PARTES GRANDES DE NATURAIS

SEM RETAS COMBINATÓRIAS

TOMÁS ALBERTO NÚÑEZ LAY

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO : COMBINATÓRIA

ORIENTADOR : Prof. Dr. ANGELO BARONE NETTO

SÃO PAULO, MAIO DE 1986

Aos meus pais Tomás e Ana.

A Edith, Susana, Irene e Daniela.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Angelo Barone Netto, orientador deste trabalho, pela atenção e dedicação sem os quais a realização deste não teria sido possível.

Aos meus amigos Manuel Valentim De Pera Garcia e Sônia Regina Leite Garcia pelas sugestões que melhoraram a apresentação deste trabalho.

(*) O autor agradece ao CNPq de quem recebeu auxílio financeiro durante o mestrado. Agradece ainda à "Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Lima - Perú" pelo afastamento de que usufruiu enquanto realizava este mestrado.

PREFÁCIO

Com os conceitos usuais de cubo e reta combinatórios, no presente trabalho expõe-se um resultado que fica entre a conjectura de Leo Moser, que diz:

"Para quaisquer $k \geq 2$ e $\varepsilon > 0$ existe $N = N(k; \varepsilon)$ tal que, se $n \geq N$ e $S \subseteq C(k+1; n)$ têm pelo menos $\varepsilon(k+1)^n$ elementos, então S contém uma reta combinatória" (ver [2], pag.50)

e a conjectura de Paul Erdős, que diz:

"Se A é um conjunto de inteiros positivos satisfazendo $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \infty$

então A contém progressões aritméticas de comprimento arbitrário" (ver [2], pag.51).

O resultado obtido é o seguinte:

"Para cada $k \geq 2$, existe um conjunto $A(k)$ de números naturais tal que $\sum_{a \in A_1(k)} \frac{1}{a} = \infty$ (onde $A_1(k) = A(k) \setminus \{0\}$) e que não

contém retas combinatórias de $C(k+1; \infty)$ ".

O trabalho divide-se em três blocos:

Os conceitos a ser usados (pontos 1,2,3 e 4); a construção do conjunto $A(k)$ e uma prova de que não contém retas combinatórias (ponto 6); e uma prova de que o conjunto $A(k)$ é grande no sentido de Erdős (i.e, $\sum_{a \in A_1(k)} \frac{1}{a} = \infty$) (ponto 7).

Temos uma parte final (ponto 8) que é dedicada a fazer algumas observações sobre $d(k; n)$ que é a densidade dos elementos de $A(k)$ no cubo $C(k+1; (n+1)^{k+n})$. Ainda neste ponto prova-se que existem $N > 0$ e $C > 0$ tais que para $n \geq N$, $A(k)$ contém pelo menos $\frac{C \sqrt{k+1} (k+1)^n}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}}$ pontos do cubo $C(k+1; n)$, de modo que

fica respondida a pergunta feita por P.Erdős e R.L.Graham que

diz: "Existe $r>0$ tal que é possível escolher $\frac{r(k+1)^n}{\sqrt{n}}$ pontos sem retas combinatórias de $C(k+1;n)$?" (ver [3], pag.13).

ABSTRACT

For each $k \geq 2$ we construct a set $A(k)$ of natural numbers large in the sense of Erdős (i.e., $\sum_{a \in A_1(k)} \frac{1}{a} = \infty$, where $A_1(k) = A(k) \setminus \{0\}$) and such that it doesn't include combinatorial lines of $C(k+1; \infty)$.

P. Erdős and R. L. Graham made the next question: "Is there $r > 0$ such that it is possible to find $\frac{r(k+1)^n}{\sqrt{n}}$ points without a

combinatorial line?" (see [3], page 13). To answer the question, we prove that there are $N > 0$ and $C > 0$ such that for $n \geq N$,

$A(k)$ contains at least $\frac{C \sqrt{k+1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(k+1)^n}{\sqrt{n}}$ points of $C(k+1; n)$.

INDICE

O cubo combinatório	1
A reta combinatória	2
O triângulo de Pascal modificado e algumas propriedades....	3
As conjecturas de Leo Moser e Paul Erdős	8
Objetivo	8
Construção de um conjunto $A(k)$ de números naturais que não contém retas combinatórias	9
Prova de que $A(k)$ é grande no sentido de Erdős	12
Algumas observações sobre $d(k;n)$	16

