fibrado normal plano.

Suponhamos agora que $g : L \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ tem fibrado normal plano e que $\nabla r(q) \in B(q), \forall q \in L$.

Na demonstração do teorema (1.2.8), vimos que podemos escrever $x = \alpha g - \beta \nabla r + \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \xi$ e como o fibrado normal de g é plano, podemos escolher campos vetoriais paralelos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-p+1}$, de modo que

$$\xi(u_1, u_2, \dots, u_p, t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) = \sum_{k=1}^{n-p+1} \varphi^k(t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) \xi_k(u_1, u_2, \dots, u_p).$$

Temos ainda que $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ é um autovalor de A_N com multiplicidade $n-p$ e correspondentes auto-vetores $e_i = \frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \left\| \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\|^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-p$.

Por hipótese temos $\nabla_X^\perp \xi_k = 0, \quad \forall X \in TL$ e $\langle \alpha(\nabla r, Y), \xi_k \rangle_{-1} = 0, \quad \forall Y \in TL, k = 1, 2, \dots, n-p+1$, o que implica (1.4.4)(i) e (ii).

Vamos mostrar que $\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\rangle_{-1} = 0 \quad 1 \leq i \leq n-p, \quad 1 \leq j \leq p$.

Sabemos que $\langle \xi_k, g \rangle_{-1} = 0, \left\langle \xi_k, \frac{\partial g}{\partial u_j} \right\rangle_{-1} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p$ e $\langle \xi_k, \nabla r \rangle_{-1} = 0$.

Logo $\frac{\partial}{\partial u_j} \langle \xi_k, \nabla r \rangle_{-1} = 0$, o que implica

$$\left\langle \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j}, \nabla r \right\rangle_{-1} + \left\langle \xi_k, \frac{\partial(\nabla r)}{\partial u_j} \right\rangle_{-1} = 0.$$

Usando-se (1.4.4)(i), obtemos

$$\left\langle \xi_k, \frac{\partial(\nabla r)}{\partial u_j} \right\rangle_{-1} = 0.$$

Temos também $\left\langle \xi, \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\rangle_{-1} = 0$ pois $\left\langle \xi, \frac{\partial \xi}{\partial t_i} \right\rangle_{-1} = 0$.

Para concluir que $\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\rangle_{-1} = 0$, basta tomar as expressões

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t_i} = \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \sum_{k=1}^{n-p+1} \frac{\partial \varphi^k}{\partial t_i} \xi_k \quad e \\ \frac{\partial x}{\partial u_j} = \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} g + \alpha \frac{\partial g}{\partial u_j} - \frac{\partial \beta}{\partial u_j} \nabla r - \beta \frac{\partial(\nabla r)}{\partial u_j} + \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \right) \xi + \\ \quad + \beta \sqrt{1 - |\nabla r|^2} \sum_{k=1}^{n-p+1} \varphi^k \frac{\partial \xi_k}{\partial u_j} \end{array} \right.$$

e usar todos os resultados acima, juntamente com (1.4.4)(ii).

Finalmente, como D_λ é localmente gerada por $e_i = \frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \left\| \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\|^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n-p$, segue que $D_\lambda^\perp$ é localmente gerada por $\frac{\partial x}{\partial u_j}$, $j = 1, 2, \dots, p$. Por ser gerada por campos coordenados, $D_\lambda^\perp$ é integrável e portanto x é uma p -SPES, isto é p -PES especial, segundo a definição (1.4.1).

□

Daqui por diante, estaremos sempre considerando $p = 2$, isto é, envoltentes à 2-parâmetros de esferas.

1.4.5 Seja $\mu(q) = \dim B(q)$, o índice de nulidade relativa de $g : L \rightarrow Q_c^{n+1}$, em $q \in L$. Vamos supor que $\mu(q)$ é constante, $\forall q \in L$. Neste caso, pela definição de $B(q)$, temos só três possibilidades : $\mu \equiv 0$, $\mu \equiv 1$ ou $\mu \equiv 2$. É fácil ver que a análise feita para o caso $c = 0$ em [AD], que conduz aos três tipos de 2-SPES, pode ser estendida aos outros dois ambientes. Pelo teorema (1.4.2), se $\nabla r(q) \neq 0$ então $\mu(q) \neq 0$, o que implica que a curvatura gaussiana de g , $K^g(q)$, é zero. Por outro lado, se $\mu \equiv 0$, então $\nabla r \equiv 0$ e portanto r deve ser constante.

Deste modo a 2-SPES $\psi(\Lambda^1)$ de Q_c^{n+1} , se apresenta em três tipos, de acordo com μ . Antes de apresentá-los, precisamos das seguintes definições.

Definições :

1. Um *fibrado normal de esferas com raio r constante* em Q_c^{n+1} é uma hipersuperfície que se obtém, fazendo-se r constante em (1.2.6).
2. Uma imersão isométrica $x : M^n \longrightarrow Q_c^N$ como em (1.1.4) é dita *umbílica em $p \in M^n$* quando $A_\xi = \lambda_\xi I$, para todo $\xi \in (T_p M)^\perp$. x é uma *imersão umbílica*, quando é umbílica em todo ponto $p \in M^n$.
3. Se na definição acima $\lambda_\xi = 0$, para todo $\xi \in (T_p M)^\perp$ dizemos que a imersão x é *totalmente geodésica em $p \in M^n$* . x é uma *imersão totalmente geodésica*, quando é totalmente geodésica em todo $p \in M^n$.
4. Uma *superfície regrada* $g : L^2 \longrightarrow Q_c^{n+1}$, sem pontos umbílicos, pode ser dada por

$$g(s, t) = \exp_{\gamma(s)} tv(s)$$

onde $\gamma(s)$ é uma curva em Q_c^{n+1} e v um campo vetorial normal a $\gamma(s)$ com $|\dot{\gamma}| = |v| = 1$ (onde $\dot{}$ denota a derivada com relação a s) e $\exp$ é a aplicação exponencial de Q_c^{n+1} . Neste caso tem-se $K^g = c$ se e somente se existe uma função $\rho = \rho(s)$ tal que $\dot{v}(s) = \rho(s)\dot{c}(s)$. Esta definição encontra-se em [Sp] (pg 40) e a equivalência anterior obtém-se pela equação de Gauss.

TIPO I – Um fibrado normal de esferas com raio r constante em Q_c^{n+1} , sobre uma superfície $g : L \longrightarrow Q_c^{n+1}$ com $\mu \equiv 0$ ($K^g \neq c$ em todo ponto).

TIPO II – Uma 2-SPES onde $g(L)$ é uma superfície regrada com $K^g = c$ em Q_c^{n+1} , sem pontos umbílicos.

TIPO III – Uma 2-SPES onde $g(L)$ é parte de uma 2-subvariedade totalmente geodésica em Q_c^{n+1} .

Observação 1.4.6 Para os tipos II e III, podemos ter r constante ou variando. Portanto a situação $K^g = 0$ e r constante está contida nos tipos II e III.

Vamos mostrar, no próximo capítulo como cada um destes tipos simplifica o corolário (1.3.4) e nos permite obter resultados interessantes.

Capítulo 2

Envolventes a 2-parâmetros de tipos I, II e III em Q_c^{n+1} com a relação de Weingarten $A + BnH^\psi + CK^\psi = 0$

2.1 Estudo do tipo I.

Como neste caso a função r é constante, as expressões (1.2.19) a (1.2.22) e (1.2.24) se simplificam, respectivamente, para

$$2.1.1 \quad \begin{cases} P(b) = b + rA_\xi(b) & (c = 0), \\ = \alpha b - \beta A_\xi(b) & (c \neq 0); \end{cases}$$

$$2.1.2 \quad \begin{cases} T(b) = A_\xi(b) & (c = 0), \\ = -(\alpha A_\xi(b) + \epsilon \beta b) & (c \neq 0); \end{cases}$$

$$2.1.3 \quad e_j = b_j, \quad j = 1, 2 \quad (\forall c),$$

$$2.1.4 \quad U(b) = T(b) \quad (\forall c),$$

$$2.1.5 \quad P'(b) = P(b) \quad (\forall c),$$

Portanto, nos pontos regulares (y, ξ_y) , obtemos por (1.2.36) e (1.2.37)

$$2.1.6 \quad \begin{cases} \det P = 1 + r \operatorname{tr} A_\xi + r^2 \det A_\xi \neq 0 & (c = 0), \\ = \alpha^2 - \alpha \beta \operatorname{tr} A_\xi + \beta^2 \det A_\xi \neq 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

$$2.1.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tr } (UP'^{-1}) = \frac{\text{tr } A_\xi + 2r \det A_\xi}{1 + r \text{tr } A_\xi + r^2 \det A_\xi} \quad (c = 0), \\ \\ = \frac{-2\alpha\beta + (\beta^2 - \alpha^2) \text{tr } A_\xi + 2\alpha\beta \det A_\xi}{\alpha^2 - \alpha\beta \text{tr } A_\xi + \beta^2 \det A_\xi} \quad (c = 1), \\ \\ = \frac{2\alpha\beta - (\beta^2 + \alpha^2) \text{tr } A_\xi + 2\alpha\beta \det A_\xi}{\alpha^2 - \alpha\beta \text{tr } A_\xi + \beta^2 \det A_\xi} \quad (c = -1). \end{array} \right.$$

Agora, substituindo-se as expressões de P e T dadas por (2.1.1) e (2.1.2) diretamente em (1.2.35), consegue-se após alguns cálculos

$$2.1.8 \quad \left\{ \begin{array}{l} \det (UP'^{-1}) = \frac{\det A_\xi}{1 + r \text{tr } A_\xi + r^2 \det A_\xi} \quad (c = 0), \\ \\ = \frac{\beta^2 + \epsilon \alpha \beta \text{tr } A_\xi + \alpha^2 \det A_\xi}{\alpha^2 - \alpha \beta \text{tr } A_\xi + \beta^2 \det A_\xi} \quad (c \neq 0). \end{array} \right.$$

Observação : Em todo o capítulo, quando aparecer a letra ϵ , ela terá o significado dado em (1.2.20).

Neste ponto convém ressaltar como ficam as expressões da curvatura média $\mathbf{H}^\psi$ e da curvatura de Gauss Kronnecker $\mathbf{K}^\psi$ de ψ . Por (1.3.2) e (1.3.3), tem-se

$$2.1.9 \quad \left\{ \begin{array}{l} n\mathbf{H}^\psi = \frac{n - 2 + (n - 1)r \text{tr } A_\xi + nr^2 \det A_\xi}{r + r^2 \text{tr } A_\xi + r^3 \det A_\xi} \quad (c = 0), \\ \\ = \frac{(n\alpha^2 - 2)\alpha + (1 - n\alpha^2)\beta \text{tr } A_\xi + n\alpha\beta^2 \det A_\xi}{\beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 \text{tr } A_\xi + \beta^3 \det A_\xi} \quad (c \neq 0); \end{array} \right.$$

$$2.1.10 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}^\psi = \frac{\det A_\xi}{r^{n-2} + r^{n-1} \text{tr } A_\xi + r^n \det A_\xi} \quad (c = 0), \\ \\ = \frac{\alpha^{n-2}\beta^2 + \epsilon \alpha^{n-1}\beta \text{tr } A_\xi + \alpha^n \det A_\xi}{\alpha^2 \beta^{n-2} - \alpha \beta^{n-1} \text{tr } A_\xi + \beta^n \det A_\xi} \quad (c \neq 0). \end{array} \right.$$

2.1.11 Vamos substituir (2.1.9) e (2.1.10) na relação linear de Weingarten do corolário (1.3.4). Sejam A, B e C números reais não simultaneamente nulos. Por este

mesmo corolário temos que $A + BnH^\psi + CK^\psi = 0$ para todo ponto $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$ se e somente se as seguintes expressões se verificam para todo $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$

$$2.1.12 \quad \begin{cases} Ar^{n-2} + B(n-2)r^{n-3} + (Ar^{n-1} + B(n-1)r^{n-2})\text{tr } A_\xi + \\ + (Ar^n + Bnr^{n-1} + C)\det A_\xi = 0 & (c = 0), \\ A\beta^{n-2}\alpha^2 + B\alpha\beta^{n-3}(n\alpha^2 - 2) + C\alpha^{n-2}\beta^2 + \\ + (-A\alpha\beta^{n-1} + B(1 - n\alpha^2)\beta^{n-2} + C\epsilon\alpha^{n-1}\beta)\text{tr } A_\xi + \\ + (A\beta^n + Bn\alpha\beta^{n-1} + C\alpha^n)\det A_\xi = 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

Os lemas abaixo, principalmente o segundo, serão úteis nos argumentos que se seguem.

Lema 2.1.13 *Seja $g : L^2 \rightarrow Q_c^{n+1}$ imersão isométrica, $n \geq 4$ com Q_c^{n+1} dado por (1.1). Então para todo ponto $y \in L^2$, existe ξ unitário em $(T_y L)^\perp$ tal que $\det A_\xi \geq 0$, onde $(T_y L)^\perp$ é o espaço normal a g em Q_c^{n+1} , no ponto y .*

Demonstração. Dado $y \in L$ qualquer, tome $\{b_1, b_2\}$ base ortonormal de $T_y L$. Os vetores normais $\alpha_{11} - \alpha_{22}$ e α_{12} , onde $\alpha_{ij} = \alpha(b_i, b_j)$ e α é a segunda forma fundamental de g , geram um subespaço de $T_y L$, cuja dimensão é no máximo 2.

Como $\dim (T_y L)^\perp = n - 1 \geq 3$, existe sempre ξ unitário em $(T_y L)^\perp$, tal que

$$\langle \xi, \alpha_{11} - \alpha_{22} \rangle_c = \langle \xi, \alpha_{12} \rangle_c = 0$$

Para um tal ξ temos

$$\begin{aligned} A_\xi(b_1) &= \langle \alpha_{11}, \xi \rangle_c b_1 + \langle \alpha_{12}, \xi \rangle_c b_2 = \langle \alpha_{11}, \xi \rangle_c b_1, \\ A_\xi(b_2) &= \langle \alpha_{21}, \xi \rangle_c b_1 + \langle \alpha_{22}, \xi \rangle_c b_2 = \langle \alpha_{22}, \xi \rangle_c b_2. \end{aligned}$$

Portanto $\det A_\xi = \langle \alpha_{11}, \xi \rangle_c^2 \geq 0$, o que conclui a demonstração do lema.

□

Lema 2.1.14 *Seja $g : L^2 \rightarrow Q_c^{n+1}$ como acima. Se existe um ponto $y \in L^2$ tal que para todo vetor unitário $\xi \in (T_y L)^\perp$ se tenha $\det A_\xi = R = \text{constante}$ não dependendo de ξ , então $R = 0$.*

Demonstração. Pelo lema (2.1.13), tem-se que $R \geq 0$. Basta então mostrar que não pode ocorrer $R > 0$.

Supondo $R > 0$, tomemos $\xi, \eta \in (T_y L)^\perp$ um par ortonormal qualquer. Escolha base ortonormal $\{b_1, b_2\}$ de $T_y L$ de modo que

$$\begin{cases} A_\xi(b_1) = \alpha b_1, & A_\xi(b_2) = \beta b_2, \\ A_\eta(b_1) = \gamma b_1 + \delta b_2, & A_\eta(b_2) = \delta b_1 + \mu b_2. \end{cases}$$

Por hipótese $\alpha\beta = R > 0$ e $\gamma\mu = R + \delta^2$.

Seja agora $\xi' = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta$, unitário em $(T_y L)^\perp$. Temos

$$\begin{cases} A_{\xi'}(b_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \gamma)b_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta b_2, \\ A_{\xi'}(b_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta b_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\beta + \mu)b_2. \end{cases}$$

Daí

$$R = \det A_{\xi'} = \frac{1}{2} [(\alpha + \gamma)(\beta + \mu) - \delta^2] = R + \frac{1}{2}(\alpha\mu + \beta\gamma),$$

ou seja : $\alpha\mu + \beta\gamma = 0$.

