**Operadores Auto-Adjuntos,
Análise Harmônica e
Modelos a Valores Booleanos**

Ricardo Bianconi

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Lógica e Fundamentos
ORIENTADOR: Prof. Dr. Francisco Miraglia Neto**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.*

- SÃO PAULO, Julho de 1986 -

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação apresentamos um estudo sobre um tipo diferente de análise "não-standar". O modelo estudado é diferente do desenvolvido por A. Robinson (ver [A.R.] ou [L.G]), pois não se baseia na construção de um corpo não arquimediano dos reais. O modelo da análise deste trabalho foi inicialmente desenvolvido por D.Scott, com vistas a problemas de lógica matemática (ver [S]), usando um modelo da teoria dos conjuntos onde os valores de verdade das fórmulas desta teoria são tomados numa álgebra de Boole completa (observe-se que o modelo clássico da teoria dos conjuntos fica sendo um caso particular deste, bastando tomar a álgebra booleana completa $2 = \{0, 1\}$).

Um resultado em [R.N] diz que os operadores auto-adjuntos num espaço de Hilbert se comportam como números reais, ou seja, uma sequência monótona e limitada de operadores auto-adjuntos converge fortemente para um operador auto-adjunto, Usando uma álgebra booleana de projeções ortogonais num espaço de Hilbert, G.Takeuti conseguiu mostrar uma boa correspondência entre os reais do modelo construído e um conjunto de operadores auto-adjuntos (ver [GT.1] e [GT.2]), ou seja, uma bijeção entre os do modelo e os operadores desse conjunto, de tal modo que as operações e propriedades dos reais do modelo correspondem às dos operadores (o que é mostrado no cap.2 deste trabalho). Com

isto, podemos obter resultados de análise para funções a valores operadores auto-adjuntos ou normais a partir de resultados clássicos de análise para funções reais ou complexas.

Neste trabalho discutimos a construção do modelo e sua aplicação na obtenção de resultados de análise harmônica para funções a valores operadores (segundo GT.3). A grande vantagem do uso deste modelo é que nos permite trabalhar com operadores auto-adjuntos limitados ou não, e nos fornece um tipo de convergência para operadores que de certo modo generaliza a convergência forte, a qual chamaremos m-convergência (ver caps. 2, 3 e 4).

No capítulo 1 apresentamos a nomenclatura e resultados básicos da teoria dos operadores que permitem mais adiante obter a relação entre os reais do modelos e os operadores.

No capítulo 2 desenvolvemos a construção do modelo a valores em uma álgebra de Boole, denotado $V^{(B)}$, e estudamos algumas propriedades do modelo (secção 2.1). A seguir desenvolvemos o estudo da análise em $V^{(B)}$, mostrando a citada relação entre os reais de $V^{(B)}$ e os operadores auto-adjuntos. Finalizamos o capítulo com alguns comentários sobre grupos abelianos localmente compactos e medida de Haar, e suas extensões a $V^{(B)}$.

No capítulo 3 estudamos a integração em $V^{(B)}$ (usando o método da integral de Daniell), tendo em vista a m -convergência, citada acima, e a convergência forte (secções 3.1 e 3.2). Por fim estudamos a integral de Stieljes e medidas de variação limitada (secção 3.3).

No capítulo 4 estudamos como transferir teoremas da análise harmônica clássica para o caso de funções de um grupo abeliano localmente compacto a valores operadores auto-adjuntos (limitados ou não), usando a maquinaria desenvolvida nos capítulos 2 e 3. Começamos estudando as propriedades básicas da nova forma de transformada de Fourier para essas funções (secção 4.1), estudamos as funções que operam sobre transformadas de Fourier (secção 4.2), a seguir, teoremas tauberianos de Wiener (secção 4.3), e finalizamos com analiticidade e espaços de Hardy (secção 4.4).

No início de cada capítulo damos um resumo um pouco mais detalhado de seu conteúdo.

Agradeço ao professor Francisco Miraglia pelo dedicado trabalho de orientação tanto na dissertação como na minha formação matemática.

E também à Zara I. Abud pela ajuda no estudo de alguns tópicos deste trabalho, e ao Ruy Exel Filho pelas sugestões que levaram à solução de um problema em aberto.

Agradeço a Nadia Aparecida Vicentini e Aparecida C.
Pompeo Tavares de Souza pelo eficiente e rápido trabalho de
datilografia.

São Paulo, julho de 1986.

Ricardo Bianconi

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

CAP.1 - O TEOREMA ESPECTRAL	1.1
1.1 - Operadores Limitados	1.2
1.2 - Operadores Não Limitados	1.8
 CAP.2 - MODELO DA ANÁLISE NÃO-STANDARD	 2.1
2.1 - O Universo $V^{(B)}$	2.1
2.2 - Análise em $V^{(B)}$	2.17
 CAP.3 - INTEGRAÇÃO EM $V^{(B)}$	 3.1
3.1 - A Integral de Daniel em $V^{(B)}$	3.1
3.2 - A Integral de Daniel com a Convergência Forte	 3.11
3.3 - Integral de Stieltjes e Medidas Regulares de Variação Limitada	 3.23
 CAP.4 - ANÁLISE HARMÔNICA	 4.1
4.1 - Propriedades Básicas da Transformada de Fourier	 4.1
4.2 - Funções que Operam em $A^{(m)}(r)$ e em $B^{(m)}(r)$	 4.13
4.3 - Teoremas Tauberianos de Wiener	4.19
4.4 - Analiticidade e Espaços de Hardy	4.24

CAP. 1: O TEOREMA ESPECTRAL

Neste capítulo apresentamos o esboço de alguns resultados equivalentes aos quais chamaremos de "TEOREMA ESPECTRAL" (para operadores auto-adjuntos num espaço de Hilbert). Estes resultados desempenham um papel central neste trabalho, pois, por meio deles, obtemos uma correspondência bem comportada entre operadores auto-adjuntos e os números reais do modelo que estudaremos (veja o cap.2, 2.2). Com isto, obtemos um modo útil e relativamente fácil de traduzir teoremas sobre funções a valores reais ou complexos para o caso de funções a valores operadores auto-adjuntos ou normais num espaço de Hilbert (tanto os limitados, ou contínuos na norma do espaço de Hilbert, quanto os não limitados). Os resultados aqui expostos podem ser encontrados em [R.S.] , [D.S.], [R.N.] e [I.E.S.] . Recomendamos a leitura do artigo "what does the spectral theorem say?" de P.R.Halmos (Amer-math.Monthly, v.70 (1963), Nº 1, pp. 421-427), no qual ele comenta como surge a forma multiplicativa do teorema espectral (ver teo.1.1:5 abaixo).

Na secção (1.1) estudamos apenas os operadores limitados, e na secção (1.2) mostramos como passar para o caso dos operadores não limitados.

(1.1) OPERADORES LIMITADOS

Nesta secção, H denota um espaço de Hilbert, $\langle x, y \rangle$ denota o produto interno de x e y em H , $\|x\|$ a norma de x em H , $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, $\mathcal{L}(H)$ o conjunto dos operadores limitados em H ; se $A \in \mathcal{L}(H)$, A^* denota seu adjunto; um operador é dito auto-adjunto se $A^* = A$. Dizemos que $A \in \mathcal{L}(H)$ é positivo, $A \geq 0$, se $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$. Se $A \in \mathcal{L}(H)$, chamamos de espectro de A ao conjunto $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ não é inversível}\}$, e de (conjunto) resolvente de A ao conjunto $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$.

Temos que $\mathcal{L}(H)$ é espaço normado, com $\|T\| = \sup \{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$, e a convergência de operadores na topologia da norma é dita convergência uniforme. Há também outras duas topologias em $\mathcal{L}(H)$ que serão consideradas aqui, a forte e a fraca. Dizemos que uma sequência de operadores $\{T_n\}$ em $\mathcal{L}(H)$ convergem fortemente para $T \in \mathcal{L}(H)$ se, e só se, $\forall x \in H$, $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$, e converge fracamente para $T \in \mathcal{L}(H)$ se, e só se, $\forall x, y \in H$, $\langle T_n x, y \rangle \rightarrow \langle Tx, y \rangle$, se $n \rightarrow \infty$.

Assumiremos um conhecimento básico de teoria da medida (ver, por exemplo, [L.L.]).

Começamos com o cálculo funcional contínuo.

TEO.1.1.1: Seja $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$; então existe uma única aplicação $\phi: C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tal que:

$$a) \quad \phi(f \cdot g) = \phi(f) \phi(g), \quad \phi(\lambda f + g) = \lambda \phi(f) + \phi(g), \\ \phi(1) = I, \text{ e } \phi(\bar{f}) = \phi(f)^*;$$

$$b) \quad \phi \text{ é contínuo, e } \|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$$

$$c) \text{ se } f(t) = t, \text{ então } \phi(f) = A;$$

$$d) \text{ se } x \in H \text{ e } Ax = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ então } \phi(f)x = f(\lambda)x;$$

$$e) \quad \sigma(\phi(f)) = f(\sigma(A));$$

$$f) \text{ se } f \geq 0, \text{ então } \phi(f) \geq 0.$$

Lembrando que $\sigma(A)$ é compacto se $A \in \mathcal{L}(H)$, basta definir ϕ por c), e por a) extendemos a definição de ϕ aos polinômios e usando o teorema de Stone-Weierstrass, extende mos ϕ a $C(\sigma(A))$. Escrevemos $f(A)$ no lugar de $\phi(f)$.

Para estender este resultado para as funções Bo rel mensuráveis em $\sigma(A)$, observemos que, fixo $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^*$, então a aplicação $f \in C(\sigma(A)) \rightarrow \langle f(A)x, x \rangle$, $x \in H$ fixo, é um funcional linear contínuo e positivo sobre $C(\sigma(A))$, e portanto existe uma única medida positiva μ_x em $\sigma(A)$ tal que $\langle f(A)x, x \rangle = \int_{\sigma(A)} f(t) d\mu_x(t)$.

Dizemos que a medida μ_x acima é a medida espectral associada ao vetor $x \in H$.

Denotamos por $B(\mathbb{R})$ o conjunto das funções Borel mensuráveis $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que sejam limitadas, ou seja, $\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} < \infty$. Podemos estender o cálculo funcional para as funções de $B(\mathbb{R})$, determinando o operador $f(A)$ a partir dos números $\langle f(A)x, y \rangle$, $x, y \in H$, onde

$$\langle f(A)x, x \rangle = \int_{\sigma} f(t) d\mu_x(t). \quad e$$

$$\langle f(A)x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 (i)^j \langle f(A)(x + (i)^j y), x + (i)^j y \rangle, \quad \text{obtendo}$$

a seguinte forma do teorema espectral que podemos chamar de cálculo funcional boreliano.

TEO.1.1.2: Seja $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$; então existe uma única aplicação $\phi: B(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$, tal que:

$$\begin{aligned} a) \quad & \phi(fg) = \phi(f) \cdot \phi(g), \quad \phi(\lambda f + g) = \lambda \phi(f) + \phi(g), \\ & \phi(\bar{f}) = \phi(f)^* \quad \text{e} \quad \phi(1) = I; \end{aligned}$$

$$b) \quad \phi \text{ é contínuo e } \|\phi(f)\| \leq \|f\|_\infty;$$

$$c) \quad \text{se } f(x) = x, \quad \forall x \in \sigma(A), \quad \text{então } \phi(f) = A;$$

$$d) \quad \text{suponha que } \forall x \in H (f_n(x) \rightarrow f(x)), \text{ e que } \sup \|f_n\|_\infty < \infty, \text{ então } \phi(f_n) \rightarrow \phi(f) \text{ fortemente};$$

$$e) \quad \text{se } x \in H \text{ e } Ax = \lambda x, \text{ então } \phi(f)x = f(\lambda)x;$$

f) se $f \geq 0$, então $\phi(f) \geq 0$;

g) se $AB = BA$, $B \in \mathcal{L}(H)$, então $\phi(f)B = B\phi(f)$.

Passaremos agora a estudar a forma multiplicativa do teorema espectral que diz que um operador auto-adjunto de $\mathcal{L}(H)$ se comporta como multiplicação por função mensurável real num espaço $L_2(X, \mu)$.

Dizemos que um vetor $x \in H$ é cíclico para $A \in \mathcal{L}(H)$ se o subespaço de H gerado por $\{A^m x : m \in \mathbb{N}\}$ é denso em H . Citamos, a seguir, dois resultados que trarão como consequência o teorema desejado.

PROP.1.1.3: Seja $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$, com vetor cíclico $x \in H$. Então existe isometria $U: H \rightarrow L_2(\sigma(A), \mu_x)$ tal que $UAU^{-1}(f(t)) = tf(t)$, a igualdade no sentido de $L_2(\sigma(A), \mu_x)$.

A isometria é definida sobre $\mathcal{C}(\sigma(A))$ por $U f(A)x = f$, e daí estendida a $\mathcal{L}(H)$.

PROP.1.1.4: Seja $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$. Então existe decomposição de H , $H = \bigoplus_{i \in I} H_i$, tal que:

a) $\forall i \in I, A H_i \subseteq H_i$;

b) $\forall i \in I, x_i \in H_i$ cíclico para $A|_{H_i}$.

TEO.1.1.5: (FORMA MULTIPLICATIVA): Seja $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$. Então existem medidas μ_i em $\sigma(A)$, $i \in I$, e isometria $U: H \rightarrow \bigoplus_{i \in I} L_2(\sigma(A), \mu_i)$ tal que $(UAU^{-1}\psi)_i(t) = t \psi_i(t)$, $\forall i \in I$.

Como corolário deste teorema, se H é separável, o conjunto de índices I acima é no máximo enumerável, e podemos escolher as medidas $\mu_i = \mu x_i$ de modo que $\mu_i(\sigma(A)) = \int_{\sigma(A)} 1 d\mu x_i = \|x_i\|^2 \leq 2^{-i}$, se consideramos M a união disjunta de I cópias de $\sigma(A)$, e μ a medida dada por $\mu(E) = \sum_{i \in I} \mu_i(E \cap \sigma(A)_i)$, onde $\sigma(A)_i$ é a i -ésima cópia de $\sigma(A)$, obtemos o seguinte resultado:

PROP.1.1.6: Se $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$, H separável, então existe um espaço de medida finita (M, μ) , uma isometria $U: H \rightarrow L_2(M, \mu)$ e uma função limitada $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $(UAU^{-1}f)(m) = F(m)f(m)$.

Há um resultado que diz que toda álgebra comutativa maximal em $\mathcal{L}(H)$ é equivalente (por isometria) a um espaço $L_\infty(M, \mu)$ que é uma álgebra comutativa maximal de multiplicação por funções num espaço $L_2(M, \mu)$; (ver [I.E.S]).

Apresentaremos, agora, o teorema espectral na sua forma de representação integral ou decomposição espectral.

Seja $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$; seja $X \subseteq \mathbb{R}$ conjunto boreliano, e f_X sua função característica. Então $f_X \in \mathcal{GB}(\mathbb{R})$, e, por

tanto podemos calcular o operador $E(x) = f x(A)$ pelo teo.1.1.2. Então $E(x)$ é projeção ortogonal em H , dita projeção espectral de A . A família $\{E(x): X \subseteq \mathbb{R} \text{ boreliano}\}$ satisfaz as propriedades: $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{R}) = I$, se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ (X_n não disjunta) então $E(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N E(X_n)$ fortemente, e $E(\delta_1 \cap \delta_2) = E(\delta_1) E(\delta_2)$. Devido a estas propriedades serem semelhantes às de uma medida dizemos que a família acima é uma medida a valores projeções. Se considerarmos as projeções $E_\lambda = E(]-\infty, \lambda])$, então obtemos uma família $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ dita família espectral do operador A .

Há duas maneiras de apresentar o teorema espectral. A primeira (teo.1.1.7) usa a idéia da integral de Riemann-Stieltjes (ver [R.N]) e a segunda (teo.1.1.8) a idéia de medida, (ver [R.S]).

TEO.1.1.7: Existe uma correspondência bijetora entre operadores $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^* = A$, e famílias espectrais $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ dada por

$$A \mapsto \{E_\lambda = f_{]-\infty, \lambda]}(A) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad e$$

$$\{E_\lambda\} \mapsto A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

A integral acima significa o limite na norma de (H) de somas do tipo $\sum_{i=1}^n \lambda'_i (E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$.

TEO.1.1.8: Existe uma correspondência bijetora entre operadores AG $\mathcal{L}(H)$, $A^* = A$, e medidas a valores projeções $\{E(X): X \subseteq \mathbb{R} \text{ boreliano}\}$ dada por

$$A \rightarrow \{E(X) = f_X(A)\}_X.$$

$$\{E(X)\}_X \rightarrow A = \int \lambda dE(X)$$

Dados $x \in H$ e a família $\{E(X)\}_X$, então $m(X) = \langle E(X)x, x \rangle$ é uma medida positiva sobre $\mathbb{R}$, e é fácil verificar que $m(x) = \mu_x(X)$. Então se $f \in B(\mathbb{R})$, temos $\langle f(A)x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_x(t)$, donde representamos o operador $f(A)$ por $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(X)$.

(1.2) OPERADORES NÃO LIMITADOS

No caso dos operadores não limitados, os teoremas da secção (1.1) podem ser reescritos, com uma pequena modificação. Nesta secção apresentamos um pouco da linguagem dos operadores não limitados e indicamos as modificações que devem ser feitas para os resultados da secção anterior valham aqui.

Primeiro precisamos generalizar o conceito de operador. Dizemos que T é um operador em H , se T é transformação linear de um subespaço $D(T)$ de H em H ; $D(T)$ é o domínio de T . Se $D(T)$ é denso em H , definiremos seus adjun

junto T^* ; seja $D(T^*) = \{y \in H: \exists z \in H, \forall x \in D(T) \langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle\}$, e definimos $T^*y = z$ na notação acima. A densidade de $D(T)$ é necessária para que T^* seja univocamente determinado (embora possamos ter $D(T^*)$ não denso em H ; ver [R.S.], cap. VIII, exemplo 4). Dizemos que T é auto-adjunto se $D(T) = D(T^*)$ e $T = T^*$. Chamamos de conjunto resolvente de T a $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: (T - \lambda I) \text{ é bijeção de } D(T) \text{ sobre } H, \text{ e sua inversa } R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(H)\}$, e de espectro de T $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Então, o teorema espectral na sua forma multiplicativa, pode ser enunciado do seguinte modo:

TEO.1.2.1: Seja A operador auto-adjunto em H separável, com domínio $D(A)$. Então existe espaço de medida (M, μ) , μ finita, um operador unitário $U: H \rightarrow L_2(M, \mu)$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ finita quase sempre em relação a μ tal que:

a) $w \in D(A)$ se, e só se, $f(\cdot)(Uw)(\cdot) \in L_2(M, \mu)$;

b) se $g \in U(D(A))$, então $(UAU^{-1}g)(m) = f(m)g(m)$

No teorema espectral em sua forma de cálculo funcional boreliano, a única alteração a ser feita é que, o item c) do teo.1.1.1 deve passar a:

"c) se $h_n(t)$ é seqüência em $B(\mathbb{R})$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t) =$

$= t, \forall t \in \mathbb{R},$ e $|h_n(t)| \leq |t|$, então, $\forall x \in D(A), \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(h_n)x = Ax$.

E na sua forma de decomposição espectral não há alterações; (isto é, além da hipótese de A ser operador auto-adjunto com domínio $D(A) \subseteq H$).

CAP.2 - MODELO DA ANÁLISE NÃO-STANDARD

Neste capítulo desenvolvemos o estudo do modelo a valores em uma álgebra de Boole da teoria dos conjuntos e sua aplicação à análise. Este modelo permitirá a obtenção de teoremas sobre funções a valores operadores, a partir de teoremas clássicos da análise harmônica (ver cap.4).

Na primeira secção (2.1) desenvolvemos a construção do inverso booleano $V^{(B)}$, a interpretação de fórmulas a inclusão do universo clássico da teoria dos conjuntos, V , em $V^{(B)}$, e algumas propriedades do que chamaremos de misturas.

Na secção (2.2) desenvolvemos a análise em $V^{(B)}$ onde B é uma álgebra de Boole completa de projeções ortogonais em um espaço de Hilbert H . Construimos os números reais neste tipo de modelo, mostrando haver uma correspondência bijetora e natural entre os reais em $V^{(B)}$ e os operadores autoadjuntos em H que possuem família espectral em B . Além disso, desenvolvemos algumas propriedades básicas dos reais no modelo.

(2.1) O UNIVERSO $V^{(B)}$

Discutiremos primeiramente a construção do universo V da teoria dos conjuntos. Sua construção é feita na

teoria dos conjuntos, e para notação e terminologia, ver [T.Z.1]. Os resultados expostos nesta secção podem ser encontrados em [T.Z.1], [T.Z.2], [B], [F.M.] e [K.J.D].

O universo V pode ser definido como a classe $\{x: x = x\}$. Buscaremos dar uma estrutura hierárquica a V .

Seja R uma classe de pares ordenados de V ; dizemos que R é uma relação bem fundada se, e só se, para todo $x \in V$, a classe $R^x = \{y: yRx\}$ é conjunto, e para todo $x \in V$, $x \neq \emptyset$, existe $y \in x$ tal que $R^y \cap x = \emptyset$. Se $x \in V$, definimos o transitivizado de x pela relação R , $T_R(x)$, como o conjunto $\bigcup_{n \geq 0} S_n$, onde $S_0 = \{x\}$, $S_1 = R^x$, e $S_{n+1} = \bigcup_{y \in S_n} R^y$, $n \geq 1$. Temos então que, se $z \in T_R(x)$, então $R^z \subseteq T_R(x)$.

Se R é relação bem fundada, então o princípio da indução para R diz:

PROP. 2.1.1: $\forall x (\forall y (yRx \rightarrow \psi(y)) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \forall x \psi(x)$.

DEM: Suponha que $\exists x \neg \psi(x)$. Consideremos $T_R(x)$.

Como R é bem fundada, existe $z_0 \in T_R(x)$, tal que $R^{z_0} \cap T_R(x) = \emptyset$, o que implica que $R^{z_0} = \emptyset$. Então da hipótese, concluímos que vale $\psi(z_0)$. Seja $X = \{z \in T_R(x): \psi(z)\}$;

então $X \neq \emptyset$ pois $z_0 \in X$. Se $X \neq T_R(x)$, como R é bem fundada, $\exists y_0 \in T_R(x) \cap X$ tal que $R^{y_0} \cap (T_R(x) \setminus X) = \emptyset$. Então $R^{y_0} \subset X$, e portanto vale $\psi(y_0)$, absurdo, pois $y_0 \notin X$. Portanto $T_R(x) = X$, ou seja, vale $\psi(x)$.

Q.E.D.

