ÁLGEBRAS PONDERADAS COM
AUTOMORFISMOS PRÉ-FIXADOS

Luiz Antônio Peresi

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo, para
a obtenção do grau de "Doutor em Matemática".

Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa

Área de concentração: Matemática

São Paulo, outubro de 1985.

À minha mulher Miyako.

Aos meus filhos Eliana e Guilherme.

AGRADECIMENTOS

Aos professores do IME-USP Antonio Carlos Asperti, Odilon Otávio Luciano e Paulo Boulos que prestaram valiosa ajuda quando o assunto tratado era grupos de Lie.

Aos professores Antonio Paques (IMECC-Unicamp) e Artibano Micali (Institut de Mathématiques, Université de Montpellier II, France) que de uma forma ou outra contribuíram para o meu doutoramento.

Em especial, ao professor Roberto C. F. Costa, não somente pela proposição do tema deste trabalho e por ter me conduzido ao longo do árduo caminho que leva ao doutoramento, mas também por ter propiciado a minha vinda para o IME-USP onde encontrei ambiente para a realização do doutoramento.

A Antonia Soares pelo excelente trabalho de datilografia.

ABSTRACT

We show that the gametic algebra and the zygotic algebra of a $2m$ -ploid population with $n+1$ alleles have the following property:

- (*) The automorphism group of the algebra is isomorphic to the affine group of $\mathbb{R}^n$.

This fact leads to the problem of classification of all baric algebras having property (*).

Three types of baric algebras, namely α -algebras, β -algebras and γ -algebras, are defined by prescribing their automorphisms. These algebras verify property (*). We construct a class of α -algebras that generalise the above gametic algebra and we give a classification of all α -algebras of dimension $\binom{m+n}{m}$ ($1 \leq m \leq 5$, n arbitrary). We prove that an algebra is an α -algebra if and only if its duplicate is a β -algebra (a similar statement holds for γ -algebra). This gives a class of γ -algebras that generalise the above zygotic algebra and the classification of all β and γ -algebras of dimension $\left[\binom{m+n}{m}\right]^2$ and $\frac{1}{2}\binom{m+n}{m}(\binom{m+n}{m}+1)$, respectively ($1 \leq m \leq 5$, n arbitrary).

We obtain the derivation algebra of α , β and γ -algebras and prove that, for the dimensions noticed above, these algebras are characterized by their derivations.

Finally, we show that the automorphism group of the gametic and also of the zygotic algebra of a diploid population with an arbitrary number of linked loci contains a subgroup isomorphic to an external direct product of affine groups. We show also that the derivation algebra of these algebras is isomorphic to the direct product of the Lie algebras associated to these affine groups.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
1. Histórico	i
2. Descrição do conteúdo	iii
CAPÍTULO I - PRELIMINARES	1
1. A álgebra gamética para uma população $2m$ -plóide com $n+1$ alelos	1
2. A álgebra zigótica para uma população $2m$ -plóide com $n+1$ alelos	4
3. Álgebras ponderadas. Álgebras genéticas. Duplicação	6
4. Grupo de automorfismos. Álgebras de derivações	10
CAPÍTULO II - α -ÁLGEBRAS	15
1. A classe Ω	17
2. Idempotentes. Sequências de potências plenas	24
3. Automorfismos. α -álgebras	27
4. Classificação das α -álgebras: $m \leq 5$, n arbitrário	31
5. Outros exemplos de α -álgebras	43
APÊNDICE	51

CAPÍTULO III - β e γ -ÁLGEBRAS 57

1. A classe $\Omega^{\otimes}$ 57
2. Idempotentes. Sequências de potências plenas 59
3. Automorfismos. β -álgebras 63
4. Duplicada comutativa. γ -álgebras 68
5. Classificação das β e γ -álgebras: $1 \leq m \leq 5$, n arbitrário . . . 70

CAPÍTULO IV - DERIVAÇÕES DE α , β e γ -álgebras 73

1. Derivações 73
2. Caracterização das α , β e γ -álgebras: $m \leq 5$, n arbitrário . . 81

CAPÍTULO V - AUTOMORFISMOS E DERIVAÇÕES DAS ÁLGEBRAS

GAMÉTICA E ZIGÓTICA PARA LOCI LIGADOS 89

1. As álgebras gamética e zigótica para loci ligados 89
2. Automorfismos de $G(r_1, \dots, r_k)$ e de $Z(r_1, \dots, r_k)$ 94
3. Derivações 100

BIBLIOGRAFIA 109

INTRODUÇÃO

1. Histórico

Desde que o trabalho de Gregor Mendel foi reconsiderado no primeiro ano deste século, a teoria de probabilidades e a estatística tem desempenhado um papel importante no estudo da hereditariedade. Indícios de que métodos algébricos podiam ser usados para se estudar a hereditariedade apareceram em 1924 no trabalho de Bernstein [1]. O passo decisivo foi dado, em 1939, por Etherington [2], quando ele definiu tres tipos de álgebras não-associativas, a saber, **álgebras ponderadas**, **t-álgebras** e **t-álgebras especiais**, que aparecem a partir do simbolismo da genética. As t-álgebras e as t-álgebras especiais são, por definição, álgebras ponderadas. Etherington demonstrou que a classe das t-álgebras inclui a - aquela das t-álgebras especiais [4] e estudou as propriedades das t-álgebras [3,6]. O conceito de **álgebra genética**, que é intermediário entre t-álgebras especiais e t-álgebras, foi introduzido por Schafer [5], em 1949. Esta definição provou ser mais satisfatória que aquela de t-álgebra especial no sentido de que a classe das álgebras genéticas incluía a maioria das álgebras que descreviam os modelos genéticos estudados até então. No entanto, para uma dada álgebra, era difícil em geral mostrar que ela era uma álgebra genética. Desde os anos 60, os métodos algébricos têm sido largamente usados no estudo da hereditariedade. Principalmente após Gonshor [9] ter obtido, em 1971, uma definição de álgebra genética, essencialmente equivalente àquela dada por Schafer, que permite trabalhar com este objeto algébrico, mesmo quando a dimensão da álgebra é grande.

A genética de populações preocupa-se com o estudo da evolução de populações. Os principais objetivos desta teoria são: caracterizar os estados de equilíbrio das frequências de genótipos; encontrar os modos de convergência das frequências de genótipos para este equilíbrio. Para atingir estes objetivos, é conveniente encontrar fórmulas recursivas simplificadas para frequências de genótipos em gerações sucessivas. Assim, a maioria dos autores que usam métodos algébricos em genética de populações têm-se ocupado da modelização matemática dos muitos tipos de hereditariedade (veja, por exemplo, [11,14]. No entanto, apareceram também trabalhos importantes do ponto de vista puramente matemático (veja, por exemplo, [5, 9, 10]).

Para uma discussão mais abrangente dos métodos algébricos usados no estudo da hereditariedade reportamo-nos a Wörz-Busekros [25].

Em 1981, R. Costa iniciou um projeto que tem por objetivo "medir" as simetrias dos sistemas genéticos. Uma maneira de fazer isto é calcular o grupo de automorfismos da álgebra que descreve um determinado sistema genético. Uma outra maneira é calcular as derivações da álgebra já que o grupo de automorfismos é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é a álgebra de derivações. A "grandeza" do grupo de automorfismos ou da álgebra de derivações reflete então as simetrias dos sistemas genéticos. Os resultados sobre derivações conseguidos até agora estão contidos em [15, 16, 17, 18, 19, 26, 27, 28, 29].

Em julho de 1981, R. Costa propôs ao autor que calculasse o grupo de automorfismos da álgebra gamética $G(n+1, 2m)$ e da álgebra zigótica $Z(n+1, 2m)$ (veja as seções 1 e 2 do capítulo I). Estas álgebras ocupam uma posição central na teoria das álgebras genéticas pois elas descrevem a hereditariedade em um locus apenas. O resultado obtido foi que tanto $G(n+1, 2m)$ quanto $Z(n+1, 2m)$ possuem grupo de automorfismos isomorfo ao grupo afim do $\mathbb{R}^n$. A partir daí, o autor começou a estudar o problema inverso. As álgebras $G(n+1, 2m)$ e $Z(n+1, 2m)$ são álgebras genéticas que estão contidas na classe ampla das álgebras ponderadas. Pode-se perguntar então quais são as álgebras ponderadas (com dimensão igual a de $G(n+1, 2m)$ ou $Z(n+1, 2m)$) que possuem este grupo de automorfismos. A procura de uma resposta para esta pergunta motivou todos os resultados contidos neste trabalho.

2. Descrição do conteúdo

O capítulo I contém todos os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

Na seção 1 do capítulo II, construímos uma classe Ω de álgebras genéticas que generalizam a álgebra gamética $G(n+1, 2m)$. Em

seguida, nas seções 2 e 3, trabalhamos com uma subclasse Ω_0 de Ω . Mostramos que as álgebras em Ω_0 satisfazem uma condição de "não-degenerescência", no sentido de que a dimensão destas álgebras pode ser arbitrariamente grande mas o grupo de automorfismos é sempre do mesmo "tamanho". Isto motivou a definição de α -álgebra. A seção 4 contém uma classificação das α -álgebras que satisfazem uma certa condição sobre a dimensão.

Usando o processo de duplicação (veja a seção 3 do capítulo I), construímos, a partir da classe Ω , as classes $\Omega^{\otimes}$ e $\Omega^{\oplus}$ de álgebras genéticas. As álgebras em $\Omega^{\oplus}$ generalizam a álgebra zigótica $Z(n+1, 2m)$. Isto está feito nas seções 1 e 4 do capítulo III. Mostramos, nas seções 2, 3 e 4, que todas as propriedades obtidas no capítulo II são preservadas pelo processo de duplicação. Isto sugeriu a definição de β e γ -álgebras. O principal resultado deste capítulo III é que uma álgebra é uma α -álgebra se e somente se sua duplicada é uma β -álgebra (uma afirmação semelhante vale para γ -álgebra). Em particular, usando os resultados do capítulo II, obtivemos uma classificação para as β e γ -álgebras de dimensão especificada.

Esta classificação das α -álgebras e β -álgebras fornece uma resposta parcial, mas significativa, ao problema mencionado no final da seção anterior.

Em seguida, no capítulo IV, usando os resultados da teoria dos grupos de Lie que relacionam o grupo de automorfismos de

uma álgebra com sua álgebra de derivações e os resultados dos capítulos II e III, obtivemos resultados sobre as derivações das α , β e γ -álgebras. O principal fato obtido é que estas álgebras, desde que verifiquem uma certa condição sobre a dimensão, são caracterizadas por suas derivações. Os resultados obtidos na seção 1 generalizam os resultados obtidos por Costa [15, 16] no sentido de que eles se aplicam a uma classe mais ampla de álgebras genéticas.

Finalmente, no capítulo V, obtivemos resultados sobre os automorfismos e as derivações das álgebras gamética e zigótica que descrevem a herança dos genes em indivíduos diplóides que diferem em um número arbitrário de loci ligados.

oOo

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1. A Álgebra Gamética para uma População 2m-plóide com n+1 Alelos

Consideremos uma população de indivíduos diplóides que diferem em um locus com alelos $D_0, D_1, \dots, D_n$ e que se reproduzem por cruzamento aleatório. O que ocorre a nível gamético pode ser descrito pelo seguinte esquema:

Isto pode ser descrito também pela expressão algébrica

$$(1.1) \quad D_i D_j = \frac{1}{2} D_i + \frac{1}{2} D_j,$$

que deve ser lida da seguinte maneira: o zigoto formado pela união dos gametas D_i e D_j produz somente os gametas D_i e D_j com igual pro

babilidade. O espaço vetorial real $G(n+1,2)$ de base $D_0, D_1, \dots, D_n$ torna-se uma álgebra quando munido da multiplicação (1.1). A mudança da **base natural** $D_0, D_1, \dots, D_n$ para a base $D_0, D_0 - D_1, \dots, D_0 - D_n$ fornece a tábua de multiplicação:

$$D_0 D_0 = D_0, \quad D_0 (D_0 - D_i) = \frac{1}{2} (D_0 - D_i), \quad (D_0 - D_i) (D_0 - D_j) = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Quando se trata de indivíduos $2m$ -plóides com alelos D_0 e D_1 , os tipos gaméticos da população são dados por $D_0^{m-i} D_1^i$ ($0 \leq i \leq m$). Aqui a população gamética é descrita pela álgebra $G(2, 2m)$ cuja tábua de multiplicação em relação à base $D_0^m, D_0^{m-1} D_1, \dots, D_1^m$ é:

$$(D_0^{m-i} D_1^i) (D_0^{m-j} D_1^j) = \binom{2m}{m}^{-1} \sum_{k=0}^m \binom{2m-(i+j)}{m-k} \binom{i+j}{k} D_0^{m-k} D_1^k$$

Para $0 \leq s \leq m$, o elemento

$$\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} D_0^{m-k} D_1^k \quad (= D_0^{m-s} \left(\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} D_0^{s-k} D_1^k \right))$$

pode ser representado formalmente pela expressão $D_0^{m-s} (D_0 - D_1)^s$, isto é, $D_0^{m-s} (D_0 - D_1)^s$ não é um elemento de $G(2, 2m)$ mas é uma maneira conveniente de expressar o elemento $D_0^{m-s} \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} D_0^{s-k} D_1^k$ que se obtém fazendo a expansão binomial usual. Como foi mostrado por Gonshor [7], a tábua de multiplicação de $G(2, 2m)$ em relação à base $D_0^{m-i} (D_0 - D_1)^i$ ($0 \leq i \leq m$) é dada por:

$$[D_0^{m-i} (D_0 - D_1)^i] [D_0^{m-j} (D_0 - D_1)^j] = \begin{cases} \binom{2m}{i+j}^{-1} \binom{m}{i+j} D_0^{m-(i+j)} (D_0 - D_1)^{i+j} & \text{se } i+j \leq m \\ 0 & \text{se } i+j > m \end{cases}$$

Note a simplicidade desta tábua de multiplicação em relação à anterior.

Consideremos agora os dois casos simultaneamente, isto é, uma população de indivíduos poliplóides que diferem em um locus com alelos $D_0, \dots, D_n$. A álgebra gamética, isto é, a álgebra que descreve a população de gametas, é denotada por $G(n+1, 2m)$. A base natural desta álgebra, isto é, o conjunto dos tipos gaméticos, é formada pelos monômios de grau m nas variáveis $D_0, D_1, \dots, D_n$. A dimensão de $G(n+1, 2m)$ é portanto $\binom{m+n}{m}$. A tábua de multiplicação é dada por:

$$(X_1 X_2 \dots X_m) (X_{m+1} X_{m+2} \dots X_{2m}) = \binom{2m}{m}^{-1} \sum X_{j_1} \dots X_{j_r},$$

onde cada X_i é um elemento do conjunto $\{D_0, \dots, D_n\}$ e a soma é feita sobre todas as m -uplas $(j_1, \dots, j_m)$ com coordenadas no conjunto $\{1, 2, \dots, 2m\}$. A forma linear $\omega_1: G(n+1, 2m) \rightarrow \mathbb{R}$, que assume valor 1 em cada elemento da base natural, é um homomorfismo de álgebras. Os elementos de $G(n+1, 2m)$ que admitem interpretação genética são os da forma

$$X = \sum_{i_0 + \dots + i_n = m} a_{(i_0, \dots, i_n)} D_0^{i_0} D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n}$$

tais que $a_{(i_0, \dots, i_n)} \geq 0$ e $\sum_{i_0 + \dots + i_n = m} a_{(i_0, \dots, i_n)} = 1$ (isto é,

$\omega_1(X) = 1$) pois, neste caso, o número $a_{(i_0, \dots, i_n)}$ indica a frequência do gameta $D_0^{i_0} D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n}$ na população. Os elementos de uma nova

base podem ser representados formalmente pelos monômios

$D_0^{m-p} (D_0 - D_1)^{i_1} \dots (D_0 - D_n)^{i_n}$ ($0 \leq p \leq m$, $i_1 + \dots + i_n = p$) e a tábua de multiplicação é dada por:

$$(1.2) \quad [D_0^{m-p} (D_0 - D_1)^{i_1} \dots (D_0 - D_n)^{i_n}] [D_0^{m-q} (D_0 - D_1)^{j_1} \dots (D_0 - D_n)^{j_n}] =$$

$$= \begin{cases} \binom{2m}{p+q}^{-1} \binom{m}{p+q} D_0^{m-(p+q)} (D_0 - D_1)^{i_1+j_1} \dots (D_0 - D_n)^{i_n+j_n} & \text{se } p+q \leq m \\ 0 & \text{se } p+q > m \end{cases}$$

(veja Gonshor [8]).

2. A Álgebra Zigótica para uma População $2m$ -plóide com $n+1$ Alelos

O que ocorre a nível zigótico em uma população de indivíduos diplóides com alelos $D_0, \dots, D_n$ é descrito pelo seguinte diagrama:

Isto deve ser interpretado da seguinte maneira: o zigoto $D_i D_j$ ($D_k D_\ell$) segrega os gametas D_i e D_j (D_k e D_ℓ) com probabilidade $\frac{1}{2}$; cada um dos gametas D_i , D_j une-se a um dos gametas D_k , D_ℓ formando os zigotos $D_i D_k$, $D_i D_\ell$, $D_j D_k$, $D_j D_\ell$ com probabilidade $\frac{1}{4}$. A expressão algébrica

$$(1.3) \quad (D_i D_j) (D_k D_\ell) = \frac{1}{4} (D_i D_k + D_i D_\ell + D_j D_k + D_j D_\ell)$$

exprime este processo. Tomando o conjunto $\{D_i D_j\}_{0 \leq i \leq j \leq n}$ como base e (1.3) como tábua de multiplicação, obtemos a álgebra $Z(n+1, 2)$ que descreve a população zigótica. Note que a tábua de multiplicação (1.3) é obtida a partir de (1.1).

Se, além disso, os indivíduos são $2m$ -plóides, a população de zigotos é descrita pela álgebra zigótica $Z(n+1, 2m)$ cuja base natural é constituída pelos elementos da forma $D_0^{i_0} \dots D_n^{i_n} \otimes D_0^{j_0} \dots D_n^{j_n}$ e cuja tábua de multiplicação é dada por:

$$\begin{aligned} [D_0^{i_0} \dots D_n^{i_n} \otimes D_0^{j_0} \dots D_n^{j_n}] (D_0^{k_0} \dots D_n^{k_n} \otimes D_0^{l_0} \dots D_n^{l_n}) = \\ = (D_0^{i_0} \dots D_n^{i_n}) (D_0^{j_0} \dots D_n^{j_n}) \otimes (D_0^{k_0} \dots D_n^{k_n}) (D_0^{l_0} \dots D_n^{l_n}). \end{aligned}$$

Usando (1.2) é imediato verificar que a tábua de multiplicação em relação à base formada pelos elementos da forma

$$D_0^{m-i} (D_0 - D_1)^{i_1} \dots (D_0 - D_n)^{i_n} \otimes D_0^{m-j} (D_0 - D_1)^{j_1} \dots (D_0 - D_n)^{j_n}$$

é:

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad & [D_0^{m-i} (D_0 - D_1)^{i_1} \dots (D_0 - D_n)^{i_n} \otimes D_0^{m-j} (D_0 - D_1)^{j_1} \dots (D_0 - D_n)^{j_n}] \cdot \\
 & [D_0^{m-k} (D_0 - D_1)^{k_1} \dots (D_0 - D_n)^{k_n} \otimes D_0^{m-l} (D_0 - D_1)^{l_1} \dots (D_0 - D_n)^{l_n}] = \\
 & = \binom{2m}{i+j}^{-1} \binom{2m}{k+l}^{-1} \binom{m}{i+j} \binom{m}{k+l} D_0^{m-(i+j)} (D_0 - D_1)^{i_1+j_1} \dots (D_0 - D_n)^{i_n+j_n} \otimes D_0^{m-(k+l)} (D_0 - D_1)^{k_1+l_1} \dots (D_0 - D_n)^{k_n+l_n}
 \end{aligned}$$

se $i+j \leq m$ e $k+l \leq m$ e é 0 no caso contrário.

Este processo usado para obter-se a álgebra zigótica a partir da álgebra gamética, conhecido como duplicação (comutativa, no caso presente), será descrito na próxima seção.

3. Álgebras Ponderadas. Álgebras Genéticas. Duplicação

Como vimos na seção 1, a álgebra gamética $G(n+1, 2m)$ está munida de um homomorfismo não-nulo de álgebras $\omega_1: G(n+1, 2m) \rightarrow \mathbb{R}$. Assim como $G(n+1, 2m)$, a maioria das álgebras que descrevem modelos genéticos estão contidas na classe das álgebras ponderadas, definida a seguir.

DEFINIÇÃO 1.1 Uma álgebra ponderada é um par (A, ρ) consistindo de uma álgebra não-associativa real A de dimensão finita e um homomorfismo não-nulo $\rho: A \rightarrow \mathbb{R}$. $\rho(x)$ é denominado o peso de x e ρ a função peso de A .

Como mostram as tábuas de multiplicação (1.2) e (1.4), certas mudanças de base fornecem uma tábua de multiplicação mais simples. Para a maioria das álgebras que descrevem modelos genéticos, tem-se encontrado bases em relação às quais várias das constantes de estrutura são nulas (veja [25], cap. 7,8); mais precisamente, bases satisfazendo a seguinte

DEFINIÇÃO 1.2 Uma **álgebra genética** é uma álgebra não-associativa real A para a qual existe uma base $c_0, c_1, \dots, c_n$ satisfazendo as seguintes condições:

Se

$$c_i c_j = \sum_{k=0}^n \lambda_{ijk} c_k \quad (0 \leq i, j \leq n)$$

então

$$(i) \quad \lambda_{000} = 1,$$

$$(ii) \quad \lambda_{ojk} = \lambda_{jok} = 0 \quad \text{para } k < j \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$(iii) \quad \lambda_{ijk} = 0 \quad \text{para } k \leq \max\{i, j\} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Uma tal base é denominada **base canônica** de A .

Segue de (1.2) e (1.4) que as álgebras $G(n+1, 2m)$ e $Z(n+1, 2m)$ são genéticas com bases canônicas $D_0^{m-p} (D_0 - D_1)^{i_1} \dots (D_0 - D_n)^{i_n}$ e $D_0^{m-p} (D_0 - D_1)^{i_1} \dots (D_0 - D_n)^{i_n} \otimes D_0^{m-q} (D_0 - D_1)^{j_1} \dots (D_0 - D_n)^{j_n}$ ($0 \leq p \leq m$, $i_1 + \dots + i_n = p$, $j_1 + \dots + j_n = q$), respectivamente.

Toda álgebra genética A com base $c_0, c_1, \dots, c_n$ é ponderada pela única função peso $\rho: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(c_0)=1$, $\rho(c_i)=0$ ($1 \leq i \leq n$). De fato, escrevendo $x = \rho(x)c_0 + u$, $y = \rho(y)c_0 + v$ e $c_0^2 = c_0 + w$ ($u, v, w \in \text{Ker } \rho$), obtemos $xy = \rho(x)\rho(y)c_0 + \rho(x)\rho(y)w + \rho(x)c_0v + \rho(y)uc_0 + uv$, donde concluímos que $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$; logo, ρ é um homomorfismo não-nulo de álgebras. Por outro lado, se $\bar{\rho}: A \rightarrow \mathbb{R}$ é um homomorfismo não-nulo de álgebras, então de $c_n^2 = 0$ obtemos $\bar{\rho}(c_n) = 0$ e por indução $\bar{\rho}(c_{n-1}) = \dots = \bar{\rho}(c_1) = 0$; agora, é claro que $\bar{\rho}(c_0) = 1$. Isto mostra que $\bar{\rho} = \rho$.

Seja A uma álgebra genética com base canônica $c_0, c_1, \dots, c_n$. Para todo $a \in A$ com $\rho(a) = 1$, os elementos $a, c_1, \dots, c_n$ formam uma base canônica para A , como pode ser facilmente verificado. Assim, a base canônica que aparece na definição 1.2 não é unicamente determinada. No entanto, as constantes λ_{0ii} e λ_{ioi} ($0 \leq i \leq n$) são invariantes da álgebra, como mostraremos em seguida. Seja x um elemento de peso 1 em A . A matriz do operador multiplicação à esquerda $L_x: A \rightarrow A$ definido por $L_x(y) = xy$ em relação à base $c_0, c_1, \dots, c_n$ é uma matriz triangular inferior onde $1, \lambda_{011}, \dots, \lambda_{onn}$ são os elementos da diagonal principal. Logo, $1, \lambda_{011}, \dots, \lambda_{onn}$ são os valores próprios do operador L_x . De modo análogo, podemos ver que $1, \lambda_{101}, \dots, \lambda_{non}$ são os valores próprios do operador multiplicação à direita $R_x: A \rightarrow A$, dado por $R_x(y) = yx$, para todo $x \in A$, com $\rho(x) = 1$.

DEFINIÇÃO 1.3 Seja A uma álgebra genética. Os invariantes $1, \lambda_{011}, \dots, \lambda_{onn}$ e $1, \lambda_{101}, \dots, \lambda_{non}$ são denominados, respectivamente, **t-raízes à esquerda** e **t-raízes à direita** de A .

Seja A uma álgebra não-associativa sobre $\mathbb{R}$. Construímos a álgebra $A \otimes A$ definindo sobre o produto tensorial de espaços vectoriais $A \otimes A$ a multiplicação:

$$(x \otimes y)(u \otimes v) = xy \otimes uv.$$

A álgebra $A \otimes A$ é denominada a **duplicada** de A . Agora, suponhamos que A é comutativa e denotemos por J o ideal bilateral de $A \otimes A$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x$ ($x, y \in A$). A álgebra quociente

$$A \otimes A = A \otimes A / J$$

é denominada a **duplicada comutativa** de A . Segue da seção 2 que a álgebra zigótica $Z(n+1, 2m)$ é a duplicada comutativa da álgebra gamética $G(n+1, 2m)$. Se (A, ρ) é uma álgebra ponderada, então a forma linear $\rho_d: A \otimes A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\rho_d(\sum a_i \otimes b_i) = \sum \rho(a_i) \rho(b_i)$, é um homomorfismo não-nulo de álgebras; logo $A \otimes A$ é também uma álgebra ponderada. Se A é uma álgebra genética com base canônica $c_0, c_1, \dots, c_n$ então $A \otimes A$ é uma álgebra genética com base canônica

$c_0 \otimes c_0, c_0 \otimes c_1, \dots, c_{n-1} \otimes c_n, c_n \otimes c_n$; além disso, as t-raízes à esquerda e à direita de A , junto com um número apropriado de zeros, são as t-raízes à esquerda e à direita de $A \otimes A$. Resultados inteiramente análogos valem para a duplicada comutativa de uma álgebra comutativa A . O processo de duplicação, bem como suas propriedades, está descrito com bastante detalhe em [25], cap. 6.C.

4. Grupo de Automorfismos. Álgebra de Derivações

Nesta seção, resumiremos os conceitos e resultados da teoria dos grupos de Lie, necessários ao desenvolvimento do capítulo IV. Para uma discussão mais detalhada sobre o assunto, reportamo-nos a Warner [23].

DEFINIÇÃO 1.4 Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo tal que a aplicação $(g, h) \in G \times G \rightarrow gh^{-1} \in G$ é C^∞ .

Trabalharemos com os seguintes grupos de Lie:

1. O grupo linear geral $GL(k, \mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes reais $k \times k$ inversíveis. Se identificamos o $\mathbb{R}^{k^2}$ com o conjunto $gl(k, \mathbb{R})$ de todas as matrizes reais $k \times k$, então a função determinante torna-se contínua (lembramos que o determinante de uma matriz é um polinômio tendo como indeterminadas os elementos da matriz). Assim, $GL(k, \mathbb{R})$ herda uma estrutura de variedade como o subconjunto aberto de $gl(k, \mathbb{R})$ onde a função determinante não se anula. Se a e b estão em $GL(k, \mathbb{R})$ então as componentes da matriz ab^{-1} são funções racionais (com denominadores que não se anulam) dos seus elementos; logo, a aplicação $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ é C^∞ .

2. O grupo afim do $\mathbb{R}^n$, denotado por $A(n)$, é o conjunto de todas as matrizes $(n+1) \times (n+1)$ (a_{ij}) tais que $a_{\infty\infty} = 1, a_{\infty j} = 0$ ($1 \leq j \leq n$) e a submatriz $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ é inversível. A estrutura de variedade de $A(n)$ é a da

variedade produto $Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ ([23], p.7). Definimos uma estrutura de grupo sobre $A(n)$ pondo $(a, v)(b, u) = (ab, au + v)$. $A(n)$ torna-se então um grupo de Lie pois a aplicação $((a, v), (b, u)) \rightarrow (a, v)(b, u)^{-1} = (ab^{-1}, v - u)$, sendo a composição das aplicações $C^\infty ((a, v), (b, u)) \rightarrow (a, b) \rightarrow ab^{-1}$ e $((a, v), (b, u)) \rightarrow (v, u) \rightarrow v - u$, é também C^∞ .

