OPERADORES ESTRITAMENTE p -INTEGRAIS
E p -NUCLEARES

Carmen Sílvia Cardassi

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

ORIENTADORA:
Prof^a. Dra. IRACEMA MARTIN BUND

Durante a elaboração deste trabalho a autora
recebeu apoio financeiro da FAPESP.

São Paulo, abril de 1986

A meus pais,

Edmêa e Victório.

AGRADECIMENTOS

À amiga e orientadora Professora Dra. Iracema Martin Bund, pela dedicada e paciente orientação, e pelo carinho, apoio, estímulo e inestimável assistência durante todas as fases do meu curso de doutoramento;

ao Professor Dr. Joe Diestel, pela forma acolhedora e desprendida com que me recebeu na Kent State University, sugerindo questões e orientando este trabalho de pesquisa, pondo ainda à minha disposição todo seu profundo cabedal de conhecimentos;

aos Professores Dr. Richard Aron e Dr. Hans Jarchow, pelo interesse demonstrado pelos tópicos aqui abordados e por valiosas discussões e sugestões;

ao Professor Dr. Chaim Samuel Hönig, pelo empenho para que meu estágio em Kent se realizasse;

à FAPESP e ao IME-USP, que acreditaram no projeto de pesquisa a eles apresentado, e propiciaram meu estágio em Kent, onde quase todo este trabalho foi realizado;

ao Departamento de Matemática da Kent State University, especialmente ao seu chefe, Professor Dr. Olaf Stackelberg, pelas facilidades materiais e pessoais enquanto lá estive como professora visitante;

aos amigos e compadres Cléo e Raymundo Alencar e aos amigos Eleanor e Richard Aron, pela carinhosa acolhida em Kent e pelo grande apoio durante a elaboração deste trabalho;

aos amigos do IME, especialmente a Vera Helena G. de Souza, Maria Elisa G.G. Oliveira e Célia C. Góes, e aos demais amigos, pelo interesse, apoio e incentivo constantes;

e, principalmente, a meus pais e minha família, cujo carinho, apoio e estímulo incondicionais, especialmente nas fases mais difíceis, foram imprescindíveis à realização deste trabalho.

Carmen Silvia

Abril/86

ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO	i
ABSTRACT	v
NOTAÇÕES, CONVENÇÕES E ABREVIATURAS	vi
CAPÍTULO I. Operadores p-integrais, estritamente p-integrais e p-nucleares.	
1. Definições, propriedades básicas e exemplos	1
2. Estrutura de ideal e propriedade de monotonicidade de operadores p-nucleares, p-integrais e estritamente p-integrais . .	16
3. Caracterização de operadores p-nucleares, p-integrais e estritamente p-integrais por teoremas de fatoração	26
4. Algumas relações entre N_p , SI_p , I_p e outros ideais clássicos de operadores	34
CAPÍTULO II. Operadores p-integrais e estritamente p-integrais e compacidade.	
5. Condições sobre o domínio	40
6. Condições sobre o contradomínio	43
CAPÍTULO III. Sobre os espaços X tais que $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$ para todo espaço Y.	
7. Introdução	54
8. Casos $1 \leq p < \infty$	56
9. Caso $p = \infty$	62
CAPÍTULO IV. Sobre os espaços Y tais que $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$ para todo espaço X.	
10. Introdução	73
11. Casos $1 < p < \infty$	74
12. Caso $p = \infty$	88
13. Exemplos de espaços especiais Y tais que $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$ para todo p, $1 \leq p \leq \infty$	96
BIBLIOGRAFIA	97

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estabelecemos condições para que os subespaços de $L(X,Y)$ formados pelos operadores estritamente p -integrals, $SI_p(X,Y)$, e pelos operadores p -nucleares, $N_p(X,Y)$, coincidam, com igualdade das normas si_p e n_p , onde X e Y são espaços de Banach.

Nossa motivação para este estudo foi o fato de que para $p = 1$, a propriedade de Radon-Nikodym é caracterizada por essas igualdades.

TEOREMA A. Seja X um espaço de Banach. Então X^* tem a propriedade de Radon-Nikodym se e somente se $SI_1(X,Y) = N_1(X,Y)$, para todo espaço de Banach Y , com $si_1(.) = n_1(.)$.

TEOREMA B. Seja Y um espaço de Banach. Então Y tem a propriedade de Radon-Nikodym se e somente se $SI_1(X,Y) = N_1(X,Y)$ para todo espaço de Banach X , com $si_1(.) = n_1(.)$.

Os espaços de operadores estritamente p -integrals e p -nucleares, bem como suas respectivas normas si_p e n_p , para $1 \leq p \leq \infty$, foram introduzidos por Persson e Pietsch em 1969 [PP], sendo que os primeiros levavam então o nome de p -integrals. Os operadores 1-nucleares eram (e são) os operadores nucleares de Grothendieck, mas os operadores 1-integrals, como então definidos, não coincidiam com os operadores integrals de Grothendieck, passando por isso a ser chamados de Pietsch-integrals.

Nós utilizamos aqui as definições originais de [PP] e passamos a chamá-los de operadores estritamente p -integrals. Para $1 \leq p < \infty$, eles coincidem com os operadores fortemente p -integrals de [PI]. Também trabalhamos com o espaço dos operadores p -integrals de [PI], para $1 \leq p < \infty$, denotado por $I_p(X,Y)$. Entretanto, chamamos a atenção para o fato de que, quando $p = \infty$, nossos operadores estritamente ∞ -integrals e ∞ -integrals não

coincidem com os fortemente ∞ -integrals e ∞ -integrals de [PI], a razão sendo que, com a definição de Pietsch, utilizando a teoria de ideais de operadores, eles deixaram de ser automaticamente fracamente compactos, como eram originalmente.

Nossos métodos e técnicas utilizam basicamente medidas vetoriais, representação de operadores e elementos de geometria de espaços de Banach. Assumimos uma certa familiaridade do leitor com esses tópicos. Entretanto, procuramos sempre indicar pelo menos uma referência quando utilizamos resultados dessas áreas. Eventuais omissões podem ser esclarecidas com as monografias [DU], [DI], [DS] e [LT].

As definições, propriedades básicas e exemplos de operadores p -integrals, estritamente p -integrals e p -nucleares constituem nosso Capítulo I, seções 1 a 4, onde eles são introduzidos via medidas vetoriais. Apresentamos aí somente os elementos necessários ao desenvolvimento de nosso trabalho.

Sabe-se, do Teorema 4.1 (a), que $N_p(X,Y) \subset SI_p(X,Y)$, para quaisquer espaços de Banach X e Y e qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, com $si_p(.) \leq n_p(.)$. Por isso, para os problemas a que nos propusemos basta estudar condições tais que $SI_p(X,Y) \subset N_p(X,Y)$, com $n_p(.) \leq si_p(p)$.

Como todo operador p -nuclear é compacto (Teorema 4.2 (e)), uma condição necessária para $SI_p(X,Y) = N_p(X,Y)$ é que $SI_p(X,Y) \subset K(X,Y)$. Esse estudo, que constitui nosso Capítulo II, revelou-se mais frutífero do que esperávamos inicialmente, já que em diversos casos $SI_p(X,Y) \subset K(X,Y)$ acabará sendo equivalente a $SI_p(X,Y) = N_p(X,Y)$.

No Capítulo II obtemos, no Teorema 5.1, uma caracterização dos espaços X tais que $SI_p(X,Y) \subset K(X,Y)$, para todo espaço Y , através de uma condição que é independente de p , $1 \leq p \leq \infty$. Precisamente, são os espaços X tais que X^* tem a propriedade fraca

iii.

de Radon-Nikodym, ou equivalentemente, $X \not\in \mathcal{L}_1$. Ainda no Capítulo II temos, nos Teoremas 6.9 e 6.11, caracterizações aos espaços Y tais que $SI_p(X,Y) \subset K(X,Y)$, para todo espaço X , respectivamente para $p = \infty$ e para $2 \leq p < \infty$. Quando Y é um espaço dual, obtemos uma descrição dos espaços Y tais que $SI_p(X,Y) \subset K(X,Y)$, para todo espaço X , no Teorema 6.13. Quando Y não é um dual e $p = 1$, ou quando $1 < p < 2$ ainda não temos uma resposta completa. Diversas condições necessárias ou suficientes são dadas nos Teoremas 6.1, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.12 e no Corolário 6.8, cada um valendo em algum subconjunto de índices p , $1 \leq p \leq \infty$.

Abordamos no Capítulo III o problema da coincidência, independentemente do espaço Y , de $SI_p(X,Y)$ com $N_p(X,Y)$, com igualdade das normas si_p e n_p . Obtemos, nos Teoremas 8.3 e 9.2 ou 9.3, que, como no caso $p = 1$, X^* com a propriedade de Radon-Nikodym é condição suficiente para $SI_p(X,Y) = N_p(X,Y)$, para todo espaço Y , com $si_p = n_p$, para $1 < p \leq \infty$. Esse resultado já era conhecido para $1 < p < \infty$ e nosso trabalho restringiu-se ao caso $p = \infty$. Como condição necessária, proveniente do Teorema 5.1, X^* deve ter a propriedade fraca de Radon-Nikodym (ou $X \not\in \mathcal{L}_1$). Ainda não temos uma condição simultaneamente necessária e suficiente para o caso geral. Entretanto, se X^* é complementado num reticulado de Banach, X^* com a propriedade de Radon-Nikodym e $X \not\in \mathcal{L}_1$ são equivalentes, o que nos dá uma caracterização completa dessa situação, apresentada no Teorema 9.5. Classes importantes de espaços de Banach estão incluídas aqui, tais como: espaço $C(K)$, espaços $L_p(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$, espaços de Lorentz, espaços de Orlicz, espaços de Marcinkiewicz e espaços com base incondicional, pois são todos reticulados de Banach.

No Capítulo IV estudamos os espaços Y tais que $SI_p(X,Y) = N_p(X,Y)$, independentemente do espaço X , com $si_p = n_p$.

iv.

Caracterizamos os espaços Y com essa propriedade para $2 \leq p < \infty$ e para $p = \infty$ nos Teoremas 11.9 e 12.6. É interessante notar que essas classes de espaços coincidem com as já vistas nos Teoremas 6.11 e 6.9, respectivamente, ou seja, a condição para a p -nuclearidade de todos os operadores estritamente p -integrals é equivalente à condição para a compacidade de todos eles quando $2 \leq p < \infty$ ou $p = \infty$. Isto se choca frontalmente com o caso $p = 1$, onde a 1-nuclearidade e a compacidade de todos os operadores estritamente 1-integrals não são equivalentes como mostram o Teorema 10.1 (ou Teorema B) e o Teorema 6.13. Aliás, os casos $p > 1$ diferem mesmo radicalmente do caso $p = 1$, pois Y ter a propriedade de Radon - Nikodym não é condição suficiente nem necessária para $SI_p(X,Y) = N_p(X,Y)$, como mostram os Exemplos 11.4 e 11.5. Os casos $1 < p < 2$ ainda não estão completamente esclarecidos. Temos condições necessárias ou suficientes para esses e os outros casos nos Teoremas 11.2, 11.6 e 12.5 e Corolários 11.3, 12.3, 12.4 e 12.7. Apesar da diferença dos casos $p = 1$ e $p > 1$, existem espaços Y que satisfazem $SI_p(X,Y) = N_p(X,Y)$, para todo espaço X e para todo p , $1 \leq p \leq \infty$. Diversos exemplos são apresentados na seção 13.

Queremos acrescentar que continuamos estudando os casos ainda não completamente esclarecidos neste trabalho, visando sua solução completa.

ABSTRACT

In this work we establish conditions under which $SI_p(X,Y)$ and $N_p(X,Y)$ coincide, for $1 < p \leq \infty$, where $SI_p(X,Y)$ and $N_p(X,Y)$ denote respectively the spaces of strictly p -integral and p -nuclear operators between the Banach spaces X and Y . Also, $si_p(.)$ and $n_p(.)$ denote their respective norms.

It is well-known that the Radon-Nikodym property (RNP, for short) can be characterized by the coincidence of SI_1 and N_1 .

THEOREM A. X^* has RNP $\iff SI_1(X,.) = N_1(X,.)$, with $si_1 = n_1$.

THEOREM B. Y has RNP $\iff SI_1(.,Y) = N_1(.,Y)$, with $si_1 = n_1$.

We obtain results which are similar to Theorem A, namely, that if X^* has RNP, then $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$, with $si_p = n_p$, for $1 < p \leq \infty$. We also get that $SI_p(X,.) \subset K(X,.)$, for one or every p , $1 \leq p \leq \infty$, is equivalent to X^* having the weak Radon-Nikodym property (or $X \not\cong \ell_1$).

On the other hand, the situation is completely different when we try to generalize Theorem B for $p > 1$. Y having RNP is neither sufficient nor necessary to get $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$. We present a necessary and sufficient condition for $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, for one or every p , $2 \leq p < \infty$, and for $p = \infty$. These conditions happen to be equivalent to $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$. This stresses the difference between $p=1$ and $p > 1$, since $SI_1(.,Y) = N_1(.,Y)$ is not equivalent to $SI_1(.,Y) \subset K(.,Y)$.

NOTAÇÕES, CONVENÇÕES E ABREVIATURAS

Ao longo deste trabalho, usaremos diversas notações, convenções e abreviaturas; para facilitar, vamos apresentá-las todas aqui no início. Assim,

$\mathbb{K}$ é o corpo de escalares, podendo ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

X, Y, Z, W denotam espaços de Banach e X^*, Y^*, Z^*, W^* , seus respectivos duais topológicos;

B_X é a bola unitária fechada de X ;

B_{X^*} é a bola unitária fechada de X^* e estará sempre munida da topologia fraca*, sendo assim um espaço compacto Hausdorff;

$\langle x^*, x \rangle$ denota a ação do funcional $x^* \in X^*$ sobre o elemento $x \in X$;

"operador" significa aplicação linear contínua;

$L(X, Y)$, $K(X, Y)$, $W(X, Y)$ e $C(X, Y)$ denotam, respectivamente, os espaços de todos os operadores, dos operadores compactos, dos operadores fracamente compactos e dos operadores completamente contínuos de X em Y ;

"subespaço" é sempre subespaço fechado;

$X \supset Y$ significa que X contém um subespaço isomorfo a Y , mas frequentemente omitiremos o isomorfismo, assumindo que o próprio Y é subespaço de X ; analogamente $X \not\supset Y$ significa que nenhum subespaço de X é isomorfo a Y ;

"RNP" é abreviatura para a propriedade de Radon-Nikodym;

"wRNP" é abreviatura para a propriedade fraca de Radon-Nikodym;

$\{x_n\}$ denota uma seqüência de elementos de X ;

vii.

$\lim_n x_n$ é $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, onde $\{x_n\}$ é uma seqüência em X ;

$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ e $x_n \xrightarrow{w} x_0$ indicam a convergência em norma e na topologia fraca, respectivamente, da seqüência $\{x_n\}$ para o elemento x_0 ;

$\sup_i a_i$ ou $\sup_{i \in I} a_i$ e $\inf_i a_i$ ou $\inf_{i \in I} a_i$ denotam respectivamente o supremo e o ínfimo do conjunto $\{a_i: i \in I\}$, onde $a_i \in \mathbb{K}$ e I é um conjunto de índices;

$\sum_n x_n$ e $\sum_{n > k} x_n$ abreviam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=k+1}^{\infty} x_n$, respectivamente, onde $\{x_n\}$ é uma seqüência de X ;

$[x_n]$ é o subespaço de X gerado pela seqüência $\{x_n\}$ em X ;

c_0 é $c_0(\mathbb{N})$;

ℓ_p é $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$;

dado p , $1 \leq p \leq \infty$, q é seu expoente conjugado, isto é, $1/p + 1/q = 1$, se $1 < p < \infty$, $q = \infty$, se $p = 1$, e $q = 1$, se $p = \infty$;

$C(K)$ é o espaço de funções escalares contínuas definidas no espaço compacto Hausdorff K ;

$\mathcal{B}(K)$ é a σ -álgebra dos borelianos do espaço compacto Hausdorff K ;

$\text{rca}(\mathcal{B}(K))$ é o conjunto das medidas escalares σ -aditivas e regulares definidas em $\mathcal{B}(K)$;

(Ω, Σ, μ) , que chamamos no texto simplesmente de espaço de medida finita, é sempre constituída de um conjunto Ω , sendo Σ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , sobre a qual está definida uma medida escalar σ -aditiva finita e positiva μ ; quando Ω é um espaço compacto Hausdorff, μ será também regular;

$L_p(\mu)$ ou $L_p(\Omega, \mu)$ e $L_p(\mu; X)$ ou $L_p(\Omega, \mu; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, são abreviaturas para $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ e $L_p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$, respectivamente;

χ_E é a função característica de um conjunto E ;

$\|G\|(\Omega)$ é a semi-variação de uma medida vetorial G definida em Σ ;

"□" indica o fim de uma demonstração.

CAPÍTULO I

OPERADORES p -NUCLEARES, p -INTEGRAIS E ESTRITAMENTE p -INTEGRAIS

Neste capítulo introduziremos as noções de operadores p -nucleares, p -integrais e estritamente p -integrais, para $1 \leq p \leq \infty$, bem como algumas de suas propriedades mais importantes. Limita - mo-nos aqui aos elementos básicos e necessários ao desenvolvimento de nosso trabalho. Muito mais informação sobre eles pode ser encontrada na literatura.

1. DEFINIÇÕES, PROPRIEDADES BÁSICAS E EXEMPLOS.

DEFINIÇÃO 1.1. Uma aplicação linear $T: X \rightarrow Y$ é p -nuclear, $1 \leq p \leq \infty$, se existem seqüências $\{x_n^*\}$ em X^* e $\{y_n\}$ em Y tais que

- (i) $Tx = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle y_n$, para todo $x \in X$;
- (ii) $\sum_n \|x_n^*\|^p < \infty$, se $1 \leq p < \infty$,

e

$$\lim_n \|x_n^*\| = 0, \text{ se } p = \infty;$$

$$(iii) \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sup_n | \langle y^*, y_n \rangle | \right) = \sup_n \|y_n\| < \infty, \text{ se } p = 1,$$

e

$$\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n | \langle y^*, y_n \rangle |^q \right)^{1/q} < \infty, \text{ se } 1 < p \leq \infty,$$

onde q é o expoente conjugado de p .

Neste caso a norma p -nuclear de T é dada por

$$n_1(T) = \inf \left\{ \left(\sum_n \|x_n^*\| \right) \sup_n \|y_n\| \right\}, \text{ se } p = 1,$$

$$n_p(T) = \inf \left\{ \left(\sum_n \|x_n^*\|^p \right)^{1/p} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n | \langle y^*, y_n \rangle |^q \right)^{1/q} \right\}, \text{ se } 1 < p < \infty,$$

e

$$n_\infty(T) = \inf \left\{ \left(\sup_n \|x_n^*\| \right) \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n | \langle y^*, y_n \rangle | \right\}, \text{ se } p = \infty,$$

onde os ínfimos são tomados sobre todas as possíveis representações de T como em (i), satisfazendo (ii) e (iii).

Denotamos por $N_p(X, Y)$ o conjunto das aplicações lineares p -nucleares de X em Y .

DEFINIÇÃO 1.2. Sejam K um espaço compacto Hausdorff, $\mathcal{B}(K)$ a σ -álgebra dos borelianos de K , e $C(K)$ o espaço de funções escalares contínuas definidas em K .

Dizemos que uma medida vetorial σ -aditiva $G: \mathcal{B}(K) \rightarrow Y$ é p -majorada, $1 \leq p < \infty$, se existe uma medida escalar μ tal que

$$(i) \mu: \mathcal{B}(K) \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ e } \mu \in rca(\mathcal{B}(K));$$

$$(ii) \left\| \int_K f dG \right\| \leq \left[\int_K |f(t)|^p d\mu(t) \right]^{1/p}, \text{ para toda } f \in C(K).$$

Neste caso, a norma p-majorada de G é dada por

$$\mu_p(G) = \inf \{ \mu(K)^{1/p} : \mu \text{ satisfaz (i) e (ii)} \}.$$

A seguir definiremos o que Persson e Pietsch originalmente chamaram de operadores p-integrais, em 1969 [PP]. Nós os chamaremos aqui estritamente p-integrais, a razão do "estritamente" ficando clara após a Definição 1.4.

Lembramos que B_{X^*} , como domínio de funções, estará sempre munido da topologia fraca*, sendo assim um espaço compacto Hausdorff.

DEFINIÇÃO 1.3. Uma aplicação linear $T: X \rightarrow Y$ é estritamente p-integral, $1 \leq p < \infty$, se existe uma medida vetorial G tal que

(i) $G : \mathcal{O}(B_{X^*}) \rightarrow Y$ e G é p-majorada;

(ii) $Tx = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dG(x^*)$, para todo $x \in X$.

Neste caso, a norma estritamente p-integral de T é dada por

$$si_p(T) = \{ \inf \mu_p(G) : G \text{ satisfaz (i) e (ii)} \}.$$

Uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é estritamente ∞ -integral se existe uma medida vetorial G tal que

(i) $G : \mathcal{O}(B_{X^*}) \rightarrow Y$ e G é σ -aditiva;

(ii) $Tx = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dG(x^*)$, para todo $x \in X$.

Neste caso, a norma estritamente ∞ -integral de T é dada por

$$si_{\infty}(T) = \inf \{ \|G\| (B_X^*) : G \text{ satisfaz (i) e (ii)} \}.$$

Denotamos por $SI_p(X,Y)$ o conjunto das aplicações lineares estritamente p -integrals de X em Y .

DEFINIÇÃO 1.4. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é p -integral, $1 \leq p \leq \infty$, se $J_Y \circ T : X \longrightarrow Y^{**}$ é estritamente p -integral, onde J_Y é a injeção canônica de Y em Y^{**} .

Neste caso, a norma p -integral de T é dada por

$$i_p(T) = si_p(J_Y \circ T).$$

Denotamos por $I_p(X,Y)$ o conjunto das aplicações lineares p -integrals de X em Y .

Cabe aqui um comentário a respeito das aplicações lineares estritamente p -integrals, $1 \leq p < \infty$. A definição de medida p -majorada garante que a aplicação linear $S : C(K) \longrightarrow Y$, dada por $Sf = \int f dG$, para toda $f \in C(K)$, é contínua quando consideramos $C(K)^K$ munido da norma $\| \cdot \|_p$ relativa ao espaço de medida $(K, \mathcal{B}(K), \mu)$, onde μ é qualquer medida satisfazendo as condições da Definição 1.2. Por isso, S admite uma extensão contínua, por densidade, a $L_p(K, \mathcal{B}(K), \mu)$. Como veremos na seção 3, essa é exatamente a caracterização das aplicações lineares estritamente p -integrals, para $1 \leq p < \infty$. O mesmo acontece com as aplicações p -integrals, $1 \leq p < \infty$, com a ressalva de considerarmos S a valores em Y^{**} em vez de Y .

Também é conveniente observar que as aplicações lineares estritamente p -integrals, $1 \leq p < \infty$, são chamadas de fortemente p -integrals, $1 \leq p < \infty$ no livro de Pietsch [PI] e que as aplicações lineares p -integrals, $1 \leq p < \infty$, coincidem com os ope

radores p -integrais do mesmo livro. Mas esse não é mais o caso quando $p = \infty$.

Nossas aplicações ∞ -integrais e estritamente ∞ -integrais não são os operadores ∞ -integrais e fortemente ∞ -integrais, respectivamente, como definidos por Pietsch [PI]. Isto se dá por que exigimos a σ -aditividade da medida vetorial G , coisa que ele não faz. Achamos mais natural assim proceder, já que as medidas p -majoradas são sempre σ -aditivas e, em certo sentido, o "limite" da p -majoração, quando p tende a infinito, deve ao menos manter a σ -aditividade.