Observe que usando a idéia de $T_R(x)$, a demonstração acima é inteiramente análoga a do princípio da indução transfinita.

Pelo axioma da regularidade, a relação " $\in$ ", "pertence", é bem fundada. Com esta relação, definimos o seguinte conjunto:

$$V_\alpha = \{x: \exists \xi < \alpha (x \subseteq V_\xi)\} = \bigcup_{\xi < \alpha} P(V_\xi)$$

onde α e ξ denotam ordinais, e $P(V_\xi)$ é o conjunto das partes de V_ξ . Novamente, pelo axioma da regularidade, vale a fórmula

$$\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$$

ou seja, $V = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha$, onde Ord é a classe dos ordinais. Da fórmula acima, segue que podemos definir a função $r(x) = \min\{\alpha \in \text{Ord}: x \in V_\alpha\}$ (dita função "rank"). É fácil ver que a relação " $r(\cdot) < r(\cdot)$ " é bem fundada, consequentemente, temos o princípio de indução no "rank", que diz:

$$\forall x((\forall y \ r(y) < r(x) + \rho(y)) \rightarrow \rho(x)) \rightarrow \forall x \rho(x)$$

A função $r(\cdot)$ dá uma estrutura hierárquica a V , e temos, por exemplo: $r(\{\emptyset\}) = 2$ (pois $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \{\emptyset\}$ e $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$) e $r(\omega) = \omega+1$ (pois $\omega \subseteq V_\omega$ mas $\omega \notin V_\omega$).

Podemos associar a cada conjunto $x \in V$, uma função característica $f_x: \text{dom}(f_x) \subseteq \{0,1\}$ com $x \subseteq \text{dom } f_x$, e $f_x(y)=1$ só se, $y \in x$; com isto, se identificarmos cada x com a correspondente f_x , então V pode ser visto como uma classe de funções características (funções que chamaremos de 2-funções). Mas, com este procedimento, perdemos a homogeneidade ou seja, pode haver 2-funções cujo domínio não seja constituído de 2-funções. Para contornar esse problema, definimos, por recursão:

$$\begin{aligned} V_\alpha^{(2)} &= \{f: f \text{ é função, } \text{im}(f) \subseteq 2 = \{0, 1\}, \text{ e } \exists \xi < \alpha \\ &\text{tal que } \text{dom}(f) \subseteq V_\xi\}, \text{ com } \xi \in \text{Ord} \text{ e } \alpha \in \text{Ord}, \text{ e } V^{(2)} = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha^{(2)}. \end{aligned}$$

Temos, então, por exemplo: $V_0^{(2)} = \emptyset$, $V_1^{(2)} = \{\emptyset\}$, $V_2^{(2)} = \{\emptyset, \{\langle \emptyset, 0 \rangle\}, \{\langle \emptyset, 1 \rangle\}\}$, etc. O elemento de V correspondente a $\{\langle \emptyset, 1 \rangle\} \in V_2^{(2)}$ seria $\{\emptyset\} \in V_2$, por exemplo; e a cada $x \in V$, corresponde uma 2-função f_x cujo domínio contém as 2-funções correspondentes aos elementos de x .

Por analogia às 2-funções, onde $B = 2 = \{0, 1\}$, temos a seguinte definição de um B-conjunto (que corresponde a uma B-função).

Seja B uma álgebra de Boole completa (ver [Z.I.A] e [H.2]); denotamos as operações de B por $\wedge$ (produto), $\vee$ (soma), $\neg$ (complemento), e denotamos supremo por $\bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha$ e infimo por $\bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha$.

DEF.2.1.2: Definimos a classe $V^{(B)}$, dita dos B-conjuntos, por recursão:

$$V_\alpha^{(B)} = \{f: f \text{ é função } \text{im}(f) \subseteq B, \text{ e } \xi < \alpha \text{ tal que } \text{dom}(f) \subseteq V_\xi^{(B)}\}, \quad \alpha \in \text{Ord}, \quad \xi \in \text{Ord}, \text{ e } V^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha^{(B)}.$$

Para essa nova estrutura definimos uma linguagem $\mathcal{L}^{(B)}$, que é a linguagem da teoria dos conjuntos acrescentada com um nome para cada elemento de $V^{(B)}$. A uma fórmula nesta linguagem chamaremos de B-fórmula.

Devemos então definir a função " $[\cdot]$ " que associa a cada fórmula ψ de $\mathcal{L}^{(B)}$ seu valor de verdade $[\psi]_B$.

DEF.2.1.3: Sendo definido $[\sigma]$ para toda σ atômica, então definimos por indução na complexidade das fórmulas:

$$a) [\psi_1 \wedge \psi_2] = [\psi_1] \wedge [\psi_2].$$

$$b) [\neg \Psi] = \neg [\Psi]$$

$$c) [\exists x \Psi(x)] = \bigvee_{u \in V(B)} [\Psi(u)]$$

OBS.2.1.4: Da definição acima, segue que:

$$a) [\Psi_1 \vee \Psi_2] = [\Psi_1] \vee [\Psi_2]$$

$$b) [\Psi_1 \rightarrow \Psi_2] = [\Psi_1] \rightarrow [\Psi_2] = \neg [\Psi_1] \vee [\Psi_2]$$

$$c) [\Psi_1] \leftrightarrow [\Psi_2] = [\Psi_1] \leftrightarrow [\Psi_2]$$

$$d) [\forall x \Psi(x)] = \bigwedge_{u \in V(B)} [\Psi(u)]$$

Dizemos que uma fórmula Ψ é válida em $V^{(B)}$,
 $V^{(B)} \models \Psi$, se, e só se $[\Psi] = 1$.

Para motivar a definição de $[\sigma]$ para σ atômica (isto é, do tipo $u \in v$ ou $u = v$, $u, v \in V^{(B)}$), observemos que o axioma da extensionalidade deve ser satisfeito (isto é $u = v \leftrightarrow \forall x(x \in u \rightarrow x \in v) \wedge \forall y(y \in v \rightarrow y \in u)$, donde $[u = v] = [\forall x(x \in u \rightarrow x \in v) \wedge \forall y(y \in v \rightarrow y \in u)]$); deve valer a verdade lógica " $u \in v \leftrightarrow \exists y(y \in v \wedge u = y)$ " (donde $[u \in v] = [\exists y(y \in v \wedge u = y)]$); e se $x \in \text{dom}(u)$, então, por analogia às funções características, devemos ter $[x \in u] = u(x)$.

DEF.2.1.5: Sejam $u, v \in V^{(B)}$; definimos, então:

$$a) [u \in v] = \bigvee_{y \in \text{dom}(v)} v(y) \wedge [y = u]$$

$$b) [u = v] = \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} u(x) \rightarrow [x \in v] \wedge$$

$$\bigwedge_{y \in \text{dom}(v)} v(y) \rightarrow [y \in u]$$

Observe-se que, na verdade, basta definir o valor de $u = v$ pois, da definição acima, temos:

$$[u = v] = \bigwedge_{x \in \text{dom}(u)} u(x) \rightarrow \left(\bigvee_{z \in \text{dom}(v)} v(z) \wedge [x = z] \right) \wedge$$

$$\bigwedge_{y \in \text{dom}(v)} v(y) \rightarrow \left(\bigvee_{z \in \text{dom}(u)} u(z) \wedge [y = z] \right)$$

TEO.2.1.6: Se Ψ é teorema da teoria dos conjuntos (ZF com o axioma da escolha), então $[\Psi] = 1$, é também teorema da teoria dos conjuntos (ver [T.Z.2] e [B]).

O teorema diz que $V^{(B)}$ é modelo da teoria dos conjuntos, e sua demonstração consiste em mostrar que todos os axiomas da teoria dos conjuntos são válidos em $V^{(B)}$.

Estudaremos agora a inclusão de V em $V^{(B)}$.

DEF.2.1.7: Dizemos que B_0 é subálgebra booleana completa de B se $B_0 \subseteq B$ e tal que os supremos e ínfimos de elementos de B_0 , calculados em B_0 , coincidem com os mesmos calculados em B .

TEO.2.1.8: Seja B_0 subálgebra booleana completa de B . Então:

$$(i) \quad V^{(B_0)} \subseteq V^{(B)}.$$

Se $u, v \in V^{(B_0)}$, então:

$$(ii) \quad [u \vee v]_{B_0} = [u \vee v]_B,$$

$$(iii) \quad [u = v]_{B_0} = [u = v]_B$$

DEM:

(i) Basta observar que, neste caso, uma B_0 -função é uma B -função.

(ii) e (iii) Seguem simultaneamente por indução na relação bem-fundada " $y \in \text{dom}(x)$ ". As hipóteses são:

$$a) \quad \forall y \in \text{dom}(u) \quad [y \vee v]_{B_0} = [y \vee v]_B$$

$$b) \quad \forall y \in \text{dom}(v) \quad [y \vee u]_{B_0} = [y \vee u]_B$$

$$c) \forall y \in \text{dom}(v) [u=y]_{B_0} = [u=y]_B$$

Então, temos:

$$[u \in v]_{B_0} = \bigvee_{y \in \text{dom}(v)} v(y) \wedge [y=u]_{B_0} = \quad (\text{por c)})$$

$$= \bigvee_{y \in \text{dom}(v)} v(y) \wedge [y=u]_B = [u \in v]_B$$

$$[u=v]_{B_0} = \bigwedge_{y \in \text{dom}(u)} u(y) + [y \in v]_{B_0} \wedge$$

$$\bigwedge_{y \in \text{dom}(v)} v(y) + [y \in u]_{B_0} =$$

$$(\text{por a) e b)}) = \bigwedge_{y \in \text{dom}(u)} u(y) + [y \in v]_B \wedge$$

$$\bigwedge_{y \in \text{dom}(v)} v(y) + [y \in u]_B = [u=v]_B \quad \text{QED}$$

Observe-se que na demonstração acima foi usada, sem menção explícita, a definição de subálgebra completa.

Dizemos que uma fórmula ψ é restrita se os quantificadores que aparecem em ψ são da forma $\exists x(x \in u)$ ou $\forall x(x \in u)$ (ou, numa forma abreviada, $\exists x \in u$ ou $\forall x \in u$).

COROL.2.1.8.1: Se B_0 é subálgebra booleana completa de B , então para qualquer fórmula restrita $\psi(v_1, \dots, v_n)$ e quaisquer $u_1, \dots, u_n \in V^{(B_0)}$ vale

$$[\psi(u_1, \dots, u_n)]_{B_0} = [\psi(u_1, \dots, u_n)]_B$$

DEM: Por indução na complexidade de ψ . Para fórmulas atômicas já foi demonstrado. Para fórmulas do tipo $\psi_1 \vee \psi_2$ ou $\psi_1 \wedge \psi_2$, é imediato. Seja $u \in V^{(B_0)}$ e seja ψ da forma

$$[\psi(v_1, \dots, v_n)] = \exists x \cup \psi(x, v_1, \dots, v_n)$$

Então:

$$\begin{aligned} [\psi(u_1, \dots, u_n)]_{B_0} &= [\exists x \cup \psi(x, u_1, \dots, u_n)]_{B_0} = \\ &= \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} u(x) \wedge [\psi(x, u_1, \dots, u_n)]_{B_0} = \\ &= \bigvee_{y \in \text{dom}(u)} u(x) \wedge [\psi(x, u_1, \dots, u_n)]_B = \\ &= [\exists x \cup \psi(x, u_1, \dots, u_n)]_B = [\psi(u_1, \dots, u_n)]_B \quad \text{QED} \end{aligned}$$

DEF.2.1.9: Para cada $x \in V$ definimos

$\bar{x} = \{ \langle \bar{y}, 1 \rangle : y \in x \}$, por recursão sobre a relação bem-fundada $\bar{y} \in \text{dom}(\bar{x})$, e nos dá uma inclusão canônica $\bar{v}: V \rightarrow V^{(B)}$; os elementos $\bar{x}$ de $V^{(B)}$ são ditos "standard".

Pela definição acima, temos que $V \cong V^{(2)} \subseteq V(B)$, pois $2 = \{0, 1\}$ é subálgebra booleana completa de B . O teorema abaixo fornece alguns detalhes dessa inclusão; $[B]$.

TEO.2.1.10:

(i) Se $x \in V$ e $u \in V^{(B)}$ então $[u \in \bar{x}] = \bigvee_{y \in x} [u = \bar{y}]$

(ii) Se $x, y \in V$, então:

$$x \in y \leftrightarrow V^{(B)} \models \bar{x} \in \bar{y}$$

$$x = y \quad V^{(B)} \models \bar{x} = \bar{y}$$

(iii) A aplicação $x \in V \mapsto \bar{x} \in V^{(2)}$ é injetora

(iv) Para cada $u \in V^{(2)}$, existe um único $x \in V$ tal que $V^{(2)} \models u = \bar{x}$

(v) Para cada fórmula $\Psi(v_1, \dots, v_n)$ e $x_1, \dots, x_n \in V$, temos

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow V^{(2)} \models \Psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

e se Ψ é restrita, então:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow V^{(B)} \models \Psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

OBS.2.1.11: Se a fórmula Ψ é do tipo Σ_1 (ou seja, construída a partir de fórmulas atômicas, e suas negações, por conectivos da forma " $\wedge$, $\vee$ ", e por quantificadores " $\exists x$ " e " $\forall y \in c$ "), então vale:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) + v^{(B)} \models \Psi(\bigvee x_1, \dots, \bigvee x_n)$$

DEF.2.1.12: Seja B uma álgebra booleana completa. Um subconjunto $A \subseteq B$ é dito anti-cadeia se para todos $a, b \in A$, com $a \neq b$, temos $a \wedge b = 0$. Uma anti-cadeia A é dita partição da unidade se $\bigvee A = 1$.

DEF.2.1.13: Dada uma anti-cadeia $A = \{a_i : i \in I\} \subseteq B$, e um subconjunto $U = \{u_i : i \in I\} \subseteq v^{(B)}$, definimos a "mistura" $\sum_{i \in I} a_i u_i$ como o elemento $u \in v^{(B)}$ tal que $\text{dom}(u) = \bigcup_{i \in I} \text{dom}(u_i)$ e se $z \in \text{dom}(u)$, $u(z) = \bigvee_{i \in I} a_i \wedge [z \in u_i]$ que

LEMA 2.1.14: (Das Misturas): Seja $\{a_i : i \in I\} \subseteq B$ anti-cadeia, e $\{u_i : i \in I\} \subseteq v^{(B)}$, e $u = \sum_{i \in I} a_i u_i$. Então, para cada $i \in I$, $a_i \leq [u = u_i]$.

DEM: Seja $[u = u_i] = a \wedge b$, onde

$$a = \bigwedge_{z \in \text{dom}(u)} u(z) + [z \in u_i], \text{ e } b = \bigwedge_{z \in \text{dom}(u_i)} u_i(z) + [z \in u]$$

Então, se $x \in \text{dom}(u)$, temos:

$$a_i \wedge u(z) = a_i \wedge [z \in u_i] \leq [z \in u_i], \text{ o que implica } a_i \leq u(z) + [z \in u_i], \text{ e, portanto, } a_i \leq a.$$

Se $z \in \text{dom}(u_i)$, temos:

$a_i \wedge u_i(z) \leq a_i \wedge [zGu_i] \leq [zGu_i]$, o que implica $a_i \leq u_i(z) + [zGu_i]$, e portanto, $a_i \leq b$.

Portanto $a_i \leq a \wedge b$

QED

Na próxima secção (2.2), ao analisarmos a construção dos números naturais e racionais em $V^{(B)}$, obtemos uma motivação intuitiva para a idéia de partição da unidade. A seguir mostramos algumas propriedades das misturas ([GT-1]).

PROP.2.1.15: Seja $u = \sum_{i \in I} a_i u_i \in V^{(B)}$. Então, se $\psi(v)$ é uma B-fórmula, temos: $[\psi(u)] = \bigvee_{i \in I} [\psi(u_i)] \wedge a_i$, onde $\{a_i : i \in I\}$ é partição da unidade.

DEM: Como $x = y \wedge \psi(y) + \psi(x)$, então $[x=y] \wedge [\psi(y)] \leq [\psi(x)]$.

Logo,

$$[\psi(u_i)] \wedge a_i = [\psi(u_i)] \wedge [u = u_i] \wedge a_i \leq [\psi(u)] \wedge a_i$$

Analogamente, temos:

$$[\psi(u)] \wedge a_i = [\psi(u)] \wedge [u = u_i] \wedge a_i \leq [\psi(u_i)] \wedge a_i$$

Portanto:

$$[\Psi(u)] = \bigvee_{i \in I} [\Psi(u_i)] \wedge a_i = \bigvee_{i \in I} [\Psi(u_i)] \wedge a_i \quad \text{QED}$$

PROP. 2.1.16: Seja $u = \sum a_i u_i \in V^{(B)}$ tal que se $i \neq j$, $[u_i = u_j] = 0$. Então $a_i = [u = u_i]$, onde $\{a_i : i \in I\} \subseteq B$ é partição da unidade.

DEM: Pela proposição anterior, temos:

$$[u = u_j] = \bigvee_{i \in I} [u_i = u_j] \wedge a_i = a_j \quad \text{QED}$$

PROP. 2.1.17: Seja $u = \sum a_i u_i \in V^{(B)}$, $\{a_i : i \in I\} \subseteq B$ partição da unidade. Se $\Psi(x)$ é uma B-fórmula, então:

$$[\Psi(u)] = \bigvee_{i \in I} [u = u_i] \wedge [\Psi(u_i)]$$

DEM: Temos que

$$\bigvee_{i \in I} [u = u_i] \wedge [\Psi(u_i)] \leq [\Psi(u)]$$

Pela prop. 2.1.15, temos:

$$[\Psi(u)] = \bigvee_{i \in I} [\Psi(u_i)] \wedge a_i \leq \bigvee_{i \in I} [\Psi(u_i)] \wedge [u = u_i] \quad \text{QED}$$

Apresentamos agora o princípio do máximo em $V^{(B)}$.

Nos diz que o valor de uma B-fórmula do tipo $\exists x \Psi(x)$ é sempre igual ao de $\Psi(u)$ para algum $u \in V^{(B)}$. Isto é, o supremo $\bigvee_{u \in V^{(B)}} [\Psi(u)]$ é, na realidade, um máximo. No caso particular em que $\exists x \Psi(x)$ é válida, então, como no caso clássico, $\exists x \Psi(x)$ tem uma "testemunha", isto é, $[\Psi(u)] = 1$ para algum $u \in V^{(B)}$.

TEO.2.1.18: (PRINCÍPIO DO MÁXIMO): Se $\Psi(x)$ é uma B-fórmula, então existe $u \in V^{(B)}$ tal que $[\exists x \Psi(x)] = [\Psi(u)]$, (ver [B]).

DEM: Temos que $[\exists x \Psi(x)] = \bigvee_{u \in V^{(B)}} [\Psi(u)]$.

Como B é um conjunto (e não uma classe própria), temos que $S = \{[\Psi(u)] : u \in V^{(B)}\}$ é conjunto. Pelo axioma da escolha, podemos bem-ordenar o conjunto S ; ou seja, existe $\alpha \in \text{Ord}$, e conjunto $\{u_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq V^{(B)}$ tal que

$$S = \{[\Psi(u_\xi)] : \xi < \alpha\}, \text{ e } [\exists x \Psi(x)] = \bigvee_{\xi < \alpha} [\Psi(u_\xi)]$$

Para cada $\xi < \alpha$, seja

$$a_\xi = [\Psi(u_\xi)] \wedge \neg \bigvee_{\eta < \xi} [\Psi(u_\eta)]$$

Então $\{a_\xi : \xi < \alpha\}$ é anti-cadeia, e $a_\xi \leq [\Psi(u_\xi)]$, para todo $\xi < \alpha$.

Seja $u = \sum_{\xi < \alpha} a_{\xi} u_{\xi}$; pelo lema 2.1.14, temos
 $a_{\xi} \leq [u = u_{\xi}]$, para todo $\xi < \alpha$. Então:
 $[\Psi(u)] \geq [u = u_{\xi}] \wedge [\Psi(u_{\xi})] \geq a_{\xi}$, donde $[\Psi(u)] \geq \bigvee_{\xi < \alpha} a_{\xi} =$
 $= \bigvee_{\xi < \alpha} [\Psi(u_{\xi})] = [\exists x \Psi(x)]$.

Como $[\Psi(u)] \leq \bigvee_{v \in V(B)} [\Psi(v)] = [\exists x \Psi(x)]$, então
 $[\Psi(u)] = [\exists x \Psi(x)]$. QED

OBS. 2.1.19: Observe-se que se $x \in V^{(B)}$, então
 $\{y \in V^{(B)} : [x=y] = 1\}$ é classe própria; então, quando quizermos
definir um conjunto $\{x \in V^{(B)}, \Psi(x)\}$, tomaremos o conjunto
 $\{[x] : \Psi(x)\}$ onde $[x] = \{y \in V^{(B)} : [x=y] = 1\}$, e se $[z=x] = 1$,
 $r(z) \geq r(y)$ isto é, tomamos $[x]$ como a classe dos $y \in V^{(B)}$
de menor "rank" tal que $[y=x] = 1$ (esse recurso, devido a
D.Scott - ver [ST] - nos dispensa da necessidade de trabal
har com classes de classes próprias). Podemos definir uma
versão separável de $V^{(B)}$, $V_S^{(B)} = \{[x] : x \in V^{(B)}\}$, ou seja,
neste modelo, a igualdade é realmente igualdade.

Citamos agora um resultado técnico que será útil
no cap.3.

TEO.2.1.20: Seja B álgebra booleana completa, e
 $B_0 \subseteq B$ subálgebra completa de B . Então existe uma álgebra
booleana completa D em $V^{(B_0)}$ tal que $(V^{(B_0)})^{(D)} \cong V^{(B)}$.
([ST]).

Para a demonstração ver [ST], onde é apresentado o resultado acima, de uma forma mais geral (além da parte citada no teo.2.1.20, apresenta o caso de dadas álgebras booleanas completas B em V , e D em $V^{(B)}$, então existe álgebra booleana completa C em V tal que $(V^{(B)})^{(D)} \cong V^{(C)}$.

(2.2) - ANÁLISE EM $V^{(B)}$

Nesta secção, B será uma álgebra booleana completa de projeções num espaço de Hilbert, isto é:

(1) IGB , OGB , e todos os elementos de B comutam entre si;

(2) se $P_1, P_2 \in B$, $\neg P_1 = I - P_1$, $P_1 \wedge P_2 = P_1 P_2$ e $P_1 \vee P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$;

(3) B é álgebra booleana completa, e se $P = \bigvee_{\alpha} P_{\alpha}$, então $\text{im}(P)$ será o fecho do subespaço de H gerado por $\bigcup_{\alpha} \text{im}(P_{\alpha})$.

