INTEGRAÇÃO VETORIAL SEGUNDO RIEMANN
E DARBOUX EM RELAÇÃO A UMA FUNÇÃO
DE VARIAÇÃO LIMITADA

Ana Catarina Pontone Hellmeister

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. GALDINO CESAR DA ROCHA FILHO

São Paulo, outubro de 1987

AGRADECIMENTOS

Meu agradecimento primeiro é para Galdino Cesar da Rocha Filho, meu orientador, cuja assistência foi essencial para a realização deste trabalho.

À Marina Pizzotti amiga e companheira de estudos meu profundo agradecimento pelo interesse que sempre dispensou às minhas exposições, pela leitura de parte deste trabalho e por suas proveitosas sugestões.

À Maria Ignez de Souza V. Diniz agradeço pelo incentivo, pela leitura de parte deste trabalho e por sua contribuição dando valiosas sugestões.

Minha gratidão à minha família e aos meus muito queridos amigos do IME pela confiança e apoio que nunca me negaram.

Agradeço a Izilda Maria Fischer, pelo excelente trabalho de datilografia.

Ana Catarina

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
NOTAÇÕES	v
CAPÍTULO I - RESULTADOS GERAIS DA α , α_C , α_S e $\hat{\alpha}$ -INTEGRAÇÃO SEGUNDO RIEMANN E DARBOUX	
I.1 - Resultados e Conceitos Básicos	1
I.2 - Exemplos Básicos	49
I.3 - Relações entre as α, α_C e α_S -integrabilidade	66
CAPÍTULO II - REFLEXIVIDADE, PROPRIEDADE DE SCHUR E HEREDITARIEDADE $\ell_1(\mathbb{N})$ LIGADOS A α -INTEGRAÇÃO SEGUNDO RIEMANN E DARBOUX. OS SPREADING MODELS E AS SUPER PROPRIEDADES $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ E $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$	
II.1 - Reflexividade e Caracterização das p-somas ($1 \leq p \leq \infty$ ou $p = 0$) em Relação a $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$	87
II.2 - O Espaço de Haydon. Propriedade de Schur e Hereditariedade $\ell_1(\mathbb{N})$	107
II.3 - Noções sobre a técnica dos spreading models e aplicações a α -integração	124
II.4 - As Super Propriedades $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ e $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$...	147
CAPÍTULO III - CARACTERIZAÇÃO DE ESPAÇOS DE BANACH X, PERTENCENTES A DETERMINADAS CLASSES, EM RELAÇÃO AO PROBLEMA $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$	
III.1 - α -Integração nos espaços de Orlicz $L_A(\mu, X)$	155
III.2 - α -Integração nos espaços duais $[L_A(\mu, X)]^*$	183
III.3 - α -Integração nos espaços de Halperin-Nakano	194
III.4 - α -Integração nos espaços $C(K, X)$ e $[C(K, X)]^*$	213
III.5 - α -Integração nos espaços $L(X, Y)$	223
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	237

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é estudar condições sobre um espaço de Banach X para que a classe $R_\alpha(X)$, das funções $f : [0,1] \rightarrow X$ integráveis segundo Riemann, em relação a uma função $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, de variação limitada ($\alpha \in BV[0,1]$), coincida com a classe $D_\alpha(X)$, das funções $f : [0,1] \rightarrow X$ integráveis segundo Darboux, em relação a α . Em [R] nosso orientador estudou esse problema para o caso $\alpha(t)=t$. Neste trabalho, que passaremos a descrever a seguir, generalizamos para a α -integração, os resultados de [R] e fornecemos resultados e exemplos, novos, mesmo para o caso $\alpha(t)=t$.

Inicialmente obtivemos os resultados técnicos necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho e entre esses, destacamos, por sua utilidade, o resultado $R_\alpha(X) = R_{\hat{\alpha}}(X)$, para todo Banach X e toda $\alpha \in BV[0,1]$, onde $\hat{\alpha}$ denota a função variação de α .

Como a caracterização geral dos espaços de Banach Y , para os quais $D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$ está longe de ser conseguida, uma de nossas preocupações, neste trabalho, foi obter essa caracterização para Y pertencente a determinadas classes de espaços de Banach tais como os espaços de Orlicz $L_A(\mu, X)$, seus duais $[L_A(\mu, X)]^*$, os espaços $C(K, X)$ e seus duais $[C(K, X)]^*$, os espaços de Halperin-Nakano, as p -somas, $1 \leq p \leq \infty$, de espaços de Banach e os espaços $L(X, Y)$ para X e Y com base subsimétrica ou $X = C(K)$, K métrico disperso e

$Y = \ell_1(\mathbb{N})$. No estudo dessa última classe, provamos que $Z = L\left\{C(K), \ell_1(\mathbb{N})\right\}$ (que é separável) é tal que $D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ e mostramos que Z não é isomorfo a um subespaço fechado de qualquer Banach com base de Schauder incondicional. Salientamos que Z é o primeiro exemplo que conhecemos nessas condições.

Continuando no propósito da caracterização dos Banach X com $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, mostramos que na classe dos espaços de Banach com base de Schauder subsimétrica a propriedade $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ ($\alpha \in BV[0,1]$ com parte contínua não constante) é equivalente a X ser isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ e ainda equivalente a X ter a propriedade de Schur; também mostramos que, nas mesmas condições anteriores, a igualdade $D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*)$ é equivalente a X ser isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$. Mostramos, através de contra-exemplos, que esses resultados não podem ser estendidos à classe dos Banach com base de Schauder incondicional.

Além disso, examinando-se os exemplos até então estudados, conjecturou-se que se X é um Banach de dimensão infinita então não se tem simultaneamente verdadeiras as igualdades $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ e $D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*)$ ($\alpha \in BV[0,1]$ com parte contínua não constante).

Provamos que a conjectura é verdadeira para X pertencente a uma classe que contém propriamente a classe dos Banach com base incondicional, o que resolve parte significativa do problema.

Informamos que a prova que fizemos, dessa conjectura, utiliza uma condição, aqui obtida, sobre os spreading models de um Banach X , condição essa necessária mas não suficiente para se ter $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ ($\alpha \in BV[0,1]$ com parte contínua não constante).

Ainda utilizando a técnica dos spreading models, obtivemos condições necessárias e suficientes para que um Banach X satisfaça a super-propriedade $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ ou a super-propriedade $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$.

Informamos que há introduções mais detalhadas no início dos parágrafos dos capítulos que compõem este trabalho.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study Banach spaces X in which every Riemann-Stieltjes integrable function defined on the closed interval $[0,1]$ with values in X is Darboux-Stieltjes integrable.

We characterize the spaces with this property in some classes of Banach spaces, such as Banach spaces with subsymmetric Schauder basis, $L_A(\mu, X)$, $[L_A(\mu, X)]^*$, $C(K, X)$, $[C(K, X)]^*$, $L(X, Y)$ (X and Y with subsymmetric Schauder basis) and others.

We give an example of a Banach space X in which every Riemann-Stieltjes integrable function $f:[0,1] \rightarrow X$ is Darboux-Stieltjes integrable but X is not isomorphic to a subspace of any Banach space with unconditional Schauder basis.

Also, other interesting examples related to the problem are presented.

NOTAÇÕES

Vamos estabelecer as seguintes notações utilizadas no decorrer deste trabalho.

Se X é espaço de Banach, X^* denota o espaço dual. Se X e Y são espaços de Banach $L(X,Y)$ indica o espaço de Banach dos operadores $T : X \rightarrow Y$ lineares e contínuos com a norma $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$.

Se $T \in L(X,Y)$ denotaremos por T^* o operador adjunto de T .

Dada uma seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vetores de X denotaremos por $[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ o fêcho do subespaço de X , gerado pelos vetores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Se X é um espaço de seqüências de escalares, então, salvo menção em contrário, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ denotará a seqüência dos vetores que tem 1 por coordenada n -ésima e zero nas outras coordenadas, $n \in \mathbb{N}$.

Dado o intervalo $[0,1]$, subconjunto de $\mathbb{R}$, denotaremos por d uma divisão desse intervalo, isto é, $d = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ que denotaremos simplifcadamente por $d = (t_0, t_1, \dots, t_n)$. Δd significa o máx $\{t_i - t_{i-1}\}_{1 \leq i \leq n}$ e $|d| = n$. D indica o conjunto de t_0

das as divisões de $[0,1]$. Se d_1 e d_2 são elementos de D , escrevemos $d_1 \geq d_2$ para indicar que $d_2 \subseteq d_1$.

Se $f : [0,1] \rightarrow X$ é uma função denotaremos

$w(A,f)$ - oscilação da função f no conjunto A , não vazio e não unitário, contido em $[0,1]$.

$w_i(f)$ - oscilação da função f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, cujos extremos pertencem a uma divisão de $[0,1]$.

$$w(\{t\}, f) = \inf_{\delta > 0} \{w([t-\delta, t+\delta], f)\} \text{ se } t \in [0,1].$$

$$w(\{0\}, f) = \inf_{\delta > 0} \{w([0, \delta], f)\}$$

$$w(1, f) = \inf_{\delta > 0} \{w([1-\delta, 1], f)\}$$

Se I é um intervalo de $\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ denota seu interior. $\mathbb{K}$ denota o corpo dos reais ou complexos.

Como já ficou estabelecido na Introdução, se X é um espaço de banach e $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, denotaremos por $R_\alpha(X)$ e $D_\alpha(X)$ os conjuntos das funções $f : [0,1] \rightarrow X$ que são integráveis segundo Riemann e Darboux, respectivamente, em relação a α .

CAPÍTULO I

RESULTADOS GERAIS DA $\alpha, \alpha_C, \alpha_S$ E $\hat{\alpha}$ -INTEGRAÇÃO

SEGUNDO RIEMANN E DARBOUX

I.1 - RESULTADOS E CONCEITOS BÁSICOS

Neste parágrafo introduzimos a teoria da α -integrabilidade em espaços de Banach e apresentamos os conceitos e resultados básicos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Inicialmente, generalizamos para α -integração os resultados encontrados em ([R] 1.a) e mostramos em I.1.17 que, ao contrário do que ocorre para $\alpha(t) = t$, não temos necessariamente, para α qualquer, as funções Riemann-integráveis em relação a α , limitadas. Entretanto, mostramos em I.1.20 que para estudar a igualdade $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ podemos nos restringir às funções limitadas.

Em seguida, como é mais simples, tecnicamente, trabalhar com funções α crescentes, tentamos relacionar a α -integrabilidade com $\hat{\alpha}$ -integrabilidade, onde $\hat{\alpha}(t) = V_{[0,t]}^{[\alpha]}$, se $\alpha \in BV[0,1]$.

Provamos, então, em I.1.24 e I.1.31 que para qualquer espaço de Banach X tem-se:

$$D_\alpha(X) = D_{\hat{\alpha}}(X) \quad \text{e} \quad R_\alpha(X) = R_{\hat{\alpha}}(X)$$

Salientamos que em [Ho] o autor estuda a α -integração para funções $\alpha \in BV([0,1], Y)$, Y um espaço de Banach, de funções $f: [0,1] \rightarrow X$ limitadas. Nos foi comunicado pelo autor que ficara em aberto a igualdade $R_\alpha(X) = R_{\hat{\alpha}}(X)$.

I.1.1 - Definição: Se X é um espaço de Banach, dadas $f: [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é α -integrável segundo Riemann se existe

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]$$

para qualquer escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, |d|$, $d \in D$, $d = (t_0, \dots, t_{|d|})$. Nessas condições escrevemos

$$\int f \, d\alpha = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]$$

e denotamos por $R_\alpha(X)$ o conjunto das funções $f: [0,1] \rightarrow X$ que são α -integráveis segundo Riemann. Se $\alpha(t) = t$ escrevemos apenas $R(X)$.

I.1.2 - Proposição (Critério de Cauchy): Dados um espaço de Banach X , $f: [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes

(a) $f \in R_\alpha(X)$

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d_1, d_2 \in D$ com $\Delta d_1 \leq \delta$ e $\Delta d_2 \leq \delta$, então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - \sum_{j=1}^{|d_2|} f(\zeta'_j) [\alpha(t'_j) - \alpha(t'_{j-1})] \right\| < \varepsilon$$

para toda escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e $\zeta'_j \in [t'_{j-1}, t'_j]$, $i = 1, \dots, |d_1|$, $j = 1, \dots, |d_2|$, $d_1 = (t_0, \dots, t_{|d_1|})$ e $d_2 = (t'_0, \dots, t'_{|d_2|})$.

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b): imediata

(b) $\Rightarrow$ (a): basta lembrar que X é completo.

I.1.3 - Corolário: Se X é um espaço de Banach, $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in R_\alpha(X)$ e $[a,b] \subset [0,1]$ então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se d_1 e d_2 são partições de $[a,b]$ com $\Delta d_1 < \delta$ e $\Delta d_2 < \delta$ tem-se

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - \sum_{j=1}^{|d_2|} f(\zeta'_j) [\alpha(t'_j) - \alpha(t'_{j-1})] \right\| < \varepsilon, \text{ para}$$

toda escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e $\zeta'_j \in [t'_{j-1}, t'_j]$, $i = 1, \dots, |d_1|$, $j = 1, \dots, |d_2|$, $d_1 = (t_0, \dots, t_{|d_1|})$, $d_2 = (t'_0, \dots, t'_{|d_2|})$.

Prova: Imediata.

I.1.4 - Proposição: Sejam X um espaço de Banach, $f: [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f \in R_\alpha(X)$ então existe uma partição Π de $[0,1]$, $\Pi = (t_0, t_1, \dots, t_{|\Pi|})$ tal que em cada $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, |\Pi|$ tem-se f limitada ou α constante.

Prova: Se $f \in R_\alpha(X)$ por I.1.2 temos que existe $\Pi \in D$, $\Pi = (t_0, \dots, t_{|\Pi|})$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|\Pi|} \left[f(\zeta_i) - f(\zeta'_i) \right] \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \right\| < 1$$

para toda escolha de $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, |\Pi|$.

Se f é ilimitada em $[t_{i_0-1}, t_{i_0}]$, escolhendo-se $\zeta_i = \zeta'_i$ se $i \neq i_0$ temos

$$\|f(\zeta_{i_0}) - f(\zeta'_{i_0})\| |\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})| < 1$$

para toda escolha de $\zeta_{i_0}, \zeta'_{i_0} \in [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$. Consequentemente temos $\alpha(t_{i_0}) = \alpha(t_{i_0-1})$, uma vez que $\|f(\zeta_{i_0}) - f(\zeta'_{i_0})\|$ assume valores tão grandes quanto se queira.

Se $t \in] t_{i_0-1}, t_{i_0} [$, temos que f é ilimitada em $[t_{i_0-1}, t]$ ou em $[t, t_{i_0}]$. Repetindo então o argumento anterior para $\Pi' = \Pi \cup \{t\}$, lembrando que $\Delta\Pi' \leq \Delta\Pi$, temos $\alpha(t) = \alpha(t_{i_0-1})$ ou $\alpha(t) = \alpha(t_{i_0})$, o que mostra que α é constante em $[t_{i_0-1}, t_{i_0}]$.

I.1.5 - Corolário: Se X é um espaço de Banach então $R(X) \subset B(X)$, sendo $B(X)$ o conjunto das funções $f : [0, 1] \rightarrow X$ que são limitadas.

I.1.6 - Exemplo: Observamos que para qualquer Banach X , $X \neq \{0\}$, existem funções $f : [0, 1] \rightarrow X$ tais que $f \in R_\alpha(X)$ se e somente se α é constante.

Basta definir $f(r_n) = nx_0$, $n \in \mathbb{N}$, onde $x_0 \in X$ com $\|x_0\| = 1$ e $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma enumeração dos racionais de $[0,1]$ e $f(t) = 0$ se $t \neq r_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que f é ilimitada em qualquer subintervalo de $[0,1]$ e então a afirmação segue de I.1.4.

I.1.7 - Proposição: Sejam X um espaço de Banach, $f : [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f \in R_{\alpha}(X)$ então α e f não têm pontos de descontinuidade em comum.

Prova: Se $t_0 \in]0,1[$ e f é descontínua em t_0 , então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $w(f, \{t_0\}) > \varepsilon_0$. Logo para qualquer $\delta > 0$, existem $\zeta_1, \zeta_2 \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ tais que $\|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)\| > \varepsilon_0$.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $\delta_0 > 0$ o número cuja existência é garantida por I.1.2 para $\varepsilon' = \varepsilon \cdot \varepsilon_0$. Logo se tomarmos $d \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta d < \delta_0$, d contém os pontos $t_0 - \delta$, $t_0 + \delta$, com $\delta < \frac{\delta_0}{4}$ e d não contém t_0 , temos $\|f(\zeta) - f(\zeta')\| |\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0 - \delta)| < \varepsilon \cdot \varepsilon_0$ para toda escolha de $\zeta, \zeta' \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, por I.1.2, com escolhas de pontos iguais nos demais intervalos de d .

Como existe uma escolha $\zeta_1, \zeta_2 \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ de modo que $\|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)\| > \varepsilon_0$ temos que para todo $\delta < \delta_0/4$ vale

$$|\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0 - \delta)| < \varepsilon \quad \text{ou}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0 - \delta)] = 0 \quad (1)$$

Por outro lado, se f é descontínua em t_0 , então f é descontínua pela direita ou pela esquerda. Suponhamos f descontínua pela direita. Então o que fizemos anteriormente vale para $d \in D$ com $\Delta d < \delta_0$ e d contendo os pontos $t_0, t_0 + \delta$ o que leva a $\|f(\zeta) - f(\zeta')\| |\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0)| < \epsilon \cdot \bar{\epsilon}_0$, para toda escolha de $\zeta, \zeta' \in [t_0, t_0 + \delta]$. Como existe uma escolha $\zeta_1, \zeta_2 \in [t_0, t_0 + \delta[$ de modo que $\|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)\| > \bar{\epsilon}_0$ temos que para todo $\delta < \delta_0/4$ vale $|\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0)| < \epsilon$ ou

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0)] = 0 \quad (2)$$

(1) e (2) mostram que $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0)$ ou α é contínua em t_0 .

Se f é descontínua em t_0 pela esquerda, o argumento é análogo.

Se f é descontínua em $t_0 = 0$ ou $t_0 = 1$ então o é à direita em $t_0 = 0$ e à esquerda em $t_0 = 1$ e então o que fizemos mostra que α é contínua à direita em $t_0 = 0$ e à esquerda em $t_0 = 1$.

I.1.8 - Proposição: Sejam X e Y espaços de Banach, $f: [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Então temos:

(a) Se $f \in R_\alpha(X)$ e $u \in L(X, Y)$ então $(u \circ f) \in R_\alpha(Y)$

$$\text{e } \int (u \circ f) d\alpha = u \left(\int f d\alpha \right)$$

(b) Se $u \in L(X, Y)$ é um isomorfismo, são equivalentes:

$$(i) \quad f \in R_\alpha(X)$$

$$(ii) \quad (u \circ f) \in R_\alpha(Y)$$

(c) Se $\{X_i\}_{i=1}^n$ são espaços de Banach, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ e $p_i: X \rightarrow X_i$, definida por $p_i(x) = x_i$, $i=1, \dots, n$ se $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ são equivalentes:

$$(i) \quad f \in R_\alpha(X)$$

$$(ii) \quad (p_i \circ f) \in R_\alpha(X_i) \text{ para todo } i=1, \dots, n.$$

$$\text{Nessas condições vale } \int f d\alpha = \left(\int (p_i \circ f) d\alpha \right)_{i=1}^n$$

Prova:

(a) Se $u = 0$ nada há a provar.

Se $u \neq 0$ dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que se $d \in D$,

$d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ com $\Delta d < \delta$ temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - \int f d\alpha \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\|u\|} \text{ para toda}$$

escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$. Então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} (u \circ f)(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - u\left(\int f d\alpha\right) \right\| \leq \epsilon$$

para toda escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$ o que mostra que $u \circ f \in R_\alpha(Y)$ e que $\int (u \circ f) d\alpha = u\left(\int f d\alpha\right)$.

(b) Conseqüência de (a).

(c) (i) $\Rightarrow$ (ii): conseqüência de (a), fazendo $u = p_i$, $i=1, \dots, n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Consideremos em $X = \prod_{i=1}^n X_i$ a norma

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|. \text{ Dado } \epsilon > 0, \text{ se-}$$

ja $\delta > 0$ tal que se $d \in D$ com $\Delta d < \delta$ temos:

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{j=1}^{|d|} (p_i \circ f)(\zeta_j) [\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] - \int (p_i \circ f) d\alpha \right\| \leq \epsilon$$

para toda escolha de $\zeta_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $j=1, \dots, |d|$. Então:

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d|} f(\zeta_j) [\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] - \left(\int (p_i \circ f) d\alpha \right)_{i=1}^n \right\| \leq \epsilon$$

para toda escolha de $\zeta_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $j=1, \dots, |d|$ o que mostra que $f \in R_\alpha(X)$ e

$$\int f d\alpha = \left(\int (p_i \circ f) d\alpha \right)_{i=1}^n$$

I.1.9 - Definição: Sejam X um espaço de Banach, $f : [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é α -integrável segundo Darboux se

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = 0$$

onde $w_i(f)$ é a oscilação de f em $[t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$,
 $d = (t_0, \dots, t_{|d|})$.

Denotaremos por $D_\alpha(X)$ o conjunto de todas as funções $f : [0,1] \rightarrow X$ que são α -integráveis segundo Darboux.

Se $\alpha(t) = t$ escrevemos apenas $D(X)$.

Para demonstrar, para a α -integração segundo Darboux a proposição análoga a I.1.8 (que será o resultado I.1.11) vamos usar uma modificação do critério de Cauchy (I.1.2) que enunciamos e provamos a seguir.

I.1.10 - Proposição (critério de Cauchy modificado): Se X é um espaço de Banach, $f : [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, são equivalentes:

(a) $f \in R_\alpha(X)$

(b) para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d, \bar{d} \in D$, $\bar{d} \geq d$ e $\Delta d < \delta$ vale:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|\bar{d}|} f(\bar{\zeta}_i) [\alpha(\bar{t}_i) - \alpha(\bar{t}_{i-1})] - \sum_{j=1}^{|d|} f(\zeta_j) [\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] \right\| < \varepsilon$$

para toda escolha de $\bar{\zeta}_i \in [\bar{t}_{i-1}, \bar{t}_i]$, $\zeta_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $i=1, \dots, |\bar{d}|$, $j=1, \dots, |d|$, $d=(t_0, \dots, t_{|d|})$, $\bar{d}=(\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_{|\bar{d}|})$.

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b): é consequência de I.1.2 lembrando que se $\bar{d} \geq d$ então $\Delta \bar{d} \leq \Delta d$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta > 0$ dado por (b) para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Se $d_1, d_2 \in D$, $d_1 = (t_0, \dots, t_{|d_1|})$, $d_2 = (t'_0, \dots, t'_{|d_2|})$ com $\Delta d_1 < \delta$ e $\Delta d_2 < \delta$ seja $d = d_1 \cup d_2$, $d=(t''_0, \dots, t''_{|d|})$ e então teremos

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - \sum_{j=1}^{|d_2|} f(\zeta'_j) [\alpha(t'_j) - \alpha(t'_{j-1})] \right\| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - \sum_{k=1}^{|d|} f(\zeta''_k) [\alpha(t''_k) - \alpha(t''_{k-1})] \right\| + \\ & + \left\| \sum_{k=1}^{|d|} f(\zeta''_k) [\alpha(t''_k) - \alpha(t''_{k-1})] - \sum_{j=1}^{|d_2|} f(\zeta'_j) [\alpha(t'_j) - \alpha(t'_{j-1})] \right\| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para toda escolha de } \zeta_i \in [t_{i-1}, t_i], \end{aligned}$$

$i=1, \dots, |d_1|$, $\zeta_j' \in [t_{j-1}', t_j']$, $j=1, \dots, |d_2|$ e $\zeta_k'' \in [t_{k-1}'', t_k'']$,
 $k=1, \dots, |d|$.

Logo $f \in R_\alpha(X)$ por I.1.2.

I.1.11 - Proposição: Sejam X e Y espaços de Banach, $f: [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Então temos:

(a) $D_\alpha(X) \subset R_\alpha(X)$ (portanto tem sentido o símbolo $\int f d\alpha$ para $f \in D_\alpha(X)$).

(b) Se $f \in D_\alpha(X)$ e $u \in L(X,Y)$ então $(u \circ f) \in D_\alpha(Y)$.

(c) Se $u \in L(X,Y)$ é um isomorfismo são equivalentes:

(i) $f \in D_\alpha(X)$

(ii) $(u \circ f) \in D_\alpha(Y)$

(d) Se $\{X_i\}_{i=1}^n$ são espaços de Banach, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ e $p_i(x) = x_i$, se $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $i=1, \dots, n$, são equivalentes:

(i) $f \in D_\alpha(X)$

(ii) $(p_i \circ f) \in D_\alpha(X_i)$ para todo $i=1, \dots, n$.

Nessas condições temos $\int f d\alpha = \left[\int (p_i \circ f) d\alpha \right]_{i=1}^n$

Prova:

(a) Dada $f \in D_\alpha(X)$ e dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| < \varepsilon, \text{ para toda } d \in D, d=(t_0, \dots, t_{|d|})$$

com $\Delta d < \delta$.

se $\bar{d} \in D$, $\bar{d} \geq d$, $\bar{d} = (\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_{|\bar{d}|})$ temos

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^{|\bar{d}|} f(\bar{\zeta}_j) [\alpha(\bar{t}_j) - \alpha(\bar{t}_{j-1})] - \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| = \\ & = \left\| \sum_{j=1}^{|\bar{d}|} f(\bar{\zeta}_j) [\alpha(\bar{t}_j) - \alpha(\bar{t}_{j-1})] - \sum_{i=1}^{|\bar{d}|} f(\zeta_{ij}) [\alpha(\bar{t}_j) - \alpha(\bar{t}_{j-1})] \right\|, \end{aligned}$$

onde $\zeta_{ij} = \zeta_i$ se $[t_{i-1}, t_i] \supset [\bar{t}_{j-1}, \bar{t}_j]$.

Se $A_i = \{j : 1 \leq j \leq |\bar{d}| \text{ e } [\bar{t}_{j-1}, \bar{t}_j] \subset [t_{i-1}, t_i]\}$,

$i=1, \dots, |d|$, temos então $\left\| \sum_{j=1}^{|\bar{d}|} [f(\bar{\zeta}_j) - f(\zeta_{ij})] [\alpha(\bar{t}_j) - \alpha(\bar{t}_{j-1})] \right\| \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \sum_{j \in A_i} [\alpha(\bar{t}_j) - \alpha(\bar{t}_{j-1})] \right| = \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Então I.1.10 garante que $f \in R_\alpha(X)$.

(b) Se $u = 0$ nada há a provar.

Se $u \neq 0$ e $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ temos

$$w_i(u \circ f) = \sup_{\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]} \left\| (u \circ f)(\zeta_i) - (u \circ f)(\zeta'_i) \right\| \leq \|u\| w_i(f),$$

$i=1, \dots, |d|$.

Logo dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que se $d \in D$ com $\Delta d < \delta$ tem-se:

$$\sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| \leq \frac{\epsilon}{\|u\|}$$

Então

$$\sum_{i=1}^{|d|} w_i(u \circ f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| \leq \|u\| \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| < \epsilon.$$

(c) Consequência imediata de (b).

(d) (i) $\Rightarrow$ (ii) : imediato por (b) fazendo $u = p_i$, $i=1, \dots, n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Em $X = \prod_{i=1}^n X_i$ consideremos a norma

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|. \quad \text{Então se } d \in D,$$

$d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ temos $w_j(f) = \sup_{1 \leq i \leq n} w_j(p_i \circ f)$, $j=1, \dots, |d|$.

Logo dado $\varepsilon > 0$ se $\delta > 0$ é tal que se $d \in D$ com $\Delta d < \delta$

vale

$$\sum_{j=1}^{|d|} w_j (p_i \circ f) \left| \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{teremos}$$

$$\sum_{j=1}^{|d|} w_j(f) \left| \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \right| = \sum_{j=1}^{|d|} \sup_{1 \leq i \leq n} w_j(p_i \circ f) \left| \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{|d|} \left(\sum_{i=1}^n w_j(p_i \circ f) \right) \left| \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \right| =$$

$$\sum_{j=1}^{|d|} \sum_{i=1}^n \left| \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \right| w_j(p_i \circ f) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{|d|} w_j(p_i \circ f) \left| \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \right| < \varepsilon$$

o que mostra que $f \in D_\alpha(X)$, lembrando que em X todas as normas (produto) são equivalentes e usando (b) para a função identidade.

A última afirmação decorre de I.1.8 (c).

I.1.12 - Proposição: Se X é um espaço de Banach e $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ então

$D_\alpha(X) = R_\alpha(X) \Leftrightarrow D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$, para todo espaço de Banach Y isomorfo a um subespaço fechado de X .

Prova: I.1.8 (b) e I.1.11 (a) e (c).

I.1.13 - Proposição: Se $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ são verdadeiras as afirmações

(a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então $D_\alpha(\mathbb{K}) = R_\alpha(\mathbb{K})$.

(b) Se X é um espaço de Banach de dimensão finita então
 $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$.

Prova:

(a) Suponhamos primeiramente que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se $f \in R_\alpha(\mathbb{R})$, por I.1.2, dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ com $\Delta d < \delta$ tem-se:

$$\left| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right| < \varepsilon \quad \text{para}$$

quaisquer $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$.

Trocando-se ζ_i por ζ'_i , se necessário, teremos

$$[f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \geq 0 \quad \text{para todo } i=1, \dots, |d|.$$

$$\text{Logo } \sum_{i=1}^{|d|} |f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)| |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| < \varepsilon \text{ para quais}$$

quer $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$ ou $\sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| \leq \varepsilon$

o que mostra que $f \in D_\alpha(\mathbb{R})$. De I.1.11(a) vem que $D_\alpha(\mathbb{R}) = R_\alpha(\mathbb{R})$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $f \in R_\alpha(\mathbb{C})$ sejam f_1 e f_2 as partes real e imaginária de f , $f = f_1 + i f_2$.

Temos então $D_\alpha(\mathbb{C}) = R_\alpha(\mathbb{C})$ uma vez que

$$f \in D_\alpha(\mathbb{C}) \Leftrightarrow f_i \in D_\alpha(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2 \quad \text{e}$$

$$f \in R_\alpha(\mathbb{C}) \Leftrightarrow f_i \in R_\alpha(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2.$$

(b) Se X é um espaço de Banach de dimensão finita então X é isomorfo a $\mathbb{K}^n$, n é a dimensão de X .

Se $u : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ é um isomorfismo temos, usando I.1.8 (b), (c) e I.1.11 (c), (d), o seguinte:

$$f \in R_\alpha(X) \Leftrightarrow (u \circ f) \in R_\alpha(\mathbb{K}^n) \Leftrightarrow p_i(u \circ f) \in R_\alpha(\mathbb{K}), \quad i=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow p_i(u \circ f) \in D_\alpha(\mathbb{K}), \quad i=1, \dots, n \Leftrightarrow (u \circ f) \in D_\alpha(\mathbb{K}^n) \Leftrightarrow f \in D_\alpha(X).$$

A seguir, vamos definir α -integração por refinamento de partições e vamos relacionar essa nova definição com a anterior,

com $\Delta d \rightarrow 0$, em I.1.18. Em I.1.15 exibimos dois exemplos que mostram que a hipótese de limitação imposta ($f \in B_\alpha(X)$, definido em I.1.16) para as funções $f: [0,1] \rightarrow X$ e a condição " α e f não tem pontos de descontinuidade em comum" são essenciais para a validade do resultado dado por I.1.18.

I.1.14 - Definição: Se X é um espaço de Banach, $f: [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, escrevemos

$$\lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] = I$$

$$\left(\text{ou } \lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = 0 \right)$$

se dado $\varepsilon > 0$ existe $d_\varepsilon \in D$ tal que para toda $d \in D$, $d \geq d_\varepsilon$ temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - I \right\| < \varepsilon$$

$$\left(\text{ou } \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| < \varepsilon \right)$$

para toda escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$, $d=(t_0, \dots, t_{|d|})$.

I.1.15 - Exemplos: Com a notação de I.1.14, é claro que se $f \in R_\alpha(X)$ então existe I e $I = \int f d\alpha$ e se $f \in D_\alpha(X)$ então também é claro que

$$\lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| = 0.$$

Entretanto, pode acontecer, para qualquer Banach $X \neq \{0\}$, que existe I , mas $f \notin R_\alpha(X)$, como mostram os exemplos (a) e (b) a seguir.

(a) $f : [0,1] \rightarrow X$ definida por $f(t) = 0$ se $0 \leq t < \frac{1}{2}$ e $f(t) = x_0$ se $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, onde $x_0 \in X$ com $\|x_0\| = 1$.

$\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha(t) = 0$ se $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e $\alpha(t) = 1$ se $\frac{1}{2} < t \leq 1$.

É fácil verificar que existe I , como em I.1.14 e $f \notin R_\alpha(X)$. Observamos que f e α são descontínuas em $\frac{1}{2}$, sendo α descontínua à direita e f descontínua à esquerda (logo f e α não tem pontos de descontinuidade do mesmo lado).

(b) $f : [0,1] \rightarrow X$ definida por $f(t) = 0$ se $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e $f(t) = \frac{x_0}{t - \frac{1}{2}}$ se $\frac{1}{2} < t \leq 1$, onde $x_0 \in X$ com $\|x_0\| = 1$.

$\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha(t) = t$ se $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ se $\frac{1}{2} < t \leq 1$.

É fácil verificar que existe I , como em I.1.14, mas $f \notin R_\alpha(X)$, uma vez que f é ilimitada em qualquer vizinhança de $\frac{1}{2}$ e α não é constante em nenhuma vizinhança de $\frac{1}{2}$.

Observamos ainda que neste exemplo α e f não tem pontos de descontinuidade em comum, já que α é contínua, sendo o problema a ilimitação de f num ponto que é extremo de um intervalo no qual α é constante.

Considerando esse aspecto justificam-se as definições dos conjuntos a seguir.

I.1.16 - Definições: Se X é um espaço de Banach e $f : [0,1] \rightarrow X$, denotaremos por I_f o conjunto $I_f = \{t \in [0,1] : f \text{ é ilimitada em } [t-\delta, t+\delta], \forall \delta > 0\}$.

É claro que I_f é um subconjunto compacto de $[0,1]$.

Se $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ denotaremos por $B_\alpha(X)$ o conjunto

$B_\alpha(X) = \{f : [0,1] \rightarrow X : \text{existe um número finito (eventualmente zero) de subintervalos fechados de } [0,1], I_1, \dots, I_{n_f}, \text{ tais que } I_f \subset \bigcup_{k=1}^{n_f} I_k \text{ e } \alpha \text{ é constante em } I_k, k=1, \dots, n_f\}$.

I.1.17 - Proposição: Se X é um espaço de Banach e $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ então $R_\alpha(X) \subset B_\alpha(X)$ e, conseqüentemente, $D_\alpha(X) \subset B_\alpha(X)$.

Prova: Se $f \in R_\alpha(X)$, I.1.4 garante que existe um número finito de subintervalos fechados de $[0,1]$, $J_1, \dots, J_m$, nos quais f é limitada e α é constante nos intervalos complementares fechados $I_1, \dots, I_n$ (entendendo que tanto os J_i , $i=1, \dots, m$ quanto os I_k , $k=1, \dots, n$ podem ser vazios).

$$\text{Logo } I_f \subset \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Por outro lado, se $t \in I_f$, como $f \in R_\alpha(X)$ temos por I.1.2 que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, $\delta < \frac{\delta_0}{4}$ tem-se:

$\|f(\zeta) - f(t)\| |\alpha(t + \delta) - \alpha(t - \delta)| < \epsilon$, para toda escolha de $\zeta \in [t - \delta, t + \delta]$. Então temos $\alpha(t + \delta) = \alpha(t - \delta)$, para todo $\delta < \frac{\delta_0}{4}$ uma vez que $\|f(\zeta) - f(t)\|$ assume valores tão grandes quanto se queira.

Logo se $t \in I_f$ é tal que $t \in \partial I_{k_0}$, $1 \leq k_0 \leq n$ temos α constante em $I_{k_0} \cup [t, t + \delta]$ ou $I_{k_0} \cup [t - \delta, t]$ para $\delta < \frac{\delta_0}{4}$. Portanto tomando-se nesse caso, $I'_{k_0} = I_{k_0} \cup [t - \delta, t]$ ou $I'_{k_0} = I_{k_0} \cup [t, t + \delta]$ teremos $t \in \overset{\circ}{I}_{k_0}$, com α constante em I'_{k_0} o que prova a proposição.

I.1.18 - Proposição: Se X é um espaço de Banach e $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, então para $f : [0,1] \rightarrow X$ temos:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad f \in R_{\alpha}(X) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i)_a \quad \lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] = \int f d\alpha \\ (ii) \quad \alpha \text{ e } f \text{ não tem pontos de descontinuidade em} \\ \quad \text{comum em }]0,1[. \\ (iii) \quad f \in B_{\alpha}(X) \end{array} \right. \\
 (b) \quad f \in D_{\alpha}(X) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i)_b \quad \lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = 0 \\ (ii) \quad \alpha \text{ e } f \text{ não tem pontos de descontinuidade em} \\ \quad \text{comum em }]0,1[. \\ (iii) \quad f \in B_{\alpha}(X). \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Prova: As implicações $f \in R_{\alpha}(X) \Rightarrow (i)_a$ e $f \in D_{\alpha}(X) \Rightarrow (i)_b$ são imediatas. As implicações $f \in R_{\alpha}(X) \Rightarrow (ii)$ e $f \in R_{\alpha}(X) \Rightarrow (iii)$ vem de I.1.7 e I.1.17. Como $D_{\alpha}(X) \subset R_{\alpha}(X)$ seguem $f \in D_{\alpha}(X) \Rightarrow (ii)$ e $f \in D_{\alpha}(X) \Rightarrow (iii)$.

Para provar as recíprocas consideremos o conjunto I dos subintervalos fechados $[c,d]$ de $[0,1]$ e as funções de intervalo

$$F_1 : I \rightarrow P(X) \text{ e } F_2 : I \rightarrow P(\mathbb{R}) \text{ definidas por}$$

$$F_1([c,d]) = \{f(\zeta)[\alpha(d) - \alpha(c)] , \zeta \in [c,d]\}$$

$$F_2([c,d]) = \{w(f,[c,d])|\alpha(d) - \alpha(c)|\}.$$

Lembramos que uma função de intervalo F é dita pseudo-aditiva em $t_0 \in]0,1[$ se

$$(1) \quad \lim_{\substack{(t',t'') \rightarrow (0,0) \\ t' \geq 0, t'' \geq 0}} \{F([t_0-t', t_0+t'']) - F([t_0-t', t_0]) - F([t_0, t_0+t''])\} = 0$$

Por ([R] 1.b.10) teremos $[(i)_a \text{ e } (ii)] \Rightarrow f \in R_\alpha(X)$ e

$[(i)_b \text{ e } (ii)] \Rightarrow f \in D_\alpha(X)$ se mostrarmos que

$(ii) \Rightarrow F_1 \text{ e } F_2$ pseudo-aditivas em todo $t_0 \in]0,1[$.

Seja então $t_0 \in]0,1[$. Temos

$$\begin{aligned} & F_1([t_0-t', t_0+t'']) - F_1([t_0-t', t_0]) - F_1([t_0, t_0+t'']) = \\ & = \left\{ f(\zeta)[\alpha(t_0+t'') - \alpha(t_0-t')] - f(\zeta')[\alpha(t_0) - \alpha(t_0-t')] - \right. \\ & \quad \left. - f(\zeta'')[\alpha(t_0+t'') - \alpha(t_0)] , \text{ com } \zeta \in [t_0-t', t_0+t''] , \right. \\ & \quad \left. \zeta' \in [t_0-t', t_0] \text{ e } \zeta'' \in [t_0, t_0+t''] \right\} \end{aligned}$$

Se $t_0 \in I_f$, como $f \in B_\alpha(X)$ temos que existe $\delta > 0$ tal que α é constante em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e então nada há a demonstrar. Se $t_0 \notin I_f$ temos que existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Logo se α é contínua em t_0 , a pseudo-aditividade de F_1 em t_0 é imediata; se α não é contínua em t_0 , temos por hipótese que f o é, logo a pseudo-aditividade de F_1 em t_0 decorre da limitação de α , observando que

$$F_1([t_0 - t', t_0 + t'']) - F_1([t_0 - t', t_0]) - F_1([t_0, t_0 + t'']) =$$

$$\left\{ \alpha(t_0 + t'') [f(\zeta) - f(\zeta'')] + \alpha(t_0 - t') [f(\zeta') - f(\zeta)] + \alpha(t_0) [f(\zeta'') - f(\zeta')] \right\},$$

com $\zeta \in [t_0 - t', t_0 + t'']$, $\zeta' \in [t_0 - t', t_0]$ e $\zeta'' \in [t_0, t_0 + t'']$.

Para F_2 a discussão é análoga.

Observação: No caso particular de $\alpha(t) = t$, não é difícil verificar que se $f : [0, 1] \rightarrow X$ é tal que existe

$$\lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) (t_i - t_{i-1}) \quad \text{ou}$$

$$\lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) (t_i - t_{i-1}) = 0$$

então $f \in B(X)$. Logo nesse caso particular ($\alpha(t) = t$) o resultado

I.1.18 fica

$$f \in R(X) \Leftrightarrow \exists \lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i)(t_i - t_{i-1}) \quad e$$

$$f \in D(X) \Leftrightarrow \exists \lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f)(t_i - t_{i-1}) = 0$$

Como afirmamos, no início desse parágrafo, vamos mostrar a seguir que para o problema $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ basta considerar funções $f : [0,1] \rightarrow X$ limitadas.

I.1.19 - Notação: Se X é um espaço de Banach e $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ as notações $D_\alpha^L(X)$ e $R_\alpha^L(X)$ indicam os subconjuntos das funções limitadas de $D_\alpha(X)$ e $R_\alpha(X)$, respectivamente.

I.1.20 - Proposição: Se X é um espaço de Banach e $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ então

$$D_\alpha(X) = R_\alpha(X) \Leftrightarrow D_\alpha^L(X) = R_\alpha^L(X)$$

Prova: A implicação direta é imediata. Resta provar a recíproca.

Dada $f \in R_\alpha(X)$ temos por I.1.17 que $f \in B_\alpha(X)$ e então vamos definir uma função limitada $\tilde{f} : [0,1] \rightarrow X$ do seguinte modo:

Se $I_1, \dots, I_n$ são os intervalos fechados da definição de $B_\alpha(X)$ (I.1.16) e $I_1 = [s_1, s_2]$, $I_2 = [s_3, s_4]$, $\dots$, $I_n = [s_{2n-1}, s_{2n}]$, como $s_i \notin I_f$, $i = 1, \dots, 2n$ temos que existe $\delta_0 > 0$ tal que f é limitada em $[s_i - \delta_0, s_i + \delta_0]$, $i = 1, \dots, 2n$ (considerando-se $s_1 - \delta_0 = s_1$ se $s_1 = 0$ e $s_{2n} + \delta_0 = 1$ se $s_{2n} = 1$). Por outro lado, é fácil verificar que f é limitada nos intervalos complementares fechados de $I_1, \dots, I_n$, a saber, $[0, s_1]$ (se $s_1 > 0$), $[s_2, s_3]$, $\dots$, $[s_{2n-2}, s_{2n-1}]$ e $[s_{2n}, 1]$ (se $s_{2n} < 1$).

Consequentemente, f é limitada em $[0, s_1 + \delta_0]$, $[s_2 - \delta_0, s_3 + \delta_0]$, $\dots$, $[s_{2n} - \delta_0, 1]$. Definimos $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow X$ por:

$\tilde{f} = f$ nos intervalos $[0, s_1 + \delta_0]$, $[s_2 - \delta_0, s_3 + \delta_0]$, $\dots$, $[s_{2n} - \delta_0, 1]$ e $\tilde{f}$ é um prolongamento linear de f nos intervalos fechados complementares.

Obviamente $\tilde{f}$ é limitada e para partições $d \in D$ com $\Delta d < \delta_0$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ temos

$$\sum_{i=1}^{|d|} \tilde{f}(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]$$

para toda escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$, o que mostra que $\tilde{f} \in R_\alpha^L(X)$ e então por hipótese $\tilde{f} \in D_\alpha^L(X)$.

Como vale

$$\sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{|d|} w_i(\tilde{f}) |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

para toda $d \in D$, $d = (t_0, \dots, t_{|d|})$ com $\Delta d < \delta_0$, segue que $f \in D_\alpha(X)$, como queríamos provar.