1. O cubo combinatório

Denotaremos $\mathbb{N} = \{0;1;2;\dots\}$ e para $n \in \mathbb{N}$,

$$[0;n] = \{0;1;\dots;n\}.$$

1.1 Definição. Sejam: $b = k+1$, $k \geq 2$, $k, p \in \mathbb{N}$.

O cubo combinatório de base b e dimensão p é o conjunto

$$C(b;p) = \{(x_1, \dots, x_p) / x_i \in \{0;1;\dots;k\}\} \quad \text{se } p \geq 1,$$

$$C(b;0) = \{\emptyset\}.$$

Exemplos:

$$1) C(3;1) = \{0;1;2\}$$

$$2) C(3;2) = \{(x_1, x_2) / x_i \in \{0;1;2\}\}$$

e, com abuso de notação, podemos escrever

$$C(3;2) = \{00;01;02;10;11;12;20;21;22\}$$

$$3) C(3;3) = \{000;001;002;010;011;012;020;021;022;$$

$$100;101;102;110;111;112;120;121;122;$$

$$200;201;202;210;211;212;220;221;222\}.$$

1.2 Observação. Existe uma bijeção entre $C(b;p)$ e $[0;b^p-1]$.

De fato, basta considerar a aplicação

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p x_i b^{i-1}.$$

1.3 Definição. O cubo combinatório de base b e dimensão ∞ é

o conjunto das seqüências finalmente nulas; isto é,

$$C(b;\infty) = \{(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) / x_i \in \{0;1;\dots;b-1\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

1.4 Observação. Podemos identificar $C(b;\infty)$ com $\mathbb{N}$.

De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer, expressando n na base $b = k+1$

$$\text{temos: } n = a_1 b^0 + a_2 b^1 + a_3 b^2 + \dots + a_m b^m + \dots$$

onde $a_i \in [0;k] \quad \forall i$, e a soma é finalmente nula (i.e.,

existe $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$ tal que $a_i = 0$ para todo $i \geq j$).

Identificamos agora n com a seqüência $(a_1, a_2, \dots)$ que é

um elemento de $C(b; \infty)$. Recíprocamente, toda seqüência de $C(b; \infty)$ pode ser identificada com um número natural usando a relação acima.

1.5 Observação. O cubo $C(b; p)$ pode ser injetado no cubo $C(b; p+1)$ acrescentando um zero às seqüências. Da mesma forma podemos injetar qualquer cubo $C(b; p)$ no cubo $C(b; \infty)$. É óbvio que podemos injetar o intervalo $[0; b^p - 1]$ no intervalo $[0; b^{p+1} - 1]$. Resulta a cadeia seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc} C(b; 0) & \hookrightarrow & C(b; 1) & \hookrightarrow & C(b; 2) & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow C(b; \infty) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \downarrow \\ [0; b^0 - 1] & \hookrightarrow & [0; b^1 - 1] & \hookrightarrow & [0; b^2 - 1] & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow \mathbb{N} \end{array} .$$

2. A reta combinatória

2.1 Definição. Uma reta combinatória em $C(k+1; p)$ é um conjunto (ordenado convenientemente) de pontos $x_0, \dots, x_k$ de $C(k+1; p)$ tal que, se $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$, $i=0, \dots, k$, então para cada coordenada j , $1 \leq j \leq p$, temos um dos seguintes dois casos:

$$x_{0j} = x_{1j} = \dots = x_{kj}$$

$$\text{ou } x_{sj} = s \text{ para todo } s, 0 \leq s \leq k,$$

devendo ocorrer este último pelo menos para um j .

Exemplos:

1) Em $C(3; 3)$: $\begin{array}{l} 012 \\ 112 \\ 212 \end{array}$ é uma reta combinatória

2) Em $C(3; 3)$: $\begin{array}{l} 021 \\ 111 \\ 201 \end{array}$ não é reta combinatória (embora o seja no sentido geométrico usual).

2.2 Definição: Para $j \geq 1$, definimos a projeção j -ésima do cubo $C(b; \infty)$ como a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \pi_j: & C(b; \infty) & \longrightarrow [0; k] \\ & a_1 a_2 \dots & \longmapsto a_j \end{array}$$

2.3 Definição. Uma reta combinatória em $C(b; \infty)$ é um conjunto (ordenado convenientemente) de pontos $x_0, \dots, x_{b-1}$ de $C(b; \infty)$ tal que para cada $j \geq 1$ se tenha:

$$\pi_j x_i = a_j \quad \forall i \quad (\text{isto é, } \pi_j \text{ é "constante"})$$

$$\text{ou } \pi_j x_i = i \quad \forall i \quad (\text{isto é, } \pi_j \text{ é "identidade"})$$

devendo acontecer o segundo caso pelo menos para um j .

