CARACTERIZAÇÃO DO DUAL DE
UM ESPAÇO DE ORLICZ

Roseli Fernandez

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ANÁLISE

ORIENTADORA:

Profª Drª IRACEMA MARTIN BUND

São Paulo, março de 1986

ERRATA

Pág.	linha	ao invés de ler	Leia
02	2ª	igual a ∞ em $[0, \infty[$,	$\infty \xi [0, \infty[$,
10	3ª	de $[B]$.//	de $[B]$, lembrando (1.3.iv) e (1.3.v).//
18	1ª	$>$	$\geq$
19	4ª	$[0, \infty[$	$[0, \infty]$
19	9ª	$g \in L_A$	$g \in L_{\bar{A}}$
28	10ª	$J(0) = 0$	$J(0) = 0$ (1.3.iv)
31	7ª	$f_n(x) \{$	$f_n(x) = \{$
42	20ª	(1.11.v)).	(1.11.v)). Observemos também que $\bar{x} > 0$ (1.11.iii).
50	15ª	$f_{\xi_{E_m}} \in M_A$	$f_{\xi_{E_n}} \in M_A$
58	13ª	(1.17.i) e (5)	(1.17.i) e (5)
65	14ª e 15ª	e por (1.17.ii), $f+h \in \tilde{L}_A$ temos que	e vale (1.17.ii) temos que
76		as 17ª e 18ª linhas	Demonstração. Sejam $I = \{c_i: i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } c_i \neq 0\}$ e $J = \{d_j: j \in \{1, 2, \dots, \ell\} \text{ e } d_j \neq 0\}$. Então $\bigcup_{i \in I} F_i = \bigcup_{j \in J} \tilde{F}_j$, e para
84	16ª	$]0, \infty[$	$[0, \infty[$
(*) 100	5ª	F_ϵ	E_ϵ
100	9ª	$\ f_n\ _\infty$	$\max\{ f_n(x) : x \in X\}$
(*) 125	14ª	$\ f\ _\infty = 1$	$\ f\ _\infty \leq 1$
(*) 130	20ª	$f \in M_{\bar{A}}$	$f \in L_{\bar{A}}$
145	5ª	Por (1.44) segue	Veremos a seguir que $g \in L_{\bar{A}}$, e portanto por (1.26.i) segue

Pág.	linha	ao invés de ler	Leia
145	10ª	para toda $f \in L_A$	para $f \in L_A$
145		a 11ª linha	usando o Lema de Fatou, (3) e (1.16.i), que
145		a 12ª linha	$\int_X fg d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n g d\mu$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f_n \operatorname{sgn} g) \xi_F dG$ $\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \ f_n\ _A \ G\ _{\bar{A}} \leq \ G\ _{\bar{A}}.$
147	15ª	$\leq \ f \operatorname{sgn}(g_n) \xi_{E_n}\ _A \ G\ _{\bar{A}}$	$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \ f \operatorname{sgn}(g_n) \xi_{E_n}\ _A \ G\ _{\bar{A}}$
151	6ª	$\bar{A}(\frac{\gamma}{\ f\ _{\bar{A}}}) \mu(H)$	$\bar{A}(\frac{\gamma}{\ h\ _{\bar{A}}}) \mu(H)$
(*)			
164	14ª	$x^*(f)$	$x^*(\hat{f})$
167	1ª	$ \int_X f \xi_E dv - \int_X f dv_E $	$ \int_X f \xi_E dv - \int_X f dv_E \leq$
175	17ª	$ x^*(f) \leq$	$ x^*(\hat{f}) \leq$
176	1ª	$ x^*(f) \leq$	$ x^*(\hat{f}) \leq$
176		a 2ª linha	$= \int_X f dv_1 + \int_X f dv_2$
(*)			
181	12ª	(7.18)	(3.16)
184	3ª	$v(E_1)$	$v(E_i)$
(*)			
188	19ª	$f \in \phi(\tilde{L}_A)$	$\hat{f} \in \phi(\tilde{L}_A)$
197	13ª	$ z^* + z^* $	$ y^* + z^* $
208	17ª	$\ w^*\ $	$\ x^*\ + \ y^*\ $
(*) 213	16ª	Seja z^*	Sejam $0 \leq x^*, y^* \in E^*$ e z^*
(*) 142		as 4ª e 5ª linhas	(6.5) <u>Proposição</u> . O espaço $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ com a norma $\ \cdot\ _{\bar{A}}$ (5.23) é um espaço de Banach.
(*) 143	9ª e 10ª	Observando	Observamos
(*) 157		a 9ª linha	$0 \neq \psi(\tilde{y}^*) = \tilde{y}^*(\dot{f}_0)$ e $0 = \psi(\phi_g) = \phi_g(\dot{f}_0) = \int_X f_0 g d\mu,$ para $g \in L_{\bar{A}}$,
(*) 157	11ª	$f=0$ μ -q.s.	$f=0$ μ -q.s, pois $N_A(f_0)=0.$

ERRATA (continuação)

Pág.	linha	ao invés de ler	Leia
(*) 221	1 ^a	TSUYOSHI, A.	ANDÔ, T.
(*) 180	2 ^a	$g = h\xi_E$	$g = h\xi_{E^c}$

(*) Substitua a 3^a linha da pág. 96 pelo seguinte:

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Como $|f_n|$ é G-integrável existe por (4.27) e (4.30.x) uma função H-simples e G-integrável h_n , tal que

$$v^*(G, \{x \in X: |h_n(x) - |f_n(x)|| > \frac{1}{n}\}) < \frac{1}{n}$$

e

$$\int_X |h_n - |f_n|| dv(G, \cdot) < \frac{1}{n}.$$

A seqüência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para $|f|$ e

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_X |h_n - h_m| dv(G, \cdot) = 0,$$

o que por (4.27), prova que $|f|$ é G-integrável.

Pág.	linha	ao invés de ler	Leia
184	13 ^a e 18 ^a	$\nu_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu);$	$\nu_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$, não-negativa,
122	9 ^a	(4.30.v), (5.19) e (1.16.i), lembrando (v)	(4.36), (5.19) e (1.16.i)

Roseli Fernandez

Aos meus pais
Joaquim e Ana

Í N D I C E

- Introdução	i
- CAPÍTULO I	
§1. O espaço $L_A(X, \Sigma, \mu)$	01
§2. O espaço $M_A(X, \Sigma, \mu)$	41
§3. O espaço $N_A(X, \Sigma, \mu)$	53
- CAPÍTULO II	
§4. Medidas definidas em ideais; integração	69
§5. O espaço $G_A(X, \Sigma, \mu, H)$	105
- CAPÍTULO III	
§6. Caracterização do dual de $M_A(X, \Sigma, \mu)$	137
§7. Caracterização do dual de $N_A(X, \Sigma, \mu)$	161
§8. Caracterização do dual de $L_A(X, \Sigma, \mu)$	191
- APÊNDICE - Reticulados de Banach	203
- BIBLIOGRAFIA	219

Introdução

Nosso objetivo é apresentar uma caracterização do dual de um espaço de Orlicz $L_A(X, \Sigma, \mu)$.

No caso em que a função de Young A satisfaz a condição Δ_2 (isto é, existe $c \in]0, \infty[$ tal que $A(2u) \leq cA(u)$, para todo $u \in [0, \infty[$) conhecemos uma caracterização do dual de $L_A(X, \Sigma, \mu)$, que pode ser encontrada, com restrições sobre o espaço de medida (X, Σ, μ) , em [KR] e [Z], e sob condições bastante gerais sobre (X, Σ, μ) , na dissertação de mestrado de Martha Salerno Monteiro em [M].

Continuando o trabalho de M. S. Monteiro, procuramos uma caracterização do dual de $L_A(X, \Sigma, \mu)$ quando A não satisfaz a condição Δ_2 . Para este fim encontramos os trabalhos de M. M. Rao, [R-1] e [R-2], nos quais ele apresenta um teorema de representação, tendo como única hipótese que o espaço de medida (X, Σ, μ) não tenha átomos de medida infinita, isto é, se $E \in \Sigma$ e $\mu(E) = \infty$, então existe $F \in \Sigma$ com $F \subset E$ e tal que $0 < \mu(F) < \infty$.

O trabalho de M. M. Rao, bastante profundo, apresenta no entanto um bom número de lacunas e imprecisões, sendo que algumas das demonstrações são incompreensíveis, solicitando uma nova formulação. Isto exigiu um estudo detalhado dos tópicos relativos à integração em relação a medidas finitamente aditivas, apresentados por Dunford e Schwartz em [DS], e deu origem ao §4 desta dissertação. Nesse parágrafo definimos integrais relativas a "medidas" finitamente aditivas, que chamamos simplesmente de medidas, definidas em um ideal H de

uma álgebra A (onde H é um anel de A tal que, se $F \in H$ e $E \in A$, então $E \cap F \in H$). Se $H = A$, então os resultados e definições apresentados coincidem com os de Dunford e Schwartz em [DS].

Denotando por $M_A(X, \Sigma, \mu)$ o subespaço fechado de $L_A(X, \Sigma, \mu)$ gerado pelas funções simples, estabelecemos no §2 algumas propriedades deste espaço que nos serão úteis.

No §5 definimos e estudamos o espaço de medidas que é isometricamente isomorfo ao dual de $M_A(X, \Sigma, \mu)$. Estas medidas são definidas em ideais de Σ , que contêm o ideal dos $E \in \Sigma$ tais que $\mu(E) < \infty$, e as integrais em relação a elas são como no §4.

Apresentamos no §6 uma caracterização do dual de $M_A(X, \Sigma, \mu)$, e verificamos que este resultado coincide com o de [M] sob as hipóteses lá encontradas, e também com o de [HS] quando (X, Σ, μ) é um espaço de medida σ -finita e A é a função de Young que fornece o espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$. Para encerrar o parágrafo, estabelecemos condições para o espaço de Orlicz ser reflexivo e, com uma hipótese adicional, obtemos a recíproca.

Denotando por $N_A(X, \Sigma, \mu)$ o espaço quociente de $L_A(X, \Sigma, \mu)$ relativo a $M_A(X, \Sigma, \mu)$, estabelecemos no §3 propriedades deste espaço que serão frequentemente usadas no §7.

Iniciamos o §7 fornecendo resultados sobre o dual de $N_A(X, \Sigma, \mu)$, baseados no fato que $N_A(X, \Sigma, \mu)$ é um reticulado de Banach. Definimos e estudamos uma integral em $N_A(X, \Sigma, \mu)$ relativa a medidas limitadas e absolutamente contínuas em relação a μ , e com a qual apre

sentamos uma caracterização do dual de $N_A(X, \Sigma, \mu)$. Com uma hipótese adicional sobre estas medidas obtemos o espaço que é isometricamente isomorfo ao dual de $N_A(X, \Sigma, \mu)$.

Mostramos no §8, que o dual de $L_A(X, \Sigma, \mu)$ admite uma decomposição em subespaços suplementares que são isometricamente isomorfos, respectivamente, aos duais de $M_A(X, \Sigma, \mu)$ e $N_A(X, \Sigma, \mu)$. Com os resultados dos §6 e §7, apresentamos em (8.10) um teorema de representação para funcionais lineares contínuos definidos em $L_A(X, \Sigma, \mu)$. Através deste teorema estabelecemos a proposição (8.11) que julgamos interessante.

No §1 estudamos propriedades da função de Young A e do espaço $L_A(X, \Sigma, \mu)$. Encerramos o parágrafo verificando que, sob certas condições, as duas semi-normas que definimos em $L_A(X, \Sigma, \mu)$, são iguais somente nas funções nulas μ -q.s..

Acrescentamos em apêndice propriedades de reticulados de Banach utilizadas nos parágrafos 7 e 8.

Com este trabalho esperamos ter alcançado nosso objetivo, que é uma apresentação do resultado de M.M. Rao de modo claro e completo.

A menos de menção em contrário, os conceitos básicos e a notação são como em [HS], observando contudo as seguintes convenções:

$$\begin{aligned} \frac{1}{0} &= \infty & \frac{1}{\infty} &= 0 \\ \frac{0}{0} &= 0 & 0 \cdot \infty &= 0 \\ \sup \emptyset &= 0 & \inf \emptyset &= \infty \end{aligned}$$

X	conjunto qualquer.
Σ	σ -álgebra de subconjuntos de X .
μ	medida σ -aditiva definida em Σ e com valores em $\mathbb{R}$, tal que $\mu(X) > 0$.
(X, Σ, μ)	espaço de medida que, a partir do §5, não tem átomos de medida infinita.
E^c	complementar do conjunto E em relação a X .
função	função definida em X e com valores em $\mathbb{R}$.
ξ_E	função característica do subconjunto E de X .
função simples	função que pode ser escrita na forma: $\sum_{i=1}^n c_i \xi_{E_i}$ sendo $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ e $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ uma seqüência finita de elementos de Σ , dois a dois disjuntos.
função mensurável	função Σ -mensurável no sentido de [HS].
$L_\infty(X, \Sigma, \mu)$	espaço das funções mensuráveis f , tais que $\ f\ _\infty = \inf\{c \in]0, \infty[: \mu(\{x \in X : f(x) > c\}) = 0\} < \infty.$
f função de X em $[0, \infty]$ é contínua à direita em x_0 , sendo $f(x_0) = \infty$	para todo $M \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que $f(x) > M$ para todo $x \in]x_0, x_0 + \delta[$.

f função de X em $[0, \infty]$ é contínua
à esquerda em x_0 , sendo $f(x_0) = \infty$

para todo $M \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$
tal que $f(x) > M$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0[$.

f função de X em $[0, \infty]$ é contínua
em x_0 , sendo $f(x_0) = \infty$

f é contínua à direita e contínua à
esquerda em x_0 .

// indica o fim de uma demonstração.

[] referência a outros trabalhos.

Desejo agradecer à Profª Dra. Iracema Martin Bund pela sugestão do assunto, e pela dedicada orientação que dela recebi, desde o meu ingresso no curso de Pós-Graduação.

Agradeço à Srta. Antonia Soares, pelo excelente trabalho de datilografia.

Agradeço a todos os professores, que direta ou indiretamente, contribuíram para a minha formação profissional, e de modo geral, aos colegas e amigos.

Em particular, agradeço à minha família, e de modo especial aos meus pais, pelo incentivo e pelo carinho que sempre me dedicaram, principalmente durante a elaboração deste trabalho.

Obrigada Senhor pelo dom da vida.

Roseli Fernandez

CAPÍTULO I

A fim de alcançar nosso objetivo, que é uma caracterização do dual de um espaço de Orlicz $L_A(X, \Sigma, \mu)$, utilizaremos a de dois ou -
tros espaços cujas propriedades são estudadas, respectivamente, nos
parágrafos dois e três. O primeiro é o subespaço fechado de $L_A(X, \Sigma, \mu)$
gerado pelas funções simples, que denotaremos por $M_A(X, \Sigma, \mu)$, e o se -
gundo é o espaço quociente de $L_A(X, \Sigma, \mu)$ por $M_A(X, \Sigma, \mu)$, que chamaremos
de $N_A(X, \Sigma, \mu)$.

§1. O espaço $L_A(X, \Sigma, \mu)$

Até (1.11) definimos e estudamos algumas propriedades das
funções de Young que nos serão úteis. A partir de (1.12) nossa aten-
ção se volta para o espaço L_A obtendo interessantes resultados como
por exemplo (1.22), (1.23), (1.24), (1.33), (1.42), (1.43) e (1.45). Omiti-
mos a prova de algumas proposições por estarem demonstradas em [B].

(1.1) Definição. Seja p uma função definida em $[0, \infty[$ e com valores
em $[0, \infty]$, não-decrescente, tal que $0 < p(t_0) < \infty$ para algum $t_0 \neq 0$.
A função A definida em $[0, \infty[$ e com valores em $[0, \infty]$, dada por

$$A(u) = \int_0^u p(t) dt$$

é chamada função de Young.

Observemos que, com a definição acima, as funções triviais isto é, a função idênticamente nula e a função igual a ∞ em $]0, \infty[$, não são funções de Young.

(1.2) Proposição - Se A é uma função de Young, $a = \sup\{u \in [0, \infty[: A(u) = 0\}$ e $b = \inf\{u \in [0, \infty[: A(u) = \infty\}$, tem-se

- (i) $A(0) = 0$;
- (ii) A é contínua à direita em $[0, b[$ e contínua à esquerda em $]0, \infty[$;
- (iii) $A(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha A(u) + (1-\alpha)A(v)$, para todo $u, v \in [0, \infty[$ e todo $\alpha \in [0, 1]$;
- (iv) se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $u_1, u_2, \dots, u_n \in [0, \infty[$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$, então $A(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i A(u_i)$;
- (v) se $\beta \in [1, \infty[$ e $u \in [0, \infty[$, então $A(\beta u) \geq \beta A(u)$;
- (vi) $\frac{A(u)}{u}$ é uma função não-decrescente em $]0, \infty[$;
- (vii) se $a < b$, então A é estritamente crescente em $[a, b[$ e se $a < b < \infty$, então A é estritamente crescente em $[a, b]$;
- (viii) A é uma função não-decrescente em $[0, \infty[$;
- (ix) $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = \infty$;
- (x) existe a derivada à direita de A em $[0, b[$, que denotamos por A' ;
- (xi) se $u \in [0, b[$, então $A'(u) < \infty$;
- (xii) a função A' é não-decrescente em $[0, b[$;

(xiii) se $u \in [0, b[$, então $A(u) = \int_0^u A'(t) dt$.

Demonstração. As provas das três primeiras afirmações e (vi) são encontradas em [2.4] de [B]. Os itens (vii), (viii) e (ix) estão demonstrados, respectivamente, em [2.2.i], [2.2.ii] e [2.2.vi] de [B]. Observemos ainda que (v) segue de (iv). A seguir provaremos (iv) por indução sobre n e, como $A(0) = 0$, não há perda de generalidade em supormos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Se $n=1$ nada temos a demonstrar. Suponhamos (iv) verdadeira para n , e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}, u_1, u_2, \dots, u_{n+1} \in [0, \infty[$ com $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ e $\alpha_{n+1} \neq 1$, pois se $\alpha_{n+1} = 1$ temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ e assim (iv) é imediata.