I.1.21 - Observação: Na demonstração da proposição anterior ficou provado que se $f \in B_\alpha(X)$ então existe $M \geq 0$ e existe $\delta_0 > 0$ tal que para toda $d \in D$ com $\Delta d < \delta_0$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$, tem-se em cada $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, |d|$, f limitada por M ou α constante.

I.1.22 - Observação: A partir daqui, vamos, sempre que for conveniente, trabalhar com funções $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada, ([Hi] II.6), denotado por $\alpha \in BV[0, 1]$, que é uma condição usual na teoria de integração, uma vez que mesmo para $X = \mathbb{R}$ temos que $\alpha \in BV[0, 1]$ é uma condição necessária e suficiente para a existência

cia de $\int f d\alpha$ [ou $f \in D_\alpha(\mathbb{R})$] para toda f contínua.

I.1.23 - Notação: Se $\alpha \in BV[0,1]$ denotaremos $\hat{\alpha}$ a função definida em $[0,1]$ por $\hat{\alpha}(t) = V_{[0,t]}[\alpha]$ que é a variação de α no intervalo $[0,t]$, se $t > 0$ e $\hat{\alpha}(0) = 0$.

Como $\hat{\alpha}$ é função crescente e limitada, podemos considerar a medida $\mu_{\hat{\alpha}}$ definida em $]a,b[$, $0 < a < b < 1$, por $\mu_{\hat{\alpha}}(]a,b[) = \hat{\alpha}(b^-) - \hat{\alpha}(a^+)$, onde $\hat{\alpha}(b^-)$ e $\hat{\alpha}(a^+)$ indicam os limites laterais usuais. De $([H_i]V)$ temos que a classe dos subconjuntos $\mu_{\hat{\alpha}}$ -mensuráveis contém a σ -álgebra de Borel e $\mu_{\hat{\alpha}}(\{a\}) = \hat{\alpha}(a^+) - \hat{\alpha}(a^-)$, se $a \in (0,1)$, $\mu_{\hat{\alpha}}(\{0\}) = \hat{\alpha}(0^+)$, $\mu_{\hat{\alpha}}(\{1\}) = \hat{\alpha}(1) - \hat{\alpha}(1^-)$.

I.1.24 - Proposição: Se X é um espaço de Banach e $\alpha \in BV[0,1]$ então $D_\alpha(X) = D_{\hat{\alpha}}(X)$.

Prova: Se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ temos

$$\sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) V_{[t_{i-1}, t_i]}[\alpha] =$$

$$\sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left(V_{[0, t_i]}[\alpha] - V_{[0, t_{i-1}]}[\alpha] \right) = \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left[\hat{\alpha}(t_i) - \hat{\alpha}(t_{i-1}) \right],$$

para toda $f : [0,1] \rightarrow X$, o que mostra que $D_{\hat{\alpha}}(X) \subset D_{\alpha}(X)$.

Suponhamos agora $f \in D_{\alpha}(X)$. Por I.1.17 temos $f \in B_{\alpha}(X)$.

Se $J_1, \dots, J_m$ são os intervalos fechados complementares dos intervalos $I_1, \dots, I_n$ da definição (I.1.16) de $B_{\alpha}(X)$ seja

$$\|f\| = \sup \{ \|f(t)\| : t \in \bigcup_{i=1}^m J_i \} < \infty.$$

É claro que basta supor $\|f\| > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $d_{\varepsilon} \in D$, d_{ε} contendo os pontos extremos dos intervalos $I_1, \dots, I_n$, tal que para toda $d \in D, d = (t_0, \dots, t_{|d|})$, $d \geq d_{\varepsilon}$ vale:

$$v[\alpha] - \sum_{i=1}^{|d|} \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{4\|f\|} \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sendo}$$

$$v[\alpha] = v_{[0,1]}[\alpha] = \hat{\alpha}(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left[\hat{\alpha}(t_i) - \hat{\alpha}(t_{i-1}) \right] &= \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left[\hat{\alpha}(t_i) - \hat{\alpha}(t_{i-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| \right] + \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) \left[\left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2\|f\| \left[v[\alpha] - \sum_{i=1}^{|d|} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \right] + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

o que mostra que $\lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) [\hat{\alpha}(t_i) - \hat{\alpha}(t_{i-1})] = 0$.

Como $f \in D_\alpha(X)$ temos por I.1.7,11 que f e α não tem pontos de descontinuidade em comum, logo f e $\hat{\alpha}$ também não os tem. Aplicando então I.1.18 vem que $f \in D_{\hat{\alpha}}(X)$, *pois que* $B_\alpha(X) = B_{\hat{\alpha}}(X)$.

I.1.25 - Proposição: Sejam X um espaço de Banach, $f : [0,1] \rightarrow X$ e $\alpha \in BV[0,1]$ não constante. Então, se Df é o conjunto dos pontos de descontinuidade de f , são equivalentes:

- (a) $f \in D_\alpha(X)$
- (b) $\begin{cases} \text{(i)} & f \in B_\alpha(X) \\ \text{(ii)} & \mu_{\hat{\alpha}}(Df) = 0 \end{cases}$

Consequentemente, se $\alpha(t) = t$ temos

$f \in D(X) \Leftrightarrow f \in B(X)$ e $\mu(Df) = 0$, μ medida de Lebesgue.

Prova: Observemos primeiramente que como $Df = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ sendo $F_n = \{t \in [0,1] : w(f, \{t\}) \geq \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \dots$, temos Df igual a uma reunião enumerável de compactos, logo Df é boreliano e então tem sentido, por I.1.23, escrever $\mu_{\hat{\alpha}}(Df)$.

Mostremos (a) $\Rightarrow$ (b).

Se $f \in D_\alpha(X)$ então $f \in B_\alpha(X)$ por I.1.17. Suponhamos

$\mu_{\hat{\alpha}}(Df) > 0$ e seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0}) > 0$.

Dado $\delta > 0$ qualquer, lembrando que o conjunto dos pontos de descontinuidade de α é no máximo enumerável, é possível obter $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$, com $\Delta d < \delta$ e tal que α é contínua em t_i , $i=1, \dots, |d|-1$ (basta tomar $d' \in D$ com $\Delta d' < \frac{\delta}{2}$ e mudar convenientemente seus pontos, se necessário).

$$\begin{aligned} \text{Se } A &= \left\{ i : 1 < i < |d| \text{ e } \mu_{\hat{\alpha}}\left([t_{i-1}, t_i] \cap F_{n_0}\right) > 0 \right\} = \\ &= \left\{ i : 1 < i < |d| \text{ e } \mu_{\hat{\alpha}}\left([t_{i-1}, t_i] \cap F_{n_0}\right) > 0 \right\} \text{ então vale} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) [\hat{\alpha}(t_i) - \hat{\alpha}(t_{i-1})] &\geq \sum_{i \in A} w_i(f) [\hat{\alpha}(t_i^-) - \hat{\alpha}(t_{i-1}^+)] + \\ &+ w_1(f) [\hat{\alpha}(t_1) - \hat{\alpha}(0)] + w_{|d|}(f) [\hat{\alpha}(1) - \hat{\alpha}(t_{|d|-1}^+)] \geq \\ &\geq \frac{1}{n_0} \sum_{i \in A} \mu_{\hat{\alpha}}([t_{i-1}, t_i]) + w_1(f) \mu_{\hat{\alpha}}([0, t_1] \cap F_{n_0}) + \\ &+ w_{|d|}(f) \mu_{\hat{\alpha}}([t_{|d|-1}, 1] \cap F_{n_0}) \geq \frac{1}{n_0} \mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0}), \text{ o que} \end{aligned}$$

mostra que $f \notin D_{\hat{\alpha}}(X)$ e então $f \notin D_{\alpha}(X)$ por I.1.24, contrariando a hipótese.

Mostremos agora (b) $\Rightarrow$ (a).

Como $f \in B_{\alpha}(X)$, seja $\tilde{f}$ a função limitada definida na prova de I.1.20, que coincide com a f exceto em intervalos fechados nos quais α é constante e seja $M = \sup_{t \in [0,1]} \|\tilde{f}(t)\|$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2V[\alpha]}$ e seja

$F_{n_0} = \left\{ t \in [0,1] : w(f, \{t\}) \geq \frac{1}{n_0} \right\}$. Como F_{n_0} é compacto e $F_{n_0} \subset Df$ temos $\mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0}) = 0$. Logo por ([Hi] V8), considerando a compacidade de F_{n_0} , temos pelo argumento usado na primeira parte que existe $d_{\varepsilon} \in D$, $d_{\varepsilon} = (s_0, s_1, \dots, s_{|d_{\varepsilon}|})$, com α contínua em s_i , $i=1, \dots, |d_{\varepsilon}|-1$, e tal que

$$\sum_{i \in A_1} \mu_{\hat{\alpha}}([s_{i-1}, s_i]) < \frac{\varepsilon}{4M}, \text{ sendo } A_1 = \{i, 1 \leq i \leq |d_{\varepsilon}| : [s_{i-1}, s_i] \cap F_{n_0} \neq \emptyset\}$$

$$[s_{i-1}, s_i] \cap F_{n_0} \neq \emptyset$$

Além disso é possível supor que d_{ε} contenha todos os pontos extremos dos intervalos $I_1, \dots, I_n$ da definição de $B_{\alpha}(X)$ (I.1.16) e também que $w_i(f) < \frac{1}{n_0}$ se $i \notin A_1$.

Então se $d \in D$, $d \geq d_\varepsilon$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ e

$$B = \{j: 1 \leq j \leq |d|, [t_{j-1}, t_j] \subset [s_{i-1}, s_i] \text{ com } i \notin A_1\} \text{ e } B_1 = \{j: 1 \leq j \leq |d|, [t_{j-1}, t_j] \subset [s_{i-1}, s_i] \text{ com } i \in A_1\}$$

temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{|d|} w_j(f) [\hat{\alpha}(t_j) - \hat{\alpha}(t_{j-1})] &\leq \frac{1}{n_0} \sum_{j \in B} [\hat{\alpha}(t_j) - \hat{\alpha}(t_{j-1})] + \\ &+ 2M \sum_{j \in B_1} [\hat{\alpha}(t_j) - \hat{\alpha}(t_{j-1})] \leq \frac{V[\alpha]}{n_0} + 2M \sum_{i \in A_1} [\hat{\alpha}(s_i) - \hat{\alpha}(s_{i-1})] = \\ &= \frac{V[\alpha]}{n_0} + 2M \sum_{i \in A_1} \mu_{\hat{\alpha}}([s_{i-1}, s_i]) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Além disso, se f é descontínua em $t_0 \in [0, 1]$, a hipótese $\mu_{\hat{\alpha}}(Df) = 0$ implica em $\mu_{\hat{\alpha}}\{t_0\} = \hat{\alpha}(t_0^+) - \hat{\alpha}(t_0^-) = 0$ [$\hat{\alpha}(0^-) = \hat{\alpha}(0)$ e $\hat{\alpha}(1^+) = \hat{\alpha}(1)$] o que mostra que $\hat{\alpha}$ é contínua em t_0 , uma vez que é crescente.

Logo I.1.18 mostra que $f \in D_{\hat{\alpha}}(X)$ ou $f \in D_{\alpha}(X)$ por I.1.24.

I.1.26 - Observação: Para a validade da proposição anterior, I.1.25, é essencial que a definição de $f \in D_{\alpha}(X)$ (I.1.9) seja por limite da norma das partições tendendo a zero (e isso foi fortemente usado na demonstração). Se definíssemos $f \in D_{\alpha}(X)$ por refina-

mento (I.1.14) poderíamos ter $f : [0,1] \rightarrow X$ com $\mu_{\hat{\alpha}}(Df) > 0$ e $f \in D_{\alpha}(X)$ como acontece no exemplo I.1.15 (a).

Também seria possível obter $f \in D_{\alpha}(X)$ com $f \notin B_{\alpha}(X)$ como acontece no exemplo I.1.15 (b).

A seguir vamos provar alguns resultados técnicos que serão necessários para obter um critério de α -integrabilidade (I.1.29) mais simples que os obtidos anteriormente (I.1.2,10). Usando esse critério é possível provar que $R_{\alpha}(X) = R_{\hat{\alpha}}(X)$ (teorema I.1.31) para toda $\alpha \in BV[0,1]$ e todo espaço de Banach X .

Nossa demonstração do critério I.1.29, como mostram o lema I.1.27 e seu corolário, é baseada no conceito de convexidade.

I.1.27 - Lema: Sejam $d_1, d_2 \in D$ com $d_2 \geq d_1$, $d_1 = (t_0, t_1, \dots, t_{|d_1|})$, $d_2 = (s_0, s_1, \dots, s_{|d_2|})$, $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ crescente, X um espaço de Banach e $f : [0,1] \rightarrow X$. Então para toda escolha de $\zeta_j \in [s_{j-1}, s_j]$, $j=1, \dots, |d_2|$ temos que a soma

$$\sum_{j=1}^{|d_2|} f(\zeta_j) [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})]$$
 pertence a envoltória convexa do conjunto das somas
$$\sum_{i=1}^{|d_1|} f(\epsilon_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]$$
 com $\epsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d_1|$.

Prova: Se $d_2 = (t_0, \dots, t_{i_0-1}, s, t_{i_0}, \dots, t_{|d_1|})$ para algum i_0 , $1 \leq i_0 \leq |d_1|$, lembrando que α é crescente, se $\alpha(t_{i_0-1}) = \alpha(t_{i_0})$ na da há a provar. Suponhamos então $\alpha(t_{i_0}) > \alpha(t_{i_0-1})$. Se $x_1, x_2, x_3 \in X$ então

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 [\alpha(s) - \alpha(t_{i_0-1})] + x_3 [\alpha(t_{i_0}) - \alpha(s)] = \\ &= x_1 \frac{\alpha(s) - \alpha(t_{i_0-1})}{\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})} + x_1 \frac{\alpha(t_{i_0}) - \alpha(s)}{\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})} + \\ &+ x_2 \frac{\alpha(s) - \alpha(t_{i_0-1})}{\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})} [\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})] + \\ &+ x_3 \frac{\alpha(t_{i_0}) - \alpha(s)}{\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})} [\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})] = \\ &= a \left\{ x_1 + x_2 [\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})] \right\} + (1-a) \left\{ x_1 + \right. \\ &\quad \left. + x_3 [\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})] \right\}, \end{aligned}$$

sendo $a = \frac{\alpha(s) - \alpha(t_{i_0-1})}{\alpha(t_{i_0}) - \alpha(t_{i_0-1})}$.

Se tomarmos $x_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{|d_1|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})],$

$x_2 = f(\zeta_{i_0})$ e $x_3 = f(\zeta_{i_0+1})$ teremos a tese para a particular d_2 fixada.

Observando-se que refinamentos de d_1 são obtidos por refinamentos sucessivos ao considerado, temos o lema provado.

I.1.28 - Corolário: Sejam $d_1, d_2 \in D$ com $d_2 \geq d_1$, $d_1 = (t_0, t_1, \dots, t_{|d_1|})$, $d_2 = (s_0, s_1, \dots, s_{|d_2|})$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ crescente, X um espaço de Banach e $f : [0, 1] \rightarrow X$. Então

(a) Escolhidos $\zeta_j \in [s_{j-1}, s_j]$, $j=1, \dots, |d_2|$ e $\epsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d_1|$, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(\epsilon_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - \sum_{j=1}^{|d_2|} f(\zeta_j) [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \right\| \leq \\ & \leq \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} [f(\epsilon_i') - f(\epsilon_i'')] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| : \right. \\ & \left. \epsilon_i', \epsilon_i'' \in [t_{i-1}, t_i], i=1, \dots, |d_1| \right\} \end{aligned}$$

(b) Escolhidos $\zeta_j, \zeta_j' \in [s_{j-1}, s_j]$, $j=1, \dots, |d_2|$, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^{|d_2|} [f(\zeta_j) - f(\zeta_j')] [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \right\| \leq \\ & \leq \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} [f(\epsilon_i) - f(\epsilon_i')] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| : \right. \\ & \left. \epsilon_i, \epsilon_i' \in [t_{i-1}, t_i], i=1, \dots, |d_1| \right\} \end{aligned}$$

Prova: Por I.1.27, basta mostrar que se A é subconjunto de X então o diâmetro da envoltória convexa de A é igual ao diâmetro de A . Se $x, y, w, z \in A$ e $a, b \in [0, 1]$ então observando que

$$\begin{aligned} [ax + (1-a)y] - [bz + (1-b)w] &= (1-b)[(x-w) + (1-a)(y-x)] + \\ &+ b[(x-z) + (1-a)(y-x)] \quad \text{temos} \end{aligned}$$

$$\| [ax + (1-a)y] - [bz + (1-b)w] \| \leq$$

$$\max \{ \|(x-w) + (1-a)(y-x)\|, \|(x-z) + (1-a)(y-x)\| \} \leq$$

$$\max \{ \|a(x-w) + (1-a)(y-x+x-w)\|, \|a(x-z) + (1-a)(y-x+x-z)\| \} \leq$$

$$\max \{ \|x-w\|, \|y-w\|, \|x-z\|, \|y-z\| \} \leq \text{diâmetro de } A.$$

Portanto, se $S_1(A) = \{ax + (1-a)y : 0 \leq a \leq 1 \text{ e } x, y \in A\}$ mostramos que diâmetro $S_1(A) \leq$ diâmetro A .

Se $S_2(A) = \{ax_1 + (1-a)y_1 : 0 \leq a \leq 1 \text{ e } x_1, y_1 \in S_1(A)\}, \dots, S_n(A) = \{ax_{n-1} + (1-a)y_{n-1} : 0 \leq a \leq 1 \text{ e } x_{n-1}, y_{n-1} \in S_{n-1}(A)\}$, vale $S_1(A) \subset S_2(A) \subset \dots$ e então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(A)$ é um conjunto convexo que está contido em qualquer outro convexo que contém A , o que mostra que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(A)$ é a envoltória convexa de A .

Por indução temos diâmetro $S_n(A) \leq \text{diâmetro } S_1(A) \leq \text{diâmetro } A$.

Passemos agora ao novo critério de α -integrabilidade, já mencionado anteriormente. Observamos que para $\alpha(t) = t$ esse critério se acha provado em ([A] T 2) seguindo uma linha de demonstração diferente da que adotamos.

I.1.29 - Proposição: Sejam $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente, X um espaço de Banach e $f : [0,1] \rightarrow X$ uma função. São equivalentes:

- (a) $f \in R_\alpha(X)$
- (b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Dado } \varepsilon > 0 \text{ existe } d_\varepsilon \in D, d_\varepsilon = (t_0, t_1, \dots, t_{|d_\varepsilon|}), \text{ tal} \\ \text{que } \left\| \sum_{i=1}^{|d_\varepsilon|} [f(\zeta_i) - f(\zeta_i')] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon \text{ para toda} \\ \text{escolha de } \zeta_i, \zeta_i' \in [t_{i-1}, t_i], i=1, \dots, |d_\varepsilon|. \\ \text{(ii) } \alpha \text{ e } f \text{ não tem pontos de descontinuidade em comum em} \\ \text{ }]0,1[. \\ \text{(iii) } f \in B_\alpha(X). \end{array} \right.$

Prova: (a) $\Rightarrow$ (b) : I.1.2, I.1.7 e I.1.17

(b) $\Rightarrow$ (a) : Dado $\varepsilon > 0$ seja $d_0 = d_{\frac{\varepsilon}{2}}$ de (b)(i), $d_0 = (t_0, t_1, \dots, t_{|d_0|})$. Se $d_1, d_2 \in D$ são tais que $d_1 \geq d_0$ e $d_2 \geq d_0$,

$d_1 = (s_0, \dots, s_{|d_1|})$, $d_2 = (s'_0, \dots, s'_{|d_2|})$, o resultado I.1.28 e (b)

(i) garantem que

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d_1|} f(\epsilon_j) [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] - \sum_{i=1}^{|d_0|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left\| \sum_{k=1}^{|d_2|} f(\epsilon'_k) [\alpha(s'_k) - \alpha(s'_{k-1})] - \sum_{i=1}^{|d_0|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para toda escolha de $\epsilon_j \in [s_{j-1}, s_j]$, $j=1, \dots, |d_1|$,

$$\epsilon'_k \in [s'_{k-1}, s'_k], \quad k=1, \dots, |d_2|, \quad \zeta_i \in [t_{i-1}, t_i], \quad i=1, \dots, |d_0|.$$

Logo temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d_1|} f(\epsilon_j) [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] - \sum_{k=1}^{|d_2|} f(\epsilon'_k) [\alpha(s'_k) - \alpha(s'_{k-1})] \right\| \leq \epsilon,$$

para toda escolha de $\epsilon_j \in [s_{j-1}, s_j]$, $j=1, \dots, |d_1|$, $\epsilon'_k \in [s'_{k-1}, s'_k]$, $k=1, \dots, |d_2|$, o que implica (análogo a I.1.2) na existência do limite

$$\lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]. \quad \text{Aplicando então o re}$$

sultado I.1.18 temos $f \in R_\alpha(X)$.

I.1.30 - Observação: O exemplo I.1.15 (a) mostra que a hipótese (b) (ii) é essencial para a validade da proposição I.1.29, uma vez que para as funções f e α exibidas no exemplo, temos (b) (i) válido e $f \notin R_\alpha(X)$. O exemplo I.1.15 (b) mostra que a condição (b) (iii) também é essencial pois para as funções f e α desse exemplo temos $f \notin B_\alpha(X)$, são válidas (b) (i) e (b) (ii) e $f \notin R_\alpha(X)$.

I.1.31 - Teorema: Se X é um espaço de Banach e $\alpha \in BV[0,1]$, então $R_\alpha(X) = R_{\hat{\alpha}}(X)$.

Prova: Mostremos primeiramente que $R_\alpha(X) \subset R_{\hat{\alpha}}(X)$.

Se $f \in R_\alpha(X)$ temos por I.1.17 que $f \in B_\alpha(X)$ e por I.1.7 que f e α não tem pontos de descontinuidade em comum. Logo $f \in B_{\hat{\alpha}}(X)$ (pois $\hat{\alpha}$ é ^{cu} nula nos intervalos nos quais α é constante) e f e $\hat{\alpha}$ não tem pontos de descontinuidade em comum. Como $\hat{\alpha}$ é crescente para mostrar que $f \in R_{\hat{\alpha}}(X)$, basta provar que f satisfaz (b) (i) de I.1.29, para $\hat{\alpha}$.

Sejam $\delta_0 > 0$ e $M > 0$ (se $M = 0$ nada há a provar) dados um I.1.21, isto é, M e δ_0 são tais que para toda partição $d \in D$ com $\Delta d < \delta_0$ tem-se, em cada intervalo determinado pelo pontos de d , f limitada por M ou α constante.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $d_0 \in D$ tal que para toda $d \in D$, $d \geq d_0$,

$d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ tem-se

$$(1) \quad v[\alpha] - \sum_{i=1}^{|d|} \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Seja $\delta_1 > 0$, cuja existência é garantida por I.1.2, tal

que se $d \in D$, $d = (t_0, \dots, t_{|d|})$ com $\Delta d < \delta_1$ então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[f(\zeta_i) - f(\zeta'_i) \right] \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para toda}$$

escolha de $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$.

Se $d_\varepsilon \in D$, $d_\varepsilon \geq d_0$, $\Delta d_\varepsilon < \delta_1$ e $\Delta d_\varepsilon < \delta_0$, $d_\varepsilon = (s_0, \dots, s_{|d_\varepsilon|})$

então

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^{|d_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \left[\hat{\alpha}(s_j) - \hat{\alpha}(s_{j-1}) \right] \right\| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{j=1}^{|d_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \left| \alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1}) \right| \right\| + \\ & + \left\| \sum_{j=1}^{|d_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \left[v[s_{j-1}, s_j][\alpha] - \left| \alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1}) \right| \right] \right\|, \end{aligned}$$

para toda escolha de $\varepsilon_j, \varepsilon'_j \in [s_{j-1}, s_j]$, $j=1, \dots, |d_\varepsilon|$.

Numa escolha arbitrariamente feita de ε_j e ε'_j em $[s_{j-1}, s_j]$, $j=1, \dots, |d_\varepsilon|$, trocando-se, se necessário, ε_j por ε'_j , $j=1, \dots, |d_\varepsilon|$, temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \left| \alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1}) \right| \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{uma vez}$$

que $\Delta d_\varepsilon < \delta_1$.

Além disso, como $\Delta d_\varepsilon < \delta_0$ e $d_\varepsilon \geq d_0$ temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \left[V_{[s_{j-1}, s_j]}[\alpha] - \left| \alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1}) \right| \right] \right\| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{|d_\varepsilon|} 2M \left[V_{[s_{j-1}, s_j]}[\alpha] - \left| \alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1}) \right| \right] \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{por (1).}$$

Conseqüentemente, f satisfaz (b)(i) de I.1.29, para $\hat{\alpha}$, como queríamos provar.

Provemos agora a inclusão contrária $R_{\hat{\alpha}}(X) \subset R_\alpha(X)$.

Se $f \in R_{\hat{\alpha}}(X)$ temos $f \in B_{\hat{\alpha}}(X)$ (I.1.7) e f e $\hat{\alpha}$ não tem pontos de descontinuidade em comum (I.1.7). Logo, $f \in B_{\alpha+\hat{\alpha}}(X)$ (pois $(\alpha+\hat{\alpha})$ é constante nos intervalos nos quais $\hat{\alpha}$ o é) e f e $(\alpha+\hat{\alpha})$ não tem pontos de descontinuidade em comum (α é contínua nos pontos

nos quais $\hat{\alpha}$ o é). Conseqüentemente, se provarmos que f satisfaz (b)(i) de I.1.29 para $(\alpha + \hat{\alpha})$ e lembrando que $(\alpha + \hat{\alpha})$ é crescente, teremos $f \in R_{\alpha + \hat{\alpha}}(X)$, por I.1.29, e então teremos $f \in R_{\alpha}(X)$.

Sejam então $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, $\delta_0 > 0$ e $M > 0$ como na primeira parte. Seja $d_0 \in D$ tal que para toda $d \in D$, $d \geq d_0$, $d = (t_0, \dots, t_{|d|})$ tem-se

$$(1') \quad V[\alpha] - \sum_{i=1}^{|d|} \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

Seja $\delta_1 > 0$, cuja existência é garantida por I.1.2, tal que se $d \in D$, $d = (t_0, \dots, t_{|d|})$, com $\Delta d < \delta_1$ então

$$(2) \quad \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[f(\zeta_i) - f(\zeta'_i) \right] \left[\hat{\alpha}(t_i) - \hat{\alpha}(t_{i-1}) \right] \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para toda escolha de $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$.

Se $d_\varepsilon \in D$, $d_\varepsilon \geq d_0$, $\Delta d_\varepsilon < \delta_0$ e $\Delta d_\varepsilon < \delta_1$, $d_\varepsilon = (s_0, \dots, s_{|d_\varepsilon|})$ denotando por $\Delta \alpha_j = \alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})$ e $\Delta \hat{\alpha}_j = \hat{\alpha}_j(s_j) - \hat{\alpha}_j(s_{j-1})$, temos para qualquer escolha de $\varepsilon_j, \varepsilon'_j \in [s_{j-1}, s_j]$, $j=1, \dots, |d_\varepsilon|$:

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{j=1}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \alpha_j \right\| = \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j \geq 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \alpha_j + \right. \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j < 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \alpha_j - \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j \geq 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \hat{\alpha}_j - \\
& - \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j < 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \hat{\alpha}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j \geq 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \hat{\alpha}_j + \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j < 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \hat{\alpha}_j \left. \right\| = \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j \geq 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \left[|\Delta \alpha_j| - \Delta \hat{\alpha}_j \right] + \right. \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j < 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \left[-|\Delta \alpha_j| + \Delta \hat{\alpha}_j \right] + \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j \geq 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \hat{\alpha}_j - \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j < 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \Delta \hat{\alpha}_j \left. \right\| \leq \\
& \leq \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j \geq 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} 2M \left| |\Delta \alpha_j| - \Delta \hat{\alpha}_j \right| + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta \alpha_j < 0}}^{|\mathbf{d}_\varepsilon|} 2M \left| -|\Delta \alpha_j| + \Delta \hat{\alpha}_j \right| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta\alpha_j \geq 0}}^{|d_\epsilon|} [f(\epsilon_j) - f(\epsilon'_j)] \Delta\hat{\alpha}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta\alpha_j < 0}}^{|d_\epsilon|} [f(\epsilon'_j) - f(\epsilon_j)] \Delta\hat{\alpha}_j \right\| \leq \\
& \stackrel{(2)}{\leq} \frac{\epsilon}{3} + 2M \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta\alpha_j \geq 0}}^{|d_\epsilon|} [\Delta\hat{\alpha}_j - |\Delta\alpha_j|] + 2M \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta\alpha_j < 0}}^{|d_\epsilon|} [\Delta\hat{\alpha}_j - |\Delta\alpha_j|] = \\
& = \frac{\epsilon}{3} + 2M \left[\sum_{j=1}^{|d_\epsilon|} \Delta\hat{\alpha}_j - \sum_{j=1}^{|d_\epsilon|} |\Delta\alpha_j| \right] = \frac{\epsilon}{3} + 2M \left[V[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=1}^{|d_\epsilon|} |\Delta\alpha_j| \right] \stackrel{(1')}{\leq} \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Logo, para qualquer escolha de $\epsilon_j, \epsilon'_j \in [s_{j-1}, s_j], j=1, \dots,$
 $|d_\epsilon|$, usando (2) e o que fizemos anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{j=1}^{|d_\epsilon|} [f(\epsilon_j) - f(\epsilon'_j)] [(\alpha + \hat{\alpha})(s_j) - (\alpha + \hat{\alpha})(s_{j-1})] \right\| \leq \\
& \leq \left\| \sum_{j=1}^{|d_\epsilon|} [f(\epsilon_j) - f(\epsilon'_j)] \Delta\hat{\alpha}_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{|d_\epsilon|} [f(\epsilon_j) - f(\epsilon'_j)] \Delta\alpha_j \right\| \leq \\
& \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon, \text{ como pretendíamos provar.}
\end{aligned}$$

A proposição a seguir melhora o critério I.1.29, no caso de α ser contínua.

I.1.32 - Proposição: Sejam X um espaço de Banach, $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua. São equivalentes

- (a) $f \in R_\alpha(X)$
- (b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } d_\varepsilon \in D, d_\varepsilon = (t_0, t_1, \dots, t_{|d_\varepsilon|}) \text{ tal} \\ \text{que} \\ \left\| \sum_{i=1}^{|d_\varepsilon|} [f(\xi_i) - f(\xi'_i)] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon, \text{ para toda} \\ \text{escolha de } \xi_i, \xi'_i \in]t_{i-1}, t_i[, i=1, \dots, |d_\varepsilon| . \\ \text{(ii) } f \in B_\alpha(X). \end{array} \right.$

(a) $\Rightarrow$ (b) : I.1.2 e I.1.17.

(b) $\Rightarrow$ (a) : É fácil ver que os resultados I.1.27 e I.1.28 são válidos (a demonstração é a mesma) se as escolhas dos pontos para se calcular f nas somas consideradas, forem feitas nos interiores dos intervalos das partições.

Logo, podemos supor a partição d_ε da condição (b)(i) tão fina quanto necessário. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos então d_ε com $\Delta d_\varepsilon < \delta_0$, sendo $\delta_0 > 0$ o número da observação I.1.21.

Vamos mostrar que, para α contínua, a hipótese (b) (i) aqui admitida implica na existência de uma partição $d \in D$ que satisfaz (b)(i) de I.1.29 e então teremos provado (b) $\Rightarrow$ (a) uma vez que (b)(ii) de I.1.29 é trivialmente satisfeita.

Seja dado $\varepsilon > 0$ e seja $d_0 = d \frac{\varepsilon}{4}$ da hipótese. Se $M > 0$ ($M=0$ nada há a provar) é o valor dado em I.1.21 e $d_0 = (t_0, t_1, \dots, t_{|d_0|})$, como α é contínua em $t_i, i=1, \dots, |d_0|$, existem s_i e $\bar{s}_i$, $\bar{s}_i^{t_i} > s_i$, $\bar{s}_i - s_i < \frac{1}{2} (t_i - t_{i-1})$, $i=1, \dots, |d_0|$, ($\bar{s}_{|d_0|} = t_{|d_0|} = 1$) e existem $\bar{s}_0 > t_0 = s_0$ com $t_0 - \bar{s}_0 < (t_1 - t_0) \frac{1}{2}$ tais que $s_{|d_0|} < 1$ com $1 - s_{|d_0|} < (1 - t_{|d_0|-1}) \frac{1}{2}$.

$$\sum_{i=0}^{|d_0|} \mu_{\hat{\alpha}}([s_i, \bar{s}_i]) = \sum_{i=1}^{|d_0|} [\alpha(\bar{s}_i) - \alpha(s_i)] < \frac{\varepsilon}{16M}$$

Se $d \in D$, $d = (s_0, \bar{s}_0, s_1, \bar{s}_1, s_2, \bar{s}_2, \dots, s_{|d|}, t_{|d|}) = (v_0, v_1, \dots, v_{|d|})$ então para $\varepsilon_j, \varepsilon'_j \in [v_{j-1}, v_j]$, $j=1, \dots, |d|$ vale

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left\| \sum_{j=1}^{|d|} [f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j)] [\alpha(v_j) - \alpha(v_{j-1})] \right\| = \\ & = \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} [f(\varepsilon_i) - f(\varepsilon'_i)] [\alpha(s_i) - \alpha(\bar{s}_{i-1})] \right\| + \\ & + \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} [f(\varepsilon_i) - f(\varepsilon'_i)] [\alpha(\bar{s}_i) - \alpha(s_i)] \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Mas } & \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i) \right] \left[\alpha(s_i) - \alpha(\bar{s}_{i-1}) \right] \right\| = \\
 & = \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i) \right] \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) + \alpha(s_i) - \alpha(t_i) + \alpha(t_{i-1}) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \alpha(\bar{s}_{i-1}) \right] \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i) \right] \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \right\| + \\
 & \quad + \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i) \right] \left[\alpha(s_i) - \alpha(t_i) \right] \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i) \right] \cdot \right. \\
 & \quad \cdot \left[\alpha(t_{i-1}) - \alpha(\bar{s}_{i-1}) \right] \left\| \leq \frac{\varepsilon}{4} + 2M \sum_{i=1}^{|d_0|} \left| \alpha(s_i) - \alpha(t_i) \right| + \right. \\
 & \quad \left. + 2M \sum_{i=1}^{|d_0|} \left| \alpha(t_{i-1}) - \alpha(\bar{s}_{i-1}) \right|, \text{ observando que} \right. \\
 & \quad \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i) \right] \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \right\| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ por hipótese,}
 \end{aligned}$$

uma vez que $\epsilon_i, \epsilon'_i \in [\bar{s}_{i-1}, s_i] \subset]t_{i-1}, t_i[$, $i=1, \dots, |d_0|$.

Como
$$\sum_{i=1}^{|d_0|} \left| \alpha(s_i) - \alpha(t_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[\alpha(\bar{s}_i) - \alpha(s_i) \right] \leq \frac{\varepsilon}{16M}$$

e

$$\sum_{i=1}^{|d_0|} \left| \alpha(t_{i-1}) - \alpha(\bar{s}_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[\alpha(\bar{s}_{i-1}) - \alpha(s_{i-1}) \right] \leq \frac{\varepsilon}{16M},$$

temos

$$(2) \quad \left\| \sum_{i=1}^{|d_0|} \left[f(\varepsilon_i) - f(\varepsilon'_i) \right] \left[\alpha(s_i) - \alpha(\bar{s}_{i-1}) \right] \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por outro lado, temos

$$(3) \quad \left\| \sum_{i=0}^{|d_0|} \left[f(\varepsilon_i) - f(\varepsilon'_i) \right] \left[\alpha(\bar{s}_i) - \alpha(s_i) \right] \right\| \leq$$

$$\leq 2M \sum_{i=0}^{|d_0|} \left[\alpha(\bar{s}_i) - \alpha(s_i) \right] < \frac{\varepsilon}{8}$$

De (1), (2) e (3) temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d|} \left[f(\varepsilon_j) - f(\varepsilon'_j) \right] \left[\alpha(v_j) - \alpha(v_{j-1}) \right] \right\| < \varepsilon,$$

como queríamos provar.

I.2 - EXEMPLOS BÁSICOS

Neste parágrafo mostramos que, como acontece para $\alpha(t)=t$ $[R]$, temos $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$ para toda $\alpha \in BV[0,1]$, contínua, não constante, se $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p \leq \infty$, ou $X = c_0(\mathbb{N})$ (I.2.1,2) e $D_\alpha[\ell_1(\mathbb{N})] = R_\alpha[\ell_1(\mathbb{N})]$, se $\alpha \in BV[0,1]$ (I.2.7).

Na verdade o resultado $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$ para $X \in \{\ell_p(\mathbb{N}), 1 < p \leq \infty, c_0(\mathbb{N})\}$ é verdadeiro para toda $\alpha \in BV[0,1]$ com parte contínua α_c (I.3.1) não constante, como será provado no parágrafo seguinte (I.3.14). Entretanto, com o que foi desenvolvido até aqui só é possível provar esse resultado para α contínua, não constante.

Para as funções de Dirichlet (I.2.3) f , consideradas nos exemplos I.2.1 e I.2.2 verificamos que para mostrar que $\int f d\alpha = 0$ usamos, no caso de $c_0(\mathbb{N})$, apenas a continuidade de α , enquanto que no caso $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, foi necessário usar o fato de que $\alpha \in BV[0,1]$, além da continuidade. No exemplo I.2.4 exibimos uma função $\alpha_p: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e $\alpha_p \notin BV[0,1]$ para a qual não existe $\int f d\alpha_p$, qualquer que seja $f: [0,1] \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, $f \in \mathcal{D}(\{e_n\}_{n=1}^\infty)$ (I.2.3).

Esses fatos caracterizam o espaço $c_0(\mathbb{N})$ na família $\{c_0(\mathbb{N}), \ell_p(\mathbb{N}), 1 \leq p < \infty\}$ pela existência da integral $\int f d\alpha$ para toda $\alpha \in C[0,1]$ e $f \in \mathcal{D}(\{e_n\}_{n=1}^\infty)$.

Mostramos em I.2.6 que essa caracterização é verdadeira numa família maior que a $\{c_0(\mathbb{N}), \ell_p(\mathbb{N}), 1 \leq p < \infty\}$ que é a família dos espaços de Banach com base de Schauder subsimétrica (I.2.5).

Agradecemos a Antonio Gilioli sua colaboração nas discussões que levaram ao resultado I.2.6.

I.2.1 - Exemplo: Se $X = c_0(\mathbb{N})$ e $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua não constante, mostremos que $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$.

Se $(e_n)_{n=1}^\infty$ é a base canônica de X e $(r_n)_{n=1}^\infty$ é uma enumeração dos racionais de $[0,1]$, seja $f: [0,1] \rightarrow c_0(\mathbb{N})$ definida por $f(r_n) = e_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $f(t) = 0$ se t é irracional.

Se $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ é uma partição de $[0,1]$, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq |d|} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|, \text{ para}$$

qualquer $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$.

Como α é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|u-v| < \delta$ então $|\alpha(u) - \alpha(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall u, v \in [0,1]$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d \in D$, $d = (t_0, \dots, t_{|d|})$ com $\Delta d < \delta$ vale

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon, \text{ para qualquer es}$$

colha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i], i=1, \dots, |d|$.

Então $f \in R_\alpha(X)$ com $\int f d\alpha = 0$. Se $d \in D$, $d = (t_0, \dots, t_{|d|})$, temos $\sum_{i=1}^{|d|} w_i(f) |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{|d|} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$ e então verificamos facilmente que $f \notin D_\alpha(X)$.

I.2.2 - Exemplo: Se $X = \ell_p(N)$, $1 < p \leq \infty$ e $\alpha \in BV[0,1]$ é contínua não constante, mostremos que $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$.

Para $1 < p < \infty$ consideremos $f: [0,1] \rightarrow X$ definida como em I.2.1. Do mesmo modo temos $f \notin D_\alpha(X)$, por I.1.17 e 25.

Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de α , existe $\delta > 0$ tal que se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ com $\Delta d < \delta$ temos

$$\sup_{1 \leq i \leq |d|} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| < \left(\frac{\varepsilon^p}{v[\alpha]} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Então para qualquer escolha de $\zeta_i \in]t_{i-1}, t_i[$, $i=1, 2, \dots, |d|$, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{|d|} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{|d|} \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right| \left| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right|^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\left(\frac{\epsilon^p}{V[\alpha]} V[\alpha] \right)^{\frac{1}{p}} = \epsilon. \quad \text{Logo, } f \in R_\alpha(X) \text{ com } \int f d\alpha = 0, \text{ por}$$

I.1.32.

Se $p = \infty$ é claro que $D_\alpha(\ell_\infty(\mathbb{N})) \subsetneq R_\alpha(\ell_\infty(\mathbb{N}))$ por I.2.1 e

I.1.12.

Passemos agora a caracterização de $c_0(\mathbb{N})$ mencionada na introdução do parágrafo.

Inicialmente, vejamos o exemplo I.2.4 no qual é usada a seguinte notação.

I.2.3 - Notação: Se X é um espaço de Banach e $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência de elementos de X com $\|x_n\|=1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{D}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$ o conjunto das funções de Dirichlet $f: [0,1] \rightarrow X$ que são definidas do seguinte modo.

Se $(r_n)_{n=1}^\infty$ é uma enumeração dos racionais de $[0,1]$ então
 $f(r_n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, e $f(t) = 0$ se $t \neq r_n$, $n \in \mathbb{N}$.

I.2.4 - Exemplo: Vamos exibir uma função $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua para a qual não existe $\int f d\alpha$ qualquer que seja $f: [0,1] \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, $f \in \mathcal{D}(\{e_n\}_{n=1}^\infty)$.

Conseqüentemente, teremos por I.2.2 (se $1 < p < \infty$) que $\alpha \notin BV[0,1]$.

Seja então $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$, $n=0,1,2,\dots$

$\alpha(b_n) = \frac{-1}{n^p}$, se b_n é o ponto médio do intervalo

$$\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right], \quad n = 1, 2, \dots \text{ e } \alpha\left(\frac{3}{4}\right) = 1.$$

$$\alpha(0) = 0$$

Nos demais pontos α é a função que tem como gráfico os segmentos de reta definidos pelos pares de pontos $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$, $(b_n, \alpha(b_n))$ e $(b_n, \alpha(b_n))$, $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, 0\right)$.

Obviamente α é contínua.

Se $f \in \mathcal{D}(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, seja $d_m \in D$ uma partição de $[0, 1]$ que no intervalo $\left[0, \frac{1}{2^{n_0}}\right]$ é formada pelos pontos $0, \frac{1}{2^{n_0+m+1}}, b_{n_0+m}, \frac{1}{2^{n_0+m}}, \dots, \frac{1}{2^{n_0+1}}, b_{n_0}, \frac{1}{2^{n_0}}$.

Se $d_m = (t_0, t_1, \dots, t_{|d_m|})$, consideremos $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d_m|$, escolhidos do seguinte modo:

ζ_i e ζ'_i são irracionais se $t_{i-1} \geq \frac{1}{2^{n_0}}$ ou se $t_{i-1} = 0$.

$\zeta_i = b_{j_i}$ e ζ'_i é irracional se $[t_{i-1}, t_i] = \left[b_{j_i}, \frac{1}{2^{j_i}}\right]$, $i=n_0, n_0+1, \dots, n_0+m$.

ζ_i e ζ'_i são irracionais se $[t_{i-1}, t_i] = \left[\frac{1}{2^{j_i+1}}, b_{j_i}\right]$, $i=n_0, \dots, n_0+m$.

Então temos

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|d_m|} [f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\|_p = \\ & = \left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} e_{n_i} \frac{1}{i^{1/p}} \right\|_p = \left[\sum_{i=n_0}^{n_0+m} \frac{1}{i} \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0}^{n_0+m} \frac{1}{i} = +\infty$ temos que para todo $\delta > 0$

existe uma partição d_m (basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \frac{1}{2^{n_0}}$ e m suficientemente grande) com $\Delta d_m < \delta$ e uma escolha conveniente de $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d_m|$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_m|} [f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| > 1$$

o que mostra que não existe $\int f d\alpha$, por I.1.2.

A mesma idéia usada no exemplo anterior servirá para de-
monstrar a proposição I.2.6.

Antes, vejamos as definições e propriedades a seguir, que
também serão necessárias em I.2.6.

I.2.5 - Definições e Propriedades: Uma base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de um Banach X é dita incondicional se para todo $x \in X$, sua expansão em termos da base $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge incondicionalmente

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{\Pi(n)} x_{\Pi(n)} \right)$ converge para x , qualquer que seja Π , permutação dos naturais).

Uma base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é subsimétrica se é incondicional e dada uma subsequência qualquer $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos naturais,

tem-se $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ equivalente a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge se e somente se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{n_i}$ converge.