As aplicações lineares p -nucleares, p -integrais e estritamente p -integrais são contínuas, como mostra o seguinte teorema.

TEOREMA 1.5. Para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, temos:

- (a) $N_p(X, Y) \subset L(X, Y)$ e $\| \cdot \| \leq n_p(\cdot)$;
- (b) $SI_p(X, Y) \subset L(X, Y)$ e $\| \cdot \| \leq si_p(\cdot)$;
- (c) $I_p(X, Y) \subset L(X, Y)$ e $\| \cdot \| \leq i_p(\cdot)$.

PROVA.

(a). Seja $Tx = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle y_n$, $x \in X$, uma representação de T , com

$$\sum_n \|x_n^*\|^p < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\lim_n \|x_n^*\| = 0, \text{ se } p = \infty,$$

e

$$\sup_n \|y_n\| < \infty, \text{ se } p = 1,$$

e

$$\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q \right)^{1/q} < \infty, \text{ se } 1 < p \leq \infty.$$

Para $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |\langle y^*, Tx \rangle| \leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n |\langle x_n^*, x \rangle| |\langle y^*, y_n \rangle| \\ &\leq \|x\| \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n \|x_n^*\| |\langle y^*, y_n \rangle| \\ &\leq \begin{cases} \|x\| \left(\sum_n \|x_n^*\| \right) \sup_n \|y_n\|, & \text{se } p = 1, \\ \|x\| \left(\sum_n \|x_n^*\|^p \right)^{1/p} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q \right)^{1/q}, & \text{se } 1 < p < \infty, \\ \|x\| \left(\sup_n \|x_n^*\| \right) \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|, & \text{se } p = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto $\|Tx\| \leq \|x\| n_p(T)$, para todo $x \in X$ e $T \in L(X, Y)$, com $\|T\| \leq n_p(T)$.

(b). Seja $G : \mathcal{B}(B_{X^*}) \rightarrow Y$ uma medida vetorial p -majorada se $1 \leq p < \infty$ e σ -aditiva se $p = \infty$, tal que

$$Tx = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dG(x^*), \quad \text{para todo } x \in X.$$

Para $x \in X$, consideremos $f_x : B_{X^*} \rightarrow K$ dada por $f_x(x^*) = \langle x^*, x \rangle$, para todo $x^* \in B_{X^*}$.

Temos que $f_x \in C(B_{X^*})$ e

$$|f_x(x^*)| \leq \|f_x\|_\infty = \|x\|, \text{ para todo } x^* \in B_{X^*}.$$

Então

$$\|Tx\| = \left\| \int_{B_{X^*}} f_X(x^*) dG(x^*) \right\| \leq \begin{cases} \left[\int_{B_{X^*}} |f_X|^p d\mu \right]^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \|f_X\|_{\infty} \|G\|(B_{X^*}), & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \|x\| \mu(B_{X^*})^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \|x\| \|G\|(B_{X^*}), & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

onde μ é qualquer uma das medidas escalares satisfazendo a Definição 1.2.

Logo, $\|Tx\| \leq \|x\| si_p(T)$, para todo $x \in X$, e $T \in L(X, Y)$, com $\|T\| \leq si_p(T)$.

(c). Segue de (b), pois $T \in L(X, Y)$ se e somente se $J_Y \circ T \in L(X, Y^{**})$ e além disso, $\|T\| = \|J_Y \circ T\|$ e $i_p(T) = si_p(J_Y \circ T)$. $\square$

Em vista do Teorema 1.5, passaremos a falar em operadores p -nucleares, p -integrais e estritamente p -integrais, em vez de aplicações lineares.

Nosso próximo resultado é que $N_p(X, Y)$, $SI_p(X, Y)$ e $I_p(X, Y)$ são na verdade espaços de Banach quando munidos de suas respectivas normas n_p , si_p e i_p . Não apresentaremos a demonstração aqui; ela pode ser encontrada em [PP - Teoremas 2 e 12 e página 54].

TEOREMA 1.6. Para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, temos:

(a) $N_p(X, Y)$ com a norma n_p é um espaço de Banach;

(b) $SI_p(X,Y)$ com a norma si_p é um espaço de Banach;

(c) $I_p(X,Y)$ com a norma i_p é um espaço de Banach.

Passaremos agora a ver alguns exemplos. Os Exemplos 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 e 1.11 são canônicos, como veremos na seção 3.

EXEMPLO 1.7. Operadores p-nucleares canônicos, $1 \leq p < \infty$.

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\delta = \{\delta_n\} \in \ell_p$ fixados e consideremos $\Delta_p : \ell_\infty \rightarrow \ell_p$ dado por

$$\Delta_p \{a_i\} = \{a_i \delta_i\}, \text{ para } \{a_i\} \in \ell_\infty.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, definindo $x_n^* \in \ell_\infty^*$ por $x_n^* = \delta_n e_n$, onde e_n é o n-ésimo vetor da base canônica de ℓ_1 , temos $\|x_n^*\| = \|\delta_n e_n\|_1 = |\delta_n|$, e portanto

$$\sum_n \|x_n^*\|^p = \sum_n |\delta_n|^p = \|\delta\|_p^p.$$

Se $1 \leq p < \infty$ e $b = \{b_n\} \in \ell_q = \ell_p^*$, temos

$$\sum_n |\langle b, e_n \rangle|^q = \sum_n |b_n|^q = \|b\|_q^q,$$

e portanto

$$\sup_{b \in B_{\ell_p^*}} \left(\sum_n |\langle b, e_n \rangle|^q \right)^{1/q} = 1,$$

onde agora consideramos e_n como elemento de ℓ_p .

Se $p = 1$ (e $q = \infty$) e $b = \{b_n\} \in \ell_1^* = \ell_\infty$, temos

$$\sup_n |\langle b, e_n \rangle| = \sup_n |b_n| = \|b\|_\infty,$$

e portanto

$$\sup_{b \in B_{\ell_1^*}} \left(\sup_n |\langle b, e_n \rangle| \right) = 1.$$

Então $\Delta_p \{a_i\} = \sum_n \langle x_n^*, \{a_i\} \rangle e_n$, para todo $\{a_i\} \in \ell_\infty$, com $\{x_n^*\}$ em ℓ_∞^* e $\{e_n\}$ em ℓ_p satisfazendo (ii) e (iii) da Definição 1.1.

Portanto Δ_p é p-nuclear, com $n_p(\Delta_p) \leq \|\delta\|_p$. Realmente temos $n_p(\Delta_p) = \|\delta\|_p$, como é fácil ver.

EXEMPLO 1.8. Operadores ∞ -nucleares canônicos.

Consideremos $\Delta_\infty: \ell_\infty \rightarrow c_0$, dado por

$$\Delta_\infty \{a_i\} = \{a_i \delta_i\}, \text{ para } \{a_i\} \in \ell_\infty,$$

onde $\delta = \{\delta_n\} \in c_0$ é um elemento fixado.

Como no Exemplo 1.7, considerando $x_n^* \in \ell_\infty^*$, dado por $x_n^* = \delta_n e_n$, temos $\|x_n^*\| = \|\delta_n e_n\|_1 = |\delta_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\lim_n \|x_n^*\| = 0$.

Se $b = \{b_n\} \in c_0^* = \ell_1$,

$$\sum_n |\langle b, e_n \rangle| = \sum_n |b_n| = \|b\|_1$$

e portanto

$$\sup_{b \in B_{c_0^*}} \sum_n |\langle b, e_n \rangle| = 1,$$

onde e_n é o n-ésimo vetor da base canônica de c_0 .

Novamente, $\{x_n^*\}$ em ℓ_∞^* e $\{e_n\}$ em c_0 satisfazem (ii) e (iii) da Definição 1.1 e como $\Delta_\infty \{a_i\} = \sum_n \langle x_n^*, \{a_i\} \rangle e_n$, para todo $\{a_i\} \in \ell_\infty$, temos que Δ_∞ é um operador ∞ -nuclear com $n_\infty(\Delta_\infty) \leq \|\delta\|_\infty$. É também fácil ver que $n_\infty(\Delta_\infty) = \|\delta\|_\infty$.

EXEMPLO 1.9. Operadores estritamente p-integrais canônicos, $1 \leq p < \infty$.

Sejam K um espaço compacto Hausdorff e $\mu \in rca(\mathcal{B}(K))$,

com μ positiva. Para cada p , $1 \leq p < \infty$, consideremos a injeção canônica $J_p : C(K) \longrightarrow L_p(K, \mu)$.

Podemos representar facilmente J_p como uma integral, $J_p f = \int_K f dF$, para $f \in C(K)$, onde $F : \mathcal{B}(K) \longrightarrow L_p(K, \mu)$ é dada por $F(E) = \chi_E$, para $E \in \mathcal{B}(K)$. Em particular, esta representação mostra que J_p é fracamente compacto, já que F tem valores em $L_p(K, \mu)$ e o domínio é $C(K)$ [DU - VI.2.5]. O problema é que, para mostrar que $J_p \in SI_p(C(K), L_p(K, \mu))$, precisamos representar J_p como uma integral sobre $B_{C(K)}^*$ e não sobre K .

Para atingir nosso objetivo, estabelecemos correspondências entre K e $B_{C(K)}^*$ e entre $C(K)$ e $C(B_{C(K)}^*)$.

A cada $t \in K$ associamos $\delta_t \in B_{C(K)}^*$, a medida avaliação no ponto t .

Definimos também $S : C(K) \longrightarrow C(B_{C(K)}^*)$ por $\langle Sf, v \rangle = \langle v, f \rangle = \int_K f d v$, para $f \in C(K)$ e $v \in B_{C(K)}^*$. É claro que S é uma isometria linear bijetora e que

$$(S^{-1} g)(t) = \langle \delta_t, g \rangle, \text{ para } g \in C(B_{C(K)}^*) \text{ e } t \in K.$$

A igualdade

$$\langle \hat{\mu}, g \rangle = \langle \mu, S^{-1} g \rangle, \text{ para } g \in C(B_{C(K)}^*),$$

define $\hat{\mu} \in C(B_{C(K)}^*)^*$, de modo que $\hat{\mu}$ herda todas as propriedades de μ , ou seja, $\hat{\mu} \in rca(\mathcal{B}(B_{C(K)}^*))$ e $\hat{\mu}$ é positiva. Mais ainda, $\hat{\mu}(B_{C(K)}^*) = \mu(K)$.

Consideremos agora $J_p \circ S^{-1} : C(B_{C(K)}^*) \longrightarrow L_p(K, \mu)$. Como J_p é fracamente compacto, $J_p \circ S^{-1}$ também o é, e como tal, é representável por uma medida vetorial σ -aditiva

$$G : \mathcal{B}(B_{C(K)}^*) \longrightarrow L_p(K, \mu) \text{ [DU- VI. 2.5]}. \text{ Temos então}$$

$$(J_p \circ S^{-1})(g) = \int_{B_{C(K)^*}} g(v) dG(v), \text{ para toda } g \in C(B_{C(K)^*}),$$

e portanto

$$J_p(f) = (J_p \circ S^{-1})(Sf) = \int_{B_{C(K)^*}} Sf(v) dG(v) = \int_{B_{C(K)^*}} \langle Sf, v \rangle dG(v)$$

$$= \int_{B_{C(K)^*}} \langle v, f \rangle dG(v), \text{ para toda } f \in C(K),$$

Além disso, G é p -majorada, com $\mu_p(G) \leq \mu(K)^{1/p}$, pois

$$\left\| \int_{B_{C(K)^*}} g dG \right\|_p = \|J_p \circ S^{-1}(g)\|_p = \|S^{-1}g\|_p = \left[\int_K |(S^{-1}g)(t)|^p d\mu(t) \right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_{B_{C(K)^*}} |g(v)|^p d\hat{\mu}(v) \right]^{1/p}, \text{ para toda } g \in C(B_{C(K)^*}),$$

e

$$\hat{\mu}(B_{C(K)^*}) = \mu(K).$$

Logo, $J_p \in SI_p(C(K), L_p(K, \mu))$, com $si_p(J_p) \leq \mu_p(G) \leq \mu(K)^{1/p}$.

Por outro lado, $\mu(K)^{1/p} \leq \|J_p\| \leq si_p(J_p)$ e portanto $si_p(J_p) = \mu(K)^{1/p}$.

EXEMPLO 1.10. Operadores estritamente ∞ -integrais canônicos.

Temos $SI_\infty(C(K), Y) = W(C(K), Y)$, para quaisquer espaço compacto Hausdorff K e espaço de Banach Y .

De fato, operadores fracamente compactos em espaços $C(K)$ correspondem a medidas vetoriais σ -aditivas definidas em $\mathcal{B}(K)$ [DU-VI.2.5]. Usando o mesmo argumento do Exemplo 1.9, essas medidas correspondem a medidas vetoriais σ -aditivas em $\mathcal{B}(B_{C(K)^*})$.

Temos ainda $si_\infty(T) = \|T\| = \|G\|(K)$, onde G é a medida representante de T .

EXEMPLO 1.11. Para cada p , $1 \leq p < \infty$, a injeção canônica de $L_\infty(\Omega, \mu)$ em $L_p(\Omega, \mu)$ é estritamente p -integral e operadores fracamente compactos definidos em $L_\infty(\Omega, \mu)$ são estritamente ∞ -integrais, para qualquer espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

Usaremos indistintamente o símbolo J_p para as inclusões de $C(K)$ em $L_p(K, \mu)$ ou de $L_\infty(\Omega, \mu)$ em $L_p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p < \infty$.

O próximo exemplo terá um papel muito importante neste trabalho. Para demonstrar as propriedades enunciadas, necessitaremos de resultados das seções 2 e 4. Também usaremos as funções de Rademacher e o espaço $\ell_\infty(B_{Z_*})$, cujas definições serão lembradas no momento oportuno.

EXEMPLO 1.12. A inclusão canônica $i : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ tem as seguintes propriedades:

- (a) $i \notin K(\ell_1, \ell_2)$;
- (b) $i \in SI_p(\ell_1, \ell_2)$ para todo p , $1 < p \leq \infty$;
- (c) $i \in I_p(\ell_1, \ell_2)$, para todo p , $1 < p \leq \infty$;
- (d) $i \notin SI_1(\ell_1, \ell_2)$;
- (e) $K_{\ell_2} \circ i \in SI_1(\ell_1, \ell_\infty(B_{\ell_2}))$, onde K_{ℓ_2} é a injeção canônica de ℓ_2 em $\ell_\infty(B_{\ell_2})$;
- (f) $K_{\ell_2} \circ i \notin K(\ell_1, \ell_\infty(B_{\ell_2}))$.

PROVA.

(a). É óbvio, já que a base canônica de ℓ_1 é uma sequência limitada em ℓ_1 que é levada por i na base canônica de ℓ_2 , que não tem subsequência convergente em ℓ_2 .

(b). Seja p , $1 < p < \infty$ fixado. Sabemos que ℓ_2 é isomorfo a um subespaço complementado de $L_p [0,1]$, precisamente ao subespaço gerado pela sequência $\{r_n\}$ das funções de Rademacker, que são dadas por $r_n(t) = \text{sgn} \sin 2^n \pi t$, para $t \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$ [LT - página 72].

Consideremos a projeção $B : L_p [0,1] \longrightarrow \ell_2$, que é dada por

$$Bf = \left\{ \int_0^1 f(t) r_n(t) dt \right\}, \text{ para } f \in L_p [0,1].$$

Temos $\|B\| \leq 1$.

Seja também $A : \ell_1 \longrightarrow L_\infty [0,1]$, definido por

$$A \{a_n\} = \sum_n a_n r_n, \text{ para } \{a_n\} \in \ell_1.$$

É claro que A é linear contínuo, com $\|A\| \leq 1$.

Então temos $i = B \circ J_p \circ A$. Como $J_p \in SI_p(L_\infty [0,1], L_p [0,1])$, pela estrutura de ideal de SI_p (Teorema 2.2), temos que $i \in SI_p(\ell_1, \ell_2)$.

Como $SI_p(X,Y) \subset SI_\infty(X,Y)$ para $1 \leq p \leq \infty$ (Teorema 2.6), também $i \in SI_\infty(\ell_1, \ell_2)$.

(c). Temos $SI_p(X, Y) \subset I_p(X, Y)$ para $1 \leq p \leq \infty$, como se vê pelas Definições 1.3 e 1.4. O resultado segue então de (b).

(d). Aqui precisamos lembrar que, como ℓ_2 tem a propriedade de Radon - Nikodym, $SI_1(X, \ell_2) = N_1(X, \ell_2)$, para qualquer espaço de Banach X [DU-VI. 4.8]. Também $N_1(X, Y) \subset K(X, Y)$ (Teorema 4.2). No caso particular de $X = \ell_1$, se i fosse estritamente 1-integral, então i seria compacto, o que não acontece, como vimos no item (a). Logo, $i \notin S_1(\ell_1, \ell_2)$.

(e). Vamos mostrar inicialmente que i é absolutamente 1-somante, ou seja $i \in \Pi_1(\ell_1, \ell_2)$.

Consideremos $a^1, a^2, \dots, a^m \in \ell_1$ e mostremos que

$$\sum_{k=1}^m \|a^k\|_2 \leq K \cdot \sup_{y^* \in B_{\ell_1^*}} \sum_{k=1}^m |\langle y^*, a^k \rangle|$$

para alguma constante K independente de $a^1, \dots, a^m$ e de m .

Sejam $a^k = \{a_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$, $1 \leq k \leq m$. Para $F \subset \mathbb{N}$ finito, temos, pela Desigualdade de Khinchine [LT-2.b.3],

$$\left(\sum_{n \in F} |a_n^k|^2 \right)^{1/2} \leq K \int_0^1 \left| \sum_{n \in F} a_n^k r_n(t) \right| dt, \text{ para cada } k,$$

$1 \leq k \leq m$, onde K é uma constante independente de a^k , $1 \leq k \leq m$, e do conjunto F e $\{r_n\}$ é a sequência das funções de Rademacher.

Para cada $t \in [0,1]$, consideremos $b_t = \{b_n^t\}_{n \in \mathbb{N}} \in B_{\ell_1}^*$
 $= B_{\ell_\infty}$, dado por $b_n^t = r_n(t) \cdot x_F(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então

$$\sum_{k=1}^m \left| \sum_{n \in F} a_n^k r_n(t) \right| = \sum_{k=1}^m |\langle b^t, a^k \rangle| \leq \sup_{y^* \in B_{\ell_1}^*} \sum_{k=1}^m |\langle y^*, a^k \rangle|,$$

para todo $t \in [0,1]$.

Logo,

$$\sum_{k=1}^m \left(\sum_{n \in F} |a_n^k|^2 \right)^{1/2} \leq K \cdot \sup_{y^* \in B_{\ell_1}^*} \sum_{k=1}^m |\langle y^*, a^k \rangle|.$$

Como isso vale para qualquer $F \subset \mathbb{N}$ finito, e o segundo termo é independente de F , temos que

$$\sum_{k=1}^m \|a^k\|_2 \leq K \cdot \sup_{y^* \in B_{\ell_1}^*} \sum_{k=1}^m |\langle y^*, a^k \rangle|.$$

Sendo i absolutamente 1-somante, pelo Teorema de Domi-
 ção de Grothendieck-Pietsch [DI - página 60] existem uma medida
 $\mu \in \text{rca}(\mathcal{B}(B_{\ell_1}^*)), \mu$ positiva e $\mu(B_{\ell_1}^*) = 1$, e uma constante $\pi_1(i)$
 tais que

$$\|\{a_n\}\|_2 \leq \pi_1(i) \int_{B_{\ell_1}^*} \left| \sum_n a_n b_n \right| d\mu(\{b_n\}) \quad , \text{ para } \{a_n\} \in \ell_1.$$

Consideremos o operador $A : \ell_1 \longrightarrow L_\infty(B_{\ell_1}^*, \mu)$, dado
 por

$$(A\{a_n\})(\{b_n\}) = \sum_n a_n b_n \text{ para } \{a_n\} \in \ell_1 \text{ e } \{b_n\} \in B_{\ell_1}^*.$$

É claro que A é linear contínuo, pois $\|A\{a_n\}\|_\infty = \|\{a_n\}\|_1$.

Seja também $R : J_1 \circ A(\ell_1) \subset L_1(B_{\ell_1}^*, \mu) \longrightarrow \ell_2$ dado por
 $R[(J_1 \circ A)(\{a_n\})] = \{a_n\}$, para $\{a_n\} \in \ell_1$.

A desigualdade do Teorema de Grothendieck-Pietsch nos dá a continuidade de R , que tem então uma extensão por densidade

a. $Y = \overline{J_1 \circ A(\ell_1)}^{L_1}$. Seja $\tilde{R}$ essa extensão.

Logo, $i = \tilde{R} \circ J_1 \circ A$. Notemos que $Y \neq L_1(B_{\ell_1}^*, \mu)$, caso contrário i seria estritamente 1-integral, o que já sabemos não ser verdade. Mas $\tilde{R}: Y \rightarrow \ell_2$ admite uma extensão $B: L_1(B_{\ell_1}^*, \mu) \rightarrow \ell_\infty(B_{\ell_2})$, onde $\ell_\infty(B_{\ell_2})$ é o espaço injetivo canônico de ℓ_2 .

Lembramos que, para um espaço de Banach Z , $\ell_\infty(B_Z^*)$ é o espaço de Banach das famílias limitadas de escalares $\{a_{z^*}\}_{z^* \in Z^*}$, com a norma $\|\{a_{z^*}\}\|_\infty = \sup_{z^* \in B_{Z^*}} |a_{z^*}|$ e que Z pode ser canonicamente identificado com um subespaço de $\ell_\infty(B_Z^*)$ pela aplicação $K_Z: Z \rightarrow \ell_\infty(B_Z^*)$, dada por $K_Z(z) = \{z^*(z)\}_{z^* \in B_{Z^*}}$. A propriedade principal desse espaço é que todo operador T de X em Z admite uma extensão $\tilde{T}$ de W em $\ell_\infty(B_Z^*)$, para qualquer espaço de Banach W que contenha X [PI-C.3].

Portanto $K_{\ell_2} \circ i = B \circ J_1 \circ A \in SI_1(\ell_1, \ell_\infty(B_{\ell_2}))$

(f). É fácil ver que a base canônica de ℓ_1 é levada por $K_{\ell_2} \circ i$ numa sequência em $\ell_\infty(B_{\ell_2})$ que não tem subsequência convergente em norma, pois $\|K_{\ell_2} \circ i(e_n) - K_{\ell_2} \circ i(e_m)\|_\infty \geq 1$ se $n \neq m$. Realmente temos

$$\|K_{\ell_2} \circ i(e_n) - K_{\ell_2} \circ i(e_m)\|_\infty = \sqrt{2} \text{ se } n \neq m. \quad \square$$

2. ESTRUTURA DE IDEAL E PROPRIEDADE DE MONOTOCIDADE DE OPERADORES p -NUCLEARES, p -INTEGRAIS E ESTRITAMENTE p -INTEGRAIS.

TEOREMA 2.1 (Estrutura de ideal de N_p , $1 \leq p \leq \infty$).

Para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, temos

(a) se $T \in N_p(X, Y)$ e $S \in L(Y, Z)$, então $S \circ T \in N_p(X, Z)$ e $n_p(S \circ T) \leq \|S\| n_p(T)$;

(b) se $S \in L(X, Y)$ e $T \in N_p(Y, Z)$, então $T \circ S \in N_p(X, Z)$ e $n_p(T \circ S) \leq \|S\| n_p(T)$.

PROVA.