Seja $v = \sum_{i=1}^n (\alpha_i / (1 - \alpha_{n+1})) u_i$ e notemos que,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i = (1 - \alpha_{n+1}) v + \alpha_{n+1} u_{n+1}.$$

Usando (iii) e a hipótese de indução obtemos que

$$\begin{aligned} A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i\right) &\leq (1 - \alpha_{n+1}) A(v) + \alpha_{n+1} A(u_{n+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i A(u_i) + \alpha_{n+1} A(u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A(u_i), \end{aligned}$$

e assim (iv) é verdadeira.

Para demonstrarmos as quatro últimas asserções, seja $B(u) = A(u)$ se $u \in [0, b[$, e $B(u) = 0$ se $u \in]-b, 0[$. Usando [A.2] e

[A.3] de [B] os itens (x), (xi), (xii) e (xiii) são verificados para B e portanto para A.//

(1.3) Proposição. Se A é uma função de Young e $\bar{A}$ é a função definida em $[0, \infty[$ pela expressão

$$\bar{A}(u) = \sup\{uv - A(v) : v \in [0, \infty[\},$$

então

- (i) $\bar{A}(0) = 0$;
- (ii) $\bar{A}(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha \bar{A}(u) + (1-\alpha)\bar{A}(v)$, para todo $u, v \in [0, \infty[$ e todo $\alpha \in [0, 1]$;
- (iii) $\bar{A}$ é contínua à esquerda em $]0, \infty[$;
- (iv) $\sup\{u \in [0, \infty[: \bar{A}(u) = 0\} = \lim_{v \downarrow 0} \frac{A(v)}{v}$;
- (v) $\inf\{u \in [0, \infty[: \bar{A}(u) = \infty\} = \lim_{v \uparrow \infty} \frac{A(v)}{v}$;
- (vi) $\bar{A}$ é uma função não trivial;
- (vii) $\bar{A}$ é uma função de Young.

Demonstração. O item (i) é imediato. Para obtermos (ii) sejam $u, v \in [0, \infty[$ e $\alpha \in [0, 1]$. Se $\bar{A}(u) = \infty$ ou $\bar{A}(v) = \infty$, então (ii) é imediato. Suponhamos $\bar{A}(u) < \infty$ e $\bar{A}(v) < \infty$ e observemos que, para todo $w \in [0, \infty[$ temos que

$$(\alpha u + (1-\alpha)v)w - A(w) = \alpha(uw - A(w)) + (1-\alpha)(vw - A(w))$$

$$\leq \alpha \bar{A}(u) + (1-\alpha)\bar{A}(v).$$

Portanto $\bar{A}(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha \bar{A}(u) + (1-\alpha)\bar{A}(v)$.

A seguir demonstraremos que $\bar{A}$ é contínua à esquerda em $]0, \infty[$.

Se $\bar{b} = \inf\{u \in [0, \infty[: \bar{A}(u) = \infty\}$ é imediato que $\bar{A}$ é contínua à esquerda em $] \bar{b}, \infty[$. Como $\bar{A}$ é convexa em $[0, \bar{b}[$, temos que $\bar{A}$ é contínua em $]0, \bar{b}[$ ([A.2] de [B]). Portanto basta provarmos que $\bar{A}$ é contínua à esquerda em $\bar{b}$, se $\bar{b} < \infty$.

Observemos que $\bar{A}$ é uma função não-decrescente e assim

$$\begin{aligned} \lim_{u \uparrow \bar{b}} \bar{A}(u) &= \sup\{\bar{A}(u): u \in [0, \bar{b}[\} \\ &= \sup\{\sup\{uv - A(v): v \in [0, \infty[\}: u \in [0, \bar{b}[\} \\ &= \sup\{\sup\{uv - A(v): u \in [0, \bar{b}[\}: v \in [0, \infty[\} \\ &= \sup\{\bar{b}v - A(v): v \in [0, \infty[\} = \bar{A}(\bar{b}) , \end{aligned}$$

e portanto $\bar{A}$ é contínua em $\bar{b}$ se $\bar{b} < \infty$.

As asserções (iv), (v) e (vi) são encontradas em [2.15] de [B]. Notemos que os três primeiros itens juntamente com (vi) e [2.6] de [B] garantem que $\bar{A}$ é uma função de Young (Em [2.6] de [B], no caso $b < \infty$, falta a hipótese de que a função B é contínua à esquerda em b). //

(1.4) Definição. Se A é uma função de Young, então a função $\bar{A}$ definida em (1.3) é chamada função de Young complementar de A .

(1.5) Notação. Em todo este trabalho a letra A denotará uma função de Young, o símbolo $\bar{A}$ será a função de Young complementar de A e denotaremos por

$$a = \sup\{u \in [0, \infty[: A(u) = 0\} ;$$

$$b = \inf\{u \in [0, \infty[: A(u) = \infty\} ;$$

$$\bar{a} = \sup\{u \in [0, \infty[: \bar{A}(u) = 0\} ;$$

$$\bar{b} = \inf\{u \in [0, \infty[: \bar{A}(u) = \infty\} .$$

Segue da definição de uma função de Young que, $a, \bar{a} \in [0, \infty[$ e $b, \bar{b} \in]0, \infty]$.

(1.6) Proposição. Se A é uma função de Young e $\bar{A}$ é a função de Young complementar de A , então

$$(i) \quad \bar{\bar{A}} = A;$$

$$(ii) \quad a = \lim_{v \downarrow 0} \frac{\bar{A}(v)}{v} ;$$

$$(iii) \quad b = \lim_{v \uparrow \infty} \frac{\bar{A}(v)}{v} .$$

Demonstração. O item (i) é encontrado em [2.20] de [B] e os dois $\bar{u}$ timos são conseqüências de (i) e respectivamente de (1.3.iv) e (1.3.v). //

Antes de enunciarmos a proposição (1.9), que será frequentemente usada, introduziremos um lema.

(1.7) Lema. Se A é uma função de Young e p é a função definida em $[0, \infty[$ pela relação

$$p(u) = \begin{cases} \lim_{t \downarrow u} A'(t) & \text{se } u \in [0, b[, \\ \infty & \text{se } u \in [b, \infty[. \end{cases}$$

Então

- (i) p é não-decrescente;
- (ii) p é contínua à direita em $[0, \infty[$;
- (iii) $A(u) = \int_0^u p(t)dt$ para todo $u \in [0, \infty[$.

Demonstração. O item (i) segue de (1.2.xii), e (ii) é imediato. Demonstraremos (iii) a seguir.

Como A' é uma função não-decrescente em $[0, b[$ temos que o conjunto $\{u \in [0, b[: p(u) \neq A'(u)\}$ é enumerável e usando (1.2.xiii) obtemos a igualdade em (iii) para $u \in [0, b[$.

Observemos que para $u \in]b, \infty[$ a igualdade em (iii) é imediata. Para $u=b$ basta notarmos que A é contínua à esquerda em $]0, \infty[$ e assim

$$A(b) = \lim_{t \uparrow b} A(t) = \lim_{t \uparrow b} \int_0^t p(s)ds = \int_0^b p(s)ds. //$$

(1.8) Corolário. Se $\bar{A}$ é a função de Young complementar de A e q é a função definida em $[0, \infty[$ pela relação

$$q(u) = \begin{cases} \lim_{t \downarrow u} \bar{A}'(t) & \text{se } u \in [0, \bar{b}[, \\ \infty & \text{se } u \in [\bar{b}, \infty[. \end{cases}$$

Então

- (i) q é não-decrescente;
- (ii) q é contínua à direita em $[0, \infty[$;
- (iii) $\bar{A}(u) = \int_0^u q(t)dt$ para todo $u \in [0, \infty[$.

Demonstração. Segue de (1.3.vii) e (1.7). //

(1.9) Proposição. Se A é uma função de Young e $\bar{A}$ é a função de Young complementar de A , então

- (i) $uv \leq A(u) + \bar{A}(v)$ para todo $u, v \in [0, \infty[$;
- (ii) $uv = A(u) + \bar{A}(v)$ se, e somente se, $u = \lim_{t \downarrow v} \bar{A}'(t)$ ou $v = \lim_{t \downarrow u} A'(t)$.

Demonstração. O item (i) é consequência imediata da definição de $\bar{A}$. Para provarmos (ii) sejam p e q as funções definidas respectivamente em (1.7) e (1.8), e consideremos as funções p_1, q_1, A_1 e B_1 definidas em $[0, \infty[$ pelas relações

$$p_1(s) = \inf\{t \in [0, \infty[: p(t) > s\},$$

$$q_1(s) = \inf\{t \in [0, \infty[: q(t) > s\},$$

$$A_1(u) = \int_0^u p_1(s) ds \quad \text{e} \quad B_1(u) = \int_0^u q_1(s) ds.$$

Usando [2.19] de [B] e (1.6.i) obtemos que

$$\int_0^u q(s) ds = \bar{A}(u) = \int_0^u p_1(s) ds \quad \text{e} \quad \bar{\bar{A}}(u) = A(u) = \int_0^u p(s) ds = \int_0^u q_1(s) ds,$$

para todo $u \in [0, \infty[$.

Tendo em vista que [1.6.v] de [B] garante que p_1 e q_1 são funções contínuas à direita em $[0, \infty[$, e lembrando que p e q também o são, concluímos que $p_1 = q$ e $p = q_1$.

Por [2.18] de [B] temos que $uv = A(u) + \bar{A}(v)$ se, e somente se $v = p(u) = \lim_{t \downarrow u} A'(t)$ ou $u = p_1(v) = q(v) = \lim_{t \downarrow u} \bar{A}'(t)$. //

As relações (1.9.i) e (1.9.ii) são conhecidas, respectivamente, como a Desigualdade de Young e a Igualdade de Young.

(1.10) Definição. Se A é uma função de Young, a igualdade

$$A^{-1}(v) = \inf\{u \in [0, \infty[: A(u) > v\} ,$$

define uma função A^{-1} em $[0, \infty[$ chamada de inversa à direita de A .

Observemos que, se A é inversível, então A^{-1} é a função inversa (usual) de A .

Em (1.11) destacamos algumas propriedades de A^{-1} que nos poderão ser úteis.

(1.11) Proposição. Se A é uma função de Young e A^{-1} é a função inversa à direita de A , tem-se

(i) $A^{-1}(v) < \infty$ para todo $v \in [0, \infty[$;

(ii) $A^{-1}(0) = a$;

(iii) se $A^{-1}(v) = 0$, então $v=0$;

(iv) $A^{-1}(A(u)) = u$ para todo $u \in [a, b[$;

(v) $A(A^{-1}(u)) \leq u$ para todo $u \in [0, \infty[$;

(vi) $\inf\{\frac{A^{-1}(v)}{v} : v \in]0, \infty[\} = \frac{1}{\bar{b}}$, com a convenção de que $1/\infty = 0$;

(vii) $\sup\{\frac{A^{-1}(v)}{v} : v \in]0, \infty[\} = \frac{1}{\bar{a}}$, com a convenção de que $1/0 = \infty$.

Demonstração. Os cinco primeiros itens estão demonstrados, respectivamente, em [2.31.i], [2.31.ii], [2.31.iii], [2.31.iv] e [2.31.vii] de [B]. Os dois últimos são encontrados em [2.33] de [B].//

Com os resultados já obtidos podemos agora definir os espaços de Orlicz e estudar algumas de suas propriedades.

(1.12) Definição. Denotaremos por $L_A(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto das funções f , definidas em X e com valores em $\mathbb{R}$, mensuráveis, tais que, para algum $k \in]0, \infty[$, que depende de f , se tenha $\int_X A(k|f|) d\mu < \infty$.

É fácil verificar que $L_A(X, \Sigma, \mu)$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Este espaço vetorial será chamado espaço de Orlicz.

Escreveremos L_A , em vez de $L_A(X, \Sigma, \mu)$, quando não houver risco de confusão.

(1.13) Definição. Denotaremos por $\|\cdot\|_A$ a função definida em L_A pela relação

$$\|f\|_A = \inf \left\{ k \in]0, \infty[: \int_X A\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu \leq 1 \right\} .$$

A notação $\|\cdot\|_A$ é justificada pelo resultado abaixo.

(1.14) Proposição. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) para toda $f \in L_A$ tem-se $\|f\|_A < \infty$;

- (ii) a função $\|\cdot\|_A$ é uma semi-norma em L_A ;
 (iii) se $f \in L_A$ e $\|f\|_A = 0$, então $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$.

Demonstração. Os itens acima são encontrados imediatamente após [3.20], e em [3.22] de [B]. //

- (1.15) Exemplos. (i) Se $p \in [1, \infty[$ e $A(u) = u^p$ para $u \in [0, \infty[$, então A é uma função de Young, $L_A = L_p$ e $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_p$;
 (ii) Se $A(u) = \infty \cdot \chi_{]1, \infty[}(u)$ para $u \in [0, \infty[$, então A é uma função de Young, $L_A = L_\infty$ e $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_\infty$.

Através de (1.15) verificamos que os espaços de Orlicz são um tipo de generalização dos espaços de Lebesgue L_p para $p \in [1, \infty]$.

(1.16) Proposição. Sejam f e g funções mensuráveis. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) se $g \in L_A$ e $|f| \leq |g|$ μ -q.s., então $f \in L_A$ e $\|f\|_A \leq \|g\|_A$;
 (ii) se $f, g \in L_A$, então $h_1 = \max\{f, g\}$ e $h_2 = \min\{f, g\}$ pertencem a L_A .

Demonstração. Para obtermos (i) notemos que A é uma função não-decrescente (1.2.viii) e assim para todo $k \in]0, \infty[$ temos que

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu \leq \int_X A\left(\frac{|g|}{k}\right) d\mu .$$

Portanto $f \in L_A$ e $\|f\|_A \leq \|g\|_A$.

Para demonstrarmos (ii) basta usar (i) e observar que

$$|h_1| = |\max\{f, g\}| \leq \max\{|f|, |g|\} \leq |f| + |g|. \text{ Além disso, que}$$

$$h_2 = \min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}. //$$

(1.17) Proposição. Seja $f \in L_A$. As seguintes asserções são verdadeiras:

$$(i) \quad \text{se } \|f\|_A > 0, \text{ então } \int_X A\left(\frac{|f|}{\|f\|_A}\right) d\mu \leq 1;$$

$$(ii) \quad \text{se } \|f\|_A \leq 1 \text{ então } \int_X A(|f|) d\mu \leq 1;$$

$$(iii) \quad \text{tem-se } \|f\|_A \leq 1 \text{ se, e somente se, } \int_X A(|f|) d\mu \leq 1;$$

$$(iv) \quad \text{se } \|f\|_A > 0 \text{ e existe } \lambda \in]0, \|f\|_A[\text{ tal que}$$

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu < \infty, \text{ então } \int_X A\left(\frac{|f|}{\|f\|_A}\right) d\mu = 1.$$

Demonstração. Os itens (i) e (iv) estão demonstrados, respectivamente, em [3.21] e [4.8] de [B]. A afirmação (iii) segue da definição de $\|f\|_A$ e de (ii). Provaremos (ii) a seguir.

Se $\|f\|_A = 0$, então $f=0$ μ -q.s. e assim (ii) é imediato. Se $\|f\|_A > 0$, como A é não-decrescente, usando (i) temos que

$$\int_X A(|f|) d\mu \leq \int_X A\left(\frac{|f|}{\|f\|_A}\right) d\mu \leq 1. //$$

(1.18) Proposição. O espaço L_A com a topologia proveniente da seminorma $\|\cdot\|_A$ é um espaço vetorial topológico completo.

Demonstração. Análoga à de [3.29] de [B]. //

(1.19) Proposição. São verdadeiras as seguintes asserções:

- (i) se $E \in \Sigma$ e $0 < \mu(E) < \infty$, então $\xi_E \in L_A$ e $\|\xi_E\|_A = \frac{1}{A^{-1}(1/\mu(E))}$;
- (ii) se $E \in \Sigma$, $\mu(E) = \infty$ e $a > 0$, então $\xi_E \in L_A$ e $\|\xi_E\|_A = 1/a$;
- (iii) se $E \in \Sigma$, $\mu(E) = \infty$ e $a=0$, então $\xi_E \notin L_A$;
- (iv) se $E \in \Sigma$ e $\xi_E \in L_A$, então $\|\xi_E\|_A \leq \bar{b} \mu(E)$.

Demonstração. Os três primeiros itens estão demonstrados em [3.34] de [B]. A asserção (iv) é imediata se $\bar{b} = \infty$ ou, se $\mu(E) = \infty$, ou se $\mu(E) = 0$.

Provaremos (iv) supondo $\bar{b} < \infty$ e $0 < \mu(E) < \infty$. Neste caso, por (1.11.vi) e (i), temos que

$$\frac{1}{\bar{b}} \leq \mu(E) \cdot A^{-1}\left(\frac{1}{\mu(E)}\right) = \mu(E) \cdot \frac{1}{\|\xi_E\|_A} . //$$

(1.20) Proposição (Desigualdade de Jensen). Se $f \in L_1$ e $E \in \Sigma$ é tal que $0 < \mu(E) < \infty$, então

$$(i) \quad A\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f| d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E A(|f|) d\mu.$$

Demonstração. Suponhamos, em primeiro lugar, que f seja uma função simples, não-negativa. Portanto

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} ,$$

sendo c_i 's $\in [0, \infty[$ e os E_i 's elementos de Σ , dois a dois disjuntos tais que $0 \leq \mu(E_i) < \infty$, onde $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n$. Usando (1.2.iv) obtemos

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu\right) &= A\left(\frac{1}{\mu(E)} \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\mu(E \cap E_i)}{\mu(E)} A(c_i) = \\ &= \frac{1}{\mu(E)} \int_E A(f) d\mu, \end{aligned}$$

o que prova (i), neste caso.