Multiplicando-se por $\beta\mu$ (ambos não nulos), obtemos que $R\mu^2 + \beta^2\gamma\mu = 0$. Portanto $\gamma\mu = -\frac{R\mu^2}{\beta^2} < 0$, o que é uma contradição e conclui a demonstração do lema.

□

Vamos agora retornar à equação (2.1.12) que se verifica para todo (y, ξ_y) .

Como $[A_\xi]$ é uma matrix 2×2 , tem-se que $\text{tr } [A_{-\xi}] = -\text{tr } [A_\xi]$ e $\det [A_{-\xi}] = \det [A_\xi]$. Escrevendo-se (2.1.12) no ponto $(y, -\xi_y)$, obtemos

$$\begin{aligned} 2.1.15 \quad & \begin{cases} Ar^{n-2} + B(n-2)r^{n-3} - (Ar^{n-1} + B(n-1)r^{n-2})\text{tr } A_\xi + \\ + (Ar^n + Bnr^{n-1} + C)\det A_\xi = 0 \quad (c = 0), \\ A\beta^{n-2}\alpha^2 + B\alpha\beta^{n-3}(n\alpha^2 - 2) + C\alpha^{n-2}\beta^2 - \\ - (-A\alpha\beta^{n-1} + B(1 - n\alpha^2)\beta^{n-2} + C\epsilon\alpha^{n-1}\beta)\text{tr } A_\xi + \\ + (A\beta^n + Bn\alpha\beta^{n-1} + C\alpha^n)\det A_\xi = 0 \quad (c \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Comparando-se (2.1.12) e (2.1.15) obtemos, para todo (y, ξ_y) ,

$$2.1.16 \quad \begin{cases} (Ar^{n-1} + B(n-1)r^{n-2}) \operatorname{tr} A_\xi = 0 & (c = 0), \\ (-A\alpha\beta^{n-1} + B(1 - n\alpha^2)\beta^{n-2} + C\epsilon\alpha^{n-1}\beta) \operatorname{tr} A_\xi = 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

Portanto podem ocorrer

$$2.1.17 \quad \begin{cases} Ar^{n-1} + B(n-1)r^{n-2} = 0 & (c = 0), \\ -A\alpha\beta^{n-1} + B(1 - n\alpha^2)\beta^{n-2} + C\epsilon\alpha^{n-1}\beta = 0 & (c \neq 0), \end{cases}$$

ou

$$2.1.18 \quad \operatorname{tr} A_\xi = 0 \quad \forall (y, \xi_y) \quad (\forall c).$$

Veremos em seguida que, na verdade, (2.1.17) não ocorre se $C = 0$.

Analisemos cada situação, separadamente.

(a) Análise de (2.1.17)

É imediato que

$$2.1.19 \quad \begin{cases} A = -\frac{B(n-1)}{r} & (c = 0), \\ = \frac{B(1 - n\alpha^2)\beta^{n-2} + C\epsilon\alpha^{n-1}\beta}{\alpha\beta^{n-1}} & (c \neq 0). \end{cases}$$

Substituindo-se (2.1.19) em (2.1.12) obtém-se, para todo (y, ξ_y) ,

$$2.1.20 \quad \begin{cases} -Br^{n-3} + (Br^{n-1} + C) \det A_\xi = 0 & (c = 0), \\ -B\alpha^2\beta^{n-3} + C\epsilon\alpha^{n-1} + \\ + [B\beta^{n-1} + C\alpha^{n-1}] \cdot \det A_\xi = 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

Em ambas as expressões o coeficiente de $\det A_\xi$ é não nulo (caso contrário teríamos $A = B = C = 0$). Logo para todo $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$, temos

$$2.1.21 \quad \begin{cases} \det A_\xi = \frac{Br^{n-3}}{Br^{n-1} + C} & (c = 0), \\ = \frac{B\alpha^2\beta^{n-3} - C\epsilon\alpha^{n-1}}{B\beta^{n-1} + C\alpha^{n-1}} & (c \neq 0). \end{cases}$$

Segue-se de (2.1.21) que para cada $y \in L^2$, $\det A_\xi$ é uma constante que não depende do vetor unitário $\xi \in (T_y L)^\perp$.

Pelo lema (2.1.14), obtemos que $\det A_\xi = 0$ para todos $(y, \xi_y), \forall c$. Notemos que, neste caso, por (2.1.21), $B = 0$ ($c = 0$) e $B = \frac{C\epsilon\alpha^{n-1}}{\alpha^2\beta^{n-3}}$ ($c \neq 0$).

Temos então que a equação de Gauss da imersão $g : L \rightarrow Q_c^{n+1}$ se reduz a

$$K^g = c, \quad c = 0, 1 \text{ ou } -1$$

Como uma superfície g com esta propriedade está excluída das envolventes de tipo I, temos a seguinte **conclusão de (a)**: *Em nenhum dos três ambientes temos exemplo de envolvente do tipo I que satisfaça a relação (2.1.17).*

Observação : Notemos que se a relação de Weingarten dada originalmente é do tipo $H^\psi = K$ (constante) (caso em que $C = 0$ e $B \neq 0$), então (2.1.17) não pode ocorrer, senão teríamos $\det A_\xi = \lambda^2$ ($\forall c$), sendo $\lambda \neq 0$.

(b) Análise de (2.1.18)

$\text{tr } A_\xi = 0 \quad \forall \xi, \forall (y, \xi_y)$ ou seja, estamos com g mínima. Substituindo-se (2.1.18) em (2.1.12), obtém-se para todo (y, ξ_y)

$$2.1.22 \quad \begin{cases} Ar^{n-2} + B(n-2)r^{n-3} + (Ar^n + Bnr^{n-1} + C) \det A_\xi = 0 & (c = 0), \\ A\beta^{n-2}\alpha^2 + B\alpha\beta^{n-3}(n\alpha^2 - 2) + C\alpha^{n-2}\beta^2 + \\ + (A\beta^n + Bn\alpha\beta^{n-1} + C\alpha^n) \det A_\xi = 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

Temos então duas possibilidades :

(b-1) O coeficiente de $\det A_\xi$ se anula, isto é

$$2.1.23 \quad \begin{cases} Ar^n + Bnr^{n-1} + C = 0 & (c = 0), \\ A\beta^n + Bn\alpha\beta^{n-1} + C\alpha^n = 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

Neste caso, por (2.1.22) teremos também que

$$2.1.24 \quad \begin{cases} Ar^{n-2} + B(n-2)r^{n-3} = 0 & (c = 0), \\ A\beta^{n-2}\alpha^2 + B\alpha\beta^{n-3}(n\alpha^2 - 2) + C\alpha^{n-2}\beta^2 = 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

Notemos que $C = 0$ não é possível, senão, por (2.1.23) e (2.1.24) teríamos $B = 0$ e $A = 0$. Logo $C \neq 0$ e tem-se

$$2.1.25 \quad \begin{cases} A = \frac{(n-2)C}{2r^n} & \text{e} & B = -\frac{C}{2r^{n-1}} \\ \text{para} & (c = 0), \\ A = \frac{(-n\alpha^{n-2}\beta^4 + n\alpha^{n+2} - 2\alpha^n)C}{2\beta^n} & \text{e} & B = \frac{(\alpha^{n-3}\beta^4 - \alpha^{n+1})C}{2\beta^{n-1}} \\ \text{para} & (c \neq 0). \end{cases}$$

Conclusão de (b-1) : Temos que se g é mínima e vale (2.1.23), então para que se verifique a relação de Weingarten $A + Bn\mathbf{H}^\psi + CK^\psi = 0$, os coeficientes A, B, C devem estar relacionados como em (2.1.25). Por ser interessante, vamos enunciar este resultado num teorema, após completarmos toda a discussão.

Observação : Pelo fato de $C = 0$ não ser possível, na conclusão de (b-1), ficam excluídas dela as relações de Weingarten do tipo $A + Bn\mathbf{H}^\psi = 0$ (ou seja : $\mathbf{H}^\psi = K$ (constante)).

Resta discutir a outra possibilidade

(b-2) Se o coeficiente de $\det A_\xi$ não se anula, então para todo $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$, temos

$$2.1.26 \quad \begin{cases} \det A_\xi = \frac{-Ar^{n-2} - B(n-2)r^{n-3}}{Ar^n + Bnr^{n-1} + C} & (c = 0), \\ = \frac{-A\beta^{n-2}\alpha^2 - B\alpha\beta^{n-3}(n\alpha^2 - 2) - C\alpha^{n-2}\beta^2}{A\beta^n + Bn\alpha\beta^{n-1} + C\alpha^n} & (c \neq 0). \end{cases}$$

Obviamente (2.1.26) deve ser analisada junto (2.1.18).

Temos então $g : L^2 \rightarrow Q_c^{n+1}$ imersão isométrica com $\text{tr } A_\xi = 0$, $\forall (y, \xi_y)$ e $\det A_\xi = R$ (constante) $\forall (y, \xi_y)$. Pelo lema (2.1.14), tem-se $R = 0$ e portanto g é totalmente geodésica; (isto é, $A_\xi \equiv 0 \forall (y, \xi_y)$, $\forall \xi$) em Q_c^{n+1} . Embora esta superfície não esteja incluída no tipo I, convém observar que por (2.1.26) e pelo fato de $\det A_\xi = 0$, $\forall \xi$, ficamos com

$$2.1.27 \quad \begin{cases} A = -\frac{B(n-2)}{r} & (c=0), \\ = -\frac{B\alpha(n\alpha^2-2) - C\alpha^{n-2}\beta^{5-n}}{\alpha^2\beta} & (c \neq 0). \end{cases}$$

Por exemplo, se a relação de Weingarten é dada por $H^\psi = K$ (constante), temos neste ponto da análise

$$2.1.28 \quad \begin{cases} A = -BnK \quad \text{e} \quad C = 0 & (c=0), \\ = \frac{B(2-n\alpha^2)K}{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad C = 0 & (c \neq 0), \end{cases}$$

ou seja,

$$2.1.29 \quad \begin{cases} K = \frac{n-2}{nr} & (c=0), \\ = \frac{n\alpha^2-2}{n\alpha\beta} & (c \neq 0). \end{cases}$$

Observemos em (2.1.29) a relação que deve ocorrer entre r e K para que, a partir de uma superfície totalmente geodésica em Q_c^{n+1} , possamos construir uma envolvente com $H^\psi = K$, ou vice-versa.

Conclusão de (b-2) : Pode-se dizer que se K é uma constante dada por (2.1.29) então $H^\psi = K$ se e somente se a superfície $g : L \rightarrow Q_c^{n+1}$ é totalmente geodésica.

Observamos que $K = 0$ não é possível no caso $c = 0$ ($n \geq 4$).

Novamente, não existe exemplo de tipo I.

Observando-se as conclusões de (a), (b-1) e (b-2), pode-se enunciar os dois resultados que se seguem. Convém notar que pela observação feita na conclusão de (b-1), o teorema (2.1.30) não se verifica para as 2-envolventes do tipo I, com $H^\psi = k$ (constante).

Teorema 2.1.30 *Seja $\psi : \Lambda^1 \longrightarrow Q_c^{n+1}$ uma 2-PES de tipo I. Então H^ψ e K^ψ satisfazem a relação linear de Weingarten*

$$\begin{cases} (n-2) - nrH^\psi + 2r^n K^\psi = 0 & (c=0), \\ -n\alpha^{n-2}\beta^4 + n\alpha^{n+2} - 2\alpha^n + (\alpha^{n-3}\beta^5 - \alpha^{n+1}\beta)nH^\psi + 2\beta^n K^\psi = 0 & (c \neq 0), \end{cases}$$

para todo $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$ se e somente se $g : L \longrightarrow Q_c^{n+1}$ é uma superfície mínima.

Demonstração. Faremos para $c=0$. Nos outros ambientes o raciocínio é análogo.

Substituindo-se (2.1.9) e (2.1.10) na relação de Weingarten $n-2-nrH^\psi+2r^nK^\psi=0$, obtemos

$$n-2-r \left[\frac{(n-2) + (n-1)r \operatorname{tr} A_\xi + nr^2 \det A_\xi}{r(1+r \operatorname{tr} A_\xi + r^2 \det A_\xi)} \right] + 2r^n \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\det A_\xi}{1+r \operatorname{tr} A_\xi + r^2 \det A_\xi} = 0$$

para todo ponto $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$, ou seja

$$(n-2)r^{n-2}(1+r \operatorname{tr} A_\xi + r^2 \det A_\xi) - r^{n-2}(n-2+(n-1)r \operatorname{tr} A_\xi + nr^2 \det A_\xi) + 2r^n \det A_\xi = 0$$

Simplificando-se obtemos $\operatorname{tr} A_\xi = 0$, $\forall (y, \xi_y) \in \Lambda^1$ e portanto g é mínima.

Reciprocamente, se $\operatorname{tr} A_\xi = 0$, $\forall (y, \xi_y)$ então (2.1.9) e (2.1.10) se simplificam para

$$2.1.31 \quad nH^\psi = \frac{n-2+nr^2 \det A_\xi}{r(1+r^2 \det A_\xi)}$$

$$2.1.32 \quad K^\psi = \frac{\det A_\xi}{r^{n-2}(1+r^2 \det A_\xi)}$$

Desta última relação

$$r^{n-2}K^\psi + r^n K^\psi \det A_\xi = \det A_\xi,$$

ou seja

$$2.1.33 \quad \det A_\xi = \frac{r^{n-2} \mathbf{K}^\psi}{1 - r^n \mathbf{K}^\psi}$$

Notemos que $\mathbf{K}^\psi \neq 1/r^n$, pois, caso contrário, $1/r^2 = 0$.

Substituindo-se (2.1.33) em (2.1.31), obtemos

$$n - 2 - nr\mathbf{H}^\psi + 2r^n \mathbf{K}^\psi = 0 \quad \forall (y, \xi_y) \in \Lambda^1$$

o que conclui a demonstração.

□

Exemplo 2.1.34 Para exemplificar, podemos tomar um catenóide como na definição (3.2.23) $g : L \rightarrow Q_c^3 \subset Q_c^{n+1}$ e construir um fibrado normal de esferas com r constante sobre g que será uma envolvente de esferas de tipo I, satisfazendo a relação de Weingarten $n - 2 - nr\mathbf{H}^\psi + 2r^n \mathbf{K}^\psi = 0$.

O próximo resultado é imediato das conclusões tiradas em (a), (b-1) e (b-2) :

Corolário 2.1.35 *Não existe envolvente a dois parâmetros do tipo I, $\psi : \Lambda^1 \rightarrow Q_c^{n+1}$, com $\mathbf{H}^\psi = K$ (constante). Em particular, não existe envolvente a 2-parâmetros de tipo I, mínima em Q_c^{n+1} .*

2.2 Estudo do tipo II.

2.2.1 Vimos na definição (1.4.5-4) que neste caso a superfície $g : L \rightarrow Q_c^{n+1}$ é dada por : $g(s, t) = \exp_{\gamma(s)} tv(s)$, sendo que para cada ambiente a aplicação exponencial tem uma expressão conhecida, isto é

$$\begin{aligned} g(s, t) &= \gamma(s) + tv(s) & (c = 0), \\ g(s, t) &= \cos t\gamma(s) + \sin tv(s) & (c = 1), \\ g(s, t) &= \cosh t\gamma(s) + \sinh tv(s) & (c = -1). \end{aligned}$$

2.2.2 Vamos agora mostrar que a função $r : L \rightarrow \mathbb{R}$, que juntamente com g define a envolvente, neste caso, não depende da variável s , isto é, $r = r(t)$.

Pelo fato de estarmos com uma 2-SPES temos, pelo teorema (1.4.2), que $\nabla r(q) \in B(q)$, $\forall q \in L$.