3. O triângulo de Pascal modificado

Se para cada $p \in \mathbb{N}$ desenvolvemos o binômio $(k+1)^p$ e escrevemos os termos resultantes na linha p , obtemos o triângulo seguinte:

$$\begin{array}{l} p=0 \quad 1 \\ p=1 \quad k \quad 1 \\ p=2 \quad k^2 \quad 2k \quad 1 \\ p=3 \quad k^3 \quad 3k^2 \quad 3k \quad 1 \\ p=4 \quad k^4 \quad 4k^3 \quad 6k^2 \quad 4k \quad 1 \\ p=5 \quad k^5 \quad 5k^4 \quad 10k^3 \quad 10k^2 \quad 5k \quad 1 \\ p=6 \quad k^6 \quad 6k^5 \quad 15k^4 \quad 20k^3 \quad 15k^2 \quad 6k \quad 1 \\ p=7 \quad k^7 \quad 7k^6 \quad 21k^5 \quad 35k^4 \quad 35k^3 \quad 21k^2 \quad 7k \quad 1 \\ \dots \quad \dots \end{array}$$

Denotemos por $E(k; p; j)$ o elemento $(p; j)$ deste triângulo ($j=0, 1, \dots, p$).

Observemos que:

$$3.1 \quad E(k; p; j) = \binom{p}{j} k^{p-j} > 0.$$

Vem do próprio desenvolvimento do binômio $(k+1)^p$.

$$3.2 \quad E(k; p; j+1) = \frac{1}{k} E(k; p; j) \frac{p-j}{j+1}, \quad j=0, 1, \dots, p-1.$$

$$\text{De fato, } E(k; p; j+1) = \binom{p}{j+1} k^{p-j-1} = \frac{p!}{(j+1)! (p-j-1)!} k^{p-j-1}$$

$$= \frac{1}{k} \frac{p!}{(p-j)! j!} k^{p-j} \frac{p-j}{j+1}$$

$$= \frac{1}{k} E(k; p; j) \frac{p-j}{j+1}$$

3.3 $E(k; p; j+1) = kE(k; p-1; j+1) + E(k; p-1; j)$, $j=0, \dots, p-1$
(no caso $j=p-1$, admitiremos que $E(k; p-1; j+1)=0$).

De fato,
$$\frac{p}{(j+1)(p-j-1)} = \frac{1}{j+1} + \frac{1}{p-j-1}$$

$$\frac{p}{(j+1)(p-j-1)!} = \frac{1}{(j+1)(p-j-2)!} + \frac{1}{(p-j-1)!}$$

$$\frac{p!}{(j+1)!(p-(j+1))!} = \frac{(p-1)!}{(j+1)!((p-1)-(j+1))!} + \frac{(p-1)!}{((p-1)-j)!j!}$$

$$\binom{p}{j+1} k^{p-(j+1)} = k \binom{p-1}{j+1} k^{(p-1)-(j+1)} + \binom{p-1}{j} k^{(p-1)-j}$$

$$E(k; p; j+1) = kE(k; p-1; j+1) + E(k; p-1; j).$$

3.4 $E(k; p+1; j) \geq kE(k; p; j)$.

De 3.3 temos:

$$E(k; p+1; j) = kE(k; p; j) + \underbrace{E(k; p; j-1)}_{\geq 0} \geq kE(k; p; j).$$

3.5 Para $0 \leq j \leq p-2$, $E(k; p; j) \leq E(k; p+1; j+1)$.

De 3.3 temos:

$$E(k; p+1; j+1) = \underbrace{kE(k; p; j+1)}_{\geq 0} + E(k; p; j) \geq E(k; p; j).$$

3.6 $E(k; p; j)$ é o número de elementos de $C(k+1; p)$ que têm exatamente j componentes iguais a k .

De fato, um elemento qualquer de $C(k+1; p)$ é da forma

$$(x_1, \dots, x_p), \text{ onde } x_i \in \{0; 1; \dots; k-1; k\}.$$

De cada $(x_1, \dots, x_p)$ podemos escolher j componentes de $\binom{p}{j}$

maneiras diferentes. Se cada uma destas j componentes

assume o valor k , então só falta dar valores às $p-j$

componentes restantes; estas $p-j$ componentes restantes

podem tomar qualquer valor entre 0 e $k-1$ (está descartado o valor k), portanto, teremos k^{p-j} modos diferentes de colorir as nossas $p-j$ componentes.

Logo, o número de seqüências de $C(k+1;p)$ que têm exatamente j componentes iguais a k é $\binom{p}{j} k^{p-j} = E(k;p;j)$.