DEF.2.2.1: Seja A um operador autoadjunto de H , com decomposição espectral $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$; então dizemos que A está em (B) se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_{\lambda} \in B$.

Se $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$ e $B = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE'_{\lambda}$ são dois operadores autoadjuntos, então dizemos que A comuta com B se, e só se

para todos $\lambda, \mu \in R$, $E_\lambda E'_\mu = E'_\mu E_\lambda$, (se A e B são limitados, pelo teorema espectral segue que $AB = BA$).

LEMA 2.2.2: Se $\{A_\alpha\}$ é um conjunto de operadores autoadjuntos, comutáveis dois a dois, então existe uma álgebra booleana completa de projeções tal que, todos A_α estão em (B) .

DEM: Basta tomar a álgebra booleana completa gerada pelas famílias espectrais dos A_α . QED

Vejamos quem são os naturais, racionais e reais em $V^{(B)}$. Temos que o conjunto dos naturais em $V^{(B)}$ é dado por $\mathbb{N}$, e dizemos que $u \in V^{(B)}$ é número natural se $[u \in \mathbb{N}] = I$.

TEO. 2.2.3: O conjunto dos naturais de $V^{(B)}$ é dado por $\mathbb{N}$, (ou $[\omega = \mathbb{N}] = I$).

DEM: (ESBOÇO - ver [TZ-2]): Como 0 em V é o conjunto vazio e $\emptyset$ em $V^{(B)}$ é a função vazia (ver secção 3.1), então temos $[0 = \emptyset] = I$. Temos também que $[\mathbb{N}+1 = (n+1)^V] = I$, pois a expressão dentro do colchete é a mesma que $\forall y (y \in \mathbb{N} \vee y = n+1) = \mathbb{N} \leftrightarrow y \in (n+1)^V$.

Temos também que $[0 \in \mathbb{N} \wedge \forall x \in \mathbb{N} (x+1 \in \mathbb{N})] = I$, pois $[\forall x \in \mathbb{N} (x+1 \in \mathbb{N})] = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [\mathbb{N}+1 \in \mathbb{N}] = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [(n+1)^V \in \mathbb{N}] = I$.

Temos $[OGa \wedge \forall xGa(x+1Ga) + \overset{V}{\omega} \subseteq a] = 1$, pois se $a \in V^{(B)}$ e $n \in \omega$, $[OGa \wedge \forall xGa(x+1Ga) + \overset{V}{n}Ga] = 1$ (prova-se por indução em n).

Portanto $[\omega = \overset{V}{\omega}] = 1$, pois temos $\omega = a \leftrightarrow \Psi(a)$, onde $\Psi(a)$ é a fórmula $OGa \wedge \forall xGa(x+1Ga) \wedge \forall y(OGy \wedge \forall xGy(x+1Gy) \rightarrow a \subseteq y)$. QED

Seja $u \in V^{(B)}$ tal que $[u \in \omega] = [u \in \overset{V}{\omega}] = 1$. Então $[u \in \overset{V}{\omega}] = \bigvee_{x \in \text{dom}(\overset{V}{\omega})} \overset{V}{\omega}(x) \wedge [u=x] = \bigvee_{n \in \omega} [u=\overset{V}{n}]$; se $P_n = [u=\overset{V}{n}]$, então $\{P_n\}$ é partição da unidade, e $u = \sum_{n \in \omega} \overset{V}{n} P_n = \sum_{n \in \omega} n \cdot P_n$. Seja agora $\{P_i\}$ partição da unidade, seja $\{n_i\} \subseteq \omega$, e $u = \sum_i n_i P_i$; então $[u \in \overset{V}{\omega}] = \bigvee_{n \in \omega} [u=\overset{V}{n}] = \bigvee_i \bigvee_n [\overset{V}{n}_i = \overset{V}{n}] = 1$; portanto os números naturais de $V^{(B)}$ são da forma $\sum_i \overset{V}{n}_i P_i$ (ou $\sum_i n_i P_i$, $n_i \in \omega$).

OBS.2.2.4: Se $u = \sum_i n_i P_i$, e $v = \sum_j m_j P'_j$ são números naturais em $V^{(B)}$, então valem:

$$u+v = \sum_{i,j} (n_i+m_j) P_i P'_j$$

$$u \cdot v = \sum_{i,j} (n_i m_j) P_i P'_j$$

$$[u < v] = \bigvee_{n_i < m_j} P_i P'_j$$

Isso decorre do lema das misturas (2.1.14).

Como os números inteiros são obtidos de forma elementar a partir de ω , então, em $V^{(B)}$, $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}^V$) é o conjunto dos inteiros, e os inteiros em $V^{(B)}$ são da forma $(\sum_i n_i P_i, \{n_i\} \subseteq \mathbb{Z}, \text{ e } \{P_i\} \text{ partição da unidade.})$ Analogamente, o conjunto dos racionais em $V^{(B)}$ é $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}^V$), e os números racionais de $V^{(B)}$ são da forma $(\sum_i r_i P_i, \{r_i\} \subseteq \mathbb{Q}.$

OBS.2.2.5: Se $u = \sum_i r_i P_i$ e $v = \sum_j s_j P_j$ são racionais em $V^{(B)}$, então valem:

$$u+v = \sum_{i,j} (r_i + s_j) P_i P'_j$$

$$u.v = \sum_{i,j} (r_i s_j) P_i P'_j$$

$$[u < v] = \bigvee_{r_i < s_j} P_i P'_j$$

$$[u \leq v] = \bigvee_{r_i \leq s_j} P_i P'_j$$

Novamente, aplicação do lema das misturas (2.1.14).

Os números reais em $V^{(B)}$ são definidos por cortes de Dedekind, e veremos em seguida que, dependendo da álgebra booleana B , pode acontecer que $\mathbb{R}^V$ não seja o conjunto de todos os reais de $V^{(B)}$.

A fórmula que diz que "a é um número real" é a seguinte:

$$a \subseteq \mathbb{Q} \wedge \exists s \in \mathbb{Q} (s \in a) \wedge \exists s \in \mathbb{Q} (s \notin a) \wedge \forall s \in \mathbb{Q} (s \in a \leftrightarrow \forall t \in \mathbb{Q} (s < t \rightarrow t \in a))$$

DEF.2.2.6: Definimos $\mathbb{R}^{(B)} = \{u \in V^{(B)} : [u \text{ é real}] = 1\}$; a interpretação do conjunto dos reais em $V^{(B)}$ será $\mathbb{R}^{(B)} \times \{1\}$.

PROP.2.2.7: Há uma correspondência bijetora entre $\mathbb{R}^{(B)}$ e os operadores autoadjuntos em (B) .

DEM: Sejam $u \in \mathbb{R}^{(B)}$, $r \in \mathbb{Q}$, e $P_r = r \in u$. Então, da definição de número real, segue que

$$a) \bigwedge_{r \in \mathbb{Q}} P_r = 0;$$

$$b) \bigvee_{r \in \mathbb{Q}} P_r = 1;$$

$$c) P_r = \bigwedge_{r < s} P_s$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, seja $E_\lambda = \bigwedge_{\lambda < r} P_r$. Então, segue que

(a') $\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda = 0$; (b') $\bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda = 1$; (c') $E_\lambda = \bigwedge_{\lambda < \mu} E_\mu$.

Então $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ é resolução da identidade (ou família espectral) em B , e, portanto, corresponde a um único operador autoadjunto A em (B) , $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$.

Reciprocamente, seja $\{E_\lambda\} \subseteq B$ família espectral sejam $P_r = E_r$, se $r \in Q$. Definimos $u \in V^{(B)}$ da forma:

$$\text{dom}(u) = \{\tilde{r} : r \in Q\}, \quad \text{e} \quad u(\tilde{r}) = P_r.$$

Então $u \in R^{(B)}$, pois, temos que os P_r satisfazem as propriedades (a), (b) e (c) acima e temos $[r \in u] = P_r$, se $r \in Q$; então

$$[u \subseteq Q] = [\forall r \in u (r \in Q)] = I$$

$$[\exists s \in Q (s \in u)] = \bigvee_{s \in Q} [s \in u] = \bigvee_{s \in Q} P_s = I$$

$$[\exists s \in Q (s \notin u)] = \bigvee_{s \in Q} [s \notin u] = \bigvee_{s \in Q} P_s = \bigwedge_{s \in Q} P_s = 0 = I$$

se $s \in Q$, então temos:

$$[\forall t \in Q (s < t \rightarrow t \in u)] = \bigwedge_{t \in Q} [s < t \rightarrow t \in u] = \bigwedge_{s < t} [t \in u] =$$

$$= \bigwedge_{s < t} P_t = P_s = [s \in u],$$

e portanto

$$[\forall s \in Q (s \in u \leftrightarrow \forall t \in Q (s < t \rightarrow t \in u))] = I$$

Portanto $u \in R^{(B)}$

QED

Se $a \in \mathbb{R}$, então corresponde a $\overset{V}{A}$ uma família espec-
tral $\{E_\lambda\}$ tal que $E_\lambda = 0$ se $\lambda < a$, e $E_\lambda = I$, se $\lambda \geq a$, e por-
tanto, o operador aI . Se $\{P_i\}$ é partição da unidade, e
 $\{a_i\} \subseteq \mathbb{R}$, então $a = \sum_i a_i P_i$ é real em $V^{(B)}$; entretanto, nem
sempre todos os reais de $V^{(B)}$ são dessa forma. Seja $H = L_2(\mathbb{R})$,
e o operador autoadjunto M_x em H , $M_x(f(x)) = xf(x)$. Seja
 $u \in \mathbb{R}^{(B)}$ correspondente a M_x . Então $u \in \mathbb{R}^V = 0$, pois, se $a \in \mathbb{R}$,
 $[\overset{V}{A}=u] = \bigwedge_{r \in \mathbb{Q}} [\overset{V}{r} \in \overset{V}{A} \leftrightarrow \overset{V}{r} \in u]$, e

$$[\overset{V}{r} \in \overset{V}{A} \leftrightarrow \overset{V}{r} \in u] = \begin{cases} [\overset{V}{r} \in u] , & \text{se } a \leq r \\ \neg[\overset{V}{r} \in u] = I - [\overset{V}{r} \in u] , & \text{se } a > r; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{se } M_x &= \int \lambda dE_\lambda, \text{ então } E_r = [\overset{V}{r} \in u] ; \text{ portanto } [\overset{V}{A}=u] = \\ &= \bigwedge_{a \leq r} [\overset{V}{r} \in u] \wedge \bigwedge_{a > r} (I - [\overset{V}{r} \in u]) = \bigwedge_{a \leq r} E_r \wedge \bigwedge_{a > r} (I - E_r) = \\ &= E_a - E_{a-0} = 0 . \end{aligned}$$

A seguir, mostramos as relações entre as opera-
ções básicas de dois reais em $V^{(B)}$ e seus operadores corres-
pondentes em B . Sejam $u, v \in \mathbb{R}^{(B)}$, e $A = \int \lambda dE_\lambda$, $B = \int \lambda dE'_\lambda$
os operadores correspondentes.

PROP.2.2.8: A soma $u+v$ corresponde a $A+B$.

DEM: Se a e b são reais, a adição para cortes de
Dedekind é definida por:

$r \in (a+b)$ se, e só se, $\forall s \in Q (r < s \rightarrow \exists t_1 t_2 \in Q (s = t_1 + t_2 \wedge t_1 \in a \wedge t_2 \in b))$.

Em $V^{(B)}$, $u+v$ corresponderá ao operador

$$C = \int \lambda dE''_{\lambda}, \text{ com } E''_{\lambda} = \bigwedge_{\lambda < \lambda'} \bigvee_{\mu \in R} E_{\mu} E'_{\lambda - \mu}, \text{ (da definição de } a+b)$$

Então $C = A+B$, pois a família espectral $\{E''\}$ corresponde à decomposição do operador $A+B$.

PROP.2.2.9: Em $V^{(B)}$ $u \leq v$ se, e só se, $A \leq B$.

DEM: Temos que $u \leq v$, por corte de Dedekind, se, e só se, $v \subseteq u$. Então.

$$[u \leq v] = I \leftrightarrow [\forall r \in Q (r \in v \rightarrow r \in u)]$$

$$\leftrightarrow \forall r \in Q ((I - E'_r) + E_r - E_r(I - E'_r) = I)$$

$$\leftrightarrow \forall r \in Q (E'_r = E_r \cdot E'_r)$$

$$\leftrightarrow \forall r \in Q (E'_r \leq E_r)$$

$$\leftrightarrow \forall \lambda \in R (E'_{\lambda} \leq E_{\lambda})$$

$$\leftrightarrow A \leq B$$

QED

PROP.2.2.10: Seja $A = \int \lambda dE_\lambda$ em (B) , PGB , e
 $AP = \int \lambda dE'_\lambda$. Então:

$$E'_\lambda = \begin{cases} E_\lambda P + (I-P) & \text{se } \lambda \geq 0 \\ E_\lambda P & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

DEM: Se $Px = x$, $\int \lambda dE'_\lambda x = \int \lambda dE_\lambda x = Ax$

Se $Px = 0$, $\int \lambda dE'_\lambda x = \int_0^\infty \lambda d(Ix) = 0$ QED

PROP.2.2.11: Sejam $A = \int \lambda dE_\lambda$ e $B = \int \lambda dE'_\lambda$ em
 (B) , e PGB . Então $AP \leq BP$ se, e só se, $E'_\lambda P \leq E_\lambda P$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

DEM: Temos que $AP \leq BP$ se, e só se, $E_\lambda P + (I-P) \geq$
 $\geq E'_\lambda P + (I-P)$ se $\lambda \geq 0$, e $E_\lambda P \geq E'_\lambda P$ se $\lambda < 0$ (pela prop.2.2.10).

PROP.2.2.12: $[u \leq v] \geq P$ se, e só se, $AP \leq BP$.

DEM: $[u \leq v] \geq P \leftrightarrow \forall r \in Q (rGv + rGu) \geq P$

$$\leftrightarrow \forall r \in Q (I - E'_r) + E_r - E_r (I - E'_r) \geq P$$

$$\leftrightarrow \forall r \in Q (I - E_r) (I - E'_r) + E_r \geq P$$

$$(I - E_r) (I - E'_r) + E_r \geq P \Rightarrow E_r \geq E'_r P \Rightarrow E_r P \geq E'_r P$$

Reciprocamente, temos:

$$E_r P \geq E'_r P \Rightarrow (I - E'_r) P \geq (I - E_r) P \Rightarrow (I - E_r)(I - E'_r) P \geq (I - E_r) P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I - E_r)(I - E'_r) P + E_r P \geq P \Rightarrow (I - E_r)(I - E'_r) + E_r \geq P \quad \text{QED}$$

PROP. 2.2.13: $[u=v] \geq P$ se, e só se, $AP=BP$.

DEM: Temos que $u=v \leftrightarrow u \leq v \wedge v \leq u$; da prop. anterior,
 $[u=v] \geq P \Leftrightarrow [u \leq v] \geq P$ e $[v \leq u] \geq P \Leftrightarrow AP=BP$. QED

PROP. 2.2.14: Seja $\max(u, v)$ correspondendo a
 $\int \lambda dE''_\lambda$. Então $E''_\lambda = E_\lambda \cdot E'_\lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

DEM: A família espectral de $\max(u, v)$ é dada por
 $E''_\lambda = \inf\{E_\lambda, E'_\lambda\} = E_\lambda \cdot E'_\lambda$. QED

No caso da prop. acima, definimos $\max(A, B) = \int \lambda dE''_\lambda$.

PROP. 2.2.15: O oposto ($\text{em } V^{(B)}$) de u , $-u$, corresponde a $-A$.

DEM: Seja C correspondente a $-u$; então $[u+(-u)] =$
 $= 0] = I$, implica (pela prop. 2.2.13) que $A+C = 0$, ou $C =$
 $= -A$. QED

Podemos determinar uma expressão para $(-u)$, a partir de u , pela prop. 2.2.15, acima. Se $A = \int \lambda dE_\lambda$, então $-A =$

$= \int -\lambda dE_{\lambda} = \int \lambda dE_{\lambda}^{-}$; temos que A é aproximado por somas do
 tipo $\sum_i \tilde{\lambda}_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})$; então $-A$ é aproximado por
 $\sum_i -\tilde{\lambda}_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) = \sum_i \tilde{\lambda}_i [(I - E_{-\lambda_i}) - (I - E_{-\lambda_{i+1}})]$; é fácil ver
 que, se $E_{\lambda}^{-} = I - E_{-\lambda}$, então $\{E_{\lambda}^{-}\}$ é família espectral, e que
 $-A = \int \lambda dE_{\lambda}^{-}$. Então, se $r \in Q$, temos $(-u)(\overset{V}{r}) = E_r^{-} = I - E_{-r}$.

PROP. 2.2.16: Se $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, então $[|u-v| \leq \overset{V}{\epsilon}] \geq P$ se, e
 só se, $|A-B| \cdot P \leq \epsilon I$, onde $|A-B| = \max(A-B, B-A)$.

DEM: Temos que $|u-v| \leq \epsilon$ se, e só se, $(u \leq v + \epsilon)$ e
 $(v - \epsilon \leq u)$; então $[|u-v| \leq \overset{V}{\epsilon}] \geq P$ se, e só se, $[u \leq v + \epsilon] \geq P$, e
 $[v - \epsilon \leq u] \geq P$, se, e só se, $AP \leq BP + \epsilon P$ (ou $(A-B)P \leq \epsilon P$) e
 $BP - \epsilon P \leq AP$ (ou $(B-A)P \leq \epsilon P$), se, e só se, $|A-B| \cdot P \leq \epsilon P \leq \epsilon I$. QED

Definimos $0 < A$ por $\forall \lambda \leq 0 (E_{\lambda} = 0)$. Se A é limitado, es
 sa definição de positividade equivale à usual.

PROP. 2.2.17: $[0 < u] = I$, se, e só se, $0 < A$.

DEM: $[0 < u] \Leftrightarrow [0 \leq u] = I \wedge [u \leq 0] = 0$

$$\Leftrightarrow 0 \leq A \wedge [\exists r \in Q (r \overset{V}{\leq} 0 \wedge r \not\leq u)] = I$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq A \wedge \bigvee_{0 \leq r \in Q} (I - E_r) = I$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq A \wedge I - \bigwedge_{0 \leq r \in Q} E_r = I$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq A \wedge I - E_0 = I$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq A \wedge E_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < A$$

QED

Temos que os números reais satisfazem
 $x < y \vee x = y \vee y < x$; em $\mathbb{R}^{(B)}$, então, temos
 $[u < v \vee u = v \vee v < u] = I$; se $P_1 = [u < v]$, $P_2 = [u = v]$ e $P_3 = [u > v]$, então $\{P_1, P_2, P_3\}$ é partição da unidade; se A corresponde a u, e B a v, temos que $A = AP_1 + AP_2 + AP_3$, $B = BP_1 + BP_2 + BP_3$, e das prop. 2.2.12, 13 e 17, temos $AP_1 < BP_1$, $AP_2 = BP_2$ e $AP_3 > BP_3$.

PROP. 2.2.18: Sejam $\{P_\alpha\}$ partição da unidade, $\{u_\alpha\} \subseteq \mathbb{R}^{(B)}$ e $u = \sum_\alpha u_\alpha P_\alpha$. Se A_α corresponde a u_α , então $A = \sum_\alpha A_\alpha \cdot P_\alpha$ corresponde a u.

DEM: Se v corresponde a A, como $AP_\alpha = A_\alpha P_\alpha$, então $[v = u_\alpha] \geq P_\alpha$, e portanto

$$[u = v] = \bigvee_\alpha [u_\alpha = v] \wedge [u = u_\alpha] \geq \bigvee_\alpha P_\alpha = I. \quad \text{QED}$$

PROP. 2.2.19: O produto $u \cdot v$ corresponde a AB.

DEM: Se $P_1 = [u < 0]$, $P_2 = [u = 0]$, $P_3 = [u > 0]$, e $P'_1 = [v < 0]$, $P'_2 = [v = 0]$ e $P'_3 = [v > 0]$, então $\{P_i P'_j\}_{i,j}$ é partição da unidade; se u_{ij} corresponde a $AP_i P'_j$, e v_{ij} a $BP_i P'_j$ temos que $A = \sum_{i,j} AP_i P'_j$, $B = \sum_{i,j} BP_i P'_j$, $u = \sum_{i,j} u_{ij} P_i P'_j$ e $v = \sum_{i,j} v_{ij} P_i P'_j$; e $AB = \sum_{i,j} ABP_i P'_j$, $uv = \sum_{i,j} (u_{ij} v_{ij}) P_i P'_j$.

Dada esta decomposição, basta mostrar que $u_{ij} v_{ij}$ corresponde a $(AP_i P'_j)(BP_i P'_j) = ABP_i P'_j$. Podemos assumir que $A > 0$ e $B > 0$ (pois se $A = 0$, o teorema é óbvio, e se $A < 0$, tenho $-A > 0$).

Seja $\int \lambda dE_\lambda''$ correspondente a $u.v$; então, do produto de dois cortes, temos $r \notin ab \leftrightarrow \forall s \in \mathbb{Q} (r < s \rightarrow t_1, t_2 \in \mathbb{Q} (s = t_1 t_2 \wedge t_1 \notin a \wedge t_2 \notin b))$ e, portanto, $E_\lambda'' = 0$ se $\lambda \leq 0$,

$$E_\lambda'' = \bigwedge_{\lambda < \mu} \bigvee_{\nu >} E_\nu \cdot E_{\mu/\nu}'.$$

Daí, segue que $AB = \int \lambda dE_\lambda''$.

QED

Passamos, agora, a estudar convergência de reais de $V^{(B)}$, relacionando com a convergência dos operadores correspondentes.

Observemos que se $\{P_i\}$ e $\{P'_j\}$ são partições da unidade, $\{n_i\}$ e $\{m_j\}$ subconjuntos de ω , então $\sum_i n_i P_i \leq \sum_j m_j P'_j$ se, e só se, $n_i \leq m_j$, para todo i e j tais que $P_i P'_j \neq 0$.

PROP 2.2.20: Seja $[u:\omega \rightarrow R] = I$, (ou seja, u é se quência em $V^{(B)}$), $u(i)$ correspondendo a A_i , $\forall i \in \omega$, e $v \in GR^{(B)}$, correspondendo a A . Então $[\lim_{i \rightarrow \infty} u(i) = v] = I$ se, e só se, dado $\epsilon > 0$, existe um natural em $V^{(B)}$, $\sum_i n_i P_i$, tal que, para todo natural $\sum_j m_j P'_j$ em $V^{(B)}$, se $\sum_i n_i P_i \leq \sum_j m_j P'_j$, então $|A - \sum_j A m_j P'_j| < \epsilon$.