Tomando-se $\{b_1, b_2\}$ o referencial ortonormal dado por $b_1 = \frac{\partial g}{\partial s} \cdot \left\| \frac{\partial g}{\partial s} \right\|^{-1}$, $b_2 = \frac{\partial g}{\partial t}$, tangente a g , tem-se

$$2.2.3 \quad b_1 = \dot{\gamma}(s) \quad (\forall c)$$

$$2.2.4 \quad \begin{cases} b_2 = v(s) & (c = 0), \\ = -\sin t \gamma(s) + \cos t v(s) & (c = 1), \\ = \sinh t \gamma(s) + \cosh t v(s) & (c = -1). \end{cases}$$

Lembrando que $\nabla r = b_1(r)b_1 + b_2(r)b_2$ e $\alpha(\nabla r, b_i) = 0$, $i = 1, 2$, obtemos

$$2.2.5 \quad \begin{cases} \alpha(\nabla r, b_i) = \alpha(b_1(r)b_1 + b_2(r)b_2, b_i) = \\ = b_1(r)\alpha(b_1, b_i) + b_2(r)\alpha(b_2, b_i) = \\ = 0 \end{cases}$$

Tomando-se $\{\xi_k\}$ $k = 1, 2, \dots, n-1$ referencial ortonormal, normal a g , obtem-se após os cálculos

$$2.2.6 \quad \begin{cases} \alpha(b_1, b_1) = \frac{1}{1+t\psi} \sum_k \langle \tilde{\gamma}, \xi_k \rangle_0 \xi_k & (c = 0), \\ = \frac{1}{\cos t + \rho \sin t} \sum_k \langle \tilde{\gamma}, \xi_k \rangle_1 \xi_k & (c = 1), \\ = \frac{1}{\cosh t + \rho \sinh t} \sum_k \langle \tilde{\gamma}, \xi_k \rangle_{-1} \xi_k & (c = -1). \\ \alpha(b_i, b_j) = 0 \text{ para } i, j \neq 1 & (\forall c) \end{cases}$$

Substituindo-se (2.2.6) em (2.2.5) e lembrando que g não tem pontos umbílicos, ou seja $\alpha(b_1, b_1) \neq 0$, obtemos

$$2.2.7 \quad b_1(r) = 0$$

Observação 2.2.8 Por (1.1.4) e (2.2.6), $\forall \xi$ unitário normal a $g : L \longrightarrow Q_c^{n+1}$, tem-se A_ξ dada no referencial $\{b_1, b_2\}$ por

$$[A_\xi] = \begin{bmatrix} \langle A_\xi(b_1), b_1 \rangle_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle A_\xi(b_1), b_1 \rangle_c = \frac{1}{1+t\rho} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_0 & (c=0), \\ = \frac{1}{\cos t + \rho \sin t} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_1 & (c=1), \\ = \frac{1}{\cosh t + \rho \sinh t} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_{-1} & (c=-1). \end{array} \right.$$

Fazendo-se os cálculos, para o tipo II, as expressões (1.2.18) a (1.2.20), (1.2.36) e (1.2.37) se simplificam e podemos obter

$$2.2.9 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \langle \text{Hess}_r b_1, b_1 \rangle_c = \frac{\rho}{1+t\rho} b_2(r) & (c=0), \\ = \frac{-\sin t + \rho \cos t}{\cos t + \rho \sin t} b_2(r), & (c=1), \\ = \frac{\sinh t + \rho \cosh t}{\cosh t + \rho \sinh t} b_2(r), & (c=-1). \\ \langle \text{Hess}_r b_1, b_2 \rangle_c = 0 & (\forall c). \\ \langle \text{Hess}_r b_2, b_2 \rangle_c = b_2(b_2(r)) & (\forall c). \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
 2.2.10 \quad & \left\{ \begin{aligned}
 \langle P(b_1), b_1 \rangle_c &= 1 - \frac{rb_2(r)\rho}{1+t\rho} + \frac{r\sqrt{1-(b_2(r))^2}}{1+t\rho} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_0 & (c=0), \\
 &= \alpha - \beta \frac{-\sin t + \rho \cos t}{\cos t + \rho \sin t} b_2(r) - \\
 &\quad - \beta \frac{\sqrt{1-(b_2(r))^2}}{\cos t + \rho \sin t} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_1 & (c=1), \\
 &= \alpha - \beta \frac{\sinh t + \rho \cosh t}{\cosh t + \rho \sinh t} b_2(r) - \\
 &\quad - \beta \frac{\sqrt{1-(b_2(r))^2}}{\cosh t + \rho \sinh t} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_{-1} & (c=-1). \\
 \langle P(b_1), b_2 \rangle_c &= \langle P(b_2), b_1 \rangle_c = 0 & (\forall c). \\
 \langle P(b_2), b_2 \rangle_c &= 1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r)) & (c=0), \\
 &= \alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r)) & (c \neq 0).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

2.2.11

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle T(b_1), b_1 \rangle_c &= \frac{-\rho b_2(r) + \sqrt{1-(b_2(r))^2} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_0}{1+t\rho} & (c=0), \\
 &= \frac{-\alpha \left[-\sin t + \rho \cos t \right] b_2(r) + \sqrt{1-(b_2(r))^2} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_1}{\cos t + \rho \sin t} - \beta & (c=1), \\
 &= \frac{-\alpha \left[\sinh t + \rho \cosh t \right] b_2(r) + \sqrt{1-(b_2(r))^2} \langle \tilde{\gamma}, \xi \rangle_{-1}}{\cosh t + \rho \sinh t} + \beta & (c=-1); \\
 \langle T(b_1), b_2 \rangle_c &= \langle T(b_2), b_1 \rangle_c = 0 & (\forall c); \\
 \langle T(b_2), b_2 \rangle_c &= -b_2(b_2(r)) & (c=0), \\
 &= -[\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon \beta (1 - (b_2(r))^2)] & (c \neq 0).
 \end{aligned} \right.$$

$$2.2.12 \quad \det P = \langle P(b_1), b_1 \rangle_c \langle P(b_2), b_2 \rangle_c \quad (\forall c)$$

$$2.2.13 \quad \begin{cases} \text{tr } [UP'^{-1}]_{E,E} = \\ = \frac{\langle T(b_1), b_1 \rangle_c \langle P(b_2), b_2 \rangle_c + \langle T(b_2), b_2 \rangle_c \langle P(b_1), b_1 \rangle_c}{\det P} \end{cases} \quad (\forall c)$$

Neste caso, simplifica-se também a expressão do determinante de $[UP'^{-1}]_{E,E}$. Obtemos diretamente de (1.2.35).

$$2.2.14 \quad \det [UP'^{-1}]_{E,E} = \frac{\langle T(b_1), b_1 \rangle_c \langle T(b_2), b_2 \rangle_c}{\det P} \quad (\forall c)$$

Finalmente por (1.3.2) e (1.3.3), podemos escrever

2.2.15

$$nH^\psi = \frac{(n-2)\lambda \det P + \langle T(b_1), b_1 \rangle_c \langle P(b_2), b_2 \rangle_c + \langle T(b_2), b_2 \rangle_c \langle P(b_1), b_1 \rangle_c}{\det P} \quad (\forall c)$$

$$2.2.16 \quad K^\psi = \frac{(\lambda)^{n-2} \langle T(b_1), b_1 \rangle_c \langle T(b_2), b_2 \rangle_c}{\det P} \quad (\forall c)$$

Agora substituindo-se as expressões de P e T , dadas em (2.2.10) e (2.2.11), nas fórmulas (2.2.12), (2.2.15) e (2.2.16), ficamos em condições de analisar as 2-SPES de tipo II que satisfazem a relação de Weingarten $A + BnH^\psi + CK^\psi = 0$.

Pelo corolário (1.3.4), temos que $A + BnH^\psi + CK^\psi = 0$ para todo ponto $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$ se e somente se as seguintes expressões se verificam para todo $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$:

2.2.17

$$\left\{ \begin{aligned}
& (Ar^{n-2} + B(n-2)r^{n-3})(1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))) - Br^{n-2}b_2(b_2(r)) + \\
& + [(Ar^{n-2} + B(n-1)r^{n-3})(1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))) - \\
& - (Br^{n-2} + Cr^{-1})b_2(b_2(r))] \cdot \left[\frac{-\rho rb_2(r) + r\sqrt{1 - (b_2(r))^2} \langle \ddot{\gamma}, \xi \rangle_0}{1 + t\rho} \right] = 0 \\
& \text{para } (c = 0), \\
& [A\alpha\beta^{n-2} + B(n-2)\alpha^2\beta^{n-3} - B\beta^{n-1}][\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))] + \\
& + (-B\alpha\beta^{n-2} + C\alpha^{n-2}\beta)[\alpha b_2(b_2(r)) + \beta(1 - (b_2(r))^2)] + \\
& \{[A\beta^{n-2} + B(n-1)\alpha\beta^{n-3}][\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))] - \\
& (B\beta^{n-2} + C\alpha^{n-1}\beta^{-1})[\alpha b_2(b_2(r)) + \beta(1 - (b_2(r))^2)]\} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{-\beta(-\sin t + \rho \cos t)b_2(r) - \beta\sqrt{1 - (b_2(r))^2} \langle \ddot{\gamma}, \xi \rangle_1}{\cos t + \rho \sin t} \right] = 0 \\
& \text{para } (c = 1), \\
& [A\alpha\beta^{n-2} + B(n-2)\alpha^2\beta^{n-3} + B\beta^{n-1}][\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))] + \\
& + (-B\alpha\beta^{n-2} - C\alpha^{n-2}\beta)[\alpha b_2(b_2(r)) - \beta(1 - (b_2(r))^2)] + \\
& \{[A\beta^{n-2} + B(n-1)\alpha\beta^{n-3}][\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))] - \\
& - (B\beta^{n-2} + C\alpha^{n-1}\beta^{-1})[\alpha b_2(b_2(r)) - \beta(1 - (b_2(r))^2)]\} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{-\beta(\sinh t + \rho \cosh t)b_2(r) - \beta\sqrt{1 - (b_2(r))^2} \langle \ddot{\gamma}, \xi \rangle_{-1}}{\cosh t + \rho \sinh t} \right] = 0 \\
& \text{para } (c = -1)
\end{aligned} \right.$$

Vamos agora analisar (2.2.17), para encontrar g e r . Faremos os cálculos para $c = 0$, sendo que para $c \neq 0$ explicitaremos apenas as fórmulas principais.

Como (2.2.17) se verifica para todo $(y, \xi_y) \in \Lambda^1$, temos que fixado (y, ξ_y) , ela se verifica também em $(y, -\xi_y)$, ou seja

$$2.2.18 \quad \left\{ \begin{array}{l} (Ar^{n-2} + B(n-2)r^{n-3})(1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))) - \\ - Br^{n-2}b_2(b_2(r)) + [(Ar^{n-2} + B(n-1)r^{n-3}) \cdot \\ \cdot (1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))) - (Br^{n-2} + Cr^{-1})b_2(b_2(r))] \cdot \\ \cdot \left[\frac{-\rho rb_2(r) - r\sqrt{1 - (b_2(r))^2} \langle \ddot{\gamma}, \xi \rangle_0}{1 + t\rho} \right] \end{array} \right\} = 0 \quad (c = 0)$$

Comparando-se (2.2.17) ($c = 0$) e (2.2.18), obtemos

$$2.2.19 \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ (Ar^{n-2} + B(n-1)r^{n-3}) [1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))] - \\ - (Br^{n-2} + Cr^{-1})b_2(b_2(r)) \} \cdot r\sqrt{1 - (b_2(r))^2} \langle \ddot{\gamma}, \xi \rangle_0 = 0 \end{array} \right.$$

Como $r \neq 0$, $1 - (b_2(r))^2 \neq 0$ e $\langle \ddot{\gamma}, \xi \rangle_0 \neq 0$ (pois g não tem umbílicos), segue que

$$2.2.20 \quad \left\{ \begin{array}{l} (Ar^{n-2} + B(n-1)r^{n-3}) [1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))] - \\ - (Br^{n-2} + Cr^{-1})b_2(b_2(r)) = 0 \end{array} \right.$$

Substituindo-se (2.2.20) em (2.2.18), obtemos também

2.2.21

$$(Ar^{n-2} + B(n-2)r^{n-3}) [1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))] - Br^{n-2}b_2(b_2(r)) = 0$$

Com argumentos análogos, obtemos as fórmulas correspondentes de (2.2.20) e de (2.2.21) para os outros ambientes, a saber

$$2.2.22 \quad \begin{cases} [A\beta^{n-2} + B(n-1)\alpha\beta^{n-3}] [\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))] - \\ - (B\beta^{n-2} + C\alpha^{n-1}\beta^{-1}) [\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2)] = 0 \quad (c \neq 0) \end{cases}$$

e

$$2.2.23 \quad \begin{cases} [A\alpha\beta^{n-2} + B(n-2)\alpha^2\beta^{n-3} - \epsilon B\beta^{n-1}] [\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))] + \\ + (-B\alpha\beta^{n-2} + \epsilon C\alpha^{n-2}\beta) [\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2)] = 0 \quad (c \neq 0) \end{cases}$$

Comparando-se (2.2.20) com (2.2.21) e (2.2.22) (multiplicada por α) com (2.2.23), obtemos

$$2.2.24 \quad \begin{cases} Br^{n-3} [1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))] - Cr^{-1}b_2(b_2(r)) = 0 \quad (c = 0), \\ B\beta^{n-3} [\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))] - \\ - C\alpha^{n-2}\beta^{-1} \cdot [\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2)] = 0 \quad (c \neq 0). \end{cases}$$

Substituindo-se (2.2.24) em (2.2.20) ($c = 0$) e (2.2.23) ($c \neq 0$) chega-se em

$$2.2.25 \quad \begin{cases} Ar^{n-2} [1 - (b_2(r))^2 - rb_2(b_2(r))] + [(n-2)Cr^{-1} - \\ - Br^{n-2}] b_2(b_2(r)) = 0 \quad (c = 0), \\ [A\alpha\beta^{n-2} - \epsilon B\beta^{n-1}] [\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))] + \\ + \{[(n-2)\alpha^n\beta^{-1} + \epsilon\alpha^{n-2}\beta]C - B\alpha\beta^{n-2}\} \cdot \\ \cdot [\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2)] = 0 \quad (c \neq 0). \end{cases}$$

Vamos analisar (2.2.25), separando em dois casos :

(i) Se $B = 0$. Neste caso tem-se $C \neq 0$ (caso contrário : $B = C = A = 0$). Por (2.2.24), obtemos

$$2.2.26 \quad \begin{cases} Cr^{-1}b_2(b_2(r)) = 0 \quad (c = 0), \\ C(\alpha^{n-2}\beta^{-1}) [\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2)] = 0 \quad (c \neq 0). \end{cases}$$

Como $\alpha^{n-2}\beta^{-1} \neq 0$ e $r^{-1} \neq 0$, tem-se

$$2.2.27 \quad \begin{cases} b_2(b_2(r)) = 0 & (c = 0), \\ \alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2) = 0 & (c \neq 0), \end{cases}$$

que substituído em (2.2.25) nos dá

$$2.2.28 \quad \begin{cases} Ar^{n-2}(1 - (b_2(r))^2) = 0 & (c = 0), \\ (A\alpha\beta^{n-2}[\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r))]) = 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

É fácil ver que no caso $c \neq 0$ não podem ocorrer simultaneamente $\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2) = 0$ e $\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r)) = 0$. Portanto, ficamos com

$$2.2.29 \quad \begin{cases} A = 0 & \text{e} & b_2(b_2(r)) = 0 & (c = 0), \\ A = 0 & \text{e} & \alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2) = 0 & (c \neq 0). \end{cases}$$

Observemos que $A = B = 0$ nos restringe à relação de Weingarten $K^\psi = 0$. No caso $c = 0$ as funções r , soluções de $b_2(b_2(r)) = 0$, são funções lineares afins da variável t , com $1 - (b_2(r))^2 > 0$ e no caso $c \neq 0$ r é solução de $\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2) = 0$ com $1 - (b_2(r))^2 > 0$.