Se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é base subsimétrica de X podemos considerar X munido da norma $\|\cdot\|_0$ equivalente à original e que tem a propriedade

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \theta_i x_{n_i} \right\|_0 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_0, \quad \forall \theta_i = \pm 1,$$

$$i \in \mathbb{N} \text{ e } n_1 < n_2 < \dots$$

sempre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$.

Além disso, se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é base subsimétrica, podemos considerar $\|x_n\| = 1, n \in \mathbb{N}$ (e, conseqüentemente, $\|x_m\|_0 = \sup_{n \geq m} \|x_n\| = 1, m \in \mathbb{N}$) pois toda base subsimétrica é equivalente a sua normalizada.

Para verificação desses fatos o leitor poderá consultar ([LT] 3a).

I.2.6 - Proposição: Se X é um espaço de Banach com base de Schauder subsimétrica $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\| = 1, n \in \mathbb{N}$, são equivalentes:

- (a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge para toda seqüência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) A aplicação $T : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow X$ definida por $T[(a_n)_{n=1}^{\infty}] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ é um isomorfismo sobrejetor.
- (c) Existe $\int f d\alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{C}[0,1]$ e toda $f \in \mathcal{D}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ e $\int f d\alpha = 0$.

Prova: Vamos supor X munido da $\| \cdot \|$. (I.2.5) o que é possível por I.1.8 e então $\|x_n\| = 1, n \in \mathbb{N}$ (I.2.5). Temos:

(b) $\Rightarrow$ (a) : imediato

(a) $\Rightarrow$ (b) : Como vale (a) a aplicação T está bem definida e por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ser base e $\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, temos T bijetora. Sendo assim, basta mostrar que T é contínua e para isso vamos usar o Teorema do gráfico fechado.

Seja $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de elementos de $c_0(\mathbb{N})$, $A_k = (a_n^k)_{n=1}^{\infty}$, com $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} T(A_k) = x, x \in X$.

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$ temos $\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro

lado, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ então $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^k - a_n) x_n \right] = 0$, logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_n^k - a_n\| \|x_n\|_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_n^k - a_n| = 0 \quad (\text{pois } \Pi_m : X \rightarrow X \text{ definida}$$

por $\Pi_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \right) = b_m x_m$ é contínua, $\forall m \in \mathbb{N}$). Conseqüente

mente, $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Se $f : [0,1] \rightarrow X$, $f \in \mathcal{D}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ então

$$T^{-1}_0 f : [0,1] \rightarrow c_0(\mathbb{N}), \quad (T^{-1}_0 f) \in \mathcal{D}(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Em I.2.1 mostramos que $\int (T^{-1}_0 f) d\alpha = 0$ e então por I.1.8 temos que $f \in R_{\alpha}(X)$ e $T^{-1} \left(\int f d\alpha \right) = 0$, logo $\int f d\alpha = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de escalares com $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Definimos $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\alpha \left(\frac{1}{2^n} \right) = 0, n=0,1,2,\dots$

$\alpha(b_n) = a_n, n=1,2,\dots$ se b_n é o ponto médio do intervalo

$$\text{lo } \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right] \text{ e } \alpha \left(\frac{3}{4} \right) = 1.$$

$$\alpha(0) = 0$$

Nos demais pontos de $[0,1]$, α é a função que tem como gráfico os segmentos de reta determinados pelos pares de pontos

$$\left(\frac{1}{2^n}, 0 \right), (b_n, a_n) \text{ e } (b_n, a_n), \left(\frac{1}{2^{n+1}}, 0 \right).$$

Claramente α é contínua embora não necessariamente de variação limitada.

Se $f \in \mathcal{D}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ com $\Delta d < \delta$ vale

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon$$

para qualquer escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \delta$ e denotemos por d_m uma partição de $[0, 1]$ com $\Delta d_m < \delta$ e que no intervalo $\left[0, \frac{1}{2^{n_0}}\right]$ é formada pelos pontos

$$0, \frac{1}{2^{n_0+m+1}}, b_{n_0+m}, \frac{1}{2^{n_0+m}}, \dots, \frac{1}{2^{n_0+1}}, b_{n_0}, \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Para a seguinte escolha de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$

$$\zeta_i \text{ irracional se } t_{i-1} \geq \frac{1}{2^{n_0}}$$

$$\zeta_i = b_i \text{ se } a_i < 0 \text{ e } [t_{i-1}, t_i] = \left[b_i, \frac{1}{2^i} \right] \text{ e } \zeta_i \text{ irracional}$$

$$\text{se } [t_{i-1}, t_i] = \left[\frac{1}{2^{i+1}}, b_i \right], \quad i=n_0, \dots, n_0+m.$$

$$\zeta_i \text{ irracional se } [t_{i-1}, t_i] = \left[b_i, \frac{1}{2^i} \right] \text{ e } a_i > 0 \text{ e } \zeta_i = b_i$$

$$\text{se } [t_{i-1}, t_i] = \left[\frac{1}{2^{i+1}}, b_i \right], \quad i=n_0, \dots, n_0+m$$

temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_m|} f(\zeta_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\|_0 = \left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} x_{n_i} \alpha(b_i) \right\|_0 =$$

$$= \left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} x_{n_i} a_i \right\|_0 = \left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} a_i x_i \right\|_0 < \varepsilon,$$

sendo a última igualdade dada por I.2.5.

Como o que foi feito vale para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\| \sum_{n=n_0}^{n_0+m} a_n x_n \right\|_0 < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ é convergente em}$$

X.

I.2.7 - Proposição: Se $\alpha \in BV[0,1]$ então $D_\alpha[\ell_1(\mathbb{N})] = R_\alpha[\ell_1(\mathbb{N})]$.

Prova: Por I.1.31 podemos supor α crescente e é claro que basta provar o resultado para α não constante.

Suponhamos, por absurdo, que existe $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \notin D_\alpha(X)$ e $f \in R_\alpha(X)$, $X = \ell_1(\mathbb{N})$. Então $f \in B_\alpha(X)$ (I.1.17) logo por I.1.25 temos $\mu_{\hat{\alpha}}(Df) > 0$.

Como $Df = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n = \left\{ t \in [0,1] : w(f, \{t\}) \geq \frac{1}{n} \right\}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $\mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0}) > 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $p_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $p_n(x) = x_n$ se $x = (x_m)_{m=1}^{\infty}$.

Como $f \in R_\alpha(X)$ temos por I.1.8 que $p_n \circ f \in R_\alpha(\mathbb{K})$, logo $p_n \circ f \in D_\alpha(\mathbb{K})$ (I.1.13) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então novamente usando I.1.25 temos que $\mu_{\hat{\alpha}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D(p_n \circ f)\right) = 0$

Seja $d_0 \in D$, $d_0 = (t_0, t_1, \dots, t_{|d_0|})$ uma partição qualquer e denotemos por $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, 2, \dots, |d_0|$.

Sejam $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, |d_0|\}$ os índices tais que $\mu_{\hat{\alpha}}(I_{i_j} \cap F_{n_0}) > 0$ $j=1, \dots, p$ (logo $\mu_{\hat{\alpha}}(\overset{\circ}{I}_{i_j} \cap F_{n_0}) > 0$, uma vez que $\hat{\alpha}$ é contínua nos pontos de F_{n_0} , por I.1.7).

Sejam $x_1 \in \overset{\circ}{I}_{i_1} \cap F_{n_0}$, $x_1 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(p_n \circ f)$ e $y_1 \in I_{i_1}$ tais

que

$$\|f(x_1) - f(y_1)\| \geq \frac{1}{2^{n_0}} \quad , \quad v_1 = f(x_1) - f(y_1) = (a_n^1)_{n=1}^{\infty}$$

Dado $\epsilon > 0$ seja $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n > j_1} |a_n^1| < \frac{\epsilon}{2^2 v[\alpha]}$.

Sejam $x_2 \in \overset{\circ}{I}_{i_2} \cap F_{n_0}$, $x_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(p_n \circ f)$ e $y_2 \in I_{i_2}$ tais

que

$$\|f(x_2) - f(y_2)\| \geq \frac{1}{2^{n_0}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{j_1} |(p_n \circ f)(x_2) - (p_n \circ f)(y_2)| < \frac{\epsilon}{2^3 v[\alpha]}$$

Se $v_2 = f(x_2) - f(y_2) = (a_n^2)_{n=1}^{\infty}$ seja $j_2 > j_1$ tal que

$$\sum_{n > j_2} |a_n^2| < \frac{\epsilon}{2^4 v[\alpha]}$$

Sejam $x_3 \in \overset{\circ}{I}_{i_3} \cap F_{n_0}$, $x_3 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(p_n \circ f)$ e $y_3 \in I_{i_3}$

tais que

$$\|f(x_3) - f(y_3)\| \geq \frac{1}{2^{n_0}} \quad \text{e}$$

$$\sum_{n=1}^{j_2} |(p_n \circ f)(x_3) - (p_n \circ f)(y_3)| < \frac{\epsilon}{2^5 v[\alpha]}$$

Se $v_3 = f(x_3) - f(y_3) = (a_n^3)_{n=1}^\infty$ seja $j_3 > j_2$ tal que

$$\sum_{n > j_3} |a_n^3| < \frac{\varepsilon}{2^6 v[\alpha]}$$

Continuando o processo obtemos $v_1, v_2, \dots, v_p$, com as propriedades correspondentes.

Se $v_i = (a_n^i)_{n=1}^\infty$, $i=1, 2, \dots, p$ sejam

$$\bar{v}_1 = (a_1^1, a_1^2, \dots, a_{j_1}^1, 0, 0, 0, \dots) \quad)$$

$$\bar{v}_2 = (0, 0, \dots, 0, a_{j_1+1}^2, \dots, a_{j_2}^2, 0, 0, \dots) \quad)$$

$$\vdots$$

$$\bar{v}_p = (0, \dots, 0, \dots, 0, a_{j_{p-1}+1}^p, \dots, a_{j_p}^p, 0, \dots, 0, \dots) \quad)$$

Então

$$\|v_1 - \bar{v}_1\| = \sum_{n > j_1} |a_n^1| < \frac{\varepsilon}{2^2 v[\alpha]}$$

$$\|v_2 - \bar{v}_2\| = \sum_{n=1}^{j_1} |a_n^2| + \sum_{n > j_2} |a_n^2| < \frac{1}{v[\alpha]} \left(\frac{\varepsilon}{2^3} + \frac{\varepsilon}{2^4} \right)$$

$$\vdots$$

$$\|v_p - \bar{v}_p\| = \sum_{n=1}^{j_{p-1}} |a_n^p| + \sum_{n > j_p} |a_n^p| < \frac{1}{v[\alpha]} \left(\frac{\varepsilon}{2^{2p}} + \frac{\varepsilon}{2^{2p-1}} \right)$$

Logo, se $v_1 = v_{I_{i_1}}[\alpha], \dots, v_p = v_{I_{i_p}}[\alpha]$ temos

$$\sum_{i=1}^p \|v_i - \bar{v}_i\| v_i \leq \frac{v_1}{v[\alpha]} \frac{\epsilon}{2^2} + \frac{v_2}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^3} + \frac{\epsilon}{2^4} \right) + \dots +$$

$$\frac{v_p}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^{2p}} + \frac{\epsilon}{2^{2p-1}} \right)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2^2} + \frac{\epsilon}{2^3} + \dots + \frac{\epsilon}{2^{2p-1}} + \frac{\epsilon}{2^{2p}} < \frac{\epsilon}{2} \quad (1)$$

Além disso,

$$\|\bar{v}_1\| = \|v_1 + (\bar{v}_1 - v_1)\| \geq \|v_1\| - \|\bar{v}_1 - v_1\| \geq \frac{1}{2^{n_0}} - \frac{\epsilon}{2^2 v[\alpha]}$$

$$\|\bar{v}_2\| = \|v_2 + (\bar{v}_2 - v_2)\| \geq \|v_2\| - \|\bar{v}_2 - v_2\| \geq \frac{1}{2^{n_0}} - \frac{1}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^3} + \frac{\epsilon}{2^4} \right)$$

⋮

$$\|\bar{v}_p\| = \|v_p + (\bar{v}_p - v_p)\| \geq \|v_p\| - \|\bar{v}_p - v_p\| \geq \frac{1}{2^{n_0}} - \frac{1}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^{2p-1}} + \frac{\epsilon}{2^{2p}} \right)$$

Logo

$$\left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i v_i \right\| = \sum_{i=1}^p \|\bar{v}_i\| v_i \geq \sum_{i=1}^p \frac{v_i}{2^{n_0}} - \left[\frac{v_1}{v[\alpha]} \frac{\epsilon}{2^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{v_2}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^3} + \frac{\epsilon}{2^4} \right) + \dots + \frac{v_p}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^{2p-1}} + \frac{\epsilon}{2^{2p}} \right) \right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2^{n_0}} \sum_{i=1}^p v_i - \left(\frac{\epsilon}{2^2} + \frac{\epsilon}{2^3} + \dots + \frac{\epsilon}{2^{2p}} \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2^{n_0}} \mu_{\hat{\alpha}}(I_{i_1} \cup \dots \cup I_{i_p}) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0}) \frac{1}{2^{n_0}} - \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Como

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p v_i v_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i v_i - \sum_{i=1}^p (\bar{v}_i - v_i) v_i \right\| \geq \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i v_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^p (\bar{v}_i - v_i) v_i \right\| \geq \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i v_i \right\| - \sum_{i=1}^p \left\| \bar{v}_i - v_i \right\| \|v_i\| \end{aligned}$$

temos de (1) e (2)

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i v_i \right\| \geq \mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0}) \frac{1}{2^{n_0}} - \varepsilon \quad (3)$$

Portanto, se tomarmos ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2^{n_0}} \mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0})$ temos que para qualquer $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$, existe uma escolha

$$\begin{aligned} \zeta_i &= x_i \\ \zeta'_i &= y_i \end{aligned} \quad \text{se } i \in \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \text{ e } \zeta_i = \zeta'_i \text{ se}$$

$i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p v_i v_i \right\| > \varepsilon_0$$

o que contraria $f \in R_{\alpha}(X)$ inicialmente suposto.

I.3 - RELAÇÕES ENTRE AS α, α_C e α_S -INTEGRABILIDADE

Neste parágrafo estudamos as relações entre os conjuntos $R_\alpha(X)$, $D_\alpha(X)$, $R_{\alpha_S}(X)$, $D_{\alpha_S}(X)$, $R_{\alpha_C}(X)$ e $D_{\alpha_C}(X)$ sendo α_C e α_S as partes contínua e de saltos (I.3.1) de α , com $\alpha \in BV[0,1]$.

Inicialmente, fazemos um estudo da medida $\mu_{\hat{\alpha}_S}$ e concluímos, em I.3.4, que $D_{\alpha_S}(X) = R_{\alpha_S}(X)$ para todo Banach X .

A seguir, mostramos em I.3.7, que para se ter $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ basta que se tenha $D_{\alpha_C}(X) = R_{\alpha_C}(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ e qualquer Banach X . Não conseguimos uma resposta geral para a recíproca desse facto, isto é, não sabemos se $D_{\alpha_C}(X) \subsetneq R_{\alpha_C}(X)$ implica em $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$, para todo Banach X e toda $\alpha \in BV[0,1]$.

Temos resposta afirmativa para a questão se X tem base subsimétrica. Na verdade provamos mais que isso, pois mostramos em I.3.12 que se X tem base subsimétrica então $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ para alguma $\alpha \in BV[0,1]$ se e somente se X é isomorfo a $\ell_1(N)$.
com α_C não cte

Trabalhando com esse resultado mostramos, em I.3.16, que na classe dos espaços com base subsimétrica o espaço $c_0(N)$ é o único, a menos de isomorfismos, que tem $D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*)$ para alguma $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

Além disso, mostramos em I.3.10, que se X é um espaço de Banach uniformemente convexo então $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

I.3.1 - Notação: Se $\alpha \in BV[0,1]$ é conhecido que o conjunto de seus pontos de descontinuidade é no máximo enumerável. Se $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto desses pontos denotaremos por α_n a função $\alpha_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definida por:

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < y_n \\ \alpha(y_n) - \alpha(y_n^-) & \text{se } t = y_n \\ \alpha(y_n^+) - \alpha(y_n^-) & \text{se } y_n < t \leq 1 \end{cases}$$

onde $\alpha(y_n^-) = \lim_{t \rightarrow y_n^-} \alpha(t)$, $\alpha(y_n^+) = \lim_{t \rightarrow y_n^+} \alpha(t)$, $\alpha(0^-) = \alpha(0)$, $\alpha(1^+) = \alpha(1)$.

De ([Hi] II.7) temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)$ converge absolutamente e uniformemente em $[0,1]$ para uma função que denotaremos α_S (função de "saltos"), cujos pontos de descontinuidade são os pontos de descontinuidade de α .

Denotaremos por α_C a função $\alpha - \alpha_S$ e temos, também de ([Hi] II.7) que α_C é uma função contínua.

De ([Hi] II.8) temos que $\alpha_S \in BV[0,1]$ e conseqüentemente, $\alpha_C \in BV[0,1]$.

I.3.2 - Lema: Se $t \in [0,1]$ então $\hat{\alpha}_S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t)$.

Prova: É fácil ver que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$

$$\hat{\alpha}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < y_n \\ |\alpha(y_n) - \alpha(y_n^-)| & \text{se } t = y_n \\ |\alpha(y_n^+) - \alpha(y_n)| + |\alpha(y_n) - \alpha(y_n^-)| & \text{se } t > y_n, \end{cases}$$

onde $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de α .

Então como $\alpha_S \in BV[0,1]$ e $\hat{\alpha}_n(t) \leq |\alpha(y_n^+) - \alpha(y_n)| + |\alpha(y_n) - \alpha(y_n^-)| \forall t \in [0,1]$, temos de ([Hi] II.7) que

$$\sum_{\substack{n=1 \\ y_n \in [0,t]}}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t) \leq \hat{\alpha}_S(t), \quad \forall t \in [0,1].$$

$$\text{Logo, } \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n \leq \hat{\alpha}_S.$$

Por outro lado, se $d=(t_0, \dots, t_{|d|})$ é partição de $[0,t]$, $0 \leq t \leq 1$, temos

$$\sum_{i=1}^{|d|} \left| \alpha_S(t_i) - \alpha_S(t_{i-1}) \right| = \sum_{i=1}^{|d|} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n(t_i) - \alpha_n(t_{i-1}) \right] \right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{|d|} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \alpha_n(t_i) - \alpha_n(t_{i-1}) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{|d|} \left| \alpha_n(t_i) - \alpha_n(t_{i-1}) \right| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t) .$$

$$\text{Logo, } \hat{\alpha}_S \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n \text{ e então } \hat{\alpha}_S = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n .$$

I.3.3 - Proposição: Sejam $\alpha \in BV[0,1]$ e $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de seus pontos de descontinuidade. Então se $E \subset [0,1]$ temos

$$\mu_{\hat{\alpha}_S}(E) = \sum_{y_n \in E} \mu_{\hat{\alpha}_S}(\{y_n\}) = \sum_{y_n \in E} \left[|\alpha(y_n^+) - \alpha(y_n)| + |\alpha(y_n) - \alpha(y_n^-)| \right].$$

Consequentemente $\mu_{\hat{\alpha}_S}(E) = 0$ para todo $E \subset ([0,1] - \{y_n, n \in \mathbb{N}\})$.

Prova: Se $0 \leq c < d \leq 1$ temos, usando I.3.2, que

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{\alpha}_S}([c, d]) &= \hat{\alpha}_S(d^-) - \hat{\alpha}_S(c^+) = \lim_{t \rightarrow d^-} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t) - \\ &- \lim_{t \rightarrow c^+} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t) . \end{aligned}$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[|\alpha(y_n^+) - \alpha(y_n)| + |\alpha(y_n) - \alpha(y_n^-)| \right]$ é conver

gente e $\hat{\alpha}_n(t) \leq |\alpha(y_n^+) - \alpha(y_n)| + |\alpha(y_n) - \alpha(y_n^-)|$, $\forall t \in [0, 1]$ temos
 $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t)$ uniformemente convergente em $[0, 1]$, logo

$$\lim_{t \rightarrow d^-} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(d^-) \quad e$$

$$\lim_{t \rightarrow c^+} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_n(c^+) \quad \text{o que mostra que}$$

$$\mu_{\hat{\alpha}_S}([c, d]) = \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{\alpha}_n(d^-) - \hat{\alpha}_n(c^+)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\hat{\alpha}_n}([c, d]).$$

Conseqüentemente, por ([Hi] V4.2 e 5.1) temos que $\mu_{\hat{\alpha}_S}(B) =$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\hat{\alpha}_n}(B)$, qualquer que seja B , subconjunto boreliano de $[0, 1]$.

Se $E \subset [0, 1]$ é um subconjunto qualquer e $\varepsilon > 0$ é dado ar-
 bitrariamente, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a soma $\sum_{n > n_0} \mu_{\hat{\alpha}_S}(\{y_n\}) < \varepsilon$ (existe
 n_0 pois $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\hat{\alpha}_S}(\{y_n\}) < \infty$).

Seja $G = [0, 1] - \{y_1, \dots, y_{n_0}\}$; como G é boreliano temos
 G $\mu_{\hat{\alpha}_S}$ -mensurável e se $A = ([0, 1] - \{y_n, n \in \mathbb{N}\})$ temos

$$\mu_{\hat{\alpha}_S}(G) = \sum_{n > n_0} \mu_{\hat{\alpha}_S}(\{y_n\}) + \mu_{\hat{\alpha}_S}(A) < \varepsilon$$

uma vez que A é boreliano e $\mu_{\hat{\alpha}_S}(A) = 0$, pelo que fizemos inicial-
 mente.

É claro que $G \supset A \supset E \cap A$, G é aberto e $\mu_{\hat{\alpha}_S}^*(G - E \cap A) \leq \mu_{\hat{\alpha}_S}^*(G) < \varepsilon$ ($\mu_{\hat{\alpha}_S}^*$ indicando medida exterior), logo ([Hi] V10.1) mostra que $E \cap A$ é $\mu_{\hat{\alpha}_S}$ -mensurável e $\mu_{\hat{\alpha}_S}(E \cap A) = 0$.

Por outro lado, $E \cap \mathbb{C} A = E \cap \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ é boreliano e o que fizemos no início mostra que $\mu_{\hat{\alpha}_S}(E \cap \mathbb{C} A) = \sum_{y_n \in E} \mu_{\hat{\alpha}_S}(\{y_n\})$.

Logo, $\mu_{\hat{\alpha}_S}(E) = \mu_{\hat{\alpha}_S}(E \cap A) + \mu_{\hat{\alpha}_S}(E \cap \mathbb{C} A) = \sum_{y_n \in E} \mu_{\hat{\alpha}_S}(\{y_n\})$.

I.3.4 - Teorema: Se $\alpha \in BV[0,1]$ e X é um espaço de Banach então

$$D_{\alpha_S}(X) = R_{\alpha_S}(X)$$

Prova: Se $f \in R_{\alpha_S}(X)$ temos por I.1.7 que $Df \cap \{y_n, n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, logo I.3.2³ mostra que $\mu_{\hat{\alpha}_S}(Df) = 0$. Por I.1.17 temos $f \in B_{\alpha_S}(X)$ e então I.1.25 mostra que $f \in D_{\alpha_S}(X)$.

I.3.5 - Proposição: Se $\alpha \in BV[0,1]$ e X é um espaço de Banach, para toda $f: [0,1] \rightarrow X$ vale

$$f \in R_{\alpha}(X) \Leftrightarrow f \in R_{\alpha_C}(X) \text{ e } f \in R_{\alpha_S}(X)$$

Prova: Basta provar a implicação direta, uma vez que a recíproca é imediata já que $\alpha = \alpha_S + \alpha_C$.

Para isso observemos que se $f \in R_\alpha(X)$, então $f \in B_\alpha(X)$ (por I.1.17) e $Df \cap \{y_n, n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ (por I.1.7) onde $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de α . Então é fácil ver que $f \in B_{\alpha_S}(X)$ e I.3.2³ mostra que $\mu_{\alpha_S}(Df) = 0$, logo temos, por I.1.25, que $f \in D_{\alpha_S}(X) = R_{\alpha_S}(X)$ (I.3.4).

É claro então que $f \in R_{\alpha_C}(X)$, uma vez que $\alpha_C = \alpha - \alpha_S$.

I.3.6 - Observação: Mostramos, em I.3.5, que $R_\alpha(X) \subset R_{\alpha_S}(X)$ e $R_\alpha(X) \subset R_{\alpha_C}(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$, para todo Banach X . Entretanto, é muito fácil exhibir funções $\alpha \in BV[0,1]$, para as quais as inclusões contrárias não são verdadeiras, qualquer que seja o Banach $X \neq \{0\}$ como mostram os exemplos (a) e (b) a seguir.

(a) Seja $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ e $f: [0,1] \rightarrow X$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ e } t \notin \mathbb{Q} \\ x_0 & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \mathbb{Q} = \text{conjunto dos racionais}$$

e seja $\alpha \in BV[0,1]$ definida por $\alpha(t) = t \star X_{[3/4,1]}(t)$, $t \in [0,1]$.

$$\text{Então } \alpha_S(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \frac{3}{4} \\ \alpha\left(\frac{3}{4}\right) - \alpha\left(\frac{3}{4}^-\right) = 1 & \text{se } t = \frac{3}{4} \\ \alpha\left(\frac{3}{4}^+\right) - \alpha\left(\frac{3}{4}^-\right) = 1 & \text{se } \frac{3}{4} < t \leq 1 \end{cases}$$

ou $\alpha_S = X_{[3/4,1]}$. Logo $\alpha_C(t) = t$, $\forall t \in [0,1]$.

Como $\mu_{\hat{\alpha}_C}(Df) = \frac{1}{2}$ temos por I.1.25 e I.1.13 que $f \notin R_{\alpha_C}(X)$ e é claro que $f \in R_{\alpha_S}(X)$, logo $f \notin R_{\alpha}(X)$.

Portanto $R_{\alpha}(X) \neq R_{\alpha_S}(X)$.

(b) Se $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$, seja $f: [0,1] \rightarrow X$ definida por $f\left(\frac{1}{2}\right) = x_0$ e $f(t) = 0$ se $t \neq \frac{1}{2}$. Seja $\alpha \in BV[0,1]$, $\alpha(t) = g(t) + h(t)$, onde $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função contínua de variação limitada e $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ e $h(t) = 0$ se $t \neq \frac{1}{2}$. Então:

$$\alpha_S(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \frac{1}{2} \\ \alpha\left(\frac{1}{2}\right) - \alpha\left(\frac{1}{2}^-\right) = f_1\left(\frac{1}{2}\right) - f_1\left(\frac{1}{2}^-\right) = 1 & \text{se } t = \frac{1}{2} \\ \alpha\left(\frac{1}{2}^+\right) - \alpha\left(\frac{1}{2}^-\right) = f_1\left(\frac{1}{2}^+\right) - f_1\left(\frac{1}{2}^-\right) = 0 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

ou $\alpha_S = h$. Logo, $\alpha_C = g$.

Obviamente $f \in R_{\alpha_C}(X)$ (I.1.13) e $f \notin R_{\alpha_S}(X)$ por I.1.7, logo $f \notin R_{\alpha}(X)$. Portanto, $R_{\alpha}(X) \neq R_{\alpha_C}(X)$.

I.3.7 - Corolário: Se $\alpha \in BV[0,1]$ e X é um espaço de Banach então

$$D_{\alpha_C}(X) = R_{\alpha_C}(X) \Rightarrow D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$$

Prova: Se $f \in R_{\alpha}(X)$ temos por I.3.5 que $f \in R_{\alpha_C}(X)$ e $f \in R_{\alpha_S}(X)$, logo $f \in D_{\alpha_S}(X)$ por I.3.4. Como por hipótese, $f \in D_{\alpha_C}(X)$ temos $f \in D_{\alpha}(X)$.

No estudo da validade ou não da implicação recíproca da verificada no resultado anterior, I.3.7, consideramos o problema na classe dos espaços de Banach uniformemente convexos e na classe dos espaços de Banach com base de Schauder subsimétrica, obtendo os resultados a seguir.

I.3.8 - Definição: Um espaço de Banach X é dito uniformemente convexo se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_{\varepsilon} > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ tem-se $\frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \delta_{\varepsilon}$.

I.3.9 - Propriedade: Se X é um espaço de Banach uniformemente convexo com base de Schauder normalizada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, então existem constantes $A > 0$ e $B > 0$ e números reais p e r com $1 < p \leq r < \infty$ tais que

$$B \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq A \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda seqüência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ convergente.

Para uma demonstração de I.3.9 o leitor poderá consultar [J].

I.3.10 - Teorema: Se X é um espaço de Banach uniformemente convexo, de dimensão infinita, então para toda $\alpha \in BV[0,1]$ vale

$$D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X) \Leftrightarrow \alpha_C \text{ é constante.}$$

Prova: Basta provar a implicação direta, uma vez que a recíproca é garantida por I.3.4.

Para isso suponhamos por absurdo que α_C não é constante.

Se $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade

de α temos $\mu_{\hat{\alpha}_C}(\{y_n, n \in \mathbb{N}\}) = 0$, logo $\mu_{\hat{\alpha}_C}([0,1] - \{y_n, n \in \mathbb{N}\}) > 0$. Por ([Hi] V10.2) existe um fechado de $[0,1]$, F , $F \subset ([0,1] - \{y_n, n \in \mathbb{N}\})$ com $\mu_{\hat{\alpha}_C}(F) > 0$. Seja $E \subset F$, E enumerável e denso em F e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica normalizada de X ([LT] 1.a).

Se $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma enumeração de E , defino $f: [0,1] \rightarrow X$ por

$$\begin{cases} f(r_n) = x_n, & n = 1, 2, \dots \\ f(t) = 0 & \text{se } t \notin E \end{cases}$$

É claro que f é contínua em $([0,1] - F)$ e que $Df = F$.

Como $\mu_{\hat{\alpha}_C}(Df) > 0$ temos $f \notin D_{\alpha_C}(X)$ (I.1.25).

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que se $u, v \in [0,1]$ com $|u-v| < \delta$ então

$$|\alpha_C(u) - \alpha_C(v)| < \frac{\epsilon^{\frac{p}{p-1}}}{\left(A^p v[\alpha_C]\right)^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{sendo } A \text{ e } p \text{ as}$$

constantés de I.3.9.

Se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ ^{$\Delta d \leq \delta$} e a_i é o escalar

$$a_i = \alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1}), \quad i=1, \dots, |d|, \text{ vale}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) [\alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1})] \right\| = \left\| \sum_{\substack{n=1 \\ i=1}}^{n_0} a_n^i x_n \right\| \leq \\
& \leq A \left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \left[\left(\max_{1 \leq n \leq n_0} |a_n|^{p-1} \right) \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\
& \leq A \left[\left(\frac{\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}}{\left(A^p v[\alpha_C] \right)^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-1} v[\alpha_C] \right]^{\frac{1}{p}} = \varepsilon, \text{ para toda escolha}
\end{aligned}$$

de $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$, sendo $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 \leq n_0 \leq |d|$.

Logo, $\int f d\alpha_C = 0$ e $f \in R_{\alpha_C}(X)$.

Como $Df \cap \{y_n, n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ temos por I.3.3 que $\mu_{\hat{\alpha}_S}(Df) = 0$ e como f é limitada temos por I.1.25 que $f \in D_{\alpha_S}(X)$, logo $f \in R_{\alpha_S}(X)$ por I.3.4.

Conseqüentemente, $f \in R_{\alpha}(X)$ mas $f \notin D_{\alpha}(X)$ uma vez que $f \in D_{\alpha_S}(X)$ e $f \notin D_{\alpha_C}(X)$.

I.3.11 - Observação: Do teorema anterior segue que se X é espaço de Banach uniformemente convexo então

$$D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X) \Leftrightarrow D_{\alpha_C}(X) = R_{\alpha_C}(X)$$

para qualquer $\alpha \in BV[0,1]$.

Passemos agora aos resultados obtidos na família dos espaços de Banach com base subsimétrica, mencionados na introdução do parágrafo.

I.3.12 - Teorema: Se X é um espaço de Banach com base subsimétrica e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante então são equivalentes:

- (a) $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$
- (b) X é isomorfo a $\ell_1(N)$

Prova:

(b) $\Rightarrow$ (a) : I.2.7.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Se $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ é a base subsimétrica de X , que vamos supor normalizada (I.2.5) e sendo α_C não constante, seja $f: [0,1] \rightarrow X$, definida como na demonstração de I.3.10.

Como em I.3.10 temos $f \notin D_{\alpha_C}(X)$ e $f \in D_{\alpha_S}(X)$, logo $f \in R_{\alpha_S}(X)$ por I.3.4. Consequentemente, $f \notin D_\alpha(X)$ e então $f \notin R_\alpha(X)$, por hipótese, o que implica em $f \notin R_{\alpha_C}(X)$.

Como $f \notin R_{\alpha_C}(X)$ então por I.1.31, $f \notin R_{\hat{\alpha}_C}(X)$ e então, observando que f é limitada, temos por I.1.32 que existe $\epsilon > 0$ tal

que para qualquer $d \in D$, $d=(t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$, existe uma escolha $\zeta_i, \zeta_i' \in]t_{i-1}, t_i[$, $i=1, \dots, |d|$, com

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\zeta_i) - f(\zeta_i')] [\hat{\alpha}_c(t_i) - \hat{\alpha}_c(t_{i-1})] \right\|_0 > \epsilon, \text{ sendo a } \|\cdot\|_0.$$

a considerada em I.2.5.

Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, sendo $\hat{\alpha}_c$ crescente contínua, consideremos $d_0 \in D$, $d_0=(s_0, s_1, \dots, s_{|d_0|})$ tal que

$$\hat{\alpha}_c(s_i) - \hat{\alpha}_c(s_{i-1}) = \frac{\hat{\alpha}_c(1) - \hat{\alpha}_c(0)}{n_0}, \quad i=1, \dots, |d|=n_0.$$

Pela observação anterior existe uma escolha $\zeta_i, \zeta_i' \in]s_{i-1}, s_i[$, $i=1, \dots, n_0$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_0} [f(\zeta_i) - f(\zeta_i')] \right\|_0 \cdot \frac{\hat{\alpha}_c(1) - \hat{\alpha}_c(0)}{n_0} > \epsilon.$$

$$\text{Como } f(\zeta_i) - f(\zeta_i') = \begin{cases} 0 & \text{ou} \\ x_{n_i} - x_{m_i} & \text{ou} \\ \pm x_{n_i} \end{cases}$$

lembrando que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ é incondicional e o observado em I.2.5 existe por ([LT] 1.C.7) uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$(1) \quad \varepsilon < \frac{\hat{\alpha}_c(1) - \hat{\alpha}_c(0)}{n_0} \left\| \sum_{i=1}^{n_0} [f(\zeta_i) - f(\zeta_i^*)] \right\|_0 \leq$$

$$\frac{c_0}{n_0} [\hat{\alpha}_c(1) - \hat{\alpha}_c(0)] \left\| \sum_{i=1}^{n_0} (x_{ni} - x_{mi}) \right\|_0 =$$

$$= \frac{c_0}{n_0} [\hat{\alpha}_c(1) - \hat{\alpha}_c(0)] \left\| \sum_{k=1}^{2n_0} x_{nk} \theta_k \right\|_0 =$$

$$= \frac{c_0}{n_0} [\hat{\alpha}_c(1) - \hat{\alpha}_c(0)] \left\| \sum_{k=1}^{2n_0} x_k \right\|_0 .$$

Seja $\sigma = (\sigma_j)_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{N}$, finitos, não vazios com $\max \sigma_j < \min \sigma_{j+1}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, com $\sigma_1 = \{1, 2, \dots, 2n_0\}$.

Por ([LT] 3.a.4) temos que $P_\sigma : X \rightarrow X$ definida por

$$P_\sigma \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{n \in \sigma_j} a_n}{|\sigma_j|} u_j, \quad u_j = \sum_{n \in \sigma_j} x_n, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

é projeção contínua e existe $c_1 > 0$ tal que $\|P_\sigma\| \leq c_1$, para todo σ nas condições anteriores.

Se $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, seja $\tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| x_n$, sendo que a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| x_n$ é garantida pela incondicionalidade de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Então temos

$$(2) \quad \left\| P_{\sigma}(\tilde{x}) \right\|_{\circ} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{n \in \sigma_j} |a_n|}{|\sigma_j|} u_j \right\|_{\circ} \geq$$

$$\geq \frac{1}{k_1} \left\| \sum_{n=1}^{2n_0} |a_n| u_1 \right\|_{\circ} \geq \frac{1}{k} \frac{\sum_{n=1}^{2n_0} |a_n|}{2n_0} \|u_1\|_{\circ}, \quad \text{sendo}$$

k_1 e k as constantes das bases de blocos $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Por outro lado,

$$(3) \quad \left\| P_{\sigma}(\tilde{x}) \right\|_{\circ} \leq c_1 \|\tilde{x}\|_{\circ} = c_1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| x_n \right\|_{\circ} \leq$$

$$c_2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_{\circ} = c_2 \|x\|_{\circ}, \quad \text{sendo a segunda igual}$$

dade garantida em I.2.5. ($c_2 > 0$)

Considerando (1), (2) e (3) podemos escrever

$$(4) \quad \frac{\epsilon}{2k c_0} \frac{1}{\hat{\alpha}_C(1) - \hat{\alpha}_C(0)} \sum_{n=1}^{2n_0} |a_n| \underset{(1)}{<} \frac{\|u_1\|_{\circ}}{2k n_0} \sum_{n=1}^{2n_0} |a_n| \underset{(2)}{\leq}$$

$$\leq \left\| P_{\sigma}(\tilde{x}) \right\|_{\circ} \underset{(3)}{\leq} c_2 \|x\|_{\circ}.$$

Uma vez que as constantes que aparecem no primeiro e último termos de (4) não dependem do natural n_0 fixado, mostramos que existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\sum_{i=1}^n |a_i| < c \cdot \|x\|_0 \quad \text{e então} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq c \|x\|_0.$$

Além disso é claro que

$$\|x\|_0 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \text{ lembrando que}$$

$$\|x_n\| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Provamos então que a aplicação linear $T : X \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$, definida por

$$T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ é um isomorfismo.}$$

I.3.13 - Corolário: Se X é um espaço de Banach que contém um subespaço fechado com base subsimétrica e não isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ (ou X contém subsequência básica ^{subsim} não equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$) então se $\alpha \in BV[0,1]$ vale:

$$D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X) \Leftrightarrow \alpha_C \text{ é constante.}$$

Conseqüentemente, nessas condições temos

$$D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X) \Leftrightarrow D_{\alpha_C}(X) = R_{\alpha_C}(X)$$

Prova: I.3.12 e I.1.12.

I.3.14 - Corolário: Se $X \in \{c_0(\mathbb{N}), \ell_p(\mathbb{N}), 1 < p \leq \infty\}$ então $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$ para toda $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

Prova: Para $X \in \{c_0(\mathbb{N}), \ell_p(\mathbb{N}), 1 < p < \infty\}$ basta lembrar que a base canônica é subsimétrica e que X não é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ ([LT] 2.a) e aplicar I.3.12. Para $X = \ell_\infty(\mathbb{N})$ basta aplicar I.1.12.

I.3.15 - Observação: Como a classe dos espaços de Banach com base subsimétrica e não isomorfos a $\ell_1(\mathbb{N})$ é maior que $\{c_0(\mathbb{N}), \ell_p(\mathbb{N}), 1 < p < \infty\}$, vale então um resultado mais geral que o enunciado em I.3.14. Neste trabalho há alguns exemplos de espaços dessa classe como os espaços seqüenciais de Orlicz (com a função de Orlicz satisfazendo a condição Δ_2) definidos em III.1.11 e os espaços de Lorentz definidos em II.2.7).

A proposição a seguir é ainda consequência de I.3.12 e será utilizada em III.5.

I.3.16 - Proposição: Se X é um espaço de Banach com base subsimétrica e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante então

$$D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*) \Leftrightarrow X \text{ é isomorfo a } c_0(\mathbb{N}).$$

Prova: Por I.2.7 basta provar a implicação direta. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a base subsimétrica de X e $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ seu sistema biortogonal. Se $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \dots$ é uma subsequência de $\mathbb{N}$ temos ([LT] 3.a.2) que $S_{\{n_i\}} : X \rightarrow Z$, $Z = [\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}]$, definido por $S_{\{n_i\}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{n_i}$ é um isomorfismo e como $S_{\{n_i\}}^* : Z^* \rightarrow X^*$ é tal que

$S_{\{n_i\}}^* (x_{n_i}^*|_Z) = x_i^*$, $i=1,2,\dots$, e $S_{\{n_i\}}^*$ é isomorfismo temos $\{x_{n_i}^*|_Z\}_{i=1}^{\infty}$ equivalente a $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. Além disso, se T é a aplicação linear, $T : [\{x_{n_i}^*\}_{i=1}^{\infty}] \rightarrow [\{x_{n_i}^*|_Z\}_{i=1}^{\infty}]$ definida por $T(x_{n_i}^*) = x_{n_i}^*|_Z$ temos que T é isometria sobrejetora, logo $\{x_{n_i}^*\}_{i=1}^{\infty}$ é equivalente a $\{x_{n_i}^*|_Z\}_{i=1}^{\infty}$, portanto temos $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ equivalente a $\{x_{n_i}^*\}_{i=1}^{\infty}$. Como $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é incondicional temos facilmente que $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ é incondicional e então o que fizemos mostra que $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ é sequência básica subsimétrica de X^* .

Temos então por I.1.12 que $D_{\alpha}([\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}]) = R_{\alpha}([\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}])$.

Por I.3.12 segue que $[\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}]$ é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ e então pela unicidade da base submétrica de $\ell_1(\mathbb{N})$ ([LT] 3.b.5) temos que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ é equivalente à base canônica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Se $U : [\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}] \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ é o isomorfismo tal que $U(x_n^*) = e_n$, $n=1,2,\dots$ e se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$, temos que o operador adjunto U^* satisfaz $U^*(\hat{f}_n) = \hat{x}_n$, $n=1,2,\dots$, sendo $\hat{f}_n \in (\ell_1(\mathbb{N}))^*$ definido por $\hat{f}_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) = a_n$ e $\hat{x}_n \in [\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}]^*$ definido por $\hat{x}_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^* \right) = a_n$, $n=1,2,\dots$

Verifiquemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é equivalente a $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\text{Seja } \varphi : X \rightarrow \left[\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right]^* \text{ definida por } \varphi(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^* \right) = \\ = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^* \right) (x).$$

Claramente temos $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in X$.

Por outro lado, dado $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ seja, para cada $n=1, 2, \dots$, $X_n = [\{x_i\}_{i=1}^n]$ e $y_n^* \in [\{x_i^* \mid x_n\}_{i=1}^n]$ tal que $\|y_n^*\| = 1$ e $y_n^*(P_n(x)) = \|P_n(x)\|$ onde $P_n: X \rightarrow X_n$ é definido por

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

$$\text{Se } \tilde{y}_n^* = y_n^* \circ P_n \text{ então } \tilde{y}_n^* = \sum_{i=1}^n b_i^* x_i^* \text{ se } y_n^* = \sum_{i=1}^n b_i^* x_i^* \mid_{X_n}.$$

Como $(\varphi(x))(\tilde{y}_n^*) = \tilde{y}_n^*(x)$ temos $\|P_n(x)\| = y_n^*(P_n(x)) = \tilde{y}_n^*(x) \leq$

$k \cdot \|\varphi(x)\|$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \sup_n \|P_n\|$ que é a constante básica de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Consequentemente temos $\|x\| \leq k \|\varphi(x)\|$. Logo φ é um isomorfismo sobre sua imagem...

Como $\varphi(x_n) = \hat{x}_n$, $n \in \mathbb{N}$, temos então $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ equivalente a $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Uma vez que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é conhecidamente equivalente a $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ e U^* é isomorfismo temos então $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ equivalente a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ o que mostra que X é isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$.

I.3.17 - Observação: O espaço de Banach X_T , definido em II.3.16, tem base de Schauder incondicional e é tal que $D_{\alpha}(X_T^*) = R_{\alpha}(X_T^*)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$. Entretanto, X_T não tem subespaço fechado isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$, o que prova que o resultado I.3.16 não pode ser estendido à classe dos espaços de Banach com base incondicional. Para verificação das propriedades mencionadas de X_T , consultar [Ti].

CAPÍTULO II

REFLEXIVIDADE, PROPRIEDADE DE SCHUR E HEREDITARIEDADE
 $\ell_1(N)$ LIGADOS A α -INTEGRAÇÃO SEGUNDO RIEMANN E DARBOUX.