3.7/ Se em cada linha do triângulo consideramos o máximo valor, então tais valores são respectivamente:

$$E(k;0;0)$$

$$E(k;1;0)$$

$$\vdots$$

$$E(k;k-1;0)$$

$$E(k;k;0) = E(k;k;1)$$

$$E(k;k+1;1)$$

$$\vdots$$

$$E(k;2k;1)$$

$$E(k;2k+1;1) = E(k;2k+1;2)$$

$$E(k;2k+2;2)$$

$$\vdots$$

$$E(k;3k+1;2)$$

$$E(k;3k+2;2)$$

$$\vdots$$

$$E(k;nk+(n-1);n)$$

$$E(k;nk+n;n)$$

$$\vdots$$

$$E(k;(n+1)k+(n-1);n)$$

$$E(k;(n+1)k+n;n)$$

$$\vdots$$

Exemplo: Para $k=2$, o triângulo é o seguinte:

$$p-j \leq s(k-1)$$

$$p-j+s \leq sk \quad \forall s, 1 \leq s \leq j \quad e$$

usando esta desigualdade para cada fator, temos:

$$(p-j+1)(p-j+2)\dots(p-j+j) \leq (1.k)(2.k)\dots(j.k)$$

$$\frac{p!}{(p-j)!} \leq j! k^j$$

$$p! \leq j! (p-j)! k^j$$

$$\frac{1}{p!} \geq \frac{k^{-j}}{j! (p-j)!}$$

(ii) Suponhamos agora que $n > 0$.

Primeiro caso: $0 \leq j < n$.

Observemos que $k(j+s) \leq p-n+s \quad \forall s, 1 \leq s \leq n-j$.

De fato, como $nk+n-1 \leq p$

$$nk \leq p-n+1 \leq p-n+s ;$$

por outro lado, $s \leq n-j$

$$s+j \leq n$$

$$k(s+j) \leq kn \quad e$$

juntando estas duas desigualdades:

$$k(s+j) \leq nk \leq p-n+s, \quad \forall s, 1 \leq s \leq n-j.$$

Usando esta desigualdade para cada fator, temos:

$$k(j+1)k(j+2)\dots k(j+(n-j)) \leq (p-n+1)(p-n+2)\dots(p-n+(n-j))$$

$$(j+1)(j+2)\dots n \leq \frac{(p-n+1)(p-n+2)\dots(p-j)}{k^{n-j}}$$

$$\frac{k^{n-j}}{j! (p-j)!} \leq \frac{1}{n! (p-n)!}$$

Segundo caso: $n < j \leq p$.

Observemos que $p-j+s \leq (n+s)k \quad \forall s, 1 \leq s \leq j-n$.

De fato, como $s \leq j-n$, $n \leq j-s$

$$p-n \geq p-(j-s)$$

e como $(n+1)^{k-1} \geq p-n$, temos

$$p-j+s = p-(j-s) \leq p-n \leq (n+1)^{k-1} \leq (n+1)^k \leq (n+s)^k$$

$$p-j+s \leq (n+s)^k \quad \forall s, 1 \leq s \leq j-n.$$

Usando esta desigualdade para cada fator, temos:

$$(p-j+1)(p-j+2)\dots(p-j+(j-n)) \leq (n+1)^k(n+2)^k\dots(n+(j-n))^k$$

$$\frac{(p-n)!}{(p-j)!} \leq \frac{j!}{n!} k^{j-n}$$

$$\frac{1}{(p-n)! n!} \geq \frac{k^{n-j}}{(p-j)! j!}$$

4. As conjecturas de Leo Moser e Paul Erdős

4.1 Conjectura de Leo Moser

Para quaisquer $k \geq 2$ e $\varepsilon > 0$ existe $N = N(k; \varepsilon)$ tal que, se $n \geq N$ e $S \subseteq C(k+1; n)$ têm pelo menos $\varepsilon(k+1)^n$ elementos, então S contém uma reta combinatória.

4.2 Conjectura de Paul Erdős

Se A é um conjunto de inteiros positivos satisfazendo

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \infty$$

então A contém progressões aritméticas de comprimento arbitrário.

5. Objetivo

Para cada $k \geq 2$, existe um conjunto $A(k)$ de números naturais grande no sentido de Erdős, isto é, tal que

$$\sum_{a \in A_1(k)} \frac{1}{a} = \infty, \text{ onde } A_1(k) = A(k) \setminus \{0\}, \text{ e que não contém}$$

retas combinatórias de $C(k+1; \infty)$.

6. Construção de um conjunto de números naturais que não contém retas combinatórias

6.1 Sabemos que cada $E(k;p;j)$ é o número de seqüências de $C(k+1;p)$ que têm exatamente j componentes iguais a k (3.6); denotemos por $Q(k;p;j)$ o conjunto destas seqüências; $Q(k;p;j)$ é um subconjunto de $C(k+1;p)$.

Definimos para cada n

$$R(k;n) = Q(k;(n+1)k+n;n) \setminus Q(k;nk+n;n)$$

(no caso $n=0$, $Q(k;0;0)$ representa o conjunto unitário formado pela seqüência vazia).

Isto é, $R(k;0)$ é o conjunto das seqüências de $C(k+1;k)$ que não exibem nenhuma componente igual a k , incluindo a seqüência nula; e para $n \geq 1$, $R(k;n)$ é o conjunto das $E(k;(n+1)k+n;n) - E(k;nk+n-1;n)$ seqüências de $C(k+1;(n+1)k+n) \setminus C(k+1;nk+n-1)$ que exibem exatamente n componentes iguais a k .