No caso geral, como f é mensurável, existe uma seqüência não-decrescente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples, não-negativas, que converge para $|f|$. Usando o fato que A é contínua à esquerda em $]0, \infty[$, o Teorema da Convergência Monótona e observando que (i) é verdadeira para funções simples obtemos que

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f| d\mu\right) &= A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(E)} \int_E f_n d\mu\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f_n d\mu\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(E)} \int_E A(f_n) d\mu \\ &= \frac{1}{\mu(E)} \int_E A(|f|) d\mu. // \end{aligned}$$

(1.21) Proposição. Se $k \in \mathbb{N}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções de L_A tal que

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X A\left(\frac{|f_n|}{k}\right) d\mu = 0 ,$$

então $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_A \leq k$.

Demonstração. Por (i), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então

$$\int_X A\left(\frac{|f_n|}{k}\right) d\mu \leq 1. \text{ Portanto } \sup\{\|f_n\|_A : n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq n_0\} \leq k \text{ e assim}$$

concluimos que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_A \leq k$.

(1.22) Proposição. Se $f \in L_A$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções de L_A tal que

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0,$$

então a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em μ -medida para f , isto é, para todo $\delta \in]0, \infty[$ tem-se

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0.$$

Demonstração. Seja $\delta \in]0, \infty[$ um número fixado, e para $n \in \mathbb{N}$ seja

$$B_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}. \text{ Nosso objetivo é provar que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = 0.$$

Dado $\epsilon \in]0, \infty[$, por (1.2.ix) existe $\bar{x} \in]0, \infty[$, tal que $A(\bar{x}) > 1/\epsilon$. Por (i), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, se $n \geq n_0$, então $\|f_n - f\|_A < \delta/\bar{x}$. Portanto para $n \geq n_0$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \mu(B_n) &\leq A(\bar{x}) \mu(B_n) \leq \int_{B_n} A\left(\frac{|f_n - f| \bar{x}}{\delta}\right) d\mu \\ &\leq \int_X A\left(\frac{|f_n - f| \bar{x}}{\delta}\right) d\mu \leq 1. \end{aligned}$$

Assim $\mu(B_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. //

(1.23) Teorema. Se f é uma função não-negativa, pertencente a L_A , então existe uma seqüência não-decrescente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de L_A , não negativas, tal que

- (i) $0 \leq f_n \leq f$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f μ -q.s.;
- (iii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em μ -medida para f .

Demonstração. Se $\|f\|_A = 0$ basta tomar $f_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $\|f\|_A \neq 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$f_n = \sum_{r=1}^{n2^n} \left(\frac{r-1}{2^n}\right) \xi_{D_{n,r}} + n \xi_{D_n},$$

sendo $D_{n,r} = f^{-1}\left(\left[\frac{r-1}{2^n}, \frac{r}{2^n}\right)\right)$, $D_n = f^{-1}([n, \infty[)$ e $r \in \mathbb{N}$ com $1 \leq r \leq n2^n$.

É imediato que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-decrescente de funções simples, não negativas, que verifica (i) e converge pontualmente para f . Por (1.16.i), $f_n \in L_A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A seguir provaremos que existe uma subsequência de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifica (iii).

Suponhamos, em primeiro lugar, que $a > 0$ e tomemos

$$B = \{x \in X: |f(x)| > 2a \|f\|_A\}.$$

Como

$$A(2a) \neq 0 \quad \text{e} \quad \mu(B)A(2a) \leq \int_B A\left(\frac{|f|}{\|f\|_A}\right) d\mu \leq \int_X A\left(\frac{|f|}{\|f\|_A}\right) d\mu \leq 1,$$

temos que $\mu(B) < \infty$ e assim, pelo teorema de Egorov, dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $E \in \Sigma$ com $\mu(E \cap B) < \epsilon$ e tal que $(f_n|_{B \cap E^c})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f|_{B \cap E^c}$.

Tendo em vista que $f|_{B^c}$ é limitada, é fácil verificar que $(f_n|_{B^c})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f|_{B^c}$. Portanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em μ -medida para f e é a sequência procurada.

Agora suponhamos que $a=0$ e tomemos $c \in]0, \infty[$ tal que $0 < A(c) < \infty$ (c existe pois $b \neq 0$ (1.5)).

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifica (i) e (ii) e ainda $A(f/\|f\|_A) \in L_1$ (1.17.i) temos pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X A\left(\frac{f-f_n}{\|f\|_A}\right) d\mu = 0. \quad (1)$$

Por (1) e com a hipótese de que $a=0$, existe uma sequência estritamente crescente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de números naturais, tal que

$$\int_X A\left(\frac{f-f_{n_k}}{\|f\|_A}\right) d\mu < \frac{1}{2^k} A\left(\frac{c}{2^k}\right). \quad (2)$$

Provaremos que $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge em μ -medida para f , o que demonstra, neste caso, o teorema.

Sejam $\delta \in]0, \infty[$ um número fixado, $k \in \mathbb{N}$ e

$$B_k = \{x \in X: f(x) - f_{n_k}(x) > \frac{c \|f\|_A}{2^k}\}.$$

Tomemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{k_0} \leq \delta/(c \|f\|_A)$. Então para $k \geq k_0$, temos que

$$0 \leq \mu(\{x \in X: f(x) - f_{n_k}(x) > \delta\}) \leq \mu(B_k),$$

e como, por (2), $\mu(B_k) < 1/2^k$, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X: f(x) - f_{n_k}(x) > \delta\}) = 0. //$$

(1.24) Corolário. Se $f \in L_A$, então existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de L_A tal que

- (i) $|f - f_n| \leq |f|$ e $|f_n| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f μ -q.s;
- (iii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em μ -medida para f ;
- (iv) se $k \in]0, \infty[$ e $A(|f|/k) \in L_1$, então $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A \leq k$.

Demonstração. Para obter os três primeiros itens basta aplicar (1.23) para $f_+ = \max\{f, 0\}$ e $f_- = \max\{-f, 0\}$, lembrando que $f = f_+ - f_-$. Provaremos (iv) a seguir.

Como A é não-decrescente (1.2.viii), continua à direita em zero (1.2.ii) e os dois primeiros itens são verdadeiros, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X A\left(\frac{|f-f_n|}{k}\right) d\mu = 0. \quad (1)$$

Por (1.21) e a relação (1) obtemos (iv). //

(1.25) Definição. Denotaremos por $N_A(\cdot)$ a função definida no conjunto das funções mensuráveis e com valores em $[0, \infty[$, dada pela expressão

$$N_A(f) = \sup \left\{ \int_X |fg| d\mu : g \in L_{\bar{A}} \text{ e } \|g\|_{\bar{A}} \leq 1 \right\}.$$

(1.26) Proposição. Seja $f \in L_A$. As seguintes asserções são verdadeiras:

(i) (Desigualdade de Hölder) se $g \in L_{\bar{A}}$, então $fg \in L_1$ e

$$\int_X |fg| d\mu \leq 2 \|f\|_A \|g\|_{\bar{A}};$$

(ii) $N_A(f) \leq 2 \|f\|_A < \infty$;

(iii) $N_A(f) \leq \int_X A(|f|) d\mu + 1$.

Demonstração. Observemos, em primeiro lugar, que (ii) segue da definição de $N_A(f)$ e do item (i). Provaremos (i) e (iii).

Seja $g \in L_{\bar{A}}$ e tomemos $k, \ell \in]0, \infty[$. Usando (1.9.i) temos a seguinte desigualdade:

$$\int_X |fg| d\mu \leq k\ell \left[\int_X A\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu + \int_X \bar{A}\left(\frac{|g|}{\ell}\right) d\mu \right]. \quad (1)$$

O item (i) é imediato se $\|f\|_A = 0$ ou $\|g\|_{\bar{A}} = 0$.

Se $\|f\|_A > 0$ e $\|g\|_{\bar{A}} > 0$, a afirmação (i) segue de (1.17.i) e de (1) tomando $k = \|f\|_A$ e $\ell = \|g\|_{\bar{A}}$.

A asserção (iii) decorre da definição de $N_A(f)$, de (1.17.iii) e de (1) tomando $k = \ell = 1$.

Veremos em (1.32) que sob certas condições $N_A(f) = 0$ se, e somente se $f = 0$ μ -q.s, e ainda que $N_A(\cdot)$ e $\|\cdot\|_A$ são semi-normas equivalentes em L_A . Antes alguns resultados e definições.

(1.27) Definição. Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida, dizemos que um conjunto $E \in \Sigma$ é um átomo se, e somente se,

- (i) $0 < \mu(E) \leq \infty$;
- (ii) para todo $F \in \Sigma$ com $F \subseteq E$ tem-se $\mu(F) = 0$ ou $\mu(F) = \mu(E)$.

Dizemos que (X, Σ, μ) é não atômico se Σ não contém átomos, e dizemos que (X, Σ, μ) é não puramente atômico se existe $E \in \Sigma$ que não contém átomos.

Decorre da definição acima que, (X, Σ, μ) não tem átomos de medida infinita se, e somente se, para todo $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = \infty$, existe $F \in \Sigma$, $F \subseteq E$ e tal que $0 < \mu(F) < \infty$.

(1.28) Lema. Se $E \in \Sigma$ é um átomo de medida infinita e existe $f \in L_A$ tal que $f \chi_E$ não é nula μ -q.s, então $a > 0$.

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_n = \{x \in E: |f(x)| > \frac{1}{n}\}$. Como $f|_E$ não é nula μ -q.s., existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_0}) > 0$ e como E é um átomo de medida infinita temos que $\mu(E_{n_0}) = \infty$. Por outro lado sabemos que

$$1 \geq \int_X A\left(\frac{|f|}{\|f\|_A}\right) d\mu \geq \int_{E_{n_0}} A\left(\frac{|f|}{\|f\|_A}\right) d\mu \geq A\left(\frac{1}{n_0 \|f\|_A}\right) \mu(E_{n_0}).$$

Portanto $A\left(\frac{1}{n_0 \|f\|_A}\right) = 0$, e por conseguinte $a > 0$. //

(1.29) Proposição. As seguintes asserções são equivalentes:

- (i) o espaço de medida (X, Σ, μ) não tem átomos de medida infinita ou $a=0$;
- (ii) $N_A(\cdot)$ é uma semi-norma em $L_A(X, \Sigma, \mu)$ e, se $f \in L_A(X, \Sigma, \mu)$ e $N_A(f) = 0$, então $f=0$ μ -q.s'.

Demonstração. Ver em [4.6] de [B], substituindo o 2º parágrafo da prova, que está errado, por (1.28) acima. //

(1.30) Proposição. Sejam f uma função mensurável com $N_A(f) < \infty$ e $Y = \{x \in X: f(x) \neq 0\}$. Se $E \cap Y$ não é átomo de medida infinita para todo $E \in \Sigma$, então $f \in L_A$ e vale a relação

$$(i) \quad \|f\|_A \leq N_A(f) \leq 2\|f\|_A.$$

Demonstração. Ver [4.14] de [B].//

(1.31) Corolário. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida sem átomos de medida infinita. Se f é uma função mensurável com $N_A(f) < \infty$, então

$$(i) \ f \in L_A \text{ e } \|f\|_A \leq N_A(f) \leq 2\|f\|_A.$$

Demonstração. Segue de (1.30).//

(1.32) Proposição. Seja $a=0$, ou seja (X, Σ, μ) um espaço de medida sem átomos de medida infinita. Se $f \in L_A$ tem-se

$$(i) \ N_A(f) = 0, \text{ se, e somente se, } f=0 \text{ } \mu\text{-q.s.};$$

$$(ii) \ \|f\|_A \leq N_A(f) \leq 2\|f\|_A;$$

$$(iii) \ \|f\|_A \leq \int_X A(|f|) d\mu + 1.$$

Demonstração. O último item é consequência de (ii) e de (1.26.iii). A primeira asserção segue de (1.29), e a segunda dos resultados (1.30) e (1.28), lembrando que $N_A(f) < \infty$ (1.26.ii).//

Vimos em (1.26.i) que, se $f \in L_A$ e $g \in L_{\bar{A}}$, então $fg \in L_1$. O próximo resultado é "quase" uma recíproca.

(1.33) Proposição. Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida sem átomos de medida infinita, e f é uma função mensurável tal que $fg \in L_1$ para toda $g \in L_{\bar{A}}$ então $f \in L_A$.

Demonstração. Por (1.31), basta provarmos que

$$N_A(f) < \infty. \quad (1)$$

Antes porém verificaremos, em primeiro lugar, que se

$$\Sigma_1 = \{F \in \Sigma: \mu(F) < \infty\},$$

então

$$\sup\{N_A(f\xi_F): F \in \Sigma_1\} < \infty. \quad (2)$$

Como $|f|$ é uma função mensurável existe uma seqüência não-decrescente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples, com $0 \leq f_n \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que converge para $|f|$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $F \in \Sigma_1$, consideremos a função $\phi_F^n(g) = \int_X f_n g \xi_F d\mu$, para toda $g \in L_{\overline{A}}$.

É claro, lembrando (1.19.i) e (1.26.i), que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $F \in \Sigma_1$, a função $\phi_F^n \in (L_{\overline{A}})^*$, e que

$$\sup\{|\phi_F^n(g)|: n \in \mathbb{N} \text{ e } F \in \Sigma_1\} \leq \int_X |fg| d\mu < \infty,$$

para toda $g \in L_{\overline{A}}$.

Seja $N = \{h \in L_A: h=0 \text{ } \mu\text{-q.s.}\}$. Se L_A é o espaço quociente de L_A relativo ao espaço N e $\psi_F^n(\dot{g}) = \phi_F^n(g)$ para $n \in \mathbb{N}$, $F \in \Sigma_1$ e $\dot{g} \in L_A$, então é claro que $\psi_F^n \in (L_A)^*$ e $\|\psi_F^n\| = \|\phi_F^n\|$. Por (1.18) e pelo [Corolário 1, pag-217] de [H], temos que

$$\sup\{\|\phi_F^n\|: n \in \mathbb{N} \text{ e } F \in \Sigma_1\} = M < \infty.$$

Tendo em vista que para toda $g \in L_{\overline{A}}$, aplicando o Teorema da

convergência Monôtona, sendo $F \in \Sigma_1$, vale que

$$\begin{aligned} \int_X |fg| \xi_F d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n |g| \xi_F d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_F^n(|g|) \\ &\leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_F^n\|} \|g\|_{\bar{A}} \leq M \|g\|_{\bar{A}} \quad , \end{aligned}$$

concluimos que

$$N_A(f\xi_F) \leq M. \quad (3)$$

Como $F \in \Sigma_1$ é arbitrário temos (2).

Agora vamos provar (1). Fixada $g \in L_{\bar{A}}$, sejam ν a medida σ -aditiva, definida por

$$\nu(E) = \int_E |fg| d\mu \quad , \text{ para todo } E \in \Sigma,$$

e

$$\alpha = \sup\{\nu(F) : F \in \Sigma_1\} \quad .$$

Por (3) sabemos que $\alpha \in [0, M\|g\|_{\bar{A}}]$, e portanto existe uma sequência não-decrescente $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Σ_1 tal que

$$\alpha = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(F_n). \quad (4)$$

Seja $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Se provarmos que $\nu(X) = \nu(E)$ teremos que

$$\int_X |fg| d\mu = \nu(X) = \nu(E) = \alpha \leq M\|g\|_{\bar{A}} \quad .$$

Como M não depende de $g \in L_{\bar{A}}$ e g é arbitrária, obtemos (1).

Suponhamos por absurdo que

$$\int_{E^c} |fg| d\mu = \nu(E^c) > 0.$$

Então existe $\gamma \in]0, \infty[$ tal que

se $H_1 = \{x \in E^c : |f(x)g(x)| > \gamma\}$, então $\mu(H_1) > 0$.

Como (X, Σ, μ) não tem átomos de medida infinita, existe $H \in \Sigma_1$ com $H \subseteq H_1$ e $\mu(H) > 0$.

Portanto

$$\nu(H) = \int_H |fg| d\mu \geq \gamma \mu(H) > 0,$$

e por conseguinte, lembrando (4), temos que

$$\alpha = \nu(E) < \nu(E) + \nu(H) = \nu(E \cup H)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(F_n \cup H) \leq \alpha,$$

o que é uma contradição. //

(1.34) Proposição. Se $f \in L_A$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções mensuráveis, com $0 \leq |f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que converge para f μ -q.s, então

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_A(f_n) = N_A(f).$$

Demonstração. Como $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-decrescente, é claro que $(N_A(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ também é uma seqüência não-decrescente e que

$\lim_{n \rightarrow \infty} N_A(f_n) \leq N_A(f)$. Provaremos a desigualdade contrária.

Por (1.26.ii), sabemos que $N_A(f) < \infty$ e assim dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $g \in L_{\bar{A}}$ com $\|g\|_{\bar{A}} \leq 1$ e tal que

$$N_A(f) - \varepsilon < \int_X |fg| d\mu \leq N_A(f). \quad (1)$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona e por (1), concluímos que

$$N_A(f) - \varepsilon < \int_X |fg| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n g| d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} N_A(f_n) \leq N_A(f),$$

isto é, que

$$N_A(f) - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} N_A(f_n) \leq N_A(f).$$

Como $\varepsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário obtemos (i). //

(1.35) Corolário. Se $f \in L_A$, então existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções limitadas de L_A tal que

$$(i) \quad 0 \leq |f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge para } f;$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_A(f_n) = N_A(f).$$

Demonstração. Basta tomar para $n \in \mathbb{N}$ a função

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{se } |f(x)| > n \end{cases},$$

e aplicar (1.16.i) e (1.34). //

Para encerrar este parágrafo veremos em (1.43) que, sob certas condições, a igualdade $N_A(f) = \|f\|_A$ é verdadeira se, e somente se, $f = 0$ μ -q.s. A proposição (1.42), aqui enunciada como um resultado auxiliar para (1.43), tem interesse em si, pois dá nova expressão para a semi-norma $N_A(f)$.