(ii) Se $B \neq 0$, por (2.2.24) podemos obter

$$1 - (b_2(r))^2 - r b_2(b_2(r)) \quad (c = 0) \text{ e } \alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r)) \quad (c \neq 0)$$

em função de B e C , que substituídas em (2.2.25) nos dá

$$2.2.30 \quad \begin{cases} (ACr + (n-2)BC - B^2r^{n-1})b_2(b_2(r)) = 0 & (c = 0), \\ [AC\alpha^{n-1}\beta^{n-2} + (n-2)BC\alpha^n\beta^{n-3} - B^2\alpha\beta^{2n-4}] \cdot [\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2)] = 0 & (c \neq 0) \end{cases}$$

Consideremos primeiramente o caso euclidiano ($c = 0$).

Por (2.2.24) ($c = 0$), não podemos ter em (2.2.30) $b_2(b_2(r)) = 0$ (caso contrário $1 - (b_2(r))^2 = 0$). Portanto só resta

$$2.2.31 \quad ACr(t) + (n-2)BC - B^2(r(t))^{n-1} = 0$$

Derivando-se (2.2.31) em relação a t obtemos

$$[AC - B^2(n-1)r(t)]b_2(r) = 0$$

e portanto r é constante, ou seja $b_2(r) = 0$.

Mas novamente por (2.2.24), obtemos uma contradição, isto é, $B = 0$ ou $r = 0$.

Concluimos então que no caso euclidiano, não existe exemplo de tipo II, com $A + Bn\mathbf{H}^\psi + CK^\psi = 0$ e $B \neq 0$.

Em particular, não existe envolvente do tipo II com $\mathbf{H}^\psi$ constante, em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Consideremos agora $c \neq 0$.

Vemos que em (2.2.30) ($c \neq 0$) não podemos ter $\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2) = 0$, caso contrário, teríamos também $\alpha(1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r)) = 0$ e é fácil ver que estas duas equações juntas implicam que $1 - (b_2(r))^2 = 0$, contrariando a suposição feita no início, sobre r .

Portanto, por (2.2.30), ficamos com

$$2.2.32 \quad AC\alpha^{n-1}\beta^{n-2} + (n-2)BC\alpha^n\beta^{n-3} - B^2\alpha\beta^{2n-4} = 0$$

Usando-se o mesmo argumento do caso euclidiano e lembrando-se que $\alpha^2 + \epsilon\beta^2 = 1$ ($c \neq 0$), mostra-se que r é constante. Levando-se esta informação em (2.2.24) ($c \neq 0$), obtemos

$$2.2.33 \quad C = B\epsilon\alpha^{-n+3}\beta^{n-3}$$

e por (2.2.25), conseguimos

$$2.2.34 \quad A = B(\epsilon\alpha^{-1}\beta - (n-2)\alpha\beta^{-1})$$

Notemos que por (2.2.33) não podemos ter $C = 0$ (caso contrário $B = 0$, que contradiz a hipótese (ii)).

Podemos concluir então que nos ambientes esférico e hiperbólico, também não existe envolvente de tipo II com $\mathbf{H}^\psi$ constante. No entanto existe exemplo de tipo II em S^{n+1} e $\mathbf{H}^{n+1}$ que satisfaz a relação de Weingarten

$$(\epsilon\alpha^{-1}\beta - (n-2)\alpha\beta^{-1}) + n\mathbf{H}^\psi + \epsilon\alpha^{-n+3}\beta^{n-3}\mathbf{K}^\psi = 0;$$

desde que a função r seja constante.

Portanto, com base na análise anterior, podemos enunciar alguns resultados sobre envoltentes de tipo II, satisfazendo a relação de Weingarten $A + Bn\mathbf{H}^\psi + C\mathbf{K}^\psi = 0$. O primeiro deles diz respeito a $B = 0$.

Corolário 2.2.35 *Seja $\psi : \Lambda^1 \rightarrow Q_c^{n+1}$ uma 2-SPES de tipo II. Então $\mathbf{K}^\psi \equiv 0$ se e somente se $r(t) = at + b$ com $1 - a^2 > 0$, onde a e b são constantes reais, no caso $c = 0$, e $r = r(t)$ é solução de $\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon\beta(1 - (b_2(r))^2) = 0$ com $1 - (b_2(r))^2 > 0$, no caso $c \neq 0$.*

Demonstração. $\mathbf{K}^\psi = 0$ se e somente se $\langle T(b_1), b_1 \rangle_c = 0$ ou $\langle T(b_2), b_2 \rangle_c = 0$, $\forall (y, \xi_y) \in \Lambda^1$, por (2.2.16). Como $\langle T(b_1), b_1 \rangle_c = 0$ implicaria num absurdo sobre as hipóteses do tipo II, temos que $\mathbf{K}^\psi \equiv 0$ se e somente se $\langle T(b_2), b_2 \rangle_c = 0$, o que conclui a demonstração. □

O segundo resultado diz respeito ao ambiente euclidiano, $B \neq 0$ e segue imediatamente da análise anterior.

Corolário 2.2.36 *Não existe uma 2-SPES de tipo II, $\psi : \Lambda^1 \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ satisfazendo a relação linear de Weingarten $A + Bn\mathbf{H}^\psi + C\mathbf{K}^\psi = 0$ ($B \neq 0$). Em particular não existe uma tal envolvente com $\mathbf{H}^\psi$ constante, em $\mathbf{R}^{n+1}$.*

O último resultado diz respeito aos ambientes S^{n+1} e $\mathbf{H}^{n+1}$ e $B \neq 0$, na relação de Weingarten.

Teorema 2.2.37 *Seja $\psi : \Lambda^1 \rightarrow Q_c^{n+1}$, $c \neq 0$, uma 2-SPES de tipo II. Se a função r é uma constante não nula para $c < 0$ e tal que não anule α nem β para $c > 0$ então $\mathbf{H}^\psi$ e $\mathbf{K}^\psi$ satisfazem a relação linear de Weingarten*

$$2.2.38 \quad (\epsilon\alpha^{-1}\beta - (n-2)\alpha\beta^{-1}) + n\mathbf{H}^\psi + \epsilon\alpha^{-n+3}\beta^{n-3}\mathbf{K}^\psi = 0 \quad \forall (y, \xi_y) \in \Lambda^1$$

No entanto, não existe uma 2-SPES de tipo II em Q_c^{n+1} , $c \neq 0$, com $\mathbf{H}^\psi$ constante.

Demonstração. Se a função r é constante nas condições acima, temos por (2.2.15) e (2.2.16) que as expressões de $n\mathbf{H}^\psi$ e $\mathbf{K}^\psi$ se simplificam e fazendo-se os cálculos, satisfazem a relação de Weingarten (2.2.38).

□

2.3 Estudo do tipo III.

Neste caso temos que $g : L \longrightarrow Q_c^{n+1}$ é parte de uma 2-subvariedade totalmente geodésica em Q_c^{n+1} .

É fato conhecido que, neste caso, g pode ser obtida como intersecção de Q_c^{n+1} com um 3-plano P^3 , subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n+2}$ no caso $c \geq 0$, ou de $\mathbb{L}^{n+2}$ no caso $c < 0$. Como as subvariedades totalmente geodésicas são isométricas, podemos supor sem perda de generalidade, que P^3 tenha como geradores os vetores $\{p, v_1, v_2\}$ onde p é o vértice de Q_c^{n+1} no caso $c < 0$, a origem de Q_c^{n+1} no caso $c = 0$ e um ponto qualquer de Q_c^{n+1} no caso $c > 0$, de modo que $\langle p, p \rangle_c = c$ e $\{v_1, v_2\}$ são dois vetores ortonormais em $T_p Q_c^{n+1}$.

Vamos agora obter uma parametrização para a superfície totalmente geodésica g , nesta situação.

Tomemos $\gamma(u_1) = \exp_p u_1 v_1$ a geodésica de Q_c^{n+1} que passa por p , na direção do vetor v_1 (ver [C] cap 3). Sabe-se pela expressão da exponencial de Q_c^{n+1} que :

$$2.3.1 \quad \begin{cases} \gamma(u_1) = p + u_1 v_1 & (c = 0), \\ \gamma(u_1) = \cos u_1 p + \sin u_1 v_1 & (c = 1), \\ \gamma(u_1) = \cosh u_1 p + \sinh u_1 v_1 & (c = -1). \end{cases}$$

Como $\langle v_2, v_1 \rangle_c = 0$ temos que v_2 é normal a $\gamma(u_1)$ em p .

Seja $V_2 = V_2(u_1)$ o transporte paralelo de v_2 ao longo de γ (ver [C] cap 2).

É fácil ver neste caso, que $V_2(u_1) = v_2$ e note que, de fato, v_2 é tal que $\langle v_2, \gamma(u_1) \rangle_c = 0$ e $\langle v_2, \dot{\gamma}(u_1) \rangle_c = 0$, ou seja $v_2 \in T_{\gamma(u_1)} Q_c^{n+1}$ e é ortogonal a $\dot{\gamma}(u_1)$

Finalmente podemos considerar

$$g(u_1, u_2) = \exp_{\gamma(u_1)} u_2 v_2, \quad \text{que tem as expressões}$$

$$2.3.2 \quad \begin{cases} g(u_1, u_2) = p + u_1 v_1 + u_2 v_2 & (c = 0), \\ = \cos u_2 \cos u_1 p + \cos u_2 \sin u_1 v_1 + \sin u_2 v_2 & (c = 1), \\ = \cosh u_2 \cosh u_1 p + \cosh u_2 \sinh u_1 v_1 + \sinh u_2 v_2 & (c = -1). \end{cases}$$

Pela definição (1.4.5-3), sabemos que o operador auto-adjunto A_ξ associado a g é identicamente zero, $\forall (y, \xi_y) \in \Lambda^1$. Assim as expressões (1.2.19) e (1.2.20) se simplificam novamente para

$$2.3.3 \quad \begin{cases} P(b) = b - b(r) \nabla r - r \text{Hess}_r b & (c = 0), \\ = \alpha b - \alpha b(r) \nabla r - \beta \text{Hess}_r b & (c \neq 0). \end{cases}$$

$$2.3.4 \quad \begin{cases} T(b) = -\text{Hess}_r b & (c = 0), \\ = -(\alpha \text{Hess}_r b + \epsilon \beta (b - b(r) \nabla r)) & (c \neq 0). \end{cases}$$

Seja $\{b_1, b_2\}$ um referencial ortonormal tangente a g dado por $b_i = \frac{\partial g}{\partial u_i} \left\| \frac{\partial g}{\partial u_i} \right\|^{-1}$, $i = 1, 2$. Por (2.3.2), tem-se que

$$2.3.5 \quad \begin{cases} b_i = v_i & i = 1, 2 & (c = 0), \\ b_1 = -\sin u_1 p + \cos u_1 v_1 & & (c = 1), \\ b_2 = -\sin u_2 \cos u_1 p - \sin u_2 \sin u_1 v_1 + \cos u_2 v_2 & & (c = 1), \\ b_1 = \sinh u_1 p + \cosh u_1 v_1 & & (c = -1), \\ b_2 = \sinh u_2 \cosh u_1 p + \sinh u_2 \sinh u_1 v_1 + \cosh u_2 v_2 & & (c = -1). \end{cases}$$

Agora por (1.2.18), (2.3.3) e (2.3.4), podemos obter

$$2.3.6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \text{Hess}_r b_1, b_1 \rangle_c = b_1(b_1(r)) = \frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2} \quad (c = 0), \\ \\ = b_1(b_1(r)) - b_2(r) \tan u_2 \quad (c = 1), \\ \\ = b_1(b_1(r)) + b_2(r) \tanh u_2 \quad (c = -1). \end{array} \right.$$

$$2.3.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \text{Hess}_r b_1, b_2 \rangle_c = b_1(b_2(r)) = \frac{\partial^2 r}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (c = 0), \\ \\ = b_1(b_2(r)) + b_1(r) \sin u_2 \quad (c = 1), \\ \\ = b_1(b_2(r)) - b_1(r) \sinh u_2 \quad (c = -1). \end{array} \right.$$

$$2.3.8 \quad \langle \text{Hess}_r b_2, b_1 \rangle_c = b_2(b_1(r)) \quad \forall c.$$

$$2.3.9 \quad \langle \text{Hess}_r b_2, b_2 \rangle_c = b_2(b_2(r)) \quad \forall c.$$

2.3.10

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle P(b_1), b_1 \rangle_c = 1 - (b_1(r))^2 - r b_1(b_1(r)) \quad (c = 0), \\ \\ = \alpha (1 - (b_1(r))^2) - \beta (b_1(b_1(r)) - b_2(r) \tan u_2) \quad (c = 1), \\ \\ = \alpha (1 - (b_1(r))^2) - \beta (b_1(b_1(r)) + b_2(r) \tanh u_2) \quad (c = -1). \end{array} \right.$$

$$2.3.11 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle P(b_1), b_2 \rangle_c = -b_1(r) b_2(r) - r b_1(b_2(r)) \quad (c = 0), \\ \\ = -\alpha b_1(r) b_2(r) - \beta (b_1(b_2(r)) + b_1(r) \sin u_2) \quad (c = 1), \\ \\ = -\alpha b_1(r) b_2(r) - \beta (b_1(b_2(r)) - b_1(r) \sinh u_2) \quad (c = -1). \end{array} \right.$$

$$2.3.12 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle P(b_2), b_1 \rangle_c = -b_2(r) b_1(r) - r b_2(b_1(r)) \quad (c = 0), \\ \\ = -\alpha b_2(r) b_1(r) - \beta b_2(b_1(r)) \quad (c \neq 0). \end{array} \right.$$

$$2.3.13 \quad \begin{cases} \langle P(b_2), b_2 \rangle_c = 1 - (b_2(r))^2 - r b_2(b_2(r)) & (c = 0), \\ = \alpha (1 - (b_2(r))^2) - \beta b_2(b_2(r)) & (c \neq 0). \end{cases}$$

2.3.14

$$\begin{cases} \langle T(b_1), b_1 \rangle_c = -b_1(b_1(r)) & (c = 0), \\ = -\{\alpha [b_1(b_1(r)) - b_2(r) \tan u_2] + \epsilon \beta (1 - (b_1(r))^2)\} & (c = 1), \\ = -\{\alpha [b_1(b_1(r)) + b_2(r) \tanh u_2] + \epsilon \beta (1 - (b_1(r))^2)\} & (c = -1). \end{cases}$$

2.3.15

$$\begin{cases} \langle T(b_1), b_2 \rangle_c = -b_1(b_2(r)) & (c = 0), \\ = -\{\alpha [b_1(b_2(r)) + b_1(r) \sin u_2] - \epsilon \beta b_1(r) b_2(r)\} & (c = 1), \\ = -\{\alpha [b_1(b_2(r)) - b_1(r) \sinh u_2] - \epsilon \beta b_1(r) b_2(r)\} & (c = -1). \end{cases}$$

$$2.3.16 \quad \begin{cases} \langle T(b_2), b_1 \rangle_c = -b_2(b_1(r)) & (c = 0), \\ = -[\alpha b_2(b_1(r)) - \epsilon \beta b_2(r) b_1(r)] & (c \neq 0). \end{cases}$$

$$2.3.17 \quad \begin{cases} \langle T(b_2), b_2 \rangle_c = -b_2(b_2(r)) & (c = 0), \\ = -[\alpha b_2(b_2(r)) + \epsilon \beta (1 - (b_2(r))^2)] & (c \neq 0). \end{cases}$$

Ao calcularmos $\mathbf{H}^\psi$ e $\mathbf{K}^\psi$, para encontrar, se possível, os exemplos de 2-SPES de tipo III que satisfazem a relação de Weingarten $A + Bn\mathbf{H}^\psi + C\mathbf{K}^\psi = 0$ ($\forall (y, \xi_y)$), por (1.2.35), (1.2.37), (1.3.2) e (1.3.3) é evidente que se obtém uma equação diferencial a derivadas parciais com duas variáveis, razoavelmente complicada, mesmo se supusermos $C = 0$, isto é $\mathbf{H}^\psi = K$ (constante). Por exemplo, no caso euclideo, obtemos $\mathbf{H}^\psi = K$ (constante) se e somente se

$$\begin{aligned}
& ((n-2) - nrK) \{ [1 - b_1^2(r) - rb_1(b_1(r))] [1 - b_2^2(r) - rb_2(b_2(r))] - \\
& - [b_1(r)b_2(r) - rb_1(b_2(r))]^2 \} + r \{ b_1(b_1(r)) [-1 + b_2^2(r) + rb_2(b_2(r))] + \\
& + 2b_2(r)b_1(r) [b_1(r)b_2(r) + rb_1(b_2(r))] + \\
& + b_2(b_2(r)) [-1 + b_1^2(r) + rb_1(b_1(r))] \} = 0
\end{aligned}$$

Portanto optamos por analisar uma situação particular, isto é, vamos supor, de agora em diante, que $r = r(u_1)$, ou seja; r não depende da variável u_2 e portanto $b_2(r) = 0$.