DEM: Temos que: $[\lim_{i \rightarrow \infty} u(i) = v] = I \iff$
 $\iff [\forall \epsilon > 0 \exists n \in \omega \forall m \in \omega (m \geq n \rightarrow |u(m) - v| < \epsilon)] = I$
 $\iff [\forall \epsilon > 0 \exists \sum_i n_i P_i \forall \sum_j m_j P'_j (\sum_i n_i P_i \leq \sum_j m_j P'_j \rightarrow |u(m) - v| < \epsilon)] = I$

Como $[u(\sum_i n_i P_i) = \sum_i u(n_i) P_i] = I$, então
 $[\lim_{i \rightarrow \infty} u(i) = v] = I \iff \forall \epsilon > 0 \exists \sum_i n_i P_i \forall \sum_j m_j P'_j (\sum_i n_i P_i \leq \sum_j m_j P'_j \rightarrow$
 $\rightarrow |A - \sum_j A m_j P'_j| < \epsilon$.

PROP.2.2.21: Sejam $A_1, A_2, \dots, A$ operadores auto-adjuntos limitados, comutáveis dois a dois, com um limitante uniforme M para $\|A_i\|$, $i \in \omega$, e $\|A\|$. Seja $[u:\omega \rightarrow R] = I$, $u(i)$ correspondendo a A_i , e seja $v \in GR^{(B)}$ correspondendo a A . Se $[\lim_{i \rightarrow \infty} u(i) = v] = I$, então $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A$ fortemente.

DEM: Pela prop. anterior, como $[\lim_{i \rightarrow \infty} u(i) = v] = I$, então dado $\epsilon > 0$, existe partição da unidade $\{P_i\}$, e $\{n_i\} \subseteq \omega$ tal que para todo $\{m_i\} \subseteq \omega$, com $\forall i (n_i \leq m_i)$, $\|A - \sum_i A m_i P_i\| < \epsilon/2$.

Seja $x \in H$, $\|x\| = 1$; então, dado $\epsilon_1 > 0$, existe $k \in \omega$ tal que $\|x - \sum_{i=0}^k P_i x\| < \epsilon_1$.

Seja $N = \max\{n_0, n_1, \dots, n_k\}$, e seja $m \geq N$; sejam $y = Ax - \sum_{i=0}^k A_m P_i x - \sum_{k < i} A_{n_i} P_i x$, $u = \sum_{k < i} A_m P_i x$, e $v = \sum_{k < i} A_{n_i} P_i x$.
Então $\|Ax - A_m x\|^2 = \|y - u + v\|^2 \leq \|y\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|y\| \cdot \|u\| + 2\|y\| \cdot \|v\| + 2\|u\| \cdot \|v\|$.

Como $\|y\| < \epsilon/2$, basta mostrar que $\|u\|$ e $\|v\|$ vão para zero, se ϵ_1 vai para zero.

Temos

$$\|u\| = \left\| \sum_{k < i} A_m P_i x \right\| \leq M \left\| \sum_{k < i} P_i x \right\| \leq \epsilon_1 M.$$

Como A_{n_i} e P_i comutam, $A_{n_i} P_i H = P_i A_{n_i} H$, ou seja $A_{n_i} P_i H \subseteq P_i H$, e portanto:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \left\| \sum_{k < i} A_{n_i} P_i x \right\|^2 = \sum_{k < i} \|A_{n_i} P_i x\|^2 \leq \\ &\leq M^2 \sum_{k < i} \|P_i x\|^2 = M^2 \left\| \sum_{k < i} P_i x \right\|^2 \leq \epsilon_1^2 M^2. \end{aligned}$$

QED

A hipótese do limitante M acima é necessária também. Seja $\{P_i\}_{i \in \omega}$, partição da unidade, com $\forall i \in \omega$, $P_i > 0$. Seja $x \in H$ tal que $\forall i \in \omega$, $P_i x \neq 0$; seja $a_i = 1/\|P_i x\|$; sejam $A_i = a_i^2 P_i$; então, para todo $\sum_j m_j P'_j \geq \sum_i (i+1) P_i$, temos $\sum_j A_{m_j} P'_j = 0$, pois se $P_i P_j > 0$, então $m_j \geq i+1$. Logo, se

$[u: \omega \rightarrow \mathbb{R}] = I$, com $u(\overset{V}{n})$ correspondendo a A_n , então

$[\lim_{i \rightarrow \infty} u(i) = 0] = I$. Mas $\langle A_i x, x \rangle = \| \overset{V}{A}_i P_i x \|^2 = 1$, e portanto A_i não converge a zero fortemente.

Também não vale a recíproca da proposição.

Seja $H = L_2([0,1])$, e $P[\alpha, \beta]$ a restrição de x ao intervalo $[\alpha, \beta]$, com $x(t) = 0 \nmid [\alpha, \beta]$. Seja $P_1 = I$, $P_2 = P[0, 1/2]$, $P_3 = P[1/2, 1]$, $P_4 = P[0, 1/4]$, $P_5 = P[1/4, 1/2]$...; então P_n tende a zero fortemente; entretanto, em $V^{(B)}$, P_n tem a subsequência $P_1, P_2+P_3, P_4+P_5+P_6+P_7, \dots$, que converge para I .

PROP. 2.2.22: Sejam $A_0, A_1, \dots, A$ operadores autoadjuntos limitados, comutáveis dois a dois, e $A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$ uniformemente. Se $[u: \omega \rightarrow \mathbb{R}] = I$ e $u(i)$ corresponde a A_i , e $v \in V^{(B)}$ corresponde a A , então $[\lim_{i \rightarrow \infty} u(n) = v] = I$.

DEM: Podemos assumir que $A = 0$; então, dado $\epsilon > 0$, seja k tal que $\forall i \geq k (\|A_i\| \leq \epsilon)$. Então

$$[\forall i \in \omega (i \geq k \rightarrow |u(i)| \leq \epsilon)] = \bigwedge_{i \geq k} [|u(\overset{V}{i})| \leq \epsilon] = I$$

Portanto $[\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0] = I$

QED

A recíproca desta proposição é falsa, pois se $\{P_i\}_{i < \omega}$ é partição da unidade, com $\forall i \in \omega (P_i \neq 0)$, então a sequência $P_0, P_0+P_1, P_0+P_1+P_2, \dots$, converge para I em $V^{(B)}$, mas não uniformemente.

PROP.2.2.23: Seja A operador autoadjunto, e $f_0, f_1, \dots, f$ funções de Borel, com $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ uniformemente sobre todo compacto de $\mathbb{R}$. Seja $[u: \omega \rightarrow \mathbb{R}] = I, v \in \mathcal{GR}^{(B)}$, e $u(0), u(1), \dots, v$ correspondendo a $f_0(A), f_1(A), \dots, f(A)$ respectivamente. Então

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = v] = I$$

DEM: Podemos assumir $f = 0$; seja $A = \int \lambda dE_\lambda$, e $P_n = E_n - E_{-n}$. Dado $\epsilon > 0$, definimos $n_i \in \mathbb{N}$, tais que $\forall n \geq n_i \quad \forall x \in [-i, i] \quad |f_n(x)| \leq \epsilon$. Seja $N = n_1 P_1 + n_2 (P_2 - P_1) + n_3 (P_3 - P_2) + \dots$; então, para todo $\sum_j m_j P_j' \geq N$, temos

$$\sum_i f m_i(A) P_i' = \sum_{i,j} f m_i(A) P_j' (P_j - P_{j-1})$$

Seja $B_{ij} = f m_i(A) (P_j - P_{j-1}) P_i'$; então $\|B_{ij}\| < \epsilon$, ou $0 - \epsilon \leq B_{ij} \leq \epsilon$.

Portanto

$$-\epsilon \leq -\epsilon \sum_{i,j} P_i' (P_j - P_{j-1}) \leq \sum_{i,j} B_{ij} \leq \epsilon \sum_{i,j} P_i' (P_j - P_{j-1}) = \epsilon.$$

QED

Para finalizar esta secção faremos alguns comentários acerca de grupos abelianos localmente compactos e medida de Haar (ver [GT-2]).

Seja G um grupo abeliano localmente compacto, τ sua topologia, e $\nu(e)$ um sistema fundamental de vizinhanças de e em G . Então G é grupo em $V^{(B)}$. Como a definição de topologia não pode ser expressa com fórmulas de uma linguagem de primeira ordem (o que é o caso da linguagem da teoria dos conjuntos), não podemos dizer que τ é topologia de G em $V^{(B)}$. Mas podemos dizer que $\nu(e)^V$ é sistema fundamental de vizinhanças de e em G , o que o torna um grupo topológico. Denotaremos por $G^{(B)}$ o completado de G em $V^{(B)}$. Então $G^{(B)}$ será grupo abeliano localmente compacto em $V^{(B)}$. Para verificar que $G^{(B)}$ é localmente compacto, basta verificar que se $U \subseteq G \cap V(e)$, e $\bar{U}$ é compacto, então U é totalmente limitado, e portanto U é totalmente limitado o que implica que seu completamento em $G^{(B)}$ é relativamente compacto.

PROP. 2.2.24: Seja G grupo abeliano localmente compacto, e μ sua medida de Haar. Então existe uma única medida de Haar $\tilde{\mu}$ de $G^{(B)}$, em $V^{(B)}$, que estende μ , ou seja, $[(\int f d\mu)^V = \int_G \tilde{f} d\tilde{\mu}] = 1$, onde $f \in C_c(G)$ e $\tilde{f}$ é sua única extensão em $V^{(B)}$.

DEM: Seja $f \in C_c(G)$; ou seja, f é contínua e de suporte compacto em G , e portanto f é uniformemente contínua. Então f^V é uniformemente contínua em G^V e portanto admite uma única extensão contínua $\tilde{f}$ em $G^{(B)}$, de suporte compacto.

A demonstração da existência de $\tilde{\mu}$ é análoga ao

caso clássico (ver [L.L]).

Sejam $f, g \in C_c(G)$, $f \neq 0$, $g \neq 0$, e $f \geq 0$ e $g \geq 0$. Definimos a função de cobertura de Haar $(f:g)$ como o ínfimo das somas $\sum_1^n c_i$, com $\forall x \in G (f(x) \leq \sum_1^n c_i g(s_i x))$, $s_1, \dots, s_n \in G$. Se $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são as extensões de f e g em $V^{(B)}$, então teremos $[(f:g)^V = (\tilde{f}:\tilde{g})] = 1$.

Como a integral de Haar $\int f d\mu$ é o limite de $(f:g)/(f_0:g)$ em relação a g , com $f_0 \in C_c(G)$, $f_0 \neq 0$, e $f_0 \geq 0$ fixo, então teremos que o limite será igual para $(\tilde{f}:\tilde{g})/(\tilde{f}_0:\tilde{g})$, o que nos dá a extensão desejada.

QED

Para finalizar, citamos um resultado útil no capítulo 4 (ver [GT.2]).

TEO.2.2.25: Seja G grupo abeliano localmente compacto. Se B é álgebra de Boole completa e γ é carácter de $G^{(B)}$ em $V^{(B)}$, então γ corresponde a uma representação unitária de G . Por outro lado, se U é representação unitária de G , e B é álgebra de Boole completa tal que $\forall t \in G (U(t)$ está em $(B))$, então U corresponde a um carácter de $G^{(B)}$ em $V^{(B)}$.

CAP. 3: INTEGRAÇÃO EM $V^{(B)}$

Neste capítulo desenvolvemos a teoria de integração necessária para o capítulo (4), que trata de análise harmônica.

Usamos aqui o método da integral de Daniell, e seguimos de perto [L.L.], adaptando as demonstrações para o nosso caso, onde temos a m -convergência (decorrente do modelo) e comparamos com a convergência forte (seção 3.2). E finalmente estudamos a integral de Stieltjes e medidas de variação limitada (seção 3.3).

Devemos observar que a demonstração do teorema 3.2.15 é original, e com a proposição 3.2.16 resolvemos um problema deixado em aberto em [GT-3].

(3.1) A INTEGRAL DE DANIELL EM $V^{(B)}$

Neste item estudamos a integral de Daniell em $V^{(B)}$ e relacionamos com o caso das funções de um grupo G a valores operadores autoadjuntos (densamente definidos) em um espaço de Hilbert.

Denotamos $G^{(B)}$ o complemento de $\overset{V}{G}$ em $V^{(B)}$, e μ sua medida de Haar (que estende a medida de G).

DEF. 3.1.1: Definimos $L^{(B)}$ como o conjunto (em $V^{(B)}$) das funções $g: G^{(B)} \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ tais que $[g \text{ é contínua de suporte compacto}] = 1$

O valor da integral $\int_{G^{(B)}} g d\mu$ é elemento de $\mathbb{R}^{(B)}$, e denotaremos $I(g)$.

DEF. 3.1.2: Definimos o conjunto (no sentido usual) $L^{(m)} = \{g|_G : g \in L^{(B)}\}$, onde $g|_G(x) = g(\overset{V}{x})$, $\forall x \in G$.

Se $f \in L^{(m)}$, $f = g|_G$, $g \in L^{(B)}$, definimos $I(f)$ como sendo $I(g)$; como $\overset{V}{G}$ é denso em $G^{(B)}$, então $\overset{V}{f}$ é contínua em $\overset{V}{G}$, e g é contínua em $G^{(B)}$, então não há ambigüidade na definição de $I(f)$.

Temos que $I(f)$ satisfaz (em $L^{(m)}$ e $L^{(B)}$) às seguintes propriedades, chamadas propriedades básicas da integração:

$$(1) \quad I(f + g) = I(f) + I(g)$$

$$(2) \quad I(Af) = AI(f), \quad \forall A \in \mathbb{R}^{(B)}$$

(3) $f \geq 0 \rightarrow I(f) \geq 0$, onde $f \geq 0$ significa $\forall x \in G (f(x) \geq 0)$ em $L^{(m)}$, e $[\forall x \in G^{(B)} (f(x) \geq 0)] = 1$ em $L^{(B)}$.

(4) $f_n \rightarrow 0 \rightarrow I(f_n) \rightarrow 0$, onde o limite dos $I(f_n)$ é tomado no sentido do modelo (isto é, $A_n \rightarrow A$ no modelo se $A_{n+1} \leq A_n$, e $A = \lim A_n$ no modelo), e $f_n \rightarrow 0$ significa $\forall x \in G (f_n(x) \rightarrow 0)$, em $L^{(m)}$, e $[\forall x \in G^{(B)} (f_n(x) \rightarrow 0)] = 1$ em $L^{(B)}$.

Observemos que a propriedade (3) pode ser substituída pela equivalente:

(3.a) $f \geq g \rightarrow I(f) \geq I(g)$, onde $f \geq g$ é equivalente a $f - g \geq 0$.

DEF. 3.1.3: Se $f, g \in L^{(m)}$ (ou $L^{(B)}$) defino $f \vee g = \sup(f, g)$, $f \wedge g = \inf(f, g)$ e $|f| = f \vee 0 - f \wedge 0$. Então temos que $L^{(m)}$ e $L^{(B)}$ são fechados por $f \wedge g$, $f \vee g$ e $|f|$.

Mostraremos, a seguir, que a definição de $I(f)$ (para $f \in L^{(m)}$) não depende do modelo $v^{(B)}$ (pois se existir $g_1 \in L^{(B_1)}$, tal que $g_1|_G = f$, deveremos ter $I(g_1) = I(g) = I(f)$, onde $g \in L^{(B)}$).

TEO. 3.1.4: A definição de $I(f)$ é absoluta.

DEM.

Seja $g \in L^{(B)}$ tal que $g|_G = f$; seja B_0 a menor álgebra booleana completa (de projeções) tal que para todo $x \in G$, $f(x)$ está em (B_0) (ou $R^{(B_0)}$). Observemos que B_0 é subálgebra completa de B .

Mostraremos que $g_0 = g|_{G(B_0)}$ está em $V^{(B_0)}$ (ou seja, g_0 só assume valores em $R^{(B_0)}$). Seja $x \in G^{(B_0)}$ e $x_n \in G^{(B_0)}$, seqüência convergindo para x (no sentido de $V^{(B_0)}$); então, como g_0 é contínua (pois g é contínua) $\{g_0(x_n)\}$ é seqüência de Cauchy em $R^{(B_0)}$, e portanto vale em $V^{(B_0)}$ $[\exists y \in R^{(B_0)} (y = \lim g_0(x_n))] = I$.

Como a fórmula acima é restrita, então também é válida em $V^{(B)}$, e portanto $g_0(x) = \lim g_0(x_n) \in R^{(B_0)}$. Isto prova que $[\forall x \in G^{(B_0)} (g_0(x) \in R^{(B_0)})] = 1$ em $V^{(B_0)}$ e $V^{(B)}$, logo g_0 está em $V^{(B_0)}$.

Sabemos que g_0 é contínua; mostraremos que tem suporte compacto (em $V^{(B_0)}$). Seja K o conjunto de todos os compactos de G . Como g tem suporte compacto em $V^{(B)}$, temos

$$\bigvee_{K \in K} [\forall x \in G^{(B_0)} (g(x) = 0 \vee x \in K)] = I$$

Como $g|_G = g_0|_G = f$, então vale

$$\bigvee_{K \in K} [\forall x \in G^{(B_0)} (g_0(x) = 0 \vee x \in K)] = I$$

Como K^V é relativamente compacto em $G^{(B)}$, e $G^{(B_0)}$, então vale $[g_0 \text{ é contínua de suporte compacto}] = I$ em $V^{(B_0)}$.

Mostraremos, agora, que $I(g_0) = I(g)$. Para isso, considerando $V^{(B_0)}$ como universo de base, temos que existe uma álgebra booleana completa D em $V^{(B_0)}$ tal que $(V^{(B_0)})^{(D)} = V^{(B)}$. Se indicarmos por $\bar{u}$ a inclusão de $u \in V^{(B_0)}$ em $V^{(B)}$, temos

$$[(\int_{G^{(B_0)}} g_0 d\mu)^V = \int_{G^{(B)}} g d\mu] = I$$

ou seja, $I(g_0) = I(g)$.

Com isto, provamos que se $h \in L^{(B_1)}$ (num modelo $V^{(B_1)}$) tal que $h|_G = f$, então $I(h) = I(g_0) = I(f)$.

QED

Devemos observar que se $g \in L^{(B)}$, então o conjunto $\{x \in G: [g(x) \neq 0] > 0\}$ pode não ser (relativamente) compacto pois se $\{P_\alpha\}$ é partição da unidade, e $g_\alpha \in L^{(B)}$, então $\sum_\alpha g_\alpha P_\alpha \in L^{(B)}$. Logo, o conjunto $\{x \in G: f(x) \neq 0\}$, $f \in L^{(m)}$, pode não ser relativamente compacto. No entanto podemos escrever $f = \sum_\alpha f_\alpha P_\alpha$, com $\{P_\alpha\}$ partição da unidade, e f_α de suporte compacto. De fato, se K é o conjunto de todos os compactos de G ; seja $g \in L^{(B)}$ tal que $g|_G = f$; seja

$P_K = [\forall x \in G^V (g(x) = 0 \vee x \in K^V)]$, para $K \in \mathcal{K}$. Como g tem suporte compacto em $V^{(B)}$, então $\bigvee_{K \in \mathcal{K}} P_K = I$. Seja $\{P'_K : K \in \mathcal{K}\}$ partição da unidade tal que $\forall K \in \mathcal{K}, P'_K \leq P_K$. Sejam $g_K = g P'_K$ e $f_K = g_K|_G$, $\forall K \in \mathcal{K}$. Então $f = \sum_{K \in \mathcal{K}} f_K P_K$, e f_K tem suporte compacto K , pois se $x \in G$, $x \notin K$, então $[g(x) = 0] \geq P'_K$ e, portanto, $g(x) P'_K = 0$, ou seja $f_K(x) = 0$. Observe-se que as funções f_K são uniformemente m -contínuas. Se G for separável, podemos escolher uma seqüência de compactos $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$, tal que $\bigcup_{n \geq 0} K_n = G$, e usando a família $\{K_n : n \geq 0\}$ podemos escrever $f = \sum_{n \geq 0} f_{K_n} P_{K_n}$, com f_{K_n} contínua de suporte compacto.

OBS 3.1.5: Introduziremos o símbolo $+\infty$ de modo que que toda seqüência crescente em $\mathbb{R}^{(B)}$ tenha limite no modelo.

DEF. 3.1.6: Definimos $U^{(B)}$ como o conjunto (em $V^{(B)}$) das funções $f: G^{(B)} \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ tais que existe uma seqüência f_n em $L^{(B)}$ tal que $f_n \uparrow f$. Definimos $U^{(m)} = \{f: G \rightarrow \mathbb{R}^{(B)} : \text{existe seqüência } f_n \text{ em } L^{(m)}, f_n \uparrow f\}$.

Temos que $U^{(B)}$ e $U^{(m)}$ são fechados por soma, produto por operador positivo de $\mathbb{R}^{(B)}$, e operações de reticulado $(\wedge, \vee)$.

Observemos que se $f \in U^{(B)}$, então $f|_G \in U^{(m)}$. Mas podemos ter $f, g \in U^{(B)}$, $f \neq g$, e $f|_G = g|_G$. Por exemplo, seja $A \in \mathbb{R}^{(B)}$, tal que $[A \in \mathbb{R}] = 0$ (ver cap. 2, 2.2); seja $f \in U^{(B)}$, tal

que $f(A) = 1$, e $f|_R^V = 0$.

DEF. 3.1.7: Se $f \in U^{(B)}$, e $f_n \in L^{(B)}$ tais que $f_n \uparrow f$, então definimos $I(f)$ como $m\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$. Em $V^{(B)}$, esta é a definição usual da integral de Daniell, e sabemos que a definição de $I(f)$ independe da escolha da seqüência f_n .

Queremos definir $I(f)$ como $m\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$ para $f \in U^{(m)}$ e $f_n \in L^{(m)}$, $f_n \uparrow f$. Da proposição seguinte decorrerá que esta definição independe da escolha da seqüência f_n .

PROP. 3.1.8: Se $f_n, g_n \in L^{(m)}$, $f_n \uparrow f$ e $g_n \uparrow g$, com $g \leq f$, então $m\text{-}\lim I(g_n) \leq m\text{-}\lim I(f_n)$.

DEM: Se $h \in L^{(m)}$, e $h \leq f$, então $f_n \wedge h \in L^{(m)}$, e $f_n \wedge h \uparrow h$. Como $L^{(m)}$ e I satisfazem as propriedades básicas da integral, então temos que $I(f_n \wedge h) \uparrow I(h)$, e $\forall n \in \omega$ $I(f_n) \geq I(f_n \wedge h)$, donde segue que $m\text{-}\lim I(f_n) \geq m\text{-}\lim I(f_n \wedge h) = I(h)$.