(a). Seja $Tx = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle y_n$, $x \in X$, uma representação de T , com $\{x_n^*\}$ e $\{y_n\}$ satisfazendo as condições da Definição 1.1. Então $(S \circ T)(x) = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle z_n$, $x \in X$, onde $z_n = Sy_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Observemos agora que se $z^* \in B_{Z^*}$ e $y \in Y$, então $S^* z^* / \|S\| \in B_{Y^*}$ e $|\langle z^*, Sy \rangle| = |\langle S^* z^*, y \rangle| = \|S\| \left| \langle S^* z^* / \|S\|, y \rangle \right|$, de modo que

$$\sup_{z^* \in B_{Z^*}} \left(\sum_n |\langle z^*, Sy_n \rangle|^q \right)^{1/q} \leq \|S\| \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q \right)^{1/q}, \text{ se } 1 \leq q < \infty,$$

e

$$\sup_{z^* \in B_{Z^*}} \sup_n |\langle z^*, Sy_n \rangle| \leq \|S\| \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sup_n |\langle y^*, y_n \rangle|, \text{ se } q = \infty.$$

Portanto as sequências $\{x_n^*\}$ em X^* e $\{z_n\}$ em Z satisfazem as condições para $S \circ T$ ser p -nuclear. Além disso, das desigualdades acima segue que $n_p(S \circ T) \leq \|S\| n_p(T)$.

(b). A prova é análoga à de (a), sendo que agora, como $Ty = \sum_n \langle y_n^*, y \rangle z_n$, $y \in Y$, toma-se $x_n^* = S^* y_n^*$, para $n \in \mathbb{N}$. $\square$

TEOREMA 2.2 (Estrutura de ideal de SI_p , $1 \leq p \leq \infty$).

Para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, temos

(a) se $T \in SI_p(X, Y)$ e $S \in L(Y, Z)$, então $S \circ T \in SI_p(X, Z)$ e $si_p(S \circ T) \leq \|S\| si_p(T)$;

(b) se $S \in L(X, Y)$ e $T \in SI_p(Y, Z)$, então $ToS \in SI_p(X, Z)$ e $si_p(ToS) \leq \|S\| si_p(T)$.

PROVA.

(a). Dado $\epsilon > 0$, seja $G : \mathcal{B}(B_{X^*}) \rightarrow Y$ uma medida vetorial p -majorada com $\mu_p(G) \leq si_p(T) + \epsilon/\|S\|$ se $1 \leq p < \infty$ e σ -aditiva com $\|G\|(B_{X^*}) \leq si_\infty(T) + \epsilon/\|S\|$ se $p = \infty$, tal que

$$Tx = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dG(x^*), \text{ para todo } x \in X.$$

Definimos $F : \mathcal{B}(B_{X^*}) \rightarrow Z$ por $F(E) = S(G(E))$, para $E \in \mathcal{B}(B_{X^*})$. Temos assim

$$(SoT)(x) = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dF(x^*), \text{ para todo } x \in X.$$

Se $1 \leq p < \infty$, F é p -majorada, pois

$$\left\| \int_{B_{X^*}} f dF \right\| \leq \|S\| \left\| \int_{B_{X^*}} f dG \right\|, f \in C(B_{X^*}),$$

e G é p -majorada. Dessa desigualdade também segue que

$\mu_p(F) \leq \|S\| \mu_p(G)$ e portanto $\mu_p(F) \leq \|S\| si_p(T) + \epsilon$. Então, $SoT \in SI_p(X, Z)$ e como ϵ é arbitrário, $si_p(SoT) \leq \|S\| si_p(T)$.

Se $p = \infty$, F é σ -aditiva porque G o é, e além disso $\|F\|(B_{X^*}) \leq \|S\| \|G\|(B_{X^*})$. Portanto $SoT \in SI_\infty(X, Z)$ e também, sendo ϵ arbitrário, $si_\infty(SoT) \leq \|S\| si_\infty(T)$.

(b). Dado $\epsilon > 0$, seja $G : \mathcal{B}(B_{Y^*}) \rightarrow Z$ medida vetorial p -majorada com $\mu_p(G) \leq si_p(T) + \epsilon/2\|S\|$ se $1 \leq p < \infty$ e σ -aditiva com $\|G\|(B_{Y^*}) \leq si_\infty(T) + \epsilon/\|S\|$ se $p = \infty$, tal que

$$Ty = \int_{B_{Y^*}} \langle y^*, y \rangle dG(y^*), \text{ para todo } y \in Y.$$

No caso $1 \leq p < \infty$, consideremos também $\mu \in \text{rca}(\mathcal{B}(B_{Y^*}))$, μ positiva, tal que $\mu(B_{Y^*})^{1/p} \leq \mu_p(G) + \epsilon/2\|S\|$ e

$$\left\| \int_{B_{Y^*}} g dG \right\| \leq \left[\int_{B_{Y^*}} |g|^p d\mu \right]^{1/p}, \text{ para toda } g \in C(B_{Y^*}).$$

Definimos $R: C(B_{X^*}) \rightarrow Z$ por

$$Rf = \|S\| \int_{B_{Y^*}} f\left(\frac{S^* y^*}{\|S\|}\right) dG(y^*), \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}).$$

R é representado por uma medida vetorial $F: \mathcal{B}(B_{X^*}) \rightarrow Z^{**}$, que é dada por $F(E) = R^{**}(\chi_E)$, para todo $E \in \mathcal{B}(B_{X^*})$ [DU-VI-2.1].

Mas

$$R^{**}(\chi_E) = \|S\| \int_{B_{Y^*}} \chi_E\left(\frac{S^* y^*}{\|S\|}\right) dG(y^*) = \|S\| G(\|S\| S^{*-1}(E)), E \in \mathcal{B}(B_{X^*}).$$

Como G é σ -aditiva, G assume valores em Z e portanto F também assume valores em Z .

Então F é σ -aditiva e R é fracamente compacto [DU-VI.2.5], sendo dado por

$$Rf = \int_{B_{X^*}} f dF, \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}).$$

Para cada $x \in X$, consideremos a função $f_x \in C(B_{X^*})$ dada por $f_x(x^*) = \langle x^*, x \rangle$, para todo $x^* \in B_{X^*}$. Calculando R em f_x temos, pela definição de R ,

$$Rf_x = \|S\| \int_{B_{Y^*}} \left\langle \frac{S^* y^*}{\|S\|}, x \right\rangle dG(y^*) = \int_{B_{Y^*}} \langle y^*, Sx \rangle dG(y^*) = (ToS)(x),$$

e pela representação de R ,

$$Rf_x = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dF(x^*).$$

Portanto,

$$(T \circ S)(x) = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dF(x^*), \text{ para todo } x \in X.$$

Se $p = \infty$, como já sabemos que F é σ -aditiva, temos $T \circ S \in SI_{\infty}(X, Z)$. Além disso, de $\|F\|(B_{X^*}) = \|R\| \leq \|S\| \|G\|(B_{Y^*}) \leq \|S\| si_{\infty}(T) + \epsilon$, segue que $si_{\infty}(T \circ S) \leq \|S\| si_{\infty}(T)$, já que ϵ é arbitrário.

Se $1 \leq p < \infty$, ainda precisamos mostrar que F é p -majorada. Para isso, definimos $\hat{\mu} \in rca(\mathcal{B}(B_{X^*}))$ por

$$\langle \hat{\mu}, f \rangle = \int_{B_{Y^*}} f\left(\frac{S^* y^*}{\|S\|}\right) d\mu(y^*), \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}).$$

Então $\hat{\mu}$ é positiva, pois μ o é, e

$$\begin{aligned} \left\| \int_{B_X^*} f dF \right\| &= \|S\| \left\| \int_{B_{Y^*}} f\left(\frac{S^* y^*}{\|S\|}\right) dG(y^*) \right\| \leq \|S\| \left[\int_{B_{Y^*}} \left| f\left(\frac{S^* y^*}{\|S\|}\right) \right|^p d\mu(y^*) \right]^{1/p} \\ &= \|S\| \left[\int_{B_{X^*}} |f(x^*)|^p d\hat{\mu}(x^*) \right]^{1/p}, \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}). \end{aligned}$$

Logo, F é p -majorada e $T \circ S \in SI_p(X, Z)$. Além disso, essa desigualdade também nos dá $\mu_p(F) \leq \|S\| \mu(B_{Y^*})^{1/p}$, de onde segue que $si_p(T \circ S) \leq \|S\| si_p(T)$, já que ϵ é arbitrário. $\square$

TEOREMA 2.3 (Estrutura de ideal de I_p , $1 \leq p \leq \infty$).

Para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, temos

- (a) se $T \in I_p(X, Y)$ e $S \in L(Y, Z)$, então $S \circ T \in I_p(X, Z)$ e $i_p(S \circ T) \leq \|S\| i_p(T)$;
- (b) se $S \in L(X, Y)$ e $T \in I_p(Y, Z)$, então $T \circ S \in I_p(X, Z)$ e $i_p(T \circ S) \leq \|S\| i_p(T)$.

PROVA.

(a), É suficiente notar que $J_Z \circ (S \circ T) = S^{**} \circ (J_Y \circ T)$ e aplicar o teorema anterior, ítem (a).

(b), Segue de $J_Z \circ (T \circ S) = (J_Z \circ T) \circ S$ e do teorema anterior, ítem (b). $\square$

Os próximos teoremas descrevem a propriedade de monotonicidade de N_p , SI_p e I_p . Para cuidar do caso N_∞ , precisaremos de um pequeno lema sobre séries numéricas.

LEMA 2.4. Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais positivos tal que $\sum_n a_n < \infty$. Então, para cada $\delta > 0$ existe uma seqüência $\{b_n\}$ em $\mathbb{R}$ tal que

(i) $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $\sup_n b_n = 1$;

(ii) $\sum_n b_n^{-1} a_n < \sum_n a_n + \delta$.

PROVA. Como $\sum_n a_n < \infty$, temos $\lim_m \sum_{n=1}^m a_n = 0$. Dado $\delta > 0$, escolhe-mos $\{n_k\}$ em $\mathbb{N}$, $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$, tal que

$$\sum_{n > n_k} a_n < \frac{\delta}{k 2^k}, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Definindo, para $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq n_1, \\ \frac{1}{k}, & n_k < n \leq n_{k+1}, \quad k \geq 1, \end{cases}$$

temos obviamente que $\{b_n\}$ satisfaz (i).

A seqüência $\{b_n\}$ também satisfaz (ii), pois

$$\sum_n b_n^{-1} a_n = \sum_{n=1}^{n_1} a_n + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n + \dots + \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} k a_n + \dots$$

$$< \sum_{n=1}^{n_1} a_n + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2^2} + \dots + \frac{\delta}{2^k} + \dots \leq \sum_n a_n + \delta . \square$$

TEOREMA 2.5 (Monotonicidade de N_p).

Se $1 \leq p < r \leq \infty$, então $N_p(X, Y) \subset N_r(X, Y)$ e $n_r(\cdot) \leq n_p(\cdot)$.

PROVA. Suponhamos inicialmente $r = \infty$ e seja dado $\epsilon > 0$.

Se $T \in N_p(X, Y)$, escolhemos uma representação de T

$$Tx = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle y_n, \quad x \in X,$$

tal que $(\sum_n \|x_n^*\|^p)^{1/p} \leq n_p(T) + \epsilon$ e

$$\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q \right)^{1/q} \leq 1 \text{ se } 1 < p < \infty,$$

e

$$\sup_n \|y_n\| \leq 1 \quad \text{se } p = 1.$$

É claro que podemos assumir $x_n^* \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Lema 2.4 com $\{a_n\} = \{\|x_n^*\|^p\}$ e $\delta = \epsilon$, obtemos $\{b_n\}$ em $\mathbb{R}$ com $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n \xrightarrow{n} 0$, $\sup_n b_n = 1$ e $\sum_n b_n^1 \|x_n^*\|^p < \sum_n \|x_n^*\|^p + \epsilon$.

Definindo $\{z_n^*\}$ em X^* e $\{w_n\}$ em Y por

$$z_n^* = \frac{b_n^{1/p}}{\|x_n^*\|} x_n^* \quad \text{e} \quad w_n = \frac{\|x_n^*\|}{b_n^{1/p}} y_n, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, \text{ temos}$$

$$(a) \quad Tx = \sum_n \langle z_n^*, x \rangle w_n, \quad \text{para todo } x \in X,$$

$$(b) \quad \|z_n^*\| = b_n^{1/p}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e portanto } \|z_n^*\| \xrightarrow{n} 0 \text{ e}$$

$$\sup_n \|z_n^*\| \leq 1;$$

$$(c) \quad \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n |\langle y^*, w_n \rangle| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n \frac{\|x_n^*\|}{b_n^{1/p}} |\langle y^*, y_n \rangle|$$

$$\leq \begin{cases} (\sum_n b_n^{-1} \|x_n^*\|) \sup_n \|y_n\|, & \text{se } p = 1, \\ (\sum_n b_n^{-1} \|x_n^*\|^p)^{1/p} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} (\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q)^{1/q}, & \text{se } 1 < p < \infty, \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n |\langle y_n^*, w_n \rangle| &\leq (\sum_n b_n^{-1} \|x_n^*\|^p)^{1/p} < (\sum_n \|x_n^*\|^p + \epsilon)^{1/p} \\ &\leq [(n_p(T) + \epsilon)^p + \epsilon]^{1/p}. \end{aligned}$$

As condições (a), (b) e (c) nos dão que $T \in N_\infty(X, Y)$ e $n_\infty(T) \leq [(n_p(T) + \epsilon)^p + \epsilon]^{1/p}$. Como ϵ é arbitrário, temos $n_\infty(T) \leq n_p(T)$.

Consideremos agora o caso $r < \infty$. Dados $\epsilon > 0$ e $T \in N_p(X, Y)$, escolhamos uma representação de T ,

$$Tx = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle y_n, \quad x \in X,$$

tal que

$$\sum_n \|x_n^*\|^p \leq 1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \sup_n \|y_n\| \leq n_p(T) + \epsilon, & \text{se } p = 1, \\ \text{e} \\ \sup_{y^* \in B_{Y^*}} (\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q)^{1/q} \leq n_p(T) + \epsilon, & \text{se } 1 < p < \infty. \end{cases}$$

Novamente podemos assumir $x_n^* \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e então definimos $\{z_n^*\}$ em X^* e $\{w_n\}$ em Y por

$$z_n^* = \|x_n^*\|^{\frac{p}{r}-1} x_n^* \quad \text{e} \quad w_n = \|x_n^*\|^{1-\frac{p}{r}} y_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A seqüência $\{z_n^*\}$ satisfaz

$$\sum_n \|z_n^*\|^r = \sum_n \|x_n^*\|^{p-r} \cdot \|x_n^*\|^r = \sum_n \|x_n^*\|^p \leq 1.$$

Sendo s o expoente conjugado de r , temos também que, para qualquer $y^* \in B_{Y^*}$, a seqüência $\{w_n\}$ em Y satisfaz

$$\sum_n |\langle y^*, w_n \rangle|^s = \sum_n \|x_n^*\|^{s(1-\frac{p}{r})} |\langle y^*, y_n \rangle|^s$$

$$\leq \begin{cases} (\sum_n \|x_n^*\|) (\sup_n |\langle y^*, y_n \rangle|)^s, & \text{se } p = 1, \\ (\sum_n [\|x_n^*\|^{s(1-\frac{p}{r})}]^{\frac{q}{q-s}})^{1-\frac{s}{q}} (\sum_n [|\langle y^*, y_n \rangle|^s]^{\frac{q}{s}})^{\frac{s}{q}}, & \text{se } 1 < p < \infty. \end{cases}$$

Como $s(1 - \frac{p}{r}) = s(1-p + \frac{p}{s}) = s(1-p) + p \geq p$ e $\|x_n^*\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois $\sum_n \|x_n^*\|^p \leq 1$), temos que

$$\sum_n \|x_n^*\|^{s(1-\frac{p}{r})} \leq \sum_n \|x_n^*\|^p \leq 1$$

e portanto

$$\sup_{y^* \in B_{Y^*}} (\sum_n |\langle y^*, w_n \rangle|^s)^{1/s} \leq \begin{cases} \sup_n \|y_n\|, & \text{se } p = 1, \\ \sup_{y^* \in B_{Y^*}} (\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q)^{1/q}, & \text{se } 1 < p < \infty. \end{cases}$$

Pelas condições sobre $\{y_n\}$ escolhidas inicialmente temos

$$\sup_{y^* \in B_{Y^*}} (\sum_n |\langle y^*, w_n \rangle|^s)^{1/s} \leq n_p(T) + \epsilon.$$

Então as sequências $\{z_n^*\}$ em X^* e $\{w_n\}$ em Y satisfazem as condições (ii) e (iii) da Definição 1.1. Como também

$$Tx = \sum_n \langle z_n^*, x \rangle w_n, \text{ para todo } x \in X,$$

segue que $T \in N_r(X, Y)$, com $n_r(T) \leq n_p(T)$, já que ϵ é arbitrário. $\square$

TEOREMA 2.6 (Monotonicidade de SI_p).

Se $1 \leq p < r \leq \infty$, então $SI_p(X, Y) \subset SI_r(X, Y)$ e $si_r(.) \leq si_p(.)$.

PROVA. O caso $r = \infty$ é trivial, já que toda medida p -majorada $G: \mathcal{B}(B_{X^*}) \rightarrow Y$ é σ -aditiva e ainda satisfaz

$$\|G\|(B_{X^*}) = \sup \{ \|\int_{B_{X^*}} f dG\| : f \in C(B_{X^*}), \|f\| \leq 1 \}$$

$$\leq \sup \left\{ \left[\int_{B_{X^*}} |f|^p d\mu \right]^{1/p} : f \in C(B_{X^*}), \|f\| \leq 1 \right\}$$

$$\leq \mu(B_{X^*})^{1/p},$$

para qualquer medida escalar μ satisfazendo a definição de p -majoração. Como $si_p(T) = \inf \{ \inf \mu(B_{X^*})^{1/p} \}$ e $si_\infty(T) = \|G\|(B_{X^*})$, temos imediatamente $si_\infty(T) \leq si_p(T)$, para qualquer $T \in SI_p(X, Y)$, $1 \leq p < \infty$.

No caso $r < \infty$ é suficiente mostrar que, se G é uma medida p -majorada, G também é r -majorada, com $\mu_r(G) \leq \mu_p(G)$, para todo r tal que $p < r < \infty$.

Consideremos então G uma medida p -majorada e seja dado $\epsilon > 0$. Escolhemos $\mu \in rca(\mathcal{B}(B_{X^*}))$, μ positiva, tal que $\mu(B_{X^*}) \leq \mu_p(G) + \epsilon$ e

$$\left\| \int_{B_{X^*}} f dG \right\| \leq \left[\int_{B_{X^*}} |f|^p d\mu \right]^{1/p}, \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}).$$

Como

$$\int_{B_{X^*}} |f|^p d\mu \leq \left[\int_{B_{X^*}} 1^{\frac{r}{r-p}} d\mu \right]^{1-p/r} \cdot \left[\int_{B_{X^*}} (|f|^p)^{r/p} d\mu \right]^{p/r}$$

$$= \mu(B_{X^*})^{1-p/r} \left[\int_{B_{X^*}} |f|^r d\mu \right]^{p/r}, \text{ para } f \in C(B_{X^*}),$$

temos que

$$\left\| \int_{B_{X^*}} f dG \right\| \leq \left[\int_{B_{X^*}} |f|^r d\nu \right]^{1/r}, \text{ para } f \in C(B_{X^*}),$$

onde $\nu(E) = \mu(B_{X^*})^{r/p-1} \mu(E)$, para todo $E \in \mathcal{B}(B_{X^*})$.

Portanto G é r -majorada e

$$\mu_r(G) \leq \nu(B_{X^*})^{1/r} = [\mu(B_{X^*})^{r/p-1} \cdot \mu(B_{X^*})]^{1/r} = \mu(B_{X^*})^{1/p} \leq \mu_p(G) + \epsilon,$$

e como ϵ é arbitrário, $\mu_r(G) \leq \mu_p(G)$. □

TEOREMA 2.7 (Monotonicidade de I_p).

Se $1 \leq p \leq r \leq \infty$, então $I_p(X,Y) \subset I_r(X,Y)$ e $i_r(\cdot) \leq i_p(\cdot)$.

PROVA. Consequência imediata do Teorema 2.6, pois $T \in I_p(X,Y)$ se e somente se $J_Y \circ T \in SI_p(X,Y)$ e $i_p(T) = si_p(J_Y \circ T)$. $\square$

3. CARACTERIZAÇÃO DE OPERADORES p -NUCLEARES, p -INTEGRAIS E ESTRITAMENTE p -INTEGRAIS POR TEOREMAS DE FATORAÇÃO.

Esta seção vai nos fornecer uma ferramenta extremamente útil no estudo de operadores p -nucleares, p -integrais e estritamente p -integrais, precisamente sua fatoração através de operadores especiais. Como subproduto, teremos justificado também o uso de "canônicos" nos Exemplos 1.7 a 1.11, já que estes serão exatamente os referidos operadores especiais.

TEOREMA 3.1 . Seja $1 \leq p < \infty$. Um operador T pertence a $N_p(X,Y)$ se e somente se ele admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ P \downarrow & & \uparrow Q \\ \ell_\infty & \xrightarrow{\Delta_p} & \ell_p \end{array}$$

onde $P \in L(X, \ell_\infty)$, $Q \in L(\ell_p, Y)$ e Δ_p é um operador diagonal, ou seja, existe $\delta = \{\delta_n\} \in \ell_p$ tal que $\Delta_p \{a_n\} = \{\delta_n a_n\}$ para todo $\{a_n\} \in \ell_\infty$.

Ainda, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher uma fatoração tal que $\|P\| \leq 1$, $\|Q\| \leq 1$ e $n_p(\Delta_p) \leq n_p(T) + \epsilon$.

PROVA. Se T admite tal fatoração, então $T \in N_p(X,Y)$, já que $\Delta_p \in N_p(\ell_\infty, \ell_p)$, como vimos no Exemplo 1.7, e N_p tem estrutura de ideal (Teorema 2.1).

Reciprocamente, dados $T \in N_p(X, Y)$ e $\epsilon > 0$, escolhemos uma representação de T ,

$$Tx = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle y_n, \quad x \in X,$$

com $(\sum_n \|x_n^*\|^p)^{1/p} \leq n_p(T) + \epsilon$ e
$$e \begin{cases} \sup_n \|y_n\| \leq 1, & \text{se } p = 1, \\ e \\ \sup_{y^* \in B_{Y^*}} (\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q)^{1/q} \leq 1, & \text{se } 1 < p < \infty, \end{cases}$$

É claro que podemos assumir $x_n^* \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definimos $P : X \longrightarrow \ell_\infty$, $\Delta_p : \ell_\infty \longrightarrow \ell_p$ e $Q : \ell_p \longrightarrow Y$ por

$$\begin{aligned} Px &= \langle x_n^* / \|x_n^*\|, x \rangle && \text{para todo } x \in X, \\ \Delta_p \{a_n\} &= \{ \|x_n^*\| a_n \}, && \text{para todo } \{a_n\} \in \ell_\infty, \\ \text{e } Q\{b_n\} &= \sum_n b_n y_n, && \text{para todo } \{b_n\} \in \ell_p. \end{aligned}$$

É fácil ver que P e Δ_p estão bem definidos e são lineares e contínuos, com $\|P\| \leq 1$ e $\|\Delta_p\| = n_p(\Delta_p) = (\sum_n \|x_n^*\|^p)^{1/p} \leq n_p(T) + \epsilon$.