É óbvio que $R(k;n) \cap R(k;m) = \emptyset$ se $n \neq m$.

Definimos agora o conjunto de nosso interesse:

$$A(k) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R(k;n) .$$

Como cada seqüência de $R(k;n)$ foi identificada com um conveniente número natural, expresso em base $k+1$, $A(k)$ resulta, por meio desta identificação, a parte de $\mathbb{N}$ constituída pelos números naturais que pertencem a $R(k;n)$ para algum n .

Exemplo:

Para $k=2$, o triângulo de Pascal modificado foi mostrado como exemplo em 3.7.

O conjunto $A(2)$ esta formado por

$$R(2;0) = Q(2;2;0) \setminus Q(2;0;0) = \{00;01;10;11\}$$

$$R(2;1) = Q(2;5;1) \setminus Q(2;3;1) =$$

$$\begin{aligned} &= \{01002;01012;01020;01021;01102;01112;01120;01121; \\ &\quad 01200;01201;01210;01211;02000;02001;02010;02011; \\ &\quad 02100;02101;02110;02111;10002;10012;10020;10021; \\ &\quad 10102;10112;10120;10121;10200;10201;10210;10211; \\ &\quad 11002;11012;11020;11021;11102;11112;11120;11121; \\ &\quad 11200;11201;11210;11211;12000;12001;12010;12011; \\ &\quad 12100;12101;12110;12111;20000;20001;20010;20011; \\ &\quad 20100;20101;20110;20111;21000;21001;21010;21011; \\ &\quad 21100;21101;21110;21111\} \end{aligned}$$

etcétera.

Queremos mostrar que $A(k)$ não contém retas combinatórias.

6.2 Se $x_0, \dots, x_k$ é uma reta combinatória em $C(k+1; \infty)$ e se $|x_i|_k$ denota o número de componentes iguais a k na sequência x_i ; então se verifica:

$$|x_0|_k = |x_1|_k = \dots = |x_{k-1}|_k < |x_k|_k.$$

De fato, sendo todas as seqüências finitas, podemos supor que todas elas têm o mesmo comprimento p , acrescentando zeros se for necessário.

Por ser uma reta combinatória, para cada j , $0 \leq j \leq p$,

$$\pi_j x_i = b_j \quad \forall i, 0 \leq i \leq k \quad (\text{i.e., } \pi_j = \text{"constante"})$$

$$\text{ou } \pi_j x_i = i \quad \forall i, 0 \leq i \leq k \quad (\text{i.e., } \pi_j = \text{"identidade"})$$

devendo acontecer o segundo caso pelo menos para algum j ; isto é, para algum j temos:

$$\pi_j x_0 = 0, \pi_j x_1 = 1, \dots, \pi_j x_{k-1} = k-1, \pi_j x_k = k$$

$$\text{portanto } |x_i|_k < |x_k|_k \quad \forall i, 0 \leq i \leq k-1.$$

$$\text{Resta mostrar que } |x_0|_k = |x_1|_k = \dots = |x_{k-1}|_k.$$

Primeiro caso: se $\pi_j x_0 = 0$, então temos duas possibilidades

$$\pi_j x_1 = \pi_j x_2 = \dots = \pi_j x_{k-1} = 0$$

ou $\pi_j x_1 = 1, \pi_j x_2 = 2, \dots, \pi_j x_{k-1} = k-1$.

Segundo caso: se $\pi_j x_0 = b_j \in \{1; 2; \dots; k-1\}$, então só pode ser $\pi_j x_i = b_j \quad \forall i, 1 \leq i \leq k-1$.

Terceiro caso: se $\pi_j x_0 = k$, então $\pi_j x_i = k \quad \forall i, 1 \leq i \leq k-1$.

Os dois primeiros casos mostram que se $\pi_j x_0 \neq k$, então $\pi_j x_i \neq k \quad \forall i, 1 \leq i \leq k-1$; o terceiro caso completa a prova de 6.2.

6.3 $A(k)$ não contém retas combinatórias de $C(k+1; \infty)$.

Por absurdo, suponhamos que $x_0, \dots, x_k$ seja uma reta combinatória de $C(k+1; \infty)$ contida em $A(k)$.

Por 6.2 deve verificar-se

$$n = |x_0|_k = |x_1|_k = \dots = |x_{k-1}|_k < m = |x_k|_k.$$

Portanto, segundo a observação feita em 6.1, temos que $x_0, \dots, x_{k-1}$ pertencem a $R(k; n)$ e $x_k \in R(k; m)$ ($n < m$).

Logo $x_0, \dots, x_{k-1}$ pertencem a

$$C(k+1; (n+1)k+n) \setminus C(k+1; nk+n-1)$$

e portanto para $j > (n+1)k+n$, temos $\pi_j x_i = 0 \quad \forall i, 0 \leq i \leq k-1$.