Portanto, temos que $I(g_j) \leq m\text{-}\lim I(f_n)$, $\forall j \in \omega$, donde segue a tese.

QED

COROL. 3.1.8.1: Se $f \in U^{(m)}$, e $f_n, g_n \in L^{(m)}$, com

$f_n \uparrow f$ e $g_n \uparrow f$, então $m\text{-}\lim I(f_n) = m\text{-}\lim I(g_n)$, (e, portanto, a definição de $I(f)$ independe da seqüência escolhida).

TEO. 3.1.9: Se $f \in U^{(B)}$, e $g \in U^{(m)}$ tal que $f|_G = g$, então $I(f) = I(g)$.

DEM: Sejam $f_n \in L^{(B)}$ tais que $f_n \uparrow f$, e $g_n = f_n|_G$; então $g_n \uparrow g$, e como $I(f_n) = I(g_n) \forall n \in \omega$, então $I(f) = m\text{-}\lim I(f_n) = m\text{-}\lim I(g_n) = I(g)$.

QED

PROP. 3.1.10: Se $f_n \in U^{(m)}$ com $f_n \uparrow f$, então $f \in U^{(m)}$ e $I(f_n) \uparrow I(f)$.

DEM: Sejam $g_n \in U^{(B)}$ tais que $g_n|_G = f_n$; definimos $g'_n = g_1 \vee g_2 \vee \dots \vee g_n$; então $g'_n \uparrow g \in U^{(B)}$ pela teoria da integral da Daniell em $V^{(B)}$. Como a seqüência $\{f_n\}$ é crescente, e $g_n|_G = f_n$, então $g'_n|_G = f_n$, e $g|_G = f$. Portanto $f \in U^{(m)}$, e temos $I(f_n) = I(g'_n) \uparrow I(g) = I(f)$, pelo teorema 9, acima.

QED

Passaremos agora a definir o conjunto $L_1^{(m)}$ das funções integráveis (ou somáveis), e mostraremos que $L_1^{(m)}$ e I satisfazem as propriedades básicas da integração.

DEF. 3.1.11: Definimos $-U^{(B)}$ como o conjunto (em $V^{(B)}$) das funções f tais que $-f \in U^{(B)}$, e $-U^{(m)} = \{f: -f \in U^{(m)}\}$ conjunto no sentido usual.

Se $f \in -U^{(m)}$, definimos $I(f)$ por $-I(-f)$, e obser
vamos que se $f \in U^{(m)} \cap -U^{(m)}$, então $I(f) = -I(-f)$, pois
 $f+(-f) = 0$.

DEF. 3.1.12: Definimos $L_1^{(B)}$ da maneira usual
em $V^{(B)}$. Definimos $L_1^{(m)}$ como o conjunto das funções
 $f: G \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ tais que para todo $\epsilon > 0$, existem funções
 $g \in -U^{(m)}$ e $h \in U^{(m)}$ tais que $I(g)$ e $I(h)$ são finitas, $g \leq$
 $f \leq h$, e $I(h) - I(g) < \epsilon$; definimos $I(f) = \inf_h I(h) =$
 $\sup_g I(g)$.

OBS 3.1.13: Como no caso usual da integral de
Daniell, se $f \in U^{(m)}$ com $I(f) < \infty$, então $f \in L_1^{(m)}$, pois temos
imediatamente que $L^{(m)} \subseteq L_1^{(m)}$, e se $f_n \in L^{(m)}$, $f_n \uparrow f$, então
 $I(f_n) \uparrow I(f)$, portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \omega$ tal que
 $I(f) - I(f_n) < \epsilon$. Observemos que $L^{(m)} \subseteq U^{(m)} \cap -U^{(m)}$.

É claro que se $f \in L_1^{(B)}$, então $f|_G \in L_1^{(m)}$. A se
guir, provaremos que toda $f \in L_1^{(m)}$ é restrição de uma função
 $g \in L_1^{(B)}$ a G .

PROP. 3.1.14: $f \in L_1^{(m)}$ se, e só se, existem fun

ções $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ em $L_1^{(B)}$, $\tilde{g} \leq \tilde{h}$, $g \leq f \leq h$, e $I(\tilde{g}) = I(\tilde{h})$, onde $g = \tilde{g}|_G$ e $h = \tilde{h}|_G$.

DEM: Sejam $g_n \in U^{(m)}$ e $h_n \in U^{(m)}$, com $I(g_n)$ e $I(h_n)$ finitas, $g_n \leq f \leq h_n$, e $I(h_n) - I(g_n) \leq 1/n$. Podemos assumir que $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq h_2 \leq h_1$ (pois podemos tomar seqüências $g'_n = g_1 \vee \dots \vee g_n$ e $h'_n = h_1 \wedge \dots \wedge h_n$). Então, existem funções $\tilde{g}_n \in U^{(B)}$ e $\tilde{h}_n \in U^{(B)}$, $\{\tilde{g}_n\}$ crescente e $\{\tilde{h}_n\}$ decrescente, $\tilde{g}_1 \leq \tilde{g}_2 \leq \dots \leq \tilde{h}_2 \leq \tilde{h}_1$, e $\tilde{g}_n|_G = g_n$ e $\tilde{h}_n|_G = h_n$. Defino $\tilde{g}$ por $\tilde{g}_n \uparrow \tilde{g}$, e $\tilde{h}$ por $\tilde{h}_n \downarrow \tilde{h}$. É claro que $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ estão em $L_1^{(B)}$, e se $g = \tilde{g}|_G$ e $h = \tilde{h}|_G$, então temos que $g \leq f \leq h$, e $I(\tilde{g}) = I(\tilde{h})$ (pois $I(\tilde{g}_n) = I(g_n)$ e $I(\tilde{h}_n) = I(h_n)$ e portanto $I(\tilde{h}_n) - I(\tilde{g}_n) < \epsilon$).

Para a recíproca basta observar que $I(g) \leq I(f) \leq I(h)$.

QED

TEO. 3.1.15: Para toda $f \in L_1^{(m)}$ existe $\tilde{f} \in L_1^{(B)}$ tal que $\tilde{f}|_G = f$.

DEM: Basta tomar na proposição 3.1.14, acima, $\tilde{f} \in L_1^{(B)}$, $\tilde{g} \leq \tilde{f} \leq \tilde{h}$ e com $\tilde{f}|_G = f$.

QED

Do teorema 3.1.15 obtemos as propriedades de $L_1^{(m)}$ a partir das de $L_1^{(B)}$, como, por exemplo o teorema

seguinte.

TEO. 3.1.16: $L_1^{(m)}$ e I satisfazem as propriedades básicas da integração.

(3.2) A INTEGRAL DE DANIELL COM A CONVERGÊNCIA FORTE

Neste item desenvolveremos a teoria da integral de Daniell com a convergência forte de operadores, e comparamos com o caso da m -convergência.

Como as funções estudadas podem assumir valores operadores não limitados, não podemos usar as definições usuais de integral de funções vetoriais (como, por exemplo, a integral de Bochner). Se $f: G \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ assume só valores limitados (operadores contínuos de H), então a definição de $\int_G f d\mu$ na topologia da convergência forte é $(\int_G f d\mu) \cdot y = \int_G f(x) \cdot y d\mu(x)$, $\forall y \in H$, onde $\int_G f(x) \cdot y d\mu(x)$ é a integral de Bochner para funções $g: G \rightarrow H$.

Nesta secção assumiremos que G e H são ambos separáveis.

DEF. 3.2.1: Dizemos que uma sequência $\{A_k\}$ de operadores autoadjuntos de H , não necessariamente limitados converge fortemente para o operador A , se, e só se, para

todo $x \in \cap_{i \geq n} \text{dom}(A_i) \cap \text{dom}(A)$ (para algum $n \in \omega$), temos
 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k x = Ax$, com $k \geq n$.

DEF. 3.2.2: Definimos o conjunto $L_0^{(s)}$ das funções $f: G \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$, tais que só assumem valores operadores limitados, f tem suporte compacto e é contínua na topologia forte.

Se $f \in L_0^{(s)}$, então, para cada $y \in H$, $f.y$ é função contínua de suporte compacto de G em H , logo podemos definir $\int_G f d\mu$ da forma usual na convergência forte. Denotaremos esta integral por $I(f)$, ou por $I^{(s)}(f)$ quando quisermos ressaltar que foi calculada com a convergência forte.

O resultado seguinte mostra uma equivalência entre a m -convergência e a convergência forte para seqüências monótonas em $\mathbb{R}^{(B)}$.

TEO. 3.2.3: $A_n \rightarrow 0$ no modelo se, e só se, $A_n \rightarrow 0$ fortemente.

DEM: Suponhamos que $A_n \rightarrow 0$ no modelo. Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$; então $A_n = A_n \wedge M + (A_n \vee M - M)$. Como $0 \leq A_n \wedge M \leq M$, então, como a seqüência $A_n \wedge M$ é uniformemente limitada (por M), $A_n \wedge M \rightarrow 0$ no modelo é equivalente a $A_n \wedge M \rightarrow 0$ fortemente. Se $B_n = A_n \vee M - M$, basta provar que $B_n \rightarrow 0$ fortemente.

Seja $x \in \text{dom}(A_1)$. Pelo teorema espectral podemos assumir que $H = L_2(X, \nu)$, e que x é função mensurável tal que $\int_X |x(s)|^2 d\nu(s) < \infty$, e que B_1 é multiplicação por uma função mensurável real $B_1(s)$.

Então, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher M tal que $\|B_1 x\| = (\int_X |B_1(s) \cdot x(s)|^2 d\nu(s))^{1/2} < \epsilon$ (pois $B_1(s) = A_1(s) \vee M - M$). Como $0 \leq A_n \leq A_1$, então $M \leq A_n \vee M \leq A_1 \vee M$ e $0 \leq B_n \leq B_1$; portanto $\|B_n x\| < \epsilon$, $\forall n \in \omega$. Como $A_n \wedge M \rightarrow 0$ fortemente então existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$, $\|(A_n \wedge M)x\| < \epsilon$ e portanto $\|A_n x\| \leq \|B_n x\| + \|(A_n \wedge M)x\| < 2\epsilon$, provando que $A_n \rightarrow 0$ fortemente.

Suponhamos, agora, que $A_n \rightarrow 0$ fortemente. Como a seqüência $\{A_n\}$ é decrescente, limitada inferiormente por 0, então existe $A \in \mathbb{R}^{(B)}$, $A = \inf_n A_n$, no modelo. Então $A \geq 0$; basta provar que $A = 0$. Suponhamos que $A \neq 0$; então, da convergência no modelo, decorre que existem $\epsilon > 0$ e $P \in B$ tal que $P \neq 0$ e $A_n \geq \epsilon P \forall n$; seja $y \in H$ tal que $y = Py$, e $\|y\| = 1$; então $\|A_n y\| \geq \|\epsilon Py\| = \epsilon$, $\forall n$, absurdo, pois $A_n y \rightarrow 0$.

QED

COROL. 3.2.3.1: a) $A_n \rightarrow A$ no modelo se, e só se, $A_n \rightarrow A$ fortemente.

b) $A_n \rightarrow A$ no modelo se, e só se, $A_n \rightarrow A$ fortemente.
te.

Pelo corolário acima, não é necessário explicitar o tipo de convergência para seqüências monótonas.

PROP. 3.2.4: $L_0^{(s)}$ e I satisfazem as propriedades básicas da integração, a menos da propriedade (2), que pode ser substituída pela seguinte: (2-a) $I(Af) = AI(f)$, $\forall A \in R^{(B)}$, tal que A é operador limitado de H .

DEM: As propriedades (1) e (2-a) são propriedades da integral de Bochner.

A propriedade (3): " $f \geq 0 \rightarrow I(f) \geq 0$ " decorre do fato $\langle f(t) \cdot x, x \rangle \geq 0$, $\forall t \in G$, e, usando o teorema espectral, temos $f(t) = A(t, s)$ mensurável $\forall t \in G$, e $\langle f(t) x, x \rangle = \int_X A(t, s) |x(s)|^2 dv(s)$. Usando o teorema de Fubini para integral de Bochner, temos que $\int_G f d\mu \geq 0$ pois, como $A(t, s) \geq 0 \quad \forall t \in G, \quad \forall s \in X$, então $\int_X A(t, s) |x(s)|^2 dv(s) \geq 0$

Para provar a propriedade (4), suponhamos que $f_n \in L_0^{(s)}$, tais que $f_n \rightarrow 0$; mostraremos que $I(f_n) \rightarrow 0$, ou seja, $I(f_n) \geq I(f_{n+1})$, e $I(f_n)x \rightarrow 0$, $\forall x \in H$. Para cada $x \in H$, $\|f_n(t) \cdot x\|$ é função real contínua de suporte compacto em G , para cada $n \in \omega$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) x = 0$. Pelo teorema espec

tral temos que $H = L_2(X, \nu)$, e $f_n(t) = A_n(t, s) \geq 0$ função mensurável, e $x = x(s) \in L_2(X, \nu)$; como $f_n \downarrow 0$, então $0 \leq A_{n+1}(t, s) \leq A_n(t, s) \forall t \in G$ e $\forall s$ ν -q.s. em X ; então $\|f_n(t)x\|^2 \geq \|f_{n+1}(t)x\|^2$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t)x\|^2 = 0 \forall t \in G$, logo $\int_G \|f_n(t)x\| d\mu(t) \rightarrow 0$, donde segue que $\int_G f_n(t)x d\mu(t) \rightarrow 0$ (pelo teorema da convergência dominada para a integral de Bochner).

QED

Como H é separável, então B satisfaz a condição da cadeia enumerável, e, portanto, toda partição da unidade $\{P_i\} \subseteq B$ é no máximo enumerável. Então, se $A \in R^{(B)}$, a igualdade $A = \sum_{i \in \omega} A P_i$ vale tanto na m -convergência quanto na convergência forte, pois $A = A \vee 0 + A \wedge 0$, e $\sum_{i=1}^n (A \vee 0) P_i \uparrow A \vee 0$, e $\sum_{i=1}^n (A \wedge 0) P_i \uparrow A \wedge 0$.

DEF. 3.2.5: Definimos o conjunto $L^{(s)}$ das funções $f: G \rightarrow R^{(B)}$ tais que existem funções $f_i \in L_0^{(s)}$ e partição da unidade $\{P_i\}$ tais que $f = \sum_{i \in \omega} f_i P_i$. Se $f = \sum_{i \in \omega} f_i P_i \in L^{(s)}$ definimos $I^{(s)}(f)$ por $\sum_{i \in \omega} I^{(s)}(f_i) P_i$. Essa definição independe da decomposição de f , pois se $f = \sum_{i \in \omega} f_i P_i = \sum_{j \in \omega} g_j P'_j$ então $f_i P_i P'_j = g_j P_i P'_j \forall i, j \in \omega$, e

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \omega} I^{(s)}(f_i) P_i &= \sum_{i \in \omega} I^{(s)}(f_i P_i) = \sum_{i, j \in \omega} I^{(s)}(f_i P_i) P'_j = \\
&= \sum_{i, j} I^{(s)}(f_i P_i P'_j) = \sum_{i, j} I^{(s)}(g_j P_i P'_j) = \sum_{i, j} I^{(s)}(g_j P'_j) P_i = \\
&= \sum_{j \in \omega} I^{(s)}(g_j) P'_j, \text{ onde usamos a proposição 4 em cada} \\
&\text{ termo das somatórias acima.}
\end{aligned}$$

PROP. 3.2.6: $L^{(s)}$ e $I^{(s)}$ satisfazem as propriedades básicas da integral.

DEM: As propriedades (1) : " $I^{(s)}(f+g) = I^{(s)}(f) + I^{(s)}(g)$ ", e (3) : " $f \geq 0 \rightarrow I^{(s)}(f) \geq 0$ " são imediatas.

Seja $A \in \mathcal{R}^{(B)}$, não necessariamente limitado, e $f \in L^{(s)}$. Então existem partições da unidade $\{P_i\}$ e $\{P'_j\}$ tais que $\forall i \in \omega$ $f P_i \in L_o^{(s)}$ e $A P'_j$ é limitado; como $f P_i P'_j \in L_o^{(s)}$, podemos supor que a partição $\{P_i\}$ é tal que $f P_i \in L_o^{(s)}$ e $A P_i$ é limitado. Então, temos:

$$I^{(s)}(Af) = I^{(s)}\left(\sum_{i \in \omega} A P_i f\right) = \sum_{i \in \omega} P_i I^{(s)}(A P_i f) =$$

$$= \sum_{i \in \omega} A P_i I^{(s)}(f) = A I^{(s)}(f), \text{ o que prova a propriedade}$$

(3).

sejam, agora, $f_n \in L^{(s)}$, $f_n \rightarrow 0$, e $f_0 = \sum_{i \in \omega} P_i f_0$, onde $P_i f_0 \in L_0^{(s)}$, $\forall i \in \omega$. Então, como $f_n \rightarrow 0$, segue que $P_i f_n \in L_0^{(s)}$ $\forall n \in \omega$, $\forall i \in \omega$, e $P_i f_n \rightarrow 0$ $\forall i \in \omega$. Então, como $L_0^{(s)}$ e $I^{(s)}$ satisfazem as propriedades básicas da integração, segue que $I^{(s)}(P_i f_n) \rightarrow 0$, e portanto $I^{(s)}(f_n) \rightarrow 0$ (na m-convergência, que, aqui, é equivalente à convergência forte).

QED

DEF. 3.2.7: Definimos o conjunto $U^{(s)}$ das funções $f: G \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ tais que existem $f_n \in L^{(s)}$ tais que $f_n \rightarrow f$, e definimos $I^{(s)}(f)$ por $I^{(s)}(f_n) \rightarrow I^{(s)}(f)$; da proposição a seguir segue que a definição de $I^{(s)}(f)$ independe da sequência $\{f_n\}$.

PROP. 3.2.8: Se $f, g \in U^{(s)}$ e $f_n, g_n \in L^{(s)}$, com $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$, com $g \leq f$, então $\lim I^{(s)}(g_n) \leq \lim I^{(s)}(f_n)$.

A demonstração é análoga ao caso clássico (que foi parafraseada no caso da m-convergência).

DEF. 3.2.9: Definimos $-U^{(s)} = \{f: -f \in U^{(s)}\}$, e $I^{(s)}(f) = -I^{(s)}(-f)$, para $f \in -U^{(s)}$.

DEF. 3.2.10: Dizemos que $f: G \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ é fortemente integrável (ou somável) se, e só se, dado $\epsilon > 0$, existem $g \in -U^{(s)}$ e $h \in U^{(s)}$, com $I^{(s)}(g)$ e $I^{(s)}(h)$ finitas, tais que

$g \leq f \leq h$ e $I^{(s)}(h) - I^{(s)}(g) < \epsilon$. Neste caso, definimos $I^{(s)}(f) = \sup I^{(s)}(g) = \inf I^{(s)}(h)$ onde g e h variam nas condições acima. Definimos o conjunto $L_1^{(s)}$ das funções fortemente somáveis.

Durante o que segue, provaremos que $L_1^{(s)}$ e $I^{(s)}$ satisfazem as propriedades básicas da integração e que $L_1^{(m)} = L_1^{(s)}$, e $I^{(m)}(f) = I^{(s)}(f)$, se H é separável.

PROP. 3.2.11: Se $f_n \in U^{(s)}$ e $f_n \uparrow f$, então $f \in U^{(s)}$ e $I^{(s)}(f_n) \uparrow I^{(s)}(f)$.

DEM: Como $f_n \in U^{(s)}$, existe seqüência $\{g_{n,k}\} \subseteq L^{(s)}$, tal que $g_{n,k} \uparrow f_n$. Sejam $h_n = g_{n,1} \vee \dots \vee g_{n,n} \in L^{(s)}$; então $\forall i \leq n$, $g_{n,i} \leq h_n \leq f_n$, então $h_{n+1} \geq h_n$, e $h_n \uparrow f$; logo $f \in U^{(s)}$, e como $I^{(s)}(h_n) \leq I^{(s)}(f_n)$ e $I^{(s)}(h_n) \uparrow I^{(s)}(f)$ então $I^{(s)}(f_n) \uparrow I^{(s)}(f)$.

QED

TEO. 3.2.12: Se $f \in L^{(m)}$ e existe $M \in R$ tal que $\forall t \in G$ ($M \leq f(t)$), então $f \in U^{(s)}$ e $I^{(m)}(f) = I^{(s)}(f)$.

DEM: Como $f \wedge n \uparrow f$, basta mostrar o teorema para $f \wedge n$, ou seja, podemos supor que $\forall t \in G$ ($\|f(t)\| \leq M$). Como G é separável, podemos expressar f como $f = \sum_{i \in \omega} fP_i$, com fP_i m -contínua de suporte compacto. Então, como as funções fP_i são uniformemente limitadas por M e são m -contínuas,

então são fortemente contínuas, isto é, $fP_i \in L_0^{(s)}$. Então
 $f = \sum_{i \in \omega} fP_i \in L^{(s)} \subseteq U^{(s)}$, e $I^{(s)}(fP_i) = I^{(m)}(fP_i)$, pois,
 no caso de funções uniformemente limitadas, m-limite coincide com limite forte. Logo $I^{(m)}(f) = I^{(s)}(f)$.

QED

TEO. 3.2.12: $L_1^{(s)}$ e $I^{(s)}$ satisfazem as propriedades básicas da integração.

DEM: Como $f_n \uparrow f$ e $g_n \uparrow g$ implicam $f_n + g_n \uparrow f + g$, a propriedade (1) é imediata.

Para a propriedade (2), provemos primeiro que se $f \in L_1^{(s)}$, então $-f \in L_1^{(s)}$ e $I^{(s)}(-f) = -I^{(s)}(f)$; mas isso é imediato, pois se $g \in U^{(s)}$ e $h \in U^{(s)}$, $g \leq f \leq h$, então $-h \leq -f \leq -g$, $-h \in U^{(s)}$ e $-g \in U^{(s)}$, e $I^{(s)}(g) = -I^{(s)}(-g)$ e $I^{(s)}(h) = -I^{(s)}(-h)$. Se $A \in \mathbb{R}^{(B)}$ e $A \geq 0$, a propriedade (2) segue imediata, e como $A = A \vee 0 + A \wedge 0$, e $-(A \wedge 0) \geq 0$, fica provada.

Se $f \geq 0$, e $h \in U^{(s)}$, $0 \leq f \leq h$, então $I^{(s)}(h) \geq 0$, e se $h_n \in U^{(s)}$, decrescente, com $0 \leq f \leq h_n$, então $\inf I^{(s)}(h_n) \geq 0$, donde segue que $I^{(s)}(f) \geq 0$, provando a propriedade (3).