OS SPREADING MODELS E AS SUPER PROPRIEDADES

$$D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X) \text{ E } D_{\alpha}(X) \subsetneq R_{\alpha}(X).$$

**II.1 - REFLEXIVIDADE E CARACTERIZAÇÃO DAS p -SOMAS, $p=0$ OU $1 \leq p \leq \infty$,
EM RELAÇÃO A $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$**

Iniciamos este parágrafo caracterizando os espaços de Banach X da forma

$$X = \left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_p, \quad 1 \leq p \leq \infty \text{ ou } p = 0 \quad (\text{II.1.1})$$

quanto ao problema $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante, o que generaliza resultados obtidos nos parágrafos anteriores para $c_0(\mathbb{N})$ e $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$.

A seguir mostramos em II.1.13, que como acontece para $\alpha(t) = t([R])$, também existem espaços reflexivos (ver Observação II.1.5) X , de dimensão infinita, com $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$, generalizando o resultado encontrado em [R]. Isso foi feito, provando-se em II.1.10 que o método de construção de espaços de Banach X com $D(X) = R(X)$, desenvolvido por A. Gilioli em [G] é generalizável para a α -integração, $\alpha \in BV[0,1]$.

II.1.1 - Notação: Sejam Γ um conjunto não vazio, $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ uma família de espaços de Banach e $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. O símbolo $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_p$ indicará o espaço de Banach cujos elementos são as famílias $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $x_\gamma \in X_\gamma$, com $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|^p < \infty$, munido da norma

$$\left\| (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \right\|_p = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Se $p = \infty$ o símbolo $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_\infty$ indicará o espaço de Banach cujos

elementos são as famílias $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $x_\gamma \in X_\gamma$, com $\sup_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| < \infty$, mu

nido da norma $\|(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$.

O símbolo $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_0$ indicará o subespaço de $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_\infty$ for
mado pelas famílias $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $x_\gamma \in X_\gamma$, tais que o conjunto

$\{\gamma \in \Gamma : \|x_\gamma\| > \varepsilon\}$ é finito, para todo $\varepsilon > 0$.

II.1.2 - Proposição: Sejam $\alpha \in BV[0,1]$, Γ um conjunto não vazio e $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ uma família de espaços de Banach com $D_\alpha(X_\gamma) = R_\alpha(X_\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$.
Então

$$D_\alpha \left[\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1 \right] = R_\alpha \left[\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1 \right]$$

Prova: A prova segue a mesma linha da demonstração de I.2.7, embo
ra trabalhemos com somas indexadas em um conjunto não necessaria-
mente enumerável.

É claro que basta supor α não constante e por I.1.31 podemos supor α crescente.

Suponhamos que existe $f \in R_\alpha(X)$ e $f \notin D_\alpha(X)$, sendo
 $X = \left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1$. Por I.1.17 e I.1.25 temos $\mu_\alpha(Df) > 0$.

Como $Df = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n = \{t \in [0,1] : w(f, \{t\}) \geq \frac{1}{n}\}$, seja
 $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_\alpha(E_{n_0}) > 0$.

Dada $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$, denotemos por $I_i = [t_{i-1}, t_i]$,
 $i = 1, \dots, |d|$. Sejam $i_1, \dots, i_p$ os elementos de $\{1, 2, \dots, |d|\}$ tais
que

$$\mu_\alpha(I_{i_k} \cap E_{n_0}) > 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Seja $r_1 \in \overset{\circ}{I}_{i_1} \cap E_{n_0}$ e $s_1 \in I_{i_1}$ tais que $v_1 = f(r_1) - f(s_1)$
é tal que $\|v_1\| \geq \frac{1}{2n_0}$.

Como $v_1 = (x_\gamma^1)_{\gamma \in \Gamma} \in X$, o conjunto $J_1 = \{\gamma \in \Gamma : x_\gamma^1 \neq 0\}$ é
enumerável.

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário seja $F_1 \subset J_1$, F_1 finito, tal que

$$\sum_{\gamma \in (\Gamma - F_1)} \|x_\gamma^1\| < \frac{\varepsilon}{2^{2V[\alpha]}}$$

Para cada $\lambda \in \Gamma$ definimos $p_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ por $p_\lambda \left((x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \right) = x_\lambda$. Como $f \in R_\alpha(X)$, I.1.8 garante que $(p_\lambda \circ f) \in R_\alpha(X_\lambda)$, $\forall \lambda \in \Gamma$ e como por hipótese $D_\alpha(X_\lambda) = R_\alpha(X_\lambda)$ temos $(p_\lambda \circ f) \in D_\alpha(X_\lambda)$, $\forall \lambda \in \Gamma$.

Logo $\mu_{\hat{\alpha}} \left[\bigcup_{\lambda \in J_1} (D(p_\lambda \circ f)) \right] = 0$, por I.1.25, portanto existe $r_2 \in \overset{\circ}{I}_{i_2} \cap E_{n_0}$, $r_2 \notin \bigcup_{\lambda \in J_1} D(p_\lambda \circ f)$ e existe $s_2 \in I_{i_2}$ tais que

$$\|f(r_2) - f(s_2)\| \geq \frac{1}{2n_0} \quad \text{e} \quad \sum_{\lambda \in F_1 \cap J_1} \|(p_\lambda \circ f)(r_2) - (p_\lambda \circ f)(s_2)\| < \frac{\varepsilon}{2^3 v[\alpha]}$$

Se $v_2 = f(r_2) - f(s_2) = (x_\gamma^2)_{\gamma \in \Gamma}$, seja $J_2 \subset \Gamma$ o conjunto enumerável $J_2 = \{\gamma \in \Gamma : x_\gamma^2 \neq 0\}$.

Seja $F_2 \subset \Gamma$, $F_2 \supset F_1$, F_2 finito tal que

$$\sum_{\gamma \in (\Gamma - F_2)} \|x_\gamma^2\| < \frac{\varepsilon}{2^4 v[\alpha]}.$$

Como antes temos $\mu_{\hat{\alpha}} \left[\bigcup_{\gamma \in J_1 \cup J_2} (D(p_\lambda \circ f)) \right] = 0$, logo existe

$r_3 \in \overset{\circ}{I}_{i_3} \cap E_{n_0}$, $r_3 \notin \bigcup_{\gamma \in J_1 \cup J_2} D(p_\lambda \circ f)$ e existe $s_3 \in I_{i_3}$ tal que

$$\|f(r_3) - f(s_3)\| \geq \frac{1}{2n_0} \quad \text{e} \quad \sum_{\lambda \in F_2 \cap (J_1 \cup J_2)} \|(p_\lambda \circ f)(r_3) - (p_\lambda \circ f)(s_3)\| < \frac{\varepsilon}{2^5 v[\alpha]}$$

Seja $v_3 = f(r_3) - f(s_3) = (x_\gamma^3)_{\gamma \in \Gamma}$ e $J_3 \subset \Gamma$ o conjunto enumerável
 $J_3 = \{\gamma \in \Gamma : x_\gamma^3 \neq 0\}$.

Seja $F_3 \subset \Gamma$, $F_3 \supset F_2$, F_3 finito tal que

$$\sum_{\gamma \in (\Gamma - F_3)} \|x_\gamma^3\| < \frac{\varepsilon}{2^6 V[\alpha]}.$$

Continuando o processo obtemos $v_1, v_2, \dots, v_p$ com as propriedades correspondentes.

Sejam

$$\bar{v}_1 = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \text{ com } x_\gamma = x_\gamma^1 \text{ se } \gamma \in F_1 \text{ e } x_\gamma = 0 \text{ se } \gamma \notin F_1$$

$$\bar{v}_2 = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \text{ com } x_\gamma = x_\gamma^2 \text{ se } \gamma \in (F_2 - F_1 \cap J_1) \text{ e } x_\gamma = 0, \\ \text{caso contrário}$$

$\vdots$

$$\bar{v}_p = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \text{ com } x_\gamma = x_\gamma^p \text{ se } \gamma \in \left(F_p - F_{p-1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} J_i \right) \right) \text{ e}$$

$$x_\gamma = 0 \text{ caso contrário.}$$

Então se $V_k = V_{I_{i_k}}[\alpha]$, $k = 1, 2, \dots, p$ temos

$$\left\| \sum_{k=1}^p v_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^p \bar{v}_k + \sum_{k=1}^p (v_k - \bar{v}_k) \right\| \geq \\ \left\| \sum_{k=1}^p \bar{v}_k \right\| - \left\| \sum_{k=1}^p (v_k - \bar{v}_k) \right\|. \quad (1)$$

Por construção temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^p \bar{v}_k v_k \right\| &= \sum_{k=1}^p \left\| \bar{v}_k \right\| v_k \quad e \\ \left\| \bar{v}_k \right\| &= \sum_{\gamma \in \left(F_k - F_{k-1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} J_i \right) \right)} \left\| x_{\gamma}^k \right\| = \\ &= \left\| v_k \right\| - \sum_{\gamma \in F_k} \left\| x_{\gamma}^k \right\| - \sum_{\gamma \in F_{k-1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} J_i \right)} \left\| x_{\gamma}^k \right\| \geq \frac{1}{2n_0} - \\ &\quad - \frac{1}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^{2k-1}} + \frac{\epsilon}{2^{2k}} \right) \end{aligned}$$

para $k=2, \dots, p$ e

$$\begin{aligned} \left\| \bar{v}_1 \right\| &\geq \frac{1}{2n_0} - \frac{\epsilon}{2^2 v[\alpha]} \quad . \quad \text{Logo} \\ \left\| \sum_{k=1}^p \bar{v}_k v_k \right\| &= \sum_{k=1}^p \left\| \bar{v}_k \right\| v_k \geq \sum_{k=1}^p \frac{v_k}{2n_0} - \left[\frac{v_1}{v[\alpha]} \frac{\epsilon}{2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_2}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^3} + \frac{\epsilon}{2^4} \right) + \dots + \frac{v_p}{v[\alpha]} \left(\frac{\epsilon}{2^{2p-1}} + \frac{\epsilon}{2^{2p}} \right) \right] \geq \\ &\quad \frac{1}{2n_0} \mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0}) - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

Além disso

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^p (v_k - \bar{v}_k) v_k \right\| &\leq \sum_{k=1}^p \|v_k - \bar{v}_k\| v_k \leq \\
\frac{v_1}{v[\alpha]} \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{v_2}{v[\alpha]} \left(\frac{\varepsilon}{2^3} + \frac{\varepsilon}{2^4} \right) + \dots + \frac{v_p}{v[\alpha]} \left(\frac{\varepsilon}{2^{2p}} + \frac{\varepsilon}{2^{2p-1}} \right) &\leq \\
\leq \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{2p}} &< \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)
\end{aligned}$$

De (1), (2) e (3) temos

$$\left\| \sum_{k=1}^p v_k v_k \right\| \geq \mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0}) \frac{1}{2n_0} - \varepsilon.$$

Logo se $\varepsilon_0 > 0$ é tal que $\varepsilon_0 < \frac{1}{4n_0} \mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0})$ temos que para qualquer partição $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ existe uma escolha $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$,

$$\zeta_i = \zeta'_i \quad \text{se } i \neq i_1, \dots, i_p$$

$$\zeta_i = r_i, \quad \zeta'_i = s_i \quad \text{se } i = i_k, k=1, \dots, p$$

com

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^p [f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)] [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| = \\
&= \left\| \sum_{k=1}^p v_k v_k \right\| > \varepsilon_0, \text{ contrariando, por I.1.31 o fa-}
\end{aligned}$$

to de $f \in R_\alpha(X)$, inicialmente suposto.

II.1.3 - Colorário: Se $\alpha \in BV[0,1]$, Γ é um conjunto não vazio e $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família de espaços de Banach, então

$$D_\alpha \left[\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1 \right] = R_\alpha \left[\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1 \right] \Leftrightarrow D_\alpha(X_\gamma) = R_\alpha(X_\gamma), \forall \gamma \in \Gamma.$$

Prova: I.1.12 e II.1.2

II.1.4 - Proposição: Sejam $\alpha \in BV[0,1]$, Γ um conjunto não vazio e $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ uma família de espaços de Banach, $X_\gamma \neq \{0\}$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Se $X = \left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_p$, $1 < p \leq \infty$, ou $p = 0$, são equivalentes

(a) $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$

(b) $\begin{cases} \alpha_c \text{ é constante ou} \\ \Gamma \text{ é finito e } D_\alpha(X_\gamma) = R_\alpha(X_\gamma), \forall \gamma \in \Gamma \end{cases}$

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b): Se Γ é infinito é fácil ver que X tem subespaço fechado isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ ou a $\ell_p(\mathbb{N})$ $1 < p \leq \infty$, logo se $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ temos por I.1.12 e I.3.14 que α_c é constante.

Portanto se α_C não é constante temos Γ finito e como X tem subespaço fechado isomorfo a X_γ , $\forall \gamma \in \Gamma$, temos por I.1.12 que $D_\alpha(X_\gamma) = R_\alpha(X_\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Se α_C é constante então por I.3.4 temos $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ para todo X Banach.

Se Γ é finito e $D_\alpha(X_\gamma) = R_\alpha(X_\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ temos $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ por I.1.8 e I.1.11.

II.1.5 - Observação: A proposição II.1.2 nos fornece exemplos [incluindo $\ell_1(\Gamma)$] de espaços de Banach com $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ e todos não reflexivos (se Γ é infinito e $X_\gamma \neq \{0\}$, $\forall \gamma \in \Gamma$). Se X_γ é reflexivo e $X_\gamma \neq \{0\}$, $\forall \gamma \in \Gamma$, Γ infinito, então II.1.4 fornece exemplos de espaços reflexivos (incluindo $\ell_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$) todos com $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

A observação desses resultados poderia levar a pensar que se X é reflexivo então $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$ para alguma $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante. Mostraremos que isso não é verdade, como já mencionamos na introdução deste parágrafo.

Passemos então as definições e notações necessárias para o entendimento do que faremos.

II.1.6 - Definição: Seja Y um espaço de Banach com base incondicional $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ que suporemos normalizada e com constante de incondicionalidade igual a 1 ([LT] 1.c.). Um par $(Y, \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ nessas condições será chamado espaço padrão.

II.1.7 - Notação: Se $(Y, \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ é um espaço padrão e $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de espaços de Banach, denotaremos por $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_Y$ o espaço de Banach ([G] 1.1) formado pelas seqüências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ com $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n$ convergente em Y , onde $\|x_n\|$ indica a norma de x_n em X_n , $n \in \mathbb{N}$.

A norma considerada em $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_Y$ é $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n \right\|_Y$.

II.1.8 - Definição: Se $(Y, \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ é um espaço padrão e $y_1, y_2, \dots, y_k$ são elementos de Y , diremos que $(y_i)_{i=1}^k$ é uma seqüência de blocos

se $y_1 = \sum_{n=p_1}^{p_2} a_n e_n$, $y_2 = \sum_{n=p_2+1}^{p_3} a_n e_n$, $\dots$, $y_k = \sum_{n=p_{k-1}+1}^{p_k} a_n e_n$ com

$$1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k.$$

II.1.9 - Definição: Se $(Y, \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ é um espaço padrão denotaremos por P a seguinte propriedade

P: existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo $q \in \mathbb{N}$ existe $m_q \in \mathbb{N}$ de modo que dada uma seqüência de blocos $y_1, \dots, y_q$ com $m_q \leq p_1 < p_2 < \dots < p_q$ temos

$$\left\| \sum_{n=1}^q y_n \right\| \geq c \sum_{n=1}^q \|y_n\|$$

Observamos que $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n \right)_1 \left[\log \ell_1(\mathbb{N}) \right]$ satisfaz P para $m_q = c = 1$,

$\forall q \in \mathbb{N}$, e que o espaço T (II.1.11) também satisfaz P para $c = \frac{1}{2}$ e $m_q = q-1$.

II.1.10 - Proposição: Seja $(Y, \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ um espaço padrão com a propriedade P e $\alpha \in BV[0,1]$. Se $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de espaços de Banach com $D_{\alpha}(X_n) = R_{\alpha}(X_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então se $Z = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n \right)_Y$ temos $D_{\alpha}(Z) = R_{\alpha}(Z)$. Em particular temos $D_{\alpha}(Y) = R_{\alpha}(Y)$, para toda $\alpha \in BV[0,1]$.

Prova: Por I.1.24 e I.1.31 podemos supor α crescente e é claro que basta considerar α não constante.

Suponhamos, por absurdo, que existe $f \in R_{\alpha}(Z)$ e $f \notin D_{\alpha}(Z)$.

Por I.1.17 e I.1.25 temos $\mu_{\hat{\alpha}}(Df) > 0$ e como $Df = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,

$$E_n = \{t \in [0,1] : w(f, \{t\}) \geq \frac{1}{n}\}, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N}$$

com $\mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0}) > 0$.

Se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ e $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$, sejam $i_1, i_2, \dots, i_p$ os elementos de $\{1, 2, \dots, |d|\}$ tais que

$$\mu_{\hat{\alpha}}(I_{i_j} \cap E_{n_0}) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Para $k \in \mathbb{N}$ seja $\Pi_k : Z \rightarrow X_k$ a projeção definida por

$$\Pi_k \left((x_n)_{n=1}^{\infty} \right) = x_k.$$

Como $D_{\alpha}(X_k) = R_{\alpha}(X_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos que $(\Pi_k \circ f) \in D_{\alpha}(X_k)$ (I.1.8), logo $\mu_{\hat{\alpha}} \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} D(\Pi_k \circ f) \right] = 0$ por I.1.25.

Portanto dado $\varepsilon > 0$ arbitrário temos:

Existem $r_1 \in \overset{\circ}{I}_{i_1} \cap E_{n_0}$, $r_1 \notin \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} D(\Pi_n \circ f) \right]$, e $s_1 \in I_{i_1}$ tais que $\|f(r_1) - f(s_1)\| \geq \frac{1}{2n_0}$ e

$$\sum_{n=1}^{k_1} \left\| (\Pi_n \circ f)(r_1) - (\Pi_n \circ f)(s_1) \right\| < \frac{\varepsilon}{v[\alpha]p}, \quad \text{sendo}$$

$k_1 = m_p$ da propriedade P de Y.

Então se $z_1 = f(r_1) - f(s_1) = (x_n^1)_{n=1}^{\infty}$ temos $\|z_1\| \geq \frac{1}{2n_0}$ e

$$\sum_{n=1}^{k_1} \left\| \Pi_n(z_1) \right\| = \sum_{n=1}^{k_1} \|x_n^1\| < \frac{\varepsilon}{p v[\alpha]}$$

Como $\|z_1\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k \|x_n^1\| e_n \right\|_Y$ existe $k_2 > k_1$ tal que

$$\left\| \sum_{n > k_2} \|x_n^1\| e_n \right\|_Y < \frac{\varepsilon}{V[\alpha]p} \quad \text{ou}$$

$$\left\| (0, \dots, 0, x_{k_2+1}^1, x_{k_2+2}^1, \dots) \right\| < \frac{\varepsilon}{V[\alpha]p}$$

Existem $r_2 \in \overset{\circ}{I}_{i_2} \cap E_{n_0}$, $r_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [D(\Pi_n \circ f)]$, e $s_2 \in I_{i_2}$ com $\|f(r_2) - f(s_2)\| \geq \frac{1}{2n_0}$ e

$$\sum_{n=1}^{k_2} \left\| (\Pi_n \circ f)(r_2) - (\Pi_n \circ f)(s_2) \right\| < \frac{\varepsilon}{pV[\alpha]}.$$

Se $z_2 = f(r_2) - f(s_2) = (x_n^2)_{n=1}^{\infty}$, temos $\|z_2\| \geq \frac{1}{2n_0}$ e

$$\sum_{n=1}^{k_2} \|x_n^2\| < \frac{\varepsilon}{pV[\alpha]}.$$

Como $\|z_2\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k \|x_n^2\| e_n \right\|_Y$ existe $k_3 > k_2$ tal que

$$\left\| \sum_{n > k_3} \|x_n^2\| e_n \right\|_Y < \frac{\varepsilon}{pV[\alpha]} \quad \text{ou}$$

$$\left\| (0, 0, \dots, 0, x_{k_3+1}^2, x_{k_3+2}^2, \dots) \right\| < \frac{\varepsilon}{pV[\alpha]}.$$

Existem $r_3 \in \overset{\circ}{I}_{i_3} \cap E_{n_0}$, $r_3 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [D(\Pi_n \circ f)]$, e $s_3 \in I_{i_3}$

$$\text{com } \|f(r_3) - f(s_3)\| \geq \frac{1}{2n_0} \text{ e } \sum_{n=1}^{k_3} \|(\Pi_{n \circ f})(r_3) - (\Pi_{n \circ f})(s_3)\| < \frac{\varepsilon}{pV[\alpha]} .$$

$$\text{Se } z_3 = f(r_3) - f(s_3) = (x_n^3)_{n=1}^{\infty} \text{ então } \|z_3\| \geq \frac{1}{2n_0} \text{ e}$$

$$\sum_{n=1}^{k_3} \|x_n^3\| < \frac{\varepsilon}{pV[\alpha]} . \text{ Como } z_3 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum \|x_n^3\| e_n \right\|_Y$$

$$\text{existe } k_4 > k_3 \text{ com } \left\| \sum_{n > k_4} \|x_n^3\| e_n \right\|_Y < \frac{\varepsilon}{pV[\alpha]} \text{ ou}$$

$$\left\| (0, \dots, 0, x_{k_4+1}^3, x_{k_4+2}^3, \dots) \right\| < \frac{\varepsilon}{pV[\alpha]}$$

Continuando o processo obtemos $z_1, z_2, \dots, z_p$ com as propriedades correspondentes.

Sejam

$$\bar{z}_1 = (0, 0, \dots, 0, x_{k_1+1}^1, x_{k_1+2}^1, \dots, x_{k_2}^1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$\bar{z}_2 = (0, \dots, 0, x_{k_2+1}^2, x_{k_2+2}^2, \dots, x_{k_3}^2, 0, 0, \dots)$$

$\vdots$

$$\bar{z}_p = (0, \dots, 0, x_{k_{p-1}+1}^p, x_{k_{p-1}+2}^p, \dots, x_{k_{p+1}}^p, 0, \dots)$$

Logo

$$\|z_1 - \bar{z}_1\| = \left\| (x_1^1, \dots, x_{k_1}^1, 0, 0, \dots, 0, x_{k_2+1}^1, \dots) \right\| \leq$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{k_1} \|x_n^1\| e_n \right\|_Y + \left\| (0, 0, \dots, 0, x_{k_2+1}^1, x_{k_2+2}^1, \dots) \right\| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{k_1} \|x_n^1\| + \frac{\epsilon}{pV[\alpha]} \leq \frac{2\epsilon}{pV[\alpha]}$$

$$\left\| z_2 - \bar{z}_2 \right\| = \left\| (x_1^2, \dots, x_{k_2}^2, 0, 0, \dots, 0, x_{k_3+1}^2, \dots) \right\| \leq$$

$$\left\| (x_1^2, \dots, x_{k_2}^2, 0, 0, \dots, 0, \dots) \right\| + \frac{\epsilon}{pV[\alpha]} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{k_2} \|x_n^2\| + \frac{\epsilon}{pV[\alpha]} \leq \frac{2\epsilon}{pV[\alpha]} \quad . \quad \text{Analogamente temos}$$

$$\left\| z_3 - \bar{z}_3 \right\| \leq \frac{2\epsilon}{pV[\alpha]} \quad , \dots , \left\| z_p - \bar{z}_p \right\| \leq \frac{2\epsilon}{pV[\alpha]} \quad .$$

Por outro lado se $V_j = V_{I_{i_j}}[\alpha]$, $j=1, \dots, p$ e

$$y_j = \sum_{n=k_{j-1}+1}^{k_j} \|x_n^j\| v_j e_n \quad , \quad y_j \in Y, \quad j=1, \dots, p, \quad \text{temos,}$$

lembrando que Y satisfaz P e que $k_1 = m_p$, o seguinte

$$\left\| \sum_{j=1}^p y_j \right\|_Y \geq c \cdot \sum_{j=1}^p \|y_j\|_Y$$

Como, pela definição da norma em Z , vale

$$\left\| \sum_{j=1}^p y_j \right\|_Y = \left\| v_1 \bar{z}_1 + v_2 \bar{z}_2 + \dots + v_p \bar{z}_p \right\| \text{ e}$$

$$\|y_j\|_Y = \|v_j \bar{z}_j\|, \quad j = 1, 2, \dots, p \text{ temos}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^p \bar{z}_j v_j \right\| \geq c \cdot \sum_{j=1}^p \|v_j \bar{z}_j\| = c \cdot \sum_{j=1}^p v_j \|\bar{z}_j\|.$$

Pelo feito anteriormente temos

$$\|\bar{z}_j\| = \|z_j - (z_j - \bar{z}_j)\| \geq \|z_j\| - \|z_j - \bar{z}_j\| \geq \frac{1}{2n_0} - \frac{2\varepsilon}{pV[\alpha]},$$

$j=1, 2, \dots, p$. Conseqüentemente

$$\left\| \sum_{j=1}^p \bar{z}_j v_j \right\| \geq c \cdot \sum_{j=1}^p v_j \left(\frac{1}{2n_0} - \frac{2\varepsilon}{pV[\alpha]} \right) =$$

$$c \cdot \frac{1}{2n_0} \sum_{j=1}^p v_j - c \cdot \sum_{j=1}^p \frac{2\varepsilon v_j}{pV[\alpha]} \geq \frac{c}{2n_0} \mu_{\hat{\alpha}} \left(I_{i_1} \cup \dots \cup I_{i_p} \right) - c \cdot 2\varepsilon$$

$$\geq \frac{c}{2n_0} \mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0}) - c \cdot 2\varepsilon > 3\varepsilon \text{ se } \varepsilon < \frac{c \mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0})}{2n_0(2C+1)}.$$

Portanto se fizermos para $d \in D$ a escolha

$$\zeta_i = \zeta_i' \text{ se } i \neq i_1, \dots, i_p$$

$$\zeta_{ij} = r_j \text{ e } \zeta_{ij}' = s_j \text{ se } j=1, \dots, p, \text{ teremos}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[f(\zeta_i) - f(\zeta'_i) \right] \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \right\| = \left\| \sum_{j=1}^p \tilde{z}_j v_j \right\| > \varepsilon$$

para algum $\varepsilon < \frac{C \cdot \mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0})}{2n_0(2C+3)}$ o que mostra que $f \notin R_{\alpha}(Z)$, contrariando o suposto inicialmente.

A última afirmação do enunciado é provada tomando-se $X_n = \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e aplicando I.1.13.

II.1.11 - Exemplo: O espaço T.

Se T_0 é o conjunto das seqüências quase nulas de escalares, denotemos por e_n o elemento de T_0 que tem 1 na n -ésima casa e zero nas demais.

Se $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in T_0$ definimos

$$\|x\|_0 = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \quad \text{e por recorrência}$$

$$\|x\|_{m+1} = \max \left\{ \|x\|_m, \frac{1}{2} \max_{j=1}^k \left\| \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} a_n e_n \right\|_m \right\}$$

sendo que o máximo interior as chaves é tomado sobre todas as escolhas de $k \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{k+1}$, $k=1,2,3,\dots$

Se considerarmos $\|x\| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x\|_m$ teremos que $\|\cdot\|$ é norma em T_0 e denotaremos por T o espaço de Banach que é o completado de T_0 com essa norma.

Em ([LT] 2.e.1) estão provados os seguintes resultados sobre T :

$$(a) \quad \|x\| = \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \frac{1}{2} \sup \left\{ \sum_{j=1}^k \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|, \right. \right. \\ \left. \left. k \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{k+1}, k=1,2,\dots \right\} \right\} \quad \text{para todo } x \in T.$$

(b) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é base incondicional de T , $\|e_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e a constante de incondicionalidade de $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é igual a 1.

(c) T não contém subespaços fechados isomorfos a $c_0(\mathbb{N})$ ou $\ell_1(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$.

(d) T é reflexivo (segue de (b) e (c)).

II.1.12 - Proposição: Se $\alpha \in BV[0,1]$ então $D_\alpha(T) = R_\alpha(T)$.

Prova: Por II.1.11(a) temos que T satisfaz a propriedade P , para $c = \frac{1}{2}$ e $m_q = q-1$ e II.1.11(b) garante que $(T, \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ é um espaço padrão.

Temos então a tese aplicando II.1.10 para $(T, \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$.

II.1.13 - Corolário: Existe um espaço de Banach T , reflexivo, de dimensão infinita, com $D_{\alpha}(T) = R_{\alpha}(T)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$.

Prova: II.1.12 e II.1.11.

A proposição seguinte mostra que o método apresentado realmente contrói novos espaços reflexivos de dimensão infinita com $D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$.

II.1.14 - Proposição: Existe um espaço de Banach X reflexivo de dimensão infinita com $D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ e X não é isomorfo a um subespaço de qualquer produto finito de cópias de T .

Prova: Façamos $Y = T$ e $X_n = T$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então $Z = \left(\begin{array}{c} \bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n \end{array} \right)_T$ é tal que $D_{\alpha}(Z) = R_{\alpha}(Z)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ por II.1.12 e II.1.10, lembrando que $(T, \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ é um espaço padrão.

Em ([G]1.9) está provado que se $(Y_0, \{f_n\}_{n=1}^{\infty})$ é um espaço

padrão e $(Y_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de espaços de Banach não triviais então o espaço de Banach $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty Y_n\right)_{Y_1}$ é reflexivo se e somente se Y_1 é reflexivo e Y_n é reflexivo, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo Z é reflexivo de dimensão infinita por II.1.11(d).

Por II.1.10 e II.1.12 temos que $D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z), \forall \alpha \in BV[0,1]$.

Além disso em ([G] 3.4) está provado que se $(Y_1, \{f_n\}_{n=1}^\infty)$ é um espaço padrão reflexivo com a propriedade P e $(Y_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de espaços de Banach de dimensão infinita então o espaço $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty Y_n\right)_{Y_1}$ não é isomorfo a um subespaço de qualquer produto finito de cópias de Y_1 .

Isso mostra que Z não é isomorfo a um subespaço de qualquer produto finito de cópias de T .

II.2 - O ESPAÇO DE HAYDON. PROPRIEDADE DE SCHUR E HEREDITARIEDADE

$\ell_1(\mathbb{N})$

Lembrando que um Banach de dimensão infinita e reflexivo não pode ter a propriedade de Schur, o resultado II.1.13 mostrou que se X é um espaço de Banach, então

$$D_\alpha(X) = R_\alpha(X), \quad \forall \alpha \in BV[0,1] \not\Rightarrow X \text{ é um espaço de Schur.}$$

Em [R] consta como problema em aberto a recíproca da implicação anterior, para $\alpha(t) = t$, isto é, se todo Banach X com a propriedade de Schur teria $D(X) = R(X)$. Em 1981, nosso orientador foi informado da construção, por Richard Haydon, de um espaço de Banach, X_H , que responde negativamente a questão, isto é, X_H tem a propriedade de Schur e $D(X_H) \subsetneq R(X_H)$. Já que não temos informação de publicação desses resultados nosso orientador sugeriu que, a título de contribuição a pesquisadores desta área, fizéssemos aqui um estudo do espaço X_H . Mostramos em II.2.3 e II.2.4 propriedades de sua norma que permitiram provar, em II.2.5, que X_H é Schur e que $D_\alpha(X_H) \subsetneq R_\alpha(X_H)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ contínua não constante, provado em II.2.6. Logo temos

X espaço de Schur $\not\Rightarrow D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, $\alpha \in BV[0,1]$ contínua não constante.

Entretanto, mostramos em II.2.8 que se X é um Banach com base subsimétrica então são equivalentes:

- (i) $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ para alguma $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante
- (ii) X tem a propriedade de Schur.
- (iii) X é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Observamos que esse resultado não é válido na classe dos Banach com base incondicional uma vez que o espaço X_H tem base incondicional.

Ainda em relação a propriedade de Schur, é bem conhecido ([S]) que todo Banach com a propriedade de Schur é hereditariamente $\ell_1(\mathbb{N})$ (II.2.9). Foi conjecturado pelo nosso orientador que a recíproca desse resultado seria verdadeira. Exibimos em II.2.10 um espaço de Banach X , hereditariamente $\ell_1(\mathbb{N})$ e sem a propriedade de Schur, respondendo negativamente à conjectura. Além disso esse espaço de Banach X é tal que $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

II.2.1 - Definição: O espaço X_H .

Se $\mathcal{D} = \{(n,k): n=1,2,\dots \text{ e } 1 \leq k \leq 2^{n-1}\}$, dizemos que $\mathcal{D}$ é a árvore diádica, que n é o nível do elemento (n,k) e k indi-

ca sua posição no nível. Em [Ha], por exemplo, está definida uma ordem parcial sobre $\mathcal{D}$, que simplificadamente consiste no seguinte:

$(n, k) \geq (n_0, k_0)$ se (n, k) pertence ao cone iniciado em (n_0, k_0)

Indicaremos por $\mathbb{R}^{(\mathcal{D})}$ o conjunto das seqüências quase nulas de reais indexadas em $\mathcal{D}$ e por $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{D}}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{(\mathcal{D})}$.

Dado um subconjunto $\sigma \subset \mathcal{D}$ definimos a projeção $P_\sigma: \mathbb{R}^{(\mathcal{D})} \rightarrow \mathbb{R}^{(\mathcal{D})}$ por $P_\sigma[(a_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{D}}] = (b_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{D}}$ sendo $b_\gamma = a_\gamma$ se $\gamma \in \sigma$ e $b_\gamma = 0$ se $\gamma \notin \sigma$.

Uma seqüência $(n_i, k_i)_{i=1}^\infty$ de elementos de $\mathcal{D}$ se diz admissível se $n_1 < n_2 < \dots$ e $\forall i \in \mathbb{N}, \exists k, 1 \leq k \leq 2^{n_i-1}$, tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ com $j > i$ tem-se $(n_j, k_j) > (n_i, k)$.

Dada uma seqüência admissível $(n_i, k_i)_{i=1}^\infty$, $P_{(n_i, k_i)}$ indicará a projeção $P_{\sigma(n_i, k_i)}$ sendo

$$\sigma(n_i, k_i) = \left\{ (n, k) \in \mathcal{D} : (n, k) \geq (n_i, k_i) \text{ e } n_i \leq n < n_{i+1} \right\}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Se $x = (a_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{D}} = \sum_{\lambda \in \mathcal{D}} a_\lambda e_\lambda \in \mathbb{R}^{(\mathcal{D})}$ definimos

$\text{supp } x = \{\lambda \in \mathcal{D} : a_\lambda \neq 0\}$ e definimos

$$\|x\|_0 = \sup_{\lambda \in \mathcal{D}} |a_\lambda| \quad \text{e por recorrência}$$

$$\|x\|_{m+1} = \max \left(\|x\|_m, \frac{1}{2} \sup_A \left\{ \sum_{(n_i, k_i) \in A} \left\| (P_{(n_i, k_i)}(x)) \right\|_m \right\} \right),$$

$\forall m \in \mathbb{N}$, onde $A = (n_i, k_i)_{i=1}^\infty$ é uma seqüência admissível de elementos de $\mathcal{D}$ e o supremo é tomado em relação a todas as seqüências admissíveis A .

É fácil verificar que $\|x\| = \sup_m \|x\|_m$ é norma em $\mathbb{R}^{(\mathcal{D})}$. X_H é por definição o espaço de Banach que é o completado de $\mathbb{R}^{(\mathcal{D})}$ com essa norma.

Observamos que se $x \in X_H$ então

$$\|x\| = \max \left[\|x\|_0, \frac{1}{2} \sup_A \left\{ \sum_{(n_i, k_i) \in A} \|P_{(n_i, k_i)}(x)\| \right\} \right], \text{ sendo}$$

o supremo tomado como anteriormente.

II.2.2 - Definição: Um espaço de Banach X tem a propriedade de Schur se toda seqüência de elementos de X que converge fracamente a zero, converge a zero também em norma.

Os resultados II.2.3 e II.2.4 a seguir serão necessários para mostrar que X_H tem a propriedade de Schur.

II.2.3 - Lema: Para todo $m \in \mathbb{N}$, se $x_1, x_2, \dots, x_m$ são elementos de X_H com $\|x_j\| \leq 1$ e $\text{supp } x_j$ contido no cone iniciado em (n_0, k_j) , $n_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq 2^{n_0-1}$ então

$$\left\| \sum_{j=1}^m x_j \right\| \leq 3.$$

Prova: Faremos a prova por indução sobre m . Se $m = 1$ nada há a provar. Suponhamos então o resultado verdadeiro para $(m-1)$ elementos e mostremos que é válido para m elementos.

$$\text{Se } \left\| \sum_{j=1}^m x_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^m x_j \right\|_0 \text{ então } \left\| \sum_{j=1}^m x_j \right\| = \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\|_0 \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\| \leq 1 \text{ e provamos a tese.}$$

$$\text{Se } x = \sum_{j=1}^m x_j \text{ e } \|x\| = \frac{1}{2} \sup_A \left\{ \sum_{(n_i, k_i) \in A} \|P_{(n_i, k_i)}(x)\| \right\},$$

dada $A = (n_i, k_i)_{i=1}^{\infty}$ podemos supor que (n_1, k_1) é tal que

$P_{(n_1, k_1)}(x) \neq 0$. Logo, lembrando a definição de sequência admissível e a disposição dos $\text{supp } x_j$, $1 \leq j \leq m$, observamos que para se obter o maior valor possível de

$$\sum_{(n_i, k_i) \in A} \|P_{(n_i, k_i)}(x)\|, A \text{ deve ser como nas figuras}$$

ras

isto é, existem no máximo dois elementos j_1 e j_2 , $1 \leq j_1 < j_2 \leq m$ tais que

$$\begin{aligned} \sum_{(n_i, k_i) \in A} \|P_{(n_i, k_i)}(x)\| &= \|P_{(n_1, k_1)}(x)\| + \|P_{(n_2, k_2)}(x_{j_1})\| + \\ &+ \sum_{i \geq 2} \|P_{(n_i, k_i)}(x_{j_2})\| \leq \|P_{(n_1, k_1)}(x - x_{j_2})\| + \|P_{(n_2, k_2)}(x_{j_1})\| + \\ &+ \sum_{i \geq 2} \|P_{(n_i, k_i)}(x_{j_2})\| \leq \|x - x_{j_2}\| + \|x_{j_1}\| + 2 \|x_{j_2}\|, \end{aligned}$$

observando que $\|P_{(n_i, k_i)}\| \leq 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$ e lembrando a propriedade da norma de X_H dada em II.2.1.

Pela hipótese de indução temos $\|x - x_{j_2}\| \leq 3$, logo

$$\sum_{(n_i, k_i) \in A} \|P_{(n_i, k_i)}(x)\| \leq 3 + 1 + 2 = 6, \quad \text{o que}$$

mostra que $\|x\| \leq 3$.

II.2.4 - Lema: Seja $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada de elementos de X_H com $\|x_j\| \geq \delta > 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e tal que existe uma subsequência de $\mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \dots$, de modo que $\text{supp } x_j \subset \{(n, k) \in \mathcal{D} : n_j \leq n < n_{j+1}\}$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Então $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência, $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$, ou seja existe uma constante $c > 0$ tal que para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer escalares $a_1, \dots, a_m$ tem-se

$$c \sum_{i=1}^m |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\|.$$

Prova: Para cada $j \in \mathbb{N}$, considerando os pontos (n_j, k) , $1 \leq k \leq 2^{n_j-1}$, e os cones neles iniciados podemos escrever

$$x_j = \sum_{k=1}^{2^{n_j-1}} x_j^k, \quad \text{sendo } x_j^1, \dots, x_j^{2^{n_j-1}} \text{ elementos}$$

de X_H com suportes disjuntos contidos nos cones iniciados em (n_j, k) , $k = 1, \dots, 2^{n_j-1}$, respectivamente.

Por II.2.3 temos então $\delta \leq \|x_j\| \leq 3 \max_{1 \leq k \leq 2^{n_j-1}} \|x_j^k\|$,

$\forall j \in \mathbb{N}$. Logo para cada $j \in \mathbb{N}$ existe k_j , $1 \leq k_j \leq 2^{n_j-1}$, com

$\|x_j^{k_j}\| \geq \frac{\delta}{3}$. Consideremos a seqüência $(n_j, k_j)_{j=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{D}$. Como em cada nível n_j temos apenas um número finito de pontos, logo um número finito de cones neles iniciados, e $(n_j, k_j)_{j=1}^{\infty}$ tem infinitos pontos distintos, podemos extrair de $(n_j, k_j)_{j=1}^{\infty}$ uma subseqüência, $(m_i, l_i)_{i=1}^{\infty}$, que é uma seqüência admissível de pontos de $\mathcal{D}$, pelo procedimento ilustrado na figura abaixo.

$$y_1 = x_1, y_2 = x_3, y_3 = x_4, y_4 = x_6, \dots$$

Se $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, \dots, a_m$ são escalares, denotando por y_i , $i \in \mathbb{N}$, o elemento da seqüência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ correspondente a $(m_i, l_i)_{i=1}^{\infty}$ isto é, $y_i = x_j$ se $(m_i, l_i) = (n_j, k_j)$ temos

$$\left\| \sum_{p=1}^m a_p y_p \right\| \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left\| P_{(m_i, l_i)} \left(\sum_{p=1}^m a_p y_p \right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\| P_{(m_i, l_i)} (a_i y_i) \right\| . \text{ Como para todo } i=1, \dots, m$$

temos $\left\| P_{(m_i, l_i)} (a_i y_i) \right\| = |a_i| \left\| P_{(m_i, l_i)} \left(x_j^{k_j} \right) \right\| = |a_i| \left\| x_j^{k_j} \right\| \geq$

$$\geq |a_i| \frac{\delta}{3} , \text{ então}$$

$$\left\| \sum_{p=1}^m a_p y_p \right\| \geq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m |a_i| \frac{\delta}{3} \text{ o que prova a tese.}$$

II.2.5 - Proposição: X_H tem a propriedade de Schur.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que existe uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X_H fracamente convergente a zero, $x_n \xrightarrow{w} 0$, mas não convergente a zero em norma. Podemos então supor (considerando uma subsequência, se necessário) que $\|x_n\| \geq \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Se } x_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{D}} a_{\lambda}^n e_{\lambda} , n \in \mathbb{N} , \text{ sejam } j_1 \in \mathbb{N}, j_1 > 1 , \quad e$$

$F_1 \subset \mathcal{D}$, F_1 finito formado por todos os elementos de $\mathcal{D}$ pertencentes aos (j_1-1) primeiros níveis, tal que

$$\left\| \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{D} \\ \lambda \notin F_1}} a_{\lambda}^1 e_{\lambda} \right\| < \frac{\delta}{2^2} . \text{ Logo se } y_1 = \sum_{\lambda \in F_1} a_{\lambda}^1 e_{\lambda}$$

temos $\|y_1\| > \frac{\delta}{2}$ e $\text{supp } y_1 \subset \{(n,k) \in \mathcal{D}, 1 \leq n < j_1\}$.

Se $\lambda \in \mathcal{D}$ e $\Pi_{\lambda} : X_H \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção $\Pi_{\lambda} \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} a_{\gamma} e_{\gamma} \right) = a_{\lambda}$,

temos $\Pi_{\lambda}(x_n) = a_{\lambda}^n \xrightarrow{n} 0$, uma vez que $x_n \xrightarrow{w} 0$. Logo existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\lambda \in F_1} |a_{\lambda}^{n_1}| < \frac{\delta}{2^4} \text{ ou } \left\| \sum_{\lambda \in F_1} a_{\lambda}^{n_1} e_{\lambda} \right\| < \frac{\delta}{2^4} .$$

Seja $j_2 > j_1$ e $F_2 \subset \mathcal{D}$, F_2 finito, formado por todos os elementos de $\mathcal{D}$ pertencentes aos (j_2-1) primeiros níveis tal que

$$\left\| \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{D} \\ \lambda \notin F_2}} a_{\lambda}^{n_1} e_{\lambda} \right\| < \frac{\delta}{2^4} . \text{ Logo se } y_2 = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{D} \\ \lambda \in (F_2 - F_1)}} a_{\lambda}^{n_1} e_{\lambda}$$

$$\text{temos } \|y_2\| > \frac{\delta}{2}, \quad \left\| \sum_{\lambda \in \mathcal{D} - (F_2 - F_1)} a_{\lambda}^{n_1} e_{\lambda} \right\| < \frac{\delta}{2^3} \text{ e}$$

$$\text{supp } y_2 \subset \{(n,k) \in \mathcal{D} : j_1 \leq n < j_2\} .$$

Usando o mesmo argumento anterior existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$\sum_{\lambda \in F_2} |a_\lambda^{n_2}| < \frac{\delta}{2^5}$ e existe $j_3 > j_2$ e $F_3 \subset \mathcal{D}$, F_3 finito formado

por todos os elementos de $\mathcal{D}$ pertencentes aos (j_3-1) primeiros níveis tal que

$$\left\| \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{D} \\ \lambda \notin F_3}} a_\lambda^{n_2} e_\lambda \right\| < \frac{\delta}{2^5}.$$

Logo se $y_3 = \sum_{\lambda \in (F_3 - F_2)} a_\lambda^{n_2} e_\lambda$ temos $\|y_3\| > \frac{\delta}{2}$,

$$\left\| \sum_{\lambda \in \mathcal{D} - (F_3 - F_2)} a_\lambda^{n_2} e_\lambda \right\| < \frac{\delta}{2^4} \quad e$$

$$\text{supp } y_3 \subset \{(n, k) \in \mathcal{D} : j_2 \leq n < j_3\}.$$

Continuando o processo obtemos uma sequência $(y_k)_{k=1}^\infty$ com $\|y_k\| > \frac{\delta}{2}$, $\text{supp } y_k$, $k \in \mathbb{N}$, nas condições de II.2.3 e $y_k \xrightarrow{w} 0$ uma vez que

$$y_k = x_{n_{k-1}} - z_{n_{k-1}} \left(z_{n_{k-1}} = \sum_{\lambda \in \mathcal{D} - (F_k - F_{k-1})} a_\lambda^{n_{k-1}} e_\lambda \right)$$

com $x_{n_k} \xrightarrow{w} 0$ e $z_{n_k} \longrightarrow 0$ em norma.