Por outro lado, $x_k \in C(k+1; (m+1)k+m) \setminus C(k+1; mk+m-1)$, e sendo $n < m$, existe j_0 , $(n+1)k+n < j_0 \leq (m+1)k+m$, tal que $\pi_{j_0} x_k \neq 0$, teríamos que existe $j_0 \geq 1$ tal que

$$\pi_{j_0} x_i = 0 \quad \forall i, 0 \leq i \leq k-1 \quad \text{e} \quad \pi_{j_0} x_k \neq 0,$$

isto é, π_{j_0} não é "constante" nem "identidade",

absurdo pois estamos supondo que $x_0, \dots, x_k$ é uma reta combinatória em $C(k+1; \infty)$.

7. $A(k)$ é grande no sentido de Erdős

7.1 É óbvio que qualquer elemento de $C(k+1;p)$ é um número natural menor do que $(k+1)^p$. Em particular, como todo elemento de $R(k;n)$ é um elemento de $C(k+1;(n+1)k+n)$, temos que para todo $a \in R(k;n)$ e $n \geq 1$

$$a < (k+1)^{(n+1)k+n}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{(k+1)^{(n+1)k+n}}.$$

e como $R(k;n)$ têm $E(k;(n+1)k+n;n) - E(k;nk+n-1;n)$ elementos, se verifica

$$\sum_{a \in R(k;n)} \frac{1}{a} > \frac{1}{(k+1)^{(n+1)k+n}} (E(k;(n+1)k+n;n) - E(k;nk+n-1;n)).$$

7.2 Denotamos $x_n = \frac{1}{(k+1)^{(n+1)k+n}} (E(k;(n+1)k+n;n) - E(k;nk+n-1;n))$

a nossa intenção é mostrar que $\sum x_n$ é divergente.

$$\text{Definimos } d(k;n) = \frac{E(k;(n+1)k+n;n)}{(k+1)^{(n+1)k+n}} = \frac{E(k;(n+1)k+n;n-1)}{(k+1)^{(n+1)k+n}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{por 3.7, parte 1} \end{array} \right)$$

(no final faremos um comentário adicional sobre $d(k;n)$).

Por 3.4, sabemos que $E(k;p+1;j) \geq kE(k;p;j)$.

Portanto

$$E(k;(n+1)k+n;n) \geq kE(k;nk+n+k-1;n) \geq k^2E(k;nk+n+k-2;n) \geq \dots$$

$$\dots \geq k^{k+1}E(k;nk+n-1;n)$$

logo

$$x_n = \frac{1}{(k+1)^{(n+1)k+n}} (E(k;(n+1)k+n;n) - E(k;nk+n-1;n)) \geq$$

$$\geq \frac{k^{k+1} - 1}{(k+1)^{(n+1)k+n}} E(k;nk+n-1;n) =$$

$$= \frac{k^{k+1} - 1}{(k+1)^{k+1}} \frac{E(k; nk+n-1; n)}{(k+1)^{nk+n-1}} = \frac{k^{k+1} - 1}{(k+1)^{k+1}} d(k; n-1)$$

isto é, $x_n \geq \frac{k^{k+1} - 1}{(k+1)^{k+1}} d(k; n-1)$.

Mostraremos que a série $\sum_n d(k; n)$ é divergente; isso provará que $\sum x_n$ diverge.

Usaremos a fórmula de Stirling (ver [1], pag. 249) que diz:

$$m! = m^{m+1/2} \sqrt{2\pi} e^{-m} e^{\theta/m}, \text{ onde } 0 \leq \theta \leq 1/12.$$

Afirmção 1. Existem $N_1 > 0$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)}\right)^{(n+1)(k+1)} > C, \text{ para } n \geq N_1.$$

Sabe-se que $\lim_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)}\right)^{(n+1)(k+1)} = \frac{1}{e}$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $C = \frac{1}{e} - \varepsilon > 0$.

Existirá $N_1 > 0$ tal que para $n \geq N_1$,

$$C = \frac{1}{e} - \varepsilon < \left(1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)}\right)^{(n+1)(k+1)} < \frac{1}{e} + \varepsilon$$

o que mostra a afirmação 1.

Afirmção 2. Existe $N_2 > 0$ tal que se $n \geq N_2$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n+1)k} + \frac{1}{n}\right)} > 1.$$

Sabemos que $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, e que $\lim_n e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n+1)k} + \frac{1}{n}\right)} = 1$.

Por outro lado, é óbvio que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$e - \varepsilon_1 > 1 + \varepsilon_1$; logo, existe $N_2 > 0$ tal que para $n \geq N_2$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e - \varepsilon_1 > 1 + \varepsilon_1 > e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n+1)k} + \frac{1}{n}\right)} > 0.$$

isto é, se $n \geq N_2$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n+1)k} + \frac{1}{n}\right)} > 1.$$

Afirmação 3. A série $\sum_n d(k;n)$ diverge.