3. O grupo de automorfismos de uma álgebra não-associativa real A será denotado por $Aut(A)$. Assuma que a dimensão de A é k , denote por $End(A)$ o conjunto dos operadores lineares de A e por $GL(A)$ o subconjunto de $End(A)$ formado por todos os operadores inversíveis. Uma base $E = \{e_1, \dots, e_k\}$ de A determina um difeomorfismo $\sigma \in End(A) \rightarrow (\sigma_{ij})_E \in gl(k, \mathbb{R})$ que leva $GL(A)$ sobre $GL(k, \mathbb{R})$ e $Aut(A)$ sobre sua imagem B . Afirmamos que B é um subconjunto fechado de $GL(k, \mathbb{R})$. De fato, se $a \in A$ e $a = (a_1, \dots, a_k)_E$, identificamos a com a matriz $k \times 1$ cujos elementos são $a_1, \dots, a_k$. Para quaisquer $a, b \in A$, a aplicação

$$(\sigma_{ij}) \in GL(k, \mathbb{R}) \rightarrow (\sigma_{ij})(ab) - ((\sigma_{ij})a)((\sigma_{ij})b) \in A$$

é contínua (cada função coordenada é um polinômio nas indeterminadas σ_{ij}). Então, como

$$\Gamma(a, b) \equiv \{(\sigma_{ij}) \in GL(k, \mathbb{R}) : (\sigma_{ij})(ab) = (\sigma_{ij})a((\sigma_{ij})b)\}$$

é a imagem inversa de $\{0\}$ sob esta aplicação, $\Gamma(a, b)$ é um subconjunto fechado de $GL(k, \mathbb{R})$. Mas B é a interseção de todos os $\Gamma(a, b)$

$(a, b \in A)$. A afirmação está demonstrada. Portanto, $\text{Aut}(A)$ é fechado em $\text{GL}(A)$. Por outro lado, $\text{GL}(A)$ herda uma estrutura de variedade como um subconjunto aberto de $\text{End}(A)$ e é um grupo de Lie sob a composição de operadores. Segue então do

TEOREMA 1.5 ([23], Teorema 3.42, p. 110). Seja G um grupo de Lie e seja H um subgrupo abstrato fechado de G . Então, H tem uma única estrutura de variedade que o torna um subgrupo de Lie de G .

que $\text{Aut}(A)$ é um subgrupo de Lie de $\text{GL}(A)$.

DEFINIÇÃO 1.6 Uma **álgebra de Lie** sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real L munido de uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$, denominada colchete de Lie, tal que para todo $x, y, z \in L$,

$$(i) \quad [x, y] = -[y, x] \quad (\text{anticomutatividade}),$$

$$(ii) \quad [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad (\text{identidade de Jacobi}).$$

As seguintes álgebras de Lie aparecerão no capítulo IV:

1. O espaço vetorial real $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ munido do colchete de Lie $[c, c'] = cc' - c'c$.

2. O espaço vetorial real $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ munido do colchete de Lie

$$[h, h'] = (c\delta' - c'\delta, cc' - c'c),$$

onde $h = (\delta, c)$ e $h' = (\delta', c')$.

3. A álgebra de derivações de uma álgebra não associativa A será indicada por $\text{Der}(A)$. O colchete de Lie em $\text{Der}(A)$ é dado por

$$[d, d'] = dd' - d'd.$$

A todo grupo de Lie G podemos associar uma álgebra de Lie que indicaremos por $L(G)$ ([23], p. 86). As álgebras de Lie associadas aos grupos de Lie $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$, $A(n)$ e $\text{Aut}(A)$ são, respectivamente, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ([23], p. 86), $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ([24], p. 192) e $\text{Der}(A)$ ([23], teorema 3.54, p. 117). G e $L(G)$ estão ligados pela aplicação exponencial $\exp: L(G) \rightarrow G$ ([23], p. 102). A aplicação $\exp: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ é dada pela exponenciação de matrizes ([23], p. 107):

$$\exp(c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c^k.$$

DEFINIÇÃO 1.6 Uma aplicação $\phi: G \rightarrow H$ é um **homomorfismo** (de grupos de Lie) se ϕ é um homomorfismo de grupos abstratos e ϕ é C^∞ . Se, além disso, ϕ é um difeomorfismo, dizemos que ϕ é um **automorfismo**.

Relacionando os grupos de Lie com suas álgebras de Lie temos os seguintes teoremas:

TEOREMA 1.7 ([23], teorema 3.14, p. 90). Sejam G e H grupos de Lie e $\phi: G \rightarrow H$ um homomorfismo. Então, $d\phi: L(G) \rightarrow L(H)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

TEOREMA 1.8 ([23], teorema 3.32, p. 104). Seja $\phi: H \rightarrow G$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ L(H) & \xrightarrow{d\phi} & L(G) \end{array}$$

Finalmente, temos os seguintes resultados sobre derivações e automorfismos de uma álgebra genética.

TEOREMA 1.9 ([15], teorema 1, p. 71). Seja A uma álgebra genética e denote por ρ a única função peso de A . Para toda derivação d de A temos $\rho d = 0$.

PROPOSIÇÃO 1.10 Sejam A e ρ como no teorema anterior. Para todo automorfismo ψ de A temos $\rho\psi = \rho$.

Prova. Imediata do fato de que $\rho\psi$ é uma função peso para A .

CAPÍTULO II

α - ÁLGEBRAS

Escreveremos i^* para indicar o multi-índice $(i_1, \dots, i_n)$, onde cada i_k é um inteiro não-negativo. A ordem $|i^*|$ de i^* é definida por $|i^*| = i_1 + \dots + i_n$. Dados os números reais $a_{ij}, \dots, a_{nj}$, denotaremos o produto $a_{1j}^{i_1} \dots a_{nj}^{i_n}$ por $A_j^{i^*}$. O monômio $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ será indicado por x^{i^*} .

Neste capítulo, V será um espaço vetorial real fixo de dimensão $\binom{m+n}{m}$. Fixemos uma base X de V e denotemos seus elementos formalmente pelos monômios $x_0^{m-p} x^{i^*}$ de grau m nas variáveis $x_0, x_1, \dots, x_n$. Ordenemos lexicograficamente esta base; assim, x_0^m é o primeiro, $x_0^{m-1} x_1$ o segundo e assim por diante. Se V_p é o subespaço de V gerado por todos os monômios de grau $m-p$ na variável x_0 , então V pode ser escrito como $V = V_0 \oplus \dots \oplus V_m$. Fixemos também a forma linear ω sobre V dada por $\omega(x_0^m) = 1$, $\omega(x_0^{m-p} x^{i^*}) = 0$ ($1 \leq p \leq m$).

Dada a matriz $a = (a_{ij})$ ($0 \leq i, j \leq n$), definamos o operador linear a^* de V pondo $a^*(x_0^{m-p} x_{i_1}^{i_1^*} \dots x_{i_p}^{i_p^*}) = v_p + \dots + v_m$ ($v_i \in V_i$), onde

$$v_{p+k} = \binom{m-p}{k} \sum A_0^{i_0^*} A_{i_1}^{i_1^*} \dots A_{i_p}^{i_p^*} x_0^{m-(p+k)} x^{i_0^* + \dots + i_p^*}$$

(a soma é feita sobre todos os multi-índices $i_0^*, i_1^*, \dots, i_p^*$ tais que $|i_0^*| = k$ e $|i_1^*| = \dots = |i_p^*| = 1$.) Segue que $a^*(V_p) \subset V_p \oplus \dots \oplus V_m$ pois V_p é gerado por todos os monômios $x_0^{m-p} x_{i_1}^{i_1^*} \dots x_{i_p}^{i_p^*}$. Denote por

$A^* = A^*(m,n)$ o conjunto de todos os operadores lineares a^* onde a é um elemento de $A(n)$, o grupo afim do $\mathbb{R}^n$, isto é, $a_{00} = 1$, $a_{0j} = 0$ ($1 \leq j \leq n$) e a submatriz $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ é inversível.

PROPOSIÇÃO 2.1 A aplicação $a \in A(n) \rightarrow a^* \in A^*$ é um isomorfismo de grupos.

Prova. Dados a e b em $A(n)$, vamos mostrar que $(ab)^* = a^*b^*$. O resto da prova segue imediatamente deste fato e será omitido. Para concluir que $(ab)^* = a^*b^*$, é suficiente mostrar que estes operadores lineares coincidem quando restritos a V_j ($0 \leq j \leq m$). Para um tal j fixo, tomemos um vetor $x_0^{m-j} x_{i_1} \dots x_{i_j}$ da base de V_j . Temos que $b^*(x_0^{m-j} x_{i_1} \dots x_{i_j}) = v_j + \dots + v_m$ ($v_k \in V_k$) e que $a^*(v_k) = u_k^{(k)} + \dots + u_m^{(k)}$ ($u_i^{(k)} \in V_i$); logo, a componente de $a^*b^*(x_0^{m-j} x_{i_1} \dots x_{i_j})$ no subespaço V_{j+l} é

$$w_{j+l} = u_{j+l}^{(j)} + \dots + u_{j+l}^{(m)}$$

$$= m^{-l} \binom{m-j}{l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left[A_0^{s_0^*} A_1^{p_1 s_1^*} \dots A_n^{p_n s_n^*} B_0^{i_0^*} B_{i_1}^{i_1^*} \dots B_{i_j}^{i_j^*} x_0^{m-(j+l)} x_{i_1} \dots x_{i_j} \right]^{s_0^* + q^*},$$

onde $q^* = p_1 s_1^* + \dots + p_n s_n^*$ e a soma é feita sobre todos os multi-índices s_0^* , p^* e s_t^* ($1 \leq t \leq n$) tais que $|s_0^*| = l-k$, $|p^*| = j+k$, $|s_t^*| = 1$.

Agora, façamos $c=ab$. Se $u_1^*, \dots, u_j^*$ são todos de ordem 1, então

$$c_{i_1}^{u_1^*} \dots c_{i_j}^{u_j^*} = \left[A_1^{r_1 s_1^*} \dots A_n^{r_n s_n^*} B_{i_1}^{i_1^*} \dots B_{i_j}^{i_j^*} \right],$$

onde $r^* = i_1^* + \dots + i_j^*$ e a soma é feita sobre todos os multi-índices s_t^*, i_t^* ($1 \leq t \leq n$) tais que $|s_t^*| = |i_t^*| = 1$ e $r_1 s_1^* + \dots + r_n s_n^* = u_1^* + \dots + u_j^*$. Também, pode-se obter por indução sobre ℓ que

$$C_O^{u^*} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left[A_O^{s_O^*} A_1^{(i_O)_1 s_1^*} \dots A_n^{(i_O)_n s_n^*} B_O^{i_O^*} \right],$$

para todo u_O^* de ordem ℓ , onde a soma é feita sobre todos os multi-índices s_O^*, i_O^*, s_t^* ($1 \leq t \leq n$) tais que $|s_O^*| = \ell - k$, $|i_O^*| = k$, $|s_t^*| = 1$ e $s_O^* + (i_O)_1 s_1^* + \dots + (i_O)_n s_n^* = u_O^*$. A partir destas duas últimas identidades, podemos concluir que $w_{j+\ell}$ é também a componente de $(ab)^*(X_O^{m-j} X_{i_1} \dots X_{i_j})$ no subespaço $V_{j+\ell}$. Δ

Chamaremos os elementos de A^* de α -operadores de V .

Na parte restante deste capítulo, o termo "álgebra ponderada" significará uma álgebra sobre V para a qual ω é uma função peso, exceto no caso em que outra função peso é dada.

1. A Classe Ω

As constantes de estrutura de $G(n+1, 2m)$, relativas à base canônica $D_O^{m-p} (D_O - D_1)^{i_1} \dots (D_O - D_n)^{i_n}$ ($0 \leq p \leq m$, $i_1 + \dots + i_n = p$), são completamente determinadas pelas t -raízes à esquerda da álgebra (veja a tabela de multiplicação (1.2)). Este fato sugere a definição da classe $\Omega = \Omega(m, n)$ de álgebras genéticas. Esta classe consiste de todas as álgebras sobre V tendo a seguinte tabela de multiplicação:

$$(2.1) \quad (x_o^{m-p} x^{u*}) (x_o^{m-q} x^{v*}) = \begin{cases} \alpha_{p,p+q} x_o^{m-(p+q)} x^{u*+v*} & \text{se } p+q \leq m \\ 0 & \text{se } p+q > m \end{cases}$$

Aqui as t -raízes à esquerda $t_1, \dots, t_m$ são escolhidas arbitrariamente e as constantes de estrutura restantes são então definidas por:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \alpha_{oo} &= 1, \quad \alpha_{o\ell} = t_\ell \quad (1 \leq \ell \leq m), \\ \alpha_{p\ell} &= \binom{m}{p}^{-1} \{ t_{\ell-p} \binom{m-(\ell-p)}{p} - \sum_{r=0}^{p-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell-p)}{p-r} \alpha_{r\ell} \} \quad (1 \leq p \leq \ell) \end{aligned}$$

A característica proeminente de Ω é que seus membros generalizam a álgebra gamética $G(n+1, 2m)$, que é o membro de Ω determinado pelas t -raízes $t_\ell = \binom{2m}{\ell}^{-1} \binom{m}{\ell} \quad (1 \leq \ell \leq m)$.

Consideremos agora o hiperplano afim

$H = \{ (y_o, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : y_o = 1 \}$ e estabeleçamos a correspondência entre pontos de H e álgebras em Ω como segue: a cada ponto

$P = (t_o, t_1, \dots, t_m)$ de H associamos a álgebra $A(P)$ em Ω cujas t -raízes à esquerda são $t_1, \dots, t_m$. Como álgebras isomorfas têm as mesmas t -raízes à esquerda, a pontos distintos de H correspondem álgebras não-isomorfas. Logo, a correspondência

$$P \in H \longrightarrow A(P) \in \Omega$$

é biunívoca, isto é, $P \neq P'$ implica $A(P) \neq A(P')$. Como veremos nas seções subsequentes deste capítulo, os membros de Ω , que satisfazem

uma condição relevante de "não-degenerescência", correspondem a pontos no subconjunto H_0 de H formado pelos pontos $P = (t_0, \dots, t_m)$ cujas coordenadas verificam as condições $f(k) \neq 0$ ($2 \leq k \leq m$), onde

$$f(k) = \sum_{s=1}^{k-1} (-1)^s \binom{k}{s} (t_s - t_k).$$

Note que $H_0 = H$ no caso $m=1$. Denotemos por $\Omega_0 = \Omega_0(m, n)$ a imagem de H_0 .

A parte restante deste capítulo é independente de qualquer aspecto geométrico, mas gostaríamos de observar que a classe Ω é um hiperplano afim do espaço vetorial gerado por $A_0, A_1, \dots, A_m$. Aqui, A_i é a álgebra que corresponde ao ponto de H tendo 1 nas primeiras $i+1$ coordenadas e 0 nas outras. De fato, vamos mostrar inicialmente que

$$A(P) = (t_0 - t_1)A_0 + (t_1 - t_2)A_1 + \dots + (t_{m-1} - t_m)A_{m-1} + t_m A_m,$$

para todo $P \in H$. Antes de prosseguirmos com a prova, observamos que uma combinação linear $\alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum \alpha_i = 1$) é denominada uma **combinação convexa** das álgebras $A_0, A_1, \dots, A_m$. É suficiente mostrar que

$$(2.3) \quad \alpha_{p\ell} = (t_0 - t_1)\alpha_{p\ell}^{(0)} + (t_1 - t_2)\alpha_{p\ell}^{(1)} + \dots + (t_{m-1} - t_m)\alpha_{p\ell}^{(m-1)} + t_m \alpha_{p\ell}^{(m)},$$

para todo ℓ e p ($0 \leq \ell \leq m$, $0 \leq p \leq \ell$), onde os $\alpha_{p\ell}^{(k)}$ são as constantes de estrutura da álgebra A_k . Como $\alpha_{0\ell}^{(k)} = 1$ ($0 \leq \ell \leq k$) e $\alpha_{0\ell}^{(k)} = 0$ ($k < \ell \leq m$),

a identidade (2.3) é verdadeira para $p=0$. Assuma que ela vale para $p < q$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha_{q\ell} &= \binom{m}{q}^{-1} \binom{m-(\ell-q)}{q} (t_{\ell-q} - t_\ell) - \sum_{k=0}^{\ell-1} (t_k - t_{k+1}) \sum_{r=1}^{q-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell-q)}{q-r} \alpha_{r\ell}^{(k)} \\ &= \binom{m}{q}^{-1} \binom{m-(\ell-q)}{q} \{ t_{\ell-p} - t_\ell - \sum_{k=0}^{\ell-1} (t_k - t_{k+1}) (\alpha_{\ell-q,0}^{(k)} - \alpha_{\ell,0}^{(k)}) \} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\ell-1} (t_k - t_{k+1}) \alpha_{q\ell}^{(k)}, \end{aligned}$$

já que $\alpha_{r\ell}^{(k)} = 0$ ($\ell \leq k$, $1 \leq r \leq \ell$). Disto e do fato de que

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} (t_k - t_{k+1}) (\alpha_{\ell-q,0}^{(k)} - \alpha_{\ell,0}^{(k)}) = \sum_{k=\ell-q}^{\ell-1} (t_k - t_{k+1}) = t_{\ell-q} - t_\ell,$$

segue que a identidade (2.3) vale também para $p=q$. Portanto, a identidade (2.3) vale para $p = 0, 1, \dots, m$ e a afirmação está provada.

Por outro lado, a combinação convexa $A = \beta_0 A_0 + \dots + \beta_m A_m$ nada mais é que a álgebra $A(Q)$, onde Q é o ponto de H com a i -ésima coordenada igual a $\beta_i + \beta_{i+1} + \dots + \beta_m$. Além disso, se $\beta_0 A_0 + \dots + \beta_m A_m = 0$ então,

em particular $\sum_{i=0}^m \beta_i \alpha_{0\ell}^{(i)} = 0$ ($0 \leq \ell \leq m$). Se $\ell=m$, esta última identidade fica reduzida a $\beta_m = 0$. Assuma que já provamos que $\beta_{k+1} = \dots = \beta_m = 0$.

Segue então que $\beta_k = \sum_{i=0}^m \beta_i \alpha_{ok}^{(i)} = 0$. Isto mostra que $\beta_i = 0$ ($0 \leq i \leq m$)

e logo as álgebras $A_0, A_1, \dots, A_m$ são linearmente independentes.

A forma precisa da relação de recorrência (2.2) aparece como uma consequência da exigência de que os produtos são preserva-

dos pelo grupo A^* . No restante desta seção, vamos investigar este aspecto da classe Ω .

Temos a seguinte identidade que será demonstrada no apêndice deste capítulo:

$$(2.4) \quad \alpha_{p\ell} \binom{m-\ell}{k} = \sum_{r=0}^k \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{k-r} \alpha_{p+r, \ell+k} \quad (\ell=p+q, 0 \leq \ell \leq m, 0 \leq k \leq m-\ell).$$

A identidade (2.4) desempenhará um papel importante daqui para frente. Por exemplo, fazendo uso dela, podemos provar a seguinte

PROPOSIÇÃO 2.2 Se A é uma álgebra em Ω então qualquer α -operador é um automorfismo de A .

Prova. Seja a em $A(n)$. Se $\ell=p+q$, $a^*(X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p}) = v_p + \dots + v_m$ e $a^*(X_0^{m-q} X_{j_1} \dots X_{j_q}) = u_q + \dots + u_m$ ($v_i, u_i \in V_i$), então a componente de

$$a^*(X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p}) a^*(X_0^{m-q} X_{j_1} \dots X_{j_q}) \text{ em } V_{\ell+k} \text{ é } w_{\ell+k} = \sum_{r+s=k} v_{p+r} u_{q+s}.$$

No caso em que $\ell > m$, temos que $v_{p+r} u_{q+s} = 0$ para todo r, s tal que $r+s = k$ e logo $w_{\ell+k} = 0$ ($0 \leq k \leq m-\ell$). Por outro lado, no caso $\ell \leq m$, temos

$$w_{\ell+k} = m^{-k} \left\{ \binom{m-\ell}{k} \right\}^{-1} \sum_{r=0}^k \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{k-r} \alpha_{p+r, \ell+k} Y_{\ell+k} = \alpha_{p\ell} Y_{\ell+k},$$

onde $Y_{\ell+k}$ é a componente de $a^*[(X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p})(X_0^{m-q} X_{j_1} \dots X_{j_q})]$ no subespaço $V_{\ell+k}$. Portanto, em qualquer caso a^* preserva o produto

$$(X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p}) (X_0^{m-q} X_{j_1} \dots X_{j_q}). \quad \Delta$$

Reciprocamente, temos:

PROPOSIÇÃO 2.3 Se A^* é um subgrupo do grupo de automorfismos de uma álgebra ponderada A , então A é um membro de Ω .

Prova. Em verdade, é suficiente exigir que os produtos são preservados pelos α -operadores a_i^* ($1 \leq i \leq n$), b^* e c^* , onde a_i, b e c são os elementos em $A(n)$:

$$a_i = e + e_{1i} + \dots + e_{i-1,i} + e_{i+1,i} + \dots + e_{ni},$$

$$b = e + e_{10}, \quad c = \text{diag}(1, 2, 3, 5, \dots, p_n)$$

(e_{ij} é a matriz cujo único elemento não-nulo é um 1 na posição (i, j)), e denota o elemento identidade em $A(n)$ e p_n é o n -ésimo número primo).

De fato, se $X_0^m X_0^m = X_0^m + v_1 + \dots + v_m$ ($v_i \in V_i$) então

$$c^*(v_\ell) = v_\ell \quad (1 \leq \ell \leq m). \quad \text{Por outro lado, escrevendo } v_\ell = \sum_{|u^*|=\ell} \alpha_{u^*}^{(\ell)} X_0^{m-\ell} X^{u^*},$$

$$\text{obtemos } c^*(v_\ell) = \sum_{|u^*|=\ell} \alpha_{u^*}^{(\ell)} 2^{u_1} \dots p_n^{u_n} X_0^{m-\ell} X^{u^*}. \quad \text{Logo, } v_\ell = 0 \quad (1 \leq \ell \leq m) \text{ e}$$

então X_0^m é um idempotente. Agora, seja $(p, q) \neq (0, 0)$. Se w_ℓ denota a componente em V_ℓ de $(X_0^{m-p} X^{u^*}) (X_0^{m-q} X^{v^*})$, então $c^*(w_\ell)$ e

$$2^{u_1+v_1} \dots p_n^{u_n+v_n} w_\ell \quad \text{são, respectivamente, as componentes de } c^*[(X_0^{m-p} X^{u^*}) (X_0^{m-q} X^{v^*})] \text{ e } c^*(X_0^{m-p} X^{u^*}) c^*(X_0^{m-q} X^{v^*}) \text{ no subespaço } V_\ell.$$

Portanto,

$$\sum_{|i^*|=\ell} \beta_{i^*}^{(\ell)} 2^{i_1} \dots p_n^{i_n} X_0^{m-\ell} X^{i^*} = \sum_{|i^*|=\ell} \beta_{i^*}^{(\ell)} 2^{u_1+v_1} \dots p_n^{u_n+v_n} X_0^{m-\ell} X^{i^*},$$

onde $w_\ell = \sum_{|i^*|=\ell} \beta_{i^*}^{(\ell)} X_0^{m-\ell} X^{i^*}$. Esta última igualdade ocorre em dois

casos: $i^* = u^* + v^*$ ou $w_\ell = 0$. Segue que $w_\ell = 0$ se $\ell \neq p+q$ e que w_ℓ é um múltiplo de $X_0^{m-\ell} X^{u^*+v^*}$ no caso $\ell = p+q$. Denote por t_ℓ a t-raiz à esquerda de A relativa a $X_0^{m-\ell} X_1^\ell$. Aplicando o α -operador a_1^* à identidade $X_0^m (X_0^{m-\ell} X_1^\ell) = t_\ell X_0^{m-\ell} X_1^\ell$, obtemos que t_ℓ é a t-raiz à esquerda relativa a qualquer monômio $X_0^{m-\ell} X^{u^*}$.

Agora, suponhamos que $n > 1$ e $p+q \leq m$. Afirmamos que

$$(2.5) \quad (X_0^{m-p} X^{u^*}) (X_0^{m-q} X^{v^*}) = \alpha_{v^*} X_0^{m-(p+q)} X^{u^*+v^*} \quad (\alpha_{v^*} \in \mathbb{R})$$

para todo u^* . Isto é claro no caso $p=0$. Se $p>0$ então $v_i=0$ para algum i . Já sabemos que $(X_0^{m-p} X_i^p) (X_0^{m-q} X^{v^*}) = \alpha_{v^*} X_0^{m-(p+q)} X_i^p X^{v^*}$, para algum α_{v^*} em $\mathbb{R}$. Aplicando o α -operador a_i^* a esta identidade, obtemos (2.5) no caso $p>0$. De modo análogo, temos

$$(2.6) \quad (X_0^{m-q} X^{v^*}) (X_0^{m-p} X^{u^*}) = \beta_{v^*} X_0^{m-(p+q)} X^{u^*+v^*} \quad (\beta_{v^*} \in \mathbb{R})$$

para todo u^* .

Em seguida, a partir do fato de que $t_{\ell-r}$ é a t-raiz relativa a $X_0^{m-(\ell-r)} X_1^{\ell-r}$ e que b^* preserva produtos, obtemos

$$\sum_{p+q=r} \binom{m}{q} \binom{m-(\ell-r)}{q} (X_0^{m-p} X_1^p) X_0^{m-(\ell-r+q)} X_1^{\ell-r+q} = t_{\ell-r} \binom{m-(\ell-r)}{r} X_0^{m-\ell} X_1^\ell.$$

Desta identidade pode-se obter por indução sobre k que

$$(2.7) \quad (x_0^{m-k} x_1^k) (x_0^{m-(\ell-k)} x_1^{\ell-k}) = \alpha_{k\ell} x_0^{m-\ell} x_1^\ell \quad (0 \leq \ell \leq m, 0 \leq k \leq \ell).$$

Finalmente, estamos preparados para provar que a tábua de multiplicação de A é dada por (2.1). Se $n > 1$, usamos (2.5) para obter $(x_0^{m-p} x^{u*}) (x_0^{m-q} x_1^q) = \gamma x_0^{m-(p+q)} x_1^q x^{u*}$ e então que $\gamma = \alpha_{p,p+q}$ por (2.7). Agora, o resultado segue diretamente da identidade (2.6). Δ

NOTA. Para uso posterior, observamos que

$$(2.8) \quad t_{k+\alpha_{kk}} = 1 + f(k) \quad (2 \leq k \leq m)$$

e portanto um ponto P está em H_0 se e somente se $t_{k+\alpha_{kk}} \neq 1$ ($2 \leq k \leq m$). A identidade (2.8) será demonstrada no apêndice deste capítulo.

2. Idempotentes. Sequências de Potências Plenas

Os idempotentes em $G(n+1, 2m)$ foram determinados por Gonshor [8] (p. 338). Aqui, vamos determinar os idempotentes de qualquer álgebra em Ω_0 . Seja F o conjunto dos elementos da forma $e = x_0^m + v_1 + \dots + v_m$ ($v_i \in V_i$) com

$$(2.9) \quad \begin{aligned} v_1 &= a_{10} x_0^{m-1} x_1 + \dots + a_{n0} x_0^{m-1} x_n, \\ v_r &= \binom{m}{r} x_0^{m-r} \sum_{|i^*|=r} A_{0i^*} x_0^{m-r} x^{i^*} \quad (2 \leq r \leq m), \end{aligned}$$

onde $a_{10}, \dots, a_{n0}$ são números reais arbitrários. Usando a identidade (2.4) é imediato verificar que e é um idempotente, e logo que F é uma família n -paramétrica de idempotentes em qualquer álgebra em Ω . Além disso, temos:

PROPOSIÇÃO 2.4 Uma condição necessária e suficiente para que F seja o conjunto dos idempotentes não-nulos em $A \in \Omega$ é que $A \in \Omega_0$.

Prova. Provaremos primeiro a suficiência. Seja $e \neq 0$ um idempotente em $A \in \Omega_0$ e façamos $e = X_0^m + v_1 + \dots + v_m$. De $e^2 = e$ obtemos

$$v_1 = (t_1 + \alpha_{11})v_1 \quad e$$

$$v_k = (t_k + \alpha_{kk})v_k + \sum_{r=1}^{k-1} v_r v_{k-r} \quad (2 \leq k \leq m).$$

Como $t_1 + \alpha_{11} = 1$, v_1 pode ser escrito como $v_1 = \binom{m}{1} m^{-1} \sum_{|i_0^*|=1} A_0^{i_0^*} X_0^{m-1} X_0^{i_0^*}$.

Agora, a prova prossegue por indução como segue:

$$\begin{aligned} \{1 - t_k - \alpha_{kk}\} v_k &= \sum_{r=1}^{k-1} v_r v_{k-r} = m^{-k} \sum_{r=1}^{k-1} \binom{m}{r} \binom{m}{k-r} \alpha_{rk} \sum_{|i_0^*|=k} A_0^{i_0^*} X_0^{m-k} X_0^{i_0^*} \\ &= \{1 - t_k - \alpha_{kk}\} \binom{m}{k} m^{-k} \sum_{|i_0^*|=k} A_0^{i_0^*} X_0^{m-k} X_0^{i_0^*}, \end{aligned}$$

por (2.4) e logo $v_k = \binom{m}{k} m^{-k} \sum_{|i_0^*|=k} A_0^{i_0^*} X_0^{m-k} X_0^{i_0^*}$. Portanto, $e \in F$.