A propriedade (4) decorre do próximo teorema.

QED

TEO. 3.2.14: Se $f_n \in L_1^{(s)}$, $f_n \uparrow f$ e $\lim I^{(s)}(f_n) < \infty$, então $f \in L_1^{(s)}$ e $I^{(s)}(f_n) \uparrow I^{(s)}(f)$.

DEM: Este é um teorema do tipo da convergência dominada, e sua demonstração é uma adaptação da do caso clássico.

Subtraindo-se f_0 , podemos assumir que $f_0 = 0$.

Queremos achar funções $h \in U^{(s)}$ e $g \in -U^{(s)}$ com $I^{(s)}(h)$ e $I^{(s)}(g)$ finitas, com $g \leq f \leq h$, e $I^{(s)}(h) - I^{(s)}(g) < \varepsilon$, para um $\varepsilon > 0$ dado.

Podemos escolher funções $h_n \in U^{(s)}$ tais que $f_n - f_{n-1} \leq h_n$ e $I^{(s)}(h_n) \leq I^{(s)}(f_n - f_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}$ (pois $f_n - f_{n-1} \in L_1^{(s)}$). Seja $h = \sum_{i \in \omega} h_i$; como $f_n \leq \sum_{i=1}^n h_i$ e $\sum_{i=1}^n I^{(s)}(h_i) \leq I^{(s)}(f_n) + \frac{\varepsilon}{3}$, segue que $I^{(s)}(h) = \sum_{i=1}^{\infty} I^{(s)}(h_i) \leq \lim I^{(s)}(f_n) + \frac{\varepsilon}{3}$ e é finita.

Como tenho seqüências monótonas, então o $m\text{-}\lim_i$ coincide com o limite forte. Então existem $\{P_i\}_{i \in \omega} \subseteq B$ partição da unidade, e seqüência $\{n_i\}_{i \in \omega}$ (que posso tomar crescente para evitar repetições de índices) tais que

$$|\lim I^{(s)}(f_n) - \sum_{i \in \omega} P_i I^{(s)}(f_{n_i})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Podemos achar funções $g_i \in U^{(s)}$ tais que $g_i \leq f_{n_i}$, e $I^{(s)}(f_{n_i}) - I^{(s)}(g_i) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Seja $g = \sum_{i \in \omega} g_i P_i$; então $g \in U^{(s)}$, pois se $q_i \in U^{(s)}$ e $q_{i,k} \in L^{(s)}$ tais que $q_{i,k} \uparrow q_i$, então $\sum_{i \in \omega} q_{i,k} P_i \in L^{(s)}$, e

$$\sum_{i \in \omega} q_{i,k} P_i \uparrow \sum_{i \in \omega} q_i P_i = q \in U^{(s)}.$$

Então $g \leq f \leq h$, e como $I^{(s)}(g) = \sum_{i \in \omega} I^{(s)}(g_i) P_i$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq I^{(s)}(h) - I^{(s)}(g) &\leq |I^{(s)}(h) - \lim I^{(s)}(f_n)| + \\ &+ |\lim I^{(s)}(f_n) - \sum_{i \in \omega} P_i I^{(s)}(f_{n_i})| + \\ &+ |\sum_{i \in \omega} P_i I^{(s)}(f_{n_i}) - \sum_{i \in \omega} P_i I^{(s)}(g_i)| \leq \epsilon \end{aligned}$$

QED

TEO. 3.2.15: Se $f \in L_1^{(m)}$ então $f \in L_1^{(s)}$ e $I^{(s)}(f) = I^{(m)}(f)$.

DEM: Já mostramos que se $f \in L^{(m)}$ então $f \in U^{(s)}$ daí segue que se $f \in U^{(m)}$, então $f \in U^{(s)}$. Pelo teorema (3.2.14), basta mostrar o resultado para $f \in L_1^{(m)}$ e $\|f(t)\| \leq M$, $\forall t \in G$. Neste caso, toda $g \in U^{(m)}$, $g \leq M$, então $-g \geq -M$, logo $g \in U^{(s)}$; e toda $h \in U^{(m)}$, $h \geq -M$, $h \in U^{(s)}$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $g \in U^{(m)}$ e $h \in U^{(m)}$, com $g \leq f \leq h$, e $I^{(m)}(h) - I^{(m)}(g) < \varepsilon$. Como $\|f\| \leq M$, devemos ter $g \leq M$ e $h \geq -M$, logo $g \in U^{(s)}$, $h \in U^{(s)}$, $I^{(m)}(g) = I^{(s)}(g)$, $I^{(m)}(h) = I^{(s)}(h)$, o que prova que $f \in L_1^{(s)}$.

QED

Com isto já temos $L_1^{(m)} \subseteq L_1^{(s)}$. Provemos a recíproca, agora.

PROP. 3.2.16: Se $f \in U^{(s)}$ então $f \in U^{(m)}$ e $I^{(s)}(f) = I^{(m)}(f)$.

DEM: Provaremos que, se $f \in L_0^{(s)}$ então $f \in L^{(m)}$, donde decorrerá a proposição.

Se $f \in L_0^{(s)}$, então f é fortemente contínua e de suporte compacto, e $f(G) \subseteq \mathcal{L}(H)$. Para provar que $f \in L^{(m)}$, precisamos mostrar que f é m -contínua. Para isto, basta provar que $\|f(t)\|$ é uniformemente limitada em G .

Temos que, para cada $x \in H$, $f(t)x$ é função contínua de suporte compacto de G em H , logo é limitada. Portanto a família $\{f(t): t \in G\} \subseteq \mathcal{L}(H)$ é pontualmente limitada, donde segue que $\|f(t)\|$ é uniformemente limitada (pelo princípio da limitação uniforme, ver [R.S.]).

QED

Disto decorre que $L_1^{(s)} \subseteq L_1^{(m)}$.

Para podermos falar em espaços $L_p^{(m)}(G)$, $p > 1$, necessitamos nos restringir a uma parte de $L_1^{(m)}$ e $L_1^{(s)}$; essa parte será a menor família monótona que contém $L^{(m)}$ ou $L^{(s)}$. Uma família monótona é um conjunto S de funções que é fechada por operações algébricas, por $\wedge$, $\vee$, e por limites de seqüências monótonas. É claro que não haverá alterações nas propriedades já provadas; essa mudança é apenas para garantir mensurabilidade das funções a serem tratadas.

Definimos $L_p^{(m)}(G)$ (ou $L_p^{(s)}(G)$), como o conjunto das funções f que estejam nessa família monótona, e que $f^p \in L_1^{(m)}$ (ou $L_1^{(s)}$).

(3.3) INTEGRAL DE STIELTJES E MEDIDAS

REGULARES DE VARIAÇÃO LIMITADA

Nesta secção estudamos como obter, via $v^{(B)}$, propriedades de medidas a valores operadores.

Começamos definindo integral de Stieltjes para o nosso caso.

DEF. 3.3.1: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$.

Dizemos que f é de variação limitada se existe $A \in \mathbb{R}^{(B)}$ tal que para toda partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, vale $\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq A$. Ao ínfimo de tais A , chamamos de variação total de f em $[a, b]$, $V_{[a, b]}(f)$.

Como $|A| = A \vee 0 - A \wedge 0$, vale o seguinte resul
tado:

PROP. 3.3.2: Uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ é de va
riação limitada se, e só se, $f = p - q$, com p e q crescen
tes (ou seja, se $t \leq s$, $p(t) \leq p(s)$ e $q(t) \leq q(s)$).

DEM: ($\Leftarrow$):

Se $f = p - q$, p e q crescentes, então, como

$$V_{[a, b]}(g + h) \leq V_{[a, b]}(g) + V_{[a, b]}(h) \quad , \text{ e}$$

como

$$V_{[a, b]}(p) = p(b) - p(a) \quad , \text{ e}$$

$$V_{[a, b]}(q) = q(b) - q(a) \quad ,$$

então

$$V_{[a, b]}(f) = V_{[a, b]}(p - q) \leq V_{[a, b]}(p) + V_{[a, b]}(q) < \infty$$

e, portanto f é de variação limitada.

($\Rightarrow$):

Definimos as funções $p, q: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$, por
 $2p(t) = V_{[a, t]}(f) + f(t)$, e $2q(t) = V_{[a, b]}(f) - f(t)$.

Então, é claro que $f = p - q$; se $t, s \in [a, b]$, $t \leq s$,
então

$$2(p(s) - p(t)) = V_{[a, s]}(f) - V_{[a, t]}(f) + f(s) - f(t)$$

$$2(q(s) - q(t)) = V_{[a, s]}(f) - V_{[a, t]}(f) + f(t) - f(s)$$

Como

$$V_{[a, s]}(f) - V_{[a, t]}(f) = V_{[t, s]}(f) \geq |f(s) - f(t)|,$$

e como

$$|A| + A = (A \vee 0) - (A \wedge 0) + (A \vee 0) + (A \wedge 0) = 2(A \vee 0) \geq 0,$$

e

$$|A| - A = (A \vee 0) - (A \wedge 0) - (A \vee 0) - (A \wedge 0) = -2(A \wedge 0) \geq 0,$$

então vemos que p e q são crescentes.

QED

Se $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ é crescente, então f pode ser estendida a uma função crescente $\tilde{f}:[a,b]^{(B)} \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ no modelo, e portanto, f pode ser obtida por restrição de função crescente no modelo, e é claro que restrição de função crescente é crescente. E, por consequência, se $\tilde{f}$ é de variação limitada em $V^{(B)}$, então sua restrição é de variação limitada, e toda $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ de variação limitada é restrição de alguma $\tilde{f}$ de variação limitada com $V^{(B)}$. Isto nos permite definir a integral de Stieltjes do seguinte modo. Seja $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ uniformemente m -contínua, e $\alpha:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ crescente. Então f tem única extensão contínua $\tilde{f}$ em $V^{(B)}$, e podemos estender α a $\tilde{\alpha}$ crescente no modelo. No modelo está definida a integral $\int_a^b \tilde{f} d\tilde{\alpha}$; definimos então $\int_a^b f d\alpha$ como $\int_a^b \tilde{f} d\tilde{\alpha}$. Como a extensão de α , $\tilde{\alpha}$, não é única, devemos verificar que a definição acima independe da extensão de α . Isto decorre do fato que, se $\tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_2$ são duas extensões de α em $V^{(B)}$, então $\tilde{\alpha}_1$ coincide com $\tilde{\alpha}_2$ em $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ que é denso em $[a,b]^{(B)}$, e, portanto, $\int_a^b \tilde{f} d\tilde{\alpha}_1$ coincide com $\int_a^b \tilde{f} d\tilde{\alpha}_2$. Como a integral de Stieltjes é um limite de somas do tipo $\sum_i f(x_i)(\tilde{\alpha}(t_{i+1}) - \tilde{\alpha}(t_i))$, vemos que a integral $\int_a^b f d\alpha$ definida acima é o m -limite de somas $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i))$.

Com isto podemos obter propriedades da integral de Stieltjes, no nosso caso, a partir das propriedades da integral de Stieltjes usual em $V^{(B)}$.

Passaremos agora a estudar uma álgebra importante em análise harmônica, a álgebra das medidas regulares de variação limitada, que é o espaço dual do das funções que se anulam no infinito ($C_0(G)$). Assumiremos que G ou H são separáveis.

No caso clássico, $C_0(G)$ denota o conjunto das funções $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas tais que, dado $\epsilon > 0$, existe compacto $K \subseteq G$ tal que $|f(p)| < \epsilon$, $\forall p \in G \setminus K$; e $C_c(G)$ denota o conjunto das funções contínuas em G , de suporte compacto; $M(G)$ denota o conjunto dos funcionais lineares limitados (contínuos) sobre $C_0(G)$. Denotaremos a interpretação dos conjuntos acima em $V^{(B)}$ por $C_0^{(B)}(G^{(B)})$, $C_c^{(B)}(G^{(B)})$ e $M^{(B)}(G^{(B)})$ respectivamente. Se $f \in C_0^{(B)}(G^{(B)})$ ou $f \in C_c^{(B)}(G^{(B)})$, definimos $\|f\|_\infty^{(B)} = \sup \{|f(t)| : t \in G^{(B)}\}$ e $\mathbb{R}^{(B)}$.

DEF. 3.3.3: Definimos o conjunto $C_0^{(m)}(G)$ das funções $f: G \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ uniformemente m -contínuas tais que, dado $\epsilon > 0$, existe compacto $K \subseteq G$, tal que $\forall t \in G \setminus K (\|f(t)\| < \epsilon)$; e $C_c^{(m)}(G)$ o conjunto das funções uniformemente m -contínuas e de suporte compacto em G . Se $f \in C_0^{(m)}(G)$, ou $f \in C_c^{(m)}(G)$, definimos $\|f\|_\infty^{(m)}$ como $\|\tilde{f}\|_\infty^{(B)}$, onde $\tilde{f}$ é a única extensão de f em $C_0^{(B)}$ ou $C_c^{(B)}(G^{(B)})$. É claro que $\|f\|_\infty^{(m)} = \sup_G |f(t)|$.

Em $V^{(B)}$, $C_c^{(B)}(G^{(B)})$ é denso em $C_o^{(B)}(G^{(B)})$ com $\|\cdot\|_\infty^{(B)}$; e é claro que $C_c^{(m)}(G)$ é denso em $C_o^{(m)}(G)$, com $\|\cdot\|_\infty^{(m)}$. A seguir obtemos uma relação entre $C_c^{(B)}(G^{(B)})$ e $C_c^{(m)}(G)$.

PROP. 3.3.4: Seja $f \in C_c^{(B)}(G^{(B)})$. Então existe uma partição da unidade $\{P_i: i \in \omega\}$ e um conjunto $\{\tilde{g}_i: i \in \omega\} \subseteq C_c^{(B)}(G^{(B)})$ tais que $f = \sum_i P_i \tilde{g}_i$, e se $g_i = \tilde{g}_i|_G$, $g_i \in C_c^{(m)}(G)$, $\forall i \in \omega$.

DEM: Seja $\tilde{K} \subseteq G^{(B)}$ o suporte de f . Como ou G ou H são separáveis, então existem partição da unidade $\{P_i: i \in \omega\}$ e conjunto de compactos de G , $\{K_i: i \in \omega\}$, tais que $K = \sum_i P_i K_i$, onde K_i é o fecho de $\tilde{K}_i^V$ em $G^{(B)}$; (na verdade tenho $K = \sum_{i \in I} P_i K_i$, e a hipótese de separabilidade de H garante que as partições da unidade são enumeráveis, ou a separabilidade de G garante que posso tomar uma quantidade enumerável de compactos K_i de G).

Sejam $\tilde{g}_i = P_i f_i$; então o suporte de $\tilde{g}_i$ é K_i , o que prova o resultado.

QED

Observe-se que não temos identidade entre $C_o^{(B)}(G^{(B)})$ e $C_o^{(m)}(G)$.

DEF. 3.3.5: Definimos $M^{(m)}(G)$ como o conjunto das funções $\mu: C_0^{(m)}(G) \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$, $f \mapsto \mu(f) = \int_G f \, d\mu$ (notação), tais que são $\mathbb{C}^{(B)}$ -lineares, ou seja, se $A, B \in \mathbb{C}^{(B)}$, e $f, g \in C_0^{(m)}(G)$, $\int_G (af + Bg) \, d\mu = A \int_G f \, d\mu + B \int_G g \, d\mu$, e $\sum_\alpha P_\alpha \int_G f_\alpha \, d\mu = \int_G (\sum_\alpha P_\alpha f_\alpha) \, d\mu$, e são limitadas no seguinte sentido: existe $A \in \mathbb{R}^{(B)}$ tal que

$$|\int_G f \, d\mu| \leq A \|f\|_\infty^{(m)}$$

No caso clássico, se $\mu \in M(G)$, definimos $\|\mu\| = \sup \{ |\int_G f \, d\mu| : f \in C_0(G), \|f\|_\infty \leq 1 \}$. Se $\tilde{\mu} \in M^{(B)}(G^{(B)})$, $\|\mu\|^{(B)}$ é a interpretação em $V^{(B)}$ de $\|\mu\|$. Se $\mu \in M^{(m)}(G)$, então definimos $\|\mu\|^{(m)} = \sup \{ |\int_G f \, d\mu| : f \in C_0^{(m)}(G), \|f\|_\infty^{(m)} \leq 1 \} \in \mathbb{R}^{(B)}$.

Estudaremos, agora, a relação entre $M^{(B)}(G^{(B)})$ e $M^{(m)}(G)$.

DEF. 3.3.6: Seja $\tilde{\mu} \in M^{(B)}(G^{(B)})$; definimos $\mu = \tilde{\mu}|_G$ (a restrição do funcional $\tilde{\mu}$ a $C_0^{(m)}(G)$) por $\int_G f \, d\mu = \int_{G^{(B)}} \tilde{f} \, d\tilde{\mu}$, $f \in C_0^{(m)}(G)$ e $\tilde{f}$ a única extensão de f a $C_0^{(B)}(G^{(B)})$.

Com isto é claro que $\mu \in M^{(m)}(G)$, e que $\|\mu\|^{(m)} = \|\tilde{\mu}\|^{(B)}$.

PROP. 3.3.7: A aplicação $\tilde{\mu} + \mu = \tilde{\mu}|_G$ é isomorfismo entre $M^{(B)}(G^{(B)})$ e $M^{(m)}(G)$.

DEM: Precisamos mostrar apenas que a aplicação é sobrejetora.

Seja $\mu \in M^{(m)}(G)$; como $C_c^{(m)}(G)$ é denso em $C_0^{(m)}(G)$, e μ limitado, μ fica determinado em $C_c^{(m)}(G)$. Com isto, usando a relação entre $C_c^{(m)}(G)$ e $C_c^{(B)}(G^{(B)})$ dada pela proposição 3.3.4, posso definir a extensão $\tilde{\mu}_0$ de μ sobre $C_c^{(B)}(G^{(B)})$, e tomar a única extensão limitada sobre $C_0^{(B)}(G^{(B)})$, $\tilde{\mu}$. Com isto é claro que $\mu = \tilde{\mu}|_G$.

QED

Vamos caracterizar continuidade absoluta de $\mu \in M^{(m)}(G)$ em relação à medida de Haar de G .

DEF. 3.3.8: Dizemos que $\mu \in M^{(m)}(G)$ é absolutamente contínua se existe $f \in L_1^{(m)}(G)$ tal que $\int_G g \, d\mu = \int_G f(t)g(t)dt$ para toda $g \in C_0^{(m)}(G)$.

Dado que $M^{(m)}(G)$ e $M^{(B)}(G^{(B)})$ são isomorfos, assim como $L_1^{(m)}(G)$ e $L_1^{(B)}(G^{(B)})$, se $\mu = \tilde{\mu}|_G$, $\tilde{\mu} \in M^{(B)}(G^{(B)})$, então μ é absolutamente contínua se, e só se, $\tilde{\mu}$ é absolutamente contínua em $V^{(B)}$.

Para finalizar, observamos que se definimos integral de uma função $\tilde{g} \in C_c^{(B)}(G^{(B)}) = L^{(B)}$ (notação da secção 3.1), como $\int_{G^{(B)}} \tilde{g} \, d\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu} \in M^{(B)}(G^{(B)})$, então valem todos os argumentos usados nas secções (3.1) e (3.2), e neste caso, denotaremos $L_1^{(m)}(\mu)$ e $L_1^{(B)}(\tilde{\mu})$ aos espaços das funções integráveis em relação às medidas explicitadas.

CAP. 4: ANÁLISE HARMÔNICA

Neste capítulo mostraremos como traduzir, via o modelo $V^{(B)}$, teoremas da Análise Harmônica Clássica para o caso das funções definidas num grupo abeliano localmente compacto (ou, resumidamente, grupo L.C.A) a valores operadores normais (não necessariamente limitados) que comutam dois a dois. Já vimos (no cap.2) que podemos obter todos os teoremas clássicos da Análise em $V^{(B)}$, e no cap.3 como traduzir propriedades de integração via $V^{(B)}$. Na secção (4.1) definimos e mostramos algumas propriedades da transformada de Fourier; na secção (4.2) estudamos a ação de funções em $A^{(m)}(\Gamma)$ e $B^{(m)}(\Gamma)$ (referentes aos $A(\Gamma)$ e $B(\Gamma)$), em (4.3) estudamos teoremas tauberianos de Wiener, e em (4.4) os espaços de Hardy.

(4.1) PROPRIEDADES BÁSICAS DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Se K é compacto de G e $\epsilon > 0$, então temos que $N(K, \epsilon) = \{\gamma \in \Gamma : |1 - \gamma(x)| < \epsilon, \forall x \in K\}$ é uma vizinhança aberta de 1 em Γ , e a família de todos os $N(K, \epsilon)$ com K compacto de G e $\epsilon > 0$ forma um sistema de vizinhanças de 1 em Γ . Então dizer que uma seqüência de caracteres $\gamma_n \in \Gamma$ converge para 1 em Γ é equivalente a dizer que $\forall K$ (compacto de G) $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \omega \forall m \in \omega (m \geq n) \forall x \in K |1 - \gamma_m(x)| < \epsilon$. Lembrando que $\Gamma^{(B)}$ é o conjunto de todas as representações unitárias de G em (B) , temos a seguinte proposição.

PROP.4.1.1: Se $U_n \in r^{(B)}$, $n \in \omega$, então $U_n \rightarrow I$ em $r^{(B)}$ se, e só se, $\forall K$ (compacto de G) $\forall \epsilon > 0 \exists \{P_i, i \in \omega\}$ (partição da unidade) $\{n_i : i \in \omega\} \subseteq \omega \forall i \in \omega \forall m \geq n_i \forall x \in K \|P_i - P_i U_m(x)\| < \epsilon$.

A demonstração segue da interpretação em $V^{(B)}$ da sentença que diz que uma seqüência de caracteres converge para 1.

Passaremos agora para a definição da transformada de Fourier $\hat{f}$ de uma função $f \in L_1^{(m)}(G)$.

No caso clássico, define-se $\hat{f}$ por: $\forall \gamma \in \Gamma, \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \gamma^{-1}(x) dx$, $f \in L_1(G)$, e $A(\Gamma) = \{\hat{f} : f \in L_1(G)\}$. Sabemos que $A(\Gamma) \subseteq C_0(\Gamma)$, e damos a métrica de $C_0(\Gamma)$ em $A(\Gamma)$. Chamaremos de $A^{(B)}(\Gamma^{(B)})$ à interpretação em $V^{(B)}$ de $A(\Gamma^{(B)})$.

DEF.4.1.2: Se $f \in L_1^{(m)}(G)$ e $\gamma \in \Gamma$, definimos $\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \gamma^{-1}(x) dx$, e chamaremos $\hat{f}$ de transformada de Fourier de f (já que se $f(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in G$ - ou seja, só assume valores ≥ 0 , $\gamma \in \Gamma$ - então $\hat{f}$ é a transformada de Fourier clássica de f).