Neste ponto convém analisar mais de perto o caso $c = 0$.

Por (1.2.35), a matriz de UP'^{-1} se reduz a

$$2.3.18 \quad [UP'^{-1}]_{E,E} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde, por (1.2.36)

$$2.3.19 \quad \det P = 1 - \left(\frac{\partial r}{\partial u_1} \right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2}$$

e por (1.2.37), (1.3.2), (1.3.3)

$$2.3.20 \quad nH^\psi = \frac{n-2}{r} - \frac{\frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2}}{1 - \left(\frac{\partial r}{\partial u_1} \right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2}}$$

$$2.3.21 \quad K^\psi = \frac{1}{r^{n-2}} \det UP'^{-1} = 0$$

Portanto a equação $A + BnH^\psi + CK^\psi = 0$, neste caso, se reduz a $H^\psi = k$ (constante).

Finalmente o corolário (1.3.4), se apresenta, para esta situação, na seguinte forma

Corolário 2.3.22 *Seja $\psi : \Lambda^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma 2-SPES de tipo III ($n \geq 4$) e seja $r = r(u_1)$ dada pelo teorema (1.2.8) ($c = 0$). Então $H^\psi = k \quad \forall (y, \xi_y) \in \Lambda^1$ se e somente se $((1 - kr)n - 2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\partial r}{\partial u_1}\right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2}\right) - r \frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2} = 0$.*

Em particular, para $k = 0$, temos a equação que $r = r(u_1)$ deve satisfazer para que tenhamos uma 2-SPES de tipo III mínima.

Embora seja interessante conhecer a equação diferencial dada em (2.3.22), para apresentar exemplos não vamos discutí-la e sim analisar diretamente a expressão da envolvente dada em (1.2.6). Vamos antes fazer algumas considerações.

Observaremos agora, pois nos será útil, o que ocorre com a envolvente de uma reta em $\mathbb{R}^3$. Neste caso ela se caracteriza por ser uma envolvente a 1-parâmetro, isto é, $p = 1$ e foi estudada em [CDM].

Neste caso, tomamos um referencial ortonormal $\{b_1, \xi_1, \xi_2, \}$ em $\mathbb{R}^3$, de modo que a reta seja dada por $c(s) = sb_1$.

Assim $\psi(s, \xi(s, t)) = sb_1 - r(s)r'(s)b_1 - r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}\xi(s, t)$ é a expressão local da envolvente e como $\xi(s, t) = \cos t\xi_1 + \sin t\xi_2$ obtemos

$$2.3.23 \quad \psi(s, \xi_s) = (s - r(s)r'(s), -r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)} \cos t, -r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)} \sin t)$$

Chamando-se

$$2.3.24 \quad \begin{cases} f(s) = -r(s)\sqrt{1 - r'^2(s)}, \\ g(s) = s - r(s)r'(s), \end{cases}$$

vemos $\psi(s, \xi_s)$, neste caso, é uma superfície de rotação. Portanto uma *envolvente de reta mínima* em $\mathbb{R}^3$ será um *catenóide*.

É interessante notar que a conhecida equação diferencial que caracteriza as superfícies de rotação mínimas em $\mathbb{R}^3$,

$$2.3.25 \quad f(f'g'' - g'f'') + g'(g'^2 + h'^2) = 0,$$

juntamente com (2.3.24) nos conduz a $1 - r'^2(s) - 2r(s)r''(s) = 0$, se excluirmos o plano.

De fato, esta última equação com $1 - r'^2(s) > 0$ é a equação diferencial de uma envolvente de reta, mínima em $\mathbb{R}^3$.

Para enunciar o próximo resultado e tendo por base o parágrafo anterior, precisamos das seguintes noções de $[CD]_2$, melhor detalhadas no capítulo 3, a partir da definição (3.2.23).

2.3.26 Uma parametrização de uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{R}^n$, pode ser dada por

$$f(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) = (\varphi_1(t)x_1(s), \varphi_2(t)x_1(s), \dots, \varphi_{n-1}(t)x_1(s), x_n(s))$$

onde $\gamma(s) = (x_1(s), 0, \dots, 0, x_n(s))$ é uma curva regular, nas condições da definição (3.2.23), $t = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) \in U$, aberto em $\mathbb{R}^{n-2}$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n-1}(t))$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $(n-2)$ -dimensional.

2.3.27 Uma hipersuperfície de rotação mínima $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é chamada *catenóide* (ver observação de (3.2.23)).

2.3.28 Na secção 3 de $[CD]_2$ encontra-se também uma caracterização das hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante.

Como generalização da mesma noção em $\mathbb{R}^3$, tem-se

Teorema 2.3.29 *Seja $\psi : \Lambda^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma 2-SPES de tipo III ($n \geq 4$) com $r = r(u_1)$. Então a envolvente é um cilindro sobre uma hipersuperfície de rotação $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Além disto, $H^\psi = K$ (constante) se e somente se M^{n-1} tem curvatura média constante $H' = \frac{nK}{n-1}$. Logo ψ é mínima se e somente se é um cilindro sobre um catenóide $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Por (1.2.6) e (2.3.2), no caso $c = 0$, temos

$$2.3.30 \quad \psi(y, \xi_y) = u_1 b_1 + u_2 b_2 - r(u_1) r'(u_1) b_1 - r(u_1) \sqrt{1 - r'^2(u_1)} \xi_y.$$

Tomando-se $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\}$ referencial ortonormal, normal ao plano gerado por $\{b_1, b_2\}$, temos $\xi_y = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k \xi_k(y)$ onde $\varphi_k = \varphi_k(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ é uma parametrização ortogonal da $(n-2)$ -esfera unitária.

Fazendo-se u_2 constante, $x_1(u_1) = -r(u_1) \sqrt{1 - r'^2(u_1)}$ e $x_n(u_1) = u_1 - r(u_1) r'(u_1)$ em (2.3.30), obtemos (2.3.26), a menos de reordenação do referencial em $\mathbb{R}^{n+1}$. Deste modo, fazendo-se os cortes u_2 constante na envolvente, obtemos sempre a mesma hipersuperfície de rotação $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Portanto, tal envolvente é um cilindro sobre uma hipersuperfície de rotação, ou seja $M^n = M^{n-1} \times I$. É fácil ver, neste caso, que os auto-valores da segunda forma fundamental de M^n , são os auto-valores da segunda forma fundamental de M^{n-1} juntamente com o último que é nulo.

Consequentemente, $\mathbf{H}^\psi = \frac{(n-1)}{n} \cdot \mathbf{H}'$ onde $\mathbf{H}'$ denota a curvatura média de M^{n-1} . É fácil ver, então, que $\mathbf{H}^\psi = k$ se e somente se $\mathbf{H}' = \frac{nk}{n-1}$ (constante) (ver 2.3.28).

Em particular, se $k = 0$, $\mathbf{H}^\psi = 0 \quad \forall (y, \xi_y)$ se e somente se $\mathbf{H}' = 0$, ou seja M^{n-1} é um catenóide, o que conclui a demonstração do teorema.

□

Observações 2.3.31 Como ocorreu no caso $p = 1$ com a envolvente de reta em $\mathbb{R}^3$, podemos tomar a equação diferencial que caracteriza as hipersuperfícies de rotação $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, com curvatura média constante, dada em [CD]₂. Após reparametrizar a curva $\gamma(u_1) = (x_1(u_1), 0, \dots, x_n(u_1))$ pelo comprimento de arco, onde $x_1(u_1) = -r(u_1) \sqrt{1 - r'^2(u_1)}$, $x_n(u_1) = u_1 - r(u_1) r'(u_1)$ e substituir as novas expressões na equação diferencial citada, chega-se na equação diferencial para $r = r(u_1)$, do corolário (2.3.22).

O estudo do tipo III nos ambientes S^{n+1} e $\mathbb{H}^{n+1}$ ainda não foi completado, mesmo no caso $r = r(u_1)$. Portanto não apresentaremos, por enquanto, resultados nesta direção.

Capítulo 3

Envolventes a p -parâmetros de n -esferas em $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+2}$

3.1 Introdução.

Seja $x : M^n \rightarrow Q_c^{n+q}$ uma imersão como em (1.1.4). Dizemos que $U_p \subset T_p M$ é um *subespaço umbílico* de x em p se $\langle \alpha(x, y), \xi \rangle_c = \lambda \langle x, y \rangle_c$, onde λ é uma constante, para todo $x \in U_p$, $y \in T_p M$ e $\xi \in (T_p M)^\perp$. Em [CD]₁ foi mostrado que se M^n pode ser isometricamente imersa em Q_c^{n+1} e $\tilde{Q}_{\tilde{c}}^{n+q}$ com $\tilde{c} > c$, $q \leq n-3$, então para cada $p \in M$, existe um subespaço umbílico $U_p \subset T_p M$ para ambas as imersões com $\dim U_p \geq n-q$. Com base neste resultado, em [AD] foram obtidos exemplos de hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$ que podem ser também isometricamente imersas em S_c^{n+2} com $R^\perp \equiv 0$, estando esta questão relacionada com o conceito de envolventes a p -parâmetros de esferas. Como o ponto central para a obtenção destes exemplos é o resultado de [CD]₁, citado acima, uma pergunta natural que surge é se podemos obter exemplos de hipersuperfícies de $\mathbb{H}^{n+1}$ que possam ser isometricamente imersas em $\mathbb{R}^{n+2}$, com $R^\perp \equiv 0$.

Deve-se notar que, neste caso, a relação $\tilde{c} > c$ está sendo mantida, pois, $\tilde{c} = 0$ e $c = -1$. É com esta questão que nos preocuparemos a partir de agora, sendo que por razões óbvias, utilizaremos o resultado de [AD] que se segue

Teorema 3.1.1 *Suponha que M^n possa ser isometricamente imersa em Q_c^{n+1} e $\tilde{Q}_{\tilde{c}}^{n+q}$, $\tilde{c} > c$, $1 \leq q \leq n-3$. Suponha também que a segunda imersão satisfaça $\tilde{R}^\perp \equiv 0$ e, sendo $D_\lambda(p) = \{X \in T_p M; A_N(X) = \lambda X\}$, que a dimensão de $D_\lambda(p)$ seja igual a ℓ (constante). Então a distribuição $p \rightarrow (D_\lambda(p))^\perp$ é integrável.*

Demonstração. Veja [AD] (pg. 629).

Observação 3.1.2 Notemos que a restrição $q \leq n-3$, para a existência do subespaço umbílico comum a ambas as imersões, dadas acima, nos levará a ter $n \geq 5$ quando supusermos $q \geq 2$. *Isto acontecerá em todos os resultados que se seguem.* Observamos também, que neste capítulo, retomaremos apenas a notação $x : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ para a envolvente, pois, pelo menos aparentemente, não vimos necessidade de estudá-la aqui, como imagem do fibrado normal unitário Λ^1 .

Como consequência do teorema (3.1.1), temos

Corolário 3.1.3 *Seja $x : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, $n \geq 5$, uma p -PES e suponha que M^n possa ser isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+q}$, $2 \leq q \leq n-p$, com fibrado normal flat. Então x é uma p -PES especial (p -SPES).*

Demonstração. Como vamos usar o teorema (3.1.1), é natural que a demonstração seja idêntica à feita em [AD], com $\mathbb{R}^{n+1}$ no lugar de $\mathbb{H}^{n+1}$ e S_c^{n+q} no lugar de $\mathbb{R}^{n+q}$.

Para cada $r \in M$, seja $D_\lambda(r) = \{X \in T_r M \mid A_N = \lambda X\}$. Como x é p -PES, em $r \in M$, temos

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-p} = \mu \quad \text{e} \quad k_j \neq \mu \quad \text{para} \quad n-p+1 \leq j \leq n.$$

Seja $W_r = \{X \in T_r M \mid A_N(X) = \mu X\}$. Logo $\dim W_r = n-p$, $\forall r \in M$, e U_r o subespaço umbílico comum a ambas as imersões (prova-se em [AD] que é único).

Temos $U_r \subset D_\lambda(r)$ e $q < n-p$, logo

$$\dim D_\lambda(r) \geq \dim U_r \geq n-q > p.$$

e portanto $D_\lambda(r) \cap W_r \neq \emptyset$.

Consequentemente $D_\lambda(r) = W_r$, $\forall r \in M$, ou seja $\dim D_\lambda(r) = n-p$ (constante), $\forall r \in M$. Pelo teorema (3.1.1) a distribuição $r \rightarrow D_\lambda(r)^\perp$ é integrável e x é uma p -PES, pela definição (1.4.1).

□

De agora em diante, vamos considerar $p = 2$.

3.2 Condições necessárias e suficientes para que M^n possa ser isométricamente imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ e em $\mathbb{R}^{n+2}$ com $R^\perp \equiv 0$.

Vamos agora apresentar dois resultados técnicos que serão úteis na obtenção dos exemplos que procuramos. O próximo lema, bem como o teorema que o segue, têm demonstrações análogas às dos seus correspondentes em [AD], sendo que fizemos as adaptações necessárias, inclusive nos enunciados, para os ambientes em que estamos interessados. Na demonstração do lema, é utilizada a seguinte proposição de [AD] (pg. 627).

Proposição 3.2.1 *Suponha que M^n possa ser isometricamente imersa em Q_c^{n+1} e $\tilde{Q}_{\tilde{c}}^{n+q}$, $\tilde{c} > c$, $1 \leq q \leq n-3$ e que a curvatura seccional de M em p não é constante. Então existe uma base ortonormal $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de $T_p M$ e bases ortonormais $\{N\}$ de $T_p M^\perp$ e $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q\}$ de $T_p \tilde{M}^\perp$, tais que*

$$(i) \quad A_N = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \delta_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \delta_{n-\ell} \end{bmatrix},$$

$$(ii) \quad A_{\eta_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda^2 + c - \tilde{c}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda^2 + c - \tilde{c}} & \\ & & & \mu_1 \\ & & & & \mu_{n-\ell} \end{bmatrix},$$

$$A_{\eta_t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_t \end{bmatrix} \quad 2 \leq t \leq q;$$

$$(iii) \quad \sum_{i=2}^q \left[\beta_{ii}^t \beta_{jj}^t - (\beta_{ij}^t)^2 \right] = \frac{(c - \tilde{c})(\lambda - \delta_i)(\lambda - \delta_j)}{\lambda^2 + c - \tilde{c}};$$

$$(iv) \sum_{i=2}^q \sum_{j=1}^{n-\ell} (\beta_{ij}^t)^2 \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n-\ell;$$

onde $\mu_j = \frac{\lambda\delta_j + c - \tilde{c}}{\sqrt{\lambda^2 + c - \tilde{c}}}$, $1 \leq j \leq n-\ell$ e B^t é uma matriz $(n-\ell) \times (n-\ell)$ dada por $B^t = (B_{ij}^t)$.