Temos,

$$d(k;n) = \frac{E(k; (n+1)k+n; n)}{(k+1)^{(n+1)k+n}} = \frac{1}{(k+1)^{(n+1)k+n}} \frac{((n+1)k+n)! k^{(n+1)k}}{((n+1)k)! n!} =$$

$$= \frac{k^{(n+1)k}}{(k+1)^{(n+1)k+n}} \frac{((n+1)k+n)^{(n+1)k+n+1/2} \sqrt{2\pi} e^{-(n+1)k+n}}{((n+1)k)^{(n+1)k+1/2} \sqrt{2\pi} e^{-(n+1)k}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{\theta_1}{e^{(n+1)k+n}}}{\frac{\theta_2}{e^{(n+1)k}} n^{n+1/2} \sqrt{2\pi} e^{-n} \frac{\theta_3}{e^n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(n+1)k+n}{(n+1)k}} \frac{((n+1)k+n)^{(n+1)k+n}}{((n+1)k)^{(n+1)k}} \frac{k^{(n+1)k}}{(k+1)^{(n+1)k+n} n^n} \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{\theta_1}{e^{(n+1)k+n}}}{\frac{\theta_2}{e^{(n+1)k}} \frac{\theta_3}{e^n}}$$

$$\text{Como } e^{\frac{\theta_1}{(n+1)k+n}} \geq 1, e^{\frac{\theta_2}{(n+1)k}} \leq e^{\frac{1}{12((n+1)k)}}, \frac{\theta_3}{e^n} \leq \frac{1}{e^{12n}}$$

$$(\text{pois } 0 \leq \theta_i \leq \frac{1}{12}, i=1,2,3) \text{ e } \sqrt{\frac{(n+1)k+n}{(n+1)k}} > 1$$

segue que

$$d(k;n) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}} \frac{((n+1)k+n)^{(n+1)k+n}}{(n+1)^{(n+1)k+n}} \frac{(n+1)^n e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n+1)k} + \frac{1}{n}\right)}}{(k+1)^{(n+1)k+n} n^n}.$$

Observemos agora que $(n+1)k+n = (n+1)(k+1)-1$, portanto

$$\begin{aligned} d(k;n) &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}} \frac{((n+1)(k+1)-1)^{(n+1)(k+1)-1}}{((n+1)(k+1))^{(n+1)(k+1)-1}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \\ &\quad \cdot e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n+1)k} + \frac{1}{n}\right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}} \frac{(n+1)(k+1)}{(n+1)(k+1)-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)}\right)^{(n+1)(k+1)} \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n+1)k} + \frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

usando agora as afirmações 1 e 2, e o fato $\frac{(n+1)(k+1)}{(n+1)(k+1)-1} > 1$,

temos para $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$d(k;n) > \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}} C = \frac{C}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}}$$

e sendo a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente, segue-se que $\sum_n d(k;n)$

também é divergente.

7.3 $A(k)$ é grande no sentido de Erdős.

de 7.1 e 7.2, temos

$$\sum_{a \in A_1(k)} \frac{1}{a} > \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{a \in R(k;n)} \frac{1}{a} \right) > \sum_{n \geq 1} x_n$$

e portanto, $\sum_{a \in A_1(k)} \frac{1}{a}$ diverge.

8. Algumas observações sobre $d(k;n)$

8.1 O número de elementos do cubo combinatório $C(k+1;(n+1)k+n)$ que pertencem a $A(k)$ é exatamente $E(k;(n+1)k+n;n)$ e o número total de elementos deste cubo é $(k+1)^{(n+1)k+n}$; portanto,

$$d(k;n) = \frac{E(k;(n+1)k+n;n)}{(k+1)^{(n+1)k+n}}$$

é a densidade dos elementos de $A(k)$ no cubo $C(k+1;(n+1)k+n)$.

8.2 Mostraremos que $\lim_n d(k;n) = 0$.

Afirmção 4. Existe $N_3 > 0$ tal que, para $n \geq N_3$,

$$\sqrt{\frac{(n+1)k+n}{(n+1)k}} < 2, \quad \sqrt{\frac{(n+1)(k+1)}{(n+1)(k+1)-1}} < 2 \quad e$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)}\right)^{(n+1)(k+1)} \cdot e^{\frac{1}{12(n+1)(k+1)}} < 2.$$

De fato:

Para a primeira desigualdade,

$$\sqrt{\frac{(n+1)k+n}{(n+1)k}} = \sqrt{1 + \frac{n}{(n+1)k}} < \sqrt{1+1} < 2.$$

Para a segunda desigualdade,

como $2 < (n+1)(k+1)$, segue que $(n+1)(k+1) < 2(n+1)(k+1)-2$

e portanto $\frac{(n+1)(k+1)}{(n+1)(k+1)-1} < 2$.