Lembrando que toda função $f \in L_1^{(m)}(G)$ é restrição a G de uma $g \in L_1^{(B)}(G^{(B)})$, com $I(f) = I(g)$, então temos que $\hat{f} = \hat{g}|_\Gamma$ (ou seja $\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$).

DEF.4.1.3: Definimos o conjunto $A^{(m)}(\Gamma)$ por

$$A^{(m)}(\Gamma) = \{\hat{f}: f=g|_{\Gamma}, \text{ e } g \in L_1^{(B)}(\Gamma^{(B)})\}.$$

É claro que, pela definição e observações acima,

$$A^{(m)}(\Gamma) = f|_{\Gamma}: f \in A^{(B)}(\Gamma^{(B)}).$$

DEF.4.1.4: Definimos o conjunto $\tilde{c}_0^{(m)}(\Gamma)$ por

$$c_0^{(m)}(\Gamma) = \{f|_{\Gamma}: f \in c_0^{(B)}(\Gamma^{(B)})\}.$$

Então é claro que $A^{(m)}(\Gamma) \subseteq \tilde{c}_0^{(m)}(\Gamma)$ e que $c_0^{(m)}(\Gamma) \subseteq \tilde{c}_0^{(m)}(\Gamma)$. Se Γ for separável, podemos decompor toda $f \in \tilde{c}_0^{(m)}(\Gamma)$ da forma $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i f_i$, com $\{P_i\}$ partição da unidade, e $f_i \in c_0^{(m)}(\Gamma)$, pois se $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ são compactos de Γ , com $\bigcup_{n \geq 1} K_n = \Gamma$, sejam $P'_n = [\forall x \in K_n (|f(x)| \leq 1/n)]$, e $P_n \leq P'_n$ tais que $\{P_n\}$ forme partição da unidade, e sejam $f_n = P_n f$. Definimos $\|\cdot\|_{\infty}^{(m)}$ em $\tilde{c}_0^{(m)}(\Gamma)$ por $\|f\|_{\infty}^{(m)} = \|\tilde{f}\|_{\infty}^{(B)}$ onde $\tilde{f} \in c_0^{(B)}(\Gamma)$ e $f = \tilde{f}|_{\Gamma}$. Observemos que não há ambigüidade na definição de $\|\cdot\|_{\infty}^{(m)}$ pois Γ é m -denso em $\Gamma^{(B)}$.

Vejamos o caso de $G = \mathbb{R}$ (e, portanto, $\Gamma = \mathbb{R}$); sabemos que um caracter é da forma $\gamma(x) = e^{itx}$ $t \in \mathbb{R}$. O teorema de Riemann-Lebesgue, que garante que $A(\Gamma) \subseteq c_0(\Gamma)$, pode ser expresso da seguinte forma, via $V^{(B)}$:

PROP.4.1.5: Se $f \in GL_1^{(m)}(\mathbb{R})$, então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(x) = 0$.

Sabemos que se $\hat{f}(x)$ for não-crescente ou não-decrescente quando $x \rightarrow \pm\infty$, ou se $\|\hat{f}(x)\|$ tem limitante uniforme para $|x| > M$, então podemos trocar a m -convergência pela convergência forte na prop.4.1.5.

Um outro resultado interessante diz-nos que se $f \in GL_1(\mathbb{R})$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$, então, se $F \in GL_1(\mathbb{R})$, vale $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$,

$$\hat{F}(\xi) = \frac{1}{i\xi} \hat{f}(\xi) \quad [Y.K].$$

Como todo operador da forma λI é inversível, então via $v^{(B)}$, o resultado acima pode ser expresso da forma:

PROP.4.1.6: Se $f \in GL_1^{(m)}(\mathbb{R})$, e definindo $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$, se $F \in GL_1^{(m)}(\mathbb{R})$, então $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$ vale $\hat{F}(\xi) = \frac{1}{i\xi} \hat{f}(\xi)$.

Isso é interpretação do seguinte fato:

$$[\forall \xi \in \mathbb{R}^{(B)} \xi \neq 0 \rightarrow \exists u \in \mathbb{R} (u = \frac{1}{\xi}) \wedge \hat{F}(\xi) = \frac{u}{1} \hat{f}(\xi)] = 1.$$

Podemos expressar esse resultado em sua forma diferencial. Para isso, precisamos da seguinte definição:

DEF.4.1.7: Dizemos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$ é m-diferencial em $x_0 \in \mathbb{R}$, se existe o operador $f'(x_0) = m\text{-}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, ao qual chamaremos de derivada de f no ponto x_0 (ou em x_0). Dizemos que f é m-diferenciável se o for em todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Esta definição garante que f é restrição a $\mathbb{R}$ de uma função $\tilde{f}$ diferenciável, nos pontos de $\mathbb{R}$, em $V^{(B)}$, e como a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^{(B)}$ em $V^{(B)}$ está concentrada em V , então $\tilde{f}$ é diferenciável em quase todos os pontos de $\mathbb{R}^{(B)}$.

Com isso, temos:

PROP.4.1.8: Se $f \in L_1^{(m)}(\mathbb{R})$ e $xf(x) \in L_1^{(m)}(\mathbb{R})$, então $\hat{f}$ é m-diferencial e vale

$$\hat{f}'(\xi) = (-ixf) \wedge (\xi)$$

Vamos estudar agora a convolução em $L_1^{(m)}(G)$.

DEF.4.1.9: Se $\tilde{f}, \tilde{g} \in L_1^{(B)}(G^{(B)})$ (ou $\tilde{g} \in L_\infty^{(B)}(G^{(B)})$), definimos: $(\tilde{f} * \tilde{g})(x) = \int_{G^{(B)}} \tilde{f}(x-y)g(y)dy$, $\forall x \in G^{(B)}$.

Se $f, g \in L_1^{(m)}(G)$, (ou $g \in L_\infty^{(m)}(G)$), definimos $f * g(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy$, $\forall x \in G$.

Com esta definição, temos que, se $f = \tilde{f}|_G$ e $g = \tilde{g}|_G$, então $f * g = \tilde{f} * \tilde{g}|_G$; e como " $L_1^{(m)}(G) = L_1^{(B)}(G^{(B)})|_G$ "

(teo.3.1.15), temos:

PROP.4.1.10: Se $f, g, h \in L_1^{(m)}(G)$, então:

$$a) f * g \in L_1^{(m)}(G);$$

$$b) f * g = g * f$$

$$c) (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$d) \|f * g\|_1^{(m)} \leq \|f\|_1^{(m)} \cdot \|g\|_1^{(m)}$$

Se $f \in L_1^{(m)}(G)$ e $g \in L_\infty^{(m)}(G)$, então $f * g$ é limitada, no sentido que $\exists A \in \mathbb{R}^{(B)} \forall x \in G |f * g(x)| \leq A$, e é uniformemente m -contínua.

Analogamente, obtemos as propriedades de $A^{(m)}(\Gamma)$ de $A(\Gamma)$ via $V^{(B)}$:

PROP.4.1.11:

a) $A^{(m)}(\Gamma)$ é álgebra sobre $\mathbb{C}^{(B)}$, e é m -densa em $\tilde{C}_0(\Gamma)$;

b) se $f, g \in L_1^{(m)}(G)$, então $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$

c) $A^{(m)}(\Gamma)$ é invariante por translação (isto é ,

por caracteres sobre Γ);

d) se $f \in L_1^{(m)}(G)$, então $\|\hat{f}\|_{\infty}^{(m)} \leq \|f\|_1^{(m)}$;

e) se $f \in L_1^{(m)}(G)$, e $\gamma \in \Gamma$, então $(f * \gamma)(x) = (x, \gamma) \hat{f}(\gamma)$.

DEF.4.1.12: Se $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in M^{(B)}(G^{(B)})$, definimos $\tilde{\mu} * \tilde{\lambda}$ por $\forall f \in C_0^{(B)}(G^{(B)})$, $\int_{G^{(B)}} f d(\tilde{\mu} * \tilde{\lambda}) = \int_{G^{(B)}} \int_{G^{(B)}} f(x+y) d\tilde{\mu}(x) d\tilde{\lambda}(y)$.

Em $V^{(B)}$ vale que $M^{(B)}(G^{(B)})$ é álgebra comutativa com unidade, e que vale $\|\tilde{\mu} * \tilde{\lambda}\|^{(B)} \leq \|\tilde{\mu}\|^{(B)} \cdot \|\tilde{\lambda}\|^{(B)}$.

Se $\mu, \lambda \in M^{(m)}(G)$, então definimos $\mu * \lambda$ por $\forall f \in C_0^{(m)}$
 $\int_G f d(\mu * \lambda) = \int_G \int_G f(x+y) d\mu(x) d\lambda(y)$. Dado que $M^{(m)}(G)$
 e $M^{(B)}(G^{(B)})$ são isomorfos, temos:

PROP.4.1.13: $M^{(m)}(G)$ é álgebra (sobre $\mathbb{C}^{(B)}$) comu
 tativa com unidade, e vale $\|\mu * \lambda\|^{(m)} \leq \|\mu\|^{(m)} \cdot \|\lambda\|^{(m)}$,
 $\forall \lambda, \mu \in M^{(m)}(G)$.

Observemos que a álgebra $M(G)$ "clássica" pode
 ser canonicamente incluída em $M^{(m)}(G)$, por $\mu \in M(G) \rightarrow \mu \in M^{(m)}(G)$.

DEF.4.1.14: Se $\mu \in M^{(m)}(G)$, definimos $\hat{\mu}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ por $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma^{-1}(x) d\mu(x) = \int_G (x, -\gamma) d\mu(x)$ (nas duas notações); definimos o conjunto $B^{(m)}(\Gamma) = \{\hat{\mu}: \mu \in M^{(m)}(G)\}$; dizemos que $\hat{\mu}$ é a transformada de Fourier-Stieltjes de μ , e esta definição generaliza o caso clássico.

É claro que $B^{(m)}(\Gamma)$ é isomorfo a $B^{(B)}(\Gamma^{(B)})$ (a interpretação de $B(\Gamma)$ em $V^{(B)}$). Com isto, temos:

TEO.4.1.15:

a) $\hat{\mu}$ é limitada ($\exists A \in \mathbb{R}^{(B)} \forall \gamma \in \Gamma |\hat{\mu}(\gamma)| \leq A$), e uniformemente m -contínua (observemos que se $A \in \mathcal{L}(H)$, então $\hat{\mu}$ é fortemente contínua);

$$b) (\mu * \lambda) = \hat{\mu} \hat{\lambda}$$

c) $B^{(m)}(\Gamma)$ é invariante por translação, e por multiplicação por (x, γ) , $\forall x \in G$.

d) Se $\hat{\mu} \in B^{(m)}(\Gamma)$ então $\hat{\mu}^* \in B^{(m)}(\Gamma)$ (o adjunto faz o papel da conjugação complexa em $\mathbb{C}^{(B)}$).

e) $\hat{\mu} = 0$ se, e só se, $\mu = 0$.

Em $B^{(m)}(\Gamma)$ definimos a "norma" $\|\cdot\|^{(m)}$ por $\|\hat{\mu}\|^{(m)} = \|\mu\|^{(m)} \forall \mu \in M^{(m)}(G)$.

Temos que $L_1^{(m)}(G)$ pode ser incluído naturalmente em $M^{(m)}(G)$ pela aplicação $f \in L_1^{(m)}(G) \rightarrow \mu_f \in M^{(m)}(G)$, onde μ_f é definida por $\forall g \in C_0^{(m)}(G)$, $\int_G g(x) d\mu_f(x) = \int_G g(x) f(x) dx$, onde dx representa a medida de Haar de G . Então $L_1^{(m)}(G)$ é subálgebra de $M^{(m)}(G)$, e são iguais se, e só se, G é discreto.

Vamos, agora, estudar a tradução via $V^{(B)}$ do teorema de Bochner, o que nos fornecerá uma caracterização das funções de $B^{(m)}(r)$.

DEF. 4.1.16: Dizemos que $\psi: G \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ é definida positiva se, e só se, $\sum A_n A_m^* \psi(x_n - x_m) \geq 0$ para todo conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq G$ finito e todo $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathbb{C}^{(B)}$.

Se ψ é uniformemente m -contínua em G , então tem uma única extensão contínua em $V^{(B)}$, $\tilde{\psi}: G^{(B)} \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$. Como G é denso em $G^{(B)}$, se ψ é também definida positiva, então $\tilde{\psi}$ é definida positiva em $V^{(B)}$, pois, considerando a função $\psi: G^{2N} \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$, $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum A_n A_m^* \psi(x_n - x_m)$, é claro que ψ é uniformemente contínua em G^{2N} e portanto tem única extensão contínua em $V^{(B)}$, $\tilde{\psi}: (G^{(B)})^{2N} \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$; sendo ψ definida positiva, temos $\psi \geq 0$, e portanto $\tilde{\psi} \geq 0$, o que prova que $\tilde{\psi}$ é definida positiva. É claro que se $\tilde{\psi}$ é definida positiva, então $\psi = \tilde{\psi}|_G$ é definida positiva.

Lembrando que $M^{(B)}(G^{(B)})$ e $M^{(m)}(G)$ são isomorfos (prop.3.3.7), temos a seguinte tradução do teorema de Bochner:

TEO.4.1.17: Uma função $\Psi: G \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ uniformemente m -contínua é definida positiva se, e só se, existe $\mu \in M^{(m)}(\Gamma)$, $\mu \geq 0$, tal que, para todo $x \in G$,

$$\Psi(x) = \int_{\Gamma} \gamma(x) d\mu(\gamma)$$

Como no caso clássico, definimos o conjunto $B^{(m)}(G) = \{f: \exists \mu \in M^{(m)}(\Gamma), \forall x \in G f(x) = \int_{\Gamma} \gamma(x) d\mu(\gamma)\}$.

Temos que toda $\mu \in M(G)$ pode ser escrita como $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, com $\mu_n \in M(G)$, e $\mu_n \geq 0$, $1 \leq n \leq 4$. Então em $V^{(B)}$ vale que toda $\tilde{\mu} \in M^{(B)}(G^{(B)})$ pode ser escrita como $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 + i(\tilde{\mu}_3 - \tilde{\mu}_4)$, $\tilde{\mu}_n \geq 0$, e como $M^{(B)}(G^{(B)})$ e $M^{(m)}(G)$ são isomorfos (prop.3.3.7), esta decomposição vale em $M^{(m)}(G)$.

Com isto, pelo teo.4.1.17, e devido ao fato de G ser o dual de Γ , temos que os elementos de $B^{(m)}(\Gamma)$ são combinações lineares de funções definidas positivas.

Discutiremos, agora, a tradução de dois resultados relacionados com o cálculo de f a partir de $\hat{f}$, no caso de $G = \mathbb{R}$. Começamos com o seguinte, conhecido como lema de Jordan ([T]).

PROP.4.1.18: Se $f \in L_1^{(m)}(\mathbb{R})$ é de variação limitada em torno de $u \in \mathbb{R}$, então $m\text{-}\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{iux} \hat{f}(x) dx = \frac{1}{2} (f(u_+) + f(u_-))$, onde $f(u_+)$ e $f(u_-)$ são calculados como m-limites.

Sendo f de variação limitada em torno de $u \in \mathbb{R}$, pode ser estendida a $\tilde{f} \in L_1^{(B)}(\mathbb{R}^{(B)})$ de variação limitada em torno de u (ver prop.3.3.2 e observações a seguir). Com isto, é imediato verificar a proposição acima.

Como corolário, se f é também m-contínua em u , então vale $m\text{-}\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{iux} \hat{f}(x) dx = f(u)$.

PROP.4.1.19: Se $f, \hat{f} \in L_1^{(m)}(\mathbb{R})$, f uniformemente m-contínua em torno de $u \in \mathbb{R}$, então

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \hat{f}(x) dx$$

Falaremos agora do teorema de Plancherel.

Temos que, em $V^{(B)}$, $L_1^{(B)} \cap L_2^{(B)}(G^{(B)})$ é denso em $L_2^{(B)}(G^{(B)})$, e que se $f \in L_2^{(B)}(G^{(B)})$, então $\|f\|_2^{(B)} = \|\hat{f}\|_2^{(B)}$, ou seja, a transformada de Fourier define isometria de $L_2^{(B)}(G^{(B)})$ sobre $L_2^{(B)}(\Gamma^{(B)})$. Restringindo a G e a Γ , temos:

TEO.4.1.20: Existe isometria de $L_2^{(m)}(G)$ sobre $L_2^{(m)}(\Gamma)$ tal que, em $L_1^{(m)} \cap L_2^{(m)}(G)$ coincide com a transformada de Fourier.

Como consequência imediata do teorema de Plancherel, temos a fórmula de Parseval:

$$\forall f, g \in L_2^{(m)}(G), \int_G f \cdot g dx = \int_\Gamma \hat{f} \cdot \hat{g} d\gamma.$$

Uma observação final é que, se H é subgrupo fechado de G , então podemos estender todo caracter de H a um caracter de G . Se U é representação unitária de H , temos que U é caracter de $H^{(B)}$, em $V^{(B)}$, e portanto podemos estendê-lo a um caracter de $G^{(B)}$. Com isto, temos:

PROP.4.1.21: Toda representação unitária de um subgrupo fechado H de G pode ser estendida a representação unitária de G .

(4.2) FUNÇÕES QUE OPERAM EM $A^{(m)}(r)$ E EM $B^{(m)}(r)$

Neste item fazemos a tradução via $V^{(B)}$ de teoremas que determinam quais são as funções que operam em $A^{(m)}(r)$ e $B^{(m)}(r)$. Os resultados clássicos são devidos a Helson, Kahane, Katznelson e Rudin (ver [W.R] cap.6), e afirmam que as funções que operam em $A(r)$ ou em $B(r)$ são as analíticas (reais ou complexas). Para a tradução via $V^{(B)}$ de tais teoremas, necessitamos dar as definições do que seriam funções (reais ou complexas) analíticas a valores em $\mathbb{C}^{(B)}$.

DEF.4.2.1: Se $D \subseteq \mathbb{C}$ é um domínio, então definimos $D^{(B)}$ como $\{z \in \mathbb{C}^{(B)} : \exists V \text{ vizinhança de } z \text{ em } \mathbb{C}^{(B)}, V \cap \mathbb{C} \subseteq D\}$. Por esta definição, vemos que $D^{(B)}$ é aberto de $\mathbb{C}^{(B)}$ em $V^{(B)}$.

DEF.4.2.2: Uma função $f: D \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ é analítica se, e só se, valerem as condições:

a) f é uniformemente m -contínua numa vizinhança de z , para cada $z \in D$;

$$b) \forall z_0 \in D, \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}^{(B)}.$$

Esta definição garante o isomorfismo entre as funções analíticas em $D^{(B)}$ no modelo, e as analíticas em D

segundo nossa definição.

Com isso estamos em condições de traduzir o seguinte teorema, devido a Helson e Kahane:

TEO: Seja $\psi(0) = 0$, $\psi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Se $\psi(\hat{f}) \in GA(r)$, $\forall f \in GA(r)$, com $\text{im}(\hat{f}) \subseteq [-1, 1]$, então existe uma função analítica em algum domínio contendo $[-1, 1]$, coincidindo com ψ em $[-1, 1]$.

Sua tradução via $V^{(B)}$ será:

TEO 4.2.3: Seja $\psi: [-1, 1]^{(B)} \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$, $\psi(0) = 0$, e com $\forall P \in BVX$, $\forall G \in [-1, 1]^{(B)} (XP = YP \Rightarrow \psi(X)P = \psi(Y)P)$.

Se $\psi(\hat{f}) \in GA^{(m)}(\mathbb{R})$, $\forall f \in L_1^{(m)}(\mathbb{R})$, $\text{im } \hat{f} \subseteq [-1, 1]^{(B)}$, então existe uma partição da unidade $\{P_i: i \in \omega\}$ e um conjunto $\{\psi_i: i \in \omega\}$ de funções analíticas definidas em algum domínio contendo $[-1, 1]$ tais que ψ e $\sum_{i \in \omega} P_i \psi_i$ coincidem em $[-1, 1]$.

Vejamos o porquê desta tradução.

Como já temos uma função no sentido usual $\psi: [-1, 1]^{(B)} \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$, com domínio e imagem operadores, não precisamos estender ψ em $V^{(B)}$, mas precisamos garantir que dentro de $V^{(B)}$ ψ seja função. Por isso temos a condição $\forall P \in BVX$, $\forall G \in [-1, 1]^{(B)} (XP = YP \Rightarrow \psi(X)P = \psi(Y)P)$.

Então, olhando como elemento de $V^{(B)}$, temos
 $[\forall x, y \in [-1, 1]^{(B)} (x=y \rightarrow \psi(x)=\psi(y))] = 1$, ou seja, em $V^{(B)}$ vale
 que ψ é função.

Se denotarmos por $A([-1, 1])$ o conjunto das fun
 ções analíticas em torno de $[-1, 1]$, e por $A^{(B)}([-1, 1]^{(B)})$
 sua interpretação em $V^{(B)}$, então a conclusão do teorema de
 Helson e Kahane em $V^{(B)}$ pode ser escrita da forma:

$$[\exists \psi \in A^{(B)}([-1, 1]^{(B)}) \forall x \in [-1, 1]^{(B)} (\psi(x) = \varphi(x))] = 1$$

ou seja,

$$\forall \psi \in A^{(B)}([-1, 1]^{(B)}) [\forall x \in [-1, 1]^{(B)} (\psi(x) = \varphi(x))] = 1$$

Então, pelo princípio do máximo existe partição
 da unidade $\{P_i\}$ e subconjunto $\{\tilde{\psi}_i\}$ de $A^{(B)}([-1, 1]^{(B)})$ tal
 que

$$[\forall x \in [-1, 1]^{(B)} (\sum_i P_i \tilde{\psi}_i(x) = \varphi(x))] = 1$$

Em particular, deve valer

$$\forall x \in [-1, 1] ([\sum_i P_i \tilde{\psi}_i(x) = \varphi(x)] = 1)$$

Se chamamos ψ_i às restrições das $\tilde{\psi}_i$, $\psi_i \in$
 $A([-1, 1])$, então obtemos

$\forall x \in [-1, 1] \ (\Psi(x.I) = \sum_i P_i \Psi_i(x))$, agora olhando Ψ como função de operadores a valores operadores. Isto demonstra o por quê da tradução.

Vamos ver que informações o teorema acima nos dá acerca de funções a valores operadores.