(1.36) Proposição. Sejam $b = \bar{b} = \infty$, A tal que A' é contínua em $[0, \infty[$ e $f \in L_A \cap L_1$, limitada e não-nula μ -q.s. Então existe $k_0 \in]0, \infty[$ tal que

$$(i) \quad \int_X A(A'(k_0|f|)) d\mu = 1.$$

Demonstração. Seja J a função definida em $[0, \infty[$ por

$$J(k) = \int_X \bar{A}(A'(k|f|)) d\mu.$$

Então, por (1.9.ii), (1.2.xii) e (1.2.xi), valem as seguintes desigualdades:

$$J(k) + \int_X A(k|f|) d\mu = \int_X k|f| A'(k|f|) d\mu \leq k A'(k \|f\|_\infty) \|f\|_1 < \infty;$$

e assim $J(k) < \infty$, para todo $k \in [0, \infty[$.

De (1.2.ii) sabemos que $\bar{A}$ é contínua em $[0, \infty[$, e como, por hipótese, A' é contínua em $[0, \infty[$, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que J é contínua em $[0, \infty[$.

Tendo em vista que $J(0) = 0$, se provarmos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(k) = \infty, \tag{1}$$

então existirá $k_0 \in]0, \infty[$ tal que $J(k_0) = 1$, o que prova (i).

Para obtermos (1) observemos, em primeiro lugar, que

$$\ell = \lim_{u \rightarrow \infty} A'(u) = \infty. \tag{2}$$

A relação (2) segue do fato que A' é não-decrescente (1.2.xii) e que valem (1.6.iii), (1.6.i) e (1.2.xiii), pois com estes resultados temos que

$$\infty = \bar{b} = \lim_{v \uparrow \infty} \frac{A(v)}{v} = \lim_{v \uparrow \infty} \int_0^v \frac{A'(t)}{v} dt \leq \infty.$$

Como f não é nula μ -q.s, existe $\gamma \in]0, \infty[$ tal que

$$\mu(\{x \in X: |f(x)| > \gamma\}) > 0. \quad (3)$$

Seja $E = \{x \in X: |f(x)| > \gamma\}$.

Por (2), (1.2.ix) e (3), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} J(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \bar{A}(A'(k|f|)) d\mu \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \bar{A}(A'(k|f|)) d\mu \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} [\bar{A}(A'(k\gamma)) \mu(E)] = \infty, \end{aligned}$$

o que prova (1). //

(1.37) Proposição. Sejam $b = \bar{b} = \infty$, $f \in L_A$ e p a função definida em $[0, \infty[$ por $p(u) = \lim_{t \uparrow u} A'(t)$. Se $k_0 \in]0, \infty[$ é tal que

$$(i) \quad \int_X \bar{A}(p(k_0|f|)) d\mu = 1,$$

então

$$(ii) \quad N_A(f) = \int_X |f| p(k_0|f|) d\mu = \frac{1}{k_0} (1 + \int_X A(k_0|f|) d\mu).$$

Demonstração. Por (1.26.iii), (i) e (1.9.ii) temos que

$$\begin{aligned}
 N_A(f) &= \frac{1}{k_0} N_A(k_0 f) \leq \frac{1}{k_0} \left(1 + \int_X A(k_0 |f|) d\mu \right) \\
 &= \frac{1}{k_0} \left(\int_X \bar{A}(p(k_0 |f|)) d\mu + \int_X A(k_0 |f|) d\mu \right) \\
 &= \frac{1}{k_0} \int_X p(k_0 |f|) k_0 |f| d\mu = \int_X |f| p(k_0 |f|) d\mu \\
 &\leq \sup \left\{ \int_X |fg| d\mu : g \in L_{\bar{A}} \text{ e } \|g\|_{\bar{A}} \leq 1 \right\} = N_A(f),
 \end{aligned}$$

o que prova (ii). //

(1.38) Corolário. Se $b = \bar{b} = \infty$, A é tal que A' é contínua em $[0, \infty[$ e $f \in L_A \cap L_1$ é limitada e não-nula μ -q.s, então existe $k_0 \in]0, \infty[$ tal que

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \int_X \bar{A}(A'(k_0 |f|)) d\mu = 1; \\
 (ii) \quad & N_A(f) = \int_X |f| A'(k_0 |f|) d\mu = \frac{1}{k_0} \left(1 + \int_X A(k_0 |f|) d\mu \right).
 \end{aligned}$$

Demonstração. Segue de (1.36) e (1.37). //

(1.39) Proposição. Sejam $b = \bar{b} = \infty$ e A tal que A' é contínua em $[0, \infty[$. Se $f \in L_A \cap L_1$, então

$$(i) \quad N_A(f) = \inf \left\{ \frac{1}{k} \left(1 + \int_X A(k |f|) d\mu \right) : k \in]0, \infty[\right\}.$$

Demonstração. É claro, por (1.26.iii) que

$$N_A(f) \leq \inf \left\{ \frac{1}{k} \left(1 + \int_X A(k|f|) d\mu \right) : k \in]0, \infty[\right\}.$$

Provaremos a desigualdade contrária.

Se $f = 0$ μ -q.s., nada temos a demonstrar.

Suponhamos f não-nula μ -q.s. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$ a função f_n definida em X pela expressão

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{se } |f(x)| > n \end{cases},$$

não é nula μ -q.s.

Sejam $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências definidas por

$$g_n = f_{n+n_0},$$

e

$$j_n(k) = \int_X \overline{A}(A'(k|g_n|)) d\mu, \text{ com } k \in [0, \infty[.$$

Observemos que, para $n \in \mathbb{N}$, a função g_n não é nula μ -q.s., é limitada, por (1.16.i) pertence a $L_A \cap L_1$, e por (1.38) existe $k_n \in]0, \infty[$ tal que

$$j_n(k_n) = \int_X \overline{A}(A'(k_n|g_n|)) d\mu = 1 \quad (1)$$

e

$$N_A(g_n) = \frac{1}{k_n} \left(1 + \int_X A(k_n|g_n|) d\mu \right). \quad (2)$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Por (1) e usando o fato que A' e $\bar{A}$ são não-decrescentes, temos que

$$\begin{aligned} J_{n+1}(k_{n+1}) &= 1 = \int_X \bar{A}(A'(k_n | g_n |)) d\mu \leq \int_X \bar{A}(A'(k_n | g_{n+1} |)) d\mu \\ &= J_{n+1}(k_n). \end{aligned}$$

Como J_{n+1} é não-decrescente concluímos que $k_n \geq k_{n+1}$.

Por (2), observemos que

$$0 < \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{k_n} (1 + \int_X A(k_n | g_n |) d\mu) = N_A(g_n) \leq N_A(f).$$

Portanto a seqüência $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente e $k_n \geq 1/N_A(f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $k_0 = \inf\{k_n : n \in \mathbb{N}\} \in [1/N_A(f), \infty[$. Então dado $\epsilon \in]0, \infty[$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \leq k_{n_1} < k_0 + \epsilon$.

Portanto para $n \geq n_1$, temos, lembrando (2), que

$$\begin{aligned} 1 + \int_X A(k_n | g_n |) d\mu &= k_n N_A(g_n) \leq k_{n_1} N_A(g_n) \\ &\leq k_{n_1} N_A(f) < (k_0 + \epsilon) N_A(f). \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \int_X A(k_n | g_n |) d\mu) \leq (k_0 + \epsilon) N_A(f). \quad (3)$$

Pelo Lema de Fatou e (3), concluímos que

$$1 + \int_X A(k_0 |f|) d\mu \leq 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X A(k_n |g_n|) d\mu \leq (k_0 + \epsilon) N_A(f).$$

Como $\epsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário, obtemos que

$$\frac{1}{k_0} (1 + \int_X A(k_0 |f|) d\mu) \leq N_A(f). //$$

Nosso objetivo é obter (1.39.i) sem a restrição de A' ser contínua em $[0, \infty[$. Para isto introduzimos dois lemas, sendo o primeiro auxiliar para o segundo.

(1.40) Lema. Seja r uma função definida em $[0, \infty[$ e com valores em $[0, \infty]$, não-decrescente. Se p é a função inversa à direita de r , isto é,

$$p(s) = \inf \{ t \in [0, \infty[: r(t) > s \}, \text{ sendo } s \in [0, \infty[,$$

então

- (i) p é não-decrescente em $[0, \infty[$;
- (ii) p é contínua à direita em $[0, \infty[$;
- (iii) se $x_0 = \inf \{ t \in [0, \infty[: r(t) = \infty \} > 0$ e r é estritamente crescente em $[0, x_0[$, então p é a inversa à esquerda de r , isto é

$$p(s) = \sup \{ t \in [0, \infty[: r(t) < s \} ,$$

e p é contínua em $[0, \infty[$.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) seguem de [1.6.iv] e [1.6.v] de [B].

Para (iii) seja h a função definida em $[0, \infty[$ por

$$h(s) = \sup\{t \in [0, \infty[: r(t) < s\},$$

lembrando que $\sup \emptyset = \text{zero}$.

Fixemos $s \in [0, \infty[$ e provemos que $p(s) = h(s)$.

Se $h(s) > p(s)$, então existe $t_1 \in [0, \infty[$ tal que $h(s) > t_1 > p(s)$, e assim $s > r(t_1) > s$, o que é um absurdo.

Se $h(s) < p(s)$, então existe $t_2 \in [0, \infty[$ tal que $h(s) < t_2 < p(s)$, e assim $r(t_2) \geq s \geq r(t_2)$, e portanto $r(t_2) = s$.

Da definição de p e de x_0 , é fácil verificar que $p(s) \leq x_0$, e como $h(s) < t_2 < p(s)$ temos que $t_2 < x_0$.

Tendo em vista que r é estritamente crescente em $[0, x_0[$, que $t_2 < x_0$ e $r(t_2) = s$, concluímos que $p(s) \leq t_2$, o que contradiz nossa escolha de t_2 .

Portanto $h(s) = p(s)$.

Por [1.13.ix] de [B] temos que h é contínua à esquerda em $]0, \infty[$ e, como vale (ii) e $p=h$, concluímos que p é contínua em $[0, \infty[$. //

(1.41) Lema. Se A é uma função de Young e $\epsilon \in]0, \infty[$, então existe uma função de Young B com B' contínua em $[0, b[$ e tal que

(i) $B(u) \leq A(u) \leq B((1+\epsilon)u)$, para todo $u \in [0, \infty[$.

Demonstração. Seja q como em (1.8), isto é,

$$q(u) = \begin{cases} \lim_{t \downarrow u} \bar{A}'(t) & \text{se } u \in [0, \bar{b}[\\ \infty & \text{se } u \in [\bar{b}, \infty[\end{cases},$$

e tomemos $\bar{B}$ a função de Young definida em $[0, \infty[$ por

$$\bar{B}(u) = \int_0^u q(t)(1 + \epsilon - \epsilon e^{-t}) dt.$$

É imediato, lembrando (1.8.iii), que para $u \in [0, \infty[$ e $u \neq \bar{b}$, vale que

$$\bar{A}(u) \leq \bar{B}(u) \leq (1+\epsilon)\bar{A}(u). \quad (1)$$

Provaremos que (1) é verdadeira para $u=\bar{b}$.

Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de números reais positivos, que converge para $\bar{b}$.

Como $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são contínuas à esquerda em $]0, \infty[$ (1.2.ii), e (1) é verdadeira para u_n , temos que

$$\bar{A}(\bar{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}(u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{B}(u_n) = \bar{B}(\bar{b}) \leq (1+\epsilon)\bar{A}(\bar{b}),$$

o que prova (1) para $u=\bar{b}$.

Lembrando (1.2.v) por [2.21] de [B] e (1), temos que

$$\bar{B}(u) \leq \bar{A}(u) \leq \bar{B}((1+\epsilon)u), \text{ para } u \in [0, \infty[.$$

Seja $B = \bar{B}$. Então, lembrando que $\bar{A} = A$ (1.6.i), temos que

(i) é verdadeira.

Para concluirmos a prova basta verificarmos que B' é contínua em $[0, b[$. Para isto seja p a função definida em $[0, \infty[$ por

$$p(s) = \inf\{t \in [0, \infty[: q(t)(1 + \varepsilon - \varepsilon e^{-t}) > s\}.$$

Por (1.40), temos que p é contínua em $[0, \infty[$ e, por [2.19] de [B] que

$$B(u) = \bar{B}(u) = \int_0^u p(t)dt, \text{ para } u \in [0, \infty[.$$

Portanto B' é contínua em $[0, b[$, observando que $B(u) < \infty$ para $u \in [0, b[$. //

(1.42) Proposição. Se $b = \bar{b} = \infty$ e $f \in L_A \cap L_1$, então

$$(i) \quad N_A(f) = \inf\left\{\frac{1}{k}\left(1 + \int_X A(k|f|)d\mu\right) : k \in]0, \infty[\right\}.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, por (1.41) existe uma função de Young B , com B' contínua em $[0, \infty[$, e tal que

$$B(u) \leq A(u) \leq B(u(1+\varepsilon)), \text{ para } u \in [0, \infty[. \quad (1)$$

Por [2.21] de [B], temos que

$$\bar{A}(u) \leq \bar{B}(u) \leq \bar{A}(u(1+\varepsilon)), \text{ para } u \in [0, \infty[. \quad (2)$$

Observemos que, usando a relação (2) segue que

$$g \in L_{\overline{A}} \text{ se e somente se, } g \in L_{\overline{B}}, \quad (3)$$

e para $g \in L_{\overline{A}}$ temos que

$$\|g\|_{\overline{A}} \leq \|g\|_{\overline{B}} \leq (1+\epsilon) \|g\|_{\overline{A}}. \quad (4)$$

Por (3) e (4) concluímos que

$$N_B(f) \leq N_A(f) \leq (1+\epsilon) N_B(f). \quad (5)$$

$$\text{Seja } \tau = \inf \left\{ \frac{1}{k} \left(1 + \int_X A(k|f|) d\mu \right) : k \in]0, \infty[\right\}.$$

Por (5), (1.39) e (1), obtemos que

$$N_A(f) \leq (1+\epsilon) N_B(f) \leq (1+\epsilon) \tau \leq (1+\epsilon)^2 N_B(f) \leq (1+\epsilon)^2 N_A(f).$$

$$\text{Portanto } N_A(f) \leq (1+\epsilon) \tau \leq (1+\epsilon)^2 N_A(f).$$

Como $\epsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário, temos que $\tau = N_A(f)$, o que prova (i). //

(1.43) Proposição. Se $a=0$, $b = \bar{b} = \infty$ e $f \in L_A \cap L_1$, então

$$(i) \quad N_A(f) = \|f\|_A \text{ se, e somente se, } f=0 \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

Demonstração. Como $a=0$ temos que (i) é verdadeiro se $N_A(f) = \|f\|_A = 0$ (1.29).

Suponhamos por absurdo que $N_A(f) = \|f\|_A \neq 0$. É fácil verificar que podemos assumir sem perda de generalidade que $N_A(f) = \|f\|_A = 1$.

Por (1.42) sabemos que

$$1 = N_A(f) = \inf\left\{\frac{1}{k}(1 + \int_X A(k|f|)d\mu) : k \in]0, \infty[\right\}.$$

Portanto existe uma seqüência não-crescente $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, positivos, tal que

$$1 \leq \frac{1}{k_n}(1 + \int_X A(k_n|f|)d\mu) < 1 + \frac{1}{n}, \text{ para } n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

e

$$N_A(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n}(1 + \int_X A(k_n|f|)d\mu). \quad (2)$$

Da segunda desigualdade de (1) temos que

$$k_n(1 + \frac{1}{n}) > 1 + \int_X A(k_n|f|)d\mu \geq 1, \text{ para } n \in \mathbb{N},$$

e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n \geq 1$.

Observemos que, se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $k_n = 1$ para $n \geq n_0$, então por (1) concluímos que

$$1 \leq 1 + \int_X A(|f|)d\mu < 1 + \frac{1}{n}, \text{ para } n \geq n_0,$$

e desta relação obtemos que $\int_X A(|f|)d\mu = 0$, o que juntamente com $a=0$ implica em $f=0$ μ -q.s. O que é uma contradição visto que $N_A(f) \neq 0$. Portanto

$$k_n > 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Como $\|f\|_A = 1 < k_n$ e, como por (1) segue que $\int_X A(k_n|f|)d\mu < \infty$, concluímos por (1.17.iv) que

$$\int_X A(|f|)d\mu = 1.$$

Lembrando (3), (1.2.v) e (1), temos para $n \in \mathbb{N}$ que

$$1 + k_n = 1 + k_n \int_X A(|f|)d\mu \leq 1 + \int_X A(k_n|f|)d\mu \leq k_n(1 + \frac{1}{n}),$$

e assim $k_1 \geq k_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo.

Portanto não existe f não-nula μ -q.s tal que

$N_A(f) = \|f\|_A = 1$. Como é imediato que, se $f = 0$ μ -q.s, então

$N_A(f) = \|f\|_A = 0$, concluímos que (i) é verdadeira. //

Na proposição (1.43) temos a hipótese de que $f \in L_A \cap L_1$.

O próximo resultado fornece algumas condições para que se tenha

$$L_A \subset L_1.$$

(1.44) Proposição. Se $\bar{a} > 0$ ou $\mu(X) < \infty$, então $L_A \subset L_1$.

Demonstração. Sejam $f \in L_A$ e $\bar{x} = A^{-1}(1/\mu(X))$, com a convenção de que $1/\infty = 0$.