Para a terceira desigualdade,

sabe-se que $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)}\right)^{(n+1)(k+1)} =$

$$= \frac{1}{e} \quad e \quad \lim_n e^{\frac{1}{12((n+1)k+n)}} = 1,$$

logo, para $\varepsilon > 0$, existe $N_3 > 0$ tal que se $n \geq N_3$,

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e + \varepsilon, \quad (1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)})^{(n+1)(k+1)} < \frac{1}{e} + \varepsilon \quad e$$

$$e^{\frac{1}{12((n+1)k+n)}} < 1 + \varepsilon.$$

Por outro lado, é óbvio que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon e + \frac{\varepsilon}{e} + \varepsilon^2 + \varepsilon + \varepsilon^2 e + \frac{\varepsilon^2}{e} + \varepsilon^3 < 1$$

portanto

$$(e + \varepsilon) \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right) (1 + \varepsilon) = 1 + \varepsilon e + \frac{\varepsilon}{e} + \varepsilon^2 + \varepsilon + \varepsilon^2 e + \frac{\varepsilon^2}{e} + \varepsilon^3 < 2.$$

Para $n \geq N_3$, temos:

$$(1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)})^{(n+1)(k+1)} \cdot e^{\frac{1}{12((n+1)k+n)}} <$$

$$< (e + \varepsilon) \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right) (1 + \varepsilon) < 2.$$

Afirmção 5. Para $n \geq N_3$, $d(k;n) \leq \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(isto mostra que $\lim_n d(k;n) = 0$).

De fato, usando alguns dos cálculos feitos na afirmação 3 de 7.2, temos:

$$d(k;n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{(n+1)k+n}{(n+1)k}} \frac{(n+1)(k+1)}{(n+1)(k+1)-1} \left(\frac{(n+1)(k+1)-1}{(n+1)(k+1)} \right)^{(n+1)(k+1)}.$$

$$\cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{e^{\frac{\theta_1}{(n+1)k+n}}}{e^{\frac{\theta_2}{(n+1)k}} e^{\frac{\theta_3}{n}}}$$

$$e \text{ como } 0 \leq \theta_i \leq \frac{1}{12}, \quad i=1,2,3, \quad e^{\frac{\theta_1}{(n+1)k+n}} \leq e^{\frac{1}{12((n+1)k+n)}},$$

$$e^{\frac{\theta_2}{(n+1)k}} \geq 1 \quad e \quad e^{\frac{\theta_3}{n}} \geq 1, \text{ segue-se que}$$

$$d(k;n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}} \sqrt{\frac{(n+1)k+n}{(n+1)k}} \frac{(n+1)(k+1)}{(n+1)(k+1)-1} \cdot \\ \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)(k+1)}\right)^{(n+1)(k+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12((n+1)k+n)}}.$$

Usando agora a afirmação 4,

$$d(k;n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}} (2)(2)(2) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

o que prova a afirmação 5.

8.3 Das afirmações 3 e 5, segue que

$$\frac{C}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}} \leq d(k;n) \leq \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ou seja $d(k;n) = O(n^{-1/2})$.

8.4 P.Erdős e R.L.Graham fizeram a seguinte pergunta: "Existe $r > 0$ tal que é possível escolher $\frac{r(k+1)^n}{\sqrt{n}}$ pontos sem con

ter retas combinatórias de $C(k+1;n)$?" (ver [3], pag.13)

Na afirmação 3 provamos que existem $N > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\text{para } n \geq N, \quad d(k;n) \geq \frac{C}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}}$$

isto é,

$$E(k;(n+1)k+n;n) \geq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \frac{(k+1)^{(n+1)k+n}}{\sqrt{n}} \geq \frac{C\sqrt{k+1}}{2\pi} \frac{(k+1)^{(n+1)k+n}}{\sqrt{(n+1)k+n}}$$

e sendo $E(k;(n+1)k+n;n)$ o número exato de pontos de $A(k)$ que pertencem ao cubo $C(k+1;(n+1)k+n)$, fica respondida a pergunta acima levando em conta que já foi mostrado que $A(k)$ não contém retas combinatórias.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Cálculo Vol. 1 - Serge Lang - Ao Livro Técnico S.A,
Rio de Janeiro/GB - 1973.
- [2] Ramsey Theory - Graham, R.L; Rothschild, Bruce.L; Spencer,
Joel.H - New York, John Wiley, 1980 (Wiley Interscience
Series in Discrete Mathematics).
- [3] Old and new problems and results in combinatorial number
theory - P. Erdős and R.L. Graham - L'Enseignement
Mathématique, Université de Genève, 1980 (Monographie N°28).