Quanto a Q , temos que, se $p = 1$,

$$\sum_n \|b_n y_n\| \leq (\sup_n \|y_n\|) (\sum_n |b_n|) \leq \|\{b_n\}\|_1.$$

Para $1 < p < \infty$ e $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n+1}^m b_k y_k \right\| &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} | \langle y^*, \sum_{k=n+1}^m b_k y_k \rangle | \\ &\leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{k=n+1}^m |b_k| | \langle y^*, y_k \rangle | \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^m |b_k|^p \right)^{1/p} \cdot \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_{k=n+1}^m | \langle y^*, y_k \rangle |^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^m |b_k|^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

donde se conclui que $\sum_n b_n y_n$ converge em Y sempre que $\{b_n\} \in \ell_p$.

Assim, Q está bem definido em ambos os casos, sendo ainda linear contínuo com $\|Q\| \leq 1$.

Obviamente $T = Q \circ \Delta_P \circ P$, o que nos dá a fatoração desejada para T . $\square$

TEOREMA 3.2. Um operador T pertence a $N_\infty(X, Y)$ se e somente se ele admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ P \downarrow & & \uparrow Q \\ \ell_\infty & \xrightarrow{\Delta_\infty} & c_0 \end{array}$$

onde $P \in L(X, \ell_\infty)$, $Q \in L(c_0, Y)$ e Δ_∞ é um operador diagonal, ou seja, existe $\delta = \{\delta_n\} \in c_0$ tal que $\Delta_\infty \{a_n\} = \{\delta_n a_n\}$, para todo $\{a_n\} \in \ell_\infty$.

Ainda, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher uma fatoração tal que $\|P\| \leq 1$, $\|Q\| \leq 1$ e $n_\infty(\Delta_\infty) \leq n_\infty(T) + \epsilon$.

PROVA. Já vimos no Exemplo 1.8 que, se Δ_∞ é descrito como no enunciado, então $\Delta_\infty \in N_\infty(\ell_\infty, c_0)$. Usando a estrutura de ideal de N_∞ (Teorema 2.1), concluímos que todo operador que tem esse tipo de fatoração é ∞ -nuclear.

Por outro lado, se $T \in N_\infty(X, Y)$ e $\epsilon > 0$ são dados, escolhemos uma representação de T ,

$$Tx = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle y_n, \quad x \in X,$$
 com $\sup_n \|x_n^*\| \leq n_\infty(T) + \epsilon$, $\|x_n^*\| \xrightarrow{n} 0$ e $\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n |\langle y^*, y_n \rangle| \leq 1$, e podemos assumir que $x_n^* \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definindo $P: X \rightarrow \ell_\infty$, $\Delta_\infty: \ell_\infty \rightarrow c_0$ e $Q: c_0 \rightarrow Y$ por

$$Px = \langle x_n^* / \|x_n^*\|, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in X,$$

$$\Delta_\infty \{a_n\} = \{\|x_n^*\| a_n\}, \quad \text{para todo } \{a_n\} \in \ell_\infty,$$

e

$$Q\{b_n\} = \sum_n b_n y_n, \quad \text{para todo } \{b_n\} \in c_0,$$

temos P e Δ_∞ claramente bem definidos, lineares e contínuos, com

$$\|P\| \leq 1 \text{ e } \|\Delta_\infty\| = n_\infty(\Delta_\infty) = \sup_n \|x_n^*\| \leq n_\infty(T) + \varepsilon.$$

Quanto a Q , para $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, temos

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m b_k y_k \right\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left| \langle y^*, \sum_{k=n+1}^m b_k y_k \rangle \right| \leq \left(\sup_n \|b_n\| \right) \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{k=n+1}^m |\langle y^*, y_k \rangle|,$$

$$\text{e como } \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n |\langle y^*, y_n \rangle| \leq 1, \text{ temos que } \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{k=n+1}^m |\langle y^*, y_k \rangle| \xrightarrow{m,n} 0$$

Então $\sum_n b_n y_n$ converge em Y , para qualquer $\{b_n\} \in c_0$, o que nos dá que Q está bem definido. Além disso, Q é linear contínuo, com $\|Q\| \leq 1$.

Obviamente $T = Q \circ \Delta_\infty \circ P$, e assim obtemos a fatoração desejada para T . $\square$

TEOREMA 3.3. Seja $1 \leq p < \infty$. As seguintes condições são equivalentes:

- (1) $T \in SI_p(X, Y)$;
- (2) T admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ A \downarrow & & \uparrow B \\ C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(K, \mu) \end{array}$$

onde K é um espaço compacto Hausdorff, $\mu \in rca(\mathcal{B}(K))$ e μ é positiva, J_p é a inclusão canônica de $C(K)$ em $L_p(K, \mu)$, $A \in L(X, C(K))$ e $B \in L(L_p(K, \mu), Y)$;

- (3) T admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ A \downarrow & & \uparrow B \\ L_\infty(\Omega, \mu) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\Omega, \mu) \end{array}$$

onde (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, J_p é a inclusão canônica de $L_\infty(\Omega, \mu)$ em $L_p(\Omega, \mu)$, $A \in L(X, L_\infty(\Omega, \mu))$ e $B \in L(L_p(\Omega, \mu), Y)$.

Neste caso, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher uma fatoração de T como em (2) ou (3) tal que $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$ e $si_p(J_p) \leq si_p(T) + \epsilon$.

PROVA.

(1) $\Rightarrow$ (2). Dados $T \in SI_p(X, Y)$ e $\epsilon > 0$, escolhemos uma medida p -majorada $G: \mathcal{B}(B_{X^*}) \rightarrow Y$ tal que $\mu_p(G) \leq si_p(T) + \epsilon$ e

$$Tx = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dG(x^*) \quad , \text{ para todo } x \in X.$$

Tal G nos fornece $\mu \in rca(\mathcal{B}(B_{X^*}))$, μ positiva, com

$$\left\| \int_{B_{X^*}} f dG \right\| \leq \left[\int_{B_{X^*}} |f|^p d\mu \right]^{1/p} \quad , \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}) \quad , \text{ e}$$

$$\mu(B_{X^*})^{1/p} \leq \mu_p(G) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Definindo $A: X \rightarrow C(B_{X^*})$ e $B: L_p(B_{X^*}, \mu) \rightarrow Y$ por $(Ax)(x^*) = \langle x^*, x \rangle$, para todo $x \in X$ e todo $x^* \in B_{X^*}$, e

$$Bf = \mu(B_{X^*})^{-\frac{1}{p}} \int_{B_{X^*}} f dG \quad , \text{ para toda } f \in L_p(B_{X^*}, \mu),$$

temos obviamente que A é linear contínuo e $\|A\| \leq 1$.

Quanto a B , lembramos que, como G é p -majorada a aplicação linear $S: (C(B_{X^*}), \|\cdot\|_p) \rightarrow Y$, dada por

$$Sf = \int_{B_{X^*}} f dG \quad , \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}),$$

é contínua e portanto, pode ser estendida a $L_p(B_{X^*}, \mu)$ por densidade. Essa extensão, dividida por $\mu(B_{X^*})^{1/p}$, é justamente B e temos também $\|B\| \leq 1$.

Então $T = B \circ J_p \circ A$. Observamos ainda que do Exemplo 1.9 vem $si_p(J_p) = \mu(B_{X^*})^{1/p} \leq si_p(T) + \epsilon$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Suponhamos que T admita uma fatoração como em (2), e consideremos a inclusão natural J_∞ de $C(K)$ em $L_\infty(K, \mu)$. Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 A \downarrow & & \uparrow B \\
 C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(K, \mu) \\
 J_\infty \searrow & & \nearrow J_p \\
 & L_\infty(K, \mu) &
 \end{array}$$

nos mostra que T também admite uma fatoração como em (3). Como ainda $\|J_\infty \circ A\| = \|A\|$, temos também satisfeitas as condições sobre as normas dos fatores de T .

(3) $\Rightarrow$ (1). Já sabemos que $J_p \in SI_p(L_\infty(\Omega, \mu), L_p(\Omega, \mu))$, para $1 \leq p < \infty$ (Exemplo 1.11). Como SI_p tem estrutura de ideal (Teorema 2.2), temos que, se T satisfaz (3), então $T \in SI_p(X, Y)$. $\square$

TEOREMA 3.4. As seguintes condições são equivalentes:

- (1) $T \in SI_\infty(X, Y)$;
- (2) T admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 A \searrow & & \nearrow B \\
 & C(K) &
 \end{array}$$

onde K é um espaço compacto Hausdorff, $A \in L(X, C(K))$ e $B \in W(C(K), Y)$;

- (3) T admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 A \searrow & & \nearrow B \\
 & L_\infty(\Omega, \mu) &
 \end{array}$$

onde (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, $A \in L(X, L_\infty(\Omega, \mu))$ e $B \in W(L_\infty(\Omega, \mu), Y)$.

Neste caso, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher uma fatoração de T como em (2) ou (3) de modo que $\|A\| \leq 1$ e $\|B\| = si_\infty(B) \leq si_\infty(T) + \epsilon$.

PROVA.

(1) $\Rightarrow$ (2). Dados $T \in SI_\infty(X, Y)$ e $\epsilon > 0$, escolhemos uma medida vetorial σ -aditiva $G: \mathcal{B}(B_X^*) \rightarrow Y$ com $\|G\|(B_X^*) \leq si_\infty(T) + \epsilon$ e

$$Tx = \int_{B_X^*} \langle x^*, x \rangle dG(x^*) \quad , \text{ para todo } x \in X.$$

Definimos $A: X \rightarrow C(B_X^*)$ e $B: C(B_X^*) \rightarrow Y$ por $(Ax)(x^*) = \langle x^*, x \rangle$, para todo $x \in X$ e todo $x^* \in B_X^*$, e

$$Bf = \int_{B_X^*} f dG \quad , \text{ para toda } f \in C(B_X^*).$$

É claro que A é linear contínuo com $\|A\| \leq 1$.

Também B é linear contínuo com $\|B\| = \|G\|(B_X^*)$, e, mais ainda, como G é σ -aditiva, B é fracamente compacto [DU-VI. 2.1 e VI. 2.5]. Então $B \in W(C(K), Y)$ e $\|B\| = si_\infty(B) \leq si(T) + \epsilon$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Suponhamos que T admita uma fatoração como em (2) e consideremos $\hat{A} = J_{C(K)} \circ A: X \rightarrow C(K)^{**}$ e $\hat{B} = J_Y^{-1} \circ B^{**}: C(K)^{**} \rightarrow Y$. $\hat{B}$ está bem definido, ou seja, podemos aplicar J_Y^{-1} a B^{**} porque, sendo B fracamente compacto, $B^{**}(C(K)^{**}) \subset J_Y(Y) \subset Y^{**}$. Também $\hat{B} \in W(C(K)^{**}, Y)$, pois $B \in W(C(K), Y)$.

Temos $\|\hat{A}\| = \|A\|$, $\|\hat{B}\| = \|B^{**}\| = \|B\|$ e $T = \hat{B} \circ \hat{A}$.

Como $C(K)^{**}$ é isomorfo e isométrico a $L_\infty(\Omega, \mu)$ para algum espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , temos

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 \hat{A} \searrow & & \nearrow \hat{B} \\
 & L_{\infty}(\Omega, \mu) &
 \end{array}$$

com todas as condições exigidas sobre $\hat{A}$ e $\hat{B}$ satisfeitas.

(3) $\Rightarrow$ (1). Segue de $W(L_{\infty}(\Omega, \mu), Y) = SI_{\infty}(L_{\infty}(\Omega, \mu), Y)$ (Exemplo 1.11) e da estrutura de ideal de SI_{∞} (Teorema 2.2). $\square$

TEOREMA 3.5. Seja $1 \leq p < \infty$. As seguintes condições são equivalentes:

(1) $T \in I_p(X, Y)$;

(2) $J_p \circ T$ admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{J_Y \circ T} & Y^{**} \\
 A \downarrow & & \uparrow B \\
 C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(K, \mu)
 \end{array}$$

onde K é um espaço compacto Hausdorff, $\mu \in rca(\mathcal{B}(K))$ e μ é positiva, J_p é a inclusão canônica de $C(K)$ em $L_p(K, \mu)$; $A \in L(X, C(K))$ e $B \in L(L_p(K, \mu), Y^{**})$;

(3) $J_p \circ T$ admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{J_Y \circ T} & Y^{**} \\
 A \downarrow & & \uparrow B \\
 L_{\infty}(\Omega, \mu) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\Omega, \mu)
 \end{array}$$

onde (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, J_p é a inclusão canônica de $L_{\infty}(\Omega, \mu)$ em $L_p(\Omega, \mu)$, $A \in L(X, L_{\infty}(\Omega, \mu))$ e $B \in L(L_p(\Omega, \mu), Y^{**})$.

PROVA. É consequência imediata do Teorema 3.3. $\square$

TEOREMA 3.6. As seguintes condições são equivalentes:

(1) $T \in I_\infty(X, Y)$;

(2) $J_Y \circ T$ admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J_Y \circ T} & Y^{**} \\ A \searrow & & \nearrow B \\ & C(K) & \end{array}$$

onde K é um espaço compacto Hausdorff, $A \in L(X, C(K))$ e $B \in W(C(K), Y^{**})$;

(3) $J_Y \circ T$ admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J_Y \circ T} & Y^{**} \\ A \searrow & & \nearrow B \\ & L_\infty(\Omega, \mu) & \end{array}$$

onde (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, $A \in L(X, L_\infty(\Omega, \mu))$ e $B \in W(L(\Omega, \mu), Y^{**})$.

PROVA. É consequência imediata do Teorema 3.4. □

4. ALGUMAS RELAÇÕES ENTRE N_p , SI_p , I_p E OUTROS IDEAIS CLÁSSICOS DE OPERADORES.

Nesta seção veremos algumas relações de inclusão entre N_p , SI_p e I_p e os ideais clássicos de operadores compactos, fracamente compactos e completamente contínuos. Lembramos que um operador $T: X \rightarrow Y$ é completamente contínuo se leva seqüências fracamente convergentes em X em seqüências que convergem em norma em Y . O espaço dos operadores completamente contínuos de X em Y será denotado aqui $C(X, Y)$. Lembramos ainda que $K(X, Y)$ e $W(X, Y)$ denotam os espaços de operadores compactos e fracamente compac -

tos de X em Y , respectivamente.

TEOREMA 4.1. Para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, temos

$$(a) N_p(X, Y) \subset SI_p(X, Y) \quad , \text{ com } si_p(\cdot) \leq n_p(\cdot);$$

$$(b) SI_p(X, Y) \subset I_p(X, Y), \text{ com } i_p(\cdot) \leq si_p(\cdot).$$

PROVA.

(a). Dados $T \in N_p(X, Y)$ e $\epsilon > 0$, escolhemos uma representação

$$Tx = \sum_n \langle x^*, x \rangle y_n \quad , \text{ para todo } x \in X.$$

tal que $x_n^* \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sum_n \|x_n^*\|^p)^{1/p} \leq n_p(T) + \epsilon, \text{ se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_n \|x_n^*\| \leq n_\infty(T) + \epsilon \text{ e } \lim_n \|x_n^*\| = 0, \text{ se } p = \infty, \end{array} \right. e$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_n \|y_n\| \leq 1, \quad \text{se } p = 1, \\ \sup_{y^* \in B_{Y^*}} (\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q)^{1/q} \leq 1, \text{ se } 1 < p \leq \infty. \end{array} \right.$$

Consideremos $G: \mathfrak{B}(B_{X^*}) \rightarrow Y$ dada por

$$G(E) = \sum_n x_E \left(\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|} \right) \|x_n^*\| y_n, \text{ para todo } E \in \mathfrak{B}(B_{X^*}).$$

Precisamos mostrar que G está bem definida, ou seja, que as séries que a definem são convergentes em Y . Faremos mais, mostraremos que essas séries são mesmo incondicionalmente convergentes, de modo que automaticamente G será aditiva. Como $|x_E(\cdot)| \leq 1$, para $E \in \mathfrak{B}(B_{X^*})$, é suficiente mostrar que $\sum_n \|x_n^*\| y_n$ é incondicionalmente convergente.

Seja $F \subset \mathbb{N}$ um conjunto finito. Então

$$\left\| \sum_{n \in F} \|x_n^*\| y_n \right\| \leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{n \in F} \|x_n^*\| |\langle y^*, y_n \rangle|$$

$$\leq \begin{cases} \left(\sum_{n \in F} \|x_n^*\| \right) \sup_{n \in F} \|y_n\| & , \text{ se } p = 1, \\ \left(\sum_{n \in F} \|x_n^*\|^p \right)^{1/p} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n \in F} |\langle y^*, y_n \rangle|^q \right)^{1/q} & , \\ & \text{se } 1 < p < \infty, \\ \left(\sup_{n \in F} \|x_n^*\| \right) \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{n \in F} |\langle y^*, y_n \rangle| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Como o segundo termo desses produtos são limitados por 1, temos

$$\left\| \sum_{n \in F} \|x_n^*\| y_n \right\| \leq \begin{cases} \left(\sum_{n \in F} \|x_n^*\|^p \right)^{1/p} & , \text{ se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{n \in F} \|x_n^*\| & , \text{ se } p = \infty. \end{cases}$$

Dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $\min F \geq n_0$, então $\sum_{n \in F} \|x_n^*\|^p < \delta^p$ se $1 \leq p < \infty$ (pois $\sum_{n \in F} \|x_n^*\|^p < \infty$) ou $\sup_{n \in F} \|x_n^*\| < \delta$ se $p = \infty$ (pois $\lim_n \|x_n^*\| = 0$).

Portanto, se $\min F \geq n_0$, então $\left\| \sum_{n \in F} \|x_n^*\| y_n \right\| < \delta$ e $\sum_n \|x_n^*\| y_n$ é incondicionalmente convergente.

Temos ainda que G assume todos seus valores em Y , precisamente no subespaço de Y gerado por $\{y_n\}$.

Sendo $S: C(B_{X^*}) \rightarrow Y$ dado por

$$Sf = \int_{B_{X^*}} f dG, \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}),$$

temos que S é fracamente compacto, pois G assume valores em Y e então G é também σ -aditiva [DU-VI. 2.5].

Sabemos ainda que $\|S\| = \|G\| (B_{X^*})$ e por [DU-I.1.11],

$$\|G\|(B_{X^*}) = \sup_{\Pi} \left\| \sum_{A_k \in \Pi} \epsilon_k G(A_k) \right\| = \sup_{\Pi} \left\| \sum_{A_k \in \Pi} \sum_n \epsilon_k x_{A_k} \left(\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|} \right) \|x_n^*\| y_n \right\|,$$

onde Π percorre o conjunto de partições de B_{X^*} e $\epsilon_k \in \{1, -1\}$, para todo k . Procedendo como quando provamos que $\sum_n \|x_n^*\| y_n$ é incondicionalmente convergente, concluímos que

$$\|G\|(B_{X^*}) \leq \begin{cases} \left(\sum_n \|x_n^*\|^p \right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_n \|x_n^*\|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Para cada $x \in X$ temos

$$Tx = \sum_n \langle x_n^*, x \rangle y_n = \sum_n \left\langle \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|}, x \right\rangle \|x_n^*\| y_n = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dG(x^*).$$

Se $p = \infty$, concluímos que $T \in SI_{\infty}(X, Y)$, pois G é σ -aditiva. Além disso, $si_{\infty}(T) \leq \|G\|(B_{X^*}) \leq \sup_n \|x_n^*\| \leq n_{\infty}(T) + \epsilon$ e como ϵ é arbitrário, $si_{\infty}(T) \leq n_{\infty}(T)$.

Quando $1 \leq p < \infty$, ainda resta mostrar que G é p -majorada. Para isso, definimos $\mu: \mathcal{B}(B_{X^*}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$\mu(E) = \sum_n x_E \left(\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|} \right) \|x_n^*\|^p, \text{ para todo } E \in \mathcal{B}(B_{X^*}). \text{ Temos}$$

que μ está bem definida e é σ -aditiva, pois $\sum_n \|x_n^*\|^p < \infty$. Também é fácil ver que μ é regular. Além disso, para toda $f \in C(B_{X^*})$,

$$\left\| \int_{B_{X^*}} f dG \right\| = \left\| \sum_n f \left(\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|} \right) \|x_n^*\| y_n \right\| \leq \left(\sum_n \left| f \left(\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|} \right) \right|^p \|x_n^*\|^p \right)^{1/p},$$

pois $\sup_n \|y_n\| \leq 1$, se $p = 1$, e $\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n |\langle y^*, y_n \rangle|^q \right)^{1/q} \leq 1$, se

$1 < p < \infty$.

Logo,

$$\left\| \int_{B_{X^*}} f dG \right\| \leq \left[\int_{B_{X^*}} |f|^p d\mu \right]^{1/p}, \text{ para toda } f \in C(B_{X^*}), \text{ e}$$

G é p -majorada, com $\mu_p(G) \leq \mu(B_{X^*})^{1/p}$. Portanto $T \in SI_p(X, Y)$ e como $\mu(B_{X^*})^{1/p} \leq (\sum_n \|x_n^*\|^p)^{1/p} \leq n_p(T) + \epsilon$ e ϵ é arbitrário, $si_p(T) \leq n_p(T)$.

(b). É imediato que $SI_p(X, Y) \subset I_p(X, Y)$ para cada $p, 1 \leq p \leq \infty$, pelas definições dessas classes de operadores. Também temos

$$i_p(T) = si_p(J_Y \circ T) \leq \|J_Y\| si_p(T) = si_p(T), \text{ para todo } T \in SI_p(X, Y). \quad \square$$

TEOREMA 4.2. Para qualquer $p, 1 \leq p \leq \infty$, temos

- (a) $SI_p(X, Y) \subset W(X, Y)$;
- (b) $N_p(X, Y) \subset W(X, Y)$;
- (c) $SI_p(X, Y) \subset C(X, Y)$;
- (d) $N_p(X, Y) \subset C(X, Y)$;
- (e) $N_p(X, Y) \subset K(X, Y)$.

PROVA.

(a) e (c). Se $T \in SI_p(X, Y)$, então, pelos Teoremas 3.3 e 3.4, T admite J_p , que é fracamente compacto, como fator, se $1 \leq p < \infty$, ou um operador fracamente compacto B como fator, caso $p = \infty$. Segue-se então que T é fracamente compacto.

Além disso, como o domínio de J_p e B é um espaço $C(K)$, esses operadores são automaticamente completamente contínuos [DU- VI. 2.17] e como os operadores completamente contínuos tem estrutura de ideal bilateral, segue-se que T também é completamente contínuo.

(b) e (d). São conseqüências imediatas do Teorema 4.1 (a) e dos itens (a) e (c), respectivamente.

(e). Se $T \in N_p(X, Y)$, então T admite como fator um operador diagonal Δ_p $1 \leq p < \infty$ (Teoremas 3.1 e 3.2). Mas esses operadores diagonais são compactos e portanto $T \in K(X, Y)$. $\square$

O próximo teorema nos dá uma relação entre as normas si_p e n_p para operadores de posto finito. Como sua demonstração é extremamente longa e detalhada, vamos omiti-la; ela pode ser encontrada em [PP- Lemas 7 e 11].