Notemos que se $\mu(X) = \infty$, então $\bar{x} = \bar{a} > 0$ (1.11.ii), e se $\mu(X) < \infty$, então por (1.11.iii) temos que $\bar{x} > 0$.

Como $\|\bar{x}\xi_X\|_{\bar{A}} \leq 1$ (1.11.v) concluímos que

$$N_A(f) \geq \int_X \bar{x}\xi_X|f|d\mu = \bar{x} \int_X |f|d\mu,$$

e portanto $f \in L_1$.//

(1.45) Corolário. Seja $\bar{a} > 0$, ou seja $\mu(X) < \infty$. Se $a=0$ e $b = \bar{b} = \infty$, então para $f \in L_A$ tem-se

$$(i) \quad N_A(f) = \inf \left\{ \frac{1}{k} \left(1 + \int_X A(k|f|) d\mu \right) : k \in]0, \infty[\right\} ;$$

$$(ii) \quad N_A(f) = \|f\|_A \text{ se, e somente se, } f=0 \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

Demonstração. Segue de (1.44), (1.42) e (1.43).//

§ 2. O espaço $M_A(X, \Sigma, \mu)$

Lembramos que, conforme (1.5), A denotará uma função de Young, $\bar{A}$ a função de Young complementar de A e

$$a = \sup\{u \in [0, \infty[: A(u) = 0\};$$

$$b = \inf\{u \in [0, \infty[: A(u) = \infty\};$$

$$\bar{a} = \sup\{u \in [0, \infty[: \bar{A}(u) = 0\};$$

$$\bar{b} = \inf\{u \in [0, \infty[: \bar{A}(u) = \infty\}.$$

Além disso, como A e $\bar{A}$ são não-triviais (1.1), temos que $a, \bar{a} \in [0, \infty[$ e $b, \bar{b} \in]0, \infty]$.

A menos de menção em contrário, o espaço L_A terá a topologia proveniente da semi-norma $\|\cdot\|_A$ definida em (1.13).

Obteremos condições suficientes para que haja igualdade entre os espaços M_A , seu subespaço J_A (definido em (2.4)), L_A e L_∞ . Em (2.10) estabeleceremos que, sob certas condições, a igualdade $L_A = M_A$ é equivalente a A satisfazer a condição Δ_2 . Dentre os resultados deste parágrafo destacamos (2.12).

(2.1) Definição. Seja $\sigma(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto das funções simples, definidas em X e com valores em $\mathbb{R}$. Indicaremos por $M_A(X, \Sigma, \mu)$ a aderência em $L_A(X, \Sigma, \mu)$ do conjunto $\sigma(X, \Sigma, \mu) \cap L_A(X, \Sigma, \mu)$.

Portanto $f \in M_A(X, \Sigma, \mu)$ se, e somente se, existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples pertencentes a $L_A(X, \Sigma, \mu)$, tal que

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0.$$

É fácil verificar que $M_A(X, \Sigma, \mu)$ é um subespaço vetorial fechado de $L_A(X, \Sigma, \mu)$.

Quando não houver risco de confusão escreveremos M_A e σ em vez de, respectivamente, $M_A(X, \Sigma, \mu)$ e $\sigma(X, \Sigma, \mu)$.

(2.2) Observação. Se $g \in M_A$ e f é uma função mensurável tal que $f = g$ μ -q.s, então $f \in M_A$.

(2.3) Proposição. Seja $a > 0$, ou seja $\mu(X) < \infty$. Se f é uma função mensurável e limitada μ -q.s, então $f \in M_A$.

Demonstração. Por (2.2) podemos assumir sem perda de generalidade que f é limitada.

Como f é mensurável e limitada, existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples, que converge uniformemente para f . Tendo em vista que $\sigma \subset L_A$ ((1.19.i) e (1.19.ii)) e $f \in L_A$ (1.16.i), se provarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$, teremos que $f \in M_A$.

Seja $2\bar{x} = A^{-1}(1/(\mu(X)+1))$ com a convenção de que $1/\infty = 0$. Notemos que $\bar{x} = a/2$ se $\mu(X) = \infty$ (1.11.ii) e ainda que $A(\bar{x}) \leq 1/(\mu(x)+1)$ se $\mu(x) < \infty$ ((1.2.viii) e (1.11.v)).

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f , dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$ e $x \in X$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \bar{x}$.

Assim para $n \geq n_0$ temos que

$$\int_X A\left(\frac{|f_n - f|}{\varepsilon}\right) d\mu \leq A(\bar{x})_\mu(X) \leq 1,$$

e portanto $\|f_n - f\|_A \leq \varepsilon$.//

(2.4) Definição. Denotaremos por $J_A(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto das funções $f \in L_A(X, \Sigma, \mu)$ tais que

$$(i) \quad \int_X A(k|f|) d\mu < \infty, \text{ para todo } k \in [0, \infty[.$$

Quando não houver risco de confusão, escreveremos J_A em vez de $J_A(X, \Sigma, \mu)$.

(2.5) Teorema. As seguintes asserções são verdadeiras:

- (i) J_A é um subespaço vetorial fechado de M_A ;
- (ii) se $b < \infty$, então $f \in J_A$ se, e somente se, $f=0$ μ -q.s.;
- (iii) se $b < \infty$ e existe $E \in \Sigma$ com $0 < \mu(E) < \infty$, então $J_A = \{f \text{ função mensurável: } f=0 \text{ } \mu\text{-q.s.}\} \neq M_A$;
- (iv) se $b=\infty$ e $\mu(X) < \infty$, então $J_A = M_A$;
- (v) se $b=\infty$ e $a=0$, então $J_A = M_A$;
- (vi) se $a > 0$ e $\mu(X) = \infty$, então $J_A \neq M_A$.

Demonstração. Observemos que usando a definição de J_A e (1.2.iii) temos que J_A é um subespaço vetorial de L_A . Por (1.24) concluímos que $J_A \subset M_A$. Portanto para obtermos (i) basta que J_A seja fechado em L_A .

Seja g pertencente à aderência de J_A em L_A . Provaremos que $g \in J_A$.

Dado $k \in]0, \infty[$, tomemos $g_k \in J_A$ tal que $\|g - g_k\|_A < 1/(2k)$. Então por (1.2.viii), (1.2.iii), (1.17.ii) e o fato que $g_k \in J_A$ concluímos que

$$\begin{aligned} \int_X A(k|g|) d\mu &\leq \frac{1}{2} \int_X A(2k|g - g_k|) d\mu + \frac{1}{2} \int_X A(2k|g_k|) d\mu \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_X A(2k|g_k|) d\mu < \infty, \end{aligned}$$

e portanto $g \in J_A$, obtendo assim (i).

Para estabelecermos (ii), suponhamos $b < \infty$, $f \in J_A$ e $B_n = \{x \in X: |f(x)| > \frac{1}{n}\}$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que, se $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(B_n)A(2b) \leq \int_X A(2bn|f|) d\mu < \infty,$$

e como $A(2b) = \infty$ concluímos que $\mu(B_n) = 0$, e portanto $f=0$ μ -q.s.

A afirmação (iii) segue da hipótese que existe $E \in \Sigma$ com $0 < \mu(E) < \infty$ pois, se $g = \frac{b}{2}\chi_E$, então $g \notin J_A$ por (ii) e $g \in M_A$.

Antes de provarmos (iv) e (v), notemos que

1º) se $b = \infty$ e $\mu(X) < \infty$, então $\sigma \subset J_A$,

e

2º) se $a=0$ e $h \in \sigma \cap L_A$, então, por (1.19.iii), $\mu(\{x \in X: h(x) \neq 0\}) < \infty$.

Assim com as hipóteses de (iv) ou de (v) temos que $\sigma \cap L_A \subset J_A$ e usando (i) obtemos

$$M_A = \overline{\sigma \cap L_A} \subset \overline{J_A} = J_A \subset M_A ,$$

o que prova (iv) e (v).

Finalmente para obtermos (vi) notemos que

$$\int_X A\left(\frac{a}{2}\xi_X\right)d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \int_X A(2a\xi_X)d\mu = \infty .$$

Portanto $\xi_X \in M_A$ e $\xi_X \notin J_A$.//

(2.6) Corolário. As afirmações abaixo são verdadeiras:

(i) se $\mu(X) = \infty$ e $J_A = M_A$, então $a=0$;

(ii) se existe $E \in \Sigma$ com $0 < \mu(E) < \infty$ e $J_A = M_A$, então $b=\infty$.

Demonstração. São consequências, respectivamente, de (2.5.vi) e (2.5.iii).//

(2.7) Definição: Seja A uma função de Young tal que existem $u_0, c \in [0, \infty[$ com $c \neq 0$, $A(u_0) < \infty$ e

(i) $A(2u) \leq c A(u)$, para todo $u \in [u_0, \infty[$.

Se $u_0 = 0$, dizemos que A satisfaz a condição Δ_2 . Se $u_0 > 0$, dizemos que A satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes.

Estudaremos a seguir as relações entre o fato de A satisfazer a condição Δ_2 e a igualdade $M_A = L_A$.

(2.8) Proposição. Se A satisfaz a condição Δ_2 ou, se $\mu(X) < \infty$ e A satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes, então $L_A = J_A = M_A$.

Demonstração. Por [5.9] de [B] temos que $L_A = J_A$ e como, por (2.5.i), $J_A \subset M_A$ segue que $L_A = J_A = M_A$. //

(2.9) Proposição. As seguintes asserções são verdadeiras:

- (i) se $\mu(X) = \infty$ e A satisfaz a condição Δ_2 , então $a=0$;
- (ii) se existe $E \in \Sigma$ com $0 < \mu(E) < \infty$ e A satisfaz a condição Δ_2 , então $b=\infty$;
- (iii) se $\mu(X) < \infty$ e A satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes, então $b=\infty$;
- (iv) se (X, Σ, μ) é não puramente atômico, $\mu(X) = \infty$ e A satisfaz a condição Δ_2 , então $a=0$ e $b=\infty$.

Demonstração. Os três primeiros itens decorrem de (2.8) e (2.6). A última asserção é consequência das anteriores. //

(2.10) Proposição. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida não puramente atômico e A uma função de Young com $b=\infty$.

Se $\mu(X) = \infty$, são equivalentes:

- (i) A satisfaz a condição Δ_2 ;
- (ii) $M_A = L_A$ e $a=0$.

Se $\mu(X) < \infty$, são equivalentes:

(iii) A satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes;

(iv) $M_A = L_A$.

Demonstração. Segue de (2.8), (2.9.i) e dos resultados [B.4] e [5.21] de [B]. //

A seguir estabelecemos algumas condições para termos $L_A = L_\infty$ e comparamos $\|\cdot\|_A$ com $\|\cdot\|_\infty$.

(2.11) Teorema. As seguintes asserções são verdadeiras:

(i) se $b < \infty$, então $L_A \subset L_\infty$, e para $f \in L_A$ tem-se $\|f\|_\infty \leq b \|f\|_A$;

(ii) se $a > 0$ ou $\mu(X) < \infty$, então $L_\infty \subset M_A \subset L_A$, e para $f \in L_\infty$ tem-se $\bar{x} \|f\|_A \leq \|f\|_\infty$, onde $\bar{x} = A^{-1}(1/\mu(X))$, com a convenção de que $1/\infty = 0$;

(iii) se $b < \infty$ e $a > 0$, ou se $b < \infty$ e $\mu(X) < \infty$, então $L_A = L_\infty = M_A$ e para $f \in L_A$ tem-se $\bar{x} \|f\|_\infty \leq b \bar{x} \|f\|_A \leq b \|f\|_\infty$, onde $\bar{x}$ é como em (ii).

Demonstração. Para demonstrarmos (i), tomemos $f \in L_A$. Se $\|f\|_A = 0$, então $f=0$ μ -q.s. e assim $f \in L_\infty$ e $\|f\|_\infty = 0$. Suponhamos $\|f\|_A \neq 0$ e para $n \in \mathbb{N}$, seja

$$E_n = \{x \in X: |f(x)| > (b + \frac{1}{n}) \|f\|_A\}.$$

Notemos que, se $n \in \mathbb{N}$, então $A(b + \frac{1}{n}) = \infty$ e

$$A(b + \frac{1}{n})\mu(E_n) \leq \int_{E_n} A(\frac{|f|}{\|f\|_A}) d\mu \leq \int_X A(\frac{|f|}{\|f\|_A}) d\mu \leq 1.$$

Portanto $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim $f \in L_\infty$ e

$$\|f\|_\infty \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b + \frac{1}{n}) \|f\|_A = b \|f\|_A,$$

o que prova (i).

Em seguida vamos mostrar que nas hipóteses de (ii) temos que

$$\text{se } f \in L_\infty, \text{ então } f \in L_A \text{ e } \bar{x} \|f\|_A \leq \|f\|_\infty. \quad (1)$$

O caso em que $\|f\|_\infty = 0$ é trivial. Suponhamos que $\|f\|_\infty \neq 0$. Por (1.11.ii) e (1.11.v) temos, lembrando (1.2.ii), que

$$\int_X A(\frac{\bar{x}|f|}{\|f\|_\infty}) d\mu \leq A(\bar{x})\mu(X) \leq 1.$$

Como $\bar{x} > 0$ se $\mu(X) < \infty$ (1.11.iii) e $\bar{x} = a > 0$ quando $\mu(X) = \infty$ (1.11.ii), concluímos que $f \in L_A$ e $\|f\|_A \leq \|f\|_\infty / \bar{x}$, o que prova (1).

Resta provar que $L_\infty \subset M_A$. Se $f \in L_\infty$ podemos, sem perda de generalidade, supor que f é limitada (2.2).

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções simples que converge uniformemente para f tal que $|f_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então é claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ e, por (1), $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$. Tendo em vista que $f_n \in \sigma \cap L_A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (1.16.i), obtemos que $f \in M_A$, o que prova (ii).

A asserção (iii) é consequência de (i) e (ii). //

O próximo resultado é interessante e será usado no §3.

(2.12) Teorema. Se $g \in M_A$ e f é uma função mensurável tal que $0 \leq |f| \leq |g|$ μ -q.s, então $f \in M_A$.

Demonstração. Observemos, em primeiro lugar, que $f \in L_A$ (1.16.i) e que, por (2.2), podemos assumir sem perda de generalidade que $0 \leq |f| \leq |g|$.

Se $a=0$ e $b=\infty$, então por (2.5.iv) temos que $J_A=M_A$, e neste caso o Teorema é de fácil verificação. Também o Teorema é trivial quando $a > 0$ e $b < \infty$, visto que nestas condições $M_A=L_A$ (2.11.iii). Restam os casos em que $a > 0$ e $b=\infty$, e em que $a=0$ e $b < \infty$.

Como $g \in M_A$, existe uma sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples pertencentes a L_A , tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\|_A = 0$. Então, por (1.22), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } B = \{x \in X : |g(x) - g_{n_1}(x)| > 1\}, \text{ então } \mu(B) \leq 1. \quad (1)$$

Ainda, dado $\epsilon \in]0, \infty[$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq n_1$ tal que

$$\text{se } n \geq n_0, \text{ então } \int_X A\left(\frac{2|g - g_n|}{\epsilon}\right) d\mu \leq 1. \quad (2)$$

Seja $H \in \Sigma$. Observando que valem a relação (2) e, por (1.2.viii) e (1.2.iii), a relação abaixo

$$A\left(\frac{|g|}{\varepsilon}\right)_{\xi_H} \leq \left[\frac{1}{2} A\left(\frac{2|g-g_n|}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} A\left(\frac{2|g_n|}{\varepsilon}\right)\right]_{\xi_H},$$

temos que

$$\text{se } n \geq n_0 \geq n_1, \text{ então } \int_H A\left(\frac{|g|}{\varepsilon}\right) d\mu \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_H A\left(\frac{2|g_n|}{\varepsilon}\right) d\mu. \quad (3)$$

Seja B como em (1) e suponhamos que $a > 0$ e $b = \infty$.

Como $f_{\xi_{B^c}}$ é limitada, pois

$$|f_{\xi_{B^c}}| \leq |g_{\xi_{B^c}}| \leq (|g-g_{n_1}| + |g_{n_1}|)_{\xi_{B^c}} \leq 1 + \|g_{n_1}\|_{\infty},$$

e $a > 0$ temos que $f_{\xi_{B^c}} \in M_A$ (2.3). Provaremos que $f_{\xi_B} \in M_A$ e assim $f \in M_A$.

Tendo em vista que (3) é verdadeira para $H=B$, e ainda que $b = \infty$ e $\mu(B) < \infty$ temos que

$$\int_B A\left(\frac{|f|}{\varepsilon}\right) d\mu \leq \int_B A\left(\frac{|g|}{\varepsilon}\right) d\mu \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} A\left(\frac{2}{\varepsilon} \|g_{n_0}\|_{\infty}\right) \mu(B) < \infty.$$

Como $\varepsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário concluímos que $f_{\xi_B} \in J_A \subset M_A$.

Agora suponhamos que $a=0$ e $b < \infty$. Neste caso f é limitada μ -q.s. (2.11.i) e como $g_n \in L_A$ e vale (1.19.iii) temos que, se $E_n = \{x \in X: g_n(x) \neq 0\}$, então $\mu(E_n) < \infty$. Portanto $f_{\xi_{E_n}} \in M_A$ (2.3). Demonstraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{\xi_{E_n}}\|_A = 0$ e com o fato que M_A é fechado concluiremos que $f \in M_A$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0 \geq n_1$. Tomando $H = E_n^c$ em (3) obtemos que

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{\varepsilon}\right) \xi_{E_n} c \, d\mu \leq \int_X A\left(\frac{|g|}{\varepsilon}\right) \xi_{E_n} c \, d\mu \leq \frac{1}{2} < 1 ,$$

e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f \xi_{E_n}\|_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f \xi_{E_n} c\|_A = 0. //$

o0o

§3. O espaço $N_A(X, \Sigma, \mu)$

Definiremos em N_A uma norma e uma relação de ordem parcial de modo a torná-lo um reticulado de Banach (3.17). Destacamos as proposições (3.9) e (3.18), que serão úteis na caracterização do dual de N_A .