Por II.2.4, $(y_k)_{k=1}^\infty$ tem subsequência equivalente a base canônica, $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$, de $\ell_1(\mathbb{N})$, o que implica em $\tilde{e}_n \xrightarrow{w} 0$, o que

é absurdo uma vez que $\ell_1(\mathbb{N})$ é espaço de Schur ($[S]$) e $\|\tilde{e}_n\| = 1$,
 $\forall n \in \mathbb{N}$.

II.2.6 - Proposição: Se $\alpha \in BV[0,1]$, α contínua não constante, então $D_\alpha(X_H) \subsetneq R_\alpha(X_H)$.

Prova: Por I.1.24 e I.1.31 basta supor α crescente.

Seja $f : [0,1] \rightarrow X_H$ definida por

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e_{(1,1)}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = e_{(2,1)} , \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = e_{(2,2)}$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = e_{(3,1)} , \quad f\left(\frac{3}{8}\right) = e_{(3,2)} , \quad f\left(\frac{5}{8}\right) = e_{(3,3)} , \quad f\left(\frac{7}{8}\right) = e_{(3,4)}$$

$\vdots$

$$f\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = e_{(n,k)} , \quad n = 1, 2, \dots , \quad k=1, \dots, 2^{n-1}.$$

$$f(t) = 0 \text{ se } t \neq \frac{\ell}{2^n} , \quad n = 1, 2, \dots , \quad \ell = 1, \dots, 2^n-1.$$

Como $\|e_{(n,k)}\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2^{n-1}$, temos f descontínua em $[0,1]$, logo por I.1.25, $f \notin D_\alpha(X_H)$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que $|\alpha(u) - \alpha(v)| < \frac{\varepsilon}{3}$ se $|u - v| < \delta$, $u, v \in [0, 1]$, e seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{2^{n_0}} < \delta$.

Se $d \in D$ é a partição formada pelos pontos $0, \frac{2}{2^{n_0}}, \frac{4}{2^{n_0}}, \dots, \frac{2^{n_0}-2}{2^{n_0}}, \frac{2^{n_0}}{2^{n_0}}$ e $\zeta_\ell \in \left[\frac{2\ell-2}{2^{n_0}}, \frac{2\ell}{2^{n_0}} \right]$, $\ell = 1, \dots, 2^{n_0}-1$, temos $f(\zeta_\ell) = 0$

ou $f(\zeta_\ell) = e_{(n,k)}$ com (n,k) pertencente ao cone iniciado em (n_0, ℓ) , sendo (n_0, ℓ) tal que $f\left(\frac{2\ell-1}{2^{n_0}}\right) = e_{(n_0, \ell)}$.

Logo por II.2.3 temos

$$\left\| \sum_{\ell=1}^{2^{n_0}-1} f(\zeta_\ell) \left[\alpha\left(\frac{2\ell}{2^{n_0}}\right) - \alpha\left(\frac{2\ell-2}{2^{n_0}}\right) \right] \right\| \leq$$

$$\leq 3 \cdot \max_{1 \leq \ell \leq 2^{n_0}-1} \left[\alpha\left(\frac{2\ell}{2^{n_0}}\right) - \alpha\left(\frac{2\ell-2}{2^{n_0}}\right) \right] < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

o que mostra, usando I.1.32, que $f \in R_\alpha(X_H)$.

Vejamos agora como a propriedade de Schur se relaciona com o problema $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, na classe dos espaços de Banach com base subsimétrica.

II.2.7 - Proposição: Se X é um Banach com base subsimétrica então são equivalentes:

- (a) X tem a propriedade de Schur
- (b) X é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Prova: (b) $\Rightarrow$ (a) : É resultado bem conhecido. Para uma demonstração o leitor poderá consultar [S].

(a) $\Rightarrow$ (b) : Se $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ é base subsimétrica de X temos por I.2.5 e pelo resultado de H.P. Rosenthal provado em ([LT] 2.e.5) que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tem subsequência $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ que é fraca-Cauchy ou é equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Se ocorre a última alternativa, como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ é equivalente a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ temos X isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ como queremos provar.

Mostremos então que nenhuma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ é fraca-Cauchy.

Se $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ é fraca-Cauchy, como X tem a propriedade de Schur, temos X fracamente seqüencialmente completo ([R] 2b.11) logo existe $x_0 \in X$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^*(x_{n_k}) = x^*(x_0)$, $\forall x^* \in X^*$.

Em particular, $0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_n^*(x_{n_k}) = x_n^*(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, onde $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ é o sistema biortogonal ($x_n^*(x_m) = \delta_{n,m}$) de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Logo $x_0 = 0$ e então $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ é fracamente convergente a zero, portanto convergente a zero em norma, o que é uma contradição uma vez que $\inf_k \|x_{n_k}\| > 0$ (I.2.5).

II.2.8 - Corolário: Se X é um espaço de Banach com base subsimétrica são equivalentes:

- (a) $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, para alguma $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante
- (b) X é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$
- (c) X tem a propriedade de Schur.

Prova: I.3.12 e II.2.7.

II.2.9 - Definição: Um espaço de Banach X se diz hereditariamente $\ell_1(\mathbb{N})$ se qualquer subespaço fechado de dimensão infinita, de X , tem um subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.

II.2.10 - Proposição: Existe um espaço de Banach X hereditariamente $\ell_1(\mathbb{N})$ e sem a propriedade de Schur. Além disso $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

Prova: Se $w = (w_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência decrescente de números positivos com $w_1 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ e $\sum_{n=1}^\infty w_n = +\infty$, seja $d(w,1)$ o espaço seqüencial de Lorentz formado pelas seqüências de escalares $(a_n)_{n=1}^\infty$ para as quais $\sup_{\Pi} \left\{ \sum_{n=1}^\infty |a_{\Pi(n)}| w_n < \infty \right\}$, onde Π percorre as permutações dos naturais.

Em ([LT] 4.e) está provado que $d(w,1)$ é espaço de Banach com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^\infty\| = \sup_{\Pi} \left\{ \sum_{n=1}^\infty |a_{\Pi(n)}| w_n \right\} \text{ e que a seqüên-}$$

cia dos vetores unitários $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ forma uma base subsimétrica de $d(w,1)$.

Também, em ([LT] 4.e) está provado que $d(w,1)$ é hereditariamente $\ell_1(\mathbb{N})$ e não é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Conseqüentemente temos a tese para $X = d(w,1)$ por II.2.8.

II.3 - NOÇÕES SOBRE A TÉCNICA DOS SPREADING MODELS E APLICAÇÕES A α -INTEGRAÇÃO

A utilização dos spreading models (modèle étalé) (II.3.3) de um espaço de Banach X para obter resultados sobre sua estrutura geométrica, foi inicialmente feita por A. Brunel e L. Sucheston em [BS₁] e [BS₂] e por H.P. Rosenthal em [Ro].

Tomamos conhecimento do assunto ao sermos informados de um resultado de A. Pelczynski, sem demonstração ou publicação, relacionando a propriedade $D(X) = R(X)$ com os spreading models de X que são equivalentes a $\ell_1(\mathbb{N})$ (ver observação II.3.11). O estudo do artigo [Be], no qual o autor trabalha com propriedades de espaços de Banach que tem spreading models equivalentes a $\ell_1(\mathbb{N})$, nos permitiu provar os teoremas II.3.12 e II.3.17. O teorema II.3.12 generaliza o mencionado resultado de A. Pelczynski e o teorema II.3.17 mostra que numa classe que contém os espaços de Banach com base incondicional é verdadeira a conjectura:

"Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante não temos simultaneamente verdadeiras as igualdades $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ e $D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*)$ ".

Essa conjectura surgiu da observação dos exemplos que temos de espaços de Banach X com $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, $\alpha \in BV[0,1]$, a sa-

ber $\ell_1(\mathbb{N})$ (I.2.7) $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1$ com $D_\alpha(X_\gamma) = R_\alpha(X_\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ (II.1.3),

o espaço T (II.1.11 e 12) e de seus duais [no exemplo II.3.16 mostramos que o espaço X_T , tal que $X_T^* = T$ (ou $T^* = X_T$ pois são reflexivos) é tal que $D_\alpha(X_T) \subsetneq R_\alpha(X_T)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante].

Até onde estamos informados é problema em aberto a veracidade ou não da conjectura mencionada, para os espaços de Banach em geral.

Agradecemos a Giles Pisier as sugestões que nos deu para o trabalho deste parágrafo e do seguinte (II.4), durante sua permanência no IME.

II.3.1 - Proposição: Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma seqüência limitada num espaço de Banach X . Então existe uma subsequência $(y_n)_{n=1}^\infty$, e uma seminorma L definida no conjunto das seqüências quase nulas de escalares, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, tais que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, a = (a_i)_{i=1}^\infty, \exists v \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i y_{n_i} \right\| - L(a) \right| < \varepsilon \text{ para } v < n_1 < n_2 < \dots$$

Prova: [BS₁]

II.3.2 - Observação: Em [Be] está provado que se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e não tem subsequência de Cauchy, então a semi-norma L é norma. Nesse caso definimos a norma $\| \cdot \|$ no espaço gerado pela subsequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ por

$$\|a_1 y_1 + \dots + a_k y_k\| = L(a) = \lim_{+\infty + n_1 < n_2 < \dots} \left\| \sum_{i=1}^k a_i y_{n_i} \right\|$$

onde $a \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $a = (a_i)_{i=1}^k$.

II.3.3 - Definição: Nas condições de II.3.2, seja Y o completado do espaço gerado por $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, munido da norma $\| \cdot \|$. Dizemos que Y é um spreading model (s.m.) de X construído a partir de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. A sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ se diz sequência fundamental (s.f.) do spreading model Y .

II.3.4 - Observação: Verifica-se ([Be]) que a norma $\| \cdot \|$ é invariante por espalhamentos, isto é, $\|a_1 y_1 + \dots + a_k y_k\| = \|a_1 y_{n_1} + \dots + a_k y_{n_k}\|$, para todo $k \in \mathbb{N}$, quaisquer escalares $a_1, \dots, a_k$ e toda escolha de $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ em $\mathbb{N}$. De [BS₁] temos que a s.f. não é necessariamente sequência básica de Y . Entretanto temos o seguinte resultado.

II.3.5 - Proposição: Se Y é um s.m. de um Banach X e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é sua s.f. então as diferenças $z_n = y_{2n-1} - y_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, formam uma seqüência básica incondicional de Y . Conseqüentemente $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência subsimétrica de Y .

Prova: Em ([Be] Lemma 1) está provado que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ é seqüência básica incondicional, que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsimétrica segue de sua incondicionalidade e de II.3.4.

II.3.6 - Observação: Como todo espaço de Banach X de dimensão infinita tem uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ com $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e sem subseqüências de Cauchy (na verdade $\|x_n - x_m\| > \delta > 0$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$) segue que todo Banach X tem ao menos um spreading model Y . Utilizando II.3.5 notamos que Y não é necessariamente isomorfo a um subespaço de X . Basta considerar $X = T$ (II.1.11); se um spreading model Y de T fosse isomorfo a um subespaço de T , teríamos por I.1.12 que $D_{\alpha}(Y) = R_{\alpha}(Y)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ e então II.3.5 e I.3.12 implicariam *que* Y ^{contém subesp.} isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ o que é impossível lembrando que T não tem subespaços fechados isomorfos a $\ell_1(\mathbb{N})$.

II.3.7 - Definição: Dizemos que um s.m. Y de um espaço de Banach X é equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$ se sua s.f. $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é canonicamente equiva

lente a base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\ell_1(\mathbb{N})$, isto é,

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \delta \implies \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\|, \forall a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$$

II.3.8 - Proposição: Seja X um espaço de Banach com s.m. Y cuja s.f. é $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Se Y é equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$, então existe uma subseqüência de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y'_{n_i})_{n_i=1}^{\infty}$, e existe $\delta > 0$ tais que

$\forall k \in \mathbb{N}$, para toda escolha de escalares $a_1, \dots, a_{2k}$ vale

$$\left\| \sum_{i=1}^{2k} a_i y'_{n_i} \right\| \geq \delta \sum_{i=1}^{2k} |a_i| \quad \text{sempre que}$$

$$k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2k}$$

Prova: ([Be] T 2).

O resultado a seguir nos será necessário na demonstração do teorema II.3.12.

II.3.9 - Proposição: Seja Y um espaço de Banach e $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência básica subsimétrica de Y . Se $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ não é equivalente a

base canônica de $\ell_1(N)$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n z_k \right\| = 0$. Consequentemente se Y é um s.m. de um Banach X e Y não é equivalente a $\ell_1(N)$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n (y_{2k} - y_{2k-1}) \right\| = 0$, onde $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é a s.f. de Y .

Prova: Em $X = [\{z_k\}_{k=1}^{\infty}]$ vamos considerar a norma $\| \cdot \|_0$ mencionada em I.2.5.

Se o $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \|z_1 + \dots + z_n\| \neq 0$ então também o $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \|z_1 + \dots$

$\dots + z_n\|_0 \neq 0$.

De ([Be] II - Lemma 1) temos que $\exists \delta > 0$ tal que $\frac{1}{n} \|z_1 + \dots + z_n\|_0 > \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\|\theta_1 z_{n_1} + \dots + \theta_n z_{n_n}\|_0 = \|z_1 + \dots + z_n\|_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta_i = \pm 1$, $i \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \dots$, temos que $\frac{1}{n} \|\theta_1 z_1 + \dots + \theta_n z_{n_n}\|_0 > \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta_i = \pm 1$, $i \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \dots$.

Logo de ([Be] II - Theor.2) temos que X tem um s.m., construído a partir de $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ cuja s.f. $\{z'_k\}_{k=1}^{\infty}$ é equivalente a base canônica de $\ell_1(N)$.

Sendo $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma base subsimétrica de X , temos

$$|||a_1 z'_1 + \dots + a_n z'_n||| = ||a_1 z'_1 + \dots + a_n z'_n||_0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e toda seqüência de escalares $(a_i)_{i=1}^\infty$.

Consequentemente $\{z'_k\}_{k=1}^\infty$, considerada como seqüência de elementos de X , é equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$, o mesmo acontecendo então, com $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ uma vez que $\{z'_k\}_{k=1}^\infty$ é subsequência de $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ e $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ é subsimétrica.

Como $|| \cdot ||_0$ é equivalente a norma original de X , induzida pela de Y , temos $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$, o que é contradição.

Para provar a última afirmação do enunciado observemos que se $(y_n)_{n=1}^\infty$ é s.f. de um s.m. Y de um Banach X , então tomando $z_k = y_{2k} - y_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, temos por II.3.5 $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ é seqüência básica subsimétrica de Y . Além disso, de II.3.4 temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k y_{2k} \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n a_k y_{2k-1} \right\| = \\ &= 2 \left\| \sum_{k=1}^n a_k y_k \right\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e toda seqüência} \end{aligned}$$

$(a_k)_{k=1}^{\infty}$ de escalares.

Logo se Y não é equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$ temos que $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ não é equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$ e então vem que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n (y_{2k} - y_{2k-1}) \right\| = 0, \text{ pelo feito na pri-}$$

meira parte.

II.3.10 - Corolário: Seja X um espaço de Banach com s.m. Y não equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$, cuja s.f. é $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Então

$\forall \varepsilon > 0$ dado, $\exists N$ e $\exists n_0$, naturais, tais que

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k (y_{2n_k} - y_{2n_k-1}) \right\| < \varepsilon \text{ para } N \leq n_1 < n_2 < \dots < n_n \text{ e}$$

$n \geq n_0$, $\forall (a_k)_{k=1}^{\infty}$, $a_k = 0$ ou $a_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$

Prova do Corolário II.3.10: Se $z_k = y_{2k} - y_{2k-1}$ e $z_{n_k} =$

$y_{2n_k} - y_{2n_k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, dado $\varepsilon > 0$, existe n tal que

$\frac{1}{n_0} ||| z_1 + \dots + z_{n_0} ||| < \frac{\varepsilon}{2}$, por II.3.9.

Se $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que

$a_i = 0$ ou $a_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$, temos de ([Be] I-Lemma 1) que

$\frac{1}{n_0} ||| a_1 z_1 + \dots + a_{n_0} z_{n_0} ||| < \frac{\varepsilon}{2}$, logo existe $N_0 > 0$ tal que

$\frac{1}{n_0} || a_1 z_{n_1} + \dots + a_{n_0} z_{n_{n_0}} || < \frac{\varepsilon}{2}$, para $N_0 \leq n_1 < n_2 < \dots$, pela

definição da norma $||| \quad |||$.

Se $0 < r < n_0$ então ainda de ([Be] I-Lemma 1) temos

$||| a z + \dots + a_r z_r ||| \leq ||| a_1 z_1 + \dots + a_{n_0} z_{n_0} ||| < n_0 \frac{\varepsilon}{2}$. Logo

existe $N_r > 0$ tal que $|| a_1 z_{n_1} + \dots + a_r z_{n_r} || < n_0 \frac{\varepsilon}{2}$, para $N_r \leq$

$n_1 < n_2 < \dots$

Se $N = \max \{N_0, N_r, r=1, \dots, n_0-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$,

sejam $0 < r < n_0$, $s > 0$, tais que $n = n_0 s + r$ e então temos

para $N \leq n_1 \leq n_2 < \dots$

$\frac{1}{n} || a_1 z_{n_1} + \dots + a_n z_{n_n} || \leq \frac{1}{n} || a_1 z_{n_1} + \dots + a_{n_0} z_{n_0} || + \frac{1}{n} || a_{n_0+1} z_{n_0+1}$

$+ \dots + a_{2n_0} z_{2n_0} || + \dots + \frac{1}{n} || a_{n_0(s-1)+1} z_{n_0(s-1)+1} + \dots + a_{n_0 s} z_{n_0 s} ||$

$+ \frac{1}{n} || a_{n_0 s+1} z_{n_0 s+1} + \dots + a_{n_0 s+r} z_{n_0 s+r} || \leq \frac{s \cdot n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

II.3.11 - Observação: Em relação ao teorema II.3.12 a seguir, estávamos informados que A. Pelczynski provara o mesmo resultado para $\alpha(t) = t$, mas não conhecemos sua demonstração. O teorema II.3.12 generaliza esse resultado.

II.3.12 - Teorema: Seja $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante e seja X um espaço de Banach com $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$. Então todo s.m. de X é equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Prova: Se $A \subset [0,1]$ é o conjunto (no máximo enumerável) dos pontos de descontinuidade de α , seja F o fechado de $[0,1]$, $F \subset ([0,1]-A)$ com $\mu_{\alpha_c}(F) > 0$, obtido como em I.3.10 e seja E um subconjunto enumerável e denso em F .

Se Y é um s.m. de X com s.f. $(y_n)_{n=1}^\infty$, suponhamos que Y não é equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Se $(r_n)_{n=1}^\infty$ é uma enumeração de E , seja $f: [0,1] \rightarrow X$ definida por $f(r_n) = z_n = y_{2n} - y_{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, e $f(t) = 0$ se $t \notin E$.

Por II.3.5 temos que $(z_n)_{n=1}^\infty$ é sequência básica subsimétrica de Y , logo existe $\delta > 0$ tal que

$\|z_n\| > \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ([LT]) 3.a) logo $\|z_n\| > \delta > 0$,
 $\forall n \in \mathbb{N}$ (exceto eventualmente, um número finito de elementos). Logo $Df = F$ e então $f \notin D_{\alpha_C}(X)$ por I.1.25.

Verifiquemos que $f \in R_{\alpha_C}(X)$.

Usando II.3.10, sejam N e n_0 , naturais, tais que dado $\epsilon > 0$ tenha-se

$$(1) \quad \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^n c_i z_{n_i} \right\| < \frac{\epsilon}{4cV[\hat{\alpha}_C]} \quad \text{sempre que } n \geq n_0 \quad \text{e}$$

$$N \leq n_1 < \dots < n_n, \quad \forall (c_i)_{i=1}^{\infty}, \quad c_i = 0 \text{ ou } c_i = 1, \quad i \in \mathbb{N}$$

Seja $\delta_1 > 0$, $\delta_1 = \sup_n \|z_n\| < \infty$, lembrando que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ é sequência limitada.

Sendo $\hat{\alpha}_C$ contínua e crescente posso tomar $d \in D$,
 $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ com

$$|d| > \max \left\{ n_0, \frac{4N\delta_1 V[\hat{\alpha}_C]}{\epsilon} \right\} \quad \text{e com } \hat{\alpha}_C(t_i) - \hat{\alpha}_C(t_{i-1}) =$$

$$= \frac{V[\hat{\alpha}_C]}{|d|} = \frac{\hat{\alpha}_C(1) - \hat{\alpha}_C(0)}{|d|}, \quad i=1, \dots, |d|.$$

Logo se $\zeta_i, \zeta'_i \in]t_{i-1}, t_i[$, $i=1, \dots, |d|$, vale

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[f(\zeta_i) - f(\zeta'_i) \right] \left[\hat{\alpha}_C(t_i) - \hat{\alpha}_C(t_{i-1}) \right] \right\| = \\
 & = \frac{v[\hat{\alpha}_C]}{|d|} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[f(\zeta_i) - f(\zeta'_i) \right] \right\| \leq \\
 & \leq v[\hat{\alpha}_C] \left[\frac{1}{|d|} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) \right\| + \frac{1}{|d|} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta'_i) \right\| \right] = \\
 & = v[\hat{\alpha}_C] \left[\frac{1}{|d|} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} a_i z_{n_i} \right\| + \frac{1}{|d|} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} b_i z_{m_i} \right\| \right]
 \end{aligned}$$

com $a_i = 0$ ou 1 e $b_i = 0$ ou 1 , $i=1, 2, \dots, |d|$.

Mas

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|d|} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} a_i z_{n_i} \right\| & \leq \frac{1}{|d|} \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ n_i \geq N}}^{|d|} a_i z_{n_i} \right\| + \\
 & + \frac{1}{|d|} \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ n_i < N}}^{|d|} a_i z_{n_i} \right\|
 \end{aligned}$$

De (1) temos

$$\frac{1}{|d|} \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ n_i \geq N}}^{|d|} a_i z_{n_i} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4 v[\hat{\alpha}_C]}$$

Por outro lado

$$\frac{1}{|d|} \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ n_i < N}}^{|d|} a_i z_{n_i} \right\| \leq \frac{1}{|d|} \sum_{\substack{i=1 \\ n_i < N}}^{|d|} \|z_{n_i}\| \leq \frac{N}{|d|} \delta_1 < \frac{\varepsilon}{4v[\hat{\alpha}_C]}$$

$$\text{logo } \frac{v[\hat{\alpha}_C]}{|d|} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta_i) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e analogamente}$$

$$\frac{v[\hat{\alpha}_C]}{|d|} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\zeta'_i) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} . \quad \text{Usando então I.1.32 te-}$$

mos que $f \in R_{\hat{\alpha}_C}(X)$, logo $f \in R_{\alpha_C}(X)$ por I.1.31.

Como $\mu_{\hat{\alpha}_S}(Df) = 0$ temos que $f \in D_{\alpha_S}(X) = R_{\alpha_S}(X)$ e então vem que $f \in R_{\alpha}(X)$ mas $f \notin D_{\alpha}(X)$ uma vez que $f \in D_{\alpha_S}(X)$ e $f \notin D_{\alpha_C}(X)$. Conseqüentemente temos $D_{\alpha}(X) \subsetneq R_{\alpha}(X)$, contrariando a hipótese.

II.3.13 - Observação: Se X é um Banach com base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, que suporemos normalizada, isto é, $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ com constante básica $k > 0$, então temos

$$\|x_1\| = 1 \leq k \|x_1 - x_m\|, \quad \forall m > 1$$

$$\|x_2\| = 1 \leq k \|x_2 - x_m\|, \quad \forall m > 2 \text{ e } \|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{k}$$

e assim sucessivamente. Logo $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{k}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ e então existe um s.m. de X construído a partir da base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Além disso se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é subsimétrica, não é difícil verificar que qualquer s.m. construído a partir de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é um espaço de Banach isomorfo a X .

Conseqüentemente se X tem base subsimétrica (que é sempre equivalente a sua normalizada) e $D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$ para alguma $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante, o teorema II.3.12 mostra que X é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$. Logo o resultado I.3.12 é também obtido com a técnica dos s.m., a partir do teorema II.3.12.

A seguir vamos provar a proposição II.3.14 que será necessária para mostrar que a condição dada pelo teorema anterior não caracteriza os espaços de Banach X com $D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$.

II.3.14 - Proposição: Se X é um espaço de Banach com a propriedade de Schur, então todo s.m. de X é equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Prova: Seja Y um s.m. de X com sequência fundamental $(y_n)_{n=1}^\infty$. Sendo $(y_n)_{n=1}^\infty$ sequência limitada em X , temos pelo resultado de H.P. Rosenthal de ([LT] 2.e.5) já citado em I.3.18 que existe uma subsequência $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$ de $(y_n)_{n=1}^\infty$ que é fraca-Cauchy ou é equivalente a base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$.

Como X é espaço de Schur temos que X é fracamente sequencialmente completo ([R] 2.b.11), logo se $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$ fosse fraca-Cauchy teríamos que é fracamente convergente logo convergente em norma, o que é impossível uma vez que $(y_n)_{n=1}^\infty$ não tem subsequências de Cauchy.

Portanto a subsequência $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$ é tal que $\exists \delta > 0$ tal que $\left\| \sum_{n=1}^k a_n y_n \right\| \geq \delta \sum_{n=1}^k |a_n|$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e para qualquer escolha de escalares $a_1, \dots, a_k$.

$$\text{Como } \left\| \sum_{n=1}^k a_n y_n \right\| = \lim_{+\infty < n_1 < n_2 < +\infty} \left\| \sum_{i=1}^k a_i y_{n_i} \right\| \quad e$$

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i y_{n_i} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{k_1} b_j y_j' \right\| \text{ com } k_1 \geq k, \quad b_j = a_i$$

se $y'_{n_i} = y'_j$ e $b_j = 0$ caso contrário, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i y'_{n_i} \right\| \geq \delta \sum_{j=1}^{k_1} |b_j| = \delta \sum_{i=1}^k |a_i|. \quad \text{Logo}$$

$$\left\| \sum_{n=1}^k a_n y_n \right\| \geq \delta \sum_{i=1}^k |a_i|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{qualquer que}$$

seja a escolha dos escalares $a_1, \dots, a_k$, o que mostra que o s.m. Y é equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$.

II.3.15 - Observação: O espaço de Haydon X_H (II.2.1) é um espaço de Schur (II.2.5) logo pelo resultado anterior, todo s.m. de X_H é equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$. Entretanto temos por II.2.6 que $D_\alpha(X_H) \subsetneq R_\alpha(X_H)$ para toda $\alpha \in BV[0,1]$ contínua não constante o que mostra que a recíproca do teorema II.3.12 não é verdadeira.

No interesse de motivar e ilustrar a idéia que nos levou ao próximo teorema, acrescentamos o exemplo a seguir, que nos mostrou que também para o espaço de Tsirelson T (II.1.11), que já vimos ser tal que $D_\alpha(T) = R_\alpha(T)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$, temos $D_\alpha(T^*) \subsetneq R_\alpha(T^*)$, se $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante. Portanto também para T , como nos outros exemplos conhecidos, não temos $D_\alpha(T) = R_\alpha(T)$ e $D_\alpha(T^*) = R_\alpha(T^*)$ simultaneamente, se $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

II.3.16 - Exemplo: Em [FJ] Figiel, T.E. e Johnson, W.B. mostram que o espaço T (II.1.11) é o dual do espaço reflexivo X_T construído por Tsirelson, B.S. em [Ti]. Queremos provar que $D_\alpha(T^*) \subsetneq R_\alpha(T^*)$, ou equivalentemente (por I.1.8,11) que $D_\alpha(X_T) \subsetneq R_\alpha(X_T)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

De [Ti] temos que X_T é o espaço de Banach gerado por um subconjunto V absolutamente convexo e fraco-compacto de $c_0(\mathbb{N})$, munido de uma norma $\|\cdot\|$ na qual V é a bola unitária. Em X_T a sequência de vetores unitários de $c_0(\mathbb{N})$, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ é base incondicional e se $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ é uma sequência de blocos de $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, com $\|x_i\| = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$, vale

$$(1) \quad \left\| P_n(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \right\| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

para valores arbitrários dos escalares λ_i , $i=1, \dots, n$ e $P_n: X_T \rightarrow X_T$ definida por

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i e_i.$$

Se $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de α , seja (como em I.3.10) $F \subset ([0,1] - \{y_n, n \in \mathbb{N}\})$, F fechado de $[0,1]$, com $\mu_{\hat{\alpha}_C}(F) > 0$ e $E \subset F$ subconjunto enumerável e denso em F . Se $(r_n)_{n=1}^\infty$ é uma enumeração de E , seja $f: [0,1] \rightarrow X_T$ definida por

$$f(r_n) = e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(t) = 0 \text{ se } t \notin E$$

É claro que f é contínua em $([0,1] - F)$ e como $\|e_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $[\|x\| = \inf \{ \lambda > 0 \text{ tal que } \frac{x}{\lambda} \in V \}]$ e V está contido na bola unitária de $c_0(\mathbb{N})$] temos $Df = F$. Logo, como em I.3.10, temos $f \in D_{\alpha_S}(X_T) = R_{\alpha_S}(X_T)$ e $f \notin D_{\alpha_C}(X_T)$ e então $f \notin D_{\alpha}(X_T)$. Para se obter $f \in R_{\alpha}(X_T)$ vamos mostrar que $f \in R_{\alpha_C}(X_T)$ e para isso basta considerar α_C crescente, por I.1.31.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sendo α_C contínua crescente, podemos considerar $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{2^n})$ tal que $\alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1}) = \frac{1}{2^n}$.

Se $\zeta_i \in]t_{i-1}, t_i[$, $i=1, \dots, 2^n$ temos pela incondicionalidade ([LT] 1.c.7) da base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ que

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^n} f(\zeta_i) [\alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1})] \right\| \leq \frac{1}{2^n} \left\| \sum_{i=1}^{2^n} e_{n_i} \right\|$$

$$\begin{aligned} \text{Como } \left\| \sum_{i=1}^{2^n} e_{n_i} \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^n e_{n_i} \right\| + \left\| \sum_{i=n+1}^{2n} e_{n_i} \right\| + \left\| \sum_{i=2n+1}^{4n} e_{n_i} \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{i=4n+1}^{8n} e_{n_i} \right\| + \dots + \left\| \sum_{i=n2^{n-1}+1}^{n2^n} e_{n_i} \right\| \quad (\text{usar incondicionalidade e} \end{aligned}$$

observar que $n+n+2n+4n+8n+\dots+n2^{n-1} = n2^n \geq 2^n$ aplicando (1) temos

$$\frac{1}{2^n} \left\| \sum_{i=1}^{2^n} e_{ni} \right\| \leq \frac{1}{2^n} (n + n \cdot 2) = \frac{3n}{2^n}.$$

Uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2^n} = 0$, provamos por I.1.32 que $f \in R_{\alpha_C}(X_T)$, como pretendíamos.

Na demonstração que faremos do teorema a seguir será essencial o resultado II.3.12.

II.3.17 - Teorema: Seja X um espaço de Banach com uma sequência básica incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que o espaço gerado $[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ é complementado em X . Se $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante e $D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$ então temos $D_{\alpha}(X^*) \subsetneq R_{\alpha}(X^*)$.

Prova: Se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é sequência básica incondicional de X podemos supor $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ([LT] 1.C) e se $k > 0$ é a constante básica de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ temos, como em II.3.13 que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{k}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, e então existe um s.m. de X construído a partir de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Seja Y_C esse s.m. e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sua s.f.

Como $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ temos por II.3.12 que $(y_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente a base canônica, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, de $\ell_1(\mathbb{N})$. De II.3.8 vem que existe uma subsequência de $(y_n)_{n=1}^\infty$, denotada por $(y_n)_{n \in \sigma_1}$, $\sigma_1 \subset \mathbb{N}$, e existe $\delta_1 > 0$ tais que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^k} a_i y_{n_i} \right\| > \delta_1 \sum_{i=1}^{2^k} |a_i|$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_{2^k}$ e $k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2^k}$ com $n_i \in \sigma_1$, $i=1, \dots, 2^k$.

Se $\{y_n^*\}_{n \in \sigma_1}$ é o sistema biortogonal ([LT] 1.b) de $\{y_n\}_{n \in \sigma_1}$ então $\{y_n^*\}_{n \in \sigma_1}$ é sequência básica de $[\{y_n\}_{n \in \sigma_1}]^*$ e sendo $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ sequência básica incondicional temos que ([LT] 1.c) $[\{y_n\}_{n \in \sigma_1}]^*$ é subespaço de $[\{x_n\}_{n=1}^\infty]^*$ que por sua vez é subespaço de X^* , já que $[\{x_n\}_{n=1}^\infty]$ é complementado em X . Logo $\{y_n^*\}_{n \in \sigma_1}$ é sequência básica de X^* .

Além disso $\|y_n^*\| = \sup_{\|x\|=1} |y_n^*(x)| \geq y_n^*(y_n) = 1, \forall n \in \sigma_1$,

e então o mesmo feito para $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ mostra que existe um s.m. de X^* construído a partir de $\{y_n^*\}_{n \in \sigma_1}$.

Seja $(y_n^*)_{n \in \sigma_2}$, $\sigma_2 \subset \sigma_1$, a s.f. desse s.m.

Se $D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*)$ então os mesmos argumentos usados para $(y_n)_{n \in \sigma_1}$ levam a existência de uma subsequência de $(y_n^*)_{n \in \sigma_2}$, denominada por $(y_n^*)_{n \in \sigma_3}$, $\sigma_3 \subset \sigma_2$, e de $\delta_2 > 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^k} a_i y_{n_i}^* \right\| \geq \delta_2 \sum_{i=1}^{2^k} |a_i|$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_{2^k}$ e $k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2^k}$, $n_i \in \sigma_3$, $i=1, \dots, 2^k$.

Portanto existe $\delta > 0$ e existe $\sigma \subset \mathbb{N}$, σ subsequência infinita de $\mathbb{N}$, tais que

$$(1) \quad \left\| \sum_{i=1}^{2^k} a_i y_{n_i} \right\| \geq \delta \sum_{i=1}^{2^k} |a_i|$$

$$(2) \quad \left\| \sum_{i=1}^{2^k} a_i y_{n_i}^* \right\| \geq \delta \sum_{i=1}^{2^k} |a_i|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, qualquer sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^\infty$ e $k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2^k}$, $n_i \in \sigma$, $i=1, \dots, 2^k$. Se $K \in \mathbb{N}$ e $k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2^k}$, $n_i \in \sigma$, $i=1, \dots, 2^k$ sejam

$$X_k = \left[\{y_{n_i}\}_{i=1}^{2^k} \right], \quad X_k^* = \left[\{y_{n_i}^*\}_{i=1}^{2^k} \right], \quad \ell_1^{2^k} = \mathbb{K} \parallel \parallel_1$$

e $\ell_\infty^{2^k} = \mathbb{K} \parallel \parallel_\infty$. Então (1) garante que $\varphi: X_k \rightarrow \ell_1^{2^k}$ definida por

$\varphi \left(\sum_{i=1}^{2^k} a_i y_{n_i} \right) = (a_i)_{i=1}^{2^k}$ é um isomorfismo, logo $\varphi^*: \ell_\infty^{2^k} \rightarrow X_k^*$ definida por $\varphi^* \left((a_i)_{i=1}^{2^k} \right) = \sum_{i=1}^{2^k} a_i y_{n_i}^*$ também é isomorfismo.

Então, como $\|\varphi^*\| = \|\varphi\| \leq \frac{1}{\delta}$, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^k} a_i y_{n_i}^* \right\|_{X_k^*} \leq \|\varphi^*\| \sup_{1 \leq i \leq 2^k} |a_i| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{1 \leq i \leq 2^k} |a_i|$$

e então (2) implica em $\delta^2 c \sum_{i=1}^{2^k} |a_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq 2^k} |a_i|$, $c > 0$ de ([LT]1.c.6).

Tomando-se $a_i = 1$, $1 \leq i \leq 2^k$ vem que $c 2^k \delta^2 \leq 1$, o que é absurdo uma vez que k pode ser arbitrariamente escolhido em $\mathbb{N}$.

II.3.18 - Corolário: Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita com base incondicional e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante. Então se $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ temos $D_\alpha(X^*) \subsetneq R_\alpha(X^*)$.

Prova: Imediata.

II.3.19 - Observação: É claro que o teorema II.3.17 se aplica para espaços de Banach sem base incondicional, por exemplo os não separáveis ou para $X = X_0 \oplus Y$ com X_0 contendo uma seqüência básica incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ é complementado em X_0 e Y um Banach qualquer.

Podemos também considerar espaços da forma $Z = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n \right)_Y$ satisfazendo as condições da proposição II.1.10. Se algum X_n , $n \in \mathbb{N}$, contém seqüência básica incondicional tal que o espaço gerado por ela é complementado em X_n , então Z satisfaz a mesma condição, já que X_n é subespaço complementado de Z . Nesse caso temos por II.3.17 que $D_{\alpha}(Z^*) \subsetneq R_{\alpha}(Z^*)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante.

Observamos que em ([G]1.8) afirma-se que no caso em que a base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Y é tal que seu sistema biortogonal $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ é base (incondicional) de Y^* então $Z^* = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n^* \right)_{Y^*}$, o que permite concluir diretamente que $D_{\alpha}(Z^*) \subsetneq R_{\alpha}(Z^*)$ se $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante. Salientamos que o que fizemos generaliza esse resultado pois concluímos que $D_{\alpha}(Z^*) \subsetneq R_{\alpha}(Z^*)$ mesmo que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ não seja dualizável (e então Z^* não pode ser escrito como uma Y^* -soma).

II.4 - AS SUPER PROPRIEDADES $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ E $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$

Explorando ainda a técnica dos spreading models obtivemos o resultado II.4.9 que relaciona a propriedade $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ com X conter ℓ_1^n uniformemente (definição II.4.6).

Também obtivemos condições necessárias e suficientes, em II.4.11 e II.4.14, para um Banach X satisfazer as super propriedades (definição II.4.3) $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ e $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$ para $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante.

Caracterizações dos espaços de Banach que contém ℓ_1^n uniformemente e um estudo de super propriedades podem ser encontrados em [Pi].

II.4.1 - Definição: Sejam X e Y espaços de Banach isomorfos. Definimos $d(X,Y)$ por

$$d(X,Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid t.q. \ T:X \rightarrow Y \text{ é isomorfismo linear}\}$$

II.4.2 - Definição: Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que Y é finitamente representado em X se dado $\epsilon > 0$, para qualquer $F \subset Y$, F subespaço de dimensão finita, existe $E \subset X$, E subespaço com $\dim E = \dim F$ e $d(E,F) \leq 1 + \epsilon$.

II.4.3 - Definição: Seja X um espaço de Banach satisfazendo uma propriedade P . Dizemos que X satisfaz super P se todo Banach Y que é finitamente representado em X , satisfaz P .

II.4.4 - Notação: Se $1 \leq p \leq \infty$, ℓ_p^n denota o espaço $\mathbb{K}^n$ munido da norma $\|\cdot\|_p$.

II.4.5 - Definição: Sejam X um espaço de Banach $\lambda \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que X contém ℓ_p^n λ -uniformemente se para todo natural n , existe X_n , subespaço de dimensão n de X com $d(X_n, \ell_p^n) \leq \lambda$.

II.4.6 - Definição: Se X é um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, dizemos que X contém ℓ_p^n uniformemente se X contém ℓ_p^n λ -uniformemente para algum $\lambda \geq 1$. Observamos que de [Pi] temos que se X contém ℓ_p^n λ -uniformemente para algum $\lambda > 1$ então X contém ℓ_p^n λ -uniformemente para todo $\lambda > 1$.

II.4.7 - Exemplo: O espaço $X = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_1^n \right)_2$ contém ℓ_1^n uniformemente e não tem cópia de $\ell_1(\mathbb{N})$ uma vez que é reflexivo. Se considerarmos $X = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_p^n \right)_1$, $1 < p \leq \infty$ então X contém ℓ_p^n 1-uniformemente.

mente e não contém subespaço fechado isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ por I.3.14 e I.1.12 já que $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, para toda $\alpha \in BV[0,1]$ por II.1.3.

II.4.8 - Proposição: Se X é um Banach que tem um spreading model equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$ então X contém ℓ_1^n uniformemente.

Prova: Se $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ é a seqüência fundamental do spreading model equivalente a $\ell_1(\mathbb{N})$ sejam $\delta > 0$ e $\{y'_n\}_{n=1}^\infty$ como em II.3.8. Então dado $n \in \mathbb{N}$, tomando-se $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > n$ e $y'_{n_1}, y'_{n_2}, \dots, y'_{n_n}$ com $k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_n$ temos

$$\delta \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i y'_{n_i} \right\| \leq \delta_1 \sum_{i=1}^n |a_i| ,$$

$\forall (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$, onde δ_1 é tal que $\|y_n\| \leq \delta_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto existe $X_n = \left[\{y'_{n_i}\}_{i=1}^n \right]$ com $d(X_n, \ell_1^n) \leq \frac{\delta_1}{\delta}$ com $\frac{\delta_1}{\delta} \geq 1$, como queríamos mostrar.

II.4.9 - Proposição: Se $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante e X é um Banach de dimensão infinita com $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ então qualquer que seja Y , subespaço de X de dimensão infinita, Y contém ℓ_1^n uniformemente.

Prova: I.1.12, II.3.12 e II.4.8.

II.4.10 - Observação: Não vale a recíproca da afirmação da proposição II.4.9 anterior, pois $X = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_1^n \right)_2$ contém ℓ_1^n uniformemente e $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante por II.1.4.

II.4.11 - Proposição: Seja X um espaço de Banach e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante. Se P_α é a propriedade $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ então

X satisfaz $\text{super } P_\alpha \Leftrightarrow X$ tem dimensão finita

Prova: Para se obter a implicação direta basta lembrar o Teorema de Dvoretzky ([Pi]) que afirma que $\ell_2(N)$ é finitamente representado em todo Banach X de dimensão infinita e usar I.3.14.

A implicação recíproca é imediata uma vez que todo espaço finitamente representado em um espaço de dimensão finita também tem dimensão finita.

II.4.12 - Definição: Sejam X um espaço de Banach e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante. Se $\sim P_\alpha$ é a propriedade $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$ diremos que X satisfaz $\text{super}^\infty \sim P_\alpha$ se todo Banach Y , de dimensão infinita, finitamente representado em X satisfaz $\sim P_\alpha$.

Vamos provar em II.4.14 uma condição necessária e suficiente para um Banach X satisfazer $\text{super}^\infty \sim P_\alpha$. Para isso precisamos do lema II.4.13 a seguir.

II.4.13 - Lema: Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita e $1 \leq p \leq \infty$, são equivalentes

(a) X contém ℓ_p^n uniformemente

(b) $\ell_p(\mathbb{N})$ é finitamente representado em X .

Prova:

(b) $\Rightarrow$ (a): Mostraremos que se Y é finitamente representado em X e Y contém ℓ_p^n uniformemente então o mesmo acontece com X . Seja então $n \in \mathbb{N}$ e $Y_n \subset Y$ subespaço de dimensão n tal que $d(Y_n, \ell_p^n) \leq \lambda$ para algum $\lambda \geq 1$.

Sendo Y finitamente representado em X , dado $\varepsilon > 0$ existe $X_n \subset X$ subespaço de dimensão n com $d(Y_n, X_n) \leq 1 + \varepsilon$.