Lema 3.2.2 *Seja $x : M^n \rightarrow H^{n+1}$, $n \geq 5$ uma 2-SPES tal que*

$$k_1, k_2, \dots, k_{n-2} = \lambda, \quad k_{n-1} = \delta_1, \quad k_{n-2} = \delta_2, \quad \delta_1 \neq \delta_2.$$

Então M^n pode ser localmente isometricamente imersa em R^{n+2} com $R^\perp \equiv 0$ se e somente se as seguintes condições se verificam

$$(a) \quad E_i \left[\frac{T_j(\lambda)}{\lambda - \delta_j} \right] = 0 \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad 1 \leq j \leq 2;$$

(b) *Existem funções $c_1, c_2 \in C^\infty(M)$ tais que*

$$(i) \quad c_1 c_2 = -\frac{1}{\lambda^2 - 1},$$

$$(ii) \quad E_i(c_j) = 0,$$

$$(iii) \quad T_k(\beta_j) = \left(\frac{\beta_k - \beta_j}{\delta_k - \delta_j} \right) T_k(\delta_j) + \frac{(\lambda\delta_j - 1)\beta_k}{(\lambda^2 - 1)(\lambda - \delta_k)} T_k(\lambda),$$

para $1 \leq j \neq k \leq 2$ onde $\beta_j = c_j(\lambda - \delta_j)$.

$$(iv) \quad T_1 \left(\frac{c_2 T_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) - \frac{c_2 T_2(\lambda)}{(\delta_2 - \delta_1)\sqrt{\lambda^2 - 1}} T_1(\delta_2) = T_2 \left[\frac{c_1 T_1(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right] - \frac{c_1 T_1(\lambda) T_2(\delta_1)}{(\delta_1 - \delta_2)\sqrt{\lambda^2 - 1}},$$

onde $E_1, E_2, \dots, E_{n-2}, T_1, T_2$ é um referencial ortonormal para TM de modo que $A_N(E_i) = \lambda E_i$, $A_N(T_j) = \delta_j T_j$, $1 \leq i \leq n-2$, $1 \leq j \leq 2$ e N é um campo vetorial unitário normal a $x(M)$.

Demonstração. A equação de Codazzi para x é equivalente ao seguinte conjunto de equações

$$3.2.3 \left\{ \begin{array}{ll} (1) & E_i(\lambda) = 0 \quad 1 \leq i \leq n-2, \\ (2) & \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_j, T_k \rangle_{-1} = 0 \quad 1 \leq i \neq j \leq n-2, \quad 1 \leq k \leq 2, \\ (3) & T_k(\lambda) = (\lambda - \delta_k) \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, T_k \rangle_{-1} \quad 1 \leq k \leq 2, \quad 1 \leq i \leq n-2, \\ (4) & E_i(\delta_j) = (\delta_j - \lambda) \langle \bar{\nabla}_{T_j} T_j, E_i \rangle_{-1} \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad 1 \leq j \leq 2, \\ (5) & (\delta_j - \delta_k) \langle \bar{\nabla}_{E_i} T_j, T_k \rangle_{-1} = (\delta_k - \lambda) \langle \bar{\nabla}_{T_j} T_k, E_i \rangle_{-1} \quad 1 \leq j \neq k \leq 2, \\ (6) & T_j(\delta_k) = (\delta_j - \delta_k) \langle \bar{\nabla}_{T_k} T_j, T_k \rangle_{-1} \quad 1 \leq j \neq k \leq 2. \end{array} \right.$$

Suponha que exista uma imersão $y : M^n \rightarrow R^{n+2}$, com $R^\perp \equiv 0$. Segue da proposição (3.2.1), que existe um referencial ortonormal η_1, η_2 , normal a y tal que

$$A_{\eta_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda^2 - 1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{\lambda^2 - 1} & & \\ & & & \frac{\lambda\delta_1 - 1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} & \\ & & & & \frac{\lambda\delta_2 - 1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \end{bmatrix}$$

$$A_{\eta_2} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \beta_1 & \\ & & & & \beta_2 \end{bmatrix}$$

onde $\beta_1\beta_2 = \frac{-(\lambda - \delta_1)(\lambda - \delta_2)}{\lambda^2 - 1}$. Então a equação de Codazzi para y é equivalente a (3.2.3) de (1) a (5) e

$$3.2.4 \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \beta_j \langle \nabla_{T_k}^\perp \eta_1, \eta_2 \rangle_{-1} = T_k \left(\frac{\lambda \delta_j - 1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) - \\ \quad - \frac{\lambda(\delta_k - \delta_j)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \langle \bar{\nabla}_{T_j} T_k, T_j \rangle_{-1} \quad 1 \leq k \neq j \leq 2, \\ (2) \quad \langle \nabla_{E_i}^\perp \eta_2, \eta_1 \rangle_{-1} = 0, \\ (3) \quad \beta_j \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, T_j \rangle_{-1} = \sqrt{\lambda^2 - 1} \langle \nabla_{T_j}^\perp \eta_2, \eta_1 \rangle_{-1}, \\ (4) \quad E_i(\beta_j) = \beta_j \langle \bar{\nabla}_{T_j} T_j, E_i \rangle_{-1}, \\ (5) \quad (\beta_j - \beta_k) \langle \bar{\nabla}_{E_i} T_j, T_k \rangle_{-1} = \beta_k \langle \bar{\nabla}_{T_j} T_k, E_i \rangle_{-1} \quad 1 \leq j \neq k \leq 2, \\ (6) \quad T_k(\beta_j) = (\beta_k - \beta_j) \langle \bar{\nabla}_{T_j} T_k, T_j \rangle_{-1} + \frac{\lambda \delta_j - 1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \langle \nabla_{T_k}^\perp \eta_2, \eta_1 \rangle_{-1} \quad j \neq k \end{array} \right.$$

Vamos agora checar as condições (b) do lema. Defina

$$3.2.5 \quad c_j = \frac{\beta_j}{\lambda - \delta_j} \quad j = 1, 2,$$

de modo que c_1, c_2 satisfazem (i). Pelas equações (3.2.3) (4) e (3.2.4) (4), temos

$$\frac{E_i(\beta_j)}{\beta_j} = \frac{E_i(\delta_j)}{\delta_j - \lambda}$$

que com (3.2.5) e $E_i(\lambda) = 0$, nos dá (ii).

Substituindo-se as equações (3.2.3) (3) e (6) e (3.2.4) (3) em (3.2.4) (6), obtemos (b) (iii).

Usando-se a equação de Codazzi e efetuando-se os cálculos, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} R^\perp(T_1, T_2)\eta_2 = \left[T_1 \left(\frac{c_2 T_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) - T_2 \left(\frac{c_1 T_1(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{(\delta_2 - \delta_1)\sqrt{\lambda^2 - 1}} (c_1 T_1(\lambda) T_2(\delta_1) - c_2 T_2(\lambda) T_1(\delta_2)) \right] \eta_1, \end{array} \right.$$

que juntamente com a equação de Ricci, nos dá (b) (iv).

Do mesmo modo, mostra-se que

$$0 = R^\perp(E_i, T_j)\eta_2 = \frac{c_j}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \left(E_i T_j(\lambda) - \frac{E_i(\delta_j)}{\lambda - \delta_j} T_j(\lambda) \right) \eta_1,$$

que nos dá (a).

Reciprocamente, suponhamos que as condições (a) e (b) se verificam e seja

$$\beta_j = c_j (\lambda - \delta_j), \quad j = 1, 2.$$

Seja P um fibrado vetorial 2-dimensional sobre M com uma métrica Riemanniana, digamos $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$, sendo cada fibra gerada por um referencial ortonormal η_1, η_2 . Definimos em P uma conexão $\bar{\nabla}$, compatível com $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$, por

$$3.2.6 \quad \begin{cases} \bar{\nabla}_{E_i} \eta_j = 0, & 1 \leq i \leq n-2, \quad 1 \leq j \leq 2, \\ \bar{\nabla}_{T_j} \eta_1 = \frac{-c_j}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} T_j(\lambda) \eta_2, & j = 1, 2. \end{cases}$$

Seja $\bar{R}$ o tensor curvatura de $\bar{\nabla}$ e $\bar{\alpha}$ a secção simétrica do fibrado $\text{hom}(TM \times TM, P)$ dada por

$$3.2.7 \quad \begin{cases} \bar{\alpha}(E_i, E_j) = \delta_{ij} \sqrt{\lambda^2 - 1} \eta_1, & 1 \leq i, j \leq n-2, \\ \bar{\alpha}(T_j, T_k) = \delta_{jk} \left(\frac{\lambda \delta_j - 1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \eta_1 + \beta_j \eta_2 \right), & 1 \leq j, k \leq 2, \\ \bar{\alpha}(E_i, T_j) = 0 & 1 \leq i \leq n-2, \quad 1 \leq j \leq 2. \end{cases}$$

Fazendo-se os cálculos, vemos que $\bar{\alpha}$ satisfaz a equação de Gauss para uma imersão em R^{n+2} .

As equações (3.2.4) de (1) a (5) também se verificam e (3.2.4) (6) segue de (b) (iii). Então a equação de Codazzi também se verifica para $\bar{\nabla}$ e $\bar{\alpha}$.

Usando-se as equações (a) e (b) (iv), mostra-se que $\bar{R}$ se anula e como $\bar{\alpha}$ está diagonalizada no referencial $E_1, E_2, \dots, E_{n-2}, T_1, T_2$, concluímos que a equação de Ricci se verifica. Então pelo teorema fundamental das subvariedades [Sp] (pg. 80), existe uma imersão isométrica local $y : M^n \rightarrow R^{n+2}$, de modo que podemos identificar o fibrado normal de y com P . Também a métrica induzida no fibrado normal de y coincide com a métrica $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ de P , a segunda forma fundamental de y coincide com $\bar{\alpha}$ e a conexão normal de y com $\bar{\nabla}$. Isto completa a prova do lema.

□

Teorema 3.2.8 *Seja $x : M^n \rightarrow H^{n+1}$, $n \geq 5$ um fibrado normal de esferas com r constante positiva sobre uma superfície $g : L^2 \rightarrow H^{n+1}$ sem pontos umbílicos, com $R_g^\perp \equiv 0$. Então M^n pode ser localmente isometricamente imersa em R^{n+2} com $R^\perp \equiv 0$ se e somente se existem funções C^∞ , $a(u_1)$ e $b(u_2)$ tais que*

$$3.2.9 \quad a(u_1)G(u_1, u_2) + b(u_2)E(u_1, u_2) = a(u_1).b(u_2)$$

onde (u_1, u_2) são coordenadas principais para g e $E, F = 0, G$ são os coeficientes da primeira forma fundamental de g .

Demonstração. Tomando-se (u_1, u_2) coordenadas principais para g e fazendo-se $b_j = \frac{\partial g}{\partial u_j}, j = 1, 2$, temos $\langle b_i, b_j \rangle_{-1} = 0, i \neq j$. Vimos no teorema (1.2.8), que se x pode ser escrita na forma

$$x(u_1, u_2, t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) = \frac{1}{\alpha} g(u_1, u_2) - \frac{\beta}{\alpha} N(u_1, u_2, t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$$

onde $N = -\beta g(u_1, u_2) - \alpha \xi(u_1, u_2, t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$.

Como $R_g^\perp \equiv 0$, existem $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ campos ortonormais paralelos, normais a g em H^{n+1} , tais que

$$N = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^k(t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) \xi_k(u_1, u_2)$$

Temos

$$\frac{\partial x}{\partial u_j} = \frac{1}{\alpha} b_j - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial N}{\partial u_j} \quad j = 1, 2.$$

e as equações

$$3.2.10 \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u_j} = \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha \|b_j\|^2} \langle N, \alpha^g(b_j, b_j) \rangle_{-1} \right] b_j, & j = 1, 2 \\ \frac{\partial x}{\partial t_i} = -\frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi^k}{\partial t_i} \xi_k, & i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \frac{\partial N}{\partial u_j} = -\frac{1}{\|b_j\|^2} \langle \alpha^g(b_j, b_j), N \rangle_{-1} b_j, & j = 1, 2 \end{cases}$$

onde denotamos aqui por α^g , a segunda forma fundamental de g , para não confundir com α .

Por (3.2.10), é fácil ver que $(u_1, u_2, t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ são coordenadas que diagonalizam a segunda forma fundamental de x .

Logo

$$3.2.11 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\left\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial N}{\partial t_i} \right\rangle_{-1}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\|^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \delta_j = -\frac{\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle_{-1}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\|^2} = \frac{\langle \alpha^g(b_j, b_j), N \rangle_{-1} \alpha}{\|b_j\|^2 + \beta \langle \alpha^g(b_j, b_j), N \rangle_{-1}}, \quad j = 1, 2 \end{array} \right.$$

Como $E = \|b_1\|^2$, $G = \|b_2\|^2$, notemos que se $\delta_1 = \delta_2$, então

$$\frac{\langle \alpha^g(b_1, b_1), N \rangle_{-1}}{E + \beta \langle \alpha^g(b_1, b_1), N \rangle_{-1}} = \frac{\langle \alpha^g(b_2, b_2), N \rangle_{-1}}{G + \beta \langle \alpha^g(b_2, b_2), N \rangle_{-1}}$$

ou seja $\left\langle \frac{\alpha^g(b_1, b_1)}{E} - \frac{\alpha^g(b_2, b_2)}{G}, N \right\rangle_{-1} = 0$. Mas esta última expressão diz que g tem pontos umbílicos. Portanto $\delta_1 \neq \delta_2$ e podemos aplicar o lema (3.2.2).