(3.1) Definição: Denotaremos por $N_A(X, \Sigma, \mu)$ o espaço quociente de $L_A(X, \Sigma, \mu)$ relativo a $M_A(X, \Sigma, \mu)$, e por $\hat{f}$ o elemento de $N_A(X, \Sigma, \mu)$ determinado por

$$\hat{f} = f + M_A = \{f+h: h \in M_A\}.$$

Observemos que, se $f, g \in L_A(X, \Sigma, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\widehat{(\lambda f)} = \lambda \hat{f}$ e $\widehat{(f+g)} = \hat{f} + \hat{g}$, e com estas operações $N_A(X, \Sigma, \mu)$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

Quando não houver risco de confusão, escreveremos N_A em vez de $N_A(X, \Sigma, \mu)$. Além disso escreveremos $(f+g)^\wedge$ e $(\lambda f)^\wedge$ em vez de, respectivamente, $\widehat{(f+g)}$ e $\widehat{(\lambda f)}$, sendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3.2) Observação. Segue de (2.2) que, se $f, g \in L_A$ e $f=g$ μ -q.s, então $\hat{f} = \hat{g}$.

(3.3) Definição. Denotaremos por $d(\cdot)$ a função definida em N_A por

$$(i) \quad d(\hat{f}) = \inf\{\|f+h\|_A: h \in M_A\}.$$

É fácil verificar que $d(\cdot)$ está bem definida, isto é, o segundo membro de (i) independe do representante de $\hat{f}$.

(3.4) Proposição. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) se $f \in L_A$, então $d(\hat{f}) \leq \|f\|_A < \infty$;
- (ii) $d(\cdot)$ é uma norma em N_A ;
- (iii) o espaço N_A com a norma $d(\cdot)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Observemos que da definição de $d(\cdot)$ seguem o item (i) e que $d(\cdot)$ é uma semi-norma em N_A . A seguir provaremos que, se $d(\hat{f}) = 0$ então $\hat{f} = \hat{0}$. Assim concluiremos (ii).

Seja $\hat{f} \in N_A$ com $d(\hat{f}) = 0$. Então existe uma seqüência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de M_A tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_A = 0.$$

Como M_A é fechado em L_A e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em L_A , existe uma função $h \in M_A$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - g_n\|_A = 0.$$

Baseados nas informações acima concluímos que $\|f - h\|_A = 0$ e assim $f = h$ μ -q.s. Por (3.2) obtemos que $\hat{f} = \hat{h} = \hat{0}$.

A demonstração de (iii) é análoga à do [Teorema 4.2, Capítulo II] de [H]. //

(3.5) Proposição. Se $\hat{f} \in N_A$, então

$$(i) \quad d(\hat{f}) = \inf\{\|f+s\|_A : s \in \sigma \cap L_A\}.$$

Demonstração. Seja

$$\tau(\hat{f}) = \inf\{\|f+s\|_A : s \in \sigma \cap L_A\}.$$

É imediato que $d(\hat{f}) \leq \tau(\hat{f})$. Suponhamos por absurdo que $d(\hat{f}) < \tau(\hat{f})$.

Seja $\varepsilon = \tau(\hat{f}) - d(\hat{f})$. Segue da definição de $d(\cdot)$ e do facto que $M_A = \overline{\sigma \cap L_A}$ que existem $h \in M_A$ e $s \in \sigma \cap L_A$ tais que

$$d(\hat{f}) \leq \|f+h\|_A < d(\hat{f}) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|h+s\|_A \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$\|f+s\|_A \leq \|f+h\|_A + \|h+s\|_A < d(\hat{f}) + \varepsilon = \tau(\hat{f}) \leq \|f+s\|_A,$$

o que é um absurdo. Portanto $d(\hat{f}) = \tau(\hat{f})$. //

(3.6) Definição. Sejam $\hat{f}, \hat{g} \in N_A$. Definimos $\hat{f} \leq \hat{g}$ se, e somente se, existem $f_1 \in \hat{f}$ e $g_1 \in \hat{g}$ tais que $f_1 \leq g_1$.

(3.7) Lema. Se $\hat{f}, \hat{g}, \hat{w} \in N_A$ são tais que $\hat{f} \leq \hat{g}$ e $\hat{g} \leq \hat{w}$, então existem $f_1 \in \hat{f}$, $g_1 \in \hat{g}$ e $w_1 \in \hat{w}$ com $f_1 \leq g_1 \leq w_1$.

Demonstração. Da hipótese e de (3.6) sabemos que existem

$f_0 \in \hat{f}$, $g_0, g_1 \in \hat{g}$ e $w_1 \in \hat{w}$ tais que $f_0 \leq g_0$ e $g_1 \leq w_1$.

Seja $f_1 = f_0 + (g_1 - g_0)$. Notemos que $g_1 - g_0 \in M_A$ e que

$$f_1 = f_0 + (g_1 - g_0) \leq g_0 + (g_1 - g_0) = g_1 \leq w_1.$$

Portanto $f_1 \in \hat{f}_0 = \hat{f}$ e $f_1 \leq g_1 \leq w_1$. //

(3.8) Proposição. A relação $\leq$ definida em (3.6) é uma relação de ordem parcial em N_A .

Demonstração. É imediato que $\leq$ é reflexiva. A transitividade é consequência de (3.7). Provaremos que $\leq$ é simétrica.

Sejam $\hat{f}, \hat{g} \in N_A$ tais que $\hat{f} \leq \hat{g}$ e $\hat{g} \leq \hat{f}$. Por (3.7) existem $f_0, f_1 \in \hat{f}$ e $g_1 \in \hat{g}$ tais que $f_0 \leq g_1 \leq f_1$.

Como $0 \leq g_1 - f_0 \leq f_1 - f_0$ e $f_1 - f_0 \in M_A$ temos por (2.12), que $g_1 - f_0 \in M_A$. Portanto $f_0 = g_1 + (f_0 - g_1) \in \hat{g}_1 = \hat{g}$ e assim $\hat{f} = \hat{f}_0 = \hat{g}$. //

A partir daqui a norma em N_A será a norma $d(\cdot)$ definida (3.3) e a relação de ordem parcial será a dada em (3.6).

(3.9) Proposição. Se $f, g \in L_A$ e $|f| \leq |g|$ μ -q.s, então

$$(i) \quad d(\hat{f}) \leq d(\hat{g}) ;$$

$$(ii) \quad d(|f|^\wedge) = d(\hat{f}).$$

Demonstração. A asserção (ii) é obtida de (i), lembrando que

$$|f| = ||f||.$$

Se $a > 0$ e $b < \infty$, então (i) é imediato, pois neste caso $M_A = L_A$ (2.11.iii). Provaremos (i) quando $b < \infty$ e $a = 0$, e quando $b = \infty$.

Por (3.2) e (2.12) iremos supor sem perda de generalidade que $|f| \leq |g|$ e que $d(\hat{g}) > 0$.

Dado $\epsilon \in]0, \infty[$, por (3.5), existe $s \in \sigma \cap L_A$ tal que

$$0 < d(\hat{g}) \leq \|g+s\|_A < d(\hat{g}) + \epsilon. \quad (1)$$

Sendo

$$H_1 = \{x \in X: s(x) \neq 0\}, \quad (2)$$

temos que

$$d((f_{\xi_{H_1 c}})^{\wedge}) < d(\hat{g}) + \epsilon. \quad (3)$$

De fato, é claro que

$$|f_{\xi_{H_1 c}}| \leq |g_{\xi_{H_1 c}}| = |(g+s)_{\xi_{H_1 c}}| \leq |g+s|$$

e assim,

$$d((f_{\xi_{H_1 c}})^{\wedge}) \leq \|f_{\xi_{H_1 c}}\|_A \leq \|g+s\|_A,$$

o que, junto com a (1), prova a (3).

Observemos ainda que por (1.19.iii) temos que

$$\mu(H_1) < \infty \text{ quando } a=0. \quad (4)$$

Suponhamos, em primeiro lugar, que $b < \infty$ e $a=0$. Por (2.11.i) sabemos que f é limitada μ -q.s. e assim por (4) e (2.3) concluímos que $f_{\xi_{H_1 c}} \in M_A$. Portanto $\hat{f} = (f_{\xi_{H_1 c}})^{\wedge}$ e, lembrando (3), obtemos que

$$d(\hat{f}) = d((f\xi_{H_1^c})^\wedge) \leq d(\hat{g}) + \varepsilon.$$

Para provar que $d(\hat{f}) \leq d(\hat{g}) + \varepsilon$ no caso em que $b=\infty$, vamos primeiro estabelecer o seguinte resultado auxiliar:

Se $H \in \Sigma$ for tal que para todo $\alpha \in]1, \infty[$ se tenha

$$\int_H A\left(\frac{|s|}{(\alpha-1)\|g+s\|_A}\right) d\mu < \infty, \quad (5)$$

então

$$d((f\xi_H)^\wedge) \leq d(\hat{g}) + \varepsilon. \quad (6)$$

Para demonstrar este resultado auxiliar observemos que para $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]1, \infty[$ e $H \in \Sigma$ vale que

$$\frac{|f|}{\alpha\|g+s\|_A} \xi_H \leq \frac{|g|}{\alpha\|g+s\|_A} \xi_H \leq \left[\frac{|g+s|}{\alpha\|g+s\|_A} + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \frac{|s|}{(\alpha-1)\|g+s\|_A} \right] \xi_H$$

e assim, por (1.2.viii) e (1.2.iii), temos a relação

$$A\left(\frac{|f|}{\alpha\|g+s\|_A}\right) \xi_H \leq \left[\frac{1}{\alpha} A\left(\frac{|g+s|}{\|g+s\|_A}\right) + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) A\left(\frac{|s|}{(\alpha-1)\|g+s\|_A}\right) \right] \xi_H. \quad (7)$$

Usando (1.17.i) e (5) é fácil verificar que a função no segundo membro de (7) pertence a L_1 e assim por (1.24) existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de L_A tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f - f_n)\xi_H\|_A \leq \alpha \|g+s\|_A.$$

Portanto existe $f_{n_0} \in \sigma \cap L_A$ tal que

$$d((f_{\xi_H})^\wedge) \leq \|(f - f_{n_0})_{\xi_H}\|_A \leq \alpha \|g+s\|_A < \alpha (d(\hat{g}) + \epsilon).$$

Como $\alpha \in]1, \infty[$ é arbitrário, fica provada a relação (6).

Suponhamos agora $b = \infty$ e $a = 0$. Tomemos H_1 como em (2) e $\alpha \in]1, \infty[$. Então por (4), temos que $\mu(H_1) < \infty$ e assim

$$\int_X A\left(\frac{|s|}{(\alpha-1)\|g+s\|_A}\right) d\mu = \int_{H_1} A\left(\frac{|s|}{(\alpha-1)\|g+s\|_A}\right) d\mu < \infty.$$

Portanto vale a (6) com $H = X$, isto é,

$$d(\hat{f}) \leq d(\hat{g}) + \epsilon.$$

Finalmente consideremos o caso $b = \infty$ e $a > 0$.

Sendo

$$H_2 = \{x \in X: |g(x)+s(x)| > 2a\|g+s\|_A\},$$

decorre de (1.17.i) que

$$A(2a)\mu(H_2) = \int_{H_2} A(2a) d\mu \leq \int_{H_2} A\left(\frac{|g+s|}{\|g+s\|_A}\right) d\mu \leq 1,$$

e como $A(2a) \neq 0$, temos que $\mu(H_2) < \infty$.

Como $\mu(H_2) < \infty$ e $b = \infty$ concluímos que

$$\int_{H_2} A\left(\frac{|s|}{(\alpha-1)\|g+s\|_A}\right) d\mu < \infty$$

para todo $\alpha \in]1, \infty[$, e portanto vale a (6) com $H = H_2$, isto é,

$$d((f_{\xi_{H_2}})^\wedge) \leq d(\hat{g}) + \epsilon.$$

Observemos que $f_{\xi_{H_2}^c}$ é limitada, pois

$$|f_{\xi_{H_2 C}}| \leq |g_{\xi_{H_2 C}}| \leq |(g+s)_{\xi_{H_2 C}}| + |s_{\xi_{H_2 C}}| \leq 2a \|g+s\|_A + \|s\|_{\infty},$$

e assim, decorre de (2.3) que $f_{\xi_{H_2 C}} \in M_A$. Portanto $\hat{f} = (f_{\xi_{H_2 C}})^{\wedge}$ e

$$d(\hat{f}) \leq d(\hat{g}) + \epsilon. \quad (8)$$

Como (8) é verdadeira em todos os casos estudados e $\epsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário concluímos que $d(\hat{f}) \leq d(\hat{g})$ e portanto (i) é verdadeiro. //

(3.10) Corolário. Se $f, g \in L_A$ e $|f|^{\wedge} \leq |g|^{\wedge}$, então $d(\hat{f}) \leq d(\hat{g})$.

Demonstração. Como $|f|^{\wedge} \leq |g|^{\wedge}$ existem, por (3.6), $h_1, h_2 \in M_A$ tais que $|f| + h_1 \leq |g| + h_2$ e assim

$$|f| \leq |g| + h_2 - h_1 = ||g| + h_2 - h_1|.$$

Usando (3.9) obtemos que

$$d(\hat{f}) \leq d((|g| + h_2 - h_1)^{\wedge}) = d(|g|^{\wedge}) = d(\hat{g}). //$$

(3.11) Definição. Sejam $(E, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $x, y \in E$.

Se $z \in E$ é tal que

(i) $x \leq z$ e $y \leq z$;

(ii) se $u \in E$, $x \leq u$ e $y \leq u$, então $z \leq u$,

dizemos que z é o supremo de x e y e indicamos $z = x \vee y$.

Se $w \in E$ é tal que

$$(i) \quad w \leq x \quad \text{e} \quad w \leq y ;$$

$$(ii) \quad \text{se } v \in E, v \leq x \quad \text{e} \quad v \leq y, \text{ então } v \leq w ,$$

dizemos que w é o ínfimo de x e y e indicamos $w = x \wedge y$.

Se para todo $x, y \in E$ existem $x \vee y \in E$ e $x \wedge y \in E$, dizemos que $(E, \leq)$ é um reticulado.

(3.12) Definição. Seja E um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial parcialmente ordenado pela relação $\leq$. Dizemos que $(E, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado se, e somente se,

$$(i) \quad (E, \leq) \text{ é um reticulado};$$

$$(ii) \quad \text{se } x, y, z \in E \quad \text{e} \quad x \leq y, \text{ então } x+z \leq y+z;$$

$$(iii) \quad \text{se } x, y \in E, x \leq y \quad \text{e} \quad \gamma \in [0, \infty[, \text{ então } \gamma x \leq \gamma y.$$

Se $x \in E$ denotamos: $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x) \vee 0$ e $|x| = x_+ + x_-$. As vezes escrevemos $y \geq x$, em vez de $x \leq y$.

Sabemos que N_A com a relação $\leq$ definida em (3.6) é um conjunto parcialmente ordenado (3.8). Nosso objetivo a seguir é verificar que N_A é um espaço vetorial reticulado. Antes porém um lema.

(3.13) Lema. Se $f, g \in L_A$, $f_1 \in \hat{f}$ e $g_1 \in \hat{g}$, então

$$(i) \quad (\max\{f_1, f\})^\wedge = \hat{f} ;$$

$$(ii) \quad (\min\{f_1, f\})^\wedge = \hat{f} ;$$

$$(iii) \quad (\max\{f_1, g_1\})^\wedge = (\max\{f, g\})^\wedge$$

$$(iv) \quad (\min\{f_1, g_1\})^\wedge = (\min\{f, g\})^\wedge.$$

Demonstração. Observemos que, se (i) e (iii) são verdadeiros, então

$$\begin{aligned}(\min\{f_1, f\})^\wedge &= (-\max\{-f_1, -f\})^\wedge = -(\max\{-f_1, -f\})^\wedge \\ &= -(-f)^\wedge = -[-(\hat{f})] = \hat{f},\end{aligned}$$

e de um modo análogo se prova que $(\min\{f_1, g_1\})^\wedge = (\min\{f, g\})^\wedge$.

Portanto, para concluirmos a prova deste lema, basta provarmos (i) e (iii).

Sejam $h_1, h_2 \in M_A$ tais que $f_1 = f + h_1$ e $g_1 = g + h_2$. Tome-mos ainda

$$D = \{x \in X: f_1(x) \geq f(x)\} \quad \text{e} \quad E = \{x \in X: f_1(x) \leq g_1(x)\}.$$

Então

$$\max\{f_1, f\} = f_1 \xi_D + f \xi_{D^c} = f \xi_D + h_1 \xi_D + f \xi_{D^c} = f + h_1 \xi_D,$$

e assim $(\max\{f_1, f\})^\wedge = \hat{f}$, o que prova (i).

Como

$$\begin{aligned}\max\{f_1, g_1\} &= g_1 \xi_E + f_1 \xi_{E^c} = g \xi_E + f \xi_{E^c} + (h_2 \xi_E + h_1 \xi_{E^c}) \\ &\leq (\max\{f, g\}) \xi_E + (\max\{f, g\}) \xi_{E^c} + (h_2 \xi_E + h_1 \xi_{E^c}) \\ &= \max\{f, g\} + (h_2 \xi_E + h_1 \xi_{E^c}),\end{aligned}$$

temos que

$$(\max\{f_1, g_1\})^\wedge \leq (\max\{f, g\})^\wedge.$$

Tendo em vista que $f \in (f_1)^\wedge$ e $g \in (g_1)^\wedge$ obtemos de modo análogo

que

$$(\max\{f, g\})^{\wedge} \leq (\max\{f_1, g_1\})^{\wedge}.$$

Portanto $(\max\{f_1, g_1\})^{\wedge} = (\max\{f, g\})^{\wedge}$, o que prova (iii). //

(3.14) Teorema. O espaço $(N_A, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado.