Para provar a necessidade, vamos mostrar que se $A \notin \Omega_0$ então podemos construir um idempotente f que não está em F . Sejam $i = \max\{\ell: t_\ell + \alpha_{\ell\ell} = 1\}$ (veja a nota no final da seção anterior) e $f = X_0^m + u_1 + u_{2i} + u_{3i} + \dots$, onde u_1 é um elemento não-nulo em V_1 e u_{ri} ($r > 1$) é definido recursivamente por

$$u_{ri} = \{1 - t_{ri} - \alpha_{ri,ri}\}^{-1} \sum_{p+q=r} u_{pi} u_{qi}.$$

A componente de f^2 em V_i é $X_O^m u_i + u_i X_O^m = \{t_i + \alpha_{ii}\} u_i = u_i$ e em $V_{\ell i}$ ($\ell > 1$) é $X_O^m u_{\ell i} + u_{\ell i} X_O^m + \sum_{p+q=\ell} u_{pi} u_{qi} = u_{\ell i}$. Logo, $f^2 = f$. Um idempotente em F é determinado por sua componente em V_1 e X_O^m é o único com componente nula neste subespaço. Portanto $f \notin F$. Δ

Se A é uma álgebra não-associativa qualquer sobre um corpo arbitrário, definimos as **potências plenas** $x^{[k]}$ de um elemento x em A como segue: $x^{[1]} = x$, $x^{[k+1]} = x^{[k]} x^{[k]}$. O teorema 4.19 em [25] (p. 80) aplica-se a $G(n+1, 2m)$ e então podemos afirmar que a sequência de potências plenas de qualquer elemento de peso 1 em $G(n+1, 2m)$ converge para um idempotente. Isto significa que a distribuição dos gametas tende para uma distribuição em equilíbrio. Os teoremas sobre convergência de potências plenas em álgebras genéticas (veja [25], p. 102) não podem ser aplicados a todas as álgebras na nossa classe Ω_O . Para estas álgebras, temos o seguinte teorema de convergência.

PROPOSIÇÃO 2.5 A sequência de potências plenas do elemento $X_O^m + v_1 + \dots + v_m$ ($v_i \in V_i$) de qualquer álgebra em Ω_O converge para o idempotente determinado por v_1 .

Prova. Façamos $x = X_O^m + v_1 + \dots + v_m$ e denotemos por $v_\ell^{[k]}$ a componente de $x^{[k]}$ em V_ℓ . É imediato que $v_1^{[k]} = v_1$ ($k \geq 1$). Por outro lado, de $x^{[k+1]} = x^{[k]} x^{[k]}$ obtemos

$$v_\ell^{[k+1]} = \{t_\ell + \alpha_{\ell\ell}\} v_\ell^{[k]} + \sum_{r=1}^{\ell-1} v_r^{[k]} v_{\ell-r}^{[k]} \quad (\ell \geq 2).$$

Seja $e = x_0^m + e_1 + \dots + e_m$ ($e_i \in v_i$) o idempotente determinado por v_1 .

Claramente, $v_1^{[k]} \rightarrow e_1$. Suponhamos que $v_s^{[k]} \rightarrow e_s$ ($1 \leq s < \ell$). Então,

$$\{1 - t_\ell - \alpha_{\ell\ell}\} \lim_{k \rightarrow \infty} v_\ell^{[k]} = \sum_{r=1}^{\ell-1} (\lim_{k \rightarrow \infty} v_{\ell-r}^{[k]}) (\lim_{k \rightarrow \infty} v_r^{[k]}) = \sum_{r=1}^{\ell-1} e_r e_{\ell-r} = \{1 - t_\ell - \alpha_{\ell\ell}\} e_\ell \quad e$$

logo $v_\ell^{[k]} \rightarrow e_\ell$. Isto prova que $x^{[k]} \rightarrow e$. Δ

3. Automorfismos. α -Álgebras

Para toda álgebra A em Ω , A^* é um subgrupo do grupo de automorfismos de A (proposição 2.2). O teorema seguinte mostra que, para as álgebras em Ω_0 , A^* é o grupo todo.

TEOREMA 2.6 O grupo de automorfismos de qualquer álgebra em Ω_0 é A^* .

Prova. Seja $A \in \Omega_0$. Devemos mostrar que todo automorfismo ψ de A é um α -operador. Como $\psi(x_0^m)$ é um idempotente, podemos escrever $\psi(x_0^m) = x_0^m + v_1 + \dots + v_m$, onde v_r ($1 \leq r \leq m$) é dado por (2.9) (veja a proposição 2.4).

Escrevemos $\psi(x_0^{m-1} x_{i_1}) = u_1 + \dots + u_m$, $u_i \in v_i$ (veja a proposição 1.10) e aplicamos ψ aos produtos $x_0^m (x_0^{m-1} x_{i_1})$ e $(x_0^{m-1} x_{i_1}) x_0^m$ para obter

$$\{t_1 - t_{1+k}\}u_{1+k} = \sum_{r=1}^k v_r u_{1+k-r} \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

$$\{\alpha_{11} - \alpha_{1+k, 1+k}\}u_{1+k} = \sum_{r=1}^k u_{1+k} v_r$$

Façamos $u_1 = \sum_{r=1}^n a_{ri_1} x_o^{m-1} x_r$. Se $t_1 \neq t_{1+k}$ usamos indução para obter

$$u_{1+k} = \{t_1 - t_{1+k}\}^{-1} m^{-k} \sum_{r=1}^k \binom{m}{r} \binom{m-1}{k-r} \alpha_{r, 1+k-r} \sum A_o^{i_o^*} A_{i_1}^{i_1^*} x_o^{m-(1+k)} x^{i_o^* + i_1^*},$$

isto é,

$$(2.10) \quad u_{1+k} = m^{-k} \binom{m-1}{k} \sum A_o^{i_o^*} A_{i_1}^{i_1^*} x_o^{m-(1+k)} x^{i_o^* + i_1^*}$$

pela identidade (2.4), onde a soma é feita sobre todos os i_o^*, i_1^* com $|i_o^*| = k, |i_1^*| = 1$. No caso em que $\alpha_{11} \neq \alpha_{1+k, 1+k}$, esta última identidade é obtida por um argumento semelhante. Agora, note que $t_1 = t_{1+k}$ e $\alpha_{11} = \alpha_{1+k, 1+k}$ não ocorrem simultaneamente; de fato, se este fosse o caso, teríamos $t_{1+k} + \alpha_{1+k, 1+k} = t_1 + \alpha_{11} = 1$ e logo $f(1+k) = 0$ por (2.8).

Em seguida, descreveremos a ação de ψ sobre V_ℓ ($2 \leq \ell \leq m$).

Podemos assumir como nossa hipótese de indução que

$$\psi(x_o^{m-r} x_{i_1} \dots x_{i_r}) = w_r + \dots + w_m \quad (1 \leq r < \ell), \text{ onde}$$

$$(2.11) \quad w_{r+k} = m^{-k} \binom{m-r}{k} \sum A_o^{i_o^*} A_{i_1}^{i_1^*} \dots A_{i_r}^{i_r^*} x_o^{m-(r+k)} x^{i_o^* + \dots + i_r^*} \quad (0 \leq k \leq m-r)$$

(a soma é feita sobre todos os i_o^*, i_t^* ($1 \leq t \leq r$) com $|i_o^*| = k, |i_t^*| = 1$). Observamos que $\alpha_{p\ell} = 0$ ($1 \leq p < \ell$) implica $t_1 = t_2 = \dots = t_\ell$ (já que sob esta condição $\alpha_{p\ell} = \binom{m}{p}^{-1} \binom{m-(\ell-p)}{\ell} \{t_{\ell-p} - t_\ell\}$) e logo $f(\ell) = 0$ por (2.8)).

Podemos então escolher um p de tal maneira que $1 \leq p < \ell$ e $\alpha_{p\ell} \neq 0$. De

$$(X_O^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p}) (X_O^{m-q} X_{i_{p+1}} \dots X_{i_\ell}) = \alpha_{p\ell} X_O^{m-\ell} X_{i_1} \dots X_{i_\ell} \quad (q = \ell - p)$$

obtemos $(x_p + \dots + x_m)(y_q + \dots + y_m) = \alpha_{p\ell}(z_\ell + \dots + z_m)$, onde

$$\psi(X_O^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p}) = x_p + \dots + x_m, \quad \psi(X_O^{m-q} X_{i_{p+1}} \dots X_{i_\ell}) = y_q + \dots + y_m \quad \text{e}$$

$$\psi(X_O^{m-\ell} X_{i_1} \dots X_{i_\ell}) = z_\ell + \dots + z_m \quad (x_i, y_i, z_i \in V_i). \quad \text{Segue que } z_s = 0$$

$(1 \leq s < \ell)$, $z_{\ell+k} = \alpha_{p\ell}^{-1} \sum_{r=0}^k x_{p+r} y_{q+k-r}$ e então a hipótese de indução e a identidade (2.4) fornecem

$$z_{\ell+k} = m^{-k} \binom{m-\ell}{k} \sum A_O^{i_0^*} A_{i_1}^{i_1^*} \dots A_{i_\ell}^{i_\ell^*} X_O^{m-(\ell+k)} X^{i_0^* + \dots + i_\ell^*},$$

onde a soma é feita sobre todos os i_0^*, i_t^* com $|i_0^*| = k$, $|i_t^*| = 1$ $(1 \leq t \leq \ell)$.

Portanto, corresponde a ψ uma matriz real $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Ponhamos $a_{oo} = 1$, $a_{oj} = 0$ $(1 \leq j \leq n)$ e $a = (a_{ij})$. Do que já foi provado segue que $\psi = a^*$. Resta mostrar que $\det a \neq 0$. Denote por b a matriz do operador linear ψ com relação a base X . Por indução, é fácil ver que $\det a$ é um fator de $\det b$ e logo que $\det a \neq 0$. Δ

Em particular, pelo teorema 2.6 e pela proposição 2.1, temos:

COROLÁRIO 2.7 O grupo de automorfismos da álgebra gamética $G(n+1, 2m)$ é isomorfo a $A(n)$. Δ

Segue do teorema precedente que nossa classe de álgebras ponderadas Ω_0 é uma subclasse da classe de α -álgebras definida em seguida.

DEFINIÇÃO. Seja (A, ω_1) uma álgebra ponderada. A é denominada uma α -álgebra se ela admite uma base $Y = \{Y_O^{m-p} Y^{i*} : |i*| = p, 0 \leq p \leq m\}$ tal que:

$$(i) \quad \omega_1(Y_O^m) = 1, \quad \omega_1(Y_O^{m-p} Y^{i*}) = 0 \quad (1 \leq p \leq m);$$

(ii) para todo $a = (a_{ij})$ em $A(n)$, o operador linear definido por

$$Y_O^{m-p} Y_{i_1} \dots Y_{i_p} \rightarrow \sum_{k=0}^{m-p} \binom{m-p}{k} m^{-k} [A_O^{i_0^*} A_{i_1}^{i_1^*} \dots A_{i_p}^{i_p^*} Y_O^{m-(p+k)} Y^{i_0^* + \dots + i_p^*}]$$

(a soma é feita sobre todos os $i_0^*, i_t^* (1 \leq t \leq p)$ tais que $|i_0^*| = k, |i_t^*| = 1$) é um automorfismo de A e todo automorfismo de A tem esta forma. Uma tal base Y é denominada uma α -base.

Seja (A, ω_1) uma álgebra ponderada e $Y = \{Y_O^{m-p} Y^{i*} : |i*| = p, 0 \leq p \leq m\}$ uma base para A que verifica a condição (i) acima. A aplicação linear definida por $Y_O^{m-p} Y^{i*} \rightarrow X_O^{m-p} X^{i*}$ é um isomorfismo entre A e a álgebra ponderada A' cuja tábua de multiplicação com respeito a X é igual à tábua de multiplicação de A relativa a Y. Agora, é claro que A é uma α -álgebra e Y é uma α -base se e somente se A' é uma α -álgebra e X é uma α -base. Então, se A é uma α -álgebra, temos que o grupo de automorfismos de A' é A^* e logo A' é um membro de Ω (proposição 2.3). Acabamos de demonstrar a

PROPOSIÇÃO 2.8 Toda α -álgebra tem uma cópia isomorfa em Ω e logo é uma álgebra genética. Δ

Segue da proposição anterior que, para classificar todas as α -álgebras, é suficiente classificar as α -álgebras que estão em Ω .

4. Classificação das α -Álgebras: $m \leq 5$, n arbitrário

Nesta seção, obteremos a classificação de todas as α -álgebras em Ω (logo, de todas as α -álgebras, como já foi mencionado), quando $m \leq 5$.

Já sabemos que Ω_0 é uma subclasse da classe das α -álgebras. Como será demonstrado na presente seção e na seguinte, esta subclasse é própria no caso $m \geq 4$. Então, para obter todas as α -álgebras nos casos $m = 4, 5$, adicionaremos a Ω_0 duas novas classes de álgebras, a saber, Ω_1 e Ω_2 definidas por

$$\Omega_1 = \{A(P) : P \in H_1\}, \quad \Omega_2 = \{A(P) : P \in H_2\},$$

onde

$$H_1 = \{(1, t_1, t_2, t_3, t_4) : t_1 = t_2, t_1 \neq t_3, t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0\},$$

$$H_2' = \{(1, t_1, \dots, t_5) : t_1 = t_2, t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0\},$$

$$H_2'' = \{(1, t_1, \dots, t_5) : t_1 \neq t_2, t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0, \\ t_4 = 2t_1 - 3t_2 + 2t_3, 4t_1 - 4t_2 + t_3 - t_5 \neq 0\},$$

$$H_2 = H_2' \cup H_2''.$$

Precisaremos do seguinte

LEMA 2.9 Se $A(P)$ é uma α -álgebra e $m > 1$, então $f(m) \neq 0$.

Prova. Suponhamos o contrário: $f(m) = 0$. Então, a identidade (2.8) fornece $t_m + \alpha_{mm} = 1$. Segue que $X_{O+v_m}^m$, onde $v_m \in V_m$, $v_m \neq 0$, é um idempotente. Uma verificação direta mostra que o operador linear que leva X_O^m em $X_{O+v_m}^m$ e restrito a $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ é o operador identidade, é um automorfismo de $A(P)$. Claramente, este automorfismo não é um α -operador; uma contradição. Δ

1. $m = 1, 2, 3$

TEOREMA 2.10 Suponhamos que $1 \leq m \leq 3$. A álgebra $A \in \Omega$ é uma α -álgebra se e somente se $A \in \Omega_O$.

Prova. Suponhamos que $A(P)$ é uma α -álgebra. Devemos provar que $P \in H_O$. No caso em que $m=1$, não temos nada a provar pois $H = H_O$. Se $m > 1$ então $f(m) \neq 0$ pelo lema precedente; logo, $f(2) \neq 0$ no caso $m=2$ e $f(3) \neq 0$, $f(2) = \frac{2}{3}f(3) \neq 0$ no caso $m=3$. Então, em qualquer caso, $P \in H_O$. Δ

No caso $m=1$, as α -álgebras tem a seguinte caracterização:

PROPOSIÇÃO 2.11 Seja (A, ω_1) uma álgebra ponderada de dimensão $n+1$.

As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) A é uma α -álgebra;
- (ii) todo operador linear inversível de A que preserva ω_1 é um automorfismo.

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja $Y = \{Y_0, \dots, Y_n\}$ uma α -base. Se ψ é um operador inversível de A e $\omega_1 \psi = \omega_1$, então $\psi(Y_0) = Y_0 + a_{10}Y_1 + \dots + a_{n0}Y_n$, $\psi(Y_j) = a_{1j}Y_1 + \dots + a_{nj}Y_n$ ($1 \leq j \leq n$), para alguma matriz $a = (a_{ij})$ em $A(n)$. Logo, ψ é um automorfismo.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seja $Y = \{Y_0, \dots, Y_n\}$ uma base de A tal que $\omega_1(Y_0) = 1$, $\omega_1(Y_j) = 0$ ($1 \leq j \leq n$). Por hipótese, todo operador linear inversível ψ que tem a forma

$$\begin{aligned} \psi(Y_0) &= Y_0 + a_{10}Y_1 + \dots + a_{n0}Y_n \\ (2.12) \quad \psi(Y_j) &= a_{1j}Y_1 + \dots + a_{nj}Y_n, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

é um automorfismo de A . Então, A^* é um subgrupo do grupo de automorfismos de A' , onde A' é a álgebra descrita no final da seção 3. Segue que A' está em Ω (proposição 2.3) e logo A' é uma álgebra genética; podemos concluir então que A é também uma álgebra genética. Mas em uma álgebra genética todo automorfismo preserva o peso (proposição 1.10). Logo, todo automorfismo de A é do tipo (2.12); Y é uma α -base. Δ

COROLÁRIO 2.12 Seja (A, ω_1) uma álgebra ponderada comutativa de dimensão $n+1$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i') $A \cong G(n+1, 2)$;

(ii) todo operador linear inversível de A que preserva ω_1 é um automorfismo.

Prova. É imediato verificar que no caso presente a condição (i) da proposição 2.11 é equivalente à condição (i'). Δ

O resultado que acabamos de provar melhora um resultado de Gonshor [8] (p. 333) que afirma: $G(n+1,2)$ é caracterizada pela propriedade de que todo operador linear da álgebra que preserva o peso também preserva a multiplicação.

2. $m = 4$

TEOREMA 2.13 Suponhamos que $m=4$. A álgebra $A \in \Omega$ é uma α -álgebra se e somente se $A \in \Omega_0 \cup \Omega_1$.

Prova. Seja $A \in \Omega_1$. Seja ψ um automorfismo de A . Mostraremos que ψ é um α -operador. Denotemos por v_i, u_i, w_i, z_i, y_i , respectivamente, as componentes em V_i de $\psi(X_0^4)$, $\psi(X_0^3 X_{i_1})$, $\psi(X_0^2 X_{i_1} X_{i_2})$, $\psi(X_0 X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3})$, $\psi(X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4})$. Se, por exemplo, $i_3=i_1$ e $i_4=i_2$ escreveremos

(i_1, i_2, i_1, i_2)
 y_i ao invés de y_i . Nos cálculos que seguem, usaremos várias identidades envolvendo estas componentes; todas elas são obtidas facilmente do fato de que ψ preserva produtos. Temos
 $(X_0^4 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = t_3(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$. Logo, $(t_3 - t_1)z_1 = 0$ e $(t_3 - t_1)z_2 = 0$, e logo $z_1 = z_2 = 0$. De modo análogo, $(t_4 - t_1)y_1 = 0$, $(t_4 - t_1)y_2 = 0$, $(t_4 - t_3)y_3 = 0$, $(\alpha_{44} - \alpha_{11})y_1 = 0$, $(\alpha_{44} - \alpha_{11})y_2 = 0$, $(\alpha_{44} - \alpha_{33})y_3 = 0$; segue que $(t_1 - 2t_3 + t_4)y_i = 0$ e logo $y_i = 0$ ($i=1,2,3$).

De $(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)(z_3 + z_4) = 0$ obtemos $w_1 z_3 = 0$; analogamente, $z_3 w_1 = 0$. Se $z_3 = 0$ então $(\alpha_{33} - \alpha_{44})z_4 = z_3 v_1 = 0$ e $(t_3 - t_4)z_4 = v_1 z_3 = 0$; obtemos então $(t_1 - 2t_3 + t_4)z_4 = 0$ e logo $z_4 = 0$. Isto mostra que $z_3 \neq 0$ já que $\psi(X_0 X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3}) \neq 0$. Portanto, $w_1 = 0$ pois $\alpha_{14} + \alpha_{34} = -\frac{1}{2}(t_1 - 2t_3 + t_4) \neq 0$.

$$\text{Façamos } w_2 = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_o^2 x_i x_j \text{ e } w_2^{(i_3, i_4)} = \sum_{i,j=1}^n \beta'_{ij} x_o^2 x_i x_j.$$

De $\alpha_{24} y_4 = w_2 w_2^{(i_3, i_4)}$ segue que $y_4 = \sum_{i,j,k,l=1}^n \beta_{ij} \beta'_{kl} x_i x_j x_k x_l$, já que

$\alpha_{24} = \frac{1}{6}(t_1 - 2t_3 + t_4) \neq 0$. Em particular, para $i_3 = i_1, i_4 = i_2$, obtemos

$$(2.13) \quad y_4^{(i_1, i_2, i_1, i_2)} = \sum_{i,j,k,l=1}^n \beta_{ij} \beta_{kl} x_i x_j x_k x_l.$$

Por outro lado, temos $(\alpha_{14} + \alpha_{34}) y_4^{(i_1, i_2, i_1, i_2)} = u_1 z_3^{(i_2, i_1, i_2)} + z_3 u_1^{(i_4)}$,

$\alpha_{13} z_3 = u_1 w_2^{(i_2, i_3)}$ e $\alpha_{23} z_3 = w_2 u_1^{(i_3)}$. Então, como $\alpha_{13} = -\alpha_{23} = \frac{1}{2}(t_1 - t_3) \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} (\alpha_{14} + \alpha_{34}) y_4^{(i_1, i_2, i_1, i_2)} &= \alpha_{13}^{-1} u_1 (u_1^{(i_2)} w_2) + \alpha_{23}^{-1} (w_2 u_1) u_1^{(i_2)} = \\ &= (\alpha_{14} + \alpha_{34}) \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} \beta_{kl} x_i x_j x_k x_l, \end{aligned}$$

onde a_{ii_1} é a coordenada de u_1 na direção de $x_o^3 x_{i_1}$. Mas, como

$\alpha_{14} + \alpha_{34} = \frac{1}{2}(-t_1 + 2t_3 - t_4) \neq 0$, temos então $y_4^{(i_1, i_2, i_1, i_2)}$

$= \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} \beta_{kl} x_i x_j x_k x_l$. Esta última identidade junto com

a identidade (2.13) fornece $\beta_{kl} (\beta_{ij} - a_{ii_1} a_{ji_2}) = 0 \quad (1 \leq i, j, k, l \leq n)$.

Se $w_2 = 0$ então $y_4^{(i_1, i_2, i_1, i_2)} = 0$ e logo $\psi(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_1} x_{i_2}) = 0$; uma

contradição. Portanto, existem k_1, l_1 tais que $\beta_{k_1 l_1} \neq 0$ e isto im

plica que $\beta_{ij} = a_{ii_1} a_{ji_2}$. Segue que

$$(2.14) \quad \begin{aligned} w_2 &= \sum_{i,j=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} x_o^2 x_i x_j, \quad z_3 = \sum_{i,j,k=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} a_{ki_3} x_o x_i x_j x_k, \\ y_4 &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} a_{ki_3} a_{\ell i_4} x_i x_j x_k x_\ell, \quad w_3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n a_{io} a_{ji_1} a_{ki_2} x_o x_i x_j x_k, \\ z_4 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{io} a_{ji_1} a_{ki_2} a_{\ell i_3} x_i x_j x_k x_\ell, \end{aligned}$$

onde a_{io} é a coordenada de v_1 na direção de $x_o^3 x_i$. A expressão de w_3 é obtida de $(t_1 - t_3)w_3 = v_1 w_2$ (já que $\alpha_{13} = \frac{1}{2}(t_1 - t_3)$), enquanto a de z_4 é obtida de $(t_3 - t_4)z_4 = v_1 z_3$ e $(1 - t_3 - \alpha_{44})z_4 = z_3 v_1$ (pois $1 - t_4 - \alpha_{44} = 4(\alpha_{14} + \alpha_{34}) = 2(-t_1 + 2t_3 - t_4)$).

Se $u_2 = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} x_o^2 x_i x_j$, de $\alpha_{13} z_4 = u_1 w_3 + u_2 w_2$ obtemos $(\frac{1}{3}\gamma_{ij} - \frac{1}{4}a_{io} a_{ji_1})\beta_{kl} \neq 0$ ($1 \leq i, j, k, \ell \leq n$), pois $\frac{1}{4}\alpha_{13} - \frac{1}{2}\alpha_{14} = \frac{1}{8}(t_1 - 2t_3 + t_4)$ e $\alpha_{24} = \frac{1}{6}(t_1 - 2t_3 + t_4)$. Então, $\gamma_{ij} = \frac{3}{4}a_{io} a_{ji_1}$ ($1 \leq i, j \leq n$) e obtemos

$$(2.15) \quad u_2 = \frac{3}{4} \sum_{i,j=1}^n a_{io} a_{ji_1} x_o^2 x_i x_j.$$

Como $\alpha_{12} = \frac{3}{4}(t_1 - t_2) = 0$ temos $u_1 u_3 + u_2^2 + u_3 u_1 = 0$ e logo $(16\delta_{ijk} - 3a_{io} a_{jo} a_{ki_1})a_{\ell i_1} = 0$, onde δ_{ijk} é a coordenada de u_3 na direção de $x_o x_i x_j x_k$. Se $u_1 = 0$ então $a_{ii_1} = 0$ ($1 \leq i \leq n$) e logo $w_2 = 0$; uma contradição. Segue que existe um ℓ_1 tal que $a_{\ell i_1} \neq 0$ e então

$\delta_{ijk} = \frac{3}{16}a_{io} a_{jo} a_{ki_1}$. Isto mostra que

$$(2.16) \quad u_3 = \frac{3}{16} \sum_{i,j,k=1}^n a_{io} a_{jo} a_{ki_1} x_o x_i x_j x_k.$$

De modo análogo, de $(t_1 - t_3)u_3 = v_1u_2 + v_2u_1$ obtemos

$$(2.17) \quad v_2 = \frac{3}{8} \sum_{i,j=1}^n a_{io} a_{jo} x_o^2 x_i x_j$$

e logo

$$(2.18) \quad w_4 = \frac{1}{16} \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{io} a_{jo} a_{ki} a_{li} x_i x_j x_k x_l$$

pois $(1 - t_4 - \alpha_{44})w_4 = v_1w_3 + v_2w_2 + w_3v_1 + w_2v_2$.

Agora, somando as identidades $(t_1 - t_4)u_4 = v_1u_3 + v_2u_2 + v_3u_1$

e $(1 - t_1 - \alpha_{44})u_4 = u_3v_1 + u_2v_2 + u_1v_3$ obtemos $u_4 = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^n \theta_{ijk} a_{li} x_i x_j x_k x_l$,

onde θ_{ijk} é a coordenada de v_3 na direção de $x_o x_i x_j x_k$. A expressão de u_4 e a primeira destas identidades fornecem $\theta_{ijk} = \frac{1}{16} a_{io} a_{jo} a_{ko}$ ($1 \leq i, j, k \leq n$). Portanto,

$$(2.19) \quad \begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{4^2} \sum_{i,j,k=1}^n a_{io} a_{jo} a_{ko} x_o x_i x_j x_k, \\ u_4 &= \frac{1}{4^3} \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{io} a_{jo} a_{ko} a_{li} x_i x_j x_k x_l, \\ v_4 &= \frac{1}{4^4} \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{io} a_{jo} a_{ko} a_{lo} x_i x_j x_k x_l. \end{aligned}$$

A última identidade é obtida de $(t_1 - t_4 - \alpha_{44})v_4 = v_1v_3 + v_2^2 + v_3v_1$.

A partir das identidades (2.13)-(2.19), podemos concluir que $\psi = a^*$ ($a = (a_{ij})$, $a_{oo} = 1$, $a_{oj} = 0$ ($1 \leq i \leq n$)) e, como na prova do teorema 2.6, que ψ é um α -operador. E agora A é uma α -álgebra pela proposição 2.2.

Reciprocamente, seja $A \in \Omega - \Omega_0$ uma α -álgebra. Temos que $A = A(P)$, para algum $P \in H - H_0$. Isto significa que $f(k) = 0$ para algum k . Como $f(4) \neq 0$ (lema 2.9), temos que $f(2)=f(3)=0$, isto é, $t_1=t_2$. Então, $t_1-2t_3+t_4=\frac{1}{2}f(4) \neq 0$. Finalmente, afirmamos que $t_1 \neq t_3$; no caso contrário, podemos construir um automorfismo ψ que não é um α -operador pondo $\psi(X_0^4) = X_0^4 + X_0^2 X_1^2 - \frac{1}{12} X_1^4$, $\psi(X_0^3 X_i) = X_0^3 X_i$, $\psi(X_0^2 X_i X_j) = X_0^2 X_i X_j - \frac{1}{6} X_1^2 X_i X_j$, $\psi(X_0 X_i X_j X_k) = X_0 X_i X_j X_k$, $\psi(X_i X_j X_k X_\ell) = X_i X_j X_k X_\ell$ ($1 \leq i, j, k, \ell \leq n$). Portanto, $P \in H_1$, isto é, $A \in \Omega_1$. Δ

3. $m=5$

LEMA 2.14 Se P é um ponto de H_2' , então $A(P)$ é uma α -álgebra.

Prova. Como nenhuma idéia nova aparece, indicaremos apenas os passos essenciais. Preservaremos a notação do teorema 2.13 e denotaremos por x_i a componente em V_i de $\psi(X_{i_1} \dots X_{i_5})$.