TEOREMA 4.3. Se X^* ou Y tem a propriedade da aproximação métrica e $T \in L(X, Y)$ é um operador de posto finito, dado $\epsilon > 0$ podemos escrever

$$Tx = \sum_{n=1}^m \langle x_n^*, x \rangle y_n, \text{ para todo } x \in X,$$

com

$$\left(\sum_{n=1}^m \|x_n^*\| \right) \sup_{1 \leq n \leq m} \|y_n\| \leq si_1(T) + \epsilon, \text{ se } p = 1,$$

$$\left(\sum_{n=1}^m \|x_n^*\|^p \right)^{1/p} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^m |\langle y^*, y_n \rangle|^q \right)^{1/q} \leq si_p(T) + \epsilon,$$

$$\text{se } 1 < p < \infty,$$

e

$$\left(\sup_{1 \leq n \leq m} \|x_n^*\| \right) \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_{n=1}^m |\langle y^*, y_n \rangle| \leq si_\infty(T) + \epsilon, \text{ se } p = \infty.$$

CAPÍTULO II

OPERADORES ESTRITAMENTE p -INTEGRAIS E COMPACIDADE

Neste capítulo apresentaremos condições necessárias e/ou suficientes sobre o domínio ou sobre o contradomínio de operadores estritamente p -integrais, sob as quais esses operadores são compactos.

5. CONDIÇÕES SOBRE O DOMÍNIO.

O objeto desta seção são os espaços X tais que $SI_p(X, Y) \subset K(X, Y)$, para todo espaço Y , para um ou vários índices p , $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos esse conjunto de inclusões por $SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$.

Apresentamos um teorema caracterizando tais espaços. É interessante notar que a caracterização não depende do índice p e que $SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$ é equivalente a $I_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$.

TEOREMA 5.1. As seguintes condições sobre um espaço X são equi-

valentes:

- (1) X^* tem a propriedade fraca de Radon-Nikodym (wRNP);
- (2) $X \not\subseteq \ell_1$;
- (3) para todo p , $1 \leq p < \infty$, $SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$;
- (4) existe p , $1 \leq p < \infty$, tal que $SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$;
- (5) para todo p , $1 \leq p < \infty$, $I_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$;
- (6) existe p , $1 \leq p < \infty$, tal que $I_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$.

PROVA.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). É um resultado bem conhecido, que pode ser encontrado por exemplo em [BO], [JN], [MU] ou [DUP-página 151].

(2) $\Rightarrow$ (3). Sejam dados p , $1 \leq p < \infty$ e $T \in SI_p(X, Y)$.

Pelos Teoremas 3.3 e 3.4, podemos escrever $T = B \circ A$, onde $A \in L(X, C(K))$ e $B \in W(C(K), Y)$, para algum espaço compacto Hausdorff K .

Dada uma sequência limitada $\{x_n\}$ em X , como $X \not\subseteq \ell_1$, existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que é fracamente Cauchy em X , pelo Teorema de Rosenthal [RO] ou [DI-Capítulo XI].

Então $\{Ax_{n_k}\}$ é uma sequência fracamente Cauchy em $C(K)$.

Como $W(C(K), Y) = C(C(K), Y)$, B é completamente contínuo e portanto $\{Tx_{n_k}\} = \{B(Ax_{n_k})\}$ é convergente em norma em Y .

Logo, T é compacto.

(3) $\Rightarrow$ (4). É claro.

(4) $\Rightarrow$ (2). Sabemos, pelo Exemplo 1.12, que para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, existem um espaço Y e um operador $T: \ell_1 \rightarrow Y$ tais que $T \in SI_p(\ell_1, Y)$ e $T \notin K(\ell_1, Y)$. Precisamente, $Y = \ell_2$ e $T = i$, se $1 < p \leq \infty$, e $Y = \ell_\infty(B_{\ell_2})$ e $T = K_{\ell_2} \circ i$, se $p = 1$.

Como $T \in SI_p(\ell_1, Y)$, pelos Teoremas 3.3 e 3.4 podemos escrever

$$\begin{array}{ccc} \ell_1 & \xrightarrow{T} & Y \\ A \searrow & & \nearrow B \\ & L_\infty(\Omega, \mu) & \end{array}$$

onde (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, $B \in SI_p(L_\infty(\mu), Y)$, e $A \in L(\ell_1, L_\infty(\mu))$.

Suponhamos que $X \supsetneq \ell_1$.

Já que $L_\infty(\Omega, \mu)$ tem a propriedade de extensão [PI-C.3], A pode ser estendido a X , dando-nos um operador $\hat{A}: X \rightarrow L_\infty(\mu)$.

Então o operador $\hat{T} = B \circ \hat{A}$ é estritamente p -integral, porque B o é, mas não é compacto, pois senão sua restrição a ℓ_1 , que é T , também o seria, o que sabemos não ser verdade.

Portanto $X \not\supset \ell_1$.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) e (4) $\Leftrightarrow$ (6). São consequências de

$SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot) \Leftrightarrow I_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$, para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$, pois

$$T \in I_p(X, Y) \Leftrightarrow J_Y \circ T \in SI_p(X, Y^{**}),$$

pela Definição 1.4, e

$T \in K(X, Y) \iff J_Y \circ T \in K(X, Y^{**})$, porque J_Y é uma isometria. □

6. CONDIÇÕES SOBRE O CONTRADOMÍNIO.

Nesta seção estudaremos os espaços Y tais que $SI_p(X, Y) \subset K(X, Y)$, para todo espaço X , para um ou vários índices p , $1 \leq p \leq \infty$. Como na seção 5, denotamos essa situação por $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$.

Em 1969, Uhl [UH] apresentou uma condição suficiente sobre o espaço Y para garantir que $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$, especificamente, que Y tenha RNP.

O Teorema 6.1 é um resultado não publicado de Diestel, enfraquecendo a condição para Y com wRNP, ainda para $p = 1$. É uma bonita aplicação do Teorema de Fremlin [FR]. Existe ainda uma outra prova deste resultado devida a Emmanuelle [EM], não publicada.

Parte de nosso trabalho foi verificar o que acontece quando $p > 1$ e é interessante notar que essa mesma condição não se mantém suficiente, como o Exemplo 6.2 vai mostrar. Nem mesmo a hipótese mais forte de Y ter RNP, ou ser reflexivo, ou mesmo ser um espaço de Hilbert é suficiente.

Apresentaremos aqui algumas condições necessárias e algumas condições suficientes.

Não conhecemos ainda uma condição simultaneamente necessária e suficiente para p arbitrário.

Entretanto, se $p = 1$ e Y é um espaço dual, o Teorema 6.13 nos dá uma resposta completa.

Também para $2 \leq p < \infty$ e para $p = \infty$ teremos uma caracterização completa nos Teoremas 6.11 e 6.9, respectivamente. Como veremos no Capítulo IV, temos ainda que $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$ é equivalente a $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, para $2 \leq p < \infty$ e para $p = \infty$ (Teoremas 11.9 e 12.6).

Pretendemos continuar nossos estudos em direção a uma solução completa dos casos $1 \leq p < 2$, além de tentar esclarecer se as condições dos Teoremas 6.14 e 6.9 (ou 11.9 e 12.6) são equivalentes.

TEOREMA 6.1 (Diestel).

Se Y tem WRNP, então $SI_1(.,Y) \subset K(.,Y)$.

PROVA. Seja $T \in SI_1(X,Y)$ e consideremos uma fatoração de T da forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 A \downarrow & & \uparrow B \\
 L_\infty(\Omega, \mu) & \xrightarrow{J_1} & L_1(\Omega, \mu)
 \end{array}$$

onde (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, que podemos assumir completo, sem perda de generalidade.

Como Y tem RNP, o operador $S = B \circ J_1: L_\infty(\Omega, \mu) \rightarrow Y$ é representado por uma função Pettis-integral $g: \Omega \rightarrow Y$,

$$Sf = (P) \int_{\Omega} f g d\mu, \text{ para toda } f \in L_\infty(\Omega, \mu),$$

e portanto $S^*(Y^*) \subset L_1(\Omega, \mu) \subset L_1(\Omega, \mu)^{**}$ onde estamos interpretando $L_1(\Omega, \mu)$ como subconjunto de seu bidual e identificando $L_\infty(\Omega, \mu)^*$ com $L_1(\Omega, \mu)^{**}$.

Seja $\{y_n^*\}$ uma sequência em B_{Y^*} e consideremos a sequência de funções $\{y_n^* g\}$, dada por $(y_n^* g)(t) = \langle g(t), y_n^* \rangle$, para todo $t \in \Omega$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema de Alaoglu [DS-V.4.2], esta sequência tem pelo menos um ponto de acumulação na topologia da convergência pontual, da forma $y_0^* g$ para algum $y_0^* \in B_{Y^*}$.

Aplicando o teorema de Fremlin [FR] ou [DUP- página 149], obtemos que $\{y_n^* g\}$ admite uma subsequência $\{y_{n_k}^* g\}$ que converge μ -quase sempre para $y_0^* g$.

Mas

$$(S^* y_n^*)(h) = \int_{\Omega} \langle g, y_n^* \rangle h d\mu, \text{ para toda } h \in L_\infty(\Omega, \mu), \text{ e}$$

portanto $S^* y_n^* = y_n^* g$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\{S^* y_n^*\}$ admite uma subsequência $\{S^* y_{n_k}^*\}$ μ -quase sempre convergente para $S^* y_0^*$.

Como a integral indefinida de Pettis de g é μ -contínua, $S^*(B_{Y^*})$ é uniformemente integrável e portanto $\{S^* y_{n_k}^*\}$ converge

para S^*y^* na norma de $L_1(\Omega, \mu)$.

Segue-se que S e $T = S \circ A$ são compactos. $\square$

Nosso próximo exemplo mostra que o Teorema 6.1 não vale para $p > 1$, e que, nessa situação, nem mesmo as hipóteses mais fortes de Y ter RNP, ser reflexivo ou mesmo ser um espaço de Hilbert são suficientes para $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$.

EXEMPLO 6.2. A inclusão natural $i : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ é estritamente p -integral, para $1 < p \leq \infty$, mas não é compacta.

Outros exemplos nos dão algumas condições necessárias.

EXEMPLO 6.3. As inclusões canônicas $i_0 : \ell_1 \rightarrow c_0$ e $i_r : \ell_1 \rightarrow \ell_r$, $r \geq 2$, são estritamente p -integrais, para $1 < p \leq \infty$, mas não são compactas.

De fato, basta observar que i_0 e i_r podem ser fatorados através do operador i do Exemplo 6.2:

onde A é a inclusão canônica, em ambos os casos.

EXEMPLO 6.4. A inclusão canônica $J_1 : C[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$ é estritamente p -integral, $1 \leq p \leq \infty$, mas não é compacta.

De fato, J_1 é um dos operadores estritamente 1-integrais canônicos e pela monotonicidade de SI_p , é também estritamente p -integral, $1 < p \leq \infty$. Mas J_1 não é um operador compacto!

TEOREMA 6.5. Se para algum p , $1 < p \leq \infty$, $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$, então $Y \not\subset \ell_r$, $r \geq 2$ e $Y \not\subset c_0$.

PROVA. Exemplos 6.2 e 6.3. □

TEOREMA 6.6. Se para algum p , $1 \leq p \leq \infty$, $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$, então $Y \not\subset L_1[0,1]$.

PROVA. Exemplo 6.4. □

A seguir, apresentamos uma condição suficiente óbvia, para $1 \leq p \leq \infty$.

TEOREMA 6.7. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $W(L_p(\Omega, \mu), Y) = K(L_p(\Omega, \mu), Y)$ para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , então $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$.

PROVA. Basta observar que, pelos Teoremas 3.3 e 3.4, todo operador $T \in SI_p(X,Y)$ admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 \hat{A} \searrow & & \nearrow B \\
 & L_p(\Omega, \mu) &
 \end{array}$$

para algum espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , onde $B \in W(L_p(\Omega, \mu), Y)$.

Por hipótese, B é compacto, e portanto T também é compacto. □

Como exemplo trivial de espaços que satisfazem a hipótese do Teorema 6.7 temos os espaços de Schur. Lembramos que X é um espaço de Schur (ou tem a propriedade de Schur) se toda sequência fracamente Cauchy em X é convergente em norma. Assim,

COROLÁRIO 6.8. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se Y é um espaço de Schur, então $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$.

PROVA. Se Y é um espaço de Schur, então $W(., Y) = K(., Y)$, como é fácil ver. Basta aplicar então o Teorema 6.7. □

Vale a pena salientar que não são só os espaços de Schur que satisfazem a hipótese do Teorema 6.7. Como veremos no Capítulo IV, também o espaço de Tsirelson $\mathcal{J}$ [TI], que não é Schur, satisfaz $W(L_p(\Omega, \mu), \mathcal{J}) = K(L_p(\Omega, \mu), \mathcal{J})$ para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) e todo p , $1 \leq p \leq \infty$.

Quando $p = \infty$, os Teoremas 6.5 e 6.7 nos dão uma caracterização dos espaços tais que $SI_\infty(., Y) \subset K(., Y)$.

TEOREMA 6.9. As seguintes condições sobre um espaço Y são equivalentes:

- (1) $SI_{\infty}(\cdot, Y) \subset K(\cdot, Y)$;
- (2) $L(C(K), Y) = K(C(K), Y)$, para todo espaço compacto Hausdorff K ;
- (3) $W(C(K), Y) = K(C(K), Y)$, para todo espaço compacto Hausdorff K ;
- (4) $L(L_{\infty}(\Omega, \mu), Y) = K(L_{\infty}(\Omega, \mu), Y)$, para todo espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$;
- (5) $W(L_{\infty}(\Omega, \mu), Y) = K(L_{\infty}(\Omega, \mu), Y)$, para todo espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$.

PROVA.

(1) $\Rightarrow$ (2). Tomando $X = C(K)$ na hipótese, temos que $SI_{\infty}(C(K), Y) \subset K(C(K), Y)$. Mas $SI_{\infty}(C(K), Y) = W(C(K), Y)$, como vimos no Exemplo 1.10 e portanto $W(C(K), Y) = K(C(K), Y)$.

Além disso, sabemos, do Teorema 6.5, que $Y \not\in C_0$, e por um resultado de Pelczynski [P2] ou [DU-VI.2.15], segue-se que $L(C(K), Y) = W(C(K), Y)$.

Logo, $L(C(K), Y) = K(C(K), Y)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) e (4) $\Rightarrow$ (5). São óbvios.

(3) $\Rightarrow$ (5) e (2) $\Rightarrow$ (4). Decorrem da identificação de $L_{\infty}(\Omega, \mu)$ com $C(K)$, para algum espaço compacto Hausdorff K .

(5) $\Rightarrow$ (1). É o Teorema 6.7. □

Também para $2 \leq p \leq \infty$ temos uma descrição completa dos espaços Y tais que $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$.

Queremos agradecer ao Professor Hans Jarchow que, tendo tomado conhecimento de parte de nosso trabalho, se interessou pelo assunto e posteriormente nos apontou que, para $2 \leq p < \infty$, $L(L_p(\Omega, \mu), Y) = K(L_p(\Omega, \mu), Y)$ para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , é equivalente a $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$. Com isso, ele nos motivou a elaborar uma prova desse resultado, o que afinal nos levou aos Teoremas 6.10 e 6.11, e, em consequência, ao Teorema 11.9.

Para a demonstração do Teorema 6.10, precisaremos de informações sobre subespaços de $L_p(\Omega, \mu)$, as quais podem ser encontradas no trabalho de Kadec-Pelczynski [KP].

TEOREMA 6.10. Se $SI_2(.,Y) \subset K(.,Y)$, então para todo p , $2 \leq p < \infty$, e para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , temos que $L(L_p(\Omega, \mu), Y) = K(L_p(\Omega, \mu), Y)$.

PROVA. Sejam (Ω, Σ, μ) espaço de medida finita e p , $2 \leq p < \infty$, fixados, e suponhamos que exista um operador não compacto $T: L_p(\Omega, \mu) \rightarrow Y$.

Existe então uma sequência limitada $\{f_n\}$ em $L_p(\mu)$ tal que $\{Tf_n\}$ não tem subsequência convergente em norma.

Podemos assumir, tomando subsequência de $\{f_n\}$, se necessário, que:

(i) $\{f_n\}$ é fracamente convergente para zero, pois $L_p(\mu)$ é reflexivo;

(ii) existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\|f_n\|_p \geq \epsilon_0 > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, que é verdade para alguma subsequência de $\{f_n\}$, senão $\|f_n\|_p \xrightarrow{p} 0$;

(iii) $\|f_n\|_p = 1$, pois basta considerar $g_n = f_n / \|f_n\|_p$, para $n \in \mathbb{N}$, e teremos $\|g_n\|_p = 1$, para $n \in \mathbb{N}$ e $g_n \xrightarrow{w} 0$.

Pelo Princípio de Seleção de Bessaga - Pelczynski [BP] ou [DI-página 42], existe uma subsequência de $\{f_n\}$ que é sequência básica, isto é, é base do subespaço gerado por ela. Para simplificar, continuaremos denotando por $\{f_n\}$ essa subsequência.

Seja Z o subespaço de $L_p(\mu)$ gerado por $\{f_n\}$.

Se $p = 2$, Z é necessariamente isomorfo a ℓ_2 , pois Z é um espaço de Hilbert separável. Além disso, a base canônica de ℓ_2 é levada na base de Z pelo isomorfismo.

Se $2 < p < \infty$, então Z contém um subespaço isomorfo a ℓ_2 ou a ℓ_p [KP-Corolário 6], sendo que o isomorfismo leva a base canônica de ℓ_2 ou de ℓ_p numa subsequência $\{f_{n_k}\}$, que ainda é sequência básica. Note-se que Kadec e Pelczynski trabalham somente com $L_p[0,1]$, mas fazem a ressalva de que seus resultados valem para qualquer espaço de medida [KP-página 162].

De qualquer modo, para $2 \leq p < \infty$, existe um isomorfis-

mo $R: \ell_2 \rightarrow L_p(\mu)$ ou $R: \ell_p \rightarrow L_p(\mu)$ tal que $Re_k = f_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos o operador $S: \ell_1 \rightarrow Y$ dado por

$$S = T \circ R \circ i_p,$$

onde $i_p: \ell_1 \rightarrow \ell_p$ é a inclusão canônica de ℓ_1 em ℓ_p .

Como vimos no Exemplo 6.3, $i_p \in SI_r(\ell_1, \ell_p)$, para $1 < r \leq \infty$, pois $p \geq 2$. Então $S \in SI_r(\ell_1, Y)$. Em particular, $S \in SI_{2,1}(\ell_1, Y)$. Mas S não é compacto, pois $\{Se_k\} = \{Tf_{n_k}\}$ e sabemos que nenhuma subsequência de $\{Tf_n\}$ é convergente em Y .

Isso contradiz nossa hipótese de $SI_2(., Y) \subset K(., Y)$. Portanto, não existe $T: L_p(\mu) \rightarrow Y$ que não seja compacto, e então $L(L_p(\Omega, \mu), Y) = K(L_p(\Omega, \mu), Y)$. $\square$

TEOREMA 6.11. As seguintes condições sobre o espaço Y são equivalentes:

- (1) para todo p , $2 \leq p < \infty$, $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$;
- (2) existe p , $2 \leq p < \infty$, tal que $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$;
- (3) para todo p , $2 \leq p < \infty$, $L(L_p(\Omega, \mu), Y) = K(L_p(\Omega, \mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ;
- (4) existe p , $2 \leq p < \infty$, tal que $L(L_p(\Omega, \mu), Y) = K(L_p(\Omega, \mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

PROVA.

- (1) $\Rightarrow$ (2) e (3) $\Rightarrow$ (4). São triviais.

(2) $\Rightarrow$ (3). Assumindo (2), temos que $SI_2(.,Y) \subset K(.,Y)$, pela monotonicidade de SI_p . Pelo Teorema 6.10, vale (3).

(4) $\Rightarrow$ (1). Pelo Teorema 6.7, temos que $SI_p(.,Y) \subset K(.,Y)$, para o tal p que existe por hipótese. Novamente temos $SI_2(.,Y) \subset K(.,Y)$ e pelos Teoremas 6.10 e 6.7 vale (1). $\square$

Quando Y é um espaço dual, o Teorema 6.6 tem a seguinte consequência.

TEOREMA 6.12. Se para algum p , $1 \leq p \leq \infty$, tivermos $SI_p(.,Z^*) \subset K(.,Z^*)$, então $Z \not\hookrightarrow \ell_1$ (ou Z^* tem WRNP).

PROVA. Suponhamos que $Z \hookrightarrow \ell_1$. Segue de resultados de Pelczynski [P1] e Hagler [H1] que $Z^* \hookrightarrow L_1[0,1]$. Mas isso não pode ocorrer, como vimos no Teorema 6.6. Então $Z \not\hookrightarrow \ell_1$. $\square$

Os Teoremas 6.1 e 6.12 nos dão uma completa caracterização dos espaços Z tais que $SI_1(.,Z^*) \subset K(.,Z^*)$.

TEOREMA 6.13 As seguintes condições são equivalentes:

- (1) Z^* tem WRNP;
- (2) $Z \not\hookrightarrow \ell_1$;
- (3) $SI_1(.,Z^*) \subset K(.,Z^*)$.

PROVA. Segue imediatamente dos Teoremas 6.1 e 6.12 e de [B0], [JN] ou [DUP - página 151]. $\square$

CAPÍTULO III

SOBRE OS ESPAÇOS X TAIS QUE

$$SI_p(X, Y) = N_p(X, Y), \text{ PARA TODO ESPAÇO } Y.$$

7. INTRODUÇÃO.

Neste capítulo apresentaremos condições necessárias e/ou suficientes sobre o espaço X , para que $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$, isto é, $SI_p(X, Y) = N_p(X, Y)$, para todo espaço Y , para um ou vários índices p , $1 \leq p \leq \infty$, com igualdade de normas.

Motivou-nos para este estudo o fato de que, no caso $p = 1$, essa igualdade caracteriza os espaços X tais que X^* tem a propriedade de Radon-Nikodym.

TEOREMA 7.1. O espaço X^* tem RNP se e somente se $SI_1(X, \cdot) = N_1(X, \cdot)$, com $si_1(\cdot) = n_1(\cdot)$.

Em [DU-VIII. 4.6] encontramos um teorema similar, com operadores 1-integrais (ou Grothendieck-integrais), onde se exi-

ge a propriedade da aproximação para X^* .

Entretanto, para operadores estritamente 1-integrais (ou Pietsch-integrais), não há necessidade da propriedade da aproximação.

A implicação "se" do Teorema 7.1 decorre do resultado citado acima, pois nessa direção não se precisa da propriedade da aproximação, e de que $SI_1(X,Y) \subset I_1(X,Y)$, como vimos no Teorema 4.1(b). A implicação inversa é bem conhecida, embora não esteja explicitamente provada em [DU]. De qualquer modo, o Teorema 8.3 supre essa prova. Outras demonstrações podem ser encontradas em [AL] e em [AS].

Os casos $1 < p \leq \infty$ já não são tão conhecidos. O trabalho mais antigo que conhecemos a esse respeito é o de Persson [PE], onde se obtém que se X é reflexivo ou se X^* é separável, então $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$, $1 \leq p < \infty$. Até onde sabemos, é geralmente aceito que se X^* tem RNP, então $SI_p(X,.) = N_p(X,.)$, para $1 < p < \infty$, mas a única prova que conhecíamos até pouco tempo nos tinha sido indicada pelo Professor Joe Diestel, e é a que aparece no Teorema 8.2. Esta é uma generalização dos resultados de Persson, já que se X é reflexivo ou se X^* for separável, então X^* tem RNP. Quando este estudo estava pronto, tomamos conhecimento do trabalho de Aharoni e Saphar [AS], em que eles tratam dos casos $1 \leq p \leq \infty$. Para $1 \leq p < \infty$, eles obtêm exatamente o

mesmo que temos no Teorema 8.3.