Se $\hat{f}, \hat{g} \in N_A$, então

$$(i) \quad \hat{f} \vee \hat{g} = (\max\{f, g\})^{\wedge};$$

$$(ii) \quad \hat{f} \wedge \hat{g} = (\min\{f, g\})^{\wedge}.$$

Demonstração. Como as afirmações (ii) e (iii) de (3.12) são imediatas provaremos que N_A é um reticulado. Antes porém observemos que, se $f, g \in L_A$, então $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ pertencem a L_A (1.16.ii). É fácil verificar que, se existe o supremo de quaisquer dois elementos de N_A , então $-\hat{f} \vee -\hat{g}$ é o ínfimo de $\hat{f}$ e $\hat{g}$, e por conseguinte temos que

$$\hat{f} \wedge \hat{g} = -[\hat{f} \vee \hat{g}] = -(\max\{-f, -g\})^{\wedge} = (\min\{f, g\})^{\wedge},$$

o que prova (ii). Portanto para concluirmos que o teorema é verdadeiro, basta verificarmos (i).

Sejam $\hat{f}, \hat{g} \in N_A$ e $\hat{z} = (\max\{f, g\})^{\wedge}$. É imediato que $\hat{f} \leq \hat{z}$ e $\hat{g} \leq \hat{z}$. Suponhamos que exista $\hat{u} \in N_A$ com $\hat{f} \leq \hat{u}$ e $\hat{g} \leq \hat{u}$. Então, por (3.6), existem $u_1, u_2 \in \hat{u}$, $f_1 \in \hat{f}$ e $g_2 \in \hat{g}$ tais que $f_1 \leq u_1$ e $g_2 \leq u_2$, e assim por (3.13.i) e (3.13.iii), temos que

$$\hat{z} = (\max\{f, g\})^{\wedge} = (\max\{f_1, g_2\})^{\wedge} \leq (\max\{u_1, u_2\})^{\wedge} = \hat{u}.$$

Portanto $\hat{f}\hat{v}\hat{g} = \hat{z}$.//.

(3.15) Definição. Seja E um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial com uma norma $\|\cdot\|$ e uma relação de ordem parcial $\leq$. Dizemos que $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um reticulado de Banach se, e somente se,

- (i) $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach;
- (ii) $(E, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado;
- (iii) se $x, y \in E$ e $|x| \leq |y|$, então $\|x\| \leq \|y\|$.

Provaremos em (3.17) que $(N_A, d(\cdot), \leq)$ é um reticulado de Banach. Para isto utilizaremos o seguinte resultado.

(3.16) Lema. Se $\hat{f} \in N_A$, então $|\hat{f}| = |\hat{f}|^{\wedge}$.

Demonstração. Usando (3.14.i) obtemos

$$\begin{aligned} |\hat{f}| &= (\hat{f}\hat{v}\hat{o}) + ((-\hat{f})\hat{v}\hat{o}) = (\hat{f}\hat{v}\hat{o}) + ((-f)^{\wedge}\hat{v}\hat{o}) \\ &= (\max\{f, 0\})^{\wedge} + (\max\{-f, 0\})^{\wedge} = (\max\{f, 0\} + \max\{-f, 0\})^{\wedge} \\ &= (|f|)^{\wedge} .// \end{aligned}$$

(3.17) Teorema. O espaço $(N_A, d(\cdot), \leq)$ é um reticulado de Banach.

Demonstração. Sabemos que $(N_A, d(\cdot))$ é um espaço de Banach (3.4.iii), e que $(N_A, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado (3.14). Como a afirmação (iii) de (3.15) segue de (3.16) e (3.10), concluímos que $(N_A, d(\cdot), \leq)$ é um reticulado de Banach.//

A seguir enunciaremos uma importante propriedade do espaço N_A , que será demonstrada no §7.

(3.18) Teorema. Se $\hat{o} \leq \hat{f}, \hat{g} \in N_A$, então

$$(i) \quad d(\hat{f} \vee \hat{g}) = \max\{d(\hat{f}), d(\hat{g})\}.$$

Demonstração. Ver mais adiante em (7.5.ii). //

(3.19) Proposição. Sendo $\tilde{L}_A = \{f \in L_A : \int_X A(|f|) d\mu < \infty\}$ e ϕ a aplicação canônica de L_A sobre N_A (isto é, $\phi(f) = \hat{f}$). Então

- (i) ϕ é contínua em L_A ;
- (ii) $\phi(\{f \in L_A : \|f\|_A < 1\}) = \{\hat{f} \in N_A : d(\hat{f}) < 1\}$;
- (iii) $\{\hat{f} \in N_A : d(\hat{f}) < 1\} = \phi(\{f \in L_A : \|f\|_A < 1\}) = \phi(\tilde{L}_A)$;
- (iv) $\phi(\tilde{L}_A) = \{\hat{f} \in N_A : d(\hat{f}) \leq 1\}$;
- (v) se $\hat{f}, \hat{g} \in \phi(\tilde{L}_A)$, então $\hat{f} \vee \hat{g}$ e $\hat{f} \wedge \hat{g}$ pertencem a $\phi(\tilde{L}_A)$.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) seguem de (3.4.i).

Para obtermos (iii) seja $\hat{f} \in N_A$ com $d(\hat{f}) < 1$. Então existe $h \in M_A$ talque $\|f+h\|_A < 1$. Como $\phi(f+h) = \hat{f}$ e por (1.17.ii), $f+h \in \tilde{L}_A$ temos que (iii) é verdadeiro.

Para a prova de (iv) tomemos $\hat{f} \in \phi(\tilde{L}_A)$. Então $A(|f|) \in L_1$, pois $f \in \tilde{L}_A$. Por (1.24), existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de L_A tal que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_A \leq 1$. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_{n_0}\|_A \leq 1$ e assim $d(\hat{f}) \leq 1$.

O item (v) é obtido usando (3.14.i), (3.14.ii) e observando que, se $f, g \in \tilde{L}_A$, então $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ pertencem a $\tilde{L}_A$. //

CAPÍTULO II

M. M. Rao em [R-2-pag 562] apresenta um espaço que chamaremos de $G_A(X, \Sigma, \mu)$, cujos elementos são medidas definidas em Σ e com valores em $\mathbb{R}$. Neste espaço Rao define duas funções (relações [3.1] e [3.2]) que ele afirma serem normas. A primeira depende somente do valor de $G \in G_A(X, \Sigma, \mu)$ sobre o conjunto $\Sigma_1 = \{E \in \Sigma: \mu(E) < \infty\}$, e a segunda é dada por

$$|||G|||_A = \sup\left\{\left|\int_X f dG\right|: f \in L_{\bar{A}} \text{ e } ||f||_{\bar{A}} \leq 1\right\}, \quad (1)$$

onde a integral é como em [DS].

Surge então a primeira pergunta: será que toda $f \in L_{\bar{A}}$ é G -integrável? Suponhamos que sim. Analisando a relação (1) acima, concluímos que se $\bar{a} = 0$ e $|||G|||_A = 0$, então a restrição de G a Σ_1 é nula, visto que nestas condições sabemos que $\xi_E \in L_{\bar{A}}$ se, e somente se, $E \in \Sigma_1$ (1.19). Naturalmente vem a segunda pergunta: se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu)$ e a restrição de G a Σ_1 é nula, então $G=0$?

Mais adiante [pag 566] para todo $x^* \in (M_{\bar{A}})^*$, Rao define a medida $G(E) = x^*(\xi_E)$ se $\xi_E \in L_{\bar{A}}$, e prova que

$$x^*(f) = \int_X f dG, \text{ para toda } f \in M_{\bar{A}}. \quad (2)$$

Para a G definida acima, nos perguntamos que sentido tem $\int_X f dG$ no caso em que $\mu(X) = \infty$ e $\bar{a} = 0$, visto que neste caso $\varepsilon \notin L_{\bar{A}}$ (1.19.iii) e assim G não está definida em X ?

Poderia ser que Rao estivesse chamando de G uma extensão da "medida" G , que é nula se sua restrição a Σ_1 for nula. Mas será que tal extensão sempre existe? Sabemos dar uma resposta afirmativa se $\sup\{|G(E)|: E \in \Sigma_1\} < \infty$, e portanto se $\bar{a} > 0$ (1.19.ii). Se $\bar{a} = 0$ nada sabemos.

Após um estudo da demonstração feita por M.M. Rao da relação (2) acima, vimos que eram necessários somente os valores de G sobre Σ_1 no caso em que $\bar{a} = 0$. Isto nos levou a pensar na definição de uma integral relativa a uma "medida" G definida somente sobre Σ_1 .

Lendo cuidadosamente os parágrafos referentes a teoria de medida e integração de [DS] (mais precisamente os §1, §2 e §3 do Capítulo III), percebemos que poderíamos substituir em algumas definições a álgebra A pelo anel Σ_1 , obtendo ainda os mesmos resultados. Melhor ainda, A poderia ser trocado por um subconjunto H , não vazio de A , que fosse um anel de subconjuntos de X , e tal que se $E \in A$ e $F \in H$, então $E \cap F \in H$. Sendo assim no §4 definimos "medida" G em H , e o símbolo $\int_E f dG$ para $E \in A$, que mantém as boas propriedades da integral e coincide com o apresentado em [III.2.17] de [DS] quando $H = A$.

Em (4.41) observamos que, se existe uma medida $\tilde{G}$ em A , que é extensão de G , então toda função G -integrável é $\tilde{G}$ -integrável e as integrais em relação a G e a $\tilde{G}$ são iguais.

No §5, ao invés de definirmos $G_A(X, \Sigma, \mu)$ como faz M.M. Rao, definimos o espaço $G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ onde os elementos são "medidas" defini

das em ideais H de Σ (4.2), com algumas das propriedades impostas por Rao para os elementos de $G_A(X, \Sigma, \mu)$.

A partir do §6 os ideais de Σ que nos interessarão são $H = \Sigma$ e $H = \Sigma_1$.

§4. Medidas definidas em ideais; integração

Sejam X um conjunto e A uma álgebra de subconjuntos de X .

Os resultados deste parágrafo, inclusive suas demonstrações, são análogos ao do Capítulo III, parágrafos 1, 2 e 3, de [DS]. Contudo incluímos as provas, exceto a de (4.5), para facilitar a leitura.

Chamamos a atenção para as definições e o resultado (4.37) que serão essenciais para o restante deste trabalho.

(4.1) Definição. Seja A uma álgebra de subconjuntos de X . Dizemos que um subconjunto H de A , não vazio, é um ideal de A se, e somente se,

- (i) H é um anel de subconjuntos de X ;
- (ii) se $E \in A$ e $F \in H$, então $E \cap F \in H$.

O nome ideal é justificado pelo fato de que A com a diferença simétrica como operação de adição, e a intersecção como operação de multiplicação é um anel comutativo, e H é um ideal de A .

Como $H \neq \emptyset$ e (i) é verdadeira podemos concluir que $\emptyset \in H$.

(4.2) Definição. Sejam A uma álgebra de subconjuntos de X e H um ideal de A . Dizemos que uma função G definida em H e com valores em $[-\infty, \infty]$, é uma medida em H se, e somente se,

- (i) $G(\emptyset) = 0$;
- (ii) se $F_1, F_2 \in H$ e $F_1 \cap F_2 = \emptyset$,
então $G(F_1 \cup F_2) = G(F_1) + G(F_2)$.

Se G é uma medida em H , então G assume valores em $[-\infty, \infty[$ ou em $] -\infty, \infty]$. De fato, se existirem $E, F \in H$ com $G(E) = \infty$ e $G(F) = -\infty$, temos por (ii), que $|G(E \cap F^c)| = |G(F \cap E^c)| = \infty$ e $|G(E \cap F)| < \infty$. Portanto $G(E \cup F) = \infty - \infty$, o que é um absurdo.

(4.3) Notação. Seja $E \subset X$. Denotaremos por $\mathcal{D}(H, E)$ o conjunto das seqüências finitas $(F_1, F_2, \dots, F_n)$, de elementos dois a dois disjuntos de H , tais que $\bigcup_{i=1}^n F_i \subset E$.

(4.4) Definição. Se G é uma medida em H , então a função $v(G, \cdot)$ definida em H e com valores em $[0, \infty]$, dada por

$$v(G, F) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |G(F_i)| : (F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{D}(H, F) \right\},$$

é chamada de variação total de G . Se

$$\sup \{v(G, F) : F \in H\} < \infty,$$

dizemos que G é de variação limitada.

(4.5) Proposição. Se G é uma medida em H , então

- (i) $v(G, \cdot)$ é uma medida em H ;
- (ii) para todo $F \in H$ tem-se
$$v(G, F) \leq 2 \inf\{k \in [0, \infty[: |G(E)| \leq k \text{ para todo } E \in H\};$$
- (iii) se G é não-negativa, então $v(G, \cdot) = G$;
- (iv) $v(v(G, \cdot), \cdot) = v(G, \cdot)$.

Demonstração. Os dois primeiros itens tem provas análogas às de [III.1.6] e [III.1.5] de [DS], substituindo a álgebra Σ pelo ideal H . A asserção (iii) é de fácil verificação, e (iv) é consequência de (i) e (iii). //

(4.6) Proposição. Se G é uma medida em H tal que $v(G, \cdot)$ é uma medida finita em H , então existem medidas finitas G_1 e G_2 em H tais que

- (i) G_1 e G_2 são funções não-negativas;
- (ii) $G = G_1 - G_2$;
- (iii) $v(G, \cdot) = G_1 + G_2$.

Demonstração. Basta definir G_1 e G_2 em H por

$$G_1(F) = (G(F) + v(G, F))/2 ,$$

$$G_2(F) = (v(G, F) - G(F))/2 ;$$

observar que $v(G, \cdot)$ é uma medida (4.5.i) e que $|G(F)| \leq v(G, F)$ para todo $F \in H$. //

Até o final deste parágrafo G será uma medida em H . A seguir definiremos uma extensão de $v(G, \cdot)$ ao conjunto das partes de X .

(4.7) Definição. A igualdade

$$v^*(G, E) = \inf\{v(G, F) : E \subset F \text{ e } F \in H\},$$

define uma função $v^*(G, \cdot)$ no conjunto das partes de X . Estamos convencendo que $\inf \emptyset = \infty$.

(4.8) Proposição. A função $v^*(G, \cdot)$ é uma medida exterior, isto é,

(i) $v^*(G, \emptyset) = 0$;

(ii) se $E_1, E_2 \subset X$ e $E_1 \subset E_2$, então $v^*(G, E_1) \leq v^*(G, E_2)$;

(iii) se $E_1, E_2 \subset X$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, então
 $v^*(G, E_1 \cup E_2) \leq v^*(G, E_1) + v^*(G, E_2)$.

Demonstração. Basta observar que $v(G, \cdot)$ é uma medida em H (4.5.i) e usar a definição de $v^*(G, \cdot)$. //

(4.9) Definição. Dizemos que uma seqüência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge em G -medida para uma função f se, e somente se, para todo $\delta \in]0, \infty[$ tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^*(G, \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0.$$

(4.10) Observação. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções que converge em G -medida para uma função f , então dados $\epsilon, \delta \in]0, \infty[$ existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$, existe $F_n \in H$ satisfazendo

$$v(G, F_n) < \epsilon \quad \text{e} \quad \|f_n - f\|_{\xi_{F_n}^c} \leq \delta.$$

(4.11) Proposição. Se uma seqüência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para uma função f , então a seqüência $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para $|f|$.

Demonstração. Observemos que para todo $\delta \in]0, \infty[$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$B_n = \{x \in X : ||f_n(x)| - |f(x)|| > \delta\} \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}.$$

Portanto por (4.8.ii) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^*(G, B_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v^*(G, \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0. //$$

(4.12) Definição. Dizemos que uma função f é H -simples se, e somente se, existem $(F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{D}(H, X)$ e $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$

tais que $f = \sum_{i=1}^n c_i \xi_{F_i}$.

(4.13) Definição. Dizemos que uma função f é G -mensurável se, e somente se, existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções H -simples que converge em G -medida para f .

(4.14) Definição. Dizemos que uma propriedade P vale G -quase sempre em X (escrevemos $\langle G\text{-q.s.} \rangle$) se o conjunto E dos pontos de X para os quais P não está definida ou P não é verdadeira é tal que $v^*(G, E) = 0$.

(4.15) Observações. (i) Se P vale μ -q.s. em X , então P também vale $\langle \mu\text{-q.s.} \rangle$ em X . A recíproca é verdadeira se, e somente se, o espaço de medida (X, Σ, μ) for completo.

(ii) Se f é uma função tal que $f=0 \langle G\text{-q.s.} \rangle$, então $v^*(G, \{x \in X: |f(x)| > \delta\}) = 0$ para $\delta \in]0, \infty[$.

(iii) Se $A=\Sigma$, G é finita e σ -aditiva, e f é uma função tal que $v^*(G, \{x \in X: |f(x)| > \delta\}) = 0$ para todo $\delta \in]0, \infty[$, então $f = 0 \langle G\text{-q.s.} \rangle$. De fato, basta notar, por [III.4.7] de [DS], que se G é σ -aditiva em A , então $v(G, \cdot)$ também é σ -aditiva em A .