Logo $d(X_n, \ell_p^n) \leq d(X_n, Y_n) \cdot d(Y_n, \ell_p^n) \leq \lambda(1 + \varepsilon)$ o que mostra que X contém ℓ_p^n uniformemente.

(a) $\Rightarrow$ (b): Seja $F \subset \ell_p(\mathbb{N})$ um subespaço de dimensão finita e $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $p_n : \ell_p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_p^n$ a projeção definida por $p_n[(a_k)_{k=1}^\infty] = (a_k)_{k=1}^n$. Como $\|p_n\|=1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e a bola unitária de F é compacta vem que

$$\lim_n p_n \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{x}{\|x\|} \text{ uniformemente em } F \text{ (} x \neq 0 \text{)}.$$

Logo, dado $\varepsilon' > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| p_{n_0} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) - \frac{x}{\|x\|} \right\| < \varepsilon'$, e então $(1-\varepsilon')\|x\| \leq \|p_{n_0}(x)\| \leq (1+\varepsilon')\|x\|$, $\forall x \in F$. Além disso n_0 pode ser escolhido de modo que p_{n_0} seja um isomorfismo de F em $p_{n_0}(F)$. Então podemos considerar a $d(F, p_{n_0}(F))$ e pelo feito anteriormente temos $d(F, p_{n_0}(F)) \leq \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}$.

Como X contém ℓ_p^n uniformemente, dado $\varepsilon'' > 0$, existe $X_{n_0} \subset X$, subespaço de dimensão n_0 , e $T : \ell_p^{n_0} \rightarrow X_{n_0}$ isomorfismo com $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon''$.

Seja $E = T(p_{n_0}(F))$ e $T_0 = T|_{p_{n_0}(F)}$. Como $T_0 : p_{n_0}(F) \rightarrow E$ é isomorfismo e $\|T_0\|\|T_0^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|$ vem que $d(p_{n_0}(F), E) < 1 + \varepsilon''$.

Logo $d(E, F) \leq d(F, p_{n_0}(F)) \cdot d(p_{n_0}(F), E) \leq \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} (1+\varepsilon'')$ e então basta escolher ε' e ε'' de modo a se ter $\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} (1+\varepsilon'') < 1+\varepsilon$.

II.4.14 - Proposição: Sejam X um espaço de Banach e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante. Se $\sim P_\alpha$ é a propriedade $D_\alpha(X) \subsetneq R_\alpha(X)$ então

X satisfaz $\text{super}^\infty \sim P_\alpha \Leftrightarrow X$ não contém ℓ_1^n uniformemente ($\Leftrightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ não é finitamente representado em X).

Prova: Se $\ell_1(\mathbb{N})$ é finitamente representado em X então por I.2.7 temos que X não satisfaz $\text{super}^\infty \sim P_\alpha$, o que prova a implicação direta.

Para a recíproca, se existe Y , finitamente representado em X com $D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$ então por II.4.9, temos que Y contém ℓ_1^n uniformemente e a prova de (b) $\Rightarrow$ (a) de II.4.13 mostra que X contém ℓ_1^n uniformemente.

II.4.15 - Exemplos: (a) De II.3.14 e II.4.8 temos que todo espaço de Schur contém ℓ_1^n uniformemente. Logo se X é espaço de Schur então por II.4.14, X não satisfaz $\text{super}^\infty \sim P_\alpha$. O espaço de Haydon X_H (II.2.1) é tal que X_H satisfaz $\sim P_\alpha$ (II.2.6) e X_H não satisfaz $\text{super}^\infty \sim P_\alpha$, pois é espaço de Schur (II.2.5).

O exemplo seguinte mostra que existe um espaço que não é de Schur que satisfaz $\sim P_\alpha$ e não satisfaz $\text{super}^\infty \sim P_\alpha$.

(b) Se X é $c_0(\mathbb{N})$, então X não é espaço de Schur, X satisfaz $\sim P_\alpha$ (I.3.14) e como X contém ℓ_1^n uniformemente ($[Ke]$) temos que X não satisfaz $\text{super}^\infty \sim P_\alpha$.

(c) Se X é $\ell_2(\mathbb{N})$ temos que qualquer que seja Y , finitamente representado em X , Y é isomorfo a X ($[Gr]$). Logo $\ell_2(\mathbb{N})$ satisfaz $\text{super}^\infty \sim P_\alpha$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante, por I.3.14.

CAPÍTULO III

CARACTERIZAÇÃO DOS ESPAÇOS DE BANACH X
PERTENCENTES A DETERMINADAS CLASSES,
EM RELAÇÃO AO PROBLEMA $D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$

III.1 - α -INTEGRAÇÃO NOS ESPAÇOS DE ORLICZ $L_A(\mu, X)$

Iniciamos este parágrafo fazendo um estudo dos espaços $L_A(\Omega, \Sigma, \mu, X)$, denotados resumidamente por $L_A(\mu, X)$, definidos em III.1.7, em relação a medida μ e a propriedade $\Delta 2$ (III.1.11) da função A .

Caracterizamos então os espaços $L_A(\mu, X)$ que tem a propriedade $D_\alpha[L_A(\mu, X)] = R_\alpha[L_A(\mu, X)]$, $\alpha \in BV[0, 1]$, para μ medida não puramente atômica, provando o resultado III.1.20.

Quando μ é puramente atômica não conseguimos resolver completamente a questão. Temos o resultado III.1.26 que caracteriza os espaços $L_A(\mu, X)$ com $D_\alpha[L_A(\mu, X)] = R_\alpha[L_A(\mu, X)]$, $\alpha \in BV[0, 1]$ no caso em que as medidas dos átomos existentes na σ -álgebra formam um conjunto limitado superior e inferiormente (por uma constante não nula). Entretanto nos casos particulares de $A(t) = t^p [L_A(\mu, X) = L_p(\mu, X)]$, $1 \leq p < \infty$ ou $A(t) = \infty \cdot \chi_{(1, \infty]}(t) [L_A(\mu, X) = L_\infty(\mu, X)]$ resolvemos o problema totalmente para qualquer espaço de medida, obtendo os resultados III.1.22, 28, 29 e 30.

Salientamos que permitimos, na nossa definição, que a função de Orlicz A tenha

$$a = \sup \{t \in [0, \infty) : A(t) = 0\} > 0 \quad \text{ou}$$

$b = \inf \{t \in [0, \infty) : A(t) = \infty\} < \infty$ e então estudamos propriedades e subespaços de $L_A(\mu, X)$ nessas condições ($a > 0$ ou $b < \infty$) obtendo os resultados III.1.17, 19 e 23, que foram utilizados no estudo da α -integração.

Neste parágrafo e no seguinte, se (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida e $E \in \Sigma$, denotaremos por (E, Σ_E, μ_E) o espaço de medida sobre E com $\Sigma_E = \{A \cap E, A \in \Sigma\}$ e $\mu_E(B) = \mu(B)$, $\forall B \in \Sigma_E$.

III.1.1 - Definição: Seja (Ω, Σ, μ) espaço de medida. Um elemento $E \in \Sigma$ se diz um átomo se $0 < \mu(E) \leq \infty$ e se $F \in \Sigma, F \subset E$, então $\mu(F) = 0$ ou $\mu(F) = \mu(E)$. E é um 1-átomo se $0 < \mu(E) \leq \infty$ e se $F \in \Sigma, F \subset E$, então $\mu(F) = 0$ ou $\mu(E-F) = 0$.

III.1.2 - Observação: Um átomo de medida finita é sempre um 1-átomo o que não acontece com átomos de medida infinita como mostra o exemplo $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$ com $\mu(\{n\}) = \infty, \forall n \in \mathbb{N}$.

III.1.3 - Definição: Um espaço de medida (Ω, Σ, μ) é não atômico se Σ não contém átomos. (Ω, Σ, μ) é puramente atômico se para qualquer $Y \in \Sigma$, com $\mu(Y) > 0$, existe $E \in \Sigma$, E átomo e $E \subset Y$. (Ω, Σ, μ) é não puramente atômico se existe $Y \in \Sigma$ tal que (Y, Σ_Y, μ_Y) é não atômico

com $\mu(Y) > 0$. Verifica-se facilmente que é sempre possível tomar $\mu(Y) < \infty$.

III.1.4 - Observação: Para simplificar a linguagem vamos identificar átomos que diferem por um conjunto de medida nula. Logo dois 1-átomos serão iguais ou disjuntos.

III.1.5 - Definição: Uma função $A: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ se diz uma função de Orlicz (ou uma função de Young) se $A(0) = 0$, A é convexa e crescente, $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \infty$ e se $b = \inf\{t: A(t) = \infty\}$ tem-se A contínua à direita em $[0, b)$ e contínua à esquerda em $(0, \infty)$. Suporemos sempre $b > 0$ e A não nula.

III.1.6 - Definição: Se (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida e X é um espaço de Banach, uma função $s: \Omega \rightarrow X$ é simples se s assume apenas um número finito de valores $x_1, \dots, x_n$ em X e $s^{-1}(x_i) = \{t \in \Omega: s(t) = x_i\} \in \Sigma$, $i=1, 2, \dots, n$.

III.1.7 - Definição: Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e X um espaço de Banach. Uma função $f: \Omega \rightarrow X$ se diz μ -mensurável se existe uma seqüência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples, $s_n: \Omega \rightarrow X$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\| = 0$.

III.1.8 - Definição: Se (Ω, Σ, μ) é espaço de medida com μ medida completa e X é um espaço de Banach, denotaremos por $L_A(\Omega, \Sigma, \mu, X)$, ou simplesmente $L_A(\mu, X)$, ao conjunto de todas as classes de equivalência, módulo igualdade μ -quase sempre, das funções $f : \Omega \rightarrow X$, μ -mensuráveis, com a propriedade

$$\exists \rho > 0 \text{ tal que } \int_{\Omega} A\left(\frac{\|f\|}{\rho}\right) d\mu < \infty.$$

Suporemos, daqui em diante, que (Ω, Σ, μ) é espaço de medida completa.

III.1.9 - Definição: Denotaremos por p_A a função definida em $L_A(\mu, X)$ por

$$p_A(f) = \inf \left\{ \rho > 0 : \int_{\Omega} A\left(\frac{\|f\|}{\rho}\right) d\mu \leq 1 \right\}$$

Em ([He] T 1) mostramos que p_A é norma e $L_A(\mu, X)$, com essa norma, é espaço de Banach.

III.1.10 - Definição: Se A é uma função de Orlicz, a função $\bar{A}$ definida em $[0, \infty)$ por

$$\bar{A}(t) = \sup_{v \geq 0} [tv - A(v)]$$

se diz função complemento de A . Prova-se ([Bu] 2.16) que $\bar{A}$ também é função de Orlicz.

III.1.11 - Definição: Se A é uma função de Orlicz e $\bar{A}$ é o seu complemento, denotaremos por N_A a função definida em $L_A(\mu, X)$ por

$$N_A(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \|f\| \|g\| d\mu, g \in L_{\bar{A}}(\mu, X) \text{ com } p_{\bar{A}}(g) \leq 1 \right\}$$

Em ([He] T3) mostramos que N_A é norma em $L_A(\mu, X)$ equivalente a norma p_A . Na verdade $p_A(f) \leq N_A(f) \leq 2 p_A(f)$, $\forall f \in L_A(\mu, X)$.

III.1.12 - Definição: Se A é uma função de Orlicz, dizemos que A satisfaz a condição Δ_2 para $t \geq t_0$, $t_0 \in [0, \infty)$, se $A(t_0) < \infty$ e $A(2t) \leq \ell A(t)$ para algum número $\ell > 0$ e para todo $t \geq t_0$. Dizemos que A satisfaz a condição Δ_2 no zero se $A(t) > 0$ para todo $t > 0$ e existe $t_0 > 0$ tal que $A(2t) \leq \ell A(t)$ para algum número $\ell > 0$ e todo $t \in [0, t_0]$ (ou equivalentemente $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{A(2t)}{A(t)} < \infty$). Verifica-se facilmente que $\ell \geq 2$.

III.1.13 - Proposição: Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida, X um espaço de Banach e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função μ -mensurável. Se $E \in \Sigma$ é um 1-átomo então $f|_E$ é constante. Se A é uma função de Orlicz com

$A(t) > 0$, $\forall t > 0$, e $f \in L_A(\mu, X)$ então $f|_E$ é nula qualquer que seja $E \in \Sigma$, átomo de medida infinita.

Prova: Se $s : \Omega \rightarrow X$ é uma função simples, $s = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}$ com $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$ e $E \in \Sigma$ é um 1-átomo temos que existe um único $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\mu(E \cap E_{i_0}) = \mu(E) > 0$, logo $\mu(E \cap E_i) = 0$ se $i \neq i_0$.

Conseqüentemente $s|_E \equiv x_{i_0}$ e então se $f : \Omega \rightarrow X$ é μ -mensurável segue que $f|_E$ é constante.

Para provar a segunda afirmação do enunciado sejam $f \in L_A(\mu, X)$ e $E \in \Sigma$ um átomo de medida infinita.

Se $E_n = \{w \in E : \|f(w)\| \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, e $f|_E$ não é nula então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $\mu(E_{n_0}) > 0$, logo $\mu(E_{n_0}) = \infty$.

Lembrando que A é crescente e $A(t) > 0$ se $t > 0$, temos para qualquer $\rho > 0$

$$\int_{E_{n_0}} A(\rho \|f\|) d\mu \geq \int_{E_{n_0}} A\left(\frac{\rho}{n_0}\right) d\mu = \infty$$

o que é uma contradição ao fato $f \in L_A(\mu, X)$.

O Lema III.1.14 a seguir será necessário para mostrarmos que para $f \in L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ vale a desigualdade de Khintchine (III.1.15) que está provada em ([LT] 2.b.3) para $f \in L_p[0, 1], 1 \leq p < \infty$.

III.1.14 - Lema: Seja A uma função de Orlicz para a qual existe um número $\ell \geq 2$ e existe $t_0 \geq 0$ com $A(2t) \leq \ell \cdot A(t)$ para todo $t \geq t_0$. Se $k > 0$ e $p = \ell^2$ existem constantes positivas c e d tais que

$$c \int_0^k \|f\| \, d\lambda \leq p_A(f) \leq d \left(\int_0^k \|f\|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda $f \in L_A([0, k], M_\lambda, \lambda, \mathbb{R})$, onde λ denota a medida de Lebesgue e M_λ a σ -álgebra de Lebesgue de $[0, k]$.

Prova: Usando a desigualdade de Hölder provada em ([Bu] 3.30) temos

$$\|f\|_1 = \int_0^k |f| \chi_{[0, k]} \, d\lambda \leq 2 p_A(f) p_{\bar{A}} \left(\chi_{[0, k]} \right)$$

bastando então tomar $c = \left[2 p_{\bar{A}} \left(\chi_{[0, k]} \right) \right]^{-1}$.

Por outro lado, como A satisfaz Δ_2 para $t \geq t_0$ temos por ([Bu] 5.7) que existe um número $t_1 > 0$ e uma constante $c_1 > 0$ tais que $A(t) \leq c_1 t^p$ para todo $t \geq t_1$ e $p = \ell^2$. Então ([Bu] 3.27) garan

te que existe $d > 0$ tal que $p_A(f) \leq d \left(\int_0^k \|f\|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$.

III.1.15 - Proposição (desigualdade de Khintchine): Se A é uma função de Orlicz com Δ_2 para $t \geq t_0 \geq 0$, existem constantes positivas c e d tais que

$$c \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq p_A \left(\sum_{n=1}^m a_n r_n(t) \right) \leq d \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

para qualquer natural m , qualquer escolha dos escalares, $a_1, a_2, \dots, a_m$, sendo $r_n(t) = \text{sgn } 2^n \Pi t$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Basta usar o lema III.1.14 e a desigualdade de Khintchine encontrada em ([LT] 2.b.3).

III.1.16 - Corolário: Se A é uma função de Orlicz com Δ_2 para $t \geq t_0 \geq 0$, λ é a medida de Lebesgue, $\mathcal{B}$ a σ -álgebra de Borel e $\delta > 0$ então $L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_2(\mathbb{N})$.

Prova: Como é verificado facilmente temos $L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ isomorfo a $L_A([0, 1], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ e então o resultado é imediato usando III.1.15.

Os resultados apresentados nas proposições seguintes são de aspecto geral e serão utilizados durante todo o estudo da α -integração de funções a valores em $L_A(\mu, X)$.

III.1.17 - Proposição: Sejam A uma função de Orlicz tal que $b = \inf\{t : A(t) = \infty\} < \infty$, (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e X um espaço de Banach. Se $\mu(\Omega) < \infty$ então $L_A(\mu, X)$ é isomorfo a $L_\infty(\mu, X)$. Se $a = \sup\{t : A(t) = 0\} > 0$ então $L_A(\mu, X)$ é isomorfo a $L_\infty(\mu, X)$ mesmo que $\mu(\Omega) = \infty$.

Prova: Se $f \in L_A(\mu, X)$ e $\rho > 0$ é tal que

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{\|f\|}{\rho}\right) d\mu \leq 1 \quad \text{então} \quad \frac{\|f\|}{\rho} \leq b \quad \mu\text{-quase sempre em}$$

Ω . Logo $f \in L_\infty(\mu, X)$ e $p_A(f) \geq \frac{\|f\|_\infty}{b}$.

Por outro lado, se $f \in L_\infty(\mu, X)$ temos $A\left(\frac{b\|f\|}{\|f\|_\infty}\right) \leq A(b)$ μ -quase sempre em Ω .

Se $\mu(\Omega) < \infty$, como $\lim_{t \rightarrow 0^+} A(t) = 0$, existe $c > 1$ tal que

$$A\left(\frac{b\|f\|}{c\|f\|_\infty}\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \quad \text{e então} \quad \int_{\Omega} A\left(\frac{b\|f\|}{c\|f\|_\infty}\right) d\mu \leq 1,$$

o que mostra que $f \in L_A(\mu, X)$ e $p_A(f) \leq \frac{c}{b} \|f\|_\infty$.

Se $a > 0$ e $f \in L_\infty(\mu, X)$ então $\frac{a}{2} \frac{\|f\|}{\|f\|_\infty} \leq \frac{a}{2}$ e $A\left(\frac{a\|f\|}{2\|f\|_\infty}\right) = 0$

μ -quase sempre em Ω , o que mostra que $f \in L_A(\mu, X)$ e que $p_A(f) \leq \frac{2}{a}\|f\|_\infty$.

III.1.18 - Observação: Se A é como em III.1.17 com $a = 0$ e (Ω, Σ, μ) tem $\mu(\Omega) = \infty$ então é fácil ver que pode acontecer que $L_A(\mu, X)$ e $L_\infty(\mu, X)$ não sejam iguais nem mesmo como conjuntos. Basta considerar $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ e tomar $f = \chi_{[b+1, \infty]}$, b de III.1.17, que teremos $f \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda, \mathbb{R})$ e $f \notin L_A(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda, \mathbb{R})$.

III.1.19 - Proposição: Sejam A uma função de Orlicz com $a = \sup\{t : A(t) = 0\} > 0$, (Ω, Σ, μ) espaço de medida com $\mu(\Omega) < \infty$ e X um espaço de Banach. Então $L_A(\mu, X)$ é isomorfo a $L_\infty(\mu, X)$ ou existe uma função de Orlicz B com Δ_2 no zero e $a' = \sup\{t : B(t) = 0\} = 0$ tal que $L_A(\mu, X)$ é isomorfo a $L_B(\mu, X)$.

Prova: Se $b = \inf\{t : A(t) = \infty\} < \infty$ temos o isomorfismo entre $L_A(\mu, X)$ e $L_\infty(\mu, X)$ por III.1.17.

Se $b = \infty$ seja t_0 tal que $0 < A(a + t_0) < \infty$ e seja B a função de Orlicz definida por

$$B(t) = \frac{A(a + t_0)}{(a + t_0)^2} t^2 \quad \text{se } 0 \leq t \leq a + t_0 \quad \text{e}$$

$$B(t) = A(t) \quad \text{se } t > a + t_0$$

É claro que B tem Δ_2 no zero e $a' \neq 0$. O isomorfismo entre $L_A(\mu, X)$ e $L_B(\mu, X)$ é dado por ([Bu] 3.27).

O teorema a seguir resolve o problema $D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$ para $Y = L_A(\mu, X)$, X Banach qualquer, $\alpha \in BV[0, 1]$ e (Ω, Σ, μ) espaço de medida não puramente atômico.

III.1.20 - Teorema: Se (Ω, Σ, μ) é espaço de medida não puramente atômico, A é uma função de Orlicz, X espaço de Banach, $X \neq \{0\}$ e $\alpha \in BV[0, 1]$ então

$$D_\alpha[L_A(\mu, X)] = R_\alpha[L_A(\mu, X)] \Leftrightarrow \alpha_C \text{ é constante.}$$

Prova: Seja $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = \delta > 0$ tal que (E, Σ_E, μ_E) é espaço de medida não atômico. Se A não satisfaz Δ_2 para $t \geq t_0$, qualquer que seja $t_0 \geq 0$, temos por ([Tu] T4) que $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, \mathbb{R})$ tem subespaço fechado isomorfo a $c_0(N)$. Como $L_A(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ tem subespaço isométrico a $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, \mathbb{R})$ temos a tese por I.1.12 e I.3.14.

Se existe $t_0 \geq 0$ tal que A satisfaz Δ_2 para $t \geq t_0$ fazemos:

Em $[0, \delta]$ considero os intervalos $(I_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}^{k=0,1,\dots,2^n-1}$,

$$I_{n,k} = \left[\frac{k\delta}{2^n}, \frac{(k+1)\delta}{2^n} \right].$$

Sendo (E, Σ_E, μ_E) não atômico ([Bu] B.3) justifica a construção de subconjuntos de E ,

$(E_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}^{k=0,1,\dots,2^n-1}$ do seguinte modo:

$$E_{0,0} = E$$

$$E_{1,0} \subset E, E_{1,0} \in \Sigma \text{ e } \mu(E_{1,0}) = \frac{\delta}{2} = \lambda(I_{1,0})$$

$$E_{1,1} = E - E_{1,0}, \text{ logo } \mu(E_{1,1}) = \frac{\delta}{2} = \lambda(I_{1,1})$$

$$E_{2,0} \subset E_{1,0}, E_{2,0} \in \Sigma \text{ e } \mu(E_{2,0}) = \frac{\delta}{2^2} = \lambda(I_{2,0})$$

$$E_{2,1} = E_{1,0} - E_{2,0}, \text{ logo } \mu(E_{2,1}) = \frac{\delta}{2^2} = \lambda(I_{2,1})$$

$$E_{2,2} \subset E_{1,1}, E_{2,2} \in \Sigma \text{ e } \mu(E_{2,2}) = \frac{\delta}{2^2} = \lambda(I_{2,2})$$

$$E_{2,3} = E_{1,1} - E_{2,2}, \text{ logo } \mu(E_{2,3}) = \frac{\delta}{2^2} = \lambda(I_{2,3})$$

Seja S o subconjunto de $L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ formado pelas funções simples da forma $\sum_{m=1}^{\ell} \alpha_m \chi_{J_m}$ sendo J_m um dos intervalos

$$(I_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}^{k=0,1,\dots,2^n-1}, \quad \forall m = 1, 2, \dots, \ell$$

Definimos $T : S \subset L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R}) \rightarrow L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, \mathbb{R})$ por

$$T \left(\sum_{m=1}^{\ell} \alpha_m \chi_{J_m} \right) = \sum_{m=1}^{\ell} \alpha_m \chi_{F_m} \quad \text{sendo } F_m = E_{n,k} \quad \text{se}$$

$$J_m = I_{n,k}, \quad m = 1, \dots, \ell, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

É fácil ver que T está bem definida, isto é, $T(s)$ não depende da particular expressão que representa s , $s \in S$.

É claro que T é isomorfismo isométrico de S em $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, \mathbb{R})$. Mostremos que S é denso em $L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$.

Como A satisfaz Δ_2 para $t \geq t_0 \geq 0$, temos $b = \inf\{t: A(t) = \infty\} = \infty$. Logo por III.1.19 podemos supor que $a = \sup\{t: A(t) = 0\} = 0$.

É fácil ver que dado $\varepsilon > 0$ e $E \in \mathcal{B}$, existe $s \in S$,

$$s = \sum_{m=1}^{\ell} \chi_{J_m} \quad \text{de modo que} \quad 0 < \lambda \left(\bigcup_{m=1}^{\ell} J_m \Delta E \right) < \frac{1}{A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

$$\text{Portanto } p_A(s - \chi_E) = p_A \left(\chi \left[\bigcup_{m=1}^{\ell} J_m \Delta E \right] \right) =$$

$$= \frac{1}{A^{-1} \left(\frac{1}{\lambda \left(\bigcup_{m=1}^{\ell} J_m \Delta E \right)} \right)} < \varepsilon, \quad \text{onde } A^{-1} \text{ denota a inversa à direita de } A$$

([Bu] 2.30).

O resultado ([Bu]5.15) garante que o conjunto das funções simples de $L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ é denso em $L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$. Logo o que fizemos prova que S é denso em $L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$.

Portanto, T pode ser estendido a um isomorfismo isométrico de $L_A([0, \delta], \lambda, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ em $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, \mathbb{R})$ e então o resultado III.1.16 mostra que $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, \mathbb{R})$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_2(\mathbb{N})$. Lembrando então que $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado isomorfo a $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, \mathbb{R})$ temos $D_\alpha[L_A(\mu, X)] \subsetneq R_\alpha[L_A(\mu, X)]$, $\forall \alpha \in BV[0, 1]$ com α_C não constante, por I.3.14 e I.1.12.

III.1.21 - Corolário: Se (Ω, Σ, μ) é espaço de medida não puramente atômico e A é uma função de Orlicz com Δ_2 para todo $t \geq t_0 \geq 0$ então $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_2(\mathbb{N})$, qualquer que seja o Banach X , $X \neq \{0\}$.

Prova: Demonstração de III.1.20.

III.1.22 - Corolário: Se (Ω, Σ, μ) é espaço de medida não puramente atômico então $D_\alpha[L_p(\mu, X)] \subsetneq R_\alpha[L_p(\mu, X)]$, $1 \leq p \leq \infty$, para toda $\alpha \in BV[0, 1]$ com α_C não constante e todo Banach X , $X \neq \{0\}$.

Prova: III.1.20 para $A(t) = t^p$ se $1 \leq p < \infty$ e $A(t) = \infty$. $X_{(1, \infty)}$ se $p = \infty$.

Vamos agora apresentar os resultados obtidos na classe dos espaços $L_A(\mu, X)$ para (Ω, Σ, μ) puramente atômico. A proposição III.1.23 a seguir é válida para qualquer espaço de medida (Ω, Σ, μ) e será utilizada na demonstração do teorema III.1.26 e no que o segue.

III.1.23 - Proposição: Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida tal que existe uma seqüência $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Σ , dois a dois disjuntos, com $0 < \delta \leq \mu(U_n) \leq \infty$. $\forall n \in \mathbb{N}$. Se A é uma função de Orlicz com $a = \sup\{t : A(t) = 0\} > 0$ então $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$ qualquer que seja o espaço de Banach X , $X \neq \{0\}$.

Prova: Basta mostrar que $L_A(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$, denotado por $L_A(\mu)$, tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$. Para isso observemos inicialmente que se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é um elemento de $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$ então

$$\int_{\Omega} A \left(\frac{\left| a \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n} \right|}{2 \sup_n |a_n|} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} A \left(\frac{a |a_n|}{2 \sup_n |a_n|} \right) d\mu = 0.$$

$$\text{Logo } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n} \in L_A(\mu) \text{ e } p_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n} \right) \leq \frac{2}{a} \sup_n |a_n|.$$

Por outro lado, denotando por A^{-1} a inversa à direita de A ([Bu] 2.30) temos por ([Bu] 2.31) que $0 < A^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right) < \infty$. Se $c > 0$ é uma constante tal que $\frac{1}{2c} > \max\{2a, A^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)\}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $|a_{n_0}| > \frac{1}{2} \sup_n |a_n|$ temos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n} \right|}{c \sup_n |a_n|} \right) d\mu \geq \int_{U_{n_0}} \left(\frac{|a_{n_0}|}{2 \sup_n |a_n|} \right) d\mu \geq \int_{U_{n_0}} A\left(\frac{1}{2c}\right) d\mu.$$

Se $\mu(U_{n_0}) = \infty$ ou $A\left(\frac{1}{2c}\right) = \infty$ então

$$p_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n} \right) \geq c \sup_n |a_n|.$$

Se $\mu(U_{n_0}) < \infty$ e $A\left(\frac{1}{2c}\right) < \infty$ então $A\left(A^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) = \frac{1}{\delta}$ por ([Bu] 2.30) e então

$$\int_{U_{n_0}} A\left(\frac{1}{2c}\right) d\mu > \frac{1}{\delta} \mu(U_{n_0}) > 1$$

o que mostra que $p_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n} \right) \geq c \sup_n |a_n|$.

Mostramos então que a aplicação linear injetora $T: \ell_{\infty}(\mathbb{N}) \rightarrow L_A(\mu)$

definida por $T\left[(a_n)_{n=1}^{\infty}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n}$ é um isomorfismo o que prova a tese.

Na demonstração do teorema III.1.26 utilizaremos também os espaços $\ell_A(\mathbb{N})$, definidos a seguir, e o resultado do lema III.1.25 ligado a esses espaços. Um estudo dos $\ell_A(\mathbb{N})$ pode ser encontrado em [LT].

III.1.24 - Definição: Se A é uma função de Orlicz denotamos por $\ell_A(\mathbb{N})$ o espaço de Banach formado pelas seqüências de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ para as quais existe $\rho > 0$ com $\sum_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{|a_n|}{\rho}\right) < \infty$.

A norma considerada em $\ell_A(\mathbb{N})$ é

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_A = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{|a_n|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}.$$

Observe que $\ell_A(\mathbb{N}) = L_A(\mu, \mathbb{K})$ com $\Omega = \mathbb{N}$ e $\mu(\{n\}) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

III.1.25 - Lema: Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida tal que existe uma seqüência $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Σ , dois a dois disjuntos com $0 < c \leq \mu(U_n) \leq d < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se A é uma função de Orlicz então $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_A(\mathbb{N})$, qualquer que seja o Banach X , $X \neq \{0\}$.

Prova: Basta mostrar que $L_A(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$, denotado por $L_A(\mu)$ tem sub espaço fechado isomorfo a $\ell_A(\mathbb{N})$.

É claro que podemos supor $c < 1 < d$.

Se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de $\ell_A(\mathbb{N})$ temos

$$\begin{aligned} p_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n} \right) &= \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A \left(\frac{|a_n|}{\rho} \right) \mu(U_n) \leq 1 \right\} \leq \\ &\leq \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A \left(\frac{|a_n|}{\rho} \right) d \leq 1 \right\} \leq \\ &\leq \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A \left(\frac{d|a_n|}{\rho} \right) \leq 1 \right\} = \\ &= d \inf \left\{ \rho' > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A \left(\frac{|a_n|}{\rho'} \right) \leq 1 \right\} = d \left\| (a_n)_{n=1}^{\infty} \right\|_A, \end{aligned}$$

sendo que a segunda desigualdade decorre de $A(\beta t) \geq \beta A(t)$ sempre que $\beta \geq 1$ e $t \in [0, \infty)$.

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}
P_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{U_n} \right) &= \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A \left(\frac{|a_n|}{\rho} \right) \mu(U_n) \leq 1 \right\} \geq \\
&\geq \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A \left(\frac{|a_n|}{\rho} \right) c \leq 1 \right\} \geq \\
&\geq \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A \left(\frac{c|a_n|}{\rho} \right) \leq 1 \right\} = \\
&= c \inf \left\{ \rho' > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} A \left(\frac{|a_n|}{\rho'} \right) \leq 1 \right\} = c \| (a_n)_{n=1}^{\infty} \|_A, \text{ sendo}
\end{aligned}$$

que a segunda desigualdade decorre de $A(\beta t) \leq \beta A(t)$ sempre que $0 \leq \beta \leq 1$ e $t \in [0, \infty)$.

III.1.26 - Teorema: Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida puramente atômico tal que o conjunto dos átomos de medida finita, $\{U_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$, tem infinitos elementos e $0 < c \leq \mu(U_\gamma) \leq d < \infty$, $\forall \gamma \in \Gamma$. Se A é uma função de Orlicz, $a = \sup \{t : A(t) = 0\}$, $\alpha \in BV[0, 1]$ com α_c não constante e X é espaço de Banach, $X \neq \{0\}$, valem

(i) Se $a > 0$ temos $D_\alpha [L_A(\mu, X)] \subsetneq R_\alpha [L_A(\mu, X)]$.

(ii) Se $a = 0$ temos

$$D_\alpha[L_A(\mu, X)] = R_\alpha[L_A(\mu, X)] \Leftrightarrow L_A(\mu, X) \text{ é isomorfo a}$$

$$\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1, \quad X_\gamma = X, \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad \text{e} \quad D_\alpha(X) = R_\alpha(X).$$

Prova: O resultado (i) segue de III.1.23, I.3.14 e I.1.12.

Provemos então a equivalência de (ii).

Se $L_A(\mu, X)$ é isomorfo a $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1$ com $D_\alpha(X_\gamma) = R_\alpha(X_\gamma)$,
 $\forall \gamma \in \Gamma$ temos $D_\alpha[L_A(\mu, X)] = R_\alpha[L_A(\mu, X)]$ por II.1.2, I.1.8 e I.1.11.

Para a implicação contrária observemos que III.1.25 mostra que $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_A(N)$ e então a hipótese e I.1.12 garantem que $D_\alpha[\ell_A(N)] = R_\alpha[\ell_A(N)]$. Logo, usando I.1.12 e I.3.14, vem que $\ell_A(N)$ não tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_\infty(N)$ e então A tem Δ_2 no zero e os vetores $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ formam uma base simétrica de $\ell_A(N)$, por ([LT] 4.a.4). Consequentemente o teorema I.3.12 garante que $\ell_A(N)$ é isomorfo a $\ell_1(N)$ e observando a demonstração desse teorema vemos que, nesse caso, o isomorfismo é dado pela aplicação identidade.

Portanto, aplicando ([LT] 4.a.5), garantimos a existência

de constantes $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ e de $t_0 > 0$ tais que $k_1 t \leq A(t) \leq k_2 t$, $\forall t \in [0, t_0]$.

Se $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ é um elemento não nulo de $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \right)_1$, $x_\gamma = x$,

$\forall \gamma \in \Gamma$, seja J o subconjunto enumerável de Γ , $J = \{\gamma \in \Gamma: x_\gamma \neq 0\}$.

Como, para cada $\gamma \in J$, podemos escrever $\frac{\|x_\gamma\|}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|} t_0 \leq t_0$,

$$\text{temos } A \left(\frac{\|x_\gamma\|}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|} t_0 \right) \leq \frac{k_2 \|x_\gamma\| t_0}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|} \quad \text{ou ainda}$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} A \left(\frac{\|x_\gamma\| t_0}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|} \right) \mu(U_\gamma) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{k_2 \|x_\gamma\| t_0 d}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|} = k_2 t_0 d \leq 1,$$

escolhendo $t_0 \leq \frac{1}{k_2 d}$.

$$\text{Portanto} \quad \int_{\Omega} A \left(\frac{\left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma x_{U_\gamma} \right\| t_0}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|} \right) d\mu = \sum_{\gamma \in J} A \left(\frac{\|x_\gamma\| t_0}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|} \right) \mu(U_\gamma) \leq 1$$

o que mostra $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma x_{U_\gamma} \in L_A(\mu, X)$ e $p_A \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma x_{U_\gamma} \right) \leq \frac{1}{t_0} \|(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}\|_1$.

Por outro lado se $f \in L_A(\mu, X)$, $f \neq 0$, temos por III.1.13 que $f|_{U_\gamma} = x_\gamma$, $x_\gamma \in X$, $\gamma \in \Gamma$.

Além disso se $J = \{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0\}$ temos, uma vez que $a=0$, que $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, sendo

$$J_n = \left\{ \gamma \in \Gamma : \int_{U_\gamma} A\left(\frac{\|x_\gamma\|}{\rho_0}\right) d\mu \geq \frac{1}{n} \right\}, \text{ onde } \rho_0 > 0 \text{ é}$$

tal que $\int_{\Omega} A\left(\frac{\|f\|}{\rho_0}\right) d\mu < \infty$. Pela escolha de ρ_0 temos que cada J_n ,

$n \in \mathbb{N}$, é um conjunto finito, logo J é enumerável.

$$\text{Se } E = \left\{ w \in \left(\Omega - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \right) : f(w) \neq 0 \right\} \text{ temos}$$

$$E = \left\{ w \in \left(\Omega - \bigcup_{\gamma \in J} U_\gamma \right) : f(w) \neq 0 \right\}, \text{ logo } E \in \Sigma. \text{ Se } \mu(E) > 0,$$

$$\text{como } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n = \left\{ w \in \left(\Omega - \bigcup_{\gamma \in J} U_\gamma \right) : \|f(w)\| \geq \frac{1}{n} \right\} =$$

$$= \left\{ w \in \left(\Omega - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \right) : \|f(w)\| \geq \frac{1}{n} \right\}, \text{ vem que existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ com}$$

$\mu(E_{n_0}) > 0$ e $\mu(E_{n_0}) < \infty$ (por III.1.13) o que implica, lembrando que (Ω, Σ, μ) é puramente atômico, na existência de $\gamma_0 \in \Gamma$ com

$U_{\gamma_0} \subset E_{n_0}$ o que é absurdo. Logo $\mu(E) = 0$ e então $f = \sum_{\gamma \in J} x_{\gamma} \chi_{U_{\gamma}}$.

Se $\rho > 0$ é tal que $\int_{\Omega} A\left(\frac{\|f\|}{\rho}\right) d\mu \leq 1$ então

$$\sum_{\gamma \in J} A\left(\frac{\|x_{\gamma}\|}{\rho}\right) \mu(U_{\gamma}) \leq 1, \text{ logo } A\left(\frac{\|x_{\gamma}\|}{\rho}\right) c \leq 1, \forall \gamma \in J, \text{ e portanto}$$

por ([Bu]2.30), lembrando que $a = 0$, temos

$$\frac{\|x_{\gamma}\|}{\rho} \leq A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right) \text{ ou } \frac{\|x_{\gamma}\|}{\rho A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)} t_0 \leq t_0. \text{ Logo}$$

$$\frac{k_1 \|x_{\gamma}\| t_0}{\rho A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)} \leq A \frac{\|x_{\gamma}\| t_0}{\rho A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)} \leq A\left(\frac{\|x_{\gamma}\|}{\rho}\right), \forall \gamma \in J, \text{ escolhendo}$$

$t_0 < A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$. Portanto

$$\sum_{\gamma \in J} \|x_{\gamma}\| \mu(U_{\gamma}) \leq \frac{\rho A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)}{k_1 t_0} \sum_{\gamma \in J} A\left(\frac{\|x_{\gamma}\|}{\rho}\right) \mu(U_{\gamma}) \leq \frac{\rho A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)}{k_1 t_0} e$$

então $c \cdot \sum_{\gamma \in J} \|x_{\gamma}\| \leq \frac{\rho A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)}{k_1 t_0}$ o que mostra que $(x_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma} \in \left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} x_{\gamma}\right)_1$

$$\text{e } \|(x_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}\|_1 \leq \frac{A^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)}{k_1 t_0 c} p_A(f).$$

O que fizemos mostra então que a aplicação

$$T : \left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1 \rightarrow L_A(\mu, X) \text{ definida por}$$

$$T[(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}] = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \chi_{U_\gamma} \text{ é um isomorfismo sobreje-}$$

tor.

Para finalizar observemos que $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, por I.1.12, uma vez que $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \right)_1$, $X_\gamma = X$, $\forall \gamma \in \Gamma$ tem espaço fechado isomorfo a X .

Observação: Destacamos, da demonstração do teorema anterior, o seguinte resultado, para $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante:

$$D_\alpha(\ell_A(\mathbb{N})) = R_\alpha(\ell_A(\mathbb{N})) \Leftrightarrow \ell_A(\mathbb{N}) \text{ é isomorfo a } \ell_1(\mathbb{N}).$$

Passemos agora a caracterização dos espaços $Y = L_p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, (Ω, Σ, μ) puramente atômico, tais que $D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$ para $\alpha \in BV[0,1]$.

Consideremos primeiramente os casos $1 \leq p \leq \infty$.

III.1.27 - Lema: Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida puramente atômico e $\{U_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ o conjunto dos átomos de medida finita existentes em Σ . Se Γ é um conjunto não vazio então $L_p(\mu, X)$, $1 \leq p < \infty$, é isométrico a $\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma\right)_p$, $X_\gamma = X$, $\forall \gamma \in \Gamma$, qualquer que seja o espaço de Banach X . Se $\Gamma = \emptyset$ então $L_p(\mu, X) = \{0\}$, $1 \leq p < \infty$.

Prova: Se $f \in L_p(\mu, X)$, a demonstração do teorema III.1.26 garante que $f = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \chi_{U_\gamma}$ com $J = \{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0\}$ enumerável. Logo

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} \|f\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|^p \mu(U_\gamma) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{o que mostra que}$$

$T : L_p(\mu, X) \rightarrow \left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma\right)_p$, $X_\gamma = X$, $\forall \gamma \in \Gamma$ definida por

$$T(f) = T \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \chi_{U_\gamma} \right) = \left(\left(\mu(U_\gamma) \right)^{\frac{1}{p}} x_\gamma \right)_{\gamma \in \Gamma} \quad \text{é isometria sobrejetora.}$$

A última afirmação do enunciado é óbvia.

III.1.28 - Teorema: Se (Ω, Σ, μ) é espaço de medida puramente atômico e $\alpha \in BV[0, 1]$ então se $L_1(\mu, X) \neq \{0\}$ vale

$$D_\alpha[L_1(\mu, X)] = R_\alpha[L_1(\mu, X)] \Leftrightarrow D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$$

qualquer que seja o espaço de Banach X .

Prova: Basta aplicar os resultados I.1.8, I.1.11, III.1.27 e II.1.3.

Para $1 < p < \infty$ temos o seguinte.

III.1.29 - Teorema: Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida puramente atômico, $\alpha \in BV[0,1]$, X um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$, e $Y = L_p(\mu, X)$, $1 < p < \infty$. Se $\{U_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ é o conjunto dos átomos de medida finita existentes em Σ , $\Gamma \neq \emptyset$, então vale

$$D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_C \text{ é constante ou} \\ \Gamma \text{ é um conjunto finito e } D_\alpha(X) = R_\alpha(X) \end{cases}$$

Prova: Basta aplicar os resultados I.1.8, I.1.11, III.1.27 e II.1.4.

Para $p = \infty$ temos o seguinte resultado.

III.1.30 - Teorema: Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida puramente atômico, $\alpha \in BV[0,1]$, X um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$ e $Y = L_\infty(\mu, X)$. Então vale

$$D_{\alpha}(Y) = R_{\alpha}(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_C \text{ é constante ou} \\ \text{o número de conjuntos de medida não nu-} \\ \text{la, dois a dois disjuntos, existente em} \\ \Sigma \text{ é no máximo finito e } D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X). \end{cases}$$

Prova: Para provar a implicação direta, suponhamos α_C não constante. Se existe em Σ uma seqüência infinita $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ com $\mu(U_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $U_n \cap U_m = \emptyset$ se $m \neq n$, então a aplicação $T : \ell_{\infty}(\mathbb{N}) \rightarrow Y$, definida por

$$T\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0 \chi_{U_n}, \text{ onde } x_0 \in X \text{ com } \|x_0\| = 1 \text{ é cla}$$

ramente uma isometria. Logo Y tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$ o que é absurdo por I.1.12 e I.3.14 uma vez que $D_{\alpha}(Y) = R_{\alpha}(Y)$. Conseqüentemente Σ contém, no máximo, um número finito de conjuntos dois a dois disjuntos de medida não nula, portanto Σ contém, no máximo, um número finito n (que pode ser igual a zero) de 1-átomos.

Se $U_1, U_2, \dots, U_n$ são os 1-átomos existentes em Σ , mostre mos que $\mu\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^n U_i\right) = 0$ (ou $\mu(\Omega) = 0$ se $n = 0$).

Se $\mu\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^n U_i\right) > 0$, sendo (Ω, Σ, μ) puramente atômico, existe $E \in \Sigma$, E átomo, logo $\mu(E) > 0$ e $E \subset \left(\Omega - \bigcup_{i=1}^n U_i\right)$.

Como E não é 1-átomo, existe $E_1 \subset E$, $E_1 \in \Sigma$, com $\mu(E_1) > 0$

e $\mu(E-E_1) > 0$ (pois se todo subconjunto E_1 de E , $E_1 \in \Sigma$ é tal que $\mu(E_1) = 0$ ou $\mu(E_1-E) = 0$ E seria um 1-átomo).