Sobre o caso $p = \infty$, que constitui nossa seção 9, não tínhamos nenhuma informação quando iniciamos este estudo. Mesmo em [AS], que nos chegou às mãos posteriormente, quando $p = \infty$, é imposta uma condição extra sobre o contradomínio Y , para se obter um resultado semelhante ao dos casos $1 \leq p < \infty$. Entretanto, com um resultado de [AS] e usando a fatoração de operadores fracamente compactos através de espaços reflexivos [DFJP], é possível deduzir-se o mesmo resultado que obtivemos, especificamente, que

$$X^* \text{ RNP} \implies SI_{\infty}(X, \cdot) = N_{\infty}(X, \cdot),$$

mas sua demonstração é diferente das duas que faremos (Teoremas 9.2 e 9.3).

8. CASOS $1 \leq p < \infty$.

DEFINIÇÃO 8.1.

(a) Um espaço de Banach W é um espaço de Asplund se W^* tem RNP.

(b) Um operador $T: X \rightarrow Y$ é um operador de Asplund se admite uma fatoração da forma

onde W é um espaço de Asplund, $P \in L(X, W)$ e $Q \in L(W, Y)$.

A definição original de um espaço de Asplund W é a descrição de uma propriedade geométrica através da diferenciabilidade da norma. Acontece que essa propriedade geométrica é equivalente a W^* ter RNP e como é nessa forma que vamos utilizá-la, achamos mais conveniente introduzir os espaços de Asplund com a Definição 8.1(a).

TEOREMA 8.2. Seja $1 \leq p < \infty$. Se $S \in L(X, Y)$ é um operador de Asplund e $T \in SI_p(Y, Z)$, então $T \circ S \in N_p(X, Z)$, com $n_p(T \circ S) \leq \|S\| si_p(T)$.

PROVA. Sejam dados $T \in SI_p(Y, Z)$ e $\epsilon > 0$ e escolhamos uma fatoração de T da forma

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{T} & Z \\ A \downarrow & & \uparrow B \\ L_\infty(\Omega, \mu) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\Omega, \mu) \end{array}$$

onde (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, $A \in L(Y, L_\infty(\Omega, \mu))$, $B \in L(L_p(\Omega, \mu), Z)$, $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$ e $\mu(\Omega)^{1/p} \leq si_p(T) + \epsilon/2$.

Como S é um operador de Asplund, ele admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S} & Y \\ P \searrow & & \nearrow Q \\ & W & \end{array}$$

onde W é um espaço de Asplund (logo, W^* tem RNP), $Q \in L(W, Y)$, com

$\|Q\| \leq 1$ e $P \in L(X, W)$, com $\|P\| \leq \|S\| + \epsilon$.

Então

Consideremos $A \circ Q: W \rightarrow L_\infty(\Omega, \mu)$ e $(A \circ Q)^*: L_\infty(\Omega, \mu)^* \rightarrow W^*$

Seja $R = (A \circ Q)^*|_{L_1(\Omega, \mu)}$. Como W^* tem RNP, R é representável por uma função μ -mensurável $g: \Omega \rightarrow W^*$, $g \in L_\infty(\Omega, \mu; W^*)$, ou seja,

$$Rf = \int_{\Omega} f(t)g(t)d\mu(t), \quad \text{para toda } f \in L_1(\Omega, \mu),$$

com $\|g\|_\infty = \|R\| \leq \|(A \circ Q)^*\| = \|A \circ Q\| \leq 1$.

Definindo $F: \Omega \rightarrow W^*$ por

$\langle F(t), w \rangle = [(A \circ Q)(w)](t)$, para $t \in \Omega$ e $w \in W$, temos que $\langle F(\cdot), w \rangle \in L_\infty(K, \mu)$, para todo $w \in W$ e então existe a integral

$$\int_{\Omega} f(t) \langle F(t), w \rangle d\mu(t), \quad \text{para } f \in L_1(\Omega, \mu) \text{ e } w \in W.$$

Mas para toda $f \in L_1(\Omega, \mu)$ e todo $w \in W$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(t) \langle F(t), w \rangle d\mu(t) &= \int_{\Omega} f(t) [(A \circ Q)(w)](t) d\mu(t) \\ &= \langle f, (A \circ Q)(w) \rangle = \langle Rf, w \rangle, \end{aligned}$$

e portanto $\langle F(t), w \rangle = \langle g(t), w \rangle$, μ -quase sempre em Ω , para todo $w \in W$.

Logo, $F = g$ μ -quase sempre e $F \in L_\infty(\Omega, \mu; W^*)$.

Caso 1. F tem imagem enumerável

Seja $\{u_n^*: n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de valores distintos não nulos de F, tais que $\mu(F^{-1}\{u_n^*\}) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definindo $E_n = F^{-1}\{u_n^*\}$, temos que E_n é μ -mensurável. Além disso, a seqüência $\{E_n\}$ é disjunta.

Para $w \in W$, temos que

$$(J_p \circ A \circ Q)(w) = \langle F(\cdot), w \rangle = \sum_n \langle u_n^*, w \rangle \chi_{E_n}(\cdot).$$

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$w_n^* = \mu(E_n)^{1/p} u_n^* \quad \text{e} \quad f_n = \mu(E_n)^{-1/p} \chi_{E_n}$$

Temos $\{w_n^*\}$ em W^* e $\{f_n\}$ em $L_p(\Omega, \mu)$. Além disso

$$\sum_n \|w_n^*\|^p = \sum_n \|u_n^*\|^p \mu(E_n) = \|F\|_p^p \leq \|F\|_\infty^p \mu(\Omega),$$

e para cada $h \in L_q(\Omega, \mu) = L_p(\Omega, \mu)^*$, $\|h\|_q \leq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle h, f_n \rangle|^q &= \sum_n \mu(E_n)^{-q/p} \left| \int_{E_n} h d\mu \right|^q \\ &\leq \sum_n \mu(E_n)^{-q/p} \left[\int_{E_n} 1^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int_{E_n} |h|^q d\mu \right]^{1/q} \\ &= \sum_n \int_{E_n} |h|^q d\mu \leq \|h\|_q^q, \text{ se } 1 < q < \infty, \end{aligned}$$

e

$$\sup_n |\langle h, f_n \rangle| = \sup_n \mu(E_n)^{-1} \left| \int_{E_n} h d\mu \right| \leq \|h\|_\infty, \text{ se } q = \infty \text{ (ep=1)}.$$

Logo,

$$\sup_{h \in B_{L_q}} \left(\sum_n |\langle h, f_n \rangle|^q \right)^{1/q} \leq 1, \text{ se } 1 < q < \infty,$$

e

$$\sup_{h \in B_{L_\infty}} \sup_n |\langle h, f_n \rangle| \leq 1, \text{ se } q = \infty.$$

Portanto $\{w_n^*\}$ em W^* e $\{f_n\}$ em $L_p(\Omega, \mu)$ satisfazem as condições (ii) e (iii) da Definição 1.1 e como

$$(J_p \circ A \circ Q)(w) = \sum_n \langle w_n^*, w \rangle f_n, \text{ para todo } w \in W,$$

temos $J_p \circ A \circ Q \in N_p(W, L_p(\Omega, \mu))$, com $n_p(J_p \circ A \circ Q) \leq \|F\|_\infty \mu(\Omega)^{1/p} \leq si_p(T) + \epsilon$, pois $\|F\|_\infty = \|g\|_\infty \leq 1$.

Pelo Teorema 2.1, $ToS = B \circ J_p \circ A \circ Q \circ P \in N_p(X, Z)$ e $n_p(ToS) \leq (\|S\| + \epsilon)(si_p(T) + \epsilon)$. Como ϵ é arbitrário, $n_p(ToS) \leq \|S\| si_p(T)$.

Caso 2. F não tem necessariamente imagem enumerável.

Como F é μ -mensurável, existe uma seqüência $\{F_n\}$ em $L_\infty(\Omega, \mu; W^*)$, cada F_n com imagem enumerável, tal que $\|F_n - F\|_\infty \xrightarrow{n} 0$ [DU-II.1.3].

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definindo $R_n: W \rightarrow L_\infty(\Omega, \mu)$ por

$$R_n w = \langle F_n(\cdot), w \rangle, \text{ para todo } w \in W,$$

temos que $\|R_n\| = \|F_n\|_\infty$ e $J_p \circ R_n \in N_p(W, L_p(\Omega, \mu))$, com $n_p(J_p \circ R_n) \leq \|F_n\|_\infty \mu(\Omega)^{1/p}$ pelo Caso 1. Pela mesma razão,

$J_p \circ (R_n - R_m) \in N_p(W, L_p(\Omega, \mu))$, com $n_p(J_p \circ (R_n - R_m)) \leq \|F_n - F_m\|_\infty \mu(\Omega)^{1/p}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Portanto $\{J_p \circ R_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em $N_p(W, L_p(\Omega, \mu))$, que então converge em norma n_p para algum elemen-

to desse espaço. Mas $\{J_p \circ R_n\}$ converge em norma para $J_p \circ A \circ Q$ e como $\|\cdot\| \leq n_p(\cdot)$, temos que $J_p \circ R_n$ converge em norma n_p para $J_p \circ A \circ Q$.

Logo, $J_p \circ A \circ Q \in N_p(W, L_p(\Omega, \mu))$ e $n_p(J_p \circ A \circ Q) \leq \|F\|_\infty \mu(\Omega)^{1/p} \leq si_p(T) + \epsilon$.

Como antes, pela estrutura de ideal de N_p e por ϵ ser arbitrário, segue-se que $T \circ S \in N_p(X, Z)$ e $n_p(T \circ S) \leq \|S\| si_p(T)$. $\square$

Como consequência, temos

TEOREMA 8.3. Se X^* tem RNP, então $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$ com $si_p(\cdot) = n_p(\cdot)$.

PROVA. Se X^* tem RNP, então Id_X é um operador de Asplund. Aplicando os Teoremas 8.2 e 4.1(a), obtemos o resultado desejado. $\square$

Como uma condição necessária, temos

TEOREMA 8.4. Se para algum p , $1 \leq p \leq \infty$, $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$, então $X \not\in \mathcal{L}_1$ (ou X^* tem WRNP).

PROVA. Segue dos Teoremas 5.1 e 4.2 (e). $\square$

Não conhecemos por enquanto uma condição simultaneamente necessária e suficiente. Trabalhamos um pouco com o dual do espaço-árvore de James JT^* [JA] ou [LS], que tem $wRNP$ mas não tem RNP , mas não chegamos a uma situação conclusiva. Estamos ainda trabalhando nesse tópico.

Entretanto, quando X^* é um reticulado de Banach, ou mais geralmente se X^* é complementado num reticulado de Banach, RNP e $wRNP$ coincidem em X^* [GS-Proposição 8]. Consequentemente, para esse tipo de espaço X temos uma caracterização completa de $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$, para um ou todo p , $1 \leq p < \infty$. Devido ao Teorema 9.2, isso também vale para $p = \infty$ e por isso enunciamos o resultado completo na próxima seção (Teorema 9.5).

9. CASO $p = \infty$.

Também neste caso, como adiantamos na seção 7, X^* com RNP é uma condição suficiente para $SI_\infty(X, \cdot) = N_\infty(X, \cdot)$.

Apresentaremos aqui duas provas diferentes desse resultado, a primeira no Teorema 9.2, como consequência de um teorema de multiplicação e depois uma prova direta, no Teorema 9.3.

TEOREMA 9.1. Se $S \in L(X, Y)$ é um operador de Asplund e $T \in SI_\infty(X, Y)$,

então $T \circ S \in N_\infty(X, Z)$ e $n_\infty(T \circ S) \leq \|S\| \operatorname{si}_\infty(T)$.

PROVA. Dados $T \in SI_\infty(Y, Z)$ e $\epsilon > 0$, escolhemos uma fatoração de T da forma

onde (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, $A \in L(Y, L_\infty(\Omega, \mu))$, com $\|A\| \leq 1$ e $B \in W(L_\infty(\Omega, \mu), Z)$ é representado por uma medida vetorial σ -aditiva $G: \Sigma \rightarrow Z$, com $\|G\|(\Omega) \leq \operatorname{si}_\infty(T) + \epsilon$.

Como S é um operador de Asplund, ele admite uma fatoração da forma

onde W^* tem RNP, $Q \in L(W, Y)$, com $\|Q\| \leq 1$ e $P \in L(X, W)$, com $\|P\| \leq \|S\| + \epsilon$.

Então

Consideremos $A \circ Q: W \rightarrow L_\infty(\Omega, \mu)$ e seu adjunto

$$(A \circ Q)^*: L_\infty(\Omega, \mu)^* \rightarrow W^*.$$

Como $L_1(\Omega, \mu) \subset L_\infty(\Omega, \mu)^* = L_1(\Omega, \mu)^{**}$ pela inclusão canônica, e W^* tem RNP, o operador $(A \circ Q)^*|_{L_1}$ é representável

por uma função $g \in L_\infty(\Omega, \mu; W^*)$,

$$(A) \quad (A \circ Q)^* f = \int_{\Omega} f(t) g(t) d\mu(t), \text{ para toda } f \in L_1(\Omega, \mu).$$

Por outro lado, $A \circ Q$ define uma função $F : \Omega \rightarrow W^*$, por

$$\langle F(t), w \rangle = [(A \circ Q)(w)](t), \text{ para } t \in \Omega \text{ e } w \in W.$$

Então $\langle F(\cdot), w \rangle \in L_\infty(\Omega, \mu)$, para todo $w \in W$ e existe a integral

$$\int_{\Omega} f(t) \langle F(t), w \rangle d\mu(t), \text{ para } f \in L_1(\Omega, \mu) \text{ e } w \in W.$$

Mas

$$(B) \quad \int_{\Omega} f(t) \langle F(t), w \rangle d\mu(t) = \int_{\Omega} f(t) [(A \circ Q)(w)](t) d\mu(t) \\ = \langle f, (A \circ Q)(w) \rangle = \langle (A \circ Q)^* f, w \rangle,$$

para toda $f \in L_1(\Omega, \mu)$ e todo $w \in W$.

Comparando (A) e (B) temos que

$$\langle F(t), w \rangle = \langle g(t), w \rangle, \quad \mu\text{-quase sempre em } \Omega, \text{ para todo } w \in W.$$

Portanto $F = g$ μ -quase sempre em Ω e $F \in L_\infty(\Omega, \mu; W^*)$.

Caso 1. F tem imagem enumerável.

Seja $\{u_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto enumerável de valores distintos não nulos de F .

Definimos $E_n = F^{-1} \{u_n^*\} = \{t \in \Omega : F(t) = u_n^*\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como F é μ -mensurável, cada E_n é μ -mensurável. Além disso, a família $\{E_n\}$ é disjunta.

Temos

$$(B \circ A \circ Q)(w) = \int_{\Omega} [(A \circ Q)(w)](t) dG(t) = \int_{\Omega} \langle F(t), w \rangle dG(t)$$

$$= \sum_n \langle u_n^*, w \rangle G(E_n), \text{ para todo } w \in W,$$

e $\sup_n \|u_n^*\| = \|F\|_\infty \leq \|A \circ Q\| \leq 1.$

Como G é σ -aditiva e $\{E_n\}$ é uma seqüência disjunta de elementos da σ -álgebra $\mathcal{E}$, temos

$$\sup_{z^* \in B_{Z^*}} \sum_n |\langle z^*, G(E_n) \rangle| \leq \|G\|(\Omega) < \infty$$

e

$$\lim_n \sum_{m > n} |\langle z^*, G(E_m) \rangle| = 0, \text{ uniformemente em } z^* \in B_{Z^*} \text{ [DU-I.1.18]}.$$

Seja dado $\delta > 0$ e escolhamos $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ tais que

$$\sum_{n > n_k} |\langle z^*, G(E_n) \rangle| < \frac{\delta}{k 2^k}, \text{ para } k \in \mathbb{N} \text{ e } z^* \in B_{Z^*}.$$

Definindo, para $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n^* = \begin{cases} u_n^* & , \text{ se } 1 \leq n \leq n_1, \\ k^{-1} u_n^* & , \text{ se } n_k < n \leq n_{k+1}, \text{ para } k \geq 1, \end{cases}$$

$$e \quad z_n = \begin{cases} G(E_n), & \text{se } 1 \leq n \leq n_1, \\ kG(E_n), & \text{se } n_k < n \leq n_{k+1}, \text{ para } k \geq 1, \end{cases}$$

temos

$$(i) \quad (B \circ A \circ Q)(w) = \sum_n \langle w_n^*, w \rangle z_n, \text{ para } w \in W;$$

$$(ii) \quad \|w_n^*\| \xrightarrow{n} 0 \quad e \quad \sup_n \|w_n^*\| \leq \|F\|_\infty \leq 1;$$

de fato, como

$$\|w_n^*\| \leq \begin{cases} \|F\|_\infty, & \text{se } 1 \leq n \leq n_1, \\ k^{-1} \|F\|_\infty, & \text{se } n_k < n \leq n_{k+1}, \text{ para } k \geq 1, \end{cases}$$

temos $0 \leq \lim_n \|w_n^*\| \leq \lim_k k^{-1} \|F\|_\infty = 0$ e $\sup \|w_n^*\| \leq \|F\|_\infty$;

$$(iii) \sup_{z^* \in B_{Z^*}} \sum_n |\langle z^*, z_n \rangle| \leq \|G\|(\Omega) + \delta;$$

de fato, para cada $z^* \in B_{Z^*}$,

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle z^*, z_n \rangle| &= \sum_{n=1}^{n_1} |\langle z^*, G(E_n) \rangle| + \sum_k \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |\langle z^*, kG(E_n) \rangle| \\ &\leq \sum_n |\langle z^*, G(E_n) \rangle| + \sum_k k \left(\sum_{n>n_k} |\langle z^*, G(E_n) \rangle| \right) \\ &\leq \|G\|(\Omega) + \sum_k k \frac{\delta}{k^2} = \|G\|(\Omega) + \delta. \end{aligned}$$

As condições (i), (ii) e (iii) nos dão $BoAoQ \in N_\infty(W, Z)$ e $n_\infty(BoAoQ) \leq \|F\|_\infty (\|G\|(\Omega) + \delta)$. Como δ é arbitrário, temos $n_\infty(BoAoQ) \leq \|F\|_\infty \|G\|(\Omega)$. Mas sabemos que $\|F\|_\infty \leq 1$ e que $\|G\|(\Omega) \leq si_\infty(T) + \epsilon$, e portanto $n_\infty(BoAoQ) \leq si_\infty(T) + \epsilon$.

Já que $ToS = BoAoQ \circ P$, temos $ToS \in N_\infty(Z, Z)$ e $n_\infty(ToS) \leq \|P\| n_\infty(BoAoQ) < (\|S\| + \epsilon)(si_\infty(T) + \epsilon)$, pelo Teorema 2.1. Mas ϵ é arbitrário, e então $n_\infty(ToS) \leq \|S\| si_\infty(T)$.

Caso 2. F não tem necessariamente imagem enumerável.

Como F é μ -mensurável, existe uma sequência $\{F_n\}$ em $L_\infty(\Omega, \mu; W^*)$, cada F_n com imagem enumerável, tal que $\|F_n - F\|_\infty \xrightarrow{n} 0$ [DU-II.1.3].

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $R_n: W \rightarrow Z$ por

$$R_n w = \int_{\Omega} \langle F_n(t), w \rangle dG(t), \text{ para } w \in W.$$

Temos então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{R_n} & Z \\ A_n \searrow & & \nearrow B \\ & L_{\infty}(\Omega, \mu) & \end{array}$$

onde $A_n w = \langle F_n(\cdot), w \rangle$, para $w \in W$.

Pelo Caso 1, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ temos $R_n \in N_{\infty}(W, Z)$ e $R_n - R_m \in N_{\infty}(W, Z)$, com $n_{\infty}(R_n) \leq \|F_n\|_{\infty} \|G\|(\Omega)$ e $n_{\infty}(R_n - R_m) \leq \|F_n - F_m\|_{\infty} \|G\|(\Omega)$.

Portanto $\{R_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $N_{\infty}(W, Z)$, e deve convergir na norma n_{∞} para algum elemento $U \in N_{\infty}(W, Z)$, com $n_{\infty}(U) \leq \|F\|_{\infty} \|G\|(\Omega)$.

Mas $\{R_n\}$ converge a BoAoQ em norma e $\|\cdot\| \leq n_{\infty}(\cdot)$. Logo, $U = \text{BoAoQ}$ e $\text{BoAoQ} \in N_{\infty}(W, Z)$, com $n_{\infty}(\text{BoAoQ}) \leq \|F\|_{\infty} \|G\|(\Omega)$.

Como antes, $T \circ S = \text{BoAoQ} \circ P \in N_{\infty}(X, Z)$, com $n_{\infty}(T \circ S) \leq \|S\| si_{\infty}(T)$. □

TEOREMA 9.2. Se X^* tem RNP, então $SI_{\infty}(X, \cdot) = N_{\infty}(X, \cdot)$, com $si_{\infty}(\cdot) = n_{\infty}(\cdot)$.

PROVA. Como X^* tem RNP, Id_X é um operador de Asplund. Pelos Teoremas 9.1 e 4.1(a), temos o resultado desejado. □

Conforme prometido, aqui vai uma prova direta e diferente do resultado do Teorema 9.2.

TEOREMA 9.3. Se X^* tem RNP, então $SI_\infty(X, \cdot) = N_\infty(X, \cdot)$ com $si_\infty(\cdot) = n_\infty(\cdot)$.

PROVA. Em vista do Teorema 4.1(a), só temos que provar que $SI_\infty(X, \cdot) \subset N_\infty(X, \cdot)$, com $n_\infty(\cdot) \leq si_\infty(\cdot)$.

Sejam dados $T \in SI_\infty(X, Y)$ e $\epsilon > 0$ e escolhamos uma fatoração de T da forma

onde K é um espaço compacto Hausdorff, $A \in L(X, C(K))$, $\|A\| \leq 1$, $B \in W(C(K), Y)$, tal que B é representado por uma medida vetorial σ -aditiva $G: \mathcal{B}(K) \rightarrow Y$, com $\|G\|(K) \leq si_\infty(T) + \epsilon$.

Como $C(K)^*$ é isomorfo e isométrico a $L_1(\Omega, \mu)$ para algum espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) e X^* tem RNP, podemos aplicar o Teorema de Lewis-Stegall [DU-III.1.8] ao operador $A^*: L_1(\Omega, \mu) \rightarrow X^*$ para obter uma fatoração da forma

onde

$$Sf(n) = \|x_n^*\| \int_{E_n} f d\mu, \text{ para } f \in L_1(\Omega, \mu) \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

e

$$L\{a_n\} = \sum_n a_n \|x_n^*\|^{-1} x_n^*, \text{ para } \{a_n\} \in \ell_1,$$

para convenientes seqüências $\{x_n^*\}$ em X^* e $\{E_n\}$ em $\mathcal{E}$. Também $\|L\| \leq 1$ e

$$\|S\| \leq \|A^*\| = \|A\| \leq 1.$$

Escolhemos agora $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ tais que

$$\sum_{m > n_k} |Sf(m)| < \frac{\epsilon}{k 2^k}, \text{ para } f \in B_{L_1(\mu)} \text{ e } k \in \mathbb{N}$$

Isto pode ser feito uniformemente em $f \in B_{L_1(\mu)}$ por causa da forma especial do operador S .