Suponhamos que $t_1 \neq t_3$ e $t_1 \neq t_4$. De $(X_0^5 + v_1 + \dots + v_5)(y_1 + \dots + y_5) = t_4(y_1 + \dots + y_5)$ segue que $(t_4 - t_1)y_1 = 0$, $(t_4 - t_1)y_2 = v_1 y_1$ e $(t_4 - t_3)y_3 = v_1 y_2 + v_2 y_1$. Analogamente, $(\alpha_{44} - \alpha_{33})y_3 = y_2 v_1 + y_1 v_2$. Então, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ já que $t_3 = t_4$ implica $\alpha_{44} - \alpha_{33} = 2(t_1 - t_3) \neq 0$. De modo análogo, temos $z_1 = z_2 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Por outro lado, $w_1 y_4 = 0$ e $y_4 w_1 = 0$. Se $y_4 = 0$ então $(t_4 - t_5)y_5 = 0$ e $(\alpha_{44} - \alpha_{55})y_5 = 0$; logo, $y_5 = 0$ já que $\alpha_{44} - \alpha_{55} = -3(t_1 - 2t_3 + t_4) \neq 0$ se $t_4 = t_5$. Mas como $\psi(X_{i_1} \dots X_{i_5}) \neq 0$ temos necessariamente que $y_4 \neq 0$. Portanto, $w_1 = 0$.

$$\text{Façamos } w_2 = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_o^3 x_i x_j, \quad z_3 = \sum_{i,j,k=1}^n \gamma_{ijk} x_o^2 x_i x_j x_k.$$

Como $\alpha_{14} + \alpha_{34} = -\frac{4}{5}(t_1 - 2t_3 + t_4) \neq 0$, vemos que $\alpha_{14} \neq 0$ ou $\alpha_{34} \neq 0$. Se $\alpha_{14} \neq 0$, de

$$\begin{aligned} (\alpha_{15} + \alpha_{45}) x_5 &= u_1 y_4^{(i_2, \dots, i_5)} + y_4 u_1^{(i_5)} = \\ &= \alpha_{14}^{-1} [u_1 (u_1^{(i_2)} z_3^{(i_3, i_4, i_5)}) + (u_1^{(i_2)} z_3^{(i_3, i_4, i_5)}) u_1] \end{aligned}$$

obtemos

$$(2.20) \quad x_5 = \sum_{i,j,k,\ell,p=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} \gamma_{k\ell p} x_i x_j x_k x_\ell x_p.$$

No caso em que $\alpha_{14} = 0$, temos $\alpha_{34} \neq 0$ e (2.20) é obtida por um argumento semelhante. Por outro lado, $(\alpha_{25} + \alpha_{35}) x_5 = w_2 z_3^{(i_2, i_2, i_2)} + z_3^{(i_2, i_2, i_2)} w_2$ fornece

$$x_5 = \sum_{i,j,k,\ell,p=1}^n \beta_{ij} \gamma_{k\ell p}^{(i_2, i_2, i_2)} x_i x_j x_k x_\ell x_p,$$

pois $\alpha_{25} + \alpha_{35} = \frac{1}{10}(t_1 - 2t_3 + t_4)$. Usamos esta última identidade junto com (2.20) para obter

$$w_2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} x_o^3 x_i x_j.$$

Agora,

$$y_4 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{ii_1} \gamma_{jkl}^{(i_2, i_3, i_4)} x_o x_i x_j x_k x_\ell$$

já que $(\alpha_{14} + \alpha_{34})Y_4 = u_1 z_3^{(i_2, i_3, i_4)} + z_3^{(i_2, i_3, i_4)} u_1$. Também,
 $\alpha_{24} = \frac{3}{10}(t_1 - 2t_3 + t_4) \neq 0$ e então $\alpha_{24}Y_4 = w_2 w_2^{(i_3, i_4)}$ fornece

$$Y_4 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} a_{ki_3} a_{\ell i_4} X_i X_j X_k X_\ell.$$

Logo,

$$z_3 = \sum_{i,j,k=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} a_{ki_3} X_i^2 X_j X_k,$$

$$Y_4 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} a_{ki_3} a_{\ell i_3} X_i X_j X_k X_\ell,$$

$$X_5 = \sum_{i,j,k,\ell,p=1}^n a_{ii_1} a_{ji_2} a_{ki_3} a_{\ell i_4} a_{pi_5} X_i X_j X_k X_\ell X_p.$$

De $(t_4 - t_5 + \alpha_{44} - \alpha_{55})Y_5 = v_1 Y_4 + Y_4 v_1$ e $(t_3 - t_4 + \alpha_{33} - \alpha_{44})z_4 = v_1 z_3 + z_3 v_1$ segue que

$$Y_5 = \frac{1}{5} \sum_{i,j,k,p=1}^n a_{i_0} a_{ji_1} a_{ki_2} a_{\ell i_3} a_{pi_4} X_i X_j X_k X_\ell X_p,$$

$$z_4 = \frac{2}{5} \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{i_0} a_{ji_1} a_{ki_2} a_{\ell i_3} X_i X_j X_k X_\ell,$$

pois $t_4 - t_5 + \alpha_{44} - \alpha_{55} = -3(t_1 - 2t_3 + t_4)$, $t_3 - t_4 + \alpha_{33} - \alpha_{44} = -2(t_1 - 2t_3 + t_4)$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned} & (\alpha_{14} + \alpha_{34})Y_5^{(i_1, \dots, i_1)} = \\ & = u_1 z_4^{(i_1, \dots, i_1)} + u_2 z_3^{(i_1, i_1, i_1)} + z_4^{(i_1, \dots, i_1)} u_1 + z_3^{(i_1, i_1, i_1)} u_2, \end{aligned}$$

obtemos

$$y_5 = \sum_{i,j,k,\ell,p=1}^n \left(\frac{3}{10} a_{io} a_{ii_1} - \theta_{ij} \right) a_{ki_1} a_{li_1} a_{pi_1} x_i x_j x_k x_\ell x_p,$$

onde θ_{ij} é a coordenada de u_2 na direção de $x_o^3 x_i x_j$. Temos então

$$u_2 = \frac{4}{5} \sum_{i,j=1}^n a_{io} a_{ji_1} x_o^3 x_i x_j.$$

Analogamente, de $\alpha_{24} y_5^{(i_1, i_2, i_1, i_2, i_3)} = w_2 w_3 + w_3 w_2$ obtemos

$$w_3 = \frac{3}{5} \sum_{i,j,k=1}^n a_{io} a_{ji_1} a_{ki_1} x_o^2 x_i x_j x_k;$$

$$\text{de } u_1 u_3 + u_2^2 + u_3 u_1 = \alpha_{12} w_4^{(i_1, i_1)} = 0,$$

$$u_3 = \frac{6}{5^2} \sum_{i,j,k=1}^n a_{io} a_{jo} a_{ki_1} x_o^2 x_i x_j x_k;$$

$$\text{de } u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_3 u_2 = \alpha_{12} w_5^{(i_1, i_1)} = 0,$$

$$u_4 = \frac{4}{5^3} \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{io} a_{jo} a_{ko} a_{li_1} x_o x_i x_j x_k x_\ell;$$

$$\text{de } u_1 w_4 + u_2 w_3 + u_3 w_2 + w_4 u_1 + w_3 u_2 + w_2 u_3 = (\alpha_{13} + \alpha_{23}) z_5^{(i_1, i_1, i_2)} = 0,$$

$$w_4 = \frac{3}{5^2} \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{io} a_{jo} a_{ki_1} a_{li_2} x_o x_i x_j x_k x_\ell;$$

$$\text{de } (1 - t_4 - \alpha_{44}) w_4 = v_1 w_3 + w_3 v_1 + v_2 w_2 + w_2 v_2,$$

$$v_2 = \frac{2}{5} \sum_{i,j=1}^n a_{io} a_{jo} x_o^3 x_i x_j,$$

$$\text{pois } 1-t_4-\alpha_{44} = -2(t_1-2t_3+t_4) ; \quad \text{de} \quad (1-t_4-\alpha_{44})u_4 = \\ = v_1u_3 + v_2u_2 + v_3u_1 + u_3u_1 + u_2v_2 + u_1v_3 ,$$

$$v_3 = \frac{2}{5^2} \sum_{i,j,k=1}^n a_{io}a_{jo}a_{ko}x_o^2x_ix_jx_k .$$

Agora, um cálculo direto mostra que de

$$v_4 = (1-t_4-\alpha_{44})^{-1}(v_1v_3+v_2^2+v_3v_1), \quad u_5 = (1-t_5-\alpha_{55})^{-1}(v_1u_4+v_2u_3+v_3u_2+v_4u_1+u_4v_1 + \\ u_3v_2+u_2v_3+u_4v_1), \quad v_5 = (1-t_5-\alpha_{55})^{-1}(v_1v_4+v_2v_3+v_3v_2+v_4v_1), \quad w_5 = (1-t_5-\alpha_{55})^{-1}(v_1w_4+ \\ v_2w_3+v_3w_2+w_4v_1+w_3v_2+w_2v_3), \quad z_5 = (1-t_5-\alpha_{55})^{-1}(v_1z_4+v_2z_3+z_4v_1+z_3v_2) \quad (\text{note que} \\ 1-t_5-\alpha_{55} = -5(t_1-2t_3+t_4)), \quad \text{obtemos, respectivamente,}$$

$$v_4 = \frac{1}{5^3} \sum a_{io}a_{jo}a_{ko}a_{lo}x_o^2x_ix_jx_kx_l ,$$

$$u_5 = \frac{1}{5^4} \sum a_{io}a_{jo}a_{ko}a_{lo}a_{pi_1}x_ix_jx_kx_lx_p ,$$

$$v_5 = \frac{1}{5^4} \sum a_{io}a_{jo}a_{ko}a_{lo}a_{po}x_ix_jx_kx_lx_p ,$$

$$w_5 = \frac{1}{5^3} \sum a_{io}a_{jo}a_{ko}a_{li_1}a_{pi_1}x_ix_jx_kx_lx_p ,$$

$$z_5 = \frac{1}{5^2} \sum a_{io}a_{jo}a_{ki_1}a_{li_2}a_{pi_3}x_ix_jx_kx_lx_p ,$$

$$1 \leq i,j,k,l,p \leq n.$$

No caso em que $t_1 = t_3$ ou $t_1 = t_4$, a prova é análoga. Δ

TEOREMA 2.15 Suponhamos que $m=5$. A álgebra $A \in \Omega$ é uma α -álgebra se e somente se $A \in \Omega_0 \cup \Omega_2$.

Prova. Seja $A \in \Omega - \Omega_0$ uma α -álgebra. Temos que $A = A(P)$ para algum $P \in H - H_0$ e logo $f(k) = 0$ para algum k , $2 \leq k \leq 5$. Como $f(5) \neq 0$ (lema 2.9), $3f(2) = 2f(3)$ e $f(2) = f(3) = f(4) = 0$ implica $f(5) = 0$, temos duas possibilidades: $f(2) = f(3) = 0$, $f(4) \neq 0$; ou $f(2) \neq 0$, $f(3) \neq 0$, $f(4) = 0$. No primeiro caso, $t_1 = t_2$ e $t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0$. No segundo, $t_1 \neq t_2$, $t_4 = 2t_1 - 3t_2 + t_3$ e a condição (iv) do teorema 2.17 (abaixo) fornece $4t_1 - 4t_2 + t_3 - t_5 \neq 0$; também, de $f(5) \neq 0$ obtemos $t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0$. Então, em qualquer caso, $P \in H_2$, isto é, $A \in \Omega_2$. Reciprocamente, suponhamos que $A \in \Omega_2$, $A = A(P)$. Se $P \in H_2'$ então A é uma α -álgebra pelo lema 2.14. No caso $P \in H_2''$, as hipóteses e as condições (i)-(v) do teorema 2.17 estão satisfeitas e logo A é uma α -álgebra. Δ

5. Outros Exemplos de α -Álgebras

Nesta seção, obteremos um método para construir α -álgebras de dimensão $\binom{m+n}{m}$, $m \geq 5$, que não estão na classe Ω_0 .

Preservaremos a notação da seção anterior. Denote por ψ_k ($k=1,2,3$) o operador linear de $A(P)$ ($P \in H$) que age como a^* ($a \in A(n)$) exceto pelo fato de que: $w_m = 0$ no caso $k=1$, $v_{m-1} = 0$,

$$v_m = -(f(m))^{-1} \sum_{r=2}^{m-2} v_r v_{m-r} \quad \text{nos casos } k=2,3;$$

$$u_m = 2m^{-(m-1)} \sum_{|i^*|_0 = m-1} \sum_{i=1}^n A_{i^*}^{i^*} a_{ii_1} x_{i^*}^{i^*} x_i$$

no caso $k=2$; $u_m=0$ se $t_1=t_m$ ou $\alpha_{11} = \alpha_{mm}$, e

$$u_m = (1 - m(t_1 - t_m)^{-1} \alpha_{m-1,m}) \sum_{|i^*_O|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{i^*_O}^{i^*} a_{ii_1} X_{i^*_O}^{i^*} X_{i_1}$$

se $t_1 \neq t_m$, $\alpha_{11} \neq \alpha_{mm}$, no caso $k=3$.

LEMA 2.16 Suponhamos que $m \geq 5$. Seja P em H tal que $f(s) \neq 0$ ($1 \leq s \leq m$, $s \neq m-1$) e $f(m-1) = 0$. Então, ψ_k é um automorfismo de $A(P)$ no caso em que: $t_2 = t_m$, $\alpha_{22} = \alpha_{mm}$ e $k=1$; $t_1 = t_{m-1}$, $\alpha_{1m} + \alpha_{m-1,m} = 0$ e $k=2$; $\alpha_{1m}(t_1 - t_m) - \alpha_{m-1,m}(\alpha_{11} - \alpha_{mm}) = 0$ e $k=3$.

Prova. O argumento para provar que ψ_k preserva a multiplicação em $A(P)$ é essencialmente aquele da prova da proposição 2.2. Aqui, apontaremos somente os passos novos. Nos cálculos que seguem usaremos frequentemente a identidade (2.4).

No caso $t_2 = t_m$, $\alpha_{22} = \alpha_{mm}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m-2} v_r w_{m-r} &= (t_2 - t_m)^{m-(m-2)} \sum_{|i^*_O|=m-2} \sum_{i,j=1}^n A_{i^*_O}^{i^*} a_{ii_1} a_{ji_2} X_{i^*_O}^{i^*} X_{i_1} X_{j_2} = 0 = \\ &= t_2 w_m; \end{aligned}$$

analogamente, $\sum_{r=0}^{m-2} w_{m-r} v_r = \alpha_{22} w_m$. Se $t_1 = t_{m-1}$ e $\alpha_{1m} + \alpha_{m-1,m} = 0$, então

$$\sum_{r=0}^{m-1} v_r u_{m-r} = (t_1 + t_m + m\alpha_{1m})^{m-(m-1)} \sum_{|i^*_O|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{i^*_O}^{i^*} a_{ii_1} X_{i^*_O}^{i^*} X_{i_1} = t_1 u_m$$

e

$$\sum_{r=0}^{m-1} u_{m-r} v_r = (\alpha_{11} + \alpha_{mm} - m\alpha_{1m}) m^{-(m-1)} \sum_{|i^*|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{00}^{i^*} a_{ii_1} X_{00}^{i^*} X_i =$$

$$= \alpha_{11} u_m.$$

Agora, suponhamos que $\alpha_{1m}(t_1 - t_m) - \alpha_{m-1,m}(\alpha_{11} - \alpha_{mm}) = 0$. Como $f(m) \neq 0$, temos tres possibilidades: $t_1 = t_m$ e $\alpha_{11} \neq \alpha_{mm}$; $t_1 \neq t_m$ e $\alpha_{11} = \alpha_{mm}$; $t_1 \neq t_m$ e $\alpha_{11} \neq \alpha_{mm}$. Na primeira, $\alpha_{m-1,m} = 0$. Na segunda, $\alpha_{1m} = 0$; segue então que $t_1 - t_m - m\alpha_{m-1,m} = \alpha_{mm} - \alpha_{11} = 0$, já que o fato de que $f(m-1) = 0$ fornece $m\alpha_{m-1,m} + \alpha_{mm} = \alpha_{m-1,m-1} = 1 - t_{m-1}$ e $\alpha_{1m} = 0$ implica $t_{m-1} = t_m$. Também, na primeira possibilidade, temos $\alpha_{11} - \alpha_{mm} - m\alpha_{1m} = t_m - t_1 = 0$. Então,

$$\sum_{r=0}^{m-1} v_r u_{m-r} = (t_1 - t_m - m\alpha_{m-1,m}) m^{-(m-1)} \sum_{|i^*|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{00}^{i^*} a_{ii_1} X_{00}^{i^*} X_i =$$

$$= 0 = t_1 u_m$$

e

$$\sum_{r=0}^{m-1} u_{m-r} v_r = (\alpha_{11} - \alpha_{mm} - m\alpha_{1m}) m^{-(m-1)} \sum_{|i^*|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{00}^{i^*} a_{ii_1} X_{00}^{i^*} X_i = 0 =$$

$$= \alpha_{11} u_m.$$

Na terceira possibilidade, temos:

$$\sum_{r=0}^{m-1} v_r u_{m-r} = [t_1 - t_m - m\alpha_{m-1,m} + t_m (1 - m(t_1 - t_m))^{-1} \alpha_{m-1,m}] \sum_{|i^*|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{00}^{i^*} a_{ii_1} X_{00}^{i^*} X_i$$

$$= t_1 u_m$$

e

$$\sum_{r=0}^{m-1} u_{m-r} v_r = [\alpha_{11} - \alpha_{mm} - m\alpha_{1m} + \alpha_{mm} (1 - m(t_1 - t_m)^{-1} \alpha_{m-1,m})] \sum_{|i_0^*|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{0i}^{i^*} a_{ii_1} X_0^{i^*} X_i$$

$$= \alpha_{11} u_m,$$

já que

$$t_1 - t_m - m\alpha_{m-1,m} + t_m (1 - m(t_1 - t_m)^{-1} \alpha_{m-1,m}) = t_1 (1 - m(t_1 - t_m)^{-1} \alpha_{m-1,m})$$

e

$$\alpha_{11} - \alpha_{mm} - m\alpha_{1m} + \alpha_{mm} (1 - m(t_1 - t_m)^{-1} \alpha_{m-1,m}) = \alpha_{11} (1 - m(t_1 - t_m)^{-1} \alpha_{m-1,m}).$$

Finalmente, podemos verificar que ψ_k ($k=1,2,3$) é não-singular como na prova do teorema 2.6. A

TEOREMA 2.17 Suponhamos que $m \geq 5$ e seja $P \in H$ tal que $f(s) \neq 0$,

($1 \leq s < m-1$) e $f(m-1) = 0$. Então, $A(P)$ é uma α -álgebra se e somente se as seguintes condições estão satisfeitas:

- (i) $f(m) \neq 0$,
- (ii) $t_2 \neq t_m$ ou $\alpha_{22} \neq \alpha_{mm}$;
- (iii) $t_1 \neq t_{m-1}$ ou $\alpha_{1m} + \alpha_{m-1,m} \neq 0$;
- (iv) $\alpha_{1m} (t_1 - t_m) - \alpha_{m-1,m} (\alpha_{11} - \alpha_{mm}) \neq 0$;
- (v) $\alpha_{p,m-1} \neq 0$ para algum p ($1 \leq p \leq m-1$).

Prova. ($\Leftarrow$). Denotemos por ψ um automorfismo de $A(P)$. Como na prova do teorema 2.6, temos que $\psi(X_0^{m-p} X^{i^*}) = a^*(X_0^{m-p} X^{i^*})$ ($2 \leq p \leq m$),

$$\psi(X_0^m) = X_0^m + v_1 + \dots + v_m, \quad \psi(X_0^{m-1} X_{i_1}) = u_1 + \dots + u_m, \quad \psi(X_0^{m-2} X_{i_1} X_{i_2}) =$$

$$= w_2 + \dots + w_m \quad (v_i, u_i, w_i \in V_i), \text{ onde } v_k \quad (1 \leq k < m-1), \quad u_{1+k} \quad (1 \leq k < m-2) \quad \text{e}$$

w_{2+k} ($1 \leq k < m-3$) são dados, respectivamente, por (2.9), (2.10) e (2.11).

Se $t_2 \neq t_m$, de $(t_2 - t_m)w_m = \sum_{r=1}^{m-2} v_r w_{m-r}$ e a identidade (2.4), obtemos

$$w_m = m^{-(m-2)} \sum_{|i^*|_0 = m-2} \sum_{i,j=1}^n A_{i^*}^{i^*} a_{ii_1} a_{ji_2} x_{i^*}^{i^*} x_i x_j ;$$

se $\alpha_{22} \neq \alpha_{mm}$, esta última identidade é obtida por um argumento semelhante.

De $\psi[X_O^m (X_O^{m-1} x_{i_1})] = \psi(X_O^m) \psi(X_O^{m-1} x_{i_1})$ e $\psi[(X_O^{m-1} x_{i_1})^2] = [\psi(X_O^{m-1} x_{i_1})]^2$ obtemos

$$(t_1 - t_{m-1}) u_{m-1} = m^{-(m-2)} (m-1) (t_1 - t_{m-1}) \sum_{|i^*|_0 = m-2} \sum_{i=1}^n A_{i^*}^{i^*} a_{ii_1} x_{i^*}^{i^*} x_i$$

e

$$(\alpha_{1m} + \alpha_{m-1,m}) [(m-1) A_{i^*}^{i^*} a_{ii_1} - m^{(m-2)} \beta_{i^*}] a_{ji_1} = 0 \quad (1 \leq j \leq n),$$

onde i^* é a soma de i^* com o multi-índice cuja única coordenada não-nula é um 1 na i -ésima posição e β_{i^*} é a coordenada de u_{m-1} na direção de $x_O x_i^{i^*}$. Agora, temos que $a_{ii_1} = 0$ ($1 \leq i \leq n$) implica $w_r = 0$ ($2 \leq r \leq m$) e logo o determinante da matriz associada a ψ com respeito à base X é 0; uma contradição. Isto mostra que existe um j_1 tal que $a_{j_1 i_1} \neq 0$. Então, pela condição (iii), segue que

$$u_{m-1} = m^{-(m-2)} \sum_{|i^*|_0 = m-2} \sum_{i=1}^n A_{i^*}^{i^*} a_{ii_1} x_{i^*}^{i^*} x_i.$$

Em seguida, usamos as identidades $\psi[X_O^m(X_O^{m-1}X_{i_1})] = \psi(X_O^m)\psi(X_O^{m-1}X_{i_1})$, $\psi[(X_O^{m-1}X_i)X_O^m] = \psi(X_O^{m-1}X_i)\psi(X_O^m)$ e (2.4) para obter

$$(t_1 - t_m)u_m = m^{-(m-1)}(t_1 - t_m - \alpha_{m-1,m}) \sum_{|i_O^*|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{i_O^*}^{i_O^*} a_{ii_1} X_{i_O^*}^{i_O^*} X_i +$$

$$\alpha_{m-1,m} \sum_{|i_O^*|=m-1} \sum_{i=1}^n \gamma_{i_O^*}^{i_O^*} a_{ii_1} X_{i_O^*}^{i_O^*} X_i$$

e

$$(\alpha_{11} - \alpha_{mm})u_m = m^{-(m-1)}(\alpha_{11} - \alpha_{mm} - \alpha_{1m}) \sum_{|i_O^*|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{i_O^*}^{i_O^*} a_{ii_1} X_{i_O^*}^{i_O^*} X_i +$$

$$\alpha_{1m} \sum_{|i_O^*|=m-1} \sum_{i=1}^n \gamma_{i_O^*}^{i_O^*} a_{ii_1} X_{i_O^*}^{i_O^*} X_i ,$$

onde $\gamma_{i_O^*}$ é a coordenada de v_{m-1} na direção de $X_O X_{i_O^*}^{i_O^*}$. Somando estas duas últimas identidades obtemos, para $1 \leq i \leq n$,

$$m(f(m))^{-1}[\alpha_{1m}(t_1 - t_m) - \alpha_{m-1,m}(\alpha_{11} - \alpha_{mm})](m^{-1}\gamma_{i_O^*}^{i_O^*} - m^{-(m-1)}A_{i_O^*}^{i_O^*})a_{ii_1} = 0.$$

Então,

$$v_{m-1} = m^{-(m-1)} \binom{m}{m-1} \sum_{|i_O^*|=m-1} A_{i_O^*}^{i_O^*} X_O^{m-1} X_{i_O^*}^{i_O^*}$$

e logo

$$u_m = m^{-(m-1)} \sum_{|i_O^*|=m-1} \sum_{i=1}^n A_{i_O^*}^{i_O^*} a_{ii_1} X_{i_O^*}^{i_O^*} X_i , \quad v_m = \sum_{|i_O^*|=m} A_{i_O^*}^{i_O^*} X_{i_O^*}^{i_O^*} .$$

Portanto, $\psi = a^*$ e, como na prova do teorema 2.6, vemos que $a \in A(n)$.

($\implies$) As condições (i)-(iv) seguem dos lemas 2.9 e 2.16. Agora, suponhamos que $\alpha_{p,m-1} = 0$ ($1 \leq p < m-1$); segue que $t_1 = t_2 = \dots = t_{m-1}$. Então, uma indução fácil sobre r e o fato de que $\sum_{s=0}^t (-1)^s \binom{t}{t-s} = 0$ fornecem $\alpha_{rm} = \binom{m}{r}^{-1} (-1)^{r-1} (t_1 - t_m)$ ($1 \leq r \leq m$). Se m é ímpar, temos $\alpha_{1m} + \alpha_{m-1,m} = 0$; uma contradição por (iii). No caso em que m é par, afirmamos que ψ_2 (no lema 2.16) é um automorfismo. De fato, temos:

$$\begin{aligned} t_1 - t_m - m\alpha_{m-1,m} &= 1 - t_m - \sum_{r=1}^{m-1} \binom{m}{r} \binom{m}{m-r} \alpha_{rm} = 1 - t_m + \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r \binom{m}{m-r} (t_1 - t_m) = \\ &= 1 - 2t_1 + t_m. \end{aligned}$$

Logo, pela identidade (2.4), temos

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m-1} u_{m-r}^{(i_1)} v_r &= (\alpha_{11} - \alpha_{mm} - m\alpha_{1m})^{m-(m-1)} \sum_{|i^*|_0=m-1} \sum_{i=1}^n A_{0i}^{i^*} a_{ii_1} X_i^{i^*} X_{i_1} = \\ &= 0 = \alpha_{11} u_m^{(i_1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m-1} v_r u_{m-r}^{(i_1)} &= (t_1 - t_m - m\alpha_{m-1,m})^{m-(m-1)} \sum_{|i^*|_0=m-1} \sum_{i=1}^n A_{0i}^{i^*} a_{ii_1} X_i^{i^*} X_{i_1} = \\ &= 0 = t_1 u_m \end{aligned}$$

e, como na prova do lema 2.16, podemos concluir que ψ_2 é um automorfismo. Mas isto não é possível já que ψ_2 não é um α -operador. Δ

Como um exemplo, observamos que $P=(t_0, t_1, \dots, t_m)$, onde $t_0=t_2=t_{m-1}=1$ e $t_k=0$ ($k \neq 0, 2, m-1$), satisfaz as hipóteses e as condições (i)-(v) do teorema 2.17. Δ

oOo

Apêndice

Vamos provar a identidade

$$(2.4) \quad \alpha_{p\ell} \binom{m-\ell}{k} = \sum_{r=0}^k \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{k-r} \alpha_{p+r, \ell+r} \quad (\ell=p+q, 0 \leq \ell \leq m, 0 \leq k \leq m-\ell)$$

fazendo indução sobre k .

$k=0$. É imediato verificar que a identidade (2.4) é válida para $k=0$.