Temos que as condições (3.2.2) (a) e (3.2.2) (b) (iv) se verificam, pois λ é constante. Resta então verificar sob que condições existem funções c_1 e $c_2 \in C^\infty(M)$ que satisfaçam (3.2.2) (b) (i), (ii) e (iii). Tomando-se

$$E_i = \frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \left\| \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\|^{-1} \quad \text{e} \quad T_j = \frac{\partial x}{\partial u_j} \cdot \left\| \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\|^{-1},$$

a equação (3.2.2) (b) (iii), fica

$$3.2.12 \quad \frac{\partial c_j}{\partial u_k} = \frac{\lambda - \delta_k}{(\delta_k - \delta_j)(\lambda - \delta_j)} \frac{\partial \delta_j}{\partial u_k} (c_k - c_j) \quad j \neq k$$

Para simplificar seja $\alpha_j^g = \alpha^g(b_j, b_j)$. Por (3.2.11), temos que

$$\lambda - \delta_j = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha \langle \alpha_j^g, N \rangle_{-1}}{\|b_j\|^2 + \beta \langle \alpha_j^g, N \rangle_{-1}} = \frac{\alpha \|b_j\|^2}{\beta (\|b_j\|^2 + \beta \langle \alpha_j^g, N \rangle_{-1})}$$

$$\frac{\partial \delta_j}{\partial u_k} = \frac{\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\langle \alpha_j^g, N \rangle_{-1} \|b_j\|^2 - \alpha \langle \alpha_j^g, N \rangle_{-1} \cdot \frac{\partial \|b_j\|^2}{\partial u_k} \right)}{(\|b_j\|^2 + \beta \langle \alpha_j^g, N \rangle_{-1})^2}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \langle \alpha_j^g, N \rangle_{-1} = \langle \nabla_{b_k}^\perp \alpha_j^g, N \rangle_{-1}, \quad j, k = 1, 2$$

segue que

$$3.2.13 \quad \frac{\lambda - \delta_k}{(\delta_k - \delta_j)(\lambda - \delta_j)} \frac{\partial \delta_j}{\partial u_k} = \frac{\|b_k\|^2 \left\langle \|b_j\|^2 \nabla_{b_k}^\perp \alpha_j^g - \frac{\partial (\|b_j\|^2)}{\partial u_k} \alpha_j^g, N \right\rangle_{-1}}{\|b_j\|^2 \left\langle \|b_j\|^2 \alpha_k^g - \|b_k\|^2 \alpha_j^g, N \right\rangle_{-1}}$$

Agora consideremos as equações de Codazzi para $g : L^2 \longrightarrow H^{n+1}$

$$(\nabla_X \alpha^g)(Y, Z) - (\nabla_Y \alpha^g)(X, Z) = 0 \quad \forall X, Y, Z \text{ tangentes}$$

Fazendo-se $X = b_k$, $Y = Z = b_j$, obtemos

$$\nabla_{b_k}^\perp \alpha_j^g - 2\alpha^g(\nabla_{b_k} b_j, b_j) = \nabla_{b_j}^\perp \alpha^g(b_k, b_j) - \alpha^g(\nabla_{b_j} b_k, b_j) - \alpha^g(b_k, \nabla_{b_j} b_j)$$

Como $\alpha^g(b_k, b_j) = 0$ e $\alpha^g(\nabla_{b_k} b_j, b_j) = \frac{\alpha_j^g}{\|b_j\|^2} \langle \nabla_{b_k} b_j, b_j \rangle_{-1}$ obtemos

$$\nabla_{b_k}^\perp \alpha_j^g - 2 \frac{\alpha_j^g}{\|b_j\|^2} \langle \nabla_{b_k} b_j, b_j \rangle_{-1} = - \frac{\alpha_j^g}{\|b_j\|^2} \langle \nabla_{b_j} b_k, b_j \rangle_{-1} - \frac{\alpha_k^g}{\|b_k\|^2} \langle \nabla_{b_j} b_j, b_k \rangle_{-1}$$

Segue que

$$3.2.14 \quad \langle \nabla_{b_j} b_j, b_k \rangle_{-1} (\alpha_j^g \|b_k\|^2 - \|b_j\|^2 \alpha_k^g) = \|b_k\|^2 [\|b_j\|^2 \nabla_{b_k}^\perp \alpha_j^g - 2 \langle \nabla_{b_k} b_j, b_j \rangle_{-1} \alpha_j^g]$$

Temos também

$$3.2.15 \quad \frac{\partial (\|b_j\|^2)}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \langle b_j, b_j \rangle_{-1} = 2 \langle \nabla_{b_k} b_j, b_j \rangle_{-1}.$$

Substituindo-se (3.2.15) em (3.2.14) e fazendo-se o produto de (3.2.14) por ξ , vetor normal a g , arbitrário, obtemos

$$3.2.16 \quad \langle \nabla_{b_j} b_j, b_k \rangle_{-1} = \frac{\|b_k\|^2 \left[\left\langle \|b_j\|^2 \nabla_{b_k}^\perp \alpha_j^g - \frac{\partial \|b_j\|^2}{\partial u_k} \alpha_j^g, \xi \right\rangle_{-1} \right]}{\left\langle \|b_k\|^2 \alpha_j^g - \|b_j\|^2 \alpha_k^g, \xi \right\rangle_{-1}}$$

Usando-se (3.2.15) e (3.2.16), podemos escrever (3.2.13) como segue

$$3.2.17 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda - \delta_k}{(\delta_k - \delta_j)(\lambda - \delta_j)} \frac{\partial \delta_j}{\partial u_k} = -\frac{1}{\|b_j\|^2} \langle \nabla_{b_j} b_j, b_k \rangle_{-1} = \\ = \frac{1}{\|b_j\|^2} \langle \nabla_{b_j} b_k, b_j \rangle_{-1} = \\ = \frac{1}{2\|b_j\|^2} \frac{\partial (\|b_j\|^2)}{\partial u_k} \end{array} \right.$$

Usando-se (3.2.17), a equação (3.2.12) se reduz a

$$\frac{\partial c_j}{\partial u_k} = \frac{1}{2\|b_j\|^2} \frac{\partial \|b_j\|^2}{\partial u_k} (c_k - c_j) \quad k \neq j,$$

ou seja

$$3.2.18 \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial c_1}{\partial u_2} = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u_2} (c_2 - c_1), \\ (b) \quad \frac{\partial c_2}{\partial u_1} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u_1} (c_1 - c_2). \end{array} \right.$$

Usando-se que $c_1 c_2 = -\frac{1}{\lambda^2 - 1}$, obtemos

$$c_2 - c_1 = -\frac{1}{c_1(\lambda^2 - 1)} - c_1 = -\frac{1}{c_1} \left[c_1^2 + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right]$$

como $\frac{\partial}{\partial u_1}(c_1 c_2) = 0$, temos $\frac{\partial c_1}{\partial u_1} = -\frac{c_1}{c_2} \frac{\partial c_2}{\partial u_1}$. Obtemos então

$$3.2.19 \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial c_1}{\partial u_2} = -\frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u_2} \frac{1}{c_1} \left(c_1^2 + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right), \\ (b) \quad \frac{\partial c_1}{\partial u_1} = -\frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u_1} c_1 (\lambda^2 - 1) \left(c_1^2 + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right). \end{array} \right.$$

Como (3.2.2) (ii), isto é, $E_i(c_j) = 0$, também deve se verificar, temos que as soluções de (3.2.19) são respectivamente do tipo

$$3.2.20 \quad \begin{cases} (1) & c_1^2 = \frac{\bar{a}(u_1)}{E(u_1, u_2)} - \frac{1}{\lambda^2 - 1}, \\ (2) & c_1^2 = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \frac{\bar{b}(u_2)G(u_1, u_2)}{1 - \bar{b}(u_2)G(u_1, u_2)}, \end{cases}$$

onde $\bar{a}(u_1)$ e $\bar{b}(u_2)$ são funções arbitrárias.

Finalmente, se M^n pode ser localmente isometricamente imersa em R^{n+2} com $R^\perp \equiv 0$, então as condições do lema (3.2.2) se verificam e pelo que vimos acima existem soluções de (3.2.19), do tipo (3.2.20). Igualando-se as duas expressões em (3.2.20) e tomando-se $a(u_1) = (\lambda^2 - 1)\bar{a}(u_1)$ e $b(u_2) = \frac{1}{\bar{b}(u_2)}$, obtemos (3.2.9).

Reciprocamente, se existem funções $a(u_1)$ e $b(u_2)$ satisfazendo (3.2.9), fazendo-se a retrospectiva do raciocínio acima mostramos que as condições do lema (3.2.2) se verificam e concluímos o teorema. □

Para o próximo teorema, vamos precisar das seguintes noções

Definição 3.2.21 Um cone em H^{n+1} é uma superfície regrada $g : L^2 \rightarrow H^{n+1}$ com $K^g = -1$ (ver (1.4.5)(4)), tal que a função $\rho(s)$ definida por $\dot{v}(s) = \rho(s)\dot{\gamma}(s)$ é uma função constante menor que -1 ou maior que 1 .

Sabemos que o ponto fixo por onde passam todas as geodésicas que partem de $\gamma(s)$, com direção $v(s)$, é característica de um cone. No caso de um cone em H^{n+1} , este ponto pode ser obtido fazendo-se $t_0 = \text{arc coth}(-\rho)$.

Assim

$$f(s) = g(s, t_0) = \cosh t_0 \gamma(s) + \sinh t_0 v(s)$$

e

$$\dot{f}(s) = \cosh t_0 \dot{\gamma}(s) + \sinh t_0 \rho \dot{\gamma}(s) = 0$$

pois $\rho = -\frac{\cosh t_0}{\sinh t_0}$, ou seja $f(s)$ é constante. Assim $P_0 = f(s) = g(s, t_0)$ é o ponto fixo do cone (que é excluído).

Vamos agora definir *produto de curvas* em H^{n+1} .

Sejam $p, q \geq 1$, dois números naturais tais que $p + q = n + 1$, a variedade produto $H^p \times H^q$ e o difeomorfismo $\phi : H^p \times H^q \longrightarrow H^{n+1}$ definido por

$$\phi(x, y) = (y_0 x_0, y_0 x_1, \dots, y_0 x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$$

onde $x = (x_0, x_1, \dots, x_p) \in H^p$ e $y = (y_0, y_1, \dots, y_q) \in H^q$ (ver [N]).

Definição 3.2.22 Sejam $\gamma(s) \in H^p$ e $\delta(t) \in H^q$, curvas regulares parametrizadas pelo comprimento de arco. Definimos como *produto de curvas* em H^{n+1} a superfície $g(s, t) = \phi(\gamma(s), \delta(t))$, onde ϕ é o difeomorfismo descrito acima.

Definição 3.2.23 (ver [CD]₂) Considere os subespaços vetoriais P^2 e $P^3 \supset P^2$ do espaço ambiente (L^{n+2} , no caso $c < 0$ e R^{n+2} no caso $c \geq 0$), $n \geq 2$, tais que

$$P^3 \cap \overline{M}^{n+1}(c) = \overline{M}^2(c) \neq \emptyset$$

e seja C uma curva regular contida em $\overline{M}^2(c)$, que não intercepta P^2 . A órbita de C sob a ação de $O(P^2)$ (conjunto das transformações ortogonais do espaço ambiente, com determinante positivo, que deixam P^2 fixo, ponto a ponto) é chamada *hipersuperfície de rotação* M^n contida em $\overline{M}^{n+1}(c)$, gerada pela curva C em torno de P^2 .

Chamamos de *meridiano* de M^n a curva $\mathcal{O}(C)$ onde $\mathcal{O} \in O(P^2)$ e de *paralelo* de M^n a órbita de um ponto da curva C sob $O(P^2)$.

Observação : As hipersuperfícies de rotação *mínimas* em Q_c^{n+1} são chamadas *catenóides*.

No caso em que $c < 0$, o espaço ambiente é L^{n+2} e temos três possibilidades para o espaço P^2 : P^2 é *Lorentziano* (CASO (L)), P^2 é *Riemanniano* (CASO (R)) ou P^2 é *degenerado* (CASO (D)), dependendo da restrição da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ a P^2 . Em cada caso, escolhemos uma base $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ -ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ de L^{n+2} de tal modo que $\{e_1, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ geram P^3 e $\{e_{n+1}, e_{n+2}\}$ geram P^2 . Observamos que, em tal sistema de coordenadas, temos que H^{n+1} se escreve

$$\begin{aligned} H^{n+1} &= \{x \in L^{n+2} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = -1\} && \text{CASO (L);} \\ &= \{x \in L^{n+2} : -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+2}^2 = -1\} && \text{CASO (R);} \\ &= \{x \in L^{n+2} : 2x_1 x_{n+1} + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_{n+2}^2 = -1\} && \text{CASO (D)} \end{aligned}$$

Obtemos a seguintes parametrizações, a partir da definição

(a) **CASO (L) – HIPERSUPERFÍCIE DE ROTAÇÃO ESFÉRICA**

Seja $\gamma(s) = (x_1(s), 0, 0, \dots, 0, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)), s \in I$ (intervalo), $x_1(s) > 0$, a curva C parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso a parametrização de M^n em H^{n+1} é:

$$f(t, s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \varphi_2(t)x_1(s), \dots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$$

onde $t = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \in U$ (aberto em R^{n-1}), $\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) + \dots + \varphi_n^2(t) = 1$ (os paralelos são esferas), $x_1^2(s) + x_{n+1}^2(s) - x_{n+2}^2(s) = -1$ e $\dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_{n+1}^2(s) - \dot{x}_{n+2}^2(s) = 1$.

Temos também neste caso que

$$\begin{aligned} x_{n+1}(s) &= \sqrt{x_1^2(s) + 1} \sinh \phi(s), \\ x_{n+2}(s) &= \sqrt{x_1^2(s) + 1} \cosh \phi(s), \\ \text{e } \phi(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{1 + x_1^2(\sigma) - \dot{x}_1^2(\sigma)}}{x_1^2(\sigma) + 1} d\sigma \end{aligned}$$

(b) **CASO (R) – HIPERSUPERFÍCIE DE ROTAÇÃO HIPERBÓLICA**

Analogamente: $\gamma(s) = (x_1(s), 0, \dots, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)), s \in I$, $x_1(s) > 0$.

A parametrização de M^n em H^{n+1} é:

$$f(t, s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \varphi_2(t)x_1(s), \dots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$$

onde $t = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \in U$ (aberto em R^{n-1}), $-\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) + \dots + \varphi_n^2(t) = -1$ (os paralelos são superfícies equidistantes), $-x_1^2(s) + x_{n+1}^2(s) + x_{n+2}^2(s) = -1$ e $-\dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_{n+1}^2(s) + \dot{x}_{n+2}^2(s) = 1$.

Obtem-se também, neste caso

$$\begin{aligned} x_{n+1}(s) &= \sqrt{x_1^2(s) - 1} \cos \phi(s), \\ x_{n+2}(s) &= \sqrt{x_1^2(s) - 1} \sin \phi(s), \\ \phi(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{-1 + x_1^2(\sigma) - \dot{x}_1^2(\sigma)}}{x_1^2(\sigma) - 1} d\sigma. \end{aligned}$$

(c) **CASO (D) – HIPERSUPERFÍCIE DE ROTAÇÃO PARABÓLICA**

Analogamente : $\gamma(s) = (x_1(s), 0, 0, \dots, 0, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$, $s \in I$, $x_1(s) > 0$.

A parametrização de M^n em $\mathbb{H}^{n+1}$ é :

$$f(t_2, t_3, \dots, t_n, s) = (x_1(s), t_2 x_1(s), \dots, t_n x_1(s), t_{n+1} x_1(s) + x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$$

para $(t_2, t_3, \dots, t_n, s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I \subset \mathbb{R}^n$ onde

$$t_{n+1} = -\frac{1}{2} (t_2^2 + \dots + t_n^2)$$

para $n \geq 2$ (neste caso os paralelos são horoesferas).

Valem ainda :

$$2x_1(s)x_{n+1}(s) + x_{n+2}^2(s) = -1,$$

$$2\dot{x}_1(s)\dot{x}_{n+1}(s) + \dot{x}_{n+2}^2(s) = 1,$$

$$x_{n+2}(s) = x_1(s) \int_0^s \frac{\sqrt{x_1^2(\sigma) - \dot{x}_1^2(\sigma)}}{x_1^2(\sigma)} d\sigma,$$

$$\text{e } x_{n+1}(s) = \left(-1 - x_{n+2}^2(s)\right) \frac{1}{2x_1(s)}.$$

No caso em que $c \geq 0$ o espaço ambiente é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$, com a métrica euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

Novamente a curva C é parametrizada pelo comprimento de arco por :

$$\gamma(s) = (x_1(s), 0, 0, \dots, 0, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)) \quad (s \in I) \quad (x_1(s) > 0)$$

(i) No caso $c > 0$

$$f(t, s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \dots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$$

para $(t, s) = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, s) \in U \times I \subset R^n$, onde U é um aberto em R^{n-1} , $\varphi_1^2(t) + \dots + \varphi_n^2(t) = 1$, $\dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_{n+1}^2(s) + \dot{x}_{n+2}^2(s) = 1$. Temos ainda

$$x_{n+1}(s) = \sqrt{1 - x_1^2(s)} \sin \phi(s),$$

$$x_{n+2}(s) = \sqrt{1 - x_1^2(s)} \cos \phi(s),$$

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 - x_1^2(\sigma) - \dot{x}_1^2(\sigma)}}{1 - x_1^2(\sigma)} d\sigma.$$

(ii) No caso $c = 0$

Consideramos $R^{n+1} \subset R^{n+2}$ com $x_{n+2} = 0$.