Como $(E-E_1)$ não é 1-átomo, existe $E_2 \subset (E-E_1)$, $E_2 \in \Sigma$ com $\mu(E_2) > 0$ e $\mu(E - E_1 \cup E_2) > 0$. Mas $(E - E_1 \cup E_2)$ também não é 1-átomo, logo existe $E_3 \in \Sigma$, $E_3 \subset (E - E_1 \cup E_2)$ com $\mu(E_3) > 0$ e $\mu(E - E_1 \cup E_2 \cup E_3) > 0$.

Continuando o processo obtemos uma seqüência infinita $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Σ , dois a dois disjuntos com $\mu(E_n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, contrariando a conclusão do início da demonstração. Conseqüentemente temos $\mu\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^n U_i\right) = 0$.

Logo por III.1.13 temos que se $f \in L_{\infty}(\mu, X)$ então

$$f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{U_i}, \quad x_i \in X, \quad i=1, \dots, n, \text{ o que mostra que } Y = L_{\infty}(\mu, X)$$

é isomorfo a $\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)_{\infty}$, $X_i = X$, $i=1, \dots, n$.

Portanto temos $D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$ por I.1.12.

Para provar a recíproca, se considerarmos α_c constante teremos $D_{\alpha}(Y) = R_{\alpha}(Y)$ por I.3.4. Se é válida a outra condição, temos pelo que fizemos na prova da implicação direta, que Y é isomorfo a $\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)_{\infty}$, $X_i = X$, $i=1, \dots, n$ com $D_{\alpha}(X) = R_{\alpha}(X)$. Logo teremos $D_{\alpha}(Y) = R_{\alpha}(Y)$ por II.1.4.

III.2 - α -INTEGRAÇÃO NOS ESPAÇOS DUAIS $[L_A(\mu, X)]^*$

Caracterizamos, neste parágrafo, os espaços $Y = [L_A(\mu, X)]^*$ para os quais $D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$ com X Banach qualquer, $\alpha \in BV[0,1]$ e (Ω, Σ, μ) espaço de medida qualquer.

Se (Ω, Σ, μ) é não puramente atômico, mostramos em III.2.1 que $D_\alpha(Y) \subsetneq R_\alpha(Y)$, para toda $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante, independentemente de X , se Y tem dimensão infinita.

Para (Ω, Σ, μ) puramente atômico, dada uma seqüência de átomos de Σ , $(U_n)_{n=1}^\infty$, de medida finita $\mu(U_n) = u_n$, $n \in \mathbb{N}$, verificamos que o espaço $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado isomorfo ao espaço seqüencial modular (definição III.2.3) $\ell\{A_n\}$ onde $A_n = u_n \cdot A$, $n \in \mathbb{N}$. Tais espaços seqüenciais modulares foram estudados por J.Y.T. Woo em [W].

Utilizando então os resultados obtidos por Woo e o estudo que já havíamos feito a respeito dos espaços $Y = [L_A(\mu, X)]^*$ em [He] chegamos ao teorema III.2.6 que caracteriza os espaços Y para os quais $D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$, $\alpha \in BV[0,1]$, neste caso de (Ω, Σ, μ) ser espaço de medida puramente atômico.

III.2.1. Teorema: Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida não puramente

atômico, X espaço de Banach, $X \neq \{0\}$, e A uma função de Orlicz. Então se $\alpha \in BV[0,1]$ temos

$$D_\alpha \left(\left[L_A(\mu, X) \right]^* \right) = R_\alpha \left(\left[L_A(\mu, X) \right]^* \right) \Leftrightarrow \alpha_C \text{ é constante.}$$

Prova: Basta provar a implicação direta, pois sua recíproca é garantida por I.3.4. Seja então $E \in \Sigma$, $0 < \mu(E) < \infty$, tal que (E, Σ_E, μ_E) é não atômico. Se $\bar{A}$ é a função complemento de A (III.1.10) temos por ([He]T6) que $\left[L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X) \right]^*$ tem subespaço fechado isomorfo a $L_{\bar{A}}^-(E, \Sigma_E, \mu_E, X^*)$, considerando em $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X)$ a norma p_A (III.1.9) e em $L_{\bar{A}}^-(E, \Sigma_E, \mu_E, X^*)$ a norma $N_{\bar{A}}^-$ (III.1.11). Lembrando que as normas $p_{\bar{A}}$ e $N_{\bar{A}}^-$ são equivalentes (III.1.11) temos que $\left[L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X) \right]^*$ tem subespaço fechado isomorfo a $L_{\bar{A}}^-(E, \Sigma_E, \mu_E, X^*)$ considerando as normas usuais p_A e $p_{\bar{A}}$ respectivamente.

Por outro lado, é fácil ver que a implicação linear $T : L_A(\mu, X) \rightarrow L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X)$ definida por $T(f) = f\chi_E$ é projeção contínua e sobrejetora, logo $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X)$ é isomorfo a um subespaço complementado de $L_A(\mu, X)$. Portanto $\left[L_A(\mu, X) \right]^*$ tem subespaço fechado isomorfo a $\left[L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X) \right]^*$ e conseqüentemente tem espaço fechado isomorfo a $L_{\bar{A}}^-(E, \Sigma_E, \mu_E, X^*)$.

Se existe $t_0 \geq 0$ tal que $\bar{A}$ tem Δ_2 para todo $t \geq t_0$ então por III.1.21 temos que $L_{\bar{A}}^-(E, \Sigma_E, \mu_E, X^*)$, logo $\left[L_A(\mu, X) \right]^*$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_2(N)$ o que prova a tese, por I.1.12 e I.3.14.

Se $\bar{A}$ não satisfaz Δ_2 para todo $t \geq t_0$, qualquer que seja $t_0 \geq 0$, então $([Tu]T4)$ garante que $L_{\bar{A}}(E, \Sigma_E, \mu_E, X^*)$, logo $[L_A(\mu, X)]^*$, tem subespaço fechado isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ e então temos a tese, novamente por I.1.12 e I.3.14.

III.2. - Corolário: Se (Ω, Σ, μ) é espaço de medida não puramente atômico, X é espaço de Banach, $X \neq \{0\}$, $\alpha \in BV[0, 1]$ e $1 \leq p \leq \infty$, então

$$D_\alpha[L_p(\mu, X)]^* = R_\alpha[L_p(\mu, X)]^* \Leftrightarrow \alpha_C \text{ é constante.}$$

Prova: Basta considerar $A(t) = t^p$ se $1 \leq p < \infty$ e $A(t) = \infty \cdot X]_{1, \infty}$ se $p = \infty$ e aplicar III.2.1.

Para estudar o caso de (Ω, Σ, μ) espaço de medida puramente atômico, trabalharemos com os espaços sequenciais modulares definidos a seguir.

III.2.3 - Definição: Se $(A_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de funções de Orlicz denotamos por $\ell\{A_n\}$ o espaço de Banach formado por todas as seqüências de escalares $(a_n)_{n=1}^\infty$ para as quais existe $\rho > 0$ de modo que $\sum_{n=1}^\infty A_n \left(\frac{|a_n|}{\rho} \right) < \infty$ com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^\infty\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^\infty A_n \left(\frac{|a_n|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}.$$

$\ell\{A_n\}$ é chamado espaço modular de seqüências ou espaço sequencial modular.

Os resultados III.2.4 e 5 a seguir fornecem informações interessantes em relação a $L_A(\mu, X)$. Estão enunciados como lemas porque são utilizados na demonstração do teorema III.2.6.

III.2.4 - Lema: Seja (Ω, Σ, μ) espaço de medida puramente atômico com $\mu(\Omega) = \infty$ e tal que Σ não contém átomos de medida infinita. Se A é uma função de Orlicz com $a = \sup \{t : A(t) = 0\} > 0$ então $L_A(\mu, X)$ tem subespaço isomorfo $\ell_\infty(\mathbb{N})$, qualquer que seja o Banach X , $X \neq \{0\}$.

Prova: Nas condições impostas, é claro que Σ contém infinitos átomos de medida finita. Seja $\{U_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ o conjunto (infinito) formado pelos átomos de medida finita, não nula, de Σ .

Se Γ é não enumerável e $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma : \mu(U_\gamma) \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que Γ_{n_0} é infinito e então basta aplicar III.1.23 para obter a tese.

Se Γ é enumerável temos $\left(\Omega - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma\right) \in \Sigma$ e $\mu\left(\Omega - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma\right) = 0$, uma vez que Σ não contém átomos de medida infinita. Logo, consi

derando uma enumeração de Γ , temos $\sum_{\gamma=1}^{\infty} \mu(U_{\gamma}) = \infty$. Portanto dado $\delta > 0$, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $\sum_{\gamma=1}^{\gamma_0} \mu(U_{\gamma}) > \delta$ e $\sum_{\gamma=\gamma_0+1}^{\infty} \mu(U_{\gamma}) = \infty$.

Consequentemente existe $\gamma_1 > \gamma_0$ tal que $\sum_{\gamma=\gamma_0+1}^{\gamma_1} \mu(U_{\gamma}) > \delta$ e

$$\sum_{\gamma=\gamma_1+1}^{\infty} \mu(U_{\gamma}) = \infty.$$

Continuando o processo obtemos uma seqüência de elementos de Σ , $(E_n)_{n=1}^{\infty}$, $E_1 = \bigcup_{\gamma=1}^{\gamma_0} U_{\gamma}$, $E_2 = \bigcup_{\gamma=\gamma_0+1}^{\gamma_1} U_{\gamma}$, ..., dois a dois disjuntos $\mu(E_n) > \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Novamente obtemos a tese aplicando III.1.23.

III.2.5 - Lema: Sejam (Ω, Σ, μ) espaço de medida arbitrário, A uma função de Orlicz e X um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$.

Então $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado, complementado e isométrico a $L_A(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$.

Prova: Seja $x_0 \in X$ com $\|x_0\| = 1$ e denotemos $L_A(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$ por $L_A(\mu)$.

É claro que a aplicação $T : L_A(\mu) \rightarrow L_A(\mu, X)$ definida por $T(g) = g \cdot x_0$ é isomorfismo isométrico de $L_A(\mu)$ em $L_A(\mu, X)$.

Se $x^* \in X^*$ é tal que $\|x^*\| = 1$ e $x^*(x_0) = \|x_0\| = 1$ definimos $\Pi : L_A(\mu, X) \rightarrow T(L_A(\mu))$ por $\Pi(f) = x^*(f).x_0$.

É claro que Π é linear e como $A(|x^*(f)|) \leq A(\|f\|)$ temos $p_A(x^*(f)x_0) \leq p_A(f)$ o que mostra que Π é contínua.

Como $\Pi(\Pi(f)) = \Pi(x^*(f)x_0) = x^*(f)x^*(x_0)x_0 = x^*(f)x_0 = \Pi(f)$ para toda $f \in L_A(\mu, X)$ temos que Π é projeção.

Além disso Π é sobrejetora pois dada $g \in L_A(\mu)$ tomamos $f = g x_0 \in L_A(\mu, X)$ e $\Pi(f) = x^*(g.x_0)x_0 = g x_0$.

III.2.6 - Teorema: Sejam (Ω, Σ, μ) espaço de medida puramente atômico, X Banach, $X \neq \{0\}$, A uma função de Orlicz, $a = \sup \{t: A(t) > 0\}$ e $\alpha \in BV[0, 1]$. Se $\{U_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ é o conjunto dos átomos de medida finita existentes em Σ então temos

(i) Se Γ é um conjunto infinito vale

$$D_\alpha \left([L_A(\mu, X)]^* \right) = R_\alpha \left([L_A(\mu, X)]^* \right) \Leftrightarrow \alpha_c \text{ é constante}$$

(ii) Se Γ é um conjunto finito (não vazio) vale

1º) Se $a = 0$ ou o número de átomos existentes em Σ é finito então

$$D_{\alpha} \left(\left[L_A(\mu, X) \right]^* \right) = R_{\alpha} \left(\left[L_A(\mu, X) \right]^* \right) \Leftrightarrow D_{\alpha}(X^*) = R_{\alpha}(X^*)$$

2º) Se $a > 0$ e o número de átomos existentes em Σ é infinito então

$$D_{\alpha} \left(\left[L_A(\mu, X) \right]^* \right) = R_{\alpha} \left(\left[L_A(\mu, X) \right]^* \right) \Leftrightarrow \alpha_C \text{ é constante.}$$

Prova: Vamos provar (i). Suponhamos então Γ um conjunto infinito e vamos provar a implicação direta de (i), uma vez que sua recíproca vem de I.3.4.

Consideremos inicialmente $a > 0$. Se existem, em Σ , infinitos átomos de medida infinita temos por III.1.23 que $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$, logo a $\ell_1(\mathbb{N})$, lembrando que $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$ é universal para separáveis ($[L]$).

Então ([R] 2.b.7) e ([R] 3.b.18-demonstração) mostram que $\left[L_A(\mu, X) \right]^*$ contém subespaço fechado isomorfo a $L_1([0, 1]^{\mathbb{N}})$ e então os resultados III.1.21, I.3.14 e I.1.12 provam a tese neste caso.

Se o número de átomos de medida infinita, existentes em Σ , é finito, sendo E o complementar da reunião desses átomos, temos que Σ_E não contém átomos de medida infinita. Se $\mu(E) = \infty$ temos a tese pelo lema III.2.4 e pelos mesmos argumentos usados anteriormente, lembrando que $L_A(\mu, X)$ tem subespaço fechado isomorfo a $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X)$. Se $\mu(E) < \infty$ temos por III.1.19 que $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X)$ ou

é isomorfo a $L_\infty(\mu, X)$ ou é isomorfo a $L_B(E, \Sigma_E, \mu_E, X)$, sendo B uma função de Orlicz com $a' = \sup \{t : B(t) = 0\} = 0$. Se ocorre a primeira alternativa então $L_A(E, \Sigma_E, \mu_E, X)$, logo $L_A(\mu, X)$, tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ e temos a tese do mesmo modo que nos casos anteriores. Se ocorre a segunda alternativa a prova é a mesma que faremos a seguir para o caso $a = 0$.

Consideremos então $a = 0$.

Seja $(U_n)_{n=1}^\infty$ uma seqüência infinita de átomos de medida finita e $\ell\{A_n\}$ o espaço seqüencial modular (III.2.3) onde $A_n = \mu(U_n)A$, $n \in \mathbb{N}$.

Se $L_A(\mu)$ é o espaço $L_A(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$, seja $T : \ell\{A_n\} \rightarrow L_A(\mu)$ definida por $T\left((a_n)_{n=1}^\infty\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{U_n}$. Claramente T é uma isometria

linear sobre sua imagem. Logo se $Y = \bar{T}(\ell\{A_n\})$ temos Y subespaço fechado de $L_A(\mu)$ e como a aplicação $\Pi : L_A(\mu) \rightarrow Y$, definida por

$$\Pi(f) = \sum_{n=1}^\infty a_n^f \chi_{U_n}, \text{ onde } a_n^f = f(w), \forall w \in U_n, n \in \mathbb{N}, \quad (\text{lembrando}$$

de III.1.13) é projeção contínua e sobrejetora temos Y subespaço complementado em $L_A(\mu)$.

De ([W]4.4) temos $\ell\{A_n\}$ reflexivo se e somente se $\ell\{A_n\}$ não tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$. Portanto se $\ell\{A_n\}$ não é reflexivo então Y , logo $L_A(\mu, X)$, tem subespaço fechado isomorfo

a $\ell_1(\mathbb{N})$, e então temos a tese por argumentos usados no início da demonstração. Se $\ell\{A_n\}$ é reflexivo, então de ([W] 4.4 e 4.2) temos que $(\ell\{A_n\})^*$ é ainda um espaço seqüencial modular, portanto de ([W] 3.7) temos que $(\ell\{A_n\})^*$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ com $p > 1$, uma vez que $(\ell\{A_n\})^*$ é reflexivo.

Conseqüentemente Y^* tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ com $p > 1$, o mesmo ocorrendo então para $[L_A(\mu)]^*$, já que Y é complementado em $L_A(\mu)$.

Pelo lema III.2.5 temos $[L_A(\mu)]^*$ isomorfo a um subespaço fechado de $[L_A(\mu, X)]^*$ e então a tese segue do feito anteriormente e de I.3.4 e I.1.12.

Resta provar (ii).

O item 2º de (ii) é demonstrado aplicando-se III.1.23, pois nas condições supostas segue que existem infinitos átomos de medida infinita, dois a dois disjuntos.

Provemos então o item 1º de (ii). Se $a = 0$ e $f \in L_A(\mu, X)$ temos por III.1.13 que $f|_U \equiv 0$, qualquer que seja $U \in \Sigma$, U átomo de medida infinita.

Então se $U_1, U_2, \dots, U_n$ são os átomos de medida finita de Σ , temos

$$\mu \left\{ \left\{ w \in \left(\Omega - \bigcup_{i=1}^n U_i \right) : f(w) \neq 0 \right\} \right\} = 0, \forall f \in L_A(\mu, X), \text{ pois ca}$$

so contrário existiria U , átomo de medida infinita,

$$U \in \left\{ w \in \left(\Omega - \bigcup_{i=1}^n U_i \right) : f(w) \neq 0 \right\} \text{ o que seria uma contra-}$$

dição.

$$\text{Logo } f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{U_i}, \quad x_i \in X, \quad i=1, \dots, n \text{ também por III.1.13.}$$

Portanto $L_A(\mu, X)$ é isométrico a $\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i \right)$, $X_i = X$, $i=1, \dots, n$,

sendo a $\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i \right)$ considerada com a norma

$$\| (x_i)_{i=1}^n \|_A = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{i=1}^n A \left(\frac{\|x_i\|}{\rho} \right) \mu(U_i) \leq 1 \right\}$$

Como a norma $\| \cdot \|$, definida em $\mathbb{R}^n$ por

$$\| (a_i)_{i=1}^n \| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{i=1}^n A \left(\frac{|a_i|}{\rho} \right) \mu(U_i) \leq 1 \right\} \quad \text{é}$$

equivalente a norma $\| (a_i)_{i=1}^n \|_0 = \sup_{1 \leq i \leq n} |a_i|$, temos que existem

constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \leq \left\| \left(\|x_i\| \right)_{i=1}^n \right\| \leq c_2 \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|, \text{ para todo}$$

$$(x_i)_{i=1}^n \in \left(\bigoplus_{i=1}^n X_i \right).$$

Mas $\left\| \left(\|x_i\| \right)_{i=1}^n \right\| = \left\| (x_i)_{i=1}^n \right\|_A$, logo $L_A(\mu, X)$ é isomorfo a

$\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i \right)_0$, $X_i = X$, $i=1, \dots, n$ e então $\left(L_A(\mu, X) \right)^*$ é isomorfo a

$\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i^* \right)_1$, logo a tese segue de II.1.3.

Se o número de átomos existentes em Σ é finito, também é finito o número de 1-átomos existentes em Σ . Sejam $U_1, U_2, \dots, U_n$ esses 1-átomos.

Se $f \in L_A(\mu, X)$ mostremos que f é μ -quase sempre nula em $\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^n U_i \right)$. Seja $E \in \Sigma$, $E = \left\{ w \in \left(\Omega - \bigcup_{i=1}^n U_i \right) : f(w) \neq 0 \right\}$. Se

$\mu(E) > 0$ então existe $U \in \Sigma$, U átomo de medida infinita (pois todo átomo de medida finita é 1-átomo) com $U \in E$. Como U não é 1-átomo existe $U_1 \in \Sigma$, $U_1 \subset U$ com $\mu(U_1) > 0$ e $\mu(U - U_1) > 0$. Logo existe $U_2 \in \Sigma$, U_2 átomo de medida infinita, $U_2 \subset (U - U_1)$ com $\mu(U_2) > 0$ e $\mu(U - U_1 \cup U_2) > 0$, já que $(U - U_1)$ não é 1-átomo. Continuando o processo obteremos uma seqüência infinita, $(U_n)_{n=1}^\infty$, de átomos de medida infinita, dois a dois disjuntos, o que contradiz a hipótese suposta. Portanto $\mu(E) = 0$ o que implica em $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{U_i}$, $x_i \in X$, $i=1, 2, \dots, n$, por III.1.13. A tese segue então como no caso $a = 0$.

III.3 - α -INTEGRAÇÃO NOS ESPAÇOS DE HALPERIN-NAKANO

Os espaços de Nakano, estudados em [N], definidos em III.3.1 são particulares espaços seqüenciais modulares (III.2.3). Uma generalização dos espaços de Nakano leva aos espaços de Halperin-Nakano estudados em [HN] e definidos também em III.3.1.

Se X é um espaço de Halperin-Nakano, $X = \ell[(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}]$, provamos em III.3.2 que se $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante, então

$$D_\alpha(X) = R_\alpha(X) \Leftrightarrow \lim_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma = 1$$

Neste parágrafo a igualdade $\lim_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma = 1$ significa que vale a condição (*) de III.3.2. Salientamos que em [HN] está provado a equivalência:

$$X \text{ é espaço de Schur} \Leftrightarrow \lim_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma = 1$$

Conseqüentemente para os espaços X de Halperin-Nakano temos, para $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante.

$$D_\alpha(X) = R_\alpha(X) \Leftrightarrow X \text{ tem a propriedade de Schur.}$$

Devido ao resultado II.2.18 que mostrou que na classe dos Banach com base subsimétrica temos, para $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante

$D_\alpha(X) = R_\alpha(X) \Leftrightarrow X$ é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N}) \Leftrightarrow X$ tem a propriedade de Schur

nos preocupamos em verificar se o mesmo acontecia nos espaços de Halperin-Nakano.

Provamos, em III.3.5, a existência de espaços de Nakano (que são os de Halperin-Nakano com $\Gamma = \mathbb{N}$) com $\lim_n p_n = 1$ e não isomorfos a $\ell_1(\mathbb{N})$, conseqüentemente sem base subsimétrica.

Terminamos o parágrafo mostrando em III.3.7 que para os duais dos espaços seqüenciais modulares $Y = (\ell\{A_n\})^*$ temos $D_\alpha(Y) \subsetneq R_\alpha(Y)$ qualquer que seja $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante.

III.3.1 - Definição: Se $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família de reais, $p_\gamma \geq 1$, $\forall \gamma \in \Gamma$, denotaremos por $\ell[(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}]$ o espaço de Banach de todas as famílias de escalares $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ para as quais existe $\rho > 0$ tal que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \left(\frac{|x_\gamma|}{\rho} \right)^{p_\gamma} < \infty. \quad \text{A norma considerada em } \ell[(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}]$$

é $\|(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(\frac{|x_\gamma|}{\rho} \right)^{p_\gamma} \leq 1 \right\}$. Os espaços

$\ell[(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}]$ serão chamados espaços de Halperin-Nakan.

Se $\Gamma = \mathbb{N}$ então $\ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}] = \ell\{A_n\}$ sendo $A_n(t) = t^{p_n}$, $n \in \mathbb{N}$, e nesse caso chamaremos os espaços $\ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ de espaços de Nakano.

III.3.2 - Teorema: Se $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante e $X = \ell[(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}]$ então

$$D_\alpha(X) = R_\alpha(X) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Dado } \varepsilon > 0 \text{ arbitrário o conjunto} \\ \Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in \Gamma : p_\gamma > 1+\varepsilon\} \text{ é finito} \end{cases} \quad (*)$$

Prova: Para provar a implicação direta suponhamos por absurdo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\Gamma_{\varepsilon_0} = \{\gamma \in \Gamma : p_\gamma > 1+\varepsilon_0\}$ é infinito.

Se $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de α seja $F \subset ([0,1] - \{y_n, n \in \mathbb{N}\})$ o fechado de $[0,1]$ com $\mu_{\hat{\alpha}_c}(F) > 0$ (como na prova de I.3.10) e $E \subset F$ subconjunto enumerável e denso em F . Se $(r_n)_{n=1}^\infty$ é uma enumeração de E e $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência infinita de elementos de Γ_{ε_0} , seja $f : [0,1] \rightarrow X$ definida por $f(t) = 0$ se $t \notin E$ e $f(r_n) = e_n$, sendo $e_n = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ com $x_{\gamma_n} = 1$ e $x_\gamma = 0$ se $\gamma \neq \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $\|e_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos $Df = F$, logo $f \notin D_{\alpha_c}(X)$ por I.1.25. Mas $\mu_{\hat{\alpha}_s}(Df) = 0$ e f é limitada logo $f \in D_{\alpha_s}(X)$ também por I.1.25 e como $D_{\alpha_s}(X) = R_{\alpha_s}(X)$ (I.3.4) temos $f \in R_{\alpha_s}(X)$.

Mostremos que $f \in R_{\alpha_C}(X)$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que se $u, v \in [0, 1]$ com $|u - v| < \delta$ tem-se

$$|\alpha_C(u) - \alpha_C(v)| < \left(\frac{1 + \varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ com $\Delta d < \delta$ então para qualquer escolha de $\zeta_i, \zeta'_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)] [\alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1})] \right\| \leq \\ & \left\| \sum_{i=1}^{|d|} (e_{\gamma_{n_i}} - e_{\gamma_{m_i}}) [\alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1})] \right\| = \\ & = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{i=1}^{|d|} \left(\frac{|\alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1})|}{\rho} \right)^{p_{n_i}} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{|d|} \left(\frac{|\alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1})|}{\rho} \right)^{p_{m_i}} \leq 1 \right\} \leq \\ & \inf = \left\{ \rho > 0 : 2 \sum_{i=1}^{|d|} \left(\frac{|\alpha_C(t_i) - \alpha_C(t_{i-1})|}{\rho} \right)^{1 + \varepsilon_0} \leq 1 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2^{\frac{1}{1+\epsilon_0}} \left\| \left(\alpha_c(t_1) - \alpha_c(t_0), \dots, \alpha_c(t_{|d|}) - \alpha_c(t_{|d|-1}) \right) \right\|_{1+\epsilon_0} = \\
& = 2^{\frac{1}{1+\epsilon_0}} \left| \sum_{i=1}^{|d|} |\alpha_c(t_i) - \alpha_c(t_{i-1})|^{1+\epsilon_0} \right|^{\frac{1}{1+\epsilon_0}} = \\
& 2^{\frac{1}{1+\epsilon_0}} \left| \sum_{i=1}^{|d|} |\alpha_c(t_i) - \alpha_c(t_{i-1})| |\alpha_c(t_i) - \alpha_c(t_{i-1})|^{\epsilon_0} \right|^{\frac{1}{1+\epsilon_0}} \leq \\
& 2^{\frac{1}{1+\epsilon_0}} \left| \frac{\epsilon}{2V[\alpha]} V[\alpha] \right|^{\frac{1}{1+\epsilon_0}} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $f \in R_{\alpha_c}(X)$ com $\int f d_{\alpha_c} = 0$. Conseqüentemente $f \in R_{\alpha}(X)$, já que $f \in R_{\alpha_s}(X)$, mas $f \notin D_{\alpha}(X)$ uma vez que $f \in D_{\alpha_s}(X)$ e $f \notin D_{\alpha_c}(X)$ e $\alpha = \alpha_s + \alpha_c$.

Provemos a implicação recíproca.

Por I.1.31 e I.1.24 podemos supor α crescente.

Suponhamos que existe $f : [0, 1] \rightarrow X$, $f \in R_{\alpha}(X)$ e $f \notin D_{\alpha}(X)$. Por I.1.17 temos $f \in B_{\alpha}(X)$ e então $\mu_{\hat{\alpha}}(Df) > 0$ por I.1.25.

Se $Df = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n = \left\{ t \in [0,1] : w(f,\{t\}) \geq \frac{1}{n} \right\}$ vem que

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $\mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0}) > 0$.

Se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ e $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ sejam $i_1, \dots, i_p$ os índices entre 1 e $|d|$ tais que $\mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0} \cap I_{i_j}) > 0$, $j = 1, \dots, p$.

Como α é contínua em E_{n_0} (I.1.7) temos que existem $r_1 \in (I_{i_1} \cap E_{n_0})$ e $s_1 \in I_{i_1}$ tais que $v_1 = f(r_1) - f(s_1)$ tem $\|v_1\| > \frac{1}{2n_0}$.

Se $v_1 = (x_{\gamma}^1)_{\gamma \in \Gamma}$, como existe $\rho_1 > 0$ tal que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \left(\frac{|x_{\gamma}^1|}{\rho_1} \right)^{p_{\gamma}} \leq 1 \quad \text{temos} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} |x_{\gamma}^1|^{p_{\gamma}} < \rho_1^r, \quad$$

onde $r = \sup_{\gamma \in \Gamma} p_{\gamma}$ (finito pois por hipótese $\lim_{\gamma} p_{\gamma} = 1$).

Logo se $J_1 \subset \Gamma$ é o subconjunto enumerável $J_1 = \{\gamma \in \Gamma : x_{\gamma}^1 \neq 0\}$ e Γ_1 é o conjunto finito (por hipótese) $\Gamma_1 = \{\gamma \in J_1 : p_{\gamma} \geq 1 + \frac{1}{l}\}$

existe $F_1 \subset \Gamma$, F_1 finito, $F_1 \supset \Gamma_1$ com $\sum_{\gamma \in (\Gamma - F_1)} |x_\gamma^1|^{p_\gamma} < \left(\frac{\varepsilon}{2^3 v[\alpha]} \right)^r$.

Para cada $\lambda \in \Gamma$ definimos $\Pi_\lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$ por $\Pi_\lambda \left((x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \right) = x_\lambda$.

Como $f \in R_\alpha(X)$ temos por I.1.8 que $(\Pi_\lambda \circ f) \in R_\alpha(\mathbb{K}) = D_\alpha(\mathbb{K})$, logo

$$\mu_\alpha \left(\bigcup_{\lambda \in J_1 \cup \Gamma_1} D(\Pi_\lambda \circ f) \right) = 0 \text{ e então existe } r_2 \in \overset{\circ}{I}_{i_2} \cap E_{n_0},$$

$r_2 \notin \bigcup_{\lambda \in J_1 \cup \Gamma_1} D(\Pi_\lambda \circ f)$ e existe $s_2 \in I_{i_2}$ com $\|f(r_2) - f(s_2)\| > \frac{1}{2n_0}$ e

$$\sum_{\lambda \in \overline{F}_1} |(\Pi_\lambda \circ f)(r_2) - (\Pi_\lambda \circ f)(s_2)| < \left(\frac{\varepsilon}{2^4 v[\alpha]} \right)^r, \text{ sendo } \overline{F}_1 = F_1 \cap J_1 \cup \Gamma_1$$

Se $v_2 = f(r_2) - f(s_2) = (x_\gamma^2)_{\gamma \in \Gamma}$ temos, como para v_1 , que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma^2|^{p_\gamma} < \infty, \text{ logo se } J_2 \text{ é o conjunto enumerável } J_2 = \{\gamma \in \Gamma : x_\gamma^2 \neq 0\} \text{ e}$$

se Γ_2 é o conjunto finito $\Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : p_\gamma \geq 1 + \frac{1}{2}\}$ então existe

$F_2 \subset \Gamma$, F_2 finito, $F_2 \supset F_1 \cup \Gamma_2$ tal que

$$\sum_{\gamma \in (\Gamma - F_2)} |x_\gamma^2|^{p_\gamma} < \left(\frac{\varepsilon}{2^5 v[\alpha]} \right)^r.$$

Como antes temos $\mu_\alpha \left(\bigcup_{\lambda \in J_1 \cup J_2 \cup \Gamma_2} D(\Pi_\lambda \circ f) \right) = 0$, logo existe

$r_3 \in \overset{\circ}{I}_{i_3} \cap E_{n_0}$, $r_3 \notin \bigcup_{\lambda \in J_1 \cup J_2 \cup \Gamma_2} D(\Pi_\lambda \circ f)$ e existe $s_3 \in I_{i_3}$ tais

que $\|f(r_3) - f(s_3)\| > \frac{1}{2n_0}$ e

$$\sum_{\gamma \in \bar{F}_2} |\Pi_{\lambda \circ f}(r_3) - (\Pi_{\lambda \circ f})(s_3)| < \left(\frac{\varepsilon}{2^{6V}[\alpha]} \right)^r, \text{ sendo}$$

$$\bar{F}_2 = F_2 \cap (J_1 \cup J_2) \cup \Gamma_2.$$

Se $v_3 = f(r_3) - f(s_3) = \left(x_{\gamma}^3 \right)_{\gamma \in \Gamma}$ temos como para v_1 e v_2 que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |x_{\gamma}^3|^{p_{\gamma}} < \infty \text{ logo se } J_3 \text{ é o conjunto enumerável } J_3 = \{\gamma \in \Gamma : x_{\gamma}^3 \neq 0\}$$

e se Γ_3 é o conjunto finito $\Gamma_3 = \{\gamma \in \Gamma : p_{\gamma} \geq 1 + \frac{1}{3}\}$ então existe $F_3 \subset \Gamma$, F_3 finito, $F_3 \supset F_2 \cup \Gamma_3$ tal que

$$\sum_{\gamma \in (\Gamma - F_3)} |x_{\gamma}^3|^{p_{\gamma}} < \left(\frac{\varepsilon}{2^{7V}[\alpha]} \right)^r.$$

Continuando o processo obtemos $v_1, v_2, \dots, v_p$ com as propriedades

$$(a) \quad \|v_i\| > \frac{1}{2n_0}, \quad i=1, 2, \dots, p.$$

$$(b) \quad \sum_{\gamma \in (\Gamma - \bar{F}_i)} |x_{\gamma}^i|^{p_{\gamma}} < \left(\frac{\varepsilon}{2^{2i+1V}[\alpha]} \right)^r, \quad \bar{F}_i \subset \Gamma, \quad \bar{F}_i \text{ finito e}$$

$$\bar{F}_i \supset \bar{F}_{i-1} \cup \Gamma_i, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (\bar{F}_1 \supset \Gamma_1).$$

$$(c) \sum_{\gamma \in \bar{F}_{i-1}} |x_{\gamma}^i| < \left(\frac{\epsilon}{2^{2i} V[\alpha]} \right)^r, \quad i=2, \dots, p.$$

Observamos que podemos supor $\|v_i\| \leq 1$, $i=1, 2, \dots, p$, pois caso contrário basta considerar $\frac{v_i}{\|v_i\|}$ $i=1, \dots, p$, uma vez que se verifica facilmente que as propriedades (a), (b) e (c) continuam válidas para esses vetores.

Sendo assim, lembrando que $p_{\gamma} \geq 1$ vale

$$(c') \sum_{\gamma \in \bar{F}_{i-1}} |x_{\gamma}^i|^{p_{\gamma}} < \left(\frac{\epsilon}{2^{2i} V[\alpha]} \right)^r$$

pois se $\|v_i\| \leq 1$ então $|x_{\gamma}^i| \leq 1$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $i=1, \dots, p$.

Além disso vale

$$(d) \quad p_{\gamma} \leq 1 + \frac{1}{i-1} \quad \text{se } \gamma \in \bar{F}_i - \bar{F}_{i-1}, \quad i=2, \dots, p$$

Denotando $\bar{F}_1 = G_1$, $\bar{F}_i - \bar{F}_{i-1} = G_i$, $i=2, \dots, p$ sejam

$\bar{v}_i = \left(y_{\gamma}^i \right)_{\gamma \in \Gamma}$ com $y_{\gamma}^i = x_{\gamma}^i$ se $\gamma \in G_i$ e $y_{\gamma}^i = 0$ se $\gamma \notin G_i$, $i=1, 2, \dots, p$.

Se $v_1 = v_{I_{i1}}[\alpha]$, ..., $v_p = v_{I_{ip}}[\alpha]$ temos

$$(1) \left\| \sum_{i=1}^p v_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i v_i + \sum_{i=1}^p (v_i - \bar{v}_i) v_i \right\| \geq$$

$$\geq \left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i v_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^p (v_i - \bar{v}_i) v_i \right\|$$

De (b) e (c') vem que

$$i=1: \sum_{\gamma \in (\Gamma - \bar{F}_1)} \frac{|x_\gamma^1|^{p_\gamma}}{\left(\frac{\epsilon}{2^{3V[\alpha]}} \right)^r} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{\gamma \in (\Gamma - \bar{F}_1)} \left| \frac{|x_\gamma^1|}{\left(\frac{\epsilon}{2^{3V[\alpha]}} \right)^{\frac{r}{p_\gamma}}} \right|^{p_\gamma} \leq 1$$

o que mostra que $\|v_1 - \bar{v}_1\| \leq \frac{\epsilon}{2^{3V[\alpha]}}$ se $\frac{\epsilon}{V[\alpha]} < 1$

$$i=2: \sum_{\gamma \in \Gamma - \bar{F}_2} \frac{|x_\gamma^2|^{p_\gamma}}{\left(\frac{\epsilon 2^{1/r}}{2^{5V[\alpha]}} \right)^r} + \sum_{\gamma \in \bar{F}_1} \frac{|x_\gamma^2|^{p_\gamma}}{\left(\frac{\epsilon 2^{1/r}}{2^{4V[\alpha]}} \right)^r} \leq 1$$

O que mostra que $\|v_2 - \bar{v}_2\| \leq \frac{\epsilon 2}{2^{4V[\alpha]}} = \frac{\epsilon}{2^{3V[\alpha]}}$ se $\frac{\epsilon}{V[\alpha]} < 1$.

Analogamente $\|v_i - \bar{v}_i\| \leq \frac{\epsilon}{2^{i+1}V[\alpha]}$ $i=3, 4, \dots, p$, e então

$$(2) \left\| \sum_{i=1}^p (v_i - \bar{v}_i) v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p v_i \|v_i - \bar{v}_i\| \leq \sum_{i=1}^p \frac{\epsilon v_i}{2^{i+1}V[\alpha]} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Para avaliar o outro termo de (1), $\left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i v_i \right\|$ consideremos

$$z = (z_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \text{ tal que } z_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2} |x_\gamma^i|^{p_\gamma - 1} \operatorname{sg}(x_\gamma^i) & \text{se } \gamma \in G_i, i=1, \dots, p \\ 0 & \text{se } \gamma \notin \bigcup_{i=1}^p G_i \end{cases}$$

Se $p_\gamma > 1$ seja p'_γ tal que $\frac{1}{p_\gamma} + \frac{1}{p'_\gamma} = 1$, então se

$\bar{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma \text{ com } p_\gamma > 1\}$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \bar{\Gamma}} |z_\gamma|^{p'_\gamma} &= \sum_{i=1}^p \sum_{\gamma \in G_i \cap \bar{\Gamma}} \frac{1}{2^{p'_\gamma}} |x_\gamma^i|^{p'_\gamma(p_\gamma - 1)} = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{\gamma \in G_i \cap \bar{\Gamma}} \frac{1}{2^{p'_\gamma}} |x_\gamma^i|^{p_\gamma}. \end{aligned}$$

Como $p_\gamma < 1 + \frac{1}{i-1}$ se $\gamma \in G_i$, $i=2, \dots, p$ e $p_1 \leq 1+1$ temos

$p'_1 > 2$ e $p'_\gamma > i$, $\gamma \in G_i$, $i=2, \dots, p$, logo

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \bar{\Gamma}} |z_\gamma|^{p'_\gamma} &\leq \sum_{i=1}^p \frac{1}{2^i} \sum_{\gamma \in G_i \cap \bar{\Gamma}} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} \leq \sum_{i=1}^p \frac{1}{2^i} \sum_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^p \frac{1}{2^i} \leq 1, \text{ lembrando que } \|v_i\| \leq 1, i=1, \dots, p. \end{aligned}$$

Em ([HN] 6.2) está provado, que nessas condições a forma linear $\phi : X \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\phi \left((x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma z_\gamma \quad \text{é contínua e tem } \|\phi\| \leq 2.$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i \right\| &\geq \frac{1}{2} \left| \phi \left(\sum_{i=1}^p \bar{v}_i \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^p \sum_{\gamma \in G_i} \frac{1}{2} |x_\gamma^i|^{p_\gamma-1} \operatorname{sg}(x_\gamma^i) x_\gamma^i \right| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{\gamma \in G_i} \frac{1}{2} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p \sum_{\gamma \in G_i} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} \end{aligned} \quad (3)$$

Mas como $\|v_i\| \geq \frac{1}{2n_0}$, $i=1, \dots, p$ temos

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{|x_\gamma^i|^{p_\gamma}}{\left(\frac{1}{2n_0}\right)^{p_\gamma}} \geq 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{|x_\gamma^i|^{p_\gamma}}{\left(\frac{1}{2n_0}\right)^r} \geq 1 \quad \text{o que mostra que}$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} \geq \left(\frac{1}{2n_0}\right)^r.$$

Logo vale

$$\sum_{\gamma \in G_i} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} - \sum_{\gamma \in (\Gamma - \bar{F}_i)} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} - \sum_{\gamma \in F_{i-1}} |x_\gamma^i|^{p_\gamma} \geq$$

$$\left(\frac{1}{2n_0}\right)^r - \left(\frac{\epsilon}{V[\alpha]}\right)^r \left(\frac{1}{2^{2i+1}} + \frac{1}{2^{2i}}\right)^r > \left(\frac{1}{2n_0}\right)^r - \frac{\epsilon}{V[\alpha]} \left(\frac{1}{2^{2i+1}} + \frac{1}{2^{2i}}\right)$$

se $\frac{\epsilon}{V[\alpha]} < 1$, $i=2, \dots, p$ e

$$\sum_{\gamma \in G_1} |x_\gamma^1|^{p_\gamma} = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma^1|^{p_\gamma} - \sum_{\Gamma - \bar{\Gamma}_1} |x_\gamma^1|^{p_\gamma} \geq \left(\frac{1}{2n_0}\right)^r - \frac{\epsilon}{2^3 V[\alpha]}$$

Então de (3) temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p \bar{v}_i v_i \right\| &\geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p \left| v_i \left(\frac{1}{2n_0}\right)^r - \frac{\epsilon v_i}{2V[\alpha]} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_0}\right)^r \sum_{i=1}^p v_i - \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_0}\right)^r \mu_{\hat{\alpha}}(I_{i_1} \cup \dots \cup I_{i_p}) - \frac{\epsilon}{2} \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_0}\right)^r \mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0}) - \frac{\epsilon}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

De (1), (2) e (4) vem então que

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i v_i \right\| \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n_0}\right)^r \mu_{\hat{\alpha}}(E_{n_0}) - \epsilon > \epsilon \text{ se } \epsilon < \frac{V[\alpha]}{8(2n_0)^r}.$$

Logo existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer partição $d \in D$,

$d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ existe uma escolha $\zeta_i, \zeta'_i \in I_i$, $\zeta_i = \zeta'_i$ se $i \neq i_1, \dots, i_p$ e $\zeta_i = r_i$, $\zeta'_i = s_i$ se $i = i_1, \dots, i_p$ com

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\zeta_i) - f(\zeta'_i)] v_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p v_i v_i \right\| > \varepsilon,$$

contrariando por I.1.29 o fato de $f \in R_\alpha(X)$, inicialmente suposto.

III.3.3 - Corolário: Se X é um espaço de Halperin - Nakano, $X = [\ell(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}]$ e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante então

$$D_\alpha(X) = R_\alpha(X) \Leftrightarrow \lim_{\gamma} p_\gamma = 1 \Leftrightarrow X \text{ é espaço de Schur}$$

Prova: Basta usar III.3.2 e ([HN]III).

III.3.4 - Observação: Se $\ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ e $\ell[(q_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ são espaços de Nakano ($\Gamma = \mathbb{N}$), está definida em $[N]$ a equivalência

$\ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}] \sim \ell[(q_n)_{n \in \mathbb{N}}] \Leftrightarrow$ existe uma seqüência de números positivos $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ tal que a aplicação $T_a: \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}] \rightarrow \ell[(q_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ definida por $T_a[(x_n)_{n=1}^\infty] = (a_n x_n)_{n=1}^\infty$ é biunívoca.

Verifica-se facilmente que, nesse caso, T_a é um isomorfismo de espaços de Banach.

Em [N] Nakano prova a existência de $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $\lim_n p_n = 1$ e X não equivalente (através da equivalência $\sim$) a $\ell[(q_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $q_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja existe um espaço de Nakano $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $\lim_n p_n = 1$ e X não isomorfo, através de um isomorfismo da forma T_a , a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Naturalmente o resultado interessante de se ter é a existência de um espaço de Nakano $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $\lim_n p_n = 1$ e X não isomorfo (através de um isomorfismo linear qualquer) a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Provamos esse resultado em III.3.5 mostrando que se existe um isomorfismo de espaços de Banach entre um espaço de Nakano $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $\lim_n p_n = 1$ e o espaço $\ell_1(\mathbb{N})$ então existe entre esses espaços um isomorfismo da forma T_a .

III.3.5 - Proposição: Existe um espaço de Nakano $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $\lim_n p_n = 1$ e X não isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Prova: Seja $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $\lim_n p_n = 1$ e suponhamos que existe $T: X \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$, T isomorfismo. Nessas condições temos X separável e então ([W]3.5) garante que os vetores unitários $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ formam uma base incondicional de X .