$k=1$. Devemos mostrar que

$$\alpha_{p\ell} \binom{m-\ell}{1} = \binom{m-q}{1} \alpha_{p, \ell+1} + \binom{m-p}{1} \alpha_{p+1, \ell+1} \quad (\ell=p+q, 0 \leq \ell \leq m).$$

Se $p=0$ então para todo ℓ ($0 \leq \ell \leq m$) temos

$$\begin{aligned} \binom{m-\ell}{1} \alpha_{0, \ell+1} + \binom{m}{1} \alpha_{1, \ell+1} &= \binom{m-\ell}{1} \alpha_{0, \ell+1} + \binom{m-\ell}{1} (\alpha_{0\ell} - \alpha_{0, \ell+1}) = \\ &= \alpha_{0\ell} \binom{m-\ell}{1}. \end{aligned}$$

Suponhamos que já mostramos para todo $p < s$ e todo ℓ . Para $p=s$ temos:

$$\begin{aligned} \alpha_{s\ell} \binom{m-\ell}{1} &= \binom{m}{s}^{-1} \{ \alpha_{0, \ell-s} \binom{m-\ell}{1} \binom{m-(\ell-s)}{s} - \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell-s)}{s-r} \alpha_{r\ell} \binom{m-\ell}{1} \} \\ &= \binom{m}{s}^{-1} \{ \binom{m-\ell}{1} \binom{m-(\ell-s)}{s} \binom{m-(\ell-s)}{1}^{-1} [\binom{m-(\ell-s)}{1} \alpha_{0, \ell-s+1} + \binom{m}{1} \alpha_{1, \ell-s+1}] \\ &\quad - \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell-s)}{s-r} [\binom{m-(\ell-r)}{1} \alpha_{r, \ell+1} + \binom{m-r}{1} \alpha_{r+1, \ell+1}] \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{m-(\ell-s)}{1} \binom{m}{s}^{-1} \{ \alpha_{0, \ell+1-s} \binom{m-(\ell+1-s)}{s}, - \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell+1-s)}{s-r} \alpha_{r, \ell+1} \} \\
 &+ \binom{m}{s}^{-1} \binom{m-\ell}{1} \binom{m-(\ell-s)}{s} [\alpha_{0, \ell-s} - \alpha_{0, \ell-s+1}] - \binom{m}{s}^{-1} \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell-s)}{s-r} \binom{m-r}{1} \alpha_{r+1, \ell+1} \\
 &= \binom{m-(\ell-s)}{1} \alpha_{s, \ell+1} + \binom{m-s}{1} \binom{m}{s+1}^{-1} \binom{m-(\ell-s)}{s+1} \alpha_{0, \ell-s} - \binom{m}{s}^{-1} \binom{m-\ell}{1} \binom{m-(\ell-s)}{s} \alpha_{0, \ell-s+1} \\
 &- \binom{m}{s}^{-1} \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell-s)}{s-r} \binom{m-r}{1} \alpha_{r+1, \ell+1} .
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a fórmula recorrente (2.2) que define $\alpha_{s, \ell+1}$, obtemos

$$- \binom{m}{s}^{-1} \binom{m-(\ell+1-s)}{s} \alpha_{0, \ell-s+1} = -\alpha_{s, \ell+1} - \binom{m}{s}^{-1} \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell+1-s)}{s-r} \alpha_{r, \ell+1} .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 - \binom{m}{s}^{-1} \binom{m-\ell}{1} \binom{m-(\ell-s)}{s} \alpha_{0, \ell-s+1} &= (m-(\ell-s)) \{ -\alpha_{s, \ell+1} - \binom{m}{s}^{-1} \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m}{r} \binom{m-(\ell+1-s)}{s-r} \alpha_{r, \ell+1} \} \\
 &= - \binom{m}{s}^{-1} \sum_{r=0}^s (s+1-r) \binom{m}{r} \binom{m-(\ell-s)}{s+1} \alpha_{r, \ell+1} .
 \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
 - \binom{m}{s}^{-1} \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m}{r} \binom{m-r}{1} \binom{m-(\ell-s)}{s-r} \alpha_{r+1, \ell+1} &= \binom{m}{s}^{-1} \sum_{i=1}^s \binom{m}{i-1} \binom{m-(\ell-s)}{s+1-i} \binom{m-(i+1)}{1} \alpha_{i, \ell+1} \\
 &= - \binom{m}{s}^{-1} \sum_{i=1}^s i \binom{m}{i} \binom{m-(i+1)}{1} \alpha_{i, \ell+1} = - \binom{m}{s}^{-1} \sum_{r=1}^s r \binom{m}{r} \binom{m-(i+1)}{1} \alpha_{i, \ell+1} .
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{sl} \binom{m-l}{1} &= \binom{m-(l-s)}{1} \alpha_{s, l+1} + \binom{m-s}{1} \binom{m}{s+1}^{-1} \binom{m-(l-s)}{s+1} \alpha_{0, l-s} \\
 &\quad - \binom{m}{s}^{-1} (s+1) \sum_{r=0}^s \binom{m}{r} \binom{m-(l-s)}{s+1-r} \alpha_{r, l+1} \\
 &= \binom{m-(l-s)}{1} \alpha_{s, l+1} + \binom{m-s}{1} \binom{m}{s+1}^{-1} \{ \alpha_{0, l-s} \binom{m-(l-s)}{s+1} \\
 &\quad - \sum_{r=0}^s \binom{m}{r} \binom{m-(l-s)}{s+1-r} \alpha_{r, l+1} \} \\
 &= \binom{m-(l-s)}{1} \alpha_{s, l+1} + \binom{m-s}{1} \alpha_{s+1, l+1} .
 \end{aligned}$$

$k > 1$. Suponhamos que a identidade (2.4) é válida para todo $k=s$, $s \geq 1$. Vamos mostrar que ela vale para $k=s+1$. Temos:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{pl} \binom{m-l}{s+1} &= (s+1)^{-1} (m-l-s) \alpha_{pl} \binom{m-l}{s} = (s+1)^{-1} (m-l-s) \sum_{r=0}^s \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s-r} \alpha_{p+r, l+s} \\
 &= (s+1)^{-1} (m-l-s) \sum_{r=0}^s \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s+1-r} (s+1-r) (m-q-s+r)^{-1} \alpha_{p+r, l+s} .
 \end{aligned}$$

Agora, usando a identidade (2.4) com $k=1$ obtemos

$$\alpha_{p+r, l+s} \binom{m-l-s}{1} = (m-q-s+r) \alpha_{p+r, l+s+1} + (m-p-r) \alpha_{p+r+1, l+s+1} .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{pl} \binom{m-l}{s+1} &= (s+1)^{-1} \sum_{r=0}^s \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s+1-r} (s+1-r) \alpha_{p+r, l+s+1} \\
 &\quad + (s+1)^{-1} \{ \sum_{r=0}^s \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s+1-r} (s+1-r) (m-q-s+r)^{-1} (m-p-r) \alpha_{p+r+1, l+s+1} \} .
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^{s-1} \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s+1-r} (s+1-r) (m-q-s+r)^{-1} (m-p-r) \alpha_{p+r+1, \ell+s+1} \\
 &= \sum_{i=1}^s \binom{m-p}{i-1} \binom{m-q}{s+2-i} (s+2-i) (m-q-s+i+1)^{-1} (m-p-i+1) \alpha_{p+i, \ell+s+1} \\
 &= \sum_{i=1}^s i \binom{m-p}{i} \binom{m-q}{s+1-i} \alpha_{p+i, \ell+s+1} \\
 &= \sum_{r=1}^s r \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s+1-r} \alpha_{p+r, \ell+s+1} ,
 \end{aligned}$$

temos então que

$$\begin{aligned}
 \alpha_{p\ell} \binom{m-\ell}{s+1} &= \binom{m-q}{s+1} \alpha_{p, \ell+s+1} + \sum_{r=1}^s \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s+1-r} \alpha_{p+r, \ell+s+1} \\
 &\quad + \binom{m-p}{s} (s+1)^{-1} (m-p-s) \alpha_{p+s+1, \ell+s+1} \\
 &= \sum_{r=0}^{s+1} \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s+1-r} \alpha_{p+r, \ell+s+1} .
 \end{aligned}$$

Agora, faremos uso da identidade (2.4) para provar a identidade

$$(2.8) \quad t_k + \alpha_{kk} = 1 + f(k) \quad (2 \leq k \leq m) .$$

Primeiro, afirmamos que

$$\alpha_{sk} = \binom{m}{s}^{-1} \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^r \binom{m-(k-s)}{r} \binom{m-(k-s+r)}{s-r} (t_{k-s+r} - t_k) \quad (1 \leq s \leq k) .$$

De fato,

$$\alpha_{1k} = \binom{m}{1}^{-1} \binom{m-(k-1)}{1} (t_{k-1} - t_k)$$

por definição. Suponhamos que já provamos para todo s , $1 \leq s < \ell$. Temos então:

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell k} &= \binom{m}{\ell}^{-1} \left\{ t_{k-\ell} \binom{m-(k-\ell)}{\ell} - \sum_{p=0}^{\ell-1} \binom{m}{p} \binom{m-(k-\ell)}{\ell-p} \alpha_{pk} \right\} \\ &= \binom{m}{\ell}^{-1} \left\{ \binom{m-(k-\ell)}{\ell} (t_{k-\ell} - t_k) - \sum_{p=1}^{\ell-1} \binom{m}{p} \binom{m-(k-\ell)}{\ell-p} \alpha_{pk} \right\}. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} - \sum_{p=1}^{\ell-1} \binom{m}{p} \binom{m-(k-\ell)}{\ell-p} \alpha_{pk} &= - \sum_{p=1}^{\ell-1} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \binom{m-(k-\ell)}{\ell-p} \binom{m-(k-p)}{q} \binom{m-p+q}{p-q} (t_{k-p+q} - t_k) \\ &= - \sum_{r=1}^{\ell-1} \binom{m-(k-\ell+r)}{\ell-r} \sum_{t=0}^{r-1} (-1)^t \binom{m-(k-\ell+r-t)}{t} \binom{m-(k-\ell)}{r-t} (t_{k-\ell+r} - t_k) \\ &= - \sum_{r=1}^{\ell-1} \binom{m-(k-\ell)}{r} \binom{m-(k-\ell+r)}{\ell-r} \sum_{t=0}^{r-1} (-1)^t \binom{r}{t} (t_{k-\ell+r} - t_k) \\ &= \sum_{r=1}^{\ell-1} (-1)^r \binom{m-(k-\ell)}{r} \binom{m-(k-\ell+r)}{\ell-r} (t_{k-\ell+r} - t_k), \end{aligned}$$

já que $\sum_{t=0}^r (-1)^t \binom{r}{t} = 0$. Logo,

$$\alpha_{\ell k} = \binom{m}{\ell}^{-1} \sum_{r=0}^{\ell-1} (-1)^r \binom{m-(k-\ell)}{r} \binom{m-(k-\ell+r)}{\ell-r} (t_{k-\ell+r} - t_k).$$

A afirmação está demonstrada.

Agora, a identidade (2.4) fornece

$$\binom{m}{k} = \sum_{s=0}^k \binom{m}{s} \binom{m}{k-s} \alpha_{sk} = \binom{m}{k} t_k + \binom{m}{k} \alpha_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} \binom{m}{s} \binom{m}{k-s} \alpha_{sk}$$

e disto segue que

$$t_k + \alpha_{kk} = 1 - \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s=1}^{k-1} \binom{m}{s} \binom{m}{k-s} \alpha_{sk} .$$

Logo, usando a identidade que provamos no parágrafo anterior, obtemos

$$t_k + \alpha_{kk} = 1 - \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s=1}^{k-1} \binom{m}{k-s} \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^r \binom{m-(k-s)}{r} \binom{m-(k-s+r)}{s-r} (t_{k-s+r} - t_k)$$

$$= 1 - \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^r \binom{k}{s} \binom{s}{r} (t_{k-s+r} - t_k)$$

$$= 1 - \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{s=k-p}^{k-1} (-1)^{p+s-k} \binom{k}{s} \binom{s}{p+s-k} (t_p - t_k)$$

$$= 1 - \sum_{p=1}^{k-1} \binom{k}{p} \sum_{s=k-p}^{k-1} (-1)^{p+s-k} \binom{p}{k-s} (t_p - t_k)$$

$$= 1 - \sum_{p=1}^{k-1} \binom{k}{p} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \binom{p}{p-q} (t_p - t_k)$$

$$= 1 + \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^p \binom{k}{p} (t_p - t_k)$$

$$= 1 + f(k) .$$

CAPÍTULO III

β e γ -ÁLGEBRAS

Neste capítulo, estudaremos as álgebras obtidas a partir das α -álgebras por duplicação (veja a seção 3 do capítulo I).

1. A Classe $\Omega^{\otimes}$

Como no capítulo II, V será um espaço vetorial real fixo de dimensão $\binom{m+n}{m}$. Se $\psi: V \rightarrow V$ é um operador linear então a aplicação $(x, y) \in V \times V \rightarrow \psi(x) \otimes \psi(y) \in V \otimes V$ é bilinear e logo existe um único operador linear $\psi^{\otimes}: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ que leva $x \otimes y$ em $\psi(x) \otimes \psi(y)$. Se ψ é um α -operador a^* , escreveremos $a^{\otimes}$ ao invés de $(a^*)^{\otimes}$. Um operador do tipo $a^{\otimes}$ (lembramos que $a \in A(n)$, o grupo afim do $\mathbb{R}^n$) será denominado um **β -operador** de $V \otimes V$.

Se $X = \{x_0^{m-p} x^{i*} : 0 \leq p \leq m, |i^*| = p\}$ é a base de V fixada no início do capítulo II, então o conjunto $X^{\otimes}$ de "monômios duplos" $x_0^{m-p} x^{u*} \otimes x_0^{m-q} x^{v*}$ ($0 \leq p, q \leq m, |u^*| = p, |v^*| = q$) é uma base para $V \otimes V$. Ordenemos esta base dizendo que $x_0^{m-\ell} x^{f*} \otimes x_0^{m-s} x^{g*}$ precede $x_0^{m-p} x^{u*} \otimes x_0^{m-q} x^{v*}$ se $x_0^{m-\ell} x^{f*}$ precede $x_0^{m-p} x^{u*}$ ou se $x_0^{m-s} x^{g*}$ precede $x_0^{m-q} x^{v*}$ no caso em que $x_0^{m-\ell} x^{f*} = x_0^{m-p} x^{u*}$. Denote por U_i ($0 \leq i \leq 2m$) o subespaço de $V \otimes V$ gerado pelos monômios $x_0^{m-p} x^{u*} \otimes x_0^{m-q} x^{v*}$ com $p+q=i$. Temos:

$$V \otimes V = U_0 \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_{2m} \quad \text{e} \quad U_i = \bigoplus_{p+q=i} W_{pq},$$

onde W_{pq} ($1 \leq p, q \leq m$) é o subespaço de $V \otimes V$ gerado por todos os monômios duplos do tipo $X_0^{m-p} X^{u*} \otimes X_0^{m-q} X^{v*}$.

A partir das definições de a^* e $a^\otimes$ é imediato ver que

$$(3.1) \quad a^\otimes(X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p} \otimes X_0^{m-q} X_{j_1} \dots X_{j_q}) = w_{pq} + \dots + w_{mm} \quad (w_{ij} \in W_{ij}),$$

onde

$$w_{p+r, q+s} = m^{-(r+s)} \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s} [A_0^{i^*+j^*} A_{i_1}^{i_1^*} \dots A_{i_p}^{i_p^*} A_{j_1}^{j_1^*} \dots A_{j_q}^{j_q^*} X_0^{m-(p+r)} X^{i^*} \otimes X_0^{m-(q+s)} X^{j^*}]$$

($i^* = i_0^* + i_1^* + \dots + i_p^*$, $j^* = j_0^* + j_1^* + \dots + j_q^*$ e a soma é feita sobre todos os multi-índices i_0^* de ordem r , j_0^* de ordem s e $i_1^*, \dots, i_p^*$, $j_1^*, \dots, j_q^*$ de ordem 1).

NOTA. Sejam ψ_1 e ψ_2 operadores lineares de V tais que $\omega \psi_i = \omega$, $i=1,2$ (lembramos que ω é a forma linear fixada no início do capítulo II). Afirmamos que $\psi_1^\otimes = \psi_2^\otimes$ implica que $\psi_1 = \psi_2$. De fato, façamos $\psi_1(X_0^m) = X_0^m + w$, $\psi_2(X_0^m) = X_0^m + w'$, onde w e w' estão em $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, e seja y um elemento arbitrário de V . De $\psi_1^\otimes(X_0^m \otimes y) = \psi_2^\otimes(X_0^m \otimes y)$ obtemos $X_0^m \otimes \psi_1(y) + w \otimes \psi_1(y) = X_0^m \otimes \psi_2(y) + w' \otimes \psi_2(y)$. Disto segue que $X_0^m \otimes \psi_1(y) = X_0^m \otimes \psi_2(y)$ e logo $\psi_1(y) = \psi_2(y)$.

PROPOSIÇÃO 3.1 O conjunto $A^\otimes = A^\otimes(m, n)$ de todos os β -operadores é um grupo isomorfo a $A(n)$, o grupo afim do $\mathbb{R}^n$.

Prova. Definamos a multiplicação usual: $a^{\otimes} b^{\otimes} = (ab)^{\otimes}$. Como $(ab)^* = a^* b^*$ (veja a prova da proposição 2.1), a multiplicação está bem definida. Agora, o fato de que $A^{\otimes}$ é um grupo segue facilmente do fato de que A^* é um grupo. A aplicação $a \in A(n) \rightarrow a^{\otimes} \in A^{\otimes}$ é um epimorfismo de grupos, e $a^{\otimes} = b^{\otimes}$ implica $a^* = b^*$ (pela nota acima) e isto implica que $a = b$. Δ

Denotaremos por $\Omega^{\otimes} = \Omega^{\otimes}(m, n)$ a classe formada pelas álgebras que são obtidas a partir das álgebras em Ω pelo processo de duplicação. Fazendo uso de resultados bem conhecidos sobre duplicação e o fato de que toda álgebra em Ω é genética, obtemos:

PROPOSIÇÃO 3.2 Toda álgebra em $\Omega^{\otimes}$ é uma álgebra genética para a qual $X^{\otimes}$ é uma base canônica. Δ

Da proposição 2.2 segue a

PROPOSIÇÃO 3.3 Todo β -operador é um automorfismo de qualquer álgebra em $\Omega^{\otimes}$. Δ

2. Idempotentes. Sequências de Potências Plenas

Se A é uma álgebra não-associativa real e e é um idempotente de A , então é claro que $e \otimes e$ é um idempotente de $A \otimes A$. Agora, suponhamos que $A \in \Omega$. Sabemos (veja o início da seção 2, capítulo II) que A tem uma família a n parâmetros F de idempotentes. Logo,

$F^\Theta = \{e\Theta e: e \in F\}$ é uma família n -paramétrica de idempotentes em $A\Theta A$. A proposição seguinte mostra que todo idempotente em $A\Theta A$ ($A \in \Omega$) é do tipo $e\Theta e$.

PROPOSIÇÃO 3.4 Seja A uma álgebra em Ω . O conjunto dos idempotentes em $A\Theta A$ é $\{e\Theta e: e \in A, e^2=e\}$.

Prova. Seja $g \neq 0$ um idempotente em $A\Theta A$. Façamos $g = X_0^m \Theta X_0^m + u_1 + \dots + u_{2m}$ ($u_i \in U_i$) e $u_\ell = \sum_{p+q=\ell} w_{pq}$ ($w_{pq} \in W_{pq}$). De $g^2=g$ obtemos

$$w_{01} = (X_0^m \Theta X_0^m) \{w_{01} + w_{10}\} \quad e \quad w_{10} = \{w_{01} + w_{10}\} (X_0^m \Theta X_0^m). \quad \text{Então, se}$$

$$w_{01} = \sum_{i=1}^n a_{i0} X_0^m \Theta X_0^{m-1} X_i \quad e \quad w_{10} = \sum_{i=1}^n b_{i0} X_0^{m-1} X_i \Theta X_0^m, \quad \text{obtemos}$$

$$w_{01} = \sum_{i=1}^n \{t_1 a_{i0} + \alpha_{11} b_{i0}\} X_0^m \Theta X_0^{m-1} X_i \quad e \quad w_{10} = \sum_{i=1}^n \{t_1 a_{i0} + \alpha_{11} b_{i0}\} X_0^{m-1} X_i \Theta X_0^m.$$

Segue que $a_{i0} = t_1 a_{i0} + \alpha_{11} b_{i0} = b_{i0}$ ($1 \leq i \leq n$). Portanto, podemos escrever

$u_1 = v_0 \Theta v_1 + v_1 \Theta v_0$, onde $v_0 = X_0^m$ e $v_1 \in V_1$. Além disso, $v_1 = v_0 v_1 + v_1 v_0$ já que $t_1 + \alpha_{11} = 1$. Assumamos como nossa hipótese de indução que para todo k ($1 \leq k < \ell$) temos:

$$u_k = \sum_{i+j=k} v_i \Theta v_j \quad (v_i \in V_i) \quad e \quad v_k = \begin{cases} \sum_{i+j=k} v_i v_j & \text{se } k \leq m \\ 0 & \text{se } k > m \end{cases}$$

A identidade $g^2=g$ fornece $u_\ell = (X_0^m \Theta X_0^m) u_\ell + u_\ell (X_0^m \Theta X_0^m) + \sum_{p+q=\ell} u_p u_q$ ($p, q \geq 1$)

e logo, $w_{pq} = u_p u_q = v_p \Theta v_q$. Agora, se $\ell > m$ temos que $u_\ell = \sum_{p+q=\ell} v_p \Theta v_q$.

Por outro lado, assumamos que $\ell \leq m$. Escrevendo $w_{0\ell} = \sum_{|u^*|=\ell} \beta_{u^*} X_0^m \Theta X_0^{m-\ell} X^{u^*}$,

$$w_{\ell 0} = \sum_{|u^*|=\ell} \gamma_{u^*} X_0^{m-\ell} X^{u^*} \otimes X_0^m \text{ e } v_p = \sum_{|i^*|=p} \theta_{i^*}^{(p)} X_0^{m-p} X^{i^*} (\beta_{u^*}, \gamma_{u^*}, \theta_{i^*}^{(p)} \in \mathbb{R}),$$

temos

$$w_{0\ell} = (X_0^m \otimes X_0^m) \{w_{0\ell} + w_{\ell 0} + \sum_{p+q=\ell} v_p \otimes v_q\} = \sum_{|u^*|=\ell} \lambda_{u^*} X_0^m \otimes X_0^{m-\ell} X^{u^*},$$

onde

$$\lambda_{u^*} = t_{\ell} \beta_{u^*} + \alpha_{\ell\ell} \gamma_{u^*} + \sum_{p+q=\ell} \alpha_{p\ell} \theta_{i^*}^{(p)} \theta_{j^*}^{(q)} \quad (|i^*|=p, |j^*|=q, i^*+j^*=u^*).$$

De modo análogo, vemos que $w_{\ell 0} = \sum_{|u^*|=\ell} \lambda_{u^*} X_0^{m-\ell} X^{u^*} \otimes X_0^m$. Disto segue

que $w_{0\ell} = v_0 \otimes v_\ell$ e $w_{\ell 0} = v_\ell \otimes v_0$ para algum v_ℓ em V_ℓ . Temos então que $u_\ell = \sum_{p+q=\ell} v_p \otimes v_q$. Além disso, $X_0^m v_\ell = (X_0^m \otimes X_0^m) u_\ell = X_0^m \otimes \sum_{p+q=\ell} v_p \otimes v_q$ e

logo $v_\ell = \sum_{p+q=\ell} v_p \otimes v_q$. Finalmente, é imediato verificar que $e^2 = e$ e

$g = e \otimes e$, onde $e = v_0 + v_1 + \dots + v_m$. Δ

A proposição que acabamos de provar junto com a proposição 2.4 fornece o

COROLÁRIO 3.5 Uma condição necessária e suficiente para que $F^\otimes$ seja o conjunto de idempotentes não-nulos em $A \otimes A$, $A \in \Omega$, é que $A \in \Omega_0$. Δ

PROPOSIÇÃO 3.6 As potências plenas de um elemento de peso 1 em $A \otimes A$ ($A \in \Omega_0$) convergem para um idempotente.

Prova. Seja x um elemento arbitrário de peso 1. Façamos $x = X_0^m \otimes X_0^m + f_1 + \dots + f_{2m}$ ($f_i \in U_i$), onde $f_\ell = \sum_{p+q=\ell} g_{pq}$ ($g_{pq} \in w_{pq}$). Denotemos

por $f_\ell^{[k]}$ a componente em U_ℓ de $x^{[k]}$ e façamos $f_\ell^{[k]} = \sum_{p+q=\ell} g_{pq}^{[k]}$ ($g_{pq}^{[k]} \in W_{pq}$). Se $f_1 = \sum_{i=1}^n b_{i0} X_0^m \otimes X_0^{m-1} X_i + \sum_{i=1}^n c_{i0} X_0^{m-1} X_i \otimes X_0^m$ ($b_{i0}, c_{i0} \in \mathbb{R}$) então $f_1^{[2]} = \sum_{i=1}^n a_{i0} \{X_0^m \otimes X_0^{m-1} X_i + X_0^{m-1} X_i \otimes X_0^m\}$, onde $a_{i0} = t_1 b_{i0} + \alpha_{11} c_{i0}$

($1 \leq i \leq n$). Afirmamos que $x^{[k]} \rightarrow g$ onde $g = e \otimes e$ e e é o idempotente de A cuja componente no subespaço V_1 é $\sum_{i=1}^n a_{i0} X_0^{m-1} X_i$. De fato,

façamos $g = X_0^m \otimes X_0^m + u_1 + \dots + u_{2m}$, onde cada $u_\ell \in U_\ell$ e $u_\ell = \sum_{p+q=\ell} w_{pq}$ ($w_{pq} \in W_{pq}$). Uma indução fácil sobre k fornece $f_1^{[k]} = f_1^{[2]}$ ($k \geq 2$)

e então $f_1^{[k]} \rightarrow f_1^{[2]} = u_1$. Agora, suponhamos como hipótese de indução que $f_s^{[k]} \rightarrow u_s$ ($1 \leq s < \ell$). De

$$u_\ell^{[k+1]} = (X_0^m \otimes X_0^m) u_\ell^{[k]} + u_\ell^{[k]} (X_0^m \otimes X_0^m) + \sum_{p,q=1}^m f_p^{[k]} f_q^{[k]} \quad (p, q \geq 1)$$

obtemos $g_{pq}^{[k+1]} = f_p^{[k]} f_q^{[k]}$ e então $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{pq}^{[k]} = (\lim_{k \rightarrow \infty} f_p^{[k]}) (\lim_{k \rightarrow \infty} f_q^{[k]}) =$

$= u_p u_q = w_{pq}$. Isto prova que $g_{pq}^{[k]} \rightarrow w_{pq}$ ($1 \leq p, q \leq m$). Obtemos também que

$$g_{0\ell}^{[k+1]} = (X_0^m \otimes X_0^m) (g_{0\ell}^{[k]} + g_{\ell 0}^{[k]} + \sum_{p+q=\ell} g_{pq}^{[k]})$$

e ($p, q \geq 1$)

$$g_{\ell 0}^{[k+1]} = (g_{0\ell}^{[k]} + g_{\ell 0}^{[k]} + \sum_{p+q=\ell} g_{pq}^{[k]}) (X_0^m \otimes X_0^m).$$

Então, escrevendo $g_{0\ell}^{[k]} = \sum_{|u^*|=\ell} \beta_{u^*}^{[k]} X_0^m \otimes X_0^{m-\ell} X^{u^*}$ e $g_{\ell 0}^{[k]} =$

$= \sum_{|u^*|=\ell} \gamma_{u^*}^{[k]} X_0^{m-\ell} X^{u^*} \otimes X_0^m$, obtemos

$$|u^*| = \ell \sum_{k \rightarrow \infty} \{ \lim (\beta_{u^*}^{[k]} - t_\ell \beta_{u^*}^{[k]} - \alpha_{\ell\ell} \gamma_{u^*}^{[k]}) \} X_O^m \otimes X_O^{m-\ell} X^{u^*} =$$

$$= (X_O^m \otimes X_O^m) \sum_{p+q=\ell} w_{pq} = \{1-t_\ell - \alpha_{\ell\ell}\} w_{O\ell}$$

e

$$|u^*| = \ell \sum_{k \rightarrow \infty} \{ \lim (\gamma_{u^*}^{[k]} - t_\ell \beta_{u^*}^{[k]} - \alpha_{\ell\ell} \gamma_{u^*}^{[k]}) \} X_O^{m-\ell} X^{u^*} \otimes X_O^m =$$

$$\sum_{p+q=\ell} w_{pq} (X_O^m \otimes X_O^m) = \{1-t_\ell - \alpha_{\ell\ell}\} w_{\ell O},$$

onde a soma é feita tomando $p, q \geq 1$. Como as coordenadas de $w_{O\ell}$ e $w_{\ell O}$ na direção de $X_O^m \otimes X_O^{m-\ell} X^{u^*}$ e $X_O^{m-\ell} X^{u^*} \otimes X_O^m$, respectivamente, são iguais, podemos concluir então que $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_u^{[k]} = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{u^*}^{[k]}$ para todo u^* com $|u^*| = \ell$. Portanto, $\{1-t_\ell - \alpha_{\ell\ell}\} \lim_{k \rightarrow \infty} g_{O\ell}^{[k]} = \{1-t_\ell - \alpha_{\ell\ell}\} w_{O\ell}$ e logo

$$g_{O\ell}^{[k]} \rightarrow w_{O\ell} \quad \text{já que } A \in \Omega_O. \quad \text{De modo análogo, podemos provar que}$$

$$g_{\ell O}^{[k]} \rightarrow w_{\ell O}. \quad \Delta$$

3. Automorfismos. β -Álgebras

Sabemos (proposição 3.3) que todo β -operador é um automorfismo de $A \otimes A$, para toda álgebra A em Ω . O principal objetivo desta seção é provar que se $A \in \Omega_O$ então todo automorfismo de $A \otimes A$ é um β -operador. Para isto precisaremos do seguinte lema.

LEMA 3.7 Se θ é um endomorfismo de $A \otimes A$ ($A \in \Omega$), então $\theta = \psi^{\otimes 2}$ para algum endomorfismo ψ de A .

Prova. Afirmamos que $\theta(X_O^{m-p} X^{i*} \otimes X_O^{m-q} X^{j*}) = \sum_{k=0}^{2m} u_k^{(i*,j*)}$, onde

$$u_k^{(i*,j*)} = \sum_{i+j=k} x_{ij}^{(i*,j*)}, \quad x_{ij}^{(i*,j*)} = v_i^{(i*)} \otimes v_j^{(j*)}, \quad v_i^{(i*)} \in v_i,$$

$$v_i^{(i*)} = 0 \quad \text{se } i > m, \quad v_0^{(i*)} = X_O^m \quad \text{se } |i^*|=0, \quad v_0^{(i*)}=0 \quad \text{se } |i^*|>0,$$

$$\text{e } \alpha_{p,p+q} v_k^{(i^*+j^*)} = \sum_{i+j=k} v_i^{(i^*)} v_j^{(j^*)} \quad (0 \leq k \leq m). \quad \text{No caso em que}$$

$$|i^*| = |j^*| = 0, \text{ escreveremos } v_k(u_k) \text{ ao invés de } v_k^{(i^*)}(u_k^{(i^*,j^*)}).$$

Provaremos nossa afirmação por indução sobre $t=p+q$. O caso $t=0$ já foi feito na prova da proposição 3.4. Agora, suponhamos que já estabelecemos os casos $0 \leq t < \ell$. Vamos provar que disto podemos obter o caso $t=\ell$.