Neste caso, a parametrização de uma hipersuperfície de rotação $M^n \subset R^{n+1}$ é

$$f(t, s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \dots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), 0)$$

sendo $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in U$, aberto em R^{n-1} , definida como no caso $c > 0$.

$$\text{Neste caso } x_{n+1}(s) = \int_0^s \sqrt{1 - \dot{x}_1^2(\sigma)} d\sigma.$$

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.2.24 *Seja $x : M^n \longrightarrow H^{n+1}$, $n \geq 5$ um fibrado normal de esferas com r constante positiva sobre uma superfície $g : L \longrightarrow H^{n+1}$ de um dos seguintes tipos:*

- (a) *uma superfície de rotação em H^3 ;*
- (b) *um cone em H^{n+1} ;*
- (c) *um produto de curvas em H^{n+1} .*

Então M^n pode ser localmente isometricamente imersa em R^{n+2} , com $R^\perp \equiv 0$.

Demonstração.

(a) Seja $g : L \rightarrow H^3$ uma superfície de rotação. Como vimos na definição acima, ela pode ser de três tipos, dependendo da natureza dos paralelos. Vamos analisá-las separadamente.

(i) Se g é uma *superfície de rotação hiperbólica* em H^3 , vimos acima que g pode ser parametrizada por

$$g(u_1, u_2) = (x(u_1) \cosh u_2, x(u_1) \sinh u_2, y(u_1), z(u_1))$$

onde $-x^2(u_1) + y^2(u_1) + z^2(u_1) = -1$ e $-\dot{x}^2(u_1) + \dot{y}^2(u_1) + \dot{z}^2(u_1) = 1$ e, pela proposição (3.2) de [CD]₂, (u_1, u_2) são coordenadas principais para g .

Sejam e_3 um vetor unitário normal a g em $H^3 \subset H^{n+1}$ e $\{e_4, e_5, \dots, e_{n+1}\}$ campos vetoriais ortonormais em H^{n+1} , normais a g e a e_3 . Segue que $N = \varphi^1 e_3 + \varphi^2 e_4 + \dots + \varphi^{n-1} e_{n+1}$.

$$\text{Logo } \langle \alpha^g(b_j, b_j), N \rangle_{-1} = \langle \alpha^g(b_j, b_j), \varphi^1 e_3 \rangle_{-1}.$$

Sejam $k_j, j = 1, 2$, as curvaturas principais de $g(L)$ em H^3 . Temos

$$k_j = \frac{1}{\|b_j\|^2} \langle \alpha^g(b_j, b_j), e_3 \rangle_{-1}.$$

Por (3.2.11), temos

$$\delta_j = \frac{\alpha \varphi^1 k_j \|b_j\|^2}{\|b_j\|^2 + \beta \varphi^1 k_j \|b_j\|^2} = \frac{\alpha \varphi^1 k_j}{1 + \beta \varphi^1 k_j}$$

e $\delta_1 = \delta_2$ se e somente se $k_1 = k_2$.

Temos dois casos a considerar:

PRIMEIRO CASO: *Suponha que g não admita um subconjunto aberto de pontos umbílicos.* Estamos então com um subconjunto aberto e denso U de L onde $k_1 \neq k_2$ e portanto $\delta_1 \neq \delta_2$. Tomemos

$$b(u_2) = b_0 > 1, \quad a(u_1) = \frac{b_0}{b_0 - x(u_1)^2}$$

Temos

$$\begin{aligned} E(u_1, u_2) &= \langle b_1, b_1 \rangle = -\dot{x}^2(u_1) + \dot{y}^2(u_1) + \dot{z}^2(u_1) = 1, \\ G(u_1, u_2) &= \langle b_2, b_2 \rangle = x^2(u_1). \end{aligned}$$

Logo (3.2.9) se verifica em U e, por continuidade, em todo L . Pelo teorema (3.2.8) concluímos esta demonstração para o primeiro caso.

SEGUNDO CASO: Suponha que g seja uma superfície de rotação hiperbólica umbilica de H^3 . Neste caso, temos por uma proposição de $[CD]_2$ que as suas curvaturas principais são :

$$k_1 = -\frac{\sqrt{-1 + x^2(u_1) - \dot{x}^2(u_1)}}{x(u_1)} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\ddot{x}(u_1) - x(u_1)}{\sqrt{-1 + x^2(u_1) - \dot{x}^2(u_1)}}.$$

Logo $k_1 = k_2$ se e somente se $x(u_1)\ddot{x}(u_1) - \dot{x}^2(u_1) = 1, \forall u_1$.

As soluções desta equação são do tipo :

$$x(u_1) = k \cosh\left(\frac{1}{k}u_1 + c\right), \quad k \neq 0$$

Portanto, podemos por exemplo, tomar

$$g(u_1, u_2) = (\cosh u_1 \cosh u_2, \cosh u_1 \sinh u_2, 0, \sinh u_1)$$

O referencial $E_i = \frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \left\| \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\|^{-1}, T_j = \frac{\partial x}{\partial u_j} \cdot \left\| \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\|^{-1}, i = 1, 2, \dots, n-2, j = 1, 2$ nos fornece $A_N(E_i) = \lambda E_i, A_N(T_j) = \delta_j T_j$ onde

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0 \quad (k_1 = k_2 = 0)$$

Defina $\beta_j = c_j(\lambda - \delta_j) = c_j\lambda$, onde por (3.2.20) (2), temos

$$(c_1(u_1))^2 = k \frac{\cosh^2 u_1}{d - \cosh^2 u_1}, \quad c_2 = -\frac{k}{c_1}, \quad k = \frac{1}{\lambda^2 - 1}$$

e $0 < d < 1$ é uma constante. Repetindo-se o argumento usado no lema (3.2.2), concluímos que existe a imersão em R^{n+2} .

(ii) Se $g : L \rightarrow H^3$ é uma superfície de rotação esférica, vimos acima que g pode ser parametrizada por

$$g(u_1, u_2) = (x(u_1) \cos u_2, x(u_1) \sin u_2, y(u_1), z(u_1))$$

onde $x^2(u_1) + y^2(u_1) - z^2(u_1) = -1$ e $\dot{x}^2(u_1) + \dot{y}^2(u_1) - \dot{z}^2(u_1) = 1$.

Calculando-se, obtemos

$$E(u_1, u_2) = 1 \quad \text{e} \quad G(u_1, u_2) = x^2(u_1).$$

Novamente fazemos a separação em dois casos.

PRIMEIRO CASO: Supondo que g não admita um subconjunto aberto de pontos umbílicos, aplicamos o teorema (3.2.8) tomando-se $b(u_2) = b_0$ (constante positiva) e $a(u_1) = \frac{b_0}{b_0 - x^2(u_1)}$.

SEGUNDO CASO: Se g for uma *superfície de rotação esférica umbílica* em H^3 , pela mesma proposição citada de $[CD]_2$, temos neste caso, que

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1 + x^2(u_1) - \dot{x}^2(u_1)}}{x(u_1)} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\ddot{x}(u_1) - x(u_1)}{\sqrt{1 + x^2(u_1) - \dot{x}^2(u_1)}}$$

Portanto $k_1 = k_2$ se e somente se $x(u_1)\ddot{x}(u_1) - \dot{x}^2(u_1) = -1$.

As soluções desta equação diferencial são do tipo

$$x(u_1) = \begin{cases} k \cos\left(\frac{1}{k}u_1 + c\right) \\ k \sin\left(\frac{1}{k}u_1 + c\right) \\ k \sinh\left(\pm \frac{1}{k}u_1 + c\right) \\ \pm u_1 + c \end{cases}$$

Podemos, por exemplo, tomar $x(u_1) = \cos u_1$. Por $[CD]_2$, isto basta para conhecermos a g . Repetimos os argumentos usados no segundo caso de (i) e concluímos que existe a imersão em R^{n+2} .

(iii) Se $g : L \rightarrow H^3$ é uma *superfície de rotação parabólica*, vimos acima que g pode ser parametrizada por

$$g(u_1, u_2) = \left(x(u_1), x(u_1) \cdot u_2, -\frac{1 + z^2(u_1) + x^2(u_1)u_2^2}{2x(u_1)}, z(u_1) \right),$$

onde $2x(u_1)y(u_1) + z^2(u_1) = -1$ e $2\dot{x}(u_1)\dot{y}(u_1) + \dot{z}^2(u_1) = 1$.

Fazendo-se os cálculos, obtemos

$$E(u_1, u_2) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_1}, \frac{\partial g}{\partial u_1} \right\rangle_{-1} = \frac{\dot{x}^2 + (\dot{x}z - x\dot{z})^2}{x^2} \quad (= E(u_1)),$$

$$G(u_1, u_2) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_2}, \frac{\partial g}{\partial u_2} \right\rangle_{-1} = x^2(u_1) \quad (= G(u_1)).$$

PRIMEIRO CASO: Suponhamos que g não admita um subconjunto aberto de pontos umbílicos. Tomamos

$$\alpha(u_1) = \frac{\dot{x}^2(u_1) + (\dot{x}(u_1)z(u_1) - x(u_1)\dot{z}(u_1))^2}{x^2(u_1)},$$

$$b(u_2) = b_0 \text{ (constante)} > x^2(u_1) \quad \text{e} \quad a(u_1) = \frac{b_0 \alpha(u_1)}{b_0 - x^2(u_1)}.$$

SEGUNDO CASO: Se g é uma superfície de rotação parabólica umbílica em $\mathbb{H}^3$, temos

$$k_1 = -\frac{\sqrt{x^2(u_1) - \dot{x}^2(u_1)}}{x(u_1)} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\ddot{x}(u_1) - x(u_1)}{\sqrt{x^2(u_1) - \dot{x}^2(u_1)}}$$

Portanto $k_1 = k_2$ se e somente se $x(u_1)\ddot{x}(u_1) - \dot{x}^2(u_1) = 0$.

As soluções desta equação diferencial são do tipo

$$x(u_1) = ce^{ku_1}$$

onde c e k são constantes reais (tomamos $c > 0$ pois queremos $x(u_1) > 0$). Tomando-se, por exemplo, $x(u_1) = e^{u_1}$, podemos parametrizar tal g por

$$g(u_1, u_2) = \left(e^{u_1}, u_2 e^{u_1}, -\frac{1 + u_2^2 e^{2u_1}}{2e^{u_1}}, 0 \right)$$

Novamente, repetimos os argumentos usados no segundo caso de (i) e concluímos que existe a imersão em $\mathbb{R}^{n+2}$.

(b) Seja $g : L^2 \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ um cone, como na definição (3.2.21), dado por

$$g(s, t) = \cosh t \gamma(s) + \sinh t v(s)$$

Fazendo-se os cálculos, obtemos

$$E(s, t) = (\cosh t + \rho \sinh t)^2 \quad \text{e} \quad G(s, t) = 1,$$

onde lembramos que neste caso, ρ é uma constante menor que -1 ou maior que 1 .

Para simplificar, chamemos $\delta(t) = \cosh t + \rho \sinh t$.

Vimos em (2.2.6), que a segunda forma fundamental de uma superfície regrada em $\mathbb{H}^{n+1}$ é tal que

$$\alpha(b_i, b_1) = \frac{1}{\delta(t)} \ddot{\gamma}^\perp; \quad \alpha(b_i, b_j) = 0, \quad i \neq j$$

onde $b_1 = \frac{\partial g}{\partial s} \cdot \left\| \frac{\partial g}{\partial s} \right\|^{-1}$, $b_2 = \frac{\partial g}{\partial t}$ e $\perp$ representa, neste caso, a componente normal a $g(L^2)$ em $\mathbb{H}^{n+1}$.

Deste modo os pontos umbílicos de g são os pontos em que $\ddot{\gamma}^\perp = 0$. Logo

PRIMEIRO CASO: Se $\ddot{\gamma}^\perp$ não se anula em um intervalo aberto, podemos aplicar o teorema (3.2.8) num aberto denso de L^2 .

Tomamos então

$$a(s) = a_0 \text{ (constante)} > \delta^2(t)$$

$$b(t) = \frac{a_0}{a_0 - \delta^2(t)}$$

e facilmente verificamos (3.2.9). Portanto existe a imersão em $\mathbb{R}^{n+2}$.

SEGUNDO CASO: Se $\ddot{\gamma}^\perp \equiv 0$, usamos os mesmos argumentos de (a)-(i) – segundo caso, para concluir que M^n pode ser isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+2}$, com $R^\perp \equiv 0$.

(c) Se $g : L^2 \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ é um produto de curvas, pela definição (3.2.22), temos

$$g(s, t) = \phi(\gamma(s), \delta(t))$$

onde $\gamma(s) \in \mathbb{H}^p$, $\delta(t) \in \mathbb{H}^q$, $p + q = n + 1$.

Fazendo os cálculos, mostra-se

$$\begin{aligned} E(s, t) &= \delta_0^2(t) \\ G(s, t) &= 1 \end{aligned}$$

PRIMEIRO CASO: *Se g não admite um subconjunto aberto de pontos umbílicos.* Neste caso estamos com um subconjunto aberto e denso U de L onde $k_1 \neq k_2$ e portanto $\delta_1 \neq \delta_2$.

Tomando-se

$$a(s) = a_0 \text{ (constante)}$$

$$b(t) = \frac{b_0}{b_0 - \delta_0^2(t)}$$

vemos que (3.2.9) se verifica em U . Por continuidade se verifica em todo L e pelo teorema (3.2.8) chegamos à conclusão procurada.

SEGUNDO CASO: Se g é umbílica, procedemos como no segundo caso de (a)-(i).

□

Ainda não conseguimos obter em nosso estudo, quando substituímos $\mathbb{R}^{n+1}$ por H^{n+1} e S_c^{n+2} por $\mathbb{R}^{n+2}$, um teorema análogo ao seguinte teorema de [AD].

Teorema Seja $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, n \geq 5$ uma 2-SPES de tipo II. Então M^n pode ser localmente isometricamente imersa em S_c^{n+2} com $R^\perp \equiv 0$, para algum $c > 0$, se e somente se L^2 é parte de um cone ou um cilindro generalizado em $\mathbb{R}^{n+1}$.

No entanto, acreditamos que com um pouco mais de tempo e paciência, poderá ser obtido algum resultado nesta direção.

Bibliografia

- [AD] Asperti A. C. and Dajczer M., *N-Dimensional submanifolds of R^{N+1} and S^{N+2}* , Illinois J of Math. vol 28 ($n \geq 4$) (1984), pp 621-645.
- [C] Carmo, M. P. do, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.
- [CD] ₁ Carmo, M. P. do and Dajczer, M., *Riemannian metrics induced by two immersions*, Proc. Amer. Math. Society, vol 86 (1982), pp 115-119.
- [CD] ₂ Carmo, M. P. do and Dajczer, M., *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Transactions of the A.M.S.(2), vol 277 (1983), pp 685-709.
- [CDM] Carmo, M. do, Dajczer, M. and Mercuri, F., *Compact conformally flat hypersurfaces*, Transactions of the A.M.S. vol 288 ($n \geq 1$) (1985), pp 189-203.
- [CR] Cecil, T. and Ryan, P., *Focal sets of submanifolds*, Pacific J. Math, vol 78 (1978), pp 27-39.
- [DG] Dajczer, M. and Gromoll, D., *Gauss parametrizations and rigidity aspects of submanifolds*, J. Differential Geometry, vol 22 (1985), pp 1-12.
- [E] Eisenhart, L. P., *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Boston : Ginn 1909.
- [N] Nomizu, K., *Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space*, Math. Ann. 205 (1973), pp 181-192.
- [R] Reckziegel, H., *Completeness of curvature surfaces of an isometric immersion*, J. Differential Geometry, vol 14 (1979), pp 7-20.

- [Sp] Spivak, M., *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc. Boston, Massachusetts, vol IV (1970).
- [T] Terng, C. L., *Submanifolds with flat normal bundle*, Math. Ann. 277 (1987), pp 95-111.