Definimos $R: L_1(\Omega, \mu) \rightarrow \ell_1$ por

$$Rf(n) = \begin{cases} Sf(n), & \text{se } 1 \leq n \leq n_1, \\ k Sf(n), & \text{se } n_k < n \leq n_{k+1}, \text{ para } k \geq 1. \end{cases}$$

R está bem definido, pois

$$\begin{aligned} \sum_n |Rf(n)| &= \sum_{n=1}^{n_1} |Sf(n)| + \sum_k k \left| \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} |Sf(n)| \right| \\ &\leq \sum_n |Sf(n)| + \sum_k k \left[\sum_{n > n_k} |Sf(n)| \right] \\ &\leq \|Sf\|_1 + \sum_k \frac{\epsilon}{2^k} = \|Sf\|_1 + \epsilon. \end{aligned}$$

Definimos também $\Delta: \ell_1 \rightarrow \ell_1$ por

$$\Delta\{a_n\} = \{a_n \delta_n\}, \text{ para } \{a_n\} \in \ell_1,$$

onde, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & , \text{ se } 1 \leq n \leq n_1, \\ k^{-1} & , \text{ se } n_k < n \leq n_{k+1}, \text{ para } k \geq 1. \end{cases}$$

Temos claramente Δ bem definido e $\|\Delta\| \leq 1$, pois $\{\delta_n\} \in c_0$. Além disso, $\Delta^* \{b_n\} = \{b_n \delta_n\}$, para todo $\{b_n\} \in \ell_\infty$, e então $\Delta^* \in N_\infty(\ell_\infty, \ell_\infty)$, com $n_\infty(\Delta^*) = \|\{\delta_n\}\|_\infty = 1$ (Exemplo 1.8).

Como $S = \Delta \circ R$, temos,

$$\begin{array}{ccccc} Y^* & \xrightarrow{B^*} & L_1(\Omega, \mu) & \xrightarrow{A^*} & X^* \\ & \searrow R \circ B^* & \downarrow R & \searrow S & \uparrow L \\ & & \ell_1 & \xrightarrow{\Delta} & \ell_1 \end{array}$$

e tomando adjuntos,

$$\begin{array}{ccccc} X^{**} & \xrightarrow{A^{**}} & C(K)^{**} & \xrightarrow{B^{**}} & Y^{**} \\ L^* \downarrow & \nearrow S^* & \uparrow R^* & \nearrow & \\ \ell_\infty & \xrightarrow{\Delta^*} & \ell_\infty & & \end{array} \quad B^{**} \circ R^* = (R \circ B^*)^*$$

Mas $\Delta^*(\ell_\infty) \subset c_0$, pois $\{\delta_n\} \in c_0$ e $B^{**}(C(K)^{**}) \subset Y \subset Y^{**}$, pois B é fracamente compacto. Portanto,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow P=L^*|_X & & \uparrow \\ \ell_\infty & \xrightarrow{\Delta^*} & c_0 \end{array} \quad Q = B^{**} \circ (R^*|_{c_0})$$

o que nos dá $T = Q \circ \Delta^* \circ P$. Como $\Delta^* \in N_\infty(\ell_\infty, c_0)$, segue-se que $T \in N_\infty(X, Y)$, com

$$\begin{aligned} n_\infty(T) &\leq \|P\| n_\infty(\Delta^*) \|Q\| \leq \|L\| \|B\| (\|S\| + \epsilon) \leq (\|A\| + \epsilon) \|Q\|(K) \\ &\leq (1 + \epsilon)(\text{si}_\infty(T) + \epsilon), \text{ e como } \epsilon \text{ é arbitrário, } n_\infty(T) \leq \text{si}_\infty(T). \end{aligned}$$

□

Como na seção 8, um argumento de compacidade nos dá uma condição necessária.

TEOREMA 9.4. Se $SI_{\infty}(X, \cdot) = N_{\infty}(X, \cdot)$, então $X \not\in \mathcal{L}_1$ (ou X^* tem wRNP).

PROVA. Decorre imediatamente dos Teoremas 5.1 e 4.2 (e). $\square$

Conforme adiantamos no final da seção 8, quando X^* é um reticulado de Banach, ou mais geralmente, complementado num reticulado de Banach, temos uma caracterização completa dos espaços X tais que $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$, com $si_p(\cdot) = n_p(\cdot)$, para um ou todo p , $1 \leq p \leq \infty$, devido à coincidência de RNP e wRNP em X^* . Neste caso, a condição é também equivalente à compacidade dos operadores estritamente p -integrals.

Gostaríamos de destacar que exemplos importantes estão incluídos nessa classe de espaços, tais como: espaços $C(K)$, espaços $L_p(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ espaços de Lorentz, espaços de Marcinkiewicz, espaços de Orlicz, e espaços de Banach com base incondicional.

TEOREMA 9.5. Se X^* é complementado num reticulado de Banach, as seguintes condições são equivalentes:

- (1) X^* tem RNP;

(2) X^* tem wRNP;

(3) para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$, com $si_p(\cdot) = n_p(\cdot)$;

(4) existe p , $1 \leq p \leq \infty$, tal que $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$, com $si_p(\cdot) = n_p(\cdot)$;

(5) para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$;

(6) existe p , $1 \leq p \leq \infty$, tal que $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$;

(7) para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, tal que $SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$;

(8) existe p , $1 \leq p \leq \infty$, tal que $SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$

PROVA. Segue dos Teoremas 5.1, 7.1, 8.3, 8.4, 9.2, 9.4 e de [GS-Proposição 8]. $\square$

Também nesta seção vale o comentário feito no fim da seção 8: acreditamos que um estudo mais aprofundado do espaço JT^* [JA] ou [LS], e de outros espaços que tem wRNP mas não tem RNP, tais como JF^* [LS] e JH^* [H2] nos dê mais informação sobre uma possível recíproca dos Teoremas 8.3 ou 8.4 e 9.3 ou 9.4. Como dissemos antes, pretendemos continuar nosso estudo nessa direção.

CAPÍTULO IV

SOBRE OS ESPAÇOS Y TAIS QUE

$$SI_p(X, Y) = N_p(X, Y) \text{ PARA TODO ESPAÇO X.}$$

10. INTRODUÇÃO.

Neste capítulo estudaremos condições necessárias e/ou suficientes sobre o espaço Y para que $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$, isto é, $SI_p(X, Y) = N_p(X, Y)$ para todo espaço X, com igualdade de normas, para um ou vários índices p, $1 \leq p \leq \infty$.

O caso $p = 1$ é bem conhecido e caracteriza a propriedade de Radon-Nikodym.

TEOREMA 10.1. O espaço Y tem RNP se e somente se $SI_1(., Y) = N_1(., Y)$, com $si_1(.) = n_1(.)$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [DU-VI. 4.8].

Os casos $1 < p \leq \infty$ não tinham sido abordados até agora (pelo menos, tanto quanto sabemos) e são o objeto deste capítulo.

Ao contrário do que ocorre em relação ao domínio (ver Capítulo III), a condição que caracteriza o caso $p = 1$ não se mantém nem suficiente nem necessária para $p > 1$, quando tratamos do contradomínio, como nos mostrarão os Exemplos 11.4 e 11.5, respectivamente.

Na seção 11 estudaremos os casos $1 < p < \infty$, ficando $p = \infty$ para a seção 12. A seção 13 traz alguns exemplos interessantes de espaços Y tais que $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, para todo p , $1 \leq p \leq \infty$.

11. CASOS $1 < p < \infty$.

Nesta situação, obtemos algumas condições suficientes como consequência de um teorema de multiplicação.

TEOREMA 11.1. Seja $1 < p < \infty$. Se $T \in SI_p(X,Y)$ e $S \in C(Y,Z)$, então $S \circ T \in N_p(X,Z)$, com $n_p(S \circ T) \leq \|S\| si_p(T)$.

PROVA. Sejam dados $T \in SI_p(X,Y)$ e $\epsilon > 0$ e escolhamos uma fatoração de T da forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 A \downarrow & & \uparrow B \\
 C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(K, \mu)
 \end{array}$$

onde K é um espaço compacto Hausdorff, $\mu \in \text{rca}(\mathcal{B}(K))$, com μ positiva, J_p é inclusão canônica, $A \in L(X, C(K))$, $B \in L(L_p(K, \mu), Y)$, $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$ e $\text{si}_p(J_p) \leq \text{si}_p(T) + \epsilon$.

Então $S \circ T$ admite uma fatoração da forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{S \circ T} & Z \\
 A \downarrow & & \uparrow S \circ B \\
 C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(K, \mu)
 \end{array}$$

Como S é completamente contínuo e B é fracamente compacto, $S \circ B$ é um operador compacto.

Usando a propriedade de aproximação de $L_q(K, \mu) = L_p(K, \mu)^*$, existe uma sequência $\{R_n\}$ em $L(L_p(K, \mu), Z)$, todos de posto finito, tal que $R_n \xrightarrow{\|\cdot\|} S \circ B$.

Então $\{R_n \circ J_p\}$ é uma sequência de operadores de posto finito, estritamente p -integrals, de $C(K)$ em Z . Como $C(K)^*$ tem a propriedade da aproximação métrica, podemos aplicar o Teorema 4.3, obtendo, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$,

$$n_p(R_n \circ J_p) \leq \text{si}_p(R_n \circ J_p) \leq \|R_n\| \text{si}_p(J_p),$$

e

$$n_p[(R_n - R_m) \circ J_p] \leq \text{si}_p[(R_n - R_m) \circ J_p] \leq \|R_n - R_m\| \text{si}_p(J_p).$$

Logo, $\{R_n \circ J_p\}$ é Cauchy na norma n_p e portanto converge para algum elemento de $N_p(C(K), Z)$.

Como $\{R_n \circ J_p\}$ converge em norma para $S_0 B_0 J_p$ e

$\|\cdot\| \leq n_p(\cdot)$, segue-se que $S_0 B_0 J_p \in N_p(C(K), Z)$, com

$$n_p(S_0 B_0 J_p) \leq \|S_0 B\| \operatorname{si}_p(J_p) \leq \|S\| (\operatorname{si}_p(T) + \epsilon).$$

Então $S_0 T = S_0 B_0 J_p \circ A \in N_p(X, Z)$ e $n_p(S_0 T) \leq \|A\| n_p(S_0 B_0 J_p)$.

Como ϵ é arbitrário, obtemos $n_p(S_0 T) \leq \|S\| \operatorname{si}_p(T)$. $\square$

Observando a demonstração desse teorema, notamos que o que realmente utilizamos foi a compacidade do operador $S_0 B$. Com isso em mente, temos:

TEOREMA 11.2. Seja $1 < p < \infty$. Se $L(L_p(\Omega, \mu), Y) = K(L_p(\Omega, \mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , então

$$SI_p(\cdot, Y) = N_p(\cdot, Y), \text{ com } \operatorname{si}_p(\cdot) = n_p(\cdot).$$

PROVA. Já sabemos, pelo Teorema 4.1 (a), que $N_p(X, Y) \subset SI_p(X, Y)$, com $\operatorname{si}_p(\cdot) \leq n_p(\cdot)$. Procedendo como na prova do Teorema 11.1, obtemos que $SI_p(X, Y) \subset N_p(X, Y)$, com $n_p(\cdot) \leq \operatorname{si}_p(\cdot)$. $\square$

Como exemplo da situação do Teorema 11.2, temos:

COROLÁRIO 11.3. Se Y é um espaço de Schur, então

$$SI_p(\cdot, Y) = N_p(\cdot, Y), \text{ com } \operatorname{si}_p(\cdot) = n_p(\cdot).$$

PROVA. Basta notar que se Y é Schur, então $W(\cdot, Y) = K(\cdot, Y)$, e como $L(L_p(\Omega, \mu), Y) = W(L_p(\Omega, \mu), Y)$, para todo espaço de medida fi

nita (Ω, Σ, μ) , pois $L_p(\Omega, \mu)$ é reflexivo, temos que Y satisfaz a hipótese do Teorema 11.2. $\square$

Cabem aqui algumas observações.

É um resultado clássico de Grothendieck [GR] que, se $T \in I_1(X, Y)$ e $S \in W(Y, Z)$, então $S \circ T \in N_1(X, Z)$. Como $SI_1(X, Y) \subset I_1(X, Y)$, temos, em particular, que se $T \in SI_1(X, Y)$ e $S \in W(Y, Z)$, então $S \circ T \in N_1(X, Z)$. Este último resultado também pode ser obtido através do esquema

onde $Q \circ P$ é uma fatoração do operador fracamente compacto S através de um espaço reflexivo W [DFJP]. Pelo Teorema 10.1, como W tem RNP, e $P \circ T \in SI_1(X, W)$ pois $T \in SI_1(X, Y)$, temos que $P \circ T$ e portanto também $S \circ T = Q \circ P \circ T$ são 1-nucleares.

Entretanto, quando $1 < p < \infty$, não podemos usar no Teorema 11.1 operadores fracamente compactos em lugar de completamente contínuos, ou, no Corolário 11.3, Y com RNP em vez da propriedade de Schur, como mostra o exemplo a seguir, agora já um velho amigo nosso.

Além disso, o mesmo exemplo vai mostrar que a propriedade de Radon-Nikodym não é uma condição suficiente sobre Y pa-

rã se obter $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, para nenhum p , $1 < p < \infty$.

EXEMPLO 11.4. Seja $i: \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ a inclusão canônica e considere-mos $X = \ell_1$, $Y = Z = \ell_2$, $T = i$ e $S = Id_{\ell_2}$.

Temos: $T \in SI_p(\ell_1, \ell_2)$, para todo p , $1 < p < \infty$; Y tem RNP e $S \in W(Y, Z)$.

Entretanto, $T = S \circ T = i$ não é p -nuclear, para nenhum p , $1 < p < \infty$, pois não é nem compacto!

Nosso próximo exemplo mostra que a propriedade de Radon-Nikodym também não é uma condição necessária sobre Y para termos $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, para qualquer p , $1 < p < \infty$.

EXEMPLO 11.5. Seja JH o espaço de Hagler [H2] ou [DU - página 215]. Sabemos que JH^* não tem RNP, mas é um espaço de Schur. Pelo Corolário 11.3, $SI_p(.,JH^*) = N_p(.,JH^*)$, para $1 < p < \infty$.

Esses exemplos e comentários demonstram que os casos $1 < p < \infty$ são bem diferentes do caso $p = 1$.

Argumentos de compacidade (Capítulo II, seção 6) nos dão algumas condições necessárias.

TEOREMA 11.6. Se para algum p , $1 < p < \infty$, $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$,

então

(a) $Y \not\hookrightarrow \ell_r$, para $r \geq 2$;

(b) $Y \not\hookrightarrow c_0$;

(c) $Y \not\hookrightarrow L_1[0,1]$.

Se ainda $Y = Z^*$ para algum espaço Z , temos também

(d) $Z \not\hookrightarrow \ell_1$.

PROVA. Teoremas 6.5, 6.6 e 6.12. □

Tendo em vista o Corolário 11.3 e o item (d) do Teorema 11.6, por algum tempo desconfiámos que talvez Y com a propriedade de Schur fosse uma condição necessária e suficiente para $SI_p(.,Y) = N_p(.,Y)$, para $1 < p < \infty$, pelo menos no caso em que Y é o dual de um espaço Z . Nossa motivação foi que Z^* é um espaço de Schur se e somente se $Z \not\hookrightarrow \ell_1$ e Z (ou Z^*) tem a propriedade de Dunford-Pettis.

Também nessa época já havíamos obtido uma descrição completa do caso $p = \infty$ (Teorema 12.6) mas não conhecíamos nenhum espaço satisfazendo nossa condição e que não fosse um espaço de Schur.

Entretanto, com a colaboração dos Professores Joe Diestel e Hans Jarchow, encontramos um contra exemplo no famoso espaço de Tsirelson $\mathcal{T}$ [TI].

Vamos mostrar que $\mathcal{T}$ satisfaz $SI_p(.,\mathcal{T}) = N_p(.,\mathcal{T})$, para

$1 < p < \infty$, mas $\mathcal{J}$ não é um espaço de Schur, por ser reflexivo e de dimensão infinita. E $\mathcal{J}$ é mesmo um espaço dual, por ser reflexivo. A demonstração decorre de nosso Teorema 11.2 e de um resultado de Straeuli, obtido em sua tese de doutoramento [ST]. Como esse trabalho não é facilmente acessível, reproduziremos aqui a demonstração do resultado de Straeuli, que é a parte final da prova do próximo teorema.

Antes, vamos lembrar rapidamente a definição e uma propriedade importante (que iremos utilizar) do espaço de Tsirelson $\mathcal{J}$.

Sejam $\mathcal{J}_0 = \{ \{a_n\} : a_n \in \mathbb{K} \text{ e } \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n = 0 \}$, e e_n o n -ésimo vetor das bases canônicas de c_0 e ℓ_p , $1 \leq p < \infty$.

Para $x = \{a_n\} \in \mathcal{J}_0$, definimos por indução $\{\|x\|_m\}$, uma sequência limitada de números reais positivos associados a x , por

$$\|x\|_0 = \max_n |a_n|$$

e

$$\|x\|_{m+1} = \max \left\{ \|x\|_m, \frac{1}{2} \max_k \left\{ \sum_{j=1}^k \left\| \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} a_n e_n \right\|_m : k \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{k+1} \right\} \right\}.$$

Tem-se que $\|x\| = \lim_m \|x\|_m$ define uma norma em $\mathcal{J}_0$.

Definimos $\mathcal{J}$ como o fecho de $\mathcal{J}_0$ com essa norma $\|\cdot\|$. $\mathcal{J}$ é um espaço reflexivo, a sequência $\{e_n\}$ é uma base normalizada monótona incondicional de $\mathcal{J}$, e para $x = \{a_n\} \in \mathcal{J}$ podemos calcu-

lar

$$\|x\| = \max \left\{ \|x\|_0, \frac{1}{2} \max_k \left\{ \sum_{j=1}^k \left\| \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} a_n e_n \right\| : k \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{k+1} \right\} \right\}.$$

O espaço $\mathcal{J}$ aqui descrito não é o espaço originalmente criado por Tsirelson em 1974 [TI], mas sim seu dual. Entretanto, por apresentar uma formulação explícita para a norma (que faltava ao original) e por ainda preservar as propriedades mais importantes do espaço original (precisamente, que não contém c_0 ou ℓ_p , $1 \leq p < \infty$), $\mathcal{J}$ se tornou mais popular e é conhecido hoje como espaço de Tsirelson. $\mathcal{J}$ apresenta ainda uma série de outras propriedades que o fazem uma das mais profícuas fontes de contra-exemplos em teoria de espaços de Banach.

A propriedade especial de $\mathcal{J}$ que necessitaremos dizer respeito ao comportamento de blocos normalizados da sua base canônica $\{e_n\}$. Precisamente, $\mathcal{J}$ satisfaz

(*) para todo $k \in \mathbb{N}$ e toda seqüência de k blocos normalizados $u_1, u_2, \dots, u_k$, onde

$$u_j = \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} a_n e_n, \quad k \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{k+1}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

tem-se, para qualquer escolha de escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$,

$$\left\| \sum_{j=1}^k c_j u_j \right\| \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k |c_j|.$$

TEOREMA 11.7. Seja o espaço de Tsirelson. Então $L(L_p(\mu), \mathcal{J}) = K(L_p(\mu), \mathcal{J})$, para todo p , $1 < p < \infty$, e para todo espaço de medi-

da finita (Ω, Σ, μ) .

PROVA. Lembremos inicialmente que um operador $T: X \rightarrow Y$ é um operador de Banach-Saks se para toda seqüência limitada $\{x_n\}$ em X , $\{Tx_n\}$ tem uma subsequência que converge em média aritmética. É um resultado clássico que todo operador $T: L_p[0,1] \rightarrow X$, onde X é arbitrário e $1 < p < \infty$, é um operador de Banach-Saks [BS]. Uma exposição detalhada pode ser encontrada em [DI- páginas 109 e 117], e é fácil ver que não é necessária nenhuma modificação para o caso de $L_p(\mu)$ para (Ω, Σ, μ) espaço de medida finita. Alternativamente, esse fato também decorre do trabalho de Kakutani [KA].

Agora vamos ao resultado de Straeuli, precisamente, que todo operador de Banach-Saks com valores em $\mathcal{J}$ é compacto, independentemente do domínio.

Seja $S: X \rightarrow \mathcal{J}$ um operador de Banach-Saks. Dada uma seqüência limitada $\{x_n\}$ em X , queremos mostrar que $\{Sx_n\}$ tem uma subseqüência que converge em norma em $\mathcal{J}$.

Como $\mathcal{J}$ é reflexivo, podemos assumir que $\{Sx_n\}$ é fracamente convergente para zero e por S ser um operador de Banach-Saks, que toda subsequência de $\{Sx_n\}$ tem uma subsequência que converge em média aritmética (para zero).

Suponhamos, por absurdo, que $\{Sx_n\}$ não tem subsequência convergente em norma. Então, para qualquer subsequência $\{y_n\}$ de $\{Sx_n\}$, existem $\epsilon_0 > 0$ e uma subsequência $\{z_n\}$ de $\{y_n\}$,

tais que $\|z_n\| \geq \epsilon_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski [BP] ou [DI-página 46], $\{z_n\}$ tem uma subsequência $\{t_n\}$ que é equivalente a uma bloco-sequência básica $\{u_n\}$ da base canônica $\{e_n\}$ de $\mathcal{J}$.

Por nossa hipótese, $\{t_n\}$ tem uma subsequência $\{s_n\}$ que converge em média aritmética.

Sem perda da generalidade, podemos assumir $\{s_n\}$ como sendo a própria $\{z_n\}$, que será equivalente a uma bloco-sequência básica $\{u_n\}$ de $\{e_n\}$. Tais u_n 's são dados por

$$u_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} \alpha_i e_i, \text{ para } n \in \mathbb{N},$$

com determinados escalares α_i 's, e $p_n < q_n < p_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde ainda podemos assumir $p_n > 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por serem equivalentes, o operador $R: [z_n] \rightarrow \mathcal{J}$ dado por $Rz_n = u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é um isomorfismo de $[z_n]$ sobre um subespaço de $\mathcal{J}$.

Temos que

$$(A) \quad \epsilon_0 < \|z_n\| = \|R^{-1}u_n\| \leq \|R^{-1}\| \|u_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Também, dado $\epsilon_0 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(B) \quad \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=1}^n z_j \right\| \leq \frac{\epsilon_0}{5\|R\| \|R^{-1}\|}, \text{ para } n \geq n_0, \text{ já que}$$

$\{z_n\}$ converge em média aritmética para zero.

Ainda,

$\left\| \sum_{j=1}^n u_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n R z_j \right\| \leq \|R\| \left\| \sum_{j=1}^n z_j \right\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
e então

$$(C) \quad \frac{1}{n \|R\|} \left\| \sum_{j=1}^n u_j \right\| \leq \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=1}^n z_j \right\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De (B) e (C), temos

$$(D) \quad \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=1}^n u_j \right\| \leq \frac{\epsilon_0}{5 \|R^{-1}\|}, \text{ para } n \geq n_0.$$

Consideremos agora $v_n = u_n / \|u_n\|$, para $n \in \mathbb{N}$. A sequência $\{v_n\}$ é uma bloco-sequência básica normalizada de $\{e_n\}$. Pela propriedade (*) de $\mathcal{J}$, ela satisfaz

$$\left\| \sum_{j=n}^{p_n-1} v_j \right\| \geq \frac{1}{2} (p_n - n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{p_n - n} \left\| \sum_{j=n}^{p_n-1} v_j \right\| = \frac{1}{p_n - n} \left\| \sum_{j=n}^{p_n-1} \sum_{k=p_j}^{q_j} \frac{\alpha_k e_k}{\|u_j\|} \right\| \\ &\stackrel{(A)}{\leq} \frac{\|R^{-1}\|}{\epsilon_0 (p_n - n)} \left\| \sum_{j=n}^{p_n-1} \left(\sum_{k=p_j}^{q_j} \alpha_k e_k \right) \right\| = \frac{\|R^{-1}\|}{\epsilon_0 (p_n - n)} \left\| \sum_{j=n}^{p_n-1} u_j \right\| \\ &\leq \frac{\|R^{-1}\|}{\epsilon_0 (p_n - n)} \left\| \sum_{j=1}^{p_n-1} u_j \right\|, \text{ para } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade provém do fato de $\{e_n\}$ ser base monótona.