Suponhamos que $p, q > 0$. Se $p=1$ pomos $p_1=0$ ($p_1=1$) quando $t_1 \neq 0$ ($t_1=0$). Se $p>1$ e $f(p) \neq 0$ então podemos escolher p_1 ($1 \leq p_1 < p$) de tal maneira que $\alpha_{p_1 p} \neq 0$ (veja a prova do teorema 2.6). Se $p>1$ e $f(p)=0$ então $t_p + \alpha_{pp} = 1$ (pela identidade 2.8) e logo $t_p \neq 0$ ou $\alpha_{pp} \neq 0$; neste caso, pomos $p_1=0$ ($p_1=p$) se $t_p \neq 0$ ($\alpha_{pp} \neq 0$). Portanto, em qualquer caso existe um p_1 ($0 \leq p_1 \leq p$) tal que $\alpha_{p_1 p} \neq 0$. Analogamente, obtemos um q_1 ($0 \leq q_1 \leq q$) tal que $\alpha_{q_1 q} \neq 0$. Sejam i_1^*, i_2^*, j_1^* e j_2^* multi-índices tais que $|i_1^*|=p_1$, $|j_1^*|=q_1$, $i_1^*+i_2^*=i^*$ e $j_1^*+j_2^*=j^*$. O fato de que θ preserva produtos junto com a hipótese de indução fornece

$$\alpha_{p_1 p} \alpha_{q_1 q} x_{\alpha\beta}^{(i^*,j^*)} = u_{\alpha}^{(i_1^*,i_2^*)} u_{\beta}^{(j_1^*,j_2^*)} = \alpha_{p_1 p} \alpha_{q_1 q} v_{\alpha}^{(i^*)} \otimes v_{\beta}^{(j^*)}.$$

Logo,

$$x_{\alpha\beta}^{(i^*,j^*)} = v_{\alpha}^{(i^*)} \otimes v_{\beta}^{(j^*)}.$$

Suponhamos agora que $p=0$ (logo $q=l$). Como θ preserva produtos obtemos

$$\alpha_{q_1 l} x_{ok}^{(i^*, j^*)} = u_o u_k^{(j_1^*, j_2^*)} = x_o^m \otimes \sum_{i+j=k} v_i^{(j_1^*)} v_j^{(j_2^*)}$$

para todo j_1^*, j_2^* ($j_1^* + j_2^* = j^*$, $|j_1^*| = q_1 > 0$, $|j_2^*| = q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = q$; lembramos que aqui $|i^*| = 0$). Segue que $x_{ok}^{(i^*, j^*)} = x_o^m \otimes v_k^{(j^*)}$, onde

$$\alpha_{q_1 l} v_k^{(j^*)} = \sum_{i+j=k} v_i^{(j_1^*)} v_j^{(j_2^*)}. \text{ Se } f(l) \neq 0 \text{ então podemos escolher}$$

um q_1 ($1 \leq q_1 < l$) tal que $\alpha_{q_1 l} \neq 0$ e podemos concluir que $x_{\alpha\beta}^{(i^*, j^*)} = v_{\alpha} \otimes v_{\beta}^{(j^*)}$ já que $\alpha_{q_1 l} x_{\alpha\beta}^{(i^*, j^*)} = u_{\alpha} u_{\beta}^{(j_1^*, j_2^*)} = \alpha_{q_1 l} v_{\alpha} \otimes v_{\beta}^{(j^*)}$ ($|i^*| = 0$).

Também, de $t_l u_k^{(i^*, j^*)} = u_o u_k^{(i^*, j^*)} + \dots + u_{k-1} u_1^{(i^*, j^*)}$ obtemos

$$x_{ko}^{(i^*, j^*)} = 0 = v_k^{(i^*)} \otimes v_o^{(j^*)} \text{ e}$$

$$t_l x_{ok}^{(i^*, j^*)} = u_o u_k^{(i^*, j^*)} = x_o^m \otimes \sum_{i+j=k} v_i v_j^{(j^*)} \quad (|i^*| = 0);$$

então $t_l v_k^{(j^*)} = \sum_{i+j=k} v_i v_j^{(j^*)}$. [De modo análogo, podemos mostrar

que $x_{\alpha\beta}^{(i^*, j^*)} = v_{\alpha}^{(i^*)} \otimes v_{\beta}^{(j^*)}$ e $\alpha_{ll} v_k^{(i^*)} = \sum_{i+j=k} v_i^{(i^*)} v_j$ quando $p=l$.]

Resta analisar o caso $f(l) = 0$. Neste caso, temos $t_l \neq 0$ ou $\alpha_{ll} \neq 0$. Assumamos que $t_l \neq 0$ (o caso $\alpha_{ll} \neq 0$ é análogo). De $t_1 (x_{o1}^{(i^*, j^*)} + x_{1o}^{(i^*, j^*)}) = u_o u_1^{(i^*, j^*)}$ segue que $x_{1o}^{(i^*, j^*)} = 0 = v_1 \otimes v_o^{(j^*)}$ e

$x_{o1}^{(i^*, j^*)} = v_o \otimes v_1^{(j^*)}$. É claro que $v_o v_1^{(j^*)} + v_1 v_o^{(j^*)} = t_1 v_1^{(j^*)}$. Suponha-
mos por indução que $x_{ij}^{(i^*, j^*)} = v_i^{(i^*)} \otimes v_j^{(j^*)}$ quando $i+j = s \leq k$ e que

$t_\ell v_s^{(i^*+j^*)} = \sum_{i+j=s} v_i^{(i^*)} v_j^{(j^*)}$. Mostraremos que este fato também ocorre no caso em que $s=k+1$. Usando a identidade $t_\ell u_{k+1}^{(i^*,j^*)} = u_o u_{k+1}^{(i^*,j^*)} + u_1 u_k^{(i^*,j^*)} + \dots + u_k u_1^{(i^*,j^*)}$ concluímos que $x_{k+1,0}^{(i^*,j^*)} = 0 = v_{k+1} \otimes v_o^{(j^*)}$ e $t_\ell x_{ij}^{(i^*,j^*)} = u_i u_j^{(i^*,j^*)} = t_\ell v_i \otimes v_j^{(j^*)}$; logo, $x_{ij}^{(i^*,j^*)} = v_i \otimes v_j^{(j^*)}$. Por outro lado,

$$t_\ell x_o^m \otimes v_{k+1}^{(j^*)} = u_o u_{k+1}^{(i^*,j^*)} = x_o^m \otimes \sum_{i+j=k+1} v_i v_j^{(j^*)}$$

e logo $t_\ell v_{k+1}^{(j^*)} = \sum_{i+j=k+1} v_i v_j^{(j^*)}$. Agora, de $t_\ell x_{ij}^{(i^*,j^*)} = u_i^{(i^*,j^*)} u_j$

e $\alpha_{\ell\ell} v_{k+1}^{(j^*)} \otimes x_o^m = u_{k+1}^{(j^*,i^*)} u_o$ obtemos $x_{ij}^{(j^*,i^*)} = v_i^{(j^*)} \otimes v_j$ e

$\alpha_{\ell\ell} v_{k+1}^{(j^*)} = \sum_{i+j=k+1} v_i^{(j^*)} v_j$, respectivamente. A afirmação está de -

monstrada.

Finalmente, definamos o operador linear $\psi: A \rightarrow A$ pon-
do $\psi(x_o^{m-p} x^{i^*}) = \sum_{i=0}^m v_i^{(i^*)}$. Este operador preserva produtos:

$$\begin{aligned} \psi(x_o^{m-p} x^{i^*}) \psi(x_o^{m-q} x^{j^*}) &= \sum_{k=0}^m \sum_{i+j=k} v_i^{(i^*)} v_j^{(j^*)} = \\ &= \alpha_{p,p+q} \sum_{k=0}^m v_k^{(i^*+j^*)} = \alpha_{p,p+q} \psi(x_o^{m-(p+q)} x^{i^*+j^*}). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \psi^\otimes(x_o^{m-p} x^{i^*} \otimes x_o^{m-q} x^{j^*}) &= \sum_{i=0}^m v_i^{(i^*)} \otimes \sum_{j=0}^m v_j^{(j^*)} = \\ &= \sum_{k=0}^{2m} \sum_{i+j=k} v_i^{(i^*)} \otimes v_j^{(j^*)} = \theta(x_o^{m-p} x^{i^*} \otimes x_o^{m-q} x^{j^*}) \end{aligned}$$

e logo $\theta = \psi^\otimes$. $\square$

TEOREMA 3.8 Se A é uma α -álgebra então $\text{Aut}(A \otimes A) = \{\psi^{\otimes} : \psi \in \text{Aut}(A)\}$.

Prova. Sem perda de generalidade, podemos assumir que A está em Ω (veja a proposição 2.8). Seja θ um automorfismo de $A \otimes A$. Aplicando o lema 3.7 a θ e θ^{-1} , obtemos operadores lineares ψ e ψ_1 que preservam a multiplicação em A e tais que $\theta = \psi^{\otimes}$ e $\theta^{-1} = \psi_1^{\otimes}$. É claro que $(1_A)^{\otimes} = 1_{A \otimes A} = \theta \theta^{-1} = (\psi \psi_1)^{\otimes}$. Então, pela nota que precede a proposição 3.1, $\psi \psi_1 = 1_A$. De modo análogo, obtemos $\psi_1 \psi = 1_A$. Portanto, ψ é um automorfismo de A . Por outro lado, se ϕ é um automorfismo de A então $\phi^{\otimes}$ é um β -operador e logo $\phi^{\otimes}$ é um automorfismo de $A \otimes A$ (proposição 3.3). $\square$

O teorema que acabamos de demonstrar junto com o fato de que toda álgebra em Ω_0 é uma α -álgebra (teorema 2.6) fornece o

COROLÁRIO 3.9 Para toda álgebra A em Ω_0 , o grupo de automorfismos de $A \otimes A$ é $A^{\otimes}$. $\square$

A existência das álgebras $A \otimes A$ com A em Ω_0 e o fato delas verificarem a propriedade enunciada no corolário acima motivam a seguinte definição.

DEFINIÇÃO Seja (A, ω_1) uma álgebra ponderada de dimensão $\binom{m+n}{m}$. A álgebra duplicada $A \otimes A$ é denominada uma β -álgebra se A admite uma base $Y = \{Y_O^{m-p} Y^{i*} : |i^*| = p, 1 \leq p \leq m\}$ tal que:

- (i) $\omega_1(Y_O^m) = 1$, $\omega_1(Y_O^{m-p} Y^{i*}) = 0$ ($1 \leq p \leq m$);
- (ii) para todo $a \in A(n)$, o operador linear de $A \otimes A$ definido por (3.1) com $Y_O^{m-p} Y^{i*}$ no lugar de $X_O^{m-p} X^{i*}$ é um automorfismo e todo automorfismo de $A \otimes A$ é deste tipo.

Segue do teorema 3.8 que se A é uma α -álgebra então $A \otimes A$ é uma β -álgebra.

4. Duplicada comutativa. γ -Álgebras

Denotaremos por $\Omega^{\otimes} = \Omega^{\otimes}(m,n)$ o conjunto formado por todas as duplicadas comutativas $A \otimes A$ das álgebras comutativas A que estão em Ω . A álgebra zigótica $Z(n+1,2m)$, como foi mencionado no final da seção 2 do capítulo I, é a duplicada comutativa da álgebra gamética $G(n+1,2m)$. Como a classe Ω contém uma cópia isomorfa da álgebra $G(n+1,2m)$ e esta é comutativa, temos então que uma cópia isomorfa de $Z(n+1,2m)$ está em $\Omega^{\otimes}$.

Seja A uma álgebra comutativa sobre V . Lembramos que $A \otimes A = A \otimes A / J$, onde J é o ideal de $A \otimes A$ gerado pelos elementos $x \otimes y - y \otimes x$ com $x, y \in A$. Escreveremos $x \otimes y$ para indicar a classe lateral $x \otimes y + J$. Agora, a proposição 3.2 pode ser reescrita da seguinte maneira:

PROPOSIÇÃO 3.10 Toda álgebra em $\Omega^{\otimes}$ é uma álgebra genética para a qual $X^{\otimes} = \{x_o^{m-p} x^{u*} \otimes x_o^{m-q} x^{v*} : 0 \leq p, q \leq m, |u^*| = p, |v^*| = q\}$ é uma base canônica. Δ

Seja a um elemento de $A(n)$. É imediato verificar que

$$a^{\otimes} (x_o^{m-p} x^{u*} \otimes x_o^{m-q} x^{v*} - x_o^{m-q} x^{v*} \otimes x_o^{m-p} x^{u*}) \in J.$$

Isto mostra que $a^{\otimes}(J) \subset J$. Então, podemos definir o operador linear $a^{\otimes}: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ como segue: $a^{\otimes}(x \otimes y) = a^{\otimes}(x \otimes y) + J$. Chamaremos os operadores do tipo $a^{\otimes}$ de γ -operadores de $A \otimes A$. Observamos que $a^{\otimes}(x_0^{m-p} x_{i_1} \dots x_{i_p} \otimes x_0^{m-q} x_{j_1} \dots x_{j_q})$ é dado por (3.1) com $\otimes$ no lugar de $\otimes$. Mais geralmente, se A é uma α -álgebra comutativa e ψ é um automorfismo de A então $x \otimes y \xrightarrow{\psi^{\otimes}} \psi^{\otimes}(x \otimes y) + J$ é um operador linear de $A \otimes A$.

É claro que $(a^{\otimes}, b^{\otimes}) \longrightarrow (ab)^{\otimes}$ define uma estrutura de grupo em $A^{\otimes} = A^{\otimes}(m, n)$, o conjunto dos γ -operadores, e que $a^{\otimes} \in A^{\otimes} \rightarrow a^{\otimes} \in A^{\otimes}$ é um epimorfismo de grupos. Além disso, um argumento semelhante ao da nota que precede a proposição 3.1 mostra que $a^{\otimes} = b^{\otimes}$ implica $a=b$ e logo $a^{\otimes} = b^{\otimes}$ implica $a^{\otimes} = b^{\otimes}$. Portanto, $a^{\otimes} \rightarrow a^{\otimes}$ é um isomorfismo de grupos. Isto prova que $A^{\otimes}$ é um grupo isomorfo ao grupo afim do $\mathbb{R}^n$ pois sabemos (proposição 3.1) que este último grupo e o grupo $A^{\otimes}$ são isomorfos.

Para a duplicada comutativa, temos resultados semelhantes aos estabelecidos na proposição 3.4, no corolário 3.5, na proposição 3.6, no teorema 3.8 e no corolário 3.9. As provas são essencialmente as mesmas. O único cuidado que devemos tomar é o de exigir nos enunciados que a álgebra seja comutativa. Como consequência do teorema semelhante ao teorema 3.8 temos o seguinte resultado de particular interesse.

COROLÁRIO 3.11 O grupo de automorfismos da álgebra zigótica $Z(n+1, 2m)$ é isomorfo ao grupo afim do $\mathbb{R}^n$. A

Se na definição de β -álgebra começamos com uma álgebra ponderada comutativa e pomos $\otimes$ no lugar de $\odot$, então obtemos um novo tipo de álgebra não-associativa que chamaremos γ -álgebra.

5. Classificação das β e γ -Álgebras: $1 \leq m \leq 5$, n arbitrário.

Sabemos que o fato de ser A uma α -álgebra é condição suficiente para que $A \odot A$ seja uma β -álgebra e $A \otimes A$ uma γ -álgebra (neste último caso, A precisa ser comutativa). Isto foi estabelecido nas duas seções anteriores. Nesta seção, provaremos que esta condição é também necessária. No caso em que $1 \leq m \leq 5$, isto fornecerá uma classificação das β e γ -álgebras.

A seguinte proposição fornece uma caracterização para a classe $\Omega^{\otimes}$ semelhante àquela obtida nas proposições 2.2 e 2.3 para a classe Ω .

PROPOSIÇÃO 3.12 Seja A uma álgebra sobre V ponderada pela função peso ω fixada no início do capítulo I. Então, $A \otimes A \in \Omega^{\otimes}$ se e somente se $A^{\otimes}$ é um subgrupo do grupo de automorfismos de $A \otimes A$.

Prova. A afirmação segue imediatamente da caracterização da classe Ω mencionada acima e do seguinte fato que será demonstrado em seguida: se ψ é um operador linear de A tal que $\omega\psi = \omega$, então ψ preserva a multiplicação em A se e somente se $\psi^{\otimes}$ preserva a multiplicação em $A \otimes A$. A implicação $(\Rightarrow)$ segue facilmente da definição de $\psi^{\otimes}$. Para

provar a implicação ($\Leftarrow$), escrevamos $X_O^m X_O^m = X_O^m + x$, $\psi(X_O^m) = X_O^m + y$,
 $(X_O^{m-p} X^{u*}) (X_O^{m-q} X^{v*}) = z$ e $\psi(X_O^{m-p} X^{u*}) \psi(X_O^{m-q} X^{v*}) = w$, onde x, y, z e w
são elementos de $U_1 \oplus \dots \oplus U_{2m}$. Temos:

$$\psi^{\otimes} [(X_O^m \otimes X_O^m) (X_O^{m-p} X^{u*} \otimes X_O^{m-q} X^{v*})] = X_O^m \otimes \psi(z) + y \otimes \psi(z) + \psi(x) \otimes \psi(z)$$

e

$$\psi^{\otimes} (X_O^m \otimes X_O^m) \psi^{\otimes} (X_O^{m-p} X^{u*} \otimes X_O^{m-q} X^{v*}) = X_O^m \otimes w + w \otimes w',$$

onde $w' = x + X_O^m y + y X_O^m + y^2$. Segue que $X_O^m \otimes \psi(z) = X_O^m \otimes w$, isto é, $\psi(z) = w$. Δ

TEOREMA 3.13. Uma álgebra A é uma α -álgebra se e somente se $A \otimes A$ é uma β -álgebra.

Prova. A implicação ($\Rightarrow$) nada mais é que o teorema 3.8. Reciprocamente, suponhamos que $A \otimes A$ é uma β -álgebra. Sem perda de generalidade, podemos assumir que A é uma álgebra sobre V ponderada pela função ω fixada no início do capítulo I. Temos então pela proposição 3.12 que $A \otimes A$ está em $\Omega^{\otimes}$, isto é, $A \in \Omega$. Agora, usamos a proposição 2.2 para concluir que $A^* \subset \text{Aut}(A)$. Por outro lado, se ψ é um automorfismo de A então $\psi^{\otimes}$ preserva a multiplicação em $A \otimes A$ (veja a prova da proposição anterior) e o fato de que ψ é inversível implica que $\psi^{\otimes}$ é inversível. Isto mostra que $\psi^{\otimes}$ é um automorfismo de $A \otimes A$, isto é, $\psi^{\otimes} = a^{\otimes}$ para algum a em $A(n)$. Pela nota que precede a proposição 3.1 temos que $\psi = a^*$. Portanto, todo automorfismo de A é um α -operador e então A é uma α -álgebra. Δ

Para as γ -álgebras, obtemos de modo análogo o seguinte resultado:

TEOREMA 3.14 Seja A uma álgebra comutativa. Então, A é uma α -álgebra se e somente se $A \otimes A$ é uma γ -álgebra. Δ

Os teoremas 3.13, 3.14, 2.10, 2.13 e 2.15 fornecem a classificação das β e γ -álgebras no caso $1 \leq m \leq 5$, n arbitrário.

oOo

CAPÍTULO IV

DERIVAÇÕES DE α , β e γ -ÁLGEBRAS

O principal objetivo deste capítulo é obter uma caracterização das α , β e γ -álgebras via derivações, no caso em que a dimensão de cada uma destas álgebras satisfazem uma certa condição. Para atingir o nosso objetivo, vamos utilizar os resultados da teoria de grupos de Lie resumidos na seção 4 do capítulo I.

1. Derivações

Seja A uma α -álgebra de dimensão $\binom{m+n}{m}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que A é uma álgebra sobre V , onde V é o espaço vetorial real fixado no início do capítulo II. Na prova da proposição 2.1, mostramos que a aplicação $\phi: A(n) \rightarrow A^* = \text{Aut}(A)$, definida por $\phi(a) = a^*$, é um isomorfismo de grupos. Para concluir que ϕ é um isomorfismo de grupos de Lie, resta provar que ϕ e ϕ^{-1} são C^∞ . A aplicação ϕ pode ser vista como uma aplicação do subconjunto aberto $A(n)$ do $\mathbb{R}^{n+n^2}$ em $\mathbb{R}^k$, onde $k = [\binom{m+n}{m}]^2$. Se $a = (a_{ij})$ é um elemento de $A(n)$, pode-se ver facilmente a partir da definição do α -operador a^* , que as funções coordenadas de ϕ são polinômios nas indeterminadas a_{ij} . Logo, ϕ é C^∞ . Por outro lado, denote por p a projeção de $\text{End}(A) \cong \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$, isto é,

$$p((a_{ij})_{0 \leq i, j \leq k}) = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}.$$

A aplicação p é C^∞ sobre o subconjunto aberto $GL(A) \cong GL(k, \mathbb{R})$ de $End(A)$. Sabemos que $Aut(A)$ é um subgrupo de Lie de $GL(A)$; em particular, $Aut(A)$ é uma subvariedade de $GL(A)$. Então, como ϕ^{-1} é a restrição de p a $Aut(A)$, ϕ^{-1} é C^∞ .

Indiquemos por $L(n)$ e $L^* = L^*(m, n)$ as álgebras de Lie de $A(n)$ e A^* , respectivamente. A partir do fato de que $\phi: A(n) \rightarrow A^*$ é um isomorfismo de grupos de Lie, segue que $d\phi: L(n) \rightarrow L^*$ é um isomorfismo de álgebras de Lie (teorema 1.7). Sabemos que a álgebra de Lie do grupo de automorfismos da álgebra A é a sua álgebra de derivações. Sabemos também que $L(n)$ é isomorfa à álgebra de Lie $\mathbb{R}^n \otimes gl(n, \mathbb{R})$. Portanto, $L(n)$ tem dimensão $n(n+1)$ e então a dimensão da álgebra de derivações da α -álgebra A é também $n(n+1)$.

Para obtermos uma fórmula explícita para as derivações de A , vamos determinar as funções coordenadas de $d\phi$. A função coordenada de ϕ na direção de $(x_o^{m-p} x_{i_1} \dots x_{i_p}, x_o^{m-(p+r)} x_{j_1} \dots x_{j_{p+r}})$, isto é, a função que leva o elemento a de $A(n)$ na componente de $a^*(x_o^{m-p} x_{i_1} \dots x_{i_p})$ na direção de $x_o^{m-(p+r)} x_{j_1} \dots x_{j_{p+r}}$ é dada por

$$a = (a_{ij}) \xrightarrow{\psi} \binom{m-p}{r} \binom{m-r}{s} \sum A_o^{i_o^*} A_{i_1}^{i_1^*} \dots A_{i_p}^{i_p^*},$$

onde a soma é feita sobre todos os multi-índices $i_o^*, i_1^*, \dots, i_p^*$ tais que $|i_o^*| = r$, $|i_t^*| = 1$ ($1 \leq t \leq p$) e a coordenada s -ésima de $i_o^* + i_1^* + \dots + i_p^*$ é 1 se $s = j_t$ ($1 \leq t \leq p+r$) e é 0 no caso contrário (veja a definição de a^* no início do capítulo II). Vamos analisar primeiro o caso $0 \leq p < m$.

Se $r > 1$, $\frac{\partial \psi}{\partial a_{ij}}$ é 0 ou em sua expressão sempre aparece algum a_{s_0} ($1 \leq s \leq n$) e logo $\frac{\partial \psi}{\partial a_{ij}}(e) = 0$. (lembramos que e é o elemento identidade do grupo de Lie $A(n)$). Segue que

$$d\psi \cdot h = \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^n h_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial a_{ij}}(e) = 0$$

neste caso, onde $h = (h_{ij})$ é um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^{n+n^2}$. Resta analisar os casos $r=0, 1$.

Suponhamos que $r=0$. É imediato verificar que $\frac{\partial \psi}{\partial a_{ij}}(e) = 0$ ($1 \leq i \leq n$, $j \neq i_1, \dots, i_p$). Por outro lado, $\frac{\partial \psi}{\partial a_{ii_t}}(e) = 1$ se $x_{j_1} \dots x_{j_p} = x_i x_{i_1} \dots \hat{x}_{i_t} \dots x_{i_p}$ para algum t ($\hat{}$ indica ausência) e $\frac{\partial \psi}{\partial a_{ii_t}}(e) = 0$ nos demais casos ($1 \leq t \leq p$). Temos então que

$$d\psi \cdot h = h_{ii_t}$$

no caso em que $x_{j_1} \dots x_{j_p} = x_i x_{i_1} \dots \hat{x}_{i_t} \dots x_{i_p}$ e

$$d\psi \cdot h = 0$$

em qualquer outro caso. Agora, suponhamos que $r=1$. É claro que

$\frac{\partial \psi}{\partial a_{ij}}(e) = 0$ para $i=1, \dots, n$, $j \neq 0, i_1, \dots, i_p$ e, como na expressão

de $\frac{\partial \psi}{\partial a_{ii_t}}$ sempre aparece algum a_{s_0} ($1 \leq s \leq n$), temos também que

$\frac{\partial \psi}{\partial a_{ii_t}}(e) = 0$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq t \leq p$). Por outro lado, $\frac{\partial \psi}{\partial a_{i_0}}(e) = \binom{m-p}{1} m^{-1}$

se $x_{j_1} \dots x_{j_{p+1}} = x_i x_{i_1} \dots x_{i_p}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial a_{io}}(e) = 0$ no caso contrário. Logo,

$$d\psi.h = \binom{m-p}{1} m^{-1} h_{io}$$

se $x_{j_1} \dots x_{j_{p+1}} = x_i x_{i_1} \dots x_{i_p}$ e

$$d\psi.h = 0$$

nos demais casos.

No caso em que $p=m$, a única possibilidade é $r=0$ e temos

$$d\psi.h = h_{ii_t}$$

quando $x_{j_1} \dots x_{j_m} = x_i x_{i_1} \dots \hat{x}_{i_t} \dots x_{i_m}$ ($1 \leq t \leq m$) e

$$d\psi.h = 0$$

nos casos em que isto não acontece.

Portanto, temos:

$$(4.1) \quad d\psi.h = \begin{cases} h_{ii_t} & \text{se } x_{j_1} \dots x_{j_{p+r}} = x_i x_{i_1} \dots \hat{x}_{i_t} \dots x_{i_p} \quad (1 \leq t \leq p) \\ \binom{m-p}{1} m^{-1} h_{io} & \text{se } x_{j_1} \dots x_{j_{p+r}} = x_i x_{i_1} \dots x_{i_p} \text{ e } p < m \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

Uma derivação d de A é determinada por algum elemento h de $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, isto é,

$$d = d\phi.h.$$

Então, se escrevemos $h = (\delta, c) = (h_{ij})$, onde $\delta = (h_{10}, \dots, h_{n0})$ e $c = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ obtemos:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} d(X_0^m) &= \sum_{i=1}^n h_{i0} X_0^{m-1} X_i, \\ d(X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p}) &= \sum_{t=1}^p \sum_{i=1}^n h_{ii_t} X_0^{m-p} X_i X_{i_1} \dots \hat{X}_{i_t} \dots X_{i_p} + \\ &\quad \binom{m-1}{1}^{m-1} \sum_{i=1}^n h_{i0} X_0^{m-(p+1)} X_i X_{i_1} \dots X_{i_p} \quad (1 \leq p < m), \\ d(X_{i_1} \dots X_{i_m}) &= \sum_{t=1}^m \sum_{i=1}^n h_{ii_t} X_i X_{i_1} \dots \hat{X}_{i_t} \dots X_{i_m}. \end{aligned}$$

Se $e_1, \dots, e_n$ e $e_{11}, \dots, e_{nn}$ são, respectivamente, as bases canônicas do $\mathbb{R}^n$ e de $gl(n, \mathbb{R})$, então $e_1, \dots, e_n, e_{11}, \dots, e_{nn}$ é uma base para $\mathbb{R}^n \oplus gl(n, \mathbb{R})$. Denote por d_i e d_{ij} as derivações determinadas por e_i e e_{ij} , respectivamente. Como $d\phi$ é um isomorfismo, $d\phi$ leva a base $e_1, \dots, e_{nn}$ de $\mathbb{R}^n \oplus gl(n, \mathbb{R})$ sobre a base $d_1, \dots, d_{nn}$ de $Der(A)$. Temos:

$$d_i(X_0^m) = X_0^{m-1} X_i, \quad d_i(X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p}) = \binom{m-p}{1}^{m-p-1} X_0^{m-(p+1)} X_i X_{i_1} \dots X_{i_p},$$

$$d_i(X_{i_1} \dots X_{i_m}) = 0 \quad (1 \leq i \leq n);$$

$$d_{ii}(X_0^m) = 0, \quad d_{ii}(X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p}) = X_0^{m-p} X_{i_1} \dots X_{i_p} \quad \text{se } p \leq i,$$

$$d_{ii}(x_0^{m-p} x_{i_1} \dots x_{i_p}) = 0 \quad \text{se } p > i \quad (1 \leq i \leq n);$$

$$d_{ij}(x_0^m) = 0, \quad d_{ij}(x_0^{m-p} x_{i_1} \dots x_{i_p}) = x_0^{m-p} x_i x_{i_1} \dots \hat{x}_{i_t} \dots x_{i_p} \quad \text{se } p < i$$

$$\text{e } i_t = j, \quad d(x_0^{m-p} x_{i_1} \dots x_{i_p}) = 0 \quad \text{nos demais casos } (1 \leq i, j \leq n, i \neq j).$$

Logo, é imediato concluir que as n^2 derivações d_i, d_{ij} ($i \neq j$) são nilpotentes e as n derivações d_{ii} são diagonalizáveis.