A partição da unidade $\{P_i\}$ fornece-nos uma decomposição de H como soma direta de subespaços $H_i = P_i H$. Podemos então nos restringir a cada H_i , e olhar para $P_i \hat{f}$ que é a restrição de $\hat{f}$ a H_i . Neste caso, o teo.4.2.3 nos diz que Ψ se comporta como uma função analítica Ψ_i quando age em $P_i \hat{f}$.

Observe-se que a hipótese sobre a Ψ (que $XP = YP \rightarrow \Psi(X)P = \Psi(Y)P$) que nos permite fazer a decomposição acima e estudar subespaço por subespaço.

Devemos observar que a maior dificuldade foi a interpretação de uma fórmula existencial, e a descoberta de uma hipótese sobre Ψ , necessária para fazer uso de $V^{(B)}$.

Para o próximo resultado precisamos da definição de real-analiticidade de $f: D \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ onde $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é um domínio. Defino $D^{(B)}$ de modo análogo ao caso complexo (ver def. 4.2.1).

DEF.4.2.4: Uma função $f:D \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ é real-analítica em D se, e só se, para todo $(s_0, t_0) \in D$, existem coeficientes $A_{m,n} \in \mathbb{C}^{(B)}$ tais que $f(s,t) = \sum_{m,n=\infty}^{\infty} A_{m,n} (s-s_0)^m \cdot (t-t_0)^n$, que m -converge absolutamente para todo (s,t) em alguma vizinhança de (s_0, t_0) .

Se D for compacto, podemos dizer que f é restrição de alguma função real-analítica $\tilde{f}: D^{(B)} \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ de $V^{(B)}$. Dada a compacidade de D (e portanto de $D^{(B)}$ em $V^{(B)}$) basta verificar isso no caso de uma vizinhança compacta do tipo $D = \{(s,t): |s-s_0| \leq \epsilon \text{ e } |t-t_0| \leq \epsilon\}$ onde valha $f(s,t) = \sum_{m,n} A_{m,n} (s-s_0)^m (t-t_0)^n$, com m -convergência absoluta em D . Com isso, é fácil ver que a série converge absolutamente em $D^{(B)}$ no modelo, e sendo D compacto, f é uniformemente m -contínua, e portanto possui uma única extensão a $D^{(B)}$ e neste caso a soma da série será $f(s,t)$ para todo $(s,t) \in D^{(B)}$.

Com isto, temos a seguinte tradução de outro resultado de Helson e Kahane:

TEO.4.2.5: Seja $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ compacto convexo, e $D^{(B)}$, seu fecho em $\mathbb{R}^{(B)} \times \mathbb{R}^{(B)}$. Seja Γ um grupo L.C.A. não discreto, $\psi: D^{(B)} \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ tal que $\forall P \in B \forall X, Y \in D^{(B)} (XP = YP \rightarrow \psi(X)P = \psi(Y)P)$. Se para toda $f \in L_1^{(m)}(G)$, $\psi(\hat{f}) \in A^{(m)}(\Gamma)$, quando $\text{im}(\hat{f}) \subseteq D^{(B)}$, então existem $\{P_i\}_{i \in \omega}$ partição da unidade, e $\{\psi_i\}_{i \in \omega}$ reais -analíticas em D tais que ψ e $\sum_{i \in \omega} P_i \psi_i$ coincidem em D .

Na verdade, no caso clássico, D é suposto apenas fechado convexo (ver [W.R.], 6.9.3), e a nossa restrição a compacto é apenas para poder estender funções reais-analíticas em D para $V^{(B)}$.

Como vimos, superadas as dificuldades de definição de analiticidade para estender a $V^{(B)}$, o método de tradução de teoremas referentes a este item fica imediato. Por exemplo, o seguinte resultado (ver [W.R.], 6.5.4).

TEO. 4.2.6: Seja $\psi: [-1, 1]^{(B)} \rightarrow \mathbb{C}^{(B)}$ tal que $\forall P \in B \forall X, Y \in [-1, 1]^{(B)} (XP = YP \rightarrow \psi(X)P = \psi(Y)P)$, e seja Γ um grupo L.C.A. discreto infinito. Se $\psi(\hat{f}) \in B^{(m)}(\Gamma)$, $\forall \hat{f} \in A^{(m)}(\Gamma)$ com $\text{im}(\hat{f}) \subseteq [-1, 1]^{(B)}$, então existem $\{P_i\}_{i \in \omega}$ partição da unidade, e $\{\psi_i\}_{i \in \omega}$ funções de $[-1, 1]$ em $\mathbb{C}^{(B)}$ reais analíticas numa vizinhança da origem tais que ψ e $\sum_{i \in \omega} P_i \psi_i$ coincidem em $[-1, 1]$.

(4.3) TEOREMAS TAUBERIANOS DE WIENER

Neste ítem mostramos como traduzir teoremas relacionados com os ideais de $L_1(G)$ (ver [W.R], cap.7), os resultados conhecidos como teoremas tauberianos de Wiener, em suas várias formas.

Para isso, devemos definir ideal da álgebra sobre $\mathbb{C}^{(B)}, L_1^{(m)}(G)$.

DEF.4.3.1: Um subconjunto I de $L_1^{(m)}(G)$ é dito ideal de $L_1^{(m)}(G)$ se forem satisfeitas as seguintes condições:

- a) se $A, B \in \mathbb{C}^{(B)}$, e $f, g \in I$, então $Af + Bg \in I$;
- b) se $\{P_\alpha\}_\alpha$ é partição da unidade, e $\{f_\alpha\}_\alpha \subseteq I$, então $\sum_\alpha P_\alpha f_\alpha \in I$;
- c) se $f \in L_1^{(m)}(G)$ e $g \in I$, então $f * g \in I$.

As condições a) e c) da definição acima são propriedades de ideal de uma álgebra qualquer sobre um anel, e a condição b) é herdada da estrutura de $L_1^{(m)}(G)$ que é "fechado por misturas".

Como $L_1^{(B)}(G^{(B)})$ é isomorfo a $L_1^{(m)}(G)$, então temos um isomorfismo entre os ideais $\tilde{I}$ de $L_1^{(B)}(G^{(B)})$ e os

ideais I de $L_1^{(m)}(G)$, dado por $I = \{\tilde{f}|_G : \tilde{f} \in \tilde{I}\}$, e denotaremos I por $\tilde{I}|_G$.

DEF.4.3.2: Um ideal de $L_1^{(m)}(G)$ é dito regular se, e só se, $\exists e \in I \forall f \in L_1^{(m)}(G) \exists g \in I (f * e = f + g)$ (isto é, se I possui um elemento que é uma identidade módulo I para $L_1^{(m)}(G)$).

É claro que se $I = \tilde{I}|_G$, então I é regular se, e só se, vale em $V^{(B)}$ que $\tilde{I}$ é regular.

Dizemos que um ideal regular I é maximal, se for distinto de $L_1^{(m)}(G)$, e todo ideal $J \supseteq I$, ou $J=I$, ou $J = L_1^{(m)}(G)$.

Um ideal I de $L_1^{(m)}(G)$ é dito fechado se o for no sentido da $\|\cdot\|_1^{(m)}$ na m -convergência, ou seja, se $\{f_n\} \subseteq I$, $f \in L_1^{(m)}$, e $m\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1^{(m)} = 0$, então $f \in I$. Se $I = \tilde{I}|_G$ então I é fechado se, e só se, $\tilde{I}$ é fechado em $V^{(B)}$; e temos que I é maximal se, e só se, $\tilde{I}$ é maximal. Com isto, temos a seguinte tradução do teorema de Wiener:

TEO.4.3.3: Todo ideal próprio fechado de $L_1^{(m)}(G)$ está contido num ideal maximal regular.

Devemos observar que, na sua forma original, o teorema de Wiener diz que se o conjunto $Z(I) = \{\gamma \in \Gamma : \hat{f}(\gamma) = 0\}$,

$\forall f \in I$ é vazio, então $I = L_1(G)$. No nosso caso isto não é vá lido, pois seria válido em $V^{(B)}$ que $Z(\tilde{I}) = \emptyset +$
 $+ \tilde{I} = L_1^{(B)}(G^{(B)})$, mas $Z(\tilde{I}) = \{\gamma \in \Gamma^{(B)} : \hat{f}(\gamma) = 0, \forall f \in \tilde{I}\}$, e
podemos ter $\gamma \in Z(\tilde{I})$ satisfazendo $[\gamma \in \Gamma] = 0$, e portanto pod
eríamos ter $Z(I) = \emptyset$ sem ter $Z(\tilde{I}) = \emptyset$.

Para apresentar o teorema de Wiener em sua forma de limite, precisamos da seguinte definição:

DEF.4.3.4: Seja $\psi \in L_\infty^{(m)}(G)$; dizemos que $\psi(x) \rightarrow A$ quando $x \rightarrow \infty$, se dado $\epsilon > 0$, existe partição da unidade $\{P_\alpha\}$ e conjunto $\{K_\alpha\}$ de compactos de G tais que, para todo α , va
le

$$\forall x \in G \setminus K_\alpha \quad (\|P_\alpha \psi(x) - P_\alpha A\| < \epsilon).$$

Com isto, se $\tilde{\psi} \in L_\infty^{(B)}(G^{(B)})$ é tal que $\tilde{\psi}|_G = \psi$ e $\|\tilde{\psi}\|_\infty^{(B)} = \|\psi\|_\infty^{(m)}$, dizer que $\psi(x) \rightarrow A$ quando $x \rightarrow \infty$ é equivalen
te a dizer que $\tilde{\psi}(x) \rightarrow A$ quando $x \rightarrow \infty$, em $V^{(B)}$, pois valerá
 $[\forall x \in G^{(B)} \setminus \sum_\alpha P_\alpha \tilde{K}_\alpha \quad (\|\tilde{\psi}(x) - A\| < \epsilon)] = 1$ onde $\tilde{K}_\alpha$ é o fecho de K_α , e lembrando que em $V^{(B)}$, $\sum_\alpha P_\alpha \tilde{K}_\alpha$ é compacto de $G^{(B)}$.

Então temos o seguinte teorema:

TEO.4.3.5: Sejam $\psi \in L_\infty^{(m)}(G)$ e $f \in L_1^{(m)}(G)$, tais que para todo compacto $K \subset r$, existe uma partição da unidade e um conjunto $\{\epsilon_\alpha\}$ de reais positivos tais que $\forall \gamma \in K |\hat{f}(\gamma)| \geq$

$\geq \epsilon_\alpha P_\alpha$. Se $(f*\psi)(x) \rightarrow A\hat{f}(0)$ quando $x \rightarrow \infty$, então $(g*\psi)(x) \rightarrow A\hat{g}(0)$ quando $x \rightarrow \infty$, para toda $g \in L_1^{(m)}(G)$.

Na sua forma clássica, temos a hipótese $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$; podemos escrever essa hipótese na seguinte forma: dado um compacto $K \subseteq \Gamma$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|\hat{f}(\gamma)| > \epsilon$, $\forall \gamma \in K$. Então interpretando este teorema via $V^{(B)}$, a hipótese acima toma a forma escrita no teorema (4.3.5).

Para finalizar este item, apresentamos a tradução do teorema tauberiano de Pitt (ver [W.R], 7.2.7).

DEF; 4.3.6: Dizemos que $\psi \in L_\infty^{(m)}(G)$ é lentamente oscilante se, e só se, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição da unidade $\{P_\alpha\}$, um conjunto $\{K_\alpha\}$ de compactos de G , e um conjunto $\{V_\alpha\}$ de vizinhanças compactas de 0 em G tais que, para todo x e y em G , vale $(x-y \in V_\alpha \wedge x \notin K_\alpha) \Rightarrow \|P_\alpha \psi(x) - P_\alpha \psi(y)\| < \epsilon$.

TEO. 4.3.7: Seja $\psi \in L_\infty^{(m)}(G)$ lentamente oscilante, e $f \in L_1^{(m)}(G)$ tal que, para cada compacto $K \subseteq \Gamma$, existe uma partição da unidade $\{P_\alpha\}$ e um conjunto $\{\epsilon_\alpha\}$ de reais positivos tais que $\forall \gamma \in K |\hat{f}(\gamma)| \geq \epsilon_\alpha P_\alpha$. Se $(f*\psi)(x) \rightarrow A\hat{f}(0)$ então $\psi(x) \rightarrow A$ (quando $x \rightarrow \infty$).

Se $\psi \in L_\infty^{(m)}(G)$ é lentamente oscilante, podemos ex tendê-la a $\tilde{\psi} \in L_\infty^{(B)}(G^{(B)})$ lentamente oscilante em $V^{(B)}$.

Como no teo.4.3.5, tenho a hipótese $\hat{f}(\gamma) \neq 0$,
 $\forall \gamma \in \Gamma$, transformada em $|\hat{f}(\gamma)| > \varepsilon_\alpha P_\alpha \quad \forall \gamma \in K$, o que garante que em
 $V^{(B)}$, $\hat{f}(\gamma) \neq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma^{(B)}$. Com isso, a tradução fica imediata.

(4.4) ANALITICIDADE E ESPAÇOS DE HARDY

Neste ítem, mostraremos o mecanismo de tradução de resultados relativos a analiticidade e espaços de Hardy (ver [W.R.], cap.8). É interessante ressaltar que B.Sz-Nagy e C.Foias apresentam um estudo dos espaços de Hardy, desenvolvendo um cálculo funcional para operadores contrativos (ou seja, $T \in \mathcal{L}(H)$, $\|T\| \leq 1$); ver [N;F]. Cabe aqui uma comparação entre o trabalho de Nagy e Foias e esta dissertação: esta dissertação tem a vantagem de desenvolver um método para tratar com operadores normais não limitados, enquanto que o trabalho de Nagy e Foias desenvolve um método para tratar de operadores limitados normais ou não normais. A semelhança entre os dois trabalhos está no fato de apresentarem um método de obter teoremas sobre operadores a partir de teoremas clássicos da análise Harmônica.

Passemos, agora à tradução de alguns resultados. Denotamos T ao grupo dos reais módulo 2π , que sabemos ser isomorfo ao grupo dos números complexos de módulo 1.

Lembrando que o conjunto dos inteiros em $V^{(B)}$ coincide com $\mathbb{Z}$, obtemos uma tradução imediata do teorema de F. e M.Riesz:

TEO.4.4.1: Seja $\mu \in M^{(m)}(T)$; se $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\mu(\theta) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, então μ é absolutamente contínua (em relação à medida de Haar de T).

Podemos também traduzir o teorema análogo para o grupo $\mathbb{R}$:

TEO 4.4.2: Seja $\mu \in M^{(m)}(\mathbb{R})$; se $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} d\mu(x) = 0$, para todo $y < 0$, então μ é absolutamente contínua.

Também é imediata a tradução de um teorema de Bochner:

TEO 4.4.3: Seja Y um setor fechado em $\mathbb{R}^2$ com abertura menor que π radianos. Se $\mu \in M^{(m)}(T^2)$ e $\hat{\mu} = 0$ fora de Y , então μ é absolutamente contínua.

Sabemos que o grupo dual de T^2 é $\mathbb{Z}^2$, e dizer que $\hat{\mu}(\gamma) = 0$, fora de Y é dizer que $\hat{\mu}(\gamma) = 0$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}^2$, $\gamma \notin Y$.

Falaremos agora de analiticidade e de espaços de Hardy.

Seja G um grupo compacto e conexo (a conexidade de G é condição necessária e suficiente para que seu grupo dual Γ possa ser ordenado, ver [W.R.], 8.1.8); seu grupo dual Γ é discreto e é dada uma ordem sobre Γ ; sendo dis

creto, vale $[\overset{V}{r=r^{(B)}}] = 1$ em $V^{(B)}$, logo $r^{(B)}$ pode ser ordenado, pela ordem dada pela de r . No que segue, G é grupo com pacto conexo, e r possui uma ordem fixa.

Uma função $f \in L_1(G)$ é dita de tipo analítico se $\hat{f}(\gamma) = 0$, para todo $\gamma < 0$, e $\mu \in M(G)$ é de tipo analítico se $\hat{\mu}(\gamma) = 0$, $\forall \gamma < 0$. Com isto, dizemos que $\tilde{f} \in L_1^{(B)}(G^{(B)})$ ou $\tilde{\mu} \in M^{(B)}(G^{(B)})$ é de tipo analítico se o for em $V^{(B)}$. Dizemos, que $f \in L_1^{(m)}(G)$ é de tipo analítico se $\hat{f}(\gamma) = 0$, para todo $\gamma < 0$, e que $\mu \in M^{(m)}(G)$ é do tipo analítico se $\hat{\mu}(\gamma) = 0$, para todo $\gamma < 0$.

Lembrando que $\hat{f}$ e $\hat{\mu}$ são funções contínuas, é claro que f ou μ é de tipo analítico se, e só se, $\tilde{f}$ ou $\tilde{\mu}$ é de tipo analítico em $V^{(B)}$, onde $f = \tilde{f}|_G$ e $\mu = \tilde{\mu}|_G$, e $\tilde{f} \in L_1^{(B)}(G^{(B)})$ e $\tilde{\mu} \in M^{(B)}(G^{(B)})$.

O conjunto das funções do tipo analítico que estão em $L_p(G)$ é denotado por $H_p^{(B)}(G^{(B)})$, $1 \leq p \leq \infty$. Então $H_p^{(B)}(G^{(B)})$ é a interpretação de $H_p(G)$ em $V^{(B)}$. Denotaremos por $H_p^{(m)}(G)$ o conjunto das funções de tipo analítico que estão em $L_p^{(m)}(G)$.

Com isto, temos os seguintes resultados (compare com [W.R.], 8.4.1, 8.4.3 e 8.4.4).

TEO.4.4.4: Se $f \in H_1^{(m)}(G)$, então vale $|\hat{f}(0)| \leq \exp \int_G \log |f(x)| dx$. Em particular $\log |f| \in L_1^{(m)}(G)$ se, e só se $P\hat{f}(0) \neq 0$, para toda $P \in G$, $P \neq 0$.

A primeira parte do teorema teve tradução imediata via $V^{(B)}$. A segunda parte decorre do fato que, se $f = \tilde{f}|_G$, $\tilde{f} \in H_1^{(B)}(G^{(B)})$, então vale em $V^{(B)}$

$$[\log |\tilde{f}| \in L_1^{(B)}(G^{(B)}) \leftrightarrow \hat{\tilde{f}}(0) = 0] = 1,$$

ou seja, deve valer $[\hat{f}(0) = 0] = 0$.

TEO.4.4.5: Seja $\omega \in L_1^{(m)}(G)$, $\omega \geq 0$. Então $\omega = |f|^2$ para alguma $f \in H_2^{(m)}(G)$ com $\forall P \in G (P \neq 0 \Rightarrow P\hat{f}(0) \neq 0)$ se, e só se, $\int_G \log |f(x)| dx > -\infty$.

TEO.4.4.6: Seja $f \in H_1^{(m)}(G)$ e $P\hat{f}(0) \neq 0$, para toda $P \in G$, $P \neq 0$. Então existem funções α e β em $H_2^{(m)}(G)$ tais que $f = \alpha\beta$, e $(\|\alpha\|_2^{(m)})^2 = (\|\beta\|_2^{(m)})^2 = \|f\|_1^{(m)}$.

Observe-se que, por ser $L_p^{(m)}(G)$ fechado por misturas, e também $H_p^{(m)}(G)$, a existência das funções α e β é garantida (na verdade, a conclusão seria que existe partição da unidade $\{P_i\}$ e conjuntos de funções $\{\alpha_i\}$ e $\{\beta_i\}$ em $H_2^{(m)}(G)$ tais que $f = \sum P_i \alpha_i \beta_i$).

O leitor pode observar que, tendo as ferramentas desenvolvidas no capítulo 3, junto com o cuidado na tradução da existência (usando partições da unidade e misturas) é quase imediata a tradução de teoremas via $V^{(B)}$. cremos que com este trabalho, torna-se fácil entender o mecanismo de obtenção de teoremas de análise via modelos a valores em álgebras de Boole.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ZIA] Abud, Z.I. - "Dualidade de Stone, Uma aplicação à lógica e à álgebra, dissertação de mestrado, IME-USP, 1979.
- [B] Bell, J.L. - " Boolean-valued models and independence proofs in set theory", Oxford Univ.Press, Londres, 1978.
- [KJD] Devlin, K.J. - "Fundamentals of contemporary set Theory", Springer, 1979.
- [DS] Dunford, N., Schwartz, J.T. - "Linear Operators", vol.II, Interscience, N.Y., 1963.
- [H.2] Halmos, P.R. - "Lectures on boolean algebras", Van Nostrand, N.Y., 1963.
- [YK] Katznelson, Y. - "An introduction to harmonic analysis", Dover, N.Y., 1976.
- [LL] Loomis, L.H. - "An introduction to abstract harmonic analysis", Van Nostrand, N.Y., 1953.
- [LG] Lutz, R., Goze, M. - "Nonstandard Analysis", Springer, LNM 881, 1981.

- [FM] Miraglia, Francisco - "Tópicos de teoria axiomática dos conjuntos", dissertação de mestrado, IME-USP, 1971.

- [RS] Reed, M., Simon, B. - "Methods of modern Mathematical Physics, v.I (Functional Analysis)", Acad.Press, 1980.

- [RN] Riesz, F., Nagy, B.Sz. - "Leçons d'analyse fonctionnelle", Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

- [AR] Robinson, A - "Nonstandard Analysis", North Holland, Amsterdã, 1966.

- [WR] Rudin, W. - "Fourier analysis ou groups", Interscience, N.Y., 1962.

- [S] Scott, D. - "Boolean models and nonstandard analysis", in Applications of Model theory to Algebra, Analysis and Probability, Holt, Rinehart & Winston Inc., 1969.

- [IES] Segal, I.E. - "Decomposition of operator algebras I, II", Memoirs A.M.S. vol.9, 1951.

- [ST] Solovay, R.M., Tenenbaum, S. - "Iterated Cohen extensions and Souslin's problem", Annals of Math., 94 (1971), pp. 201-245.

[GT.1] Takeuti, G. - "Two applications of logic to mathematics", Princeton Univ.Press, 1978.

[GT.2] Takeuti, G. - "Boolean-valued analysis", in L.N.M. 753, Springer, N.Y., 1979.

[GT.3] Takeuti, G. - "A transfer principle in harmonic analysis", Journal of Symbolic Logic, 44(1979), pp.417-440.

[TZ.1] Takeuti, G., Zaring, W. - "Introduction to axiomatic set theory", Springer, N.Y., 1971.

[TZ.2] Takeuti, G. - "Axiomatic set theory", Springer, N.Y. 1973.

[T] Titchmarsh, - "Theory of Fourier integrals", Clarendon Press, Oxford, 1937.

[NF] Nagy, B.Sz., Foias, C. - "Harmonic analysis of operators on Hilbert Spaces", North Holland, N.Y., 1970.