Portanto,

$$(E) \quad \frac{\epsilon_0}{2 \|R^{-1}\|} \leq \frac{p_n - 1}{p_n - n} \frac{1}{p_n - 1} \left\| \sum_{j=1}^{p_n-1} u_j \right\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e como $p_n - 1 \leq 2(p_n - n)$,

$$(F) \quad \frac{\varepsilon_0}{4 \|R^{-1}\|} \leq \frac{1}{p_n - 1} \left\| \sum_{j=1}^{p_n-1} u_j \right\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, de (D), se $p_n - 1 \geq n_0$, temos

$$(G) \quad \frac{1}{p_n - 1} \left\| \sum_{j=1}^{p_n-1} u_j \right\| \leq \frac{\varepsilon_0}{5 \|R^{-1}\|}.$$

Mas (F) e (G) nos dão uma contradição!

Logo, $\{Sx_n\}$ tem alguma subsequência que converge em norma e S é um operador compacto.

Finalmente, obtemos o resultado procurado, pois se $T \in L(L_p(\mu), \mathcal{J})$, para algum espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$, então T é um operador de Banach-Saks porque o domínio é $L_p(\mu)$ e portanto $T \in K(L_p(\mu), \mathcal{J})$, por T assumir valores em $\mathcal{J}$. $\square$

TEOREMA 11.8. Seja o espaço de Tsirelson. Então $SI_p(\cdot, \mathcal{J}) = N_p(\cdot, \mathcal{J})$, para todo p , $1 < p < \infty$, com $si_p(\cdot) = n_p(\cdot)$.

PROVA. Basta aplicar os Teoremas 11.7 e 11.2. $\square$

Depois desse exemplo, passamos a conjecturar que tal vez $L(L_p(\mu), Y) = K(L_p(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$, fosse uma caracterização dos espaços Y tais que $SI_p(\cdot, Y) = N_p(\cdot, Y)$, para cada p , $1 < p \leq \infty$, o que já sabíamos ser verdade para $p = \infty$ (Teorema 12.6).

O que conseguimos por enquanto foi que para $2 \leq p < \infty$ essa conjectura é verdadeira, até mesmo numa forma mais forte : a existência de um índice r , $2 \leq r < \infty$, tal que $L(L_p(\mu), Y) = K(L_p(\mu), Y)$ para todo espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ é equivalente a $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$, para todo p , $2 \leq p < \infty$. Além disso, essas condições são também equivalentes a $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$, para todo p , $2 \leq p < \infty$.

TEOREMA 11.9.

I. As seguintes condições sobre um espaço Y são equivalentes:

- (1) para todo p , $2 \leq p < \infty$, $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$ com $si_p(.) = n_p(.)$;
- (2) existe p , $2 \leq p < \infty$, tal que $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$, com $si_p(.) = n_p(.)$;
- (3) para todo p , $2 \leq p < \infty$, $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$;
- (4) existe p , $2 \leq p < \infty$, tal que $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$;
- (5) para todo p , $2 \leq p < \infty$, $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$;
- (6) existe p , $2 \leq p < \infty$, tal que $SI_p(., Y) \subset K(., Y)$;
- (7) para todo p , $2 \leq p < \infty$, $L(L_p(\mu), Y) = K(L_p(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$;
- (8) existe p , $2 \leq p < \infty$, tal que $L(L_p(\mu), Y) = K(L_p(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$.

II. Se Y é o dual de um espaço Z , as condições (1) a (8) impli-

cam em

(9) para todo q , $1 < q \leq 2$, $L(Z, L_q(\mu)) = K(Z, L_q(\mu))$, para to
do espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$;

(10) existe q , $1 < q \leq 2$, tal que $L(Z, L_q(\mu)) = K(Z, L_q(\mu))$,
para todo espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$.

III. Se Y é um espaço reflexivo, as condições (1) a (10) são e-
quivalentes, onde, em (9) e (10), $Z = Y^*$

PROVA.

I. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6) e (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6). São triviais.

(5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (8). É o Teorema 6.11.

(6) $\Rightarrow$ (1). Como (6) é equivalente a (7), basta mostrar
que (7) implica (1). Mas isso é exatamente o Teorema 11.2.

II. Suponhamos $Y = Z^*$, para algum espaço Z .

(7) $\Rightarrow$ (9). Dados q , $1 < q \leq 2$ e um espaço de medida finita
 $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$, seja $T \in L(Z, L_q(\mu))$. Então $T^* \in L(L_p(\mu), Z^*) = L(L_p(\mu), Y)$,
onde p é o conjugado de q e portanto $2 \leq p < \infty$. Por hipótese,
 T^* é compacto, e portanto T também é compacto.

(9) $\Rightarrow$ (10). É óbvio.

III. Suponhamos que Y é um espaço reflexivo. Por II, já vale
que as condições equivalentes (1) a (8) implicam em (9) e (10),
pois $Y = (Y^*)^*$.

(10) $\Rightarrow$ (8). Dados um espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$, consi-
deremos $T \in L(L_p(\mu), Y)$, onde p é o conjugado do índice q ,

$1 < q \leq 2$, que existe por hipótese. Então $T^* \in L(Y^*, L_q(\mu))$, sendo assim compacto. Logo, T é compacto. $\square$

Os casos $1 < p < 2$ ainda não estão completamente esclarecidos e continuamos trabalhando neles. Nossa conjectura é que vale o mesmo que para $2 \leq p < \infty$, embora possa ocorrer que a condição para cada p não seja equivalente às condições para todos os índices p .

Notemos ainda que o caso $p = 1$ não está incluído nessa possível caracterização, pois $L(L_1(\mu), Y) = K(L_1(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) implica em Y ter RNP, mas a recíproca não é verdadeira, pois existem operadores representáveis que não são compactos [DU-III. 2.22].

12. CASO $p = \infty$.

Esta situação é bastante semelhante aos casos $1 < p < \infty$, quanto a condições necessárias ou suficientes.

Aqui também obtemos, como nos casos $2 \leq p < \infty$, um resultado de caracterização dos espaços Y tais que $SI_\infty(., Y) = N_\infty(., Y)$, com igualdade de normas (Teorema 12.6).

Para começar, demonstraremos que o espaço de operadores

res ∞ -nucleares definidos num espaço $C(K)$ ou $L_\infty(\mu)$, μ finita, coincide com o dos operadores compactos, independentemente da imagem.

TEOREMA 12.1.

(a) $N_\infty(C(K), \cdot) = K(C(K), \cdot)$, com $n_\infty(\cdot) = \|\cdot\|$, para todo espaço compacto Hausdorff K ;

(b) $N_\infty(L_\infty(\mu), \cdot) = K(L_\infty(\mu), \cdot)$, com $n_\infty(\cdot) = \|\cdot\|$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

PROVA.

(a). Sabemos, do Teorema 4.2 (e), que $N_\infty(C(K), \cdot) \subset K(C(K), \cdot)$, com $\|\cdot\| \leq n_\infty(\cdot)$.

Para a inclusão e desigualdade inversas, consideremos $T \in K(C(K), Y)$, com Y arbitrário. Como $C(K)^*$ tem a propriedade da aproximação, existe uma sequência $\{T_n\}$ de operadores de posto finito, definidos em $C(K)$ a valores em Y , tal que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

$C(K)^*$ tem também a propriedade da aproximação métrica e então, pelo Teorema 4.3, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$s_i_\infty(T_n) = n_\infty(T_n) \quad \text{e} \quad s_i_\infty(T_n - T_m) = n_\infty(T_n - T_m).$$

Pelo Exemplo 1.10, sabemos que, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$s_i_\infty(T_n) = \|T_n\| \quad \text{e} \quad s_i_\infty(T_n - T_m) = \|T_n - T_m\|.$$

Portanto, $\{T_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $N_\infty(C(K), Y)$ e como converge em norma para T , T é também o limite na norma n_∞ .

Segue-se que $T \in N_{\infty}(C(K), Y)$ e $n_{\infty}(T) = \|T\|$.

(b). Segue imediatamente de (a), já que para qualquer espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , $L_{\infty}(\mu)$ é isométrico a $C(K)$, para algum espaço compacto Hausdorff K . $\square$

Como consequência, temos o seguinte teorema de multiplicação.

TEOREMA 12.2. Se $T \in SI_{\infty}(X, Y)$ e $S \in C(Y, Z)$, então $SoT \in N_{\infty}(X, Z)$ e $n_{\infty}(SoT) \leq \|S\| si_{\infty}(T)$.

PROVA. Dados $T \in SI_{\infty}(X, Y)$ e $\epsilon > 0$, escolhemos uma fatoração de T da forma

onde K é um espaço compacto Hausdorff, $A \in L(X, C(K))$, $\|A\| \leq 1$ e $B \in W(C(K), Y)$ é dado por $Bf = \int_K f dG$ com $\|B\| = \|G\|(K) \leq si_{\infty}(T) + \epsilon$.

Já que B é fracamente compacto e S é completamente contínuo, $SoB \in K(C(K), Z)$. Pelo Teorema 12.1 (a), $SoB \in N_{\infty}(C(K), Z)$ e $n_{\infty}(SoB) = \|SoB\| \leq \|S\| (si_{\infty}(T) + \epsilon)$.

Então $SoT = SoBoA \in N_{\infty}(X, Z)$ e $n_{\infty}(SoT) \leq \|A\| n_{\infty}(SoB)$.

Como $\|A\| \leq 1$ e ϵ é arbitrário, temos que

$n_{\infty}(SoT) \leq \|S\| si_{\infty}(T)$. $\square$

Temos, como corolário do Teorema 12.1, algumas condições suficientes.

COROLÁRIO 12.3. Seja Y um espaço tal que $W(C(K), Y) = K(C(K), Y)$, para todo espaço compacto Hausdorff K ou $W(L_\infty(\mu), Y) = K(L_\infty(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) . Então $SI_\infty(., Y) = N_\infty(., Y)$, com $si_\infty(.) = n_\infty(.)$.

PROVA. Suponhamos que $W(C(K), Y) = K(C(K), Y)$ para todo espaço compacto Hausdorff K .

Dados $T \in SI_\infty(X, Y)$ e $\epsilon > 0$, escolhemos uma fatoração de T da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow A \quad \nearrow B & \\ & C(K_0) & \end{array}$$

onde K_0 é um espaço compacto Hausdorff, $A \in L(X, C(K_0))$, $\|A\| \leq 1$, $B \in W(C(K_0), Y)$, $\|B\| \leq si_\infty(T) + \epsilon$.

Por hipótese, $B \in K(C(K_0), Y)$ e pelo Teorema 12.1, $B \in N_\infty(C(K_0), Y)$, com $n_\infty(B) = \|B\|$.

Portanto $T = B \circ A \in N_\infty(X, Y)$ e como ϵ é arbitrário, $n_\infty(T) \leq si_\infty(T)$.

A inclusão $N_\infty(X, Y) \subset SI_\infty(X, Y)$ e a desigualdade $si_\infty(.) \leq n_\infty(.)$ vêm do Teorema 4.1 (a).

Suponhamos agora que $W(L_\infty(\mu), Y) = K(L_\infty(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) . Procedendo como no caso an-

terior, escolhendo uma fatoração de T através de um espaço $L_\infty(\Omega_0, \mu_0)$, obtemos o resultado desejado. $\square$

COROLÁRIO 12.4. Se Y é um espaço de Schur, então $SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y)$, com $si_\infty(.) = n_\infty(.)$.

PROVA. Basta notar que, se Y é um espaço de Schur, então $W(.,Y) = K(.,Y)$ e aplicar o Corolário 12.3. $\square$

Como nos casos $1 < p < \infty$, convém observar que não podemos admitir operadores fracamente compactos em vez de completamente contínuos, no Teorema 12.2, ou a propriedade de Radon-Nikodym em lugar da propriedade de Schur, no Corolário 12.4, como mostra o mesmo Exemplo 11.4 (o "famoso" $i: \ell_1 \rightarrow \ell_2$).

Os Exemplos 11.4 e 11.5 também nos mostram que RNP não é suficiente nem necessária para termos $SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y)$.

Condições necessárias nos são dadas por argumentos de compacidade.

TEOREMA 12.5. Se o espaço Y é tal que $SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y)$, então

- (a) $Y \not\hookrightarrow \ell_r$, $r \geq 2$;
- (b) $Y \not\hookrightarrow c_0$;
- (c) $Y \not\hookrightarrow L_1[0,1]$.

Se ainda $Y=Z^*$ para algum espaço Z , vale

$$(d) \ Z \not\subseteq \mathcal{L}_1.$$

PROVA. É consequência dos Teoremas 6.5 , 6.6 e 6.12. $\square$

Vamos agora ao teorema de caracterização dos espaços Y tais que $SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y)$. É interessante notar que a mesma condição caracteriza os espaços Y tais que $SI_\infty(.,Y) \subset K(.,Y)$.

TEOREMA 12.6.

I. As seguintes condições sobre um espaço Y são equivalentes:

$$(1) \ SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y), \text{ com } si_\infty(.) = n_\infty(.);$$

$$(2) \ SI_\infty(.,Y) = N_\infty(.,Y);$$

$$(3) \ SI_\infty(.,Y) \subset K(.,Y);$$

$$(4) \ L(C(K),Y) = K(C(K),Y), \text{ para todo espaço compacto Hausdorff } K;$$

$$(5) \ W(C(K),Y) = K(C(K),Y), \text{ para todo espaço compacto Hausdorff } K;$$

$$(6) \ L(L_\infty(\mu),Y) = K(L_\infty(\mu),Y), \text{ para todo espaço de medida finita } (\Omega, \Sigma, \mu);$$

$$(7) \ W(L_\infty(\mu),Y) = K(L_\infty(\mu),Y), \text{ para todo espaço de medida finita } (\Omega, \Sigma, \mu).$$

II. Se $Y = Z^*$ para algum espaço Z , as condições (1) a (7) implicam em

(8) $L(Z, L_1(\mu)) = K(Z, L_1(\mu))$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ;

(9) $W(Z, L_1(\mu)) = K(Z, L_1(\mu))$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

III. Se Y é um espaço reflexivo, as condições (1) a (9) são equivalentes, onde, em (8) e (9), $Z = Y^*$.

PROVA.

I. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). São imediatos.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7). É o Teorema 6.9.

(7) $\Rightarrow$ (1). É o Corolário 12.3.

II. Suponhamos $Y = Z^*$, para algum espaço Z .

(6) $\Rightarrow$ (8). Dados um espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) e $T \in L(Z, L_1(\mu))$, temos que $T^* \in L(L_\infty(\mu), Z^*) = K(L_\infty(\mu), Y)$, por hipótese. Portanto $T \in K(Z, L_1(\mu))$.

(8) $\Rightarrow$ (9). É imediato.

III. Seja Y um espaço reflexivo. Como $Y = (Y^*)^*$, já sabemos que as condições equivalentes (1) a (7) implicam em (8) e (9).

(9) $\Rightarrow$ (5). Dado um espaço compacto Hausdorff K , seja $T \in W(C(K), Y)$. Então $T^* \in W(Y^*, L_1(\mu_0))$, para algum espaço de medida finita $(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$. Por hipótese, T^* é compacto. Portanto, $T \in K(C(K), Y)$. □

COROLÁRIO 12.7. Seja Y um espaço tal que $L(C(K), Y) = K(C(K), Y)$, para todo espaço compacto Hausdorff K , ou $L(L_\infty(\mu), Y) = K(L_\infty(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) . Então, para todo p , $2 \leq p < \infty$, temos $L(L_p(\mu), Y) = K(L_p(\mu), Y)$ para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

PROVA. Qualquer uma dessas propriedades impostas a Y é equivalente a $SI_\infty(., Y) \subset K(., Y)$, como acabamos de ver no Teorema 12.6. Como $SI_p(., Y) \subset SI_\infty(., Y)$ para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, temos o resultado desejado, pelo Teorema 11.9. $\square$

Ainda não sabemos se vale a recíproca do Corolário 12.7, isto é, se a classe dos espaços Y tais que $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$ para algum p , $2 \leq p < \infty$, coincide com a dos espaços Y que satisfazem $SI_\infty(., Y) = N_\infty(., Y)$.

Como vimos na seção 11, o espaço de Tsirelson mostra que não é a propriedade de Schur que caracteriza os espaços tais que $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$, para qualquer p , $1 < p < \infty$. Mas poderia acontecer que para $p = \infty$ a propriedade de Schur fosse essa caracterização. Este não é o caso e novamente é o espaço de Tsirelson $\mathcal{T}$ nosso contra-exemplo.

TEOREMA 12.8. Seja $\mathcal{T}$ o espaço de Tsirelson. Então $SI_\infty(., \mathcal{T}) = N_\infty(., \mathcal{T})$, com $si_\infty(.) = n_\infty(.)$.

PROVA. Vamos mostrar que $\mathcal{J}$ satisfaz a condição (5) do Teorema 12.6. Dado um espaço compacto Hausdorff K e $T \in W(C(K), \mathcal{J})$, temos que T é um operador de Banach-Saks [DIS-Teorema 3]. Como todo operador de Banach-Saks com domínio arbitrário e imagem em $\mathcal{J}$ é compacto (esse é o resultado de Strauli - ver a demonstração do Teorema 11.7), temos que $T \in K(C(K), \mathcal{J})$. $\square$

13. EXEMPLOS DE ESPAÇOS ESPECIAIS $\mathcal{Y}$ TAIS QUE $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$, PARA TODO p , $1 \leq p \leq \infty$.

Como vimos, a propriedade de Radon-Nikodym, que caracteriza os espaços Y tais que $SI_1(., Y) = N_1(., Y)$, não é necessária nem suficiente para as igualdades $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$, para $1 < p \leq \infty$. Entretanto, existem espaços Y que satisfazem $SI_p(., Y) = N_p(., Y)$ para todo p , $1 \leq p \leq \infty$.

Os primeiros exemplos lógicos são os espaços que tem RNP e a propriedade de Schur simultaneamente, dos quais o mais óbvio é ℓ_1 e outros menos claros são os espaços de Bourgain-Delbaen [BD], que são espaços $\mathcal{L}_\infty$, e o dual do espaço de Talagrand [TA].

Um exemplo que escapa dessa classe é o espaço de Tsirelson $\mathcal{J}$, como vimos nos Teoremas 11.8 e 12.8, para $1 < p \leq \infty$, e por ser reflexivo (e portanto ter RNP) para $p = 1$.

BIBLIOGRAFIA

- [AL] - ALENCAR, R.L. - "Aplicações nucleares e integrais e a propriedade de Radon-Nikodym", Tese, IME-USP, São Paulo, 1982.
- [AS] - AHARONI, R. & SAPHAR, P. - "On the coincidence of p -integral and p -nuclear operators, $1 \leq p \leq \infty$ ", Technion Series n° MT 308 (1976).
- [BD] - BOURGAIN, J. & DELBAEN, F. - "A class of special $\mathcal{L}_\infty$ -spaces", Acta Math. 145 (1980), 155-176.
- [BO] - BOURGAIN, J. - "On martingales in conjugate Banach spaces", não-publicado.
- [BP] - BESSAGA, C. & PELCZYNSKI, A. - "On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces", Studia Math. 17 (1958), 151-164.
- [BS] - BANACH, S. & SAKS, S. - "Sur la convergence forte dans les champs L^p ", Studia Math. 2 (1930), 51-57.
- [DFJP] - DAVIS, W.J.; FIGIEL, T.; JOHNSON, W.B. & PELCZYNSKI, A. - "Factoring weakly compact operators", J. Funct. Anal. 17 (1974), 311-327.
- [DI] - DIESTEL, J. - "Sequences and series in Banach spaces", Graduate Texts in Mathematics 92, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1984.
- [DIS] - DIESTEL, J. & SEIFERT, C.J. - "The Banach-Saks ideal I , operators acting on $C(\Omega)$ ", Comment. Math., Tomus Specialis in Honorem Ladislau Orlicz, (1979), 109-118 e 343-344.

- [DS] - DUNFORD, N. & SCHATZ, J.T. - "Linear operators, I", Wiley-Interscience, New York, 1957.
- [DU] - DIESTEL, J. & UHL Jr., J.J. - "Vector measures", Mathematical Surveys 15, American Mathematical Society, Providence, 1977.
- [DUP] - DIESTEL, J. & UHL Jr., J.J. - "Progress in vector measures-1977-1983", em Lecture Notes in Mathematics 1033, 144-192, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [EM] - EMMANUELLE, G. - "On the compactness of dominated operators on $C(T)$ ", não-publicado.
- [FR] - FREMLIN, D.H. - "Pointwise compact sets of measurable functions", Manuscripta Math. 15 (1975), 219-242.
- [GR] - GROTHENDIECK, A. - "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires", Mem. Amer. Math. Soc. 16, Providence, 1955.
- [GS] - GHOUSSOUB, N. & SAAB, E. - "On the weak Radon-Nikodym property", Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 81-84.
- [H1] - HAGLER, J. - "Some more Banach spaces which contain ℓ_1 ", Studia Math. 46 (1973), 35-42.
- [H2] - HAGLER, J. - "A counterexample to several questions in Banach spaces", Studia Math. 60 (1977), 289-307.
- [JA] - JAMES, R.C. - "A separable somewhat reflexive Banach space with nonseparable dual", Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 738-743.
- [JN] - JANICKA, L. - "Some measure-theoretic characterizations of Banach spaces not containing ℓ_1 ", Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech. 27 (1979), 561-565.

- [KA] - KAKUTANI, S. - "Weak convergence in uniformly convex spaces", Tôhoku Math. J. 45 (1938), 188-193.
- [KP] - KADEC, M.I. & PELCZYNSKI, A. - "Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p ", Studia Math. 21 (1962), 161-176.
- [LS] - LINDENSTRAUSS, J. & STEGALL, C. - "Examples of separable spaces which do not contain ℓ_1 and whose duals are non-separable", Studia Math. 54 (1975), 81-101.
- [LT] - LINDENSTRAUSS, J. & TZAFRIRI, L. - "Classical Banach spaces, I", Springer-Verlag, New York-Berlin, 1977.
- [MU] - MUSIAL, K. - "The weak Radon-Nikodym property in Banach spaces", Studia Math. 64 (1978), 151-174.
- [P1] - PELCZYNSKI, A. - "On Banach spaces containing $L_1(\mu)$ ", Studia Math. 30 (1968), 321-246.
- [P2] - PELCZYNSKI, A. - "Projections in certain Banach spaces", Studia Math. 19 (1960), 209-228.
- [PE] - PERSSON, A. - "On some properties of p -nuclear and p -integral operators", Studia Math. 33 (1969), 213-222.
- [PI] - PIETSCH, A. - "Operator ideals", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
- [PP] - PERSSON, A. & PIETSCH, A. - " p -nukleare und p -integrale Abbildungen in Banachräumen", Studia Math. 33 (1969), 19-62.
- [RO] - ROSENTHAL, H.P. - "A characterization of Banach spaces containing ℓ_1 ", Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71 (1974), 2411-2413.

- [ST] - STRAEULI;E.W.- "On extension and liftings of operators, an approach within the theory of operator ideals", Tese, Universidade de Zurique, Suíça, 1985.
- [TA] - TALAGRAND,M. - "La propriété de Dunford-Pettis dans $C(K,E)$ et $L^1(E)$ ", Israel J. Math. 44 (1983), 317-321.
- [TI] - TSIRELSON,B.S. - "Not every Banach space contains ℓ_p or c_0 ", Functional Anal. Appl. 8 (1974), 138-141.
- [UH] - UHL Jr.,J.J. - "The compactness of certain dominated operators", Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 14 (1969), 1635-1637.