Resumiremos os resultados obtidos acima no seguinte

TEOREMA 4.1 Se A é uma α -álgebra então a álgebra de derivações de A é isomorfa à álgebra de Lie $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e tem uma base formada por n^2 derivações nilpotentes e n derivações diagonalizáveis. Se $Y = \{y_0^{m-p} y^{i*} : 0 \leq p \leq m, |i*| = p\}$ é uma α -base para A então uma derivação de A tem a forma (4.2) com $y_0^{m-p} y^{i*}$ no lugar de $x_0^{m-p} x^{i*}$. Δ

Em seguida, obteremos as derivações de uma β -álgebra $A \otimes A$, onde A tem dimensão $\binom{m+n}{m}$. A proposição 3.1 fornece um isomorfismo $a \in A(n) \xrightarrow{\theta} a^\otimes \in A^\otimes$. Aplicando o argumento usado na primeira parte da prova do teorema 4.1, obtemos que a álgebra de derivações de $A \otimes A$ é isomorfa à álgebra de Lie $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Logo, $\text{Der}(A \otimes A)$ tem dimensão $n(n+1)$. Além disso, as derivações de $A \otimes A$ tem a forma $d\theta.h$, onde $h \in \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Sejam $\mu_1 = x_0^{m-p} x_{i_1} \dots x_{i_p}$, $v_1 = x_0^{m-q} x_{j_1} \dots x_{j_q}$,

$\mu_2 = x_0^{m-(p+r)} x_{k_1} \dots x_{k_{p+r}}$ e $v_2 = x_0^{m-(p+s)} x_{\ell_1} \dots x_{\ell_{q+s}}$. A partir da

identidade (3.1) vemos que a função coordenada de θ na direção de $(\mu_1 \otimes v_1, \mu_2 \otimes v_2)$ é a aplicação

$$a = (a_{ij}) \xrightarrow{\eta} m^{-(r+s)} \binom{m-p}{r} \binom{m-q}{s} \left[A_0^{i_0^*+j_0^*} A_{i_1}^{i_1^*} \dots A_{i_p}^{i_p^*} A_{j_1}^{j_1^*} \dots A_{j_q}^{j_q^*} \right],$$

onde a soma é feita sobre todos os multi-índices $i_0^*, \dots, i_p^*, j_0^*, \dots, j_q^*$ tais que $|i_0^*| = r$, $|j_0^*| = s$, $|i_t^*| = 1$ ($1 \leq t \leq p$), $|j_t^*| = 1$ ($1 \leq t \leq q$) e a ℓ -ésima coordenada de $i_0^* + \dots + i_p^*$ ($j_0^* + \dots + j_q^*$) é 1 se $\ell = k_t$, $1 \leq t \leq p+r$ ($\ell = \ell_t$, $1 \leq t \leq q+s$) e é 0 nos demais casos. É imediato verificar que para todo $a \in A(n)$, $\eta(a) = \eta_1(a) \eta_2(a)$, onde η_1 (η_2) é a função coordenada de ϕ na direção de (μ_1, μ_2) ((v_1, v_2)). Logo,

$$d\eta.h = \eta_2(e) d\eta_1.h + \eta_1(e) d\eta_2.h.$$

É claro que $\eta_1(e) = 1$ ($\eta_2(e) = 1$) se $\mu_1 = \mu_2$ ($v_1 = v_2$) e que $\eta_1(e) = 0$ ($\eta_2(e) = 0$) no caso contrário. Portanto, usando (4.1), podemos afirmar que

$$\eta_2(e) d\eta_1.h = \begin{cases} h_{ii_t} & \text{se } x_{k_1} \dots x_{k_{p+r}} = x_{i_1} x_{i_1} \dots \hat{x}_{i_t} \dots x_{i_p} \text{ e } x_{\ell_1} \dots x_{\ell_{q+s}} = x_{j_1} \dots x_{j_q} \\ \binom{m-p}{1}^{m-1} h_{i_0} & \text{se } x_{k_1} \dots x_{k_{p+r}} = x_{i_1} x_{i_1} \dots x_{i_p}, x_{\ell_1} \dots x_{\ell_{q+s}} = x_{j_1} \dots x_{j_q} \\ & \text{e } p < m \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

e

$$\eta_1(e) d\eta_2 \cdot h = \begin{cases} h_{jj_t} & \text{se } X_{k_1} \dots X_{k_{p+r}} = X_{i_1} \dots X_{i_p} \text{ e } X_{\ell_1} \dots X_{\ell_{q+s}} = X_j X_{j_1} \dots \hat{X}_{j_t} \dots X_{j_q} \\ \binom{m-q}{1} m^{-1} h_{j_0} & \text{se } X_{k_1} \dots X_{k_{p+r}} = X_{i_1} \dots X_{i_p}, X_{\ell_1} \dots X_{\ell_{q+s}} = X_j X_{j_1} \dots X_{j_q} \\ & \text{e } q < m \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

Recordamos que $A \otimes A$ é uma β -álgebra se e somente se A é uma α -álgebra (teorema 3.13). Seja d a derivação de A dada por (4.2). É fácil ver que a aplicação $(x, y) \in A \times A \rightarrow d(x) \otimes y + x \otimes d(y)$ é bilinear. Logo, a propriedade universal do produto tensorial fornece um único operador linear $d_\otimes$ de $A \otimes A$ tal que $d_\otimes(x \otimes y) = d(x) \otimes y + x \otimes d(y)$. Por cálculo direto, verificamos que $d_\otimes$ é também uma derivação de $A \otimes A$. Por outro lado, do parágrafo precedente, podemos deduzir que toda derivação de $A \otimes A$ é do tipo $d_\otimes$, onde d é uma derivação de A . Além disso, um cálculo direto mostra que a aplicação $d \in \text{Der}(A) \rightarrow d_\otimes \in \text{Der}(A \otimes A)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Portanto, temos:

TEOREMA 4.2 Para toda α -álgebra A , a aplicação

$$d \in \text{Der}(A) \rightarrow d_\otimes \in \text{Der}(A \otimes A)$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. A

É claro que para γ -álgebras temos um resultado semelhante ao enunciado no teorema anterior.

O teorema 4.1 e o teorema para γ -álgebras semelhante ao teorema 4.2 generalizam os resultados de Costa ([15], teorema 3; [16], teorema 4) sobre derivações de $G(n+1, 2m)$ e $Z(n+1, 2m)$.

2. Caracterização das α , β e γ -Álgebras: $m \leq 5$, n arbitrário

As α -álgebras são caracterizadas pelo seguinte

TEOREMA 4.3 Suponhamos que $1 \leq m \leq 5$ e seja (A, ω_1) uma álgebra ponderada de dimensão $\binom{m+n}{m}$. Uma condição necessária e suficiente para que A seja uma α -álgebra é a existência de uma base $Y = \{Y_O^{m-p} Y^{i*}; 0 \leq p \leq m, |i^*| = p\}$ verificando as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \omega_1(Y_O^m) = 1, \quad \omega_1(Y_O^{m-p} Y^{i*}) = 0 \quad (1 \leq p \leq m);$$

(ii) a álgebra de derivações de A consiste de todos os operadores lineares do tipo (4.2) com $Y_O^{m-p} Y^{i*}$ no lugar de $X_O^{m-p} X^{i*}$.

Prova. A necessidade foi provada no teorema 4.1. Para provar a suficiência, podemos supor, sem perda de generalidade, que A é uma álgebra sobre o espaço vetorial V fixado no início do capítulo II e faremos isto daqui para frente.

Consideremos os seguintes elementos de $L(n)$ (lembramos que $L(n)$ é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie $A(n)$ e que

$L(n)$ é isomorfa à álgebra de Lie $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$:

$$f = (0, \text{diag}(\ln 2, \ln 3, \ln 5, \dots, \ln p_n)) ,$$

$$g = ((1, 0, \dots, 0), 0) ,$$

$$h_i = (0, e_{1i} + \dots + e_{i-1,i} + e_{i+1,1} + \dots + e_{ni}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

(aqui, como no capítulo II, p_n denota o n -ésimo número primo positivo e e_{ij} é a matriz cujo único elemento não-nulo é um 1 na posição (i, j)). É claro que

$$\exp(f) = \text{diag}(1, 2, 3, 5, \dots, p_n) = c,$$

onde

$$\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k$$

(aqui $h \in L(n)$ e estamos identificando $h = (\delta, a)$ com a matriz $(n+1) \times (n+1)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & a \end{pmatrix}$). Como $g^k = g^2 = 0$ e $h_i^k = h_i^2 = 0$ para $k > 2$, temos que

$$\exp(g) = e + g = b$$

e

$$\exp(h_i) = e + h_i = a_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Veja a expressão dos elementos a_i , b e c de $A(n)$ na prova da proposição 2.3.

Pelo teorema 2.6, existem álgebras não-associativas de dimensão $n+1$ e $k = \binom{m+n}{m}$ tendo $A(n)$ e A^* , respectivamente, como grupo de automorfismos. Logo, $A(n)$ e A^* podem ser vistos como subgrupos de Lie de $Gl(n+1, \mathbb{R})$ e $Gl(k, \mathbb{R})$, e $L(n)$ e L^* podem ser vistas como subálgebras de Lie de $gl(n+1, \mathbb{R})$ e $gl(k, \mathbb{R})$, respectivamente. Por outro lado, como já foi provado no início da seção 1, a aplicação $a \in A(n) \xrightarrow{\phi} a^* \in A^*$ é um isomorfismo de grupos de Lie. Portanto, pelo teorema 1.8, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 L(n) & \xrightarrow{d\phi} & L^* \\
 \downarrow \exp_{A(n)} & & \downarrow \exp_{A^*} \\
 A(n) & \xrightarrow{\phi} & A^*
 \end{array}$$

Como a aplicação exponencial $\exp: gl(n+1, \mathbb{R}) \rightarrow Gl(n+1, \mathbb{R})$ é a exponenciação de matrizes, $\exp_{A(n)}$ é também a exponenciação de matrizes. De modo análogo, podemos ver que o mesmo ocorre com $\exp_{A^*}$. Temos então:

$$a_i^* = \phi \exp(h_i) = \exp(d\phi \cdot h_i) \quad (1 \leq i \leq n) ,$$

$$b^* = \phi \exp(g) = \exp(d\phi \cdot g) ,$$

$$c^* = \phi \exp(f) = \exp(d\phi \cdot f) .$$

Mas a exponenciação de uma derivação de uma álgebra não-associativa é um automorfismo da álgebra ([21], p.8). Portanto, como $\text{Der}(A) = L^*$ por hipótese, concluímos que a_i^* ($1 \leq i \leq n$), b^* e c^* são automorfismos de A e logo que A está em Ω (veja a prova da proposição 2.3). Note que o argumento usado para provar este fato não faz uso da condição $1 \leq m \leq 5$.

Já sabemos que $A = A(P)$ para algum $P \in H$. Se $m=1$ então $H = H_0$ e logo $P \in H_0$. Se $f(m) = 0$ então $t_m + \alpha_{mm} = 1$ pela identidade (2.8). Neste caso, o operador linear de A definido por $d(X_0^m) = v_m$ (aqui v_m é um elemento fixo mas arbitrário de V_m) e $d(x) = 0$ para $x \in V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ (veja a definição dos V_i no início do capítulo II) é uma derivação de A , como pode ser comprovado facilmente por cálculo direto. Mas isto contradiz o fato de que todo operador linear em L^* é do tipo (4.2). Logo, $f(m) \neq 0$ se $m > 1$. Portanto, para $m=2$ temos $f(2) \neq 0$ e para $m=3$ temos $f(3) \neq 0$ e logo $f(2) = \frac{2}{3}f(3) \neq 0$. Isto mostra que $P \in H_0$ e logo que $A \in \Omega_0$ quando $1 \leq m \leq 3$.

Agora, suponhamos que $m=4$. Se $P \notin H_0$ temos que $f(2) = f(3) = 0$, isto é, $t_1 = t_2$, pois como já foi mostrado $f(4) \neq 0$. Se $t_1 = t_3$, um cálculo direto mostra que o operador linear de A definido por $d_1(X_0^4) = X_0^2 X_1^2$, $d_1(X_0^2 X_i X_j) = -\frac{1}{6} X_1^2 X_i X_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) e $d(x) = 0$ para $x \in V_1 \oplus V_3 \oplus V_4$ é uma derivação de A ; uma contradição, como antes. Logo, $t_1 = t_2$, $t_1 \neq t_3$ e a condição $f(4) \neq 0$ fornece $t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0$. Temos então que $P \in H_1$ e logo que $A \in \Omega_1$.

Resta analisar o caso $m=5$. Se $P \notin H_0$, como na prova do teorema 2.15, temos dois casos: $f(2)=f(3)=0$, $f(4) \neq 0$; $f(2) \neq 0$,

$f(3) \neq 0$, $f(4) = 0$. No primeiro caso, $P \in H_2'$. No segundo, para concluir que $P \in H_2''$, resta mostrar que $4t_1 - 4t_2 + t_3 - t_5 \neq 0$. Mas isto segue do fato de que se $4t_1 - 4t_2 + t_3 - t_5 = 0$ então o operador linear d_2 de A , definido por $d_2(x_0^5) = x_0^4 x_1$, $d_2(x_0^4 x_i) = \frac{1}{5} x_0^4 x_i$ ($1 \leq i \leq n$), $d(x) = 0$ para $x \in V_2 \oplus \dots \oplus V_5$, é uma derivação de A ; novamente uma contradição. Logo, $P \in H_2$ e $A \in \Omega_2$.

Finalmente, podemos concluir que A é uma α -álgebra pelos teoremas 2.10, 2.13 e 2.15. Δ

As β -álgebras são caracterizadas como segue:

TEOREMA 4.4 Suponhamos que $1 \leq m \leq 5$ e seja (A, ω_1) uma álgebra ponderada de dimensão $\binom{m+n}{m}$. Então, $A \otimes A$ é uma β -álgebra se e somente se A admite uma base $Y = \{Y_0^{m-p} Y^{i*} : 0 \leq p \leq m, |i*| = p\}$ verificando as seguintes condições:

$$(i) \quad \omega_1(Y_0^m) = 1, \quad \omega_1(Y_0^{m-p} Y^{i*}) = 0 \quad (1 \leq p \leq m);$$

(ii) a álgebra de derivações de $A \otimes A$ é formada por todos os operadores d_θ , onde d é um operador linear de A do tipo (4.2) com $Y_0^{m-p} Y^{i*}$ no lugar de $X_0^{m-p} X^{i*}$.

Prova. A implicação $(\Rightarrow)$ nada mais é que o teorema 4.2.

Reciprocamente, suponhamos que A admite uma base satisfazendo as condições (i) e (ii). Sem perda de generalidade, vamos assumir que A é uma álgebra sobre o espaço vetorial V . Se seguirmos passo a passo a prova do teorema anterior com $a \in A(n) \xrightarrow{\theta} a^\theta \in A^\theta$ no lugar de ϕ , obtemos que A está em Ω .

Se d e d' são operadores lineares de A tais que $\omega d = \omega d' = 0$ e $d_{\otimes} = d'_{\otimes}$, então $d=d'$ (ω é a forma linear fixada no início do capítulo II). Para provar este fato, observamos que

$$d(x_0^m) \otimes y + x_0^m \otimes d(y) = d'(x_0^m) \otimes y + x_0^m \otimes d'(y)$$

para todo $y \in A$. Agora, reescrevemos esta última identidade como

$$x \otimes y + x_0^m \otimes d(y) = x' \otimes y + x_0^m \otimes d'(y),$$

onde $d(x_0^m) = x$, $d'(x_0^m) = x'$ ($x, x' \in V_1 \oplus \dots \oplus V_m$). Segue que $x_0^m \otimes d(y) = x_0^m \otimes d'(y)$ e logo $d(y) = d'(y)$.

Se d' é uma derivação arbitrária de A então $d'_{\otimes}$ é uma derivação de $A \otimes A$. Pela condição (ii), $d'_{\otimes} = d_{\otimes}$ para algum $d \in L^*$. Mas A é uma álgebra genética, pois $A \in \Omega$; logo, $\omega d' = 0$ pelo teorema 1.10. Também, como é imediato verificar, $\omega d = 0$. Concluimos então que $d'=d$. Isto mostra que $\text{Der}(A) \subseteq L^*$. Por outro lado, usando a identidade (2.4), obtemos por cálculo direto que todo operador linear do tipo (4.2) é uma derivação de A . Portanto, $\text{Der}(A) = L^*$ e então, pelo teorema 4.3, A é uma α -álgebra. Finalmente, usamos o teorema 3.13 para concluir que $A \otimes A$ é uma β -álgebra. Δ

Para as γ -álgebras temos um resultado inteiramente análogo ao enunciado no teorema anterior.

NOTA. Construímos tres classes de álgebras ponderadas verificando a seguinte propriedade:

(4.3) a álgebra de derivações da álgebra é isomorfa à álgebra de Lie $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Isto leva ao seguinte problema: a classificação de todas as álgebras ponderadas que verificam a propriedade (4.3). Na seção 3, mostramos que, especificando o isomorfismo em (4.3) e a dimensão da álgebra, obtemos uma solução para o problema.

No caso $n=1$, este problema foi considerado por Costa ([17], capítulo 5). Ele construiu uma classe de álgebras ponderadas de dimensão $m+1$, denominadas álgebras minimais e provou que elas verificam a propriedade (4.3). Em termos da nossa notação, uma álgebra A é denominada **álgebra minimal** se $A \in \Omega(m, 1)$ e $\{d_1, d_{11}\}$ é uma base para $\text{Der}(A)$. Se $1 \leq m \leq 5$, os teoremas 4.3, 2.10, 2.13 e 2.15 fornecem uma classificação para todas as álgebras minimais.

Costa considerou também o caso $m=1$ e obteve um resultado (veja [17], teorema 5.32) que é um caso particular do resultado enunciado no teorema 4.3.

CAPÍTULO V

AUTOMORFISMOS E DERIVAÇÕES DAS ÁLGEBRAS GAMÉTICA E ZIGÓTICA PARA LOCI LIGADOS

Nos capítulos II, III e IV, vimos como se comportam os automorfismos e as derivações das álgebras gamética e zigótica que descrevem a herança em um locus apenas. Neste capítulo, consideraremos o modelo genético correspondente a indivíduos diplóides que diferem em um número arbitrário de loci ligados. Usando o tratamento dado por Heuch [11], que reproduziremos na seção 1, mostraremos que o grupo de automorfismos da álgebra gamética e também da álgebra zigótica que descrevem este modelo contém um subgrupo isomorfo ao produto direto externo de grupos afins. Mostraremos também que a álgebra de derivações destas álgebras é isomorfa ao produto direto das álgebras de Lie associadas a estes grupos afins.

1. As álgebras gamética e zigótica para loci ligados

Consideremos uma população de indivíduos diplóides que diferem em k loci. Suponhamos que os possíveis alelos no m -ésimo locus são $D_{m0}, \dots, D_{mr_m}$. Temos, portanto, $(r_1+1) \dots (r_k+1)$ tipos gaméticos distintos: $D_{1i_1} \dots D_{ki_k}$ ($0 \leq i_m \leq r_m$, $1 \leq m \leq k$).

Seja $K = \{1, 2, \dots, k\}$. Sejam U' e U'' subconjuntos complementares de K . Indicaremos por $U = (U', U'') = (U'', U')$ a partição (não-ordenada) de K determinada por U' e U'' . O conjunto de todas as partições de K será denotado por $W(K)$. Para uma dada partição U , suponhamos que nos zigotos os loci em U' são considerados como um bloco, os loci em U'' como outro bloco e que ocorre recombinação entre estes dois blocos. A herança a nível gamético é descrita pelo seguinte esquema:

Este tipo de modelo genético pode ser descrito pela **álgebra de recombinação** $G(U)$ que é a álgebra real com base formada pelos elementos $D_{1i_1} \dots D_{ki_k}$ ($0 \leq i_m \leq r_m$, $1 \leq m \leq k$) e cuja tábua de multiplicação é dada por:

$$(\prod_{m \in U'} D_{mi_m}) (\prod_{m \in U''} D_{mj_m}) = \frac{1}{2} \{ (\prod_{m \in U'} D_{mi_m}) (\prod_{m \in U''} D_{mj_m}) + (\prod_{m \in U''} D_{mi_m}) (\prod_{m \in U'} D_{mj_m}) \}$$

(Aqui e no que segue $\prod_{m \in U'} D_{mi_m}$ indica o elemento $D_{1i_1} \dots D_{ki_k}$ e

$(\prod_{m \in U'} D_{mi_m}) (\prod_{m \in U''} D_{mj_m})$ é simplesmente a justaposição).

Dado $U \in W(K)$, indicaremos por $\lambda(U)$ a probabilidade de que ocorra recombinação entre os blocos de loci determinados por U' e U'' . O grau de ligamento entre os k loci é dado por uma **distribuição de ligamento** $\{\lambda(U) : U \in W(K)\}$. A herança a nível gamético simultânea para os k loci (isto é, estamos levando em consideração todas as possibilidades de recombinação entre os loci) é descrita pela álgebra real $G(r_1, \dots, r_k)$ que tem uma base formada pelos elementos $D_{1i_1} \dots D_{ki_k}$ ($0 \leq i_m \leq r_m$, $1 \leq m \leq k$) e cuja tábua de multiplicação é:

$$(\prod_{m \in U'} D_{mi_m}) (\prod_{m \in U''} D_{mj_m}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in W(K)} \lambda(U) \{ (\prod_{m \in U'} D_{mi_m}) (\prod_{m \in U''} D_{mj_m}) + (\prod_{m \in U''} D_{mi_m}) (\prod_{m \in U'} D_{mj_m}) \} \right).$$

Como

$$\sum_{U \in W(K)} \lambda(U) = 1,$$

a álgebra gamética para loci ligados $G(r_1, \dots, r_k)$ é então uma **combinação convexa** das álgebras de recombinação $G(U)$ ($U \in W(K)$):

$$G(r_1, \dots, r_k) = \sum_{U \in W(K)} \lambda(U) G(U) .$$

Lembramos que a herança a nível gamético para o m -ésimo locus é descrita pela álgebra gamética $G(r_m+1, 2)$ (veja a seção 1 do capítulo I). Seja $\{X_{m0}, \dots, X_{mr_m}\}$ uma base canônica qualquer para $G(r_m+1, 2)$. O produto formal $X_{1i_1} \dots X_{ki_k}$ indicará o elemento de $G(r_1, \dots, r_m)$ que se obtém substituindo cada X_{mi_m} ($1 \leq m \leq k$) por sua expressão como combinação linear dos elementos da base natural $D_{m0}, \dots, D_{mr_m}$ de $G(r_m+1, 2)$ e fazendo o produto usual. Como foi demonstrado por Heuch [11], os produtos formais $X_{1i_1} \dots X_{ki_k}$ ($0 \leq i_m \leq r_m$, $1 \leq m \leq k$) constituem uma base canônica para a álgebra $G(r_1, \dots, r_k)$ e a tábua de multiplicação da álgebra em relação a esta base é dada por:

$$(\prod X_{m0})^2 = \prod X_{m0} ;$$

$$(\prod X_{m0})(\prod X_{mi_m}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in Q(i^*)} \lambda(U) \prod X_{mi_m} \right) ,$$

se $i_m \neq 0$ para algum $m \in K$, onde $i^* = (i_1, \dots, i_k)$ e

$$Q(i^*) = \{U \in W(K) : \{m \in K : i_m \neq 0\} \subset U' \text{ ou } U''\} ;$$

$$(\prod X_{mi_m})(\prod X_{mj_m}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(i^*, j^*)} \lambda(U) \prod X_{mt_m} \right) ,$$

se $i_m \neq 0$, $j_n \neq 0$ para algum $m, n \in K$ e $\{m \in K : i_m \neq 0\} \cap \{n \in K : j_n \neq 0\} = \emptyset$, onde

$$R(i^*, j^*) = \{U \in W(K) : \{m \in K : i_m \neq 0\} \subset U' \text{ e } \{n \in K : j_n \neq 0\} \subset U'' \text{ ou vice-versa}\} ,$$

$t_m = i_m$ se $i_m \neq 0$, $t_n = j_n$ se $i_n \neq 0$ e $t_s = 0$ se $i_s = j_s = 0$;

$$(\prod x_{mi_m})(\prod x_{mj_m}) = 0$$

nos demais casos.

Segue diretamente desta tábua de multiplicação que $G(r_1, \dots, r_k)$ é uma álgebra genética e que $x_{1i_1} \dots x_{ki_k}$ ($0 \leq i_m \leq r_m, 1 \leq m \leq k$) é uma base canônica. Além disso, a forma linear $\bar{\omega}: G(r_1, \dots, r_k) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\bar{\omega}(x_{10} \dots x_{k0}) = 1, \quad \bar{\omega}(x_{1i_1} \dots x_{ki_k}) = 0 \text{ nos demais casos,}$$

é uma função peso para esta álgebra.

OBSERVAÇÃO. Se $\sum_{U \in Q(i^*)} \lambda(U) = 1$ para um i^* com $i_m \neq 0$ e $i_n \neq 0$ ($m \neq n$), não há recombinação entre os loci m e n pois $\lambda(U) = 0$, para todo $U \in W(K) - Q(i^*)$, e $\{i_m, i_n\} \subset U'$ ou U'' , para todo $U \in Q(i^*)$. Neste caso, os loci m e n são considerados como sendo um só locus. Portanto, não há perda de generalidade em assumir que

$$\sum_{U \in Q(i^*)} \lambda(U) < 1,$$

para todo i^* com pelo menos duas coordenadas não-nulas. Faremos esta suposição em tudo o que segue.

O processo de duplicação comutativa (veja a seção 3 do capítulo I), aplicado à álgebra gamética $G(r_1, \dots, r_k)$, fornece a álgebra zigótica $Z(r_1, \dots, r_k)$ que descreve a herança de genes de zigoto para zigoto. Como $G(r_1, \dots, r_k)$ é uma álgebra genética, $Z(r_1, \dots, r_k)$ é também uma álgebra genética. Uma base canônica para $Z(r_1, \dots, r_k)$ é constituída pelos elementos $x_{1i_1} \dots x_{ki_k} \otimes x_{1j_1} \dots x_{kj_k}$ ($1 \leq i_m, j_m \leq r_m$, $1 \leq m \leq k$).

2. Automorfismos de $G(r_1, \dots, r_k)$ e $Z(r_1, \dots, r_k)$

Dada uma k -upla $a = (a_1, \dots, a_k)$, onde a_m ($1 \leq m \leq k$) é uma matriz (a_{mij}) ($0 \leq i, j \leq r_m$), definimos o operador linear $\bar{a}$ de $G(r_1, \dots, r_k)$ pondo

$$\bar{a}(x_{1i_1} \dots x_{ki_k}) = \sum_{\ell^* = 0^*}^{r^*} a_{1\ell_1 i_1} \dots a_{k\ell_k i_k} x_{1\ell_1} \dots x_{k\ell_k}$$

(0^* é o multi-índice com as k coordenadas nulas). Denotaremos por $\bar{A} = \bar{A}(r_1, \dots, r_k)$ o conjunto de todos os operadores $\bar{a}$ com a no produto direto externo $A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$ (lembramos que $A(n)$ denota o grupo afim do $\mathbb{R}^n$).

PROPOSIÇÃO 5.1 A aplicação $a \in A(r_1) \times \dots \times A(r_k) \longrightarrow \bar{a} \in \bar{A}$ é um isomorfismo de grupos.

Prova. Vamos mostrar que, dados $a, b \in A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$, temos $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$.

De fato, façamos $a=(a_1, \dots, a_k)$, $b=(b_1, \dots, b_k)$ e $ab=c=(c_1, \dots, c_k)$. A componente de $\bar{c}(x_{1i_1} \dots x_{ki_k})$ na direção de $x_{1t_1} \dots x_{kt_k}$ é

$$(5.1) \quad c_{1t_1 i_1} \dots c_{kt_k i_k} = \left(\sum_{\ell_1=0}^{r_1} a_{1t_1 \ell_1} b_{1\ell_1 i_1} \right) \dots \left(\sum_{\ell_k=0}^{r_k} a_{kt_k \ell_k} b_{k\ell_k i_k} \right).$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b}(x_{1i_1} \dots x_{ki_k}) &= \sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} b_{1\ell_1 i_1} \dots b_{k\ell_k i_k} \bar{a}(x_{1\ell_1} \dots x_{k\ell_k}) \\ &= \sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} \sum_{s^*=0^*}^{r^*} a_{1s_1 \ell_1} \dots a_{ks_k \ell_k} b_{1\ell_1 i_1} \dots b_{k\ell_k i_k} x_{1s_1} \dots x_{ks_k}. \end{aligned}$$

Logo, a componente de $\bar{a}\bar{b}(x_{1i_1} \dots x_{ki_k})$ na direção de $x_{1t_1} \dots x_{kt_k}$ é

$$(5.2) \quad \sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} a_{1t_1 \ell_1} \dots a_{kt_k \ell_k} b_{1\ell_1 i_1} \dots b_{k\ell_k i_k}.$$

De (5.1) e (5.2) segue $\bar{a}\bar{b}(x_{1t_1} \dots x_{kt_k}) = \bar{a}\bar{b}(x_{1i_1} \dots x_{ki_k})$, para todo $t^* = 0^*, \dots, r^*$.

Agora, a parte restante da prova é a usual. Δ

LEMA 5.2 Para todo $a \in A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$, $\bar{a}$ é um automorfismo de $G(r_1, \dots, r_k)$.

Prova. Como foi demonstrado por Heuch [12], $G(r_1, \dots, r_k)$ tem uma família a $r_1+r_2+\dots+r_k$ parâmetros de idempotentes e estes têm a forma:

$$\sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} \alpha_{1\ell_1} \dots \alpha_{k\ell_k} x_{1\ell_1} \dots x_{k\ell_k} \quad (\alpha_{ij} \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq r_i, \alpha_{i0}=1, 1 \leq i \leq k).$$

Assim, um idempotente em $G(r_1, \dots, r_k)$ é determinado por suas coordenadas na direção dos $X_{1\ell_1} \dots X_{k\ell_k}$ com ℓ^* tendo exatamente uma coordenada não-nula. Segue que $\bar{a}(X_{10} \dots X_{k0})$ é um idempotente em $G(r_1, \dots, r_k)$. Logo, temos:

$$\begin{aligned} \bar{a}[(X_{10} \dots X_{k0})(X_{10} \dots X_{k0})] &= \bar{a}(X_{10} \dots X_{k0}) = \\ &= \bar{a}(X_{10} \dots X_{k0}) \bar{a}(X_{10} \dots X_{k0}). \end{aligned}$$

Consideremos os multi-índices $p^* = (p_1, \dots, p_k)$ e $q^* = (q_1, \dots, q_k)$ e façamos $P = \{i \in K: p_i \neq 0\}$, $Q = \{i \in K: q_i \neq 0\}$. Para provar que $\bar{a}$ preserva o produto $(X_{1p_1} \dots X_{kp_k})(X_{1q_1} \dots X_{kq_k})$ temos que analisar dois casos:

1. $P \cap Q \neq \emptyset$.