Como T é isomorfismo temos que se $x_n = T(e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, então $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é base incondicional de $\ell_1(\mathbb{N})$. Logo se $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$,

$n \in \mathbb{N}$, temos que $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ é base incondicional normalizada de $\ell_1(\mathbb{N})$. Portanto por ([LT] 2.b.9) segue que $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ é equivalente à base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$ que denotaremos por $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Seja $T_1: \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ o isomorfismo tal que $T_1(\tilde{x}_n) = \tilde{e}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Então se $y \in X$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$, temos

$$T(y) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n T(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \|x_n\| \tilde{x}_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \|x_n\| T_1^{-1}(\tilde{e}_n) = T_1^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n \|x_n\| \tilde{e}_n\right) =$$

$$= T_1^{-1}\left[\left(a_n y_n\right)_{n=1}^{\infty}\right], \text{ sendo } a_n = \|x_n\|, n \in \mathbb{N}.$$

Logo se $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ temos $T_1 \circ T = T_a$ e então a observação III.3.4 termina a prova.

III.3.6 - Corolário: Existe um espaço de Nakano $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $\lim_n p_n = 1$ e X não tem base subsimétrica.

Prova: I.3.12, III.3.2 e III.3.5.

O resultado III.3.2 caracteriza os espaços sequenciais modulares $X = \ell\{A_n\}$ quanto a propriedade $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, no caso particular de $A_n(t) = t^{p_n}$ com $p_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A seguir mostramos que os espaços duais $X^* = (\ell\{A_n\})^*$ são tais que $D_\alpha(X^*) \subsetneq R_\alpha(X^*)$, para toda $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante e qualquer sequência $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de funções de Orlicz.

III.3.7 - Proposição: Se $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência qualquer de funções de Orlicz com $A_n(t) > 0$ se $t > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante então $D_\alpha(\ell\{A_n\})^* \subsetneq R_\alpha(\ell\{A_n\})^*$.

Prova: Podemos supor $A_n(1) = 1$ e $A_n'(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois caso contrário por ([W]2.5) existe uma sequência $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ de funções de Orlicz com essas propriedades e com $\ell\{B_n\}$ isomorfo a $\ell\{A_n\}$.

Com essa suposição, se $\ell\{A_n\}$ é reflexivo então ([W]4.2,3e 4) garante que $(\ell\{A_n\})^*$ é isomorfo a um outro espaço sequencial modular $\ell\{C_n\}$. Então $\ell\{C_n\}$ é também reflexivo e por ([W]3.7) temos que $\ell\{C_n\}$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_p(\mathbb{N})$ para algum $p > 1$. Temos então a tese por I.1.12 e I.3.14.

Se $\ell\{A_n\}$ não é reflexivo então ([W]-pg 288) garante que $\ell\{A_n\}$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ e então temos

$D_\alpha(\ell\{A_n\})^* \subsetneq R_\alpha(\ell\{A_n\})^*$ pelos mesmos argumentos usados na demonstração de III.2.6.

III.3.8 - Corolário: Um espaço seqüencial modular $\ell\{A_n\}$ não é isomorfo a $c_0(N)$ se $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ é uma seqüência de funções de Orlicz com $A_n(t) > 0$ se $t > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prova: Basta usar III.3.7 e I.2.7, já que $[c_0(N)]^* = \ell_1(N)$.

III.3.9 - Observação: Em $[N]$, Nakano define o conceito de espaço conjugado de um espaço de Nakano do seguinte modo: se $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $p_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ o espaço $Y = \ell[(q_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ onde q_n é tal que $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é o espaço conjugado de X .

Observamos que se $p_n = n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $q_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $\lim_n q_n = 1$. Na proposição III.3.10 a seguir mostramos que $Y = \ell[(q_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ não é dual de qualquer espaço de Nakano, embora seja conjugado de um deles. Conseqüentemente esses conceitos não coincidem.

III.3.10 - Proposição: Se $X = \ell[(p_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ com $\lim_n p_n = 1$, então X não é isomorfo a um dual de qualquer espaço de Nakano.

Prova: Se X fosse isomorfo a um dual de um espaço de Nakano, então X seria isomorfo a um dual de um particular espaço seqüencial modular. Teríamos então uma contradição por III.3.2, III.3.7, I.1.8 e I.1.11.

III.4 - α -INTEGRAÇÃO NOS ESPAÇOS $C(K, X)$ E $[C(K, X)]^*$

Se K é um compacto Hausdorff e X é um espaço de Banach, $C(K, X)$ indica o conjunto das funções contínuas $f : K \rightarrow X$ com a norma $\|f\| = \sup_{t \in K} \|f(t)\|$.

Neste parágrafo fornecemos em III.4.5, 8 condições necessárias e suficientes sobre o compacto K e o Banach X para se ter $D_\alpha[C(K, X)] = R_\alpha[C(K, X)]$ ou para $D_\alpha\left([C(K, X)]^*\right) = R_\alpha\left([C(K, X)]^*\right)$ para $\alpha \in BV[0, 1]$ com α_c não constante.

Se E é um espaço topológico Hausdorff completamente regular temos, em III.4.4, condições necessárias e suficientes para se ter $D_\alpha[C_b(E, X)] = R_\alpha[C_b(E, X)]$, para $\alpha \in BV[0, 1]$ com α_c não constante. Quanto a igualdade $D_\alpha\left([C_b(E, K)]^*\right) = R_\alpha\left([C_b(E, K)]^*\right)$ remetemos o leitor a III.4.5 e 6. Agradecemos a nossa colega Ofélia Teresa Alas sua atenção e colaboração na discussão desses últimos itens.

III.4.1 - Definição: Um espaço topológico E é completamente regular se dados $U \in E$, U aberto, e $p \in U$, existe uma função $f: E \rightarrow [0, 1]$ contínua com $f(p) = 1$ e $f(E-U) = \{0\}$.

III.4.2 - Notação: Se E é um espaço topológico Hausdorff completamente regular e X é um espaço de Banach, $C_b(E, X)$ indica o espaço de Banach formado por todas as funções contínuas e limitadas $f: E \rightarrow X$ com a norma $\|f\| = \sup_{p \in E} \|f(p)\|$.

III.4.3 - Proposição: Seja E um espaço topológico Hausdorff completamente regular e infinito e X um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$. Então $C_b(E, X)$ contém subespaço fechado isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$.

Prova: ([Di] 4.2.4).

III.4.4 - Teorema: Se E é um espaço topológico Hausdorff completamente regular e não vazio, X é um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$, e $\alpha \in BV[0, 1]$ com α_c não constante então

$$D_\alpha[C_b(E, X)] = R_\alpha[C_b(E, X)] \Leftrightarrow E \text{ é finito e } D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$$

Prova: Provemos a implicação direta. De III.4.3, I.1.12 e I.3.14 segue que E é finito. Como $C_b(E, X)$ contém subespaço fechado isomorfo a X temos $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ por I.1.12.

Para a recíproca basta usar II.1.4, observando que se E é finito então $C_b(E, X)$ é isomorfo a $\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i \right)_\infty$, $X_i = X$, $i=1, \dots, n$, sendo $n = |E|$.

III.4.5 - Corolário: Se K é um compacto Hausdorff, X é um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$ e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante, então

$$D_\alpha[C(K,X)] = \mathcal{P}_\alpha^R[C(K,X)] \Leftrightarrow K \text{ é finito e } D_\alpha(X) = R_\alpha(X).$$

Prova: Basta usar III.4.4 lembrando que se K é compacto Hausdorff então K é completamente regular.

Passemos a caracterização dos espaços $Y = [C(K,X)]^*$ que satisfazem $D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$ para $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante. Para isso precisaremos do lema III.4.7 que descreve Y de um modo conveniente, para o estudo em questão.

III.4.6 - Definições: Um compacto Hausdorff K (ou um espaço topológico K) é dito disperso se K não contém subconjuntos perfeitos. Um subconjunto F de K se diz perfeito se F é fechado não vazio e todo ponto de F é ponto de acumulação de F . Um espaço topológico E é pseudo-compacto se toda função contínua a valores em $\mathbb{R}$, definida em E é limitada.

III.4.7 - Lema: Se K é um compacto Hausdorff não vazio e disperso e X é um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$, então $[C(K,X)]^*$ é isométrico a

$$\left(\bigoplus_{k \in K} Y_k \right)_1, \quad Y_k = X^*, \quad \forall k \in K.$$

Prova: Denotaremos por Y o espaço $\left(\bigoplus_{k \in K} Y_k \right)_1$, $Y_k = X^*$, $\forall k \in K$. Se Σ é a σ -álgebra de Borel de K , denotemos por Z o espaço de todas as medidas vetoriais $G : \Sigma \rightarrow X^*$ contavelmente aditivas e regulares ([DU]) tais que $\sup_{\Pi} \sum_{A \in \Pi} \|G(A)\| < \infty$, sendo o supremo tomado em relação as partições, Π , mensuráveis e finitas de K .

De ([DU] VI-5) sabemos que Z é espaço de Banach com a norma $|G|(K) = \|G\| = \sup_{\Pi} \sum_{A \in \Pi} \|G(A)\|$ e que Z e $[C(K, X)]^*$ são isométricos.

Seja então $G \in Z$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $A_n = \{k \in K : \|G(\{k\})\| > \frac{1}{n}\}$. Como $|G|(K) < \infty$ temos A_n finito, $\forall n \in \mathbb{N}$, e então o conjunto $A_G = \{k \in K : \|G(\{k\})\| \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é no máximo enumerável. Observando que $|G|(A_G) = \sup_{\Pi} \sum_{A \in \Pi} \|G(A)\| < \infty$, sendo o supremo tomado em relação a todas as partições mensuráveis finitas, Π , de A_G , é fácil ver que $(G(\{k\}))_{k \in K} \in Y$.

Mostremos que se $A_G' = K - A_G$ então $G(B) = 0$, qualquer que seja $B \in \Sigma$, $B \subset A_G'$.

Para isso consideremos $f \in X^{**}$ escolhido arbitrariamente. Como G é contavelmente aditiva segue que $f \circ G$ é contavelmente aditiva e portanto também o é a medida $|f \circ G|$, definida em Σ por $|f \circ G|(E) = \sup_{\Pi} \sum_{A \in \Pi} |(f \circ G)(A)|$, $\forall E \in \Sigma$, sendo o supremo tomado em relação a todas as partições mensuráveis finitas, Π , de E .

De regularidade de G segue imediatamente que $|f \circ G|$ é regular.

Sendo K disperso temos por ([L] 2.8.10) que $|f \circ G|$ é medida puramente atômica e por ([L] 2.8.8) temos que se $A \in \Sigma$ é um átomo, então existe $k \in A$ com $|f \circ G|(\{k\}) = |f \circ G|(A)$.

Se $(f \circ G)(B) \neq 0$, $B \in A_G^+$, $B \in \Sigma$, como $|(f \circ G)(B)| \leq |f \circ G|(B)$ temos $|f \circ G|(B) > 0$ o que implica na existência de um átomo $A \subset B$ e de $k \in A$ com $|f \circ G|(\{k\}) = |f \circ G|(A) > 0$. Isso é contradição uma vez que $G(\{k\}) = 0$, $\forall k \in A_G^+$.

Conseqüentemente temos $(f \circ G)(B) = 0$, para qualquer $f \in X^{**}$ o que mostra que $G(B) = 0$.

Portanto se $E \in \Sigma$, sendo A_G enumerável temos

$$G(E) = G\left(\bigcup_{k \in E \cap A_G} \{k\}\right) = \sum_{k \in E \cap A_G} G(\{k\}).$$

Definimos $T : Z \rightarrow Y$ por $T(G) = \left(G(\{k\}) \right)_{k \in K}$.

Por observação feita no início temos que T está bem definida e dada $G \in Z$ considerando as partições $\Pi_n = \left\{ \{k_1\}, \{k_2\}, \dots, \{k_n\} \right\}$, $K = \bigcup_{i=1}^n \{k_i\}$, onde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma enumeração de A_G , temos

$$|G|(K) \geq \sum_{i=1}^n \|G(\{k_i\})\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ logo}$$

$$|G|(K) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \|G(\{k_i\})\| \quad \text{ou} \quad \|G\| \geq \|T(G)\|. \quad \text{Por ou-$$

tro lado se Π é uma partição mensurável finita de K então

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \Pi} \|G(A)\| &= \sum_{A \in \Pi} \left\| \sum_{k \in A \cap A_G} G(\{k\}) \right\| \leq \sum_{A \in \Pi} \sum_{k \in A \cap A_G} \|G(\{k\})\| = \\ &= \sum_{k \in A_G} \|G(\{k\})\| \quad \text{o que mostra que } \|G\| \leq \|T(G)\|. \end{aligned}$$

Portanto T é uma isometria. Resta mostrar que T é sobrejetora.

Dado $(a_k)_{k \in K} \in Y$ seja $J \subset K$ o subconjunto enumerável $J = \{k \in K : a_k \neq 0\}$ e seja $G : \Sigma \rightarrow X^{**}$ definida por $G(E) = \sum_{k \in E \cap J} a_k$, $\forall E \in \Sigma$.

Como $\sum_{k \in J} \|a_k\| < \infty$ vem que $\sup_{\Pi} \sum_{A \in \Pi} \|G(A)\| < \infty$, se o su-

premo é tomado em relação a todas as partições mensuráveis e finitas de K .

Verifiquemos que G é regular.

Dado $E \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ se $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma enumeração de J seja $n_0 > 1$ tal que $\sum_{n > n_0} \|a_{k_n}\| < \varepsilon$ e seja F o compacto, $F = \{k_1, \dots, k_{n_0}\} \cap E$.

Se $U \subset K$ é um aberto qualquer com $E \subset U$ seja $\emptyset$ o aberto $\emptyset = U - \{k_1, \dots, k_{n_0}\} \cap E'$, sendo $E' = K - E$.

Então $F \subset E \subset \emptyset$ e se $f \in X^{**}$ com $\|f\| \leq 1$ e Π é partição finita e mensurável de $\emptyset - F$, temos

$$\sum_{A \in \Pi} |(f \circ G)(A)| \leq \sum_{A \in \Pi} \|G(A)\| = \sum_{A \in \Pi} \left\| \sum_{k \in A \cap J} a_k \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{A \in \Pi} \sum_{k \in A \cap J} \|a_k\| = \sum_{k \in (\emptyset - F) \cap J} \|a_k\| < \varepsilon \quad \text{pela construção de}$$

F e $\emptyset$. Portanto $|f \circ G|(\emptyset - F) = \sup_{\Pi} \sum_{A \in \Pi} |(f \circ G)(A)| < \varepsilon$, $\forall f \in X^{**}$ com

$\|f\| \leq 1$ o que mostra $([DU])$ que G é regular.

É imediato que $T(G) = (a_k)_{k \in K}$.

III.4.8 - Teorema: Se K é um compacto Hausdorff não vazio, X um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$ e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante, vale

$$D_\alpha\left([C(K,X)]^*\right) = R_\alpha\left([C(K,X)]^*\right) \Leftrightarrow K \text{ é disperso e } D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*)$$

Prova: Provemos primeiramente a implicação direta. Se K é não disperso temos que $C(K)$, logo $C(K,X)$, é universal para separáveis ([L] 4.13) e então $C(K,X)$ contém subespaço fechado isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$. Os mesmos argumentos usados na prova de III.2.6 levam a

$$D_\alpha\left([C(K,X)]^*\right) \subsetneq R_\alpha\left([C(K,X)]^*\right)$$

contrariando a hipótese.

Conseqüentemente K é disperso e o lema III.4.7 juntamente com II.1.3 provam que $D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*)$.

A implicação recíproca é imediata por III.4.7 e II.1.3.

III.4.9 - Observação: Se E é um espaço topológico, não vazio, Hausdorff, completamente regular temos $C_b(E, \mathbb{K})$ isométrico ao espaço $C(\beta(E), \mathbb{K})$, onde $\beta(E)$ é o compactificado de Stone-Čech de E e $\mathbb{K}$ é o

corpo dos escalares. Logo do teorema III.4.8 temos, para $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante,

$$D_\alpha \left([C_b(E, \mathbb{K})]^* \right) = R_\alpha \left([C_b(E, \mathbb{K})]^* \right) \Leftrightarrow \beta(E) \text{ é disperso.}$$

Considerando esse resultado tentamos obter condições sobre E que fossem necessárias e suficientes para se ter $\beta(E)$ disperso. Condições necessárias são dadas na proposição III.4.10 a seguir. A princípio, nosso orientador pensou que essas condições seriam também suficientes, mas respondendo a uma carta de Ofélia Teresa Alas, o Prof. W. Wistar Comfort exibiu um exemplo, devido a Peter Nyikos, de um espaço topológico E , satisfazendo as condições da proposição III.4.10 e com $\beta(E)$ não disperso. Temos a impressão que a caracterização dos espaços E completamente regulares com $\beta(E)$ disperso é um problema em aberto.

III.4.10- Proposição: Seja E um espaço Hausdorff completamente regular tal que o compatificado de Stone-Ćech, $\beta(E)$, é disperso. Então E é disperso e pseudo-compacto.

Prova: É fácil ver que se E contém um subconjunto perfeito então o mesmo acontece com $\beta(E)$. Logo se $\beta(E)$ é disperso temos E disperso.

Se E não é pseudo-compacto temos de ([Di] 4.3.3) que $C(\beta(E), \mathbb{K})$ contém subespaço fechado isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$, logo de ([L] 4.13) temos $\beta(E)$ não disperso.

III.4.11 - Observação: Deixamos como problema a resolver a determinação de condições necessárias e suficientes para se ter,

$$D_\alpha \left([C_b(E, X)]^* \right) = R_\alpha \left([C_b(E, X)]^* \right) \quad \text{para } \alpha \in BV[0, 1] \quad \text{com}$$

α_C não constante, X Banach e E espaço topológico Hausdorff completamente regular. Sabemos de ([Di] 4.3.3) que se E não é pseudo-compacto, então $C_b(E, \mathbb{K})$, logo $C_b(E, X)$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$. O mesmo acontece se E não é disperso por ([L] 4.13). Consequentemente se E não é pseudocompacto ou E não é disperso temos

$$D_\alpha \left([C_b(E, X)]^* \right) \subsetneq R_\alpha \left([C_b(E, X)]^* \right) \quad \text{para toda } \alpha \in BV[0, 1] \quad \text{com}$$

α_C não constante, como mostra a prova de III.4.8.

III.5 - α -INTEGRAÇÃO NOS ESPAÇOS $L(X,Y)$

Neste parágrafo fornecemos uma condição necessária e suficiente para se ter $D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z)$, $Z = L(X,Y)$, X,Y com base subsimétrica, $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante. O resultado obtido (III.5.4) é o seguinte

$$D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z) \Leftrightarrow X = c_0(\mathbb{N}) \text{ e } Y = l_1(\mathbb{N}).$$

O parágrafo é iniciado com resultados técnicos necessários para se chegar a essa equivalência.

A seguir mostramos que $L(c_0, l_1)$ é separável e não é isomorfo a um subespaço de um espaço de Banach com base incondicional. Com isso provamos que $L(c_0, l_1)$ não é subespaço de qualquer Banach X anteriormente por nós estudado, com $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante.

Agradecemos a colaboração prestada por nosso colega Raymundo Luiz de Alencar na obtenção desse último resultado.

Finalizamos o parágrafo mostrando que se K é um compacto infinito métrico e $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante então

$$D_\alpha[L(C(K), l_1(\mathbb{N}))] = R_\alpha[L(C(K), l_1(\mathbb{N}))] \text{ se e somente se } K \text{ é disperso.}$$

III.5.1 - Lema: Se $T : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ é linear e contínua e $p_n : \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ e $\Pi_n : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow c_0(\mathbb{N})$ são projeções definidas por

$$p_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \quad \Pi_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n b_i e_i$$

$$\text{então } \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n \circ T - T\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T \circ \Pi_n - T\| = 0.$$

Prova: É conhecido que todo $T \in L(c_0(\mathbb{N}), \ell_1(\mathbb{N}))$ é operador compacto ([LT] 2.C.3), logo para provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n \circ T - T\| = 0$ basta usar que $p_n \circ T \xrightarrow{n} T$ pontualmente e que a imagem, por T , da bola unitária de $c_0(\mathbb{N})$ é totalmente limitada uma vez que é relativamente compacta.

Para $T \circ \Pi_n - T$ consideremos

$$[\ell_1(\mathbb{N})]^* \xrightarrow{T^*} [c_0(\mathbb{N})]^* \xrightarrow{\Pi_n^*} [c_0(\mathbb{N})]^* \quad \text{ou}$$

$$\ell_\infty(\mathbb{N}) \xrightarrow{T^*} \ell_1(\mathbb{N}) \xrightarrow{\Pi_n^*} \ell_1(\mathbb{N}). \quad \text{É fácil ver que}$$

$\Pi_n^* = p_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e como T^* é compacto, já que T o é, os mesmos argumentos usados para $p_n \circ T$ mostram que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n \circ T^* - T^*\| = 0$ ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T \circ \Pi_n - T\| = 0.$$

III.5.2 - Lema: Para todo n natural temos $L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}^n\right)$ e $L\left(\mathbb{K}^n, \ell_1(\mathbb{N})\right)$

ambos isomorfos a $\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)_1$, $X_i = \ell_1(\mathbb{N})$, $i=1, \dots, n$.

Prova: Consideremos inicialmente em $\mathbb{K}^n$ a norma $\|\cdot\|_\infty$. Se

$T \in L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}^n\right)$, $T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$ temos

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \max_{1 \leq i \leq n} |T_i(x)| \geq \|T_i\|, \quad i=1, \dots, n.$$

Logo se $U \in \left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)_\infty$, $X_i = L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}\right)$, $i=1, \dots, n$,

$U = (T_1, \dots, T_n)$ temos $\|T\| \geq \|U\|_\infty$.

Por outro lado se considerarmos em $\mathbb{K}^n$ a norma $\|\cdot\|_1$ e $T \in L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}^n\right)$, $T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$ então

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |T_i(x)| \right) \leq \sum_{i=1}^n \|T_i\|.$$

Logo se considerarmos $U \in \left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)_1$, $X_i = L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}\right)$, $i=1, \dots, n$,

temos $\|T\| \leq \|U\|_1$.

Como $L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}\right)$ é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ e as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$

são equivalentes em $\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)$, X_i Banach, $i=1, \dots, n$ temos que

$\varphi : L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}^n\right) \rightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)_1$, $X_i = \ell_1(\mathbb{N})$, $i=1, \dots, n$, definida por

$\varphi(T) = U$ é isomorfismo.

A demonstração da outra afirmação é análoga, sendo que o isomorfismo é obtido por

$$\varphi : L\left(\mathbb{K}^n, \ell_1(\mathbb{N})\right) \rightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)_1, \quad X_i = \ell_1(\mathbb{N}), \quad i=1, \dots, n$$

definida por $\varphi(T) = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in X_i$, $x_i = T(e_i)$, $i=1, \dots, n$.

III.5.3 - Proposição: Se $X = L\left(C_0(\mathbb{N}), \ell_1(\mathbb{N})\right)$ então $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ para toda $\alpha \in BV[0,1]$.

Prova: Como sempre basta supor α não constante e crescente (I.1.24, 31).

Suponhamos que existe $f: [0,1] \rightarrow X$, $f \in R_\alpha(X)$ e $f \notin D_\alpha(X)$.

Por I.1.17,25 temos então que $\mu_\alpha(Df) > 0$ e como $Df = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$,

$$F_n = \left\{ t \in [0,1] : w(f, \{t\}) \geq \frac{1}{n} \right\} \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ com } \mu_\alpha(F_{n_0}) > 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$A_n : X \rightarrow L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}^n\right) \text{ e } B_n : X \rightarrow L\left(\mathbb{K}^n, \ell_1(\mathbb{N})\right)$$

definidas por

$$A_n(T) = p_n \circ T \quad (p_n \text{ de III.5.1}) \text{ e}$$

$$B_n(T) = T_n, \text{ sendo } T_n = T \Big|_{\left\| \begin{smallmatrix} \mathbb{K}^n \\ \parallel \\ \infty \end{smallmatrix} \right\|}.$$

É claro que A_n e B_n são lineares e contínuas, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $(A_n \circ f) \in R_\alpha\left[L\left(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{K}^n\right)\right]$ e $(B_n \circ f) \in R_\alpha\left[L\left(\mathbb{K}^n, \ell_1(\mathbb{N})\right)\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Considerando então o resultado III.5.2 temos por I.2.7, II.1.3 e I.1.25 que $\mu_{\hat{\alpha}}\left(D(A_n \circ f)\right) = \mu_{\hat{\alpha}}\left(D(B_n \circ f)\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $d \in D$, $d = (t_0, t_1, \dots, t_{|d|})$ e $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \dots, |d|$, sejam $i_1, i_2, \dots, i_p$ os índices de $\{1, \dots, |d|\}$ tais que $\mu_{\hat{\alpha}}\left(\overset{\circ}{I}_{i_j} \cap F_{n_0}\right) > 0$, $j=1, \dots, p$. (Observar que se $\mu_{\hat{\alpha}}\left(I_{i_j} \cap F_{n_0}\right) > 0$ então $\mu_{\hat{\alpha}}\left(\overset{\circ}{I}_{i_j} \cap F_{n_0}\right) > 0$ uma vez que α é contínua em F_{n_0} por I.1.7).

Sejam $x_1 \in \overset{\circ}{I}_{i_1} \cap F_{n_0}$ e $y_1 \in I_{i_1}$ com $\|f(x_1) - f(y_1)\| > \frac{1}{2n_0}$.

Se $T_1 = f(x_1) - f(y_1)$, dado $\varepsilon > 0$ seja $j_1 \in \mathbb{N}$, cuja existência é garantida por III.5.1, com

$$\|p_{j_1} \circ T_1 - T_1\| < \frac{\varepsilon}{2^4 V[\alpha]} \quad \text{e} \quad \|T_1 \circ \Pi_{j_1} - T_1\| < \frac{\varepsilon}{2^4 V[\alpha]} .$$

Se $\tilde{T}_1 = p_{j_1} \circ T_1 \circ \Pi_{j_1}$ então

$$\|T_1 - \tilde{T}_1\| = \|T_1 - T_1 \circ \Pi_{j_1} + T_1 \circ \Pi_{j_1} - p_{j_1} \circ T_1 \circ \Pi_{j_1}\| \leq$$

$$\|T_1 - T_1 \circ \Pi_{j_1}\| + \|(T_1 - p_{j_1} \circ T_1) \circ \Pi_{j_1}\| \leq \frac{\varepsilon}{2^3 V[\alpha]} .$$

Sejam $x_2 \in \mathring{I}_{i_2} \cap F_{n_0}$, $x_2 \notin \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D(A_n \circ f) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D(B_n \circ f) \right) \right]$

e $y_2 \in I_{i_2}$ tais que $\|f(x_2) - f(y_2)\| > \frac{1}{2n_0}$ e

$$\|(A_{j_1} \circ f)(x_2) - (A_{j_1} \circ f)(y_2)\| < \frac{\varepsilon}{2^6 V[\alpha]} \quad \text{e}$$

$$\|(B_{j_1} \circ f)(x_2) - (B_{j_1} \circ f)(y_2)\| < \frac{\varepsilon}{2^6 V[\alpha]} .$$

Se $T_2 = f(x_2) - f(y_2)$ temos $\|T_2\| > \frac{1}{2n_0}$,

$$\|A_{j_1}(T_2)\| = \|p_{j_1} \circ T_2\| < \frac{\varepsilon}{2^6 V[\alpha]} \quad \text{e}$$

$$\|B_{j_1}(T_2)\| = \|T_2 \circ \Pi_{j_1}\| < \frac{\varepsilon}{2^6 V[\alpha]} .$$

Seja $j_2 > j_1$ tal que $\|T_2 - p_{j_2} \circ T_2\| < \frac{\varepsilon}{2^{6V}[\alpha]}$ e

$\|T_2 - T_2 \circ \Pi_{j_2}\| < \frac{\varepsilon}{2^{6V}[\alpha]}$, que existe por III.5.1.

Se $\tilde{T}_2 = (p_{j_2} - p_{j_1}) \circ T_2 \circ (\Pi_{j_2} - \Pi_{j_1})$ temos

$$\begin{aligned}
 \|T_2 - \tilde{T}_2\| &= \|T_2 - p_{j_2} \circ T_2 \circ (\Pi_{j_2} - \Pi_{j_1}) + p_{j_1} \circ T_2 \circ (\Pi_{j_2} - \Pi_{j_1})\| = \\
 &= \|T_2 - p_{j_2} \circ T_2 + p_{j_2} \circ T_2 - p_{j_2} \circ T_2 \circ (\Pi_{j_2} - \Pi_{j_1}) + p_{j_1} \circ T_2 \circ (\Pi_{j_2} - \Pi_{j_1})\| \leq \\
 &\leq \|T_2 - p_{j_2} \circ T_2\| + \|p_{j_2} \circ T_2 - p_{j_2} \circ T_2 \circ \Pi_{j_2}\| + \|p_{j_2} \circ T_2 \circ \Pi_{j_1}\| + \\
 &+ \|p_{j_1} \circ T_2 \circ (\Pi_{j_2} - \Pi_{j_1})\| \leq 4 \frac{\varepsilon}{2^{6V}[\alpha]} = \frac{\varepsilon}{2^{4V}[\alpha]}
 \end{aligned}$$

Seja $x_3 \in \dot{I}_{i_3} \cup F_{n_0}$, $x_3 \notin \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D(A_n \circ f) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D(B_n \circ f) \right)$ e

$y_3 \in I_{i_3}$ tais que

$$\|f(x_3) - f(y_3)\| > \frac{1}{2n_0} \quad \text{e} \quad \|(A_{j_2} \circ f)(x_3) - (A_{j_2} \circ f)(y_3)\| < \frac{\epsilon}{2^{7V}[\alpha]}$$

$$\text{e} \quad \|(B_{j_2} \circ f)(x_3) - (B_{j_2} \circ f)(y_3)\| < \frac{\epsilon}{2^{7V}[\alpha]}$$

$$\text{Logo se } T_3 = f(x_3) - f(y_3) \text{ temos } \|T_3\| > \frac{1}{2n_0}, \quad \|P_{j_2} \circ T_3\| < \frac{\epsilon}{2^{7V}[\alpha]}$$

$$\text{e } \|T_3 \circ \Pi_{j_2}\| < \frac{\epsilon}{2^{7V}[\alpha]}.$$

$$\text{Seja } j_3 > j_2 \text{ tal que } \|T_3 - P_{j_3} \circ T_3\| < \frac{\epsilon}{2^{7V}[\alpha]} \quad \text{e}$$

$$\|T_3 - T_3 \circ \Pi_{j_3}\| < \frac{\epsilon}{2^{7V}[\alpha]}, \quad \text{que existe por III.5.1.}$$

$$\text{Se } \tilde{T}_3 = (P_{j_3} - P_{j_2}) \circ T_3 \circ (\Pi_{j_3} \circ \Pi_{j_2}) \text{ temos, como no caso ante-}$$

$$\text{rior que } \|T_3 - \tilde{T}_3\| < \frac{\epsilon}{2^{5V}[\alpha]}.$$

Continuando o processo obtemos $T_1, \dots, T_p$ e $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_p$ com

$$\|T_i\| > \frac{1}{2n_0} \quad \text{e} \quad \|T_i - \tilde{T}_i\| < \frac{\epsilon}{2^{i+2V}[\alpha]}, \quad i=1, 2, \dots, p.$$

Como $\|\tilde{T}_i\| \geq \|T_i\| - \|\tilde{T}_i - T_i\|$, temos

$$(1) \quad \|\tilde{T}_i\| \geq \frac{1}{2n_0} - \frac{\varepsilon}{2^{i+2V[\alpha]}} \quad , \quad i=1,2,\dots,p.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|T_1+T_2+\dots+T_p\| &\geq \|\tilde{T}_1+\dots+\tilde{T}_p\| - \|(T_1 - \tilde{T}_1)+\dots+(T_p - \tilde{T}_p)\| \geq \\ &\geq \|\tilde{T}_1 + \dots + \tilde{T}_p\| - \|T_1 - \tilde{T}_1\| - \dots - \|T_p - \tilde{T}_p\| \geq \\ &\geq \|\tilde{T}_1 + \dots + \tilde{T}_p\| - \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{2^{i+2V[\alpha]}} \quad (2) \end{aligned}$$

Calculemos $\|\tilde{T}_1 + \dots + \tilde{T}_p\|$

$$\|\tilde{T}_1 + \dots + \tilde{T}_p\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\tilde{T}_1(x) + \dots + \tilde{T}_p(x)\|$$

$$\text{Se } x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \quad , \quad x = \Pi_{j_1}(x) + (\Pi_{j_2} - \Pi_{j_1})(x) + \dots +$$

$$+ (\Pi_{j_p} - \Pi_{j_{p-1}})(x) + y \quad \text{e se denotarmos por}$$

$$x_1 = \Pi_{j_1}(x), \quad x_2 = (\Pi_{j_2} - \Pi_{j_1})(x), \dots, x_p = (\Pi_{j_p} - \Pi_{j_{p-1}})(x) \quad \text{então é fá}$$

cil verificar que

$\tilde{T}_1(x) = \tilde{T}_1(x_1), \tilde{T}_2(x) = \tilde{T}_2(x_2), \dots, \tilde{T}_p(x) = \tilde{T}_p(x_p)$ e $\tilde{T}_i(y)=0$,
 $i=1, \dots, p$ e que

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\| \leq 1} \|\tilde{T}_1(x) + \dots + \tilde{T}_p(x)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\|\tilde{T}_1(x_1)\|_1 + \dots + \|\tilde{T}_p(x_p)\|_1 \right) = \\ &= \sup_{\|x_1\| \leq 1} \|\tilde{T}_1(x_1)\| + \dots + \sup_{\|x_p\| \leq 1} \|\tilde{T}_p(x_p)\| = \|\tilde{T}_1\| + \|\tilde{T}_2\| + \dots + \|\tilde{T}_p\| \end{aligned}$$

Logo se $v_1 = v_{I_{i_1}}[\alpha], \dots, v_p = v_{I_{i_p}}[\alpha]$, temos por (1) e (2)

$$\|T_1 v_1 + \dots + T_p v_p\| \geq \sum_{i=1}^p \frac{v_i}{2n_0} - \varepsilon \geq \frac{\mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0})}{2n_0} - \varepsilon > \varepsilon \quad \text{se}$$

$$\varepsilon < \frac{\mu_{\hat{\alpha}}(F_{n_0})}{4}.$$

Conseqüentemente, existe $\varepsilon > 0$, tal que para toda parti-
 ção $d \in D$ existe uma escolha $\zeta_i, \zeta'_i \in I_i, i=1, \dots, |d|$, $\zeta_i = \zeta'_i$ se
 $i \neq i_1, \dots, i_p$, $\zeta_i = x_i$ e $\zeta'_i = y_i$ se $i=i_1, \dots, i_p$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[f(\zeta_i) - f(\zeta'_i) \right] v_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p T_i v_i \right\| > \varepsilon$$

o que contraria o fato inicialmente suposto de $f \in R_{\alpha}(X)$ por I.1.29.

III.5.4 - Teorema: Sejam X e Y espaços de Banach, $Z = L(X, Y)$ e $\alpha \in BV[0, 1]$ com α_c não constante. Se $D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z)$ então se Y tem base subsimétrica temos Y isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ e se X tem base subsimétrica temos X isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$. Conseqüentemente se X e Y têm base subsimétrica então

$$D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z) \Leftrightarrow X \text{ é isomorfo a } c_0(\mathbb{N}) \text{ e } Y \text{ é isomorfo a } \ell_1(\mathbb{N}).$$

Prova: É fácil verificar que Z tem subespaços fechados isomorfos a X^* e a Y . Logo se $D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z)$ temos $D_\alpha(Y) = R_\alpha(Y)$ e $D_\alpha(X^*) = R_\alpha(X^*)$. Se Y tem base subsimétrica temos Y isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ por I.3.12 e se X tem base subsimétrica temos X isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ por I.3.16.

Para se obter a equivalência da última frase do enunciado basta então usar III.5.3.

III.5.5 - Observação: De II.3.18 temos que se X é um Banach com base incondicional e $\alpha \in BV[0, 1]$ com α_c não constante então

$$D_\alpha[L(X, X)] = R_\alpha[L(X, X)] \Leftrightarrow X \text{ tem dimensão finita}$$

lembrando que $L(X, X)$ tem subespaços isomorfos a X e a X^* .

III.5.6 - Observação: No interesse de mostrar que $L(c_0, \ell_1)$ não é subespaço de qualquer Banach X anteriormente estudado com $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$, $\alpha \in BV[0,1]$ com α_c não constante, chamamos a atenção para o fato de que os espaços separáveis, com essa propriedade, obtidos em qualquer trabalho do nosso conhecimento são sempre isomorfos a subespaços de um Banach com base incondicional.

Para uma comprovação desse fato basta observar as propriedades dos espaços exibidos neste trabalho e o resultado, citado em [G], que afirma que $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_Y$ (definido em II.1.7) no caso considerado em II.1.14 tem base incondicional.

Conseqüentemente o resultado dado pela proposição a seguir prova o que queremos.

III.5.7 - Proposição: Se $X = L\left[c_0(\mathbb{N}), \ell_1(\mathbb{N})\right]$ então X é um espaço de Banach separável e não é isomorfo a um subespaço fechado de qualquer Banach com base incondicional.

Prova: De ([LT] 2.c.3) temos que todos os operadores de X são compactos e então de ([K] §44.2(3)e(6)) temos que X é isomorfo ao produto tensorial injetivo $(c_0(\mathbb{N}))^* \overset{\vee}{\otimes} \ell_1(\mathbb{N})$ que é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N}) \overset{\vee}{\otimes} \ell_1(\mathbb{N})$.

Em ([KP]T.3.1) os autores provam que $\ell_1(\mathbb{N}) \overset{\vee}{\otimes} \ell_1(\mathbb{N})$ tem base de Schauder, logo X é um espaço de Banach separável. Ainda em ([KP]C.3.1) está provado que $\ell_1(\mathbb{N}) \overset{\vee}{\otimes} \ell_1(\mathbb{N})$ não é isomorfo a um subespaço fechado de um Banach com base incondicional, portanto o mesmo acontece com X .

III.5.8 - Proposição: Se K é um compacto infinito métrico, $\alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante e $Z = L\left[C(K), \ell_1(\mathbb{N})\right]$ então

$$D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z) \Leftrightarrow K \text{ é disperso}$$

Prova: Se K não é disperso temos de ([L]4.13.2) que $C(K)$ tem subespaço fechado isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ e então $(C(K))^*$ tem subespaço fechado isomorfo a $L_1[0,1]$. Consequentemente temos $D_\alpha(Z) \subsetneq R_\alpha(Z)$, $\forall \alpha \in BV[0,1]$ com α_C não constante por I.1.12, I.3.14 e III.1.21, lembrando que $(C(K))^*$ é isomorfo a um subespaço fechado de Z .

Para a recíproca observemos que de ([DU]VI2.15) temos que os operadores de Z são fraco-compactos, logo compactos já que $\ell_1(\mathbb{N})$ tem a propriedade de Schur, então de ([K]§44.2) temos que Z é isomorfo a $(C(K))^* \overset{\vee}{\otimes} \ell_1(\mathbb{N})$. Como K é disperso e métrico segue que $(C(K))^*$ é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$, logo Z é isomorfo a $L(c_0, \ell_1)$, pela demonstração de III.5.7. A tese segue então de III.5.3.

III.5.9 - Observação: Destacamos que na demonstração da implicação direta da proposição anterior, não foi usada a hipótese de K ser métrico, logo essa implicação direta é verdadeira para qualquer K compacto Hausdorff.

Além disso, como $K_0 = [0, w^w]$, onde w é o primeiro ordinal infinito, é compacto métrico disperso temos que $Z = L\left\{C(K_0), \ell_1(\mathbb{N})\right\}$ é tal que $D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z), \forall \alpha \in BV[0,1]$ e de ([BP]) temos que $C(K_0)$ não tem base de Schauder incondicional logo não tem base subsimétrica. Isso mostra que se $Z = L(X, Y)$, X e Y espaços de Banach, podemos ter $D_\alpha(Z) = R_\alpha(Z), \forall \alpha \in BV[0,1]$ com X sem base subsimétrica (comparar com o resultado III.5.4).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [A] - Abud, Z.I. - "Measurability, Lattice and Algebraic Properties of Riemann-Integrable Functions with Values in $C(K)$ " - Seminário Brasileiro de Análise, 19º (1984).
- [Be] - Beauzamy, B. - "Banach-Saks properties and spreading models" - Math. Scand. 44, 357-384 (1979).
- [BP] - Bessaga, C. and Pelczynski, A. - "Banach spaces of continuous functions IV" - Studia Math. 19 (1960), 53-62.
- [Bu] - Bund, I.M. - "Birnbau - Orlicz spaces" - Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo . (1978).
- [BS₁] - Brunel, A. and Sucheston, L. - "On B-convex Banach spaces" - Math. System Theory 7 (1974), 294-299.
- [BS₂] - Brunel, A. and Sucheston, L. - "On J-convexity and ergodic super properties of Banach spaces" - Trans. Amer. Math. Soc., 204 (1975), 79-90.
- [Di] - Diniz, M.I.S.V. - "Mensurabilidade de funções Riemann integráveis em espaços de funções contínuas" - Tese de Doutorado - IME-USP - 1984.
- [DJ] - Diestel, J. and Uhl, J.J. - "Vector Measure" - Mathematical Surveys - Am. Math. Soc. - Providence, Rhode Island - 1977.

- [FJ]- Figiel, T. and Johnson, W.B. - "A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p " - *Compositio Math.* 29, 179-190 - (1974).
- [Gi]- Gilioli, A. - "A method of construction of Banach spaces with the Lebesgue property" - *Seminário Brasileiro de Análise*, 19º, 295-308 (1984).
- [Gr]- Grothendieck, A. - "Résumé de la theorie métrique des produits tensoriels topologiques" - *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, 8 (1956) 80-110.
- [Ha]- Hagler, J. - "A counter example to several questions about Banach spaces" - *Studia Math.* 40 (1977).
- [He]- Hellmeister, A.C.P. - "O espaço $L_A(\mu, X)$ e seu dual" - *Seminário Brasileiro de Análise*, 15º (1982).
- [Hi]- Hildebrandt, T.H. - "Introduction to the theory of integration" - Academic Press - (1963).
- [Ho]- Hönig, C.S. - "The Dirichlet and substitution formulas for Riemann-Stieltjes integrals in Banach spaces" - *Lecture notes in pure and applied mathematics* - Vol. 18 - Marcel Dekker Inc.
- [HN]- Halperin, I. and Nakano, H. - "Generalized ℓ^p spaces and the Schur property" - *Journal of the Math. Soc. of Jap.* - Vol. 5 - nº 1, April, 1953.

- [J] - James, R.C. - "Super reflexive spaces with bases" - Pacific Journal of Mathematics, 41(2) - 409-419 (1972).
- [K1] - Klee, V.L. - "Polyhedral sections of convex bodies" - Acta Math. 103 (1960), 243-267.
- [Ko] - Köthe, G. - "Topological Vector Spaces II" - Springer-Verlag - 1979.
- [KP] - Kwapien, S. and Pelczynski, A. - "The main triangle projection in matrix spaces and its applications" - Studia Math., 29, (1968).
- [L] - Lacey, E. - "The isometric theory of classical Banach spaces" - Springer-Verlag - 1974.
- [LT] - Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. - "Classical Banach Spaces I" - Springer-Verlag - 1977.
- [N] - Nakano, H. - "Modulared sequence space" - Proc. Jap. Acad., vol. 27, (1951), 508-512.
- [Pi] - Pisier, G. - "Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces" - Lectures presented at the NSF-CBMS regional conference, University of Missouri - Columbia - June 25-29, 1984.
- [R] - Rocha, G.C. - "Integral de Riemann vetorial e geometria de espaços de Banach" - Tese de Doutorado - IME-USP (1979).
- [Ro] - Rosenthal, H.P. - "Weakly independent sequences and the Banach-Saks property" - Proc. of the Durham Symposium - Durham - July 1975, 26.

- [S] - Schur, J. - "Ueber lineare transformationen in der theorie der unendlichen reihen" - Journ. für reine und angew. Math. , 151 (1921), 79-111.
- [Ti] - Tsirelson, B.S. - "Not every Banach space contains c_0 or ℓ_p " - Functional Anal. Appl. 8, 138-141 (1974).
- [Tu] - Turett, B. - "Rotundity of Orlicz spaces" - Indag. Math, 38 (5), 462-469 - (1976).
- [W] - Woo, J.Y.T. - "On modular sequence space" - Studia Math. 48, 271-289 (1973).