Neste caso, temos por um lado $\bar{a}[(X_{1p_1} \dots X_{kp_k})(X_{1q_1} \dots X_{kq_k})] = 0$ e por outro lado

$$\begin{aligned} &\bar{a}(X_{1p_1} \dots X_{kp_k}) \bar{a}(X_{1q_1} \dots X_{kq_k}) = \\ &= \sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} \sum_{s^*=0^*}^{r^*} a_{1\ell_1 p_1} \dots a_{k\ell_k p_k} a_{1s_1 q_1} \dots a_{ks_k q_k} (X_{1\ell_1} \dots X_{k\ell_k})(X_{1s_1} \dots X_{ks_k}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois ou $\ell_i = 0$ para algum $i \in P \cap Q$ e então $a_{i\ell_i p_i} = 0$, ou $s_i = 0$ para algum $i \in P \cap Q$ e então $a_{is_i q_i} = 0$, ou $\ell_i \neq 0$, $s_i \neq 0$ para

todo $i \in P \cap Q$ e então $(x_{1\ell_1} \dots x_{k\ell_k})(x_{1s_1} \dots x_{ks_k}) = 0$.

2. $P \cap Q = \emptyset$.

Temos:

$$\bar{a}(x_{1p_1} \dots x_{kp_k}) \bar{a}(x_{1q_1} \dots x_{kq_k}) = \sum_{\ell^*, s^*=0}^{r^*} a_{1\ell_1 p_1} \dots a_{k\ell_k p_k} a_{1s_1 q_1} \dots a_{ks_k q_k} (x_{1\ell_1} \dots x_{k\ell_k})(x_{1s_1} \dots x_{ks_k}).$$

Mas se $\ell_i = 0$ ($s_i = 0$) para algum $i \in P$ ($i \in Q$) então $a_{i\ell_i p_i} = 0$

($a_{is_i q_i} = 0$). Logo, na soma, precisamos considerar apenas os casos em que $\ell_i \neq 0$ para todo $i \in P$ e os casos $s_i \neq 0$ para todo $i \in Q$.

A componente de $\bar{a}(x_{1p_1} \dots x_{kp_k}) \bar{a}(x_{1q_1} \dots x_{kq_k})$ na direção de $x_{1t_1} \dots x_{kt_k}$, no caso em que $P \cap Q \subset \{m \in K: t_m \neq 0\}$, é

$$\frac{1}{2} \sum_{U \in R(\ell^*, s^*)} \lambda(U) a_{1\ell_1 p_1} \dots a_{k\ell_k p_k} a_{1s_1 q_1} \dots a_{ks_k q_k},$$

onde a soma é feita sobre todos os multi-índices ℓ^* e s^* tais que $\ell^* + s^* = t^*$, $L \cap S = \emptyset$, $P \subset L$ e $Q \subset S$. ($L = \{i \in K: \ell_i \neq 0\}$, $S = \{i \in K: s_i \neq 0\}$).

Para os ℓ^* e s^* que aparecem na soma temos $\ell_i = t_i$ ($i \in P$) e $s_i = t_i$ ($i \in Q$). Logo, a soma pode ser reescrita na seguinte forma:

$$(5.3) \quad \left(\frac{1}{2} \sum_{U \in R(\ell^*, s^*)} \lambda(U) \right) \left(\prod_{i \in P \cup Q} a_{it_i o} \right) \left(\prod_{i \in P} a_{it_i p_i} \right) \left(\prod_{i \in Q} a_{it_i q_i} \right),$$

onde $\overline{P \cup Q} = K - (P \cup Q)$. Agora afirmamos que

$$R(p^*, q^*) = UR(\ell^*, s^*) ,$$

onde a união é disjunta e é feita sobre todos os multi-índices ℓ^* e s^* que aparecem na soma (5.3). De fato, é imediato que $UQ(\ell^*, s^*) \subset UR(\ell^*, s^*) \subset R(p^*, q^*)$. Por outro lado, se U é uma partição em $R(p^*, q^*)$, isto é, $P \subset U'$ e $Q \subset U''$, então $U \in R(\ell^*, s^*)$ somente para os ℓ^* e s^* tais que $\ell_i = t_i$ se $i \in U'$ e $t_i \neq 0$, e $s_i = t_i$ se $i \in U''$ e $t_i \neq 0$. A afirmação está demonstrada. Portanto, a soma (5.3) é igual a

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) \right) \left(\prod_{i \in PUQ} a_{it_i o} \right) \left(\prod_{i \in P} a_{it_i p_i} \right) \left(\prod_{i \in Q} a_{it_i q_i} \right) .$$

Quando $P \cup Q \not\subset \{m \in K: t_m \neq 0\}$, a referida componente é 0. Por outro lado, temos

$$\bar{a}[(x_{1p_1} \dots x_{kp_k}) (x_{1q_1} \dots x_{kq_k})] =$$

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) \right) \bar{a} \left[\left(\prod_{i \in PUQ} x_{io} \right) \left(\prod_{i \in P} x_{ip_i} \right) \left(\prod_{i \in Q} x_{iq_i} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) \right) \sum_{t^*=0^*}^{r^*} \left(\prod_{i \in PUQ} a_{it_i o} \right) \left(\prod_{i \in P} a_{it_i p_i} \right) \left(\prod_{i \in Q} a_{it_i q_i} \right) x_{1t_1} \dots x_{kt_k} .$$

Podemos concluir então que

$$\bar{a}[(x_{1p_1} \dots x_{kp_k}) (x_{1q_1} \dots x_{kq_k})] = \bar{a}(x_{1p_1} \dots x_{kp_k}) \bar{a}(x_{1q_1} \dots x_{kq_k}) .$$

Isto mostra que $\bar{a}$ é um endomorfismo de A . Mas, pela proposição 5.1, $\bar{a}$ é um operador inversível. Logo, $\bar{a}$ é um automorfismo de $G(r_1, \dots, r_k)$. Δ

TEOREMA 5.3 O grupo de automorfismos da álgebra gamética

$G(r_1, \dots, r_k)$ contém um subgrupo isomorfo ao produto direto externo $A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$.

Prova. Pelo lema anterior, $\bar{A}$ é um subgrupo do grupo de automorfismos de $G(r_1, \dots, r_k)$. Por outro lado, como foi provado na proposição 5.1, os grupos $\bar{A}$ e $A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$ são isomorfos. Δ

NOTA Seja ψ o operador linear de $G(1,1)$ definido por

$$\psi(X_{10}X_{20}) = X_{10}X_{20}, \quad \psi(X_{10}X_{21}) = X_{11}X_{20},$$

$$\psi(X_{11}X_{20}) = X_{10}X_{21}, \quad \psi(X_{11}X_{21}) = X_{11}X_{21}.$$

Um cálculo direto mostra que ψ é um automorfismo de $G(1,1)$. Mas ψ não é um elemento de $\bar{A}$ já que (para todo $a \in A(1) \times A(1)$) $\bar{a}(X_{10}X_{21})$ não tem componente na direção de $X_{11}X_{20}$. Logo, no caso em que $k=2$, $r_1=r_2=1$, $\bar{A}$ é um subgrupo próprio de $\text{Aut}(G(1,1))$. Não sabemos ainda se isto ocorre em qualquer caso.

Usando o lema 5.2, é imediato verificar que $\bar{a}\bar{\theta}\bar{a}$, onde $a \in A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$, é um automorfismo de $Z(r_1, \dots, r_k)$. Lembramos que $a\theta a$ é definido por $\bar{a}\bar{\theta}\bar{a}(x\theta y) = \bar{a}(x)\bar{\theta}\bar{a}(y)$. Além disso, como uma consequência do fato de que $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$, para todo a, b em $A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$ (veja a prova da proposição 5.1), temos que a aplicação $a \rightarrow a\theta a$ é um isomorfismo entre $A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$ e o grupo formado pelos operadores $a\theta a$ ($a \in A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$). Logo, vale o seguinte

TEOREMA 5.4 O grupo de automorfismos da álgebra zigótica $Z(r_1, \dots, r_k)$ contém um subgrupo isomorfo ao produto direto externo $A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$.

3. Derivações

É bem conhecido que se $G_1, \dots, G_k$ são grupos de Lie com álgebras de Lie $L_1, \dots, L_k$, respectivamente, então a álgebra de Lie do produto direto $G_1 \times \dots \times G_k$ é o produto direto de álgebras de Lie $L_1 \times \dots \times L_k$ (veja [22], p. 10-9). Por outro lado, pela proposição 5.1 e pelo lema 5.2, temos que a aplicação

$$a \in A(r_1) \times \dots \times A(r_k) \xrightarrow{\phi} \bar{a} \in \text{Aut}(G(r_1, \dots, r_k))$$

é um homomorfismo de grupos (abstratos); além disso, como as funções coordenadas de ϕ são polinômios nas indeterminadas a_{mij} ($0 \leq i, j \leq r_m$, $1 \leq m \leq k$), ϕ é de classe C^∞ e podemos então concluir que ϕ é um homomorfismo de grupos de Lie. Portanto, pelo teorema 1.7, temos o homomorfismo de álgebras de Lie

$$d\phi: (\mathbb{R}^{r_1} \oplus \mathfrak{gl}(r_1, \mathbb{R})) \times \dots \times (\mathbb{R}^{r_k} \oplus \mathfrak{gl}(r_k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Der}(G(r_1, \dots, r_k)).$$

Assim, dada uma k -upla $h = (h_1, \dots, h_k)$, onde $h_m = (h_{mij}) \in \mathbb{R}^{r_m} \oplus \mathfrak{gl}(r_m, \mathbb{R})$ ($1 \leq m \leq k$), $d = d\phi.h$ é uma derivação de $G(r_1, \dots, r_k)$. Vamos determinar em seguida a expressão de $d(X_{1i_1} \dots X_{ki_k})$ como uma combinação linear dos elementos da base canônica de $G(r_1, \dots, r_k)$. A função coordenada de ϕ na direção de

$(x_{1i_1} \dots x_{ki_k}, x_{1j_1} \dots x_{kj_k})$ é a aplicação

$$a \xrightarrow{\psi} a_{1j_1 i_1} \dots a_{kj_k i_k}.$$

Sejam $I = \{m \in K: i_m \neq 0\}$ e $J = \{m \in K: j_m \neq 0\}$. Suponhamos que $I = \emptyset$.

Se $J = \emptyset$ então ψ é a aplicação constante igual a 1 e logo $\frac{\partial \psi}{\partial a_{mij}}(e) = 0$

$(0 \leq i, j \leq r_m, i \neq 0, 1 \leq m \leq k)$. Agora, suponhamos que $J = \{s\}$; neste caso,

$\frac{\partial \psi}{\partial a_{mij}}(e)$ é 1 quando $m=s, i=j_s, j=0$ e é 0 em qualquer outro

caso. Finalmente, se J contém mais do que um elemento então $\frac{\partial \psi}{\partial a_{mij}}$

é 0 ou em sua expressão sempre aparece algum $a_{sj_s 0}$ ($1 \leq j_s \leq r_m$); logo,

$\frac{\partial \psi}{\partial a_{mij}}(e) = 0$ ($0 \leq i, j \leq r_m, i \neq 0, 1 \leq m \leq k$) neste caso. Temos então

que

$$d\psi.h = h_{sj_s 0}$$

se $x_{1j_1} \dots x_{kj_k} = x_{sj_s} x_{10} \dots \hat{x}_{sj_s} \dots x_{k0}$ ($1 \leq j_s \leq r_s$) e

$$d\psi.h = 0$$

quando isto não ocorre. Resta analisar o caso em que $I \neq \emptyset$. É imediato que

$\frac{\partial \psi}{\partial a_{mij}}(e) = 0$ ($j \neq i_m, 1 \leq m \leq k$). Por outro lado, $\frac{\partial \psi}{\partial a_{mt_m i_m}}(e) = 1$

se $x_{1j_1} \dots x_{kj_k} = x_{mt_m} x_{1i_1} \dots \hat{x}_{mi_m} \dots x_{ki_k}$ ($1 \leq t_m \leq r_m$) e $\frac{\partial \psi}{\partial a_{mt_m i_m}}(e) = 0$

nos demais casos. Logo,

$$d\psi.h = h_{mt_m i_m}$$

no caso em que $x_{1j_1} \dots x_{kj_k} = x_{mt_m} x_{1i_1} \dots \hat{x}_{mi_m} \dots x_{ki_k}$ e

$$d\psi.h = 0$$

em qualquer outro caso. Portanto,

$$(5.4) \quad d(x_{1i_1} \dots x_{ki_k}) = \sum_{m=1}^k \sum_{j_m=1}^{r_m} h_{mj_m i_m} x_{mj_m} x_{1i_1} \dots \hat{x}_{mi_m} \dots x_{ki_k}.$$

Sejam $d = d\phi.h$ e $d' = d\phi.h'$, onde h e h' são elementos de $(\mathbb{R}^{r_1} \otimes \text{gl}(r_1, \mathbb{R})) \times \dots \times (\mathbb{R}^{r_k} \otimes \text{gl}(r_k, \mathbb{R}))$. Suponhamos que $d = d'$. Então, por (5.4), temos que

$$h_{mj_m i_m} = h'_{mj_m i_m}$$

para todo m , j_m e i_m ($0 \leq i_m, j_m \leq r_m$, $1 \leq m \leq k$), isto é, que $h = h'$. Logo, $d\phi$ é uma aplicação injetora.

Agora, afirmamos que a aplicação $d\phi$ é sobrejetora. Seja d uma derivação de $G(r_1, \dots, r_k)$. Devemos mostrar que d é dada por (5.4). Façamos

$$d(x_{10} \dots x_{k0}) = \sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} a_{\ell^*} x_{1\ell_1} \dots x_{k\ell_k} \quad (a_{\ell^*} \in \mathbb{R}).$$

Como $\bar{\omega}od = 0$ (teorema 1.9) temos que $a_{0^*} = 0$. De $d(x_{10} \dots x_{k0}) = 2(x_{10} \dots x_{k0})d(x_{10} \dots x_{k0})$ segue que

$$\sum_{\ell^*=0}^{r^*} a_{\ell^*} X_{1\ell_1} \dots X_{k\ell_k} = 2(X_{10} \dots X_{k0}) \left(\sum_{\ell^*=0}^{r^*} a_{\ell^*} X_{1\ell_1} \dots X_{k\ell_k} \right).$$

Logo, se ℓ^* tem mais do que uma coordenada não-nula então

$$a_{\ell^*} = \left(\sum_{U \in Q(\ell^*)} \lambda(U) \right) a_{\ell^*}$$

e disto segue que $a_{\ell^*} = 0$ pois $\sum_{U \in Q(\ell^*)} \lambda(U) < 1$. Portanto,

$$d(X_{10} \dots X_{k0}) = \sum_{m=1}^k \sum_{j_m=1}^{r_m} h_{mj_m 0} X_{mj_m} X_{10} \dots \hat{X}_{m0} \dots X_{k0} \quad (h_{mj_m 0} \in \mathbb{R}).$$

Agora, sejam $s \in K$ e i_s tal que $1 \leq i_s \leq r_s$ e façamos

$$d(X_{si_s} X_{10} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{k0}) = \sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} b_{\ell^*} X_{1\ell_1} \dots X_{k\ell_k} \quad (b_{\ell^*} \in \mathbb{R}, b_{0^*}=0).$$

De

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d(X_{si_s} X_{10} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{k0}) &= d(X_{10} \dots X_{k0}) (X_{si_s} X_{10} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{k0}) \\ &+ (X_{10} \dots X_{k0}) d(X_{si_s} X_{10} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{k0}) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\ell^*=0}^{r^*} b_{\ell^*} X_{1\ell_1} \dots X_{k\ell_k} &= (X_{10} \dots X_{k0}) \left(\sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} b_{\ell^*} X_{1\ell_1} \dots X_{k\ell_k} \right) \\ &+ \left(\sum_{m=1}^k \sum_{j_m=1}^{r_m} h_{mj_m 0} X_{mj_m} X_{10} \dots \hat{X}_{m0} \dots X_{k0} \right) (X_{si_s} X_{10} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{k0}). \end{aligned}$$

Logo, se ℓ^* tem mais do que duas coordenadas não-nulas ou se ℓ^* tem exatamente duas coordenadas não-nulas e nenhuma delas é a s -ésima então

$$b_{\ell^*} = \left(\sum_{U \in Q(\ell^*)} \lambda(U) \right) b_{\ell^*}$$

e disto segue que $b_{\ell^*} = 0$. Por outro lado, se as únicas coordenadas não-nulas de ℓ^* são $\ell_m = j_m$ e $\ell_s = i_s$ ($m \neq s$)

$$b_{\ell^*} = \left(\sum_{U \in Q(\ell^*)} \lambda(U) \right) b_{\ell^*} + \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) \right) h_{mj_m o}$$

(aqui $p^* (q^*)$ é o multi-índice cuja única coordenada não-nula é $p_m = j_m$ ($q_s = i_s$) e logo $b_{\ell^*} = h_{mj_m o}$. Também, como

$$(X_{si_s} X_{1o} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{ko}) d(X_{si_s} X_{1o} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{ko}) = 0,$$

temos

$$(X_{si_s} X_{1o} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{ko}) \left(\sum_{\ell^*=0^*}^{r^*} b_{\ell^*} X_{1\ell_1} \dots X_{k\ell_k} \right) = 0;$$

logo, se a única coordenada não-nula de ℓ^* é $\ell_m = j_m$ ($m \neq s$) então

$$\left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) \right) b_{\ell^*} = 0$$

(p^* e q^* como antes), donde concluimos que $b_{\ell^*} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(X_{si_s} X_{1o} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{ko}) &= \\ &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq s}}^k \sum_{j_m=1}^{r_m} h_{mj_m o} X_{mj_m} X_{si_s} X_{1o} \dots \hat{X}_{so} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{ko} + \sum_{j_s=1}^{r_s} h_{mj_s i_s} X_{sj_s} X_{1o} \dots \hat{X}_{so} \dots X_{ko} \quad (h_{mj_s i_s} \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Finalmente, suponhamos que para todo i^* com no máximo $t-1$ coordenadas não nulas $d(X_{1i_1} \dots X_{ki_k})$ é dado por (5.4). Seja i^* com exatamente t coordenadas não-nulas e sejam p^* e q^* não-nulos tais que $p^*+q^*=i^*$ e $\{m \in K: p_m \neq 0\} \cap \{m \in K: q_m \neq 0\} = \emptyset$. Temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) d(X_{1i_1} \dots X_{ki_k}) \right) \\ &= (X_{1q_1} \dots X_{kq_k}) \left(\sum_{m=1}^k \sum_{j_m=1}^{r_m} h_{mj_m p_m} X_{mj_m} X_{1p_1} \dots \hat{X}_{mp_m} \dots X_{kp_k} \right) \\ &+ (X_{1p_1} \dots X_{kp_k}) \left(\sum_{m=1}^k \sum_{j_m=1}^{r_m} h_{mj_m q_m} X_{mj_m} X_{1q_1} \dots \hat{X}_{mq_m} \dots X_{kq_k} \right). \end{aligned}$$

Para $m \in K$ com $i_m \neq 0$ temos

$$(X_{1q_1} \dots X_{kq_k}) (X_{mj_m} X_{1p_1} \dots \hat{X}_{mp_m} \dots X_{kp_k}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) X_{mj_m} X_{1i_1} \dots \hat{X}_{mi_m} \dots X_{ki_k} \right) & \text{se } q_m = 0 \\ 0 & \text{se } q_m \neq 0 \end{cases}$$

e

$$(X_{1p_1} \dots X_{kp_k}) (X_{mj_m} X_{1q_1} \dots \hat{X}_{mq_m} \dots X_{kq_k}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) X_{mj_m} X_{1i_1} \dots \hat{X}_{mi_m} \dots X_{ki_k} \right) & \text{se } p_m = 0 \\ 0 & \text{se } p_m \neq 0 \end{cases}$$

Por outro lado, para $m \in K$ com $i_m \neq 0$ temos

$$(X_{1q_1} \dots X_{kq_k}) (X_{mj_m} X_{1p_1} \dots \hat{X}_{mp_m} \dots X_{kp_k}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(q^*, i^*)} \lambda(U) X_{mj_m} X_{1i_1} \dots \hat{X}_{mi_m} \dots X_{ki_k} \right)$$

e

$$(X_{1p_1} \dots X_{kp_k}) (X_{mj_m} X_{1q_1} \dots \hat{X}_{mq_m} \dots X_{kq_k}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{U \in R(p^*, s^*)} \lambda(U) X_{mj_m} X_{1i_1} \dots \hat{X}_{mi_m} \dots X_{ki_k} \right)$$

onde $l^* (s^*)$ é a soma de $p^* (q^*)$ com o multi-índice cuja única coordenada não-nula é a m -ésima que é igual a j_m . É imediato verificar que $R(p^*, q^*)$ é a união disjunta de $R(p^*, s^*)$ e $R(q^*, l^*)$. Portanto,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) \right) d(X_{1i_1} \dots X_{ki_k}) \\ &= \left(\sum_{U \in R(p^*, q^*)} \lambda(U) \right) \sum_{m=1}^k \sum_{j_m=1}^{r_m} h_{mj_m i_m} X_{mj_m} X_{1i_1} \dots \hat{X}_{mi_m} \dots X_{ki_k} \end{aligned}$$

e disto segue que $d(X_{1i_1} \dots X_{ki_k})$ também é dado por (5.4). A afirmação está demonstrada.

Estas considerações podem ser resumidas no seguinte

TEOREMA 5.5 A álgebra de derivações da álgebra gamética $G(r_1, \dots, r_k)$ é isomorfa ao produto direto de álgebras de Lie

$$(\mathbb{R}^{r_1} \otimes \mathfrak{gl}(r_1, \mathbb{R})) \times \dots \times (\mathbb{R}^{r_k} \otimes \mathfrak{gl}(r_k, \mathbb{R})). \quad A$$

Se h é uma k -upla $(h_1, \dots, h_k)$ com $h_m = (h_{mij}) \in \mathbb{R}^{r_m} \otimes \mathfrak{gl}(r_m, \mathbb{R})$

$(1 \leq m \leq k)$ e

$$\theta: A(r_1) \times \dots \times A(r_k) \longrightarrow \text{Aut}(Z(r_1, \dots, r_k))$$

$$a \longrightarrow \bar{a} \otimes \bar{a}$$

então $d\theta.h$ é uma derivação de $Z(r_1, \dots, r_k)$. A função coordenada de θ na direção de $(X_{1i_1} \dots X_{ki_k} \otimes X_{1j_1} \dots X_{kj_k}, X_{1p_1} \dots X_{kp_k} \otimes X_{1q_1} \dots X_{kq_k})$ é

$$a \xrightarrow{\eta} a_{1p_1 i_1} \dots a_{kp_k i_k} a_{1q_1 j_1} \dots a_{kq_k j_k}.$$

Para todo $a \in A(r_1) \times \dots \times A(r_k)$ temos que $\eta(a) = \eta_1(a) \eta_2(a)$ onde η_1 (η_2) é a função coordenada de Φ na direção de $(X_{1i_1} \dots X_{ki_k}, X_{1p_1} \dots X_{kp_k})$ ($(X_{1j_1} \dots X_{kj_k}, X_{1q_1} \dots X_{kq_k})$, respectivamente). Logo,

$$d\eta.h = \eta_2(e) d\eta_1.h + \eta_1(e) d\eta_2.h.$$

É imediato que $\eta_1(e) = 1$ ($\eta_2(e) = 1$) quando $X_{1i_1} \dots X_{ki_k} = X_{1p_1} \dots X_{kp_k}$ ($X_{1j_1} \dots X_{kj_k} = X_{1q_1} \dots X_{kq_k}$, respectivamente) e que $\eta_1(e) = 0$ ($\eta_2(e) = 0$) nos demais casos. Logo, $d\eta.h$ é um operador linear do tipo

$$\begin{aligned} X_{1i_1} \dots X_{ki_k} \otimes X_{1j_1} \dots X_{kj_k} &\rightarrow \sum_{m=1}^k \sum_{s_m=1}^{r_m} h_{ms_m i_m} X_{ms_m} X_{1i_1} \dots \hat{X}_{mi_m} \dots X_{ki_k} \otimes X_{1j_1} \dots X_{kj_k} \\ &+ \sum_{m=1}^k \sum_{s_m=1}^{r_m} h_{ms_m j_m} X_{1i_1} \dots X_{ki_k} \otimes X_{ms_m} X_{1j_1} \dots \hat{X}_{mj_m} \dots X_{kj_k}, \end{aligned}$$

isto é, do tipo $d_{\otimes}$, onde d é dado por (5.4) e $d_{\otimes}(x \otimes y) = d(x) \otimes y + x \otimes d(y)$. Por outro lado, um cálculo análogo ao efetuado durante a prova do teorema 5.4 mostra que toda derivação de $Z(r_1, \dots, r_k)$ é desta forma. Vale, portanto, o seguinte

TEOREMA 5.6 A aplicação $d \in \text{Der}(G(r_1, \dots, r_k)) \rightarrow d_{\otimes} \in \text{Der}(Z(r_1, \dots, r_k))$ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Δ

ooo

BIBLIOGRAFIA

1. S. BERNSTEIN, Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity, U. Zap. Naun. Issed. Kafedr Ukrain. Otd. Mat. 1, 83-115 (1924). English Translation: Ann. Math. Statist. 13, 53-61 (1942)
2. I.M.H. ETHERINGTON, Genetic algebras, Proc. Roy. Soc. Edin. 59, 242-258 (1939)
3. I.M.H. ETHERINGTON, Commutative train algebras of ranks 2 and 3, J. London Math. Soc. 15, 136-149; 20, 238 (1945)
4. I.M.H. ETHERINGTON, Special train algebras, Quart. J. Math. (Oxford) 12, 1-8 (1941)
5. R.D. SCHAFER, Structure of genetic algebras, Amer. J. Math. 71, 121-135 (1949)
6. I.M.H. ETHERINGTON, Non-commutative train algebras of ranks 2 and 3, Proc. London Math. Soc. (2) 52, 241-252 (1951)
7. H. GONSHOR, Special train algebras arising in genetics, Proc. Edin. Math. Soc. (2) 12, 41-53 (1960)
8. H. GONSHOR, Special train algebras arising in genetics II, Proc. Edin. Math. Soc. (2) 14, 333-338 (1965)

9. H. GONSHOR, Contributions to genetic algebras, Proc. Edin. Math. Soc. (2) 17, 289-298 (1971)
10. H. GONSHOR, Contributions to genetic algebras II, Proc. Edin. Math. Soc. (2) 18, 273-279 (1973)
11. I. HEUCH, The linear algebra for linked loci with mutation, Math. Biosciences 16, 263-271 (1973)
12. I. HEUCH, Genetic algebras for systems with linked loci, Math. Biosciences 34, 35-47 (1977)
13. I. HEUCH, Genetic algebras considered as elements in a vector space, SIAM J. Appl. Math. 35, 695-703 (1978)
14. P. FORTINI, R. BARAKAT, An algorithm for gene frequency changes for linked autosomal loci based on genetic algebras, J. Math. Anal. Appl. 83, 135-143 (1981)
15. R. COSTA, On the derivations of gametic algebras for polyploidy with multiple alleles, Bol. Soc. Brasil. Mat. 13 (2), 69-81 (1982)
16. R. COSTA, On the derivation algebra of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles, Bol. Soc. Brasil. Mat. 14 (1), 63-80 (1983)

17. R. COSTA, Algumas questões relativas a derivações de álgebras genéticas, Tese de Livre-Docência, IME-USP (1984)
18. A. MICALI, T. CAMPOS, M. COSTA e SILVA, S. FERREIRA, R. COSTA, Dérivations dans les algèbres gamétiques, Comm. Algebra, 12 (2), 239-243 (1984)
19. A. MICALI, T. CAMPOS, M. COSTA e SILVA, S. FERREIRA, Dérivations dans les algèbres gamétiques II, Linear Alg. Appl. 64, 175-181 (1985)
20. L.A. PERESI, On baric algebras with prescribed automorphisms, Linear Alg. Appl. (aceito para publicação em 1/7/85)
21. N. JACOBSON, Lie algebras, Interscience Publishers (1962)
22. M. SPIVAK, A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. I, Publish or Perish, Inc., Boston (1970)
23. F. W. WARNER, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott, Foresman and Company (1971)
24. P. MALLIAVIN, Géométrie différentielle intrinsèque, Herman (1975)
25. A. WÖRZ-BUSEKROS, Algebra in Genetics, Lectures Notes in Biomathematics, n° 36, Springer (1980)

26. A. MICALI, T. CAMPOS, M.C. COSTA E SILVA, S. FERREIRA,
Dérivations dans les algèbres gamétiques III, Linear Alg.
Appl. (a aparecer)
27. A. MICALI, C. MALLOL, Dérivations dans les algèbres gamétiques
IV, Comm. Algebra (a aparecer)
28. A. MICALI, Ph. REVOY, Sur les algèbres gamétiques, Proc.
Edinburgh Math. Soc. (a aparecer)
29. A. MICALI, M.T. ALCADÉ, C. BURGUEÑO, A. LABRA, Sur les algèbres
de Bernstein, Proc. London Math. Soc. (a aparecer)