(iv) A recíproca de (ii), pode ser falsa. Por exemplo, sejam $X = \mathbb{N}$, A o conjunto das partes de $\mathbb{N}$, H_1 o ideal de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que são finitos, $H_2 = A$ e f a função definida em $\mathbb{N}$ por $f(n) = 1/n$. Se G_1 e G_2 são medidas definidas, respectivamente, em H_1 e H_2 por

$$G_1(E) = 0 \text{ se } E \in H_1, \text{ e } G_2(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \in H_1 \\ \infty & \text{se } E \notin H_1 \end{cases},$$

então é fácil verificar que $H_1 \neq A$, que G_2 não é σ -aditiva em A , que f não é nula $\langle G_1\text{-q.s.} \rangle$ e que $v^*(G_i, \{n \in \mathbb{N}: |f(n)| > \delta\}) = 0$ para todo $\delta \in]0, \infty[$, sendo $i \in \{1, 2\}$.

(4.16) Proposição. Sejam f, g e f_n funções, com $n \in \mathbb{N}$. São equivalentes:

- (i) $\nu^*(G, \{x \in X: |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$ para todo $\delta \in]0, \infty[$;
- (ii) se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para f , então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para g .

Demonstração. Basta observarmos que, para $\delta \in]0, \infty[$ valem as seguintes relações:

$$\{x \in X: |f(x) - g(x)| > \delta\} \subseteq \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| > \frac{\delta}{2}\}$$

e

$$\{x \in X: |f_n(x) - g(x)| > \delta\} \subseteq \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{x \in X: |f(x) - g(x)| > \frac{\delta}{2}\}.$$

(4.17) Proposição. Sejam f e g funções. São verdadeiras as seguintes asserções:

- (i) se f é H -simples, então f é G-mensurável;
- (ii) se $f = g$ <G-q.s.> e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções que converge em G-medida para f , então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para g ;
- (iii) se $f = g$ <G-q.s.> e f é G-mensurável, então g é G-mensurável.

Demonstração. O item (i) é imediato e (iii) segue de (4.13) e (ii). Para obtermos (ii) basta aplicarmos (4.16), lembrando (4.15.ii). //

(4.18) Definição. Seja f uma função H -simples. Dizemos que f é G -integrável se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$ com $c \neq 0$ tem-se $v(G, f^{-1}(\{c\})) < \infty$.

Observemos que, se f é H -simples, $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, então $f^{-1}(\{c\}) \in H$.

(4.19) Observação. Se f é uma função H -simples e G -integrável, então existe $F \in H$ tal que $v(G, F) < \infty$ e $f \xi_{F^c} = 0$.

Queremos definir a integral de funções H -simples e G -integráveis. A proposição (4.20) nos permitirá definir essa integral através de qualquer representação da função H -simples (4.12).

(4.20) Proposição. Se f é uma função H -simples e G -integrável, e se existem $(F_1, F_2, \dots, F_n)$, $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_\ell) \in \mathcal{D}(H, X)$ e $(c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_\ell) \in \mathbb{R}^{n+\ell}$, tais que

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \xi_{F_i} = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \xi_{\tilde{F}_j},$$

então, para $E \in \Sigma$ tem-se

$$(i) \quad \sum_{i=1}^n c_i G(E \cap F_i) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j G(E \cap \tilde{F}_j).$$

Demonstração. Sejam $I = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$, $J = \{1, 2, \dots, \ell, \ell+1\}$, $c_{n+1} = d_{\ell+1} = 0$, $F_{n+1} = (\bigcup_{i=1}^n F_i)^c$ e $\tilde{F}_{\ell+1} = (\bigcup_{j=1}^{\ell} \tilde{F}_j)^c$. Então, para

$E \in \Sigma$, temos que

$$\sum_{i=1}^n c_i G(E \cap F_i) - \sum_{j=1}^l d_j G(E \cap \tilde{F}_j) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (c_i - d_j) G(E \cap F_i \cap \tilde{F}_j).$$

Se existem $i_0 \in I$ e $j_0 \in J$ tais que $c_{i_0} \neq d_{j_0}$, temos que $F_{i_0} \cap \tilde{F}_{j_0} = \emptyset$ e assim $G(E \cap F_{i_0} \cap \tilde{F}_{j_0}) = 0$. Portanto

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (c_i - d_j) G(E \cap F_i \cap \tilde{F}_j) = 0,$$

o que prova (i), //

(4.21) Definição. Seja f uma função H -simples e G -integrável. Se $f = \sum_{i=1}^n c_i \xi_{F_i}$, onde $(F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{D}(H, X)$ e $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$,

definimos a integral de f (relativa a G) sobre $E \in A$ por

$$\int_E f dG = \sum_{i=1}^n c_i G(E \cap F_i).$$

(4.22) Observação. Se g é a função nula, então g é H -simples, G -integrável e a integral sobre $E \in A$ é zero. Basta notar que $\emptyset \in H$ e $g = 0 \xi_{\emptyset}$.

(4.23) Proposição. Se f é uma função H -simples e G -integrável, então

(i) f e $|f|$ são $v(G, \cdot)$ -integráveis;

(ii) se $E \in A$, então f_{ξ_E} é G -integrável e

$$\int_E f dG = \int_X f_{\xi_E} dG;$$

(iii) $\int_X |f| dv(G, \cdot) \geq 0$;

(iv) $|\int_X f dG| \leq \int_X |f| dv(G, \cdot);$

v) se g é uma função H -simples e G -integrável, então para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a função $\alpha f + \beta g$ é H -simples, G -integrável e

$$\int_X (\alpha f + \beta g) dG = \alpha \int_X f dG + \beta \int_X g dG;$$

vi) se $E_1, E_2 \in A$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, então

$$\int_{E_1 \cup E_2} f dG = \int_{E_1} f dG + \int_{E_2} f dG;$$

vii) se $E \in A$, então $\int_E |f| dv(G, \cdot) \leq \int_X |f| dv(G, \cdot);$

viii) dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que se $F \in H$ e $v(G, F) < \delta$, então $\int_F |f| dv(G, \cdot) < \epsilon$.

Ainda vale que, se $\lambda(E) = \int_E f dG$ para $E \in A$, então

(ix) λ é uma medida finita em A ;

(x) $v(\lambda, E) = \int_E |f| dv(G, \cdot).$

Demonstração. Os seis primeiros itens seguem de (4.5.iv), (4.18) e (4.21). A asserção (vii) segue de (i), (vi), (ii) e (iii). Para obtermos (viii), dado $\epsilon \in]0, \infty[$, basta tomarmos $\delta = \epsilon/(M+1)$, onde $M = \max\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$. A asserção (ix) é consequência de (vi).

Provaremos (x) a seguir.

Seja $E \in \mathcal{A}$. Por (ii) e (iv), é imediato que $v(\lambda, E) \leq \int_E |f| dv(G, \cdot)$. Basta portanto provarmos a desigualdade contrária.

Como f é H -simples e G -integrável, existem $(F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{D}(H, X)$ e $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{F_i}$, e $v(G, F_i) < \infty$ se $c_i \neq 0$.

Suponhamos sem perda de generalidade que $c_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e tomemos $E \in \mathcal{A}$ e $M = \sum_{i=1}^n |c_i|$. Fixado $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sabemos que $v(G, E \cap F_i) \leq v(G, F_i) < \infty$, e assim dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $(H_i^1, H_i^2, \dots, H_i^{n_i}) \in \mathcal{D}(H, E \cap F_i)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n_i} |G(H_i^j)| > v(G, E \cap F_i) - \frac{\epsilon}{M}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} v(\lambda, E) &\geq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n_i} |\lambda(H_i^j)| \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n_i} |c_i| |G(H_i^j)| \right) \\ &> \sum_{i=1}^n |c_i| (v(G, E \cap F_i) - \frac{\epsilon}{M}) \\ &= \int_E |f| dv(G, \cdot) - \frac{\epsilon}{M} \sum_{i=1}^n |c_i| = \int_E |f| dv(G, \cdot) - \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário temos que

$$v(\lambda, E) \geq \int_E |f| dv(G, \cdot), \text{ o que prova (x). //}$$

Nosso objetivo é definir a integral (relativa a G) de funções G -mensuráveis. Antes alguns resultados auxiliares.

(4.24) Proposição. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções H -simples e G -integráveis tal que

$$(i) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) = 0.$$

Então

(ii) para todo $E \in A$ existem e são finitos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n| dv(G, \cdot);$$

(iii) os limites em (ii) são uniformes em relação a $E \in A$, isto é, dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $E \in A$ e $n \geq n_0$ tem-se

$$\left| \int_E f_n dG - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E f_m dG \right| < \epsilon,$$

e

$$\left| \int_E |f_n| dv(G, \cdot) - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E |f_m| dv(G, \cdot) \right| < \epsilon;$$

(iv) dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que se $F \in H$ e $v(G, F) < \delta$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_F |f_n| dv(G, \cdot) < \epsilon.$$

Demonstração. Seja $E \in A$ e notemos que, por (4.23.ii), (4.23.v), (4.23.iv) e (4.23.vii), valem as relações

$$\left| \int_E f_n dG - \int_E f_m dG \right| \leq \int_E |f_n - f_m| dv(G, \cdot) \leq \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot), (1)$$

e.

$$\left| \int_E |f_n| dv(G, \cdot) - \int_E |f_m| dv(G, \cdot) \right| \leq \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot). (2)$$

Destas relações e (i) decorre facilmente (ii).

Para provar (iii), seja $E \in \mathcal{A}$. Dado $\epsilon \in]0, \infty[$, por (i) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) < \epsilon,$$

para $m, n \geq n_0$ e portanto, por (1) e (2) também obtemos para $m, n \geq n_0$, que

$$\left| \int_E f_n dG - \int_E f_m dG \right| < \epsilon \text{ e } \left| \int_E |f_n| dv(G, \cdot) - \int_E |f_m| dv(G, \cdot) \right| < \epsilon.$$

Fazendo m tender a infinito obtemos (iii).

Provaremos (iv) a seguir.

Dado $\epsilon/2 \in]0, \infty[$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ como em (iii). Por (4.23.viii) existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que

$$\text{se } F \in \mathcal{H} \text{ e } v(G, F) < \delta, \text{ então } \int_F |f_{n_0}| dv(G, \cdot) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F |f_n| dv(G, \cdot) &\leq \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F |f_n| dv(G, \cdot) - \int_F |f_{n_0}| dv(G, \cdot) \right| + \int_F |f_{n_0}| dv(G, \cdot) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova (iv). //

(4.25) Proposição. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções H -simples e G -integráveis, que converge em G -medida para zero, e tal que

$$(i) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) = 0,$$

então

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| dv(G, \cdot) = 0.$$

Demonstração. Seja Q a função definida em A por $Q(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n| dv(G, \cdot)$.

Dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta \in]0, \infty[$, respectivamente, como em (4.24.iii) e (4.24.iv).

Como $|f_{n_0}|$ é H -simples e G -integrável, existe $B \in H$ tal que $v(G, B) < \infty$ e $f_{n_0} \chi_{B^c} = 0$ (4.19). Além disso, como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para zero, por (4.10) existem $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$ e $F \in H$ tais que

$$v(G, F) < \delta \quad \text{e} \quad |f_{n_1} \chi_{F^c}| < \varepsilon / (v(G, B) + 1). \quad (1)$$

Por (4.24.iv), (4.24.iii), (1) e o fato que $f_{n_0} \chi_{B^c} = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
 Q(X) &= Q(F) + Q(F^C \cap B) + Q(F^C \cap B^C) \\
 &\leq \varepsilon + |Q(F^C \cap B) - \int_{F^C \cap B} |f_{n_1}| dv(G, \cdot)| + \int_{F^C \cap B} |f_{n_1}| dv(G, \cdot) + \\
 &\quad + |Q(F^C \cap B^C) - \int_{F^C \cap B^C} |f_{n_0}| dv(G, \cdot)| \\
 &\leq \varepsilon + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{v(G, B) + 1} v(G, B) + \varepsilon \leq 4\varepsilon,
 \end{aligned}$$

provando assim (ii). //

(4.26) Corolário. Se $(f_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências de funções H -simples e G -integráveis, que convergem em G -medida para a mesma função f e, se ainda para $j \in \{1, 2\}$ tem-se

$$(i) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_X |f_n^j - f_m^j| dv(G, \cdot) = 0,$$

então

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n^1 dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n^2 dG.$$

Demonstração. É fácil verificar que $(f_n^1 - f_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para zero e satisfaz (4.25.i). Portanto por (4.23.iv) e (4.25), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_X f_n^1 dG - \int_X f_n^2 dG \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n^1 - f_n^2| dv(G, \cdot) = 0,$$

o que prova (ii), lembrando (4.24.ii). //

Agora já estamos em condições de definir a integral (relativa a G) de funções G -mensuráveis.

(4.27) Definição. Uma função f é G -integrável se, e somente se, existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções H -simples e G -integráveis, tal que

(i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f ;

(ii) $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) = 0$.

Se f é G -integrável, definimos a integral de f (relativa a G) sobre $E \in \mathcal{A}$ por

$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

(4.28) Observações: (i) Se $f \in \sigma(X, \Sigma, \mu) \cap L_1(X, \Sigma, \mu)$, então f é Σ -simples, μ -integrável e a integral dada em (4.21) coincide com a habitual.

(ii) Se $f \in L_1(X, \Sigma, \mu)$, então f é μ -integrável e a integral dada acima coincide com a habitual. Basta lembrar (i) e aplicar (1.24) tomando $A(u)=u$ para $u \in]0, \infty[$.

(iii) Se f não é G -mensurável, então (4.27.i) é falsa e por conseguinte f não é G -integrável.

(iv) Se $H = A$, então (4.27) coincide com a definição de integral dada por Dunford and Schwartz em [DS].

(4.29) Proposição. Sejam f e g funções, sendo f G -integrável. São verdadeiras as seguintes asserções:

(i) se $E \in A$, então $f|_E$ é G -integrável e

$$\int_E f dG = \int_X f|_E dG ;$$

(ii) se $f=g$ $\langle G$ -q.s. $\rangle$, então g é G -integrável e

$$\int_X f dG = \int_X g dG ;$$

(iii) se g é G -integrável e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f + \beta g$ é G -integrável e

$$\int_X (\alpha f + \beta g) dG = \alpha \int_X f dG + \beta \int_X g dG ;$$

(iv) se $E_1, E_2 \in A$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, então

$$\int_{E_1 \cup E_2} f dG = \int_{E_1} f dG + \int_{E_2} f dG .$$

Demonstração. Lembrando (4.27) temos que, (ii) segue de (4.17.ii), e os demais itens de (4.23). //

(4.30) Proposição. Se f é uma função G -integrável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções H -simples e G -integráveis satisfazendo (4.27.i) e (4.27.ii), então

(i) $|f|$ é G -integrável;

(ii) f e $|f|$ são $v(G, \cdot)$ -integráveis;

$$(iii) \quad \int_X |f| dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| dG ;$$

$$(iv) \quad \int_X f dv(G, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dv(G, \cdot) ;$$

$$(v) \quad \int_X |f| dv(G, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| dv(G, \cdot) ;$$

$$(vi) \quad \int_X |f| dv(G, \cdot) \geq 0 ;$$

$$(vii) \quad \left| \int_X f dG \right| \leq \int_X |f| dv(G, \cdot) ;$$

$$(viii) \quad \int_E |f| dv(G, \cdot) \leq \int_X |f| dv(G, \cdot), \text{ para todo } E \in A ;$$

$$(ix) \quad \text{se } g \text{ é uma função } G\text{-integrável e } |f| \leq |g| < G\text{-q.s.},$$

então

$$\int_X |f| dv(G, \cdot) \leq \int_X |g| dv(G, \cdot) ;$$

$$(x) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| dv(G, \cdot) = 0.$$

Demonstração. Os cinco primeiros itens são obtidos por (4.11) e (4.27), lembrando que $v(v(G, \cdot), \cdot) = v(G, \cdot)$. As afirmações (vi), (vii) e (viii) seguem de (4.27), de (v) e, respectivamente, de (4.23.iii), (4.23.iv) e (4.23.vii). A asserção (ix) segue de (ii), (vi) e (4.29.iii). Para (x) observemos que, fixado $m \in \mathbb{N}$ a sequência $(|f_n - f_m|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $v(G, \cdot)$ -medida para $|f - f_m|$ e

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \int_X ||f_n - f_m| - |f_k - f_m|| dv(G, \cdot) = 0.$$

Por (4.27) temos que

$$\int_X |f - f_m| dv(G, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot),$$

e como vale (4.27.ii), obtemos (x). //

(4.31) Proposição. Se f é uma função G -integrável e $\lambda(E) = \int_E f dG$, para $E \in A$, então

- (i) λ é uma medida finita em A ;
- (ii) $v(\lambda, E) = \int_E |f| dv(G, \cdot)$, para $E \in A$;
- (iii) dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que, se $F \in H$ e $v(G, F) < \delta$, então $v(\lambda, F) = \int_F |f| dv(G, \cdot) < \varepsilon$;
- (iv) dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $F_\varepsilon \in H$ com $v(G, F_\varepsilon) < \infty$ e tal que $v(\lambda, F_\varepsilon^c) = \int_{F_\varepsilon^c} |f| dv(G, \cdot) < \varepsilon$;
- (v) $\int_X |f| dv(G, \cdot) = 0$ se, e somente se, para todo $\delta \in]0, \infty[$ tem-se $v^*(G, \{x \in X : |f(x)| > \delta\}) = 0$.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções H -simples e G -integráveis, satisfazendo (4.27.i) e (4.27.ii).

O item (i) segue de (4.29.iv). Para (ii) tomemos $E \in A$ e observemos que $v(\lambda, E) \leq \int_E |f| dv(G, \cdot)$ ((4.29.i) e (4.30.vii)).

Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja λ_n medida finita em A dada por $\lambda_n(E) = \int_E f_n dG$. Então, por (4.29.i), (4.30.v) e (4.23.x), temos que

$$\int_E |f| dv(G, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n| dv(G, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\lambda_n, E).$$

Portanto para obtermos (ii), basta provarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} v(\lambda_n, E) = v(\lambda, E)$.

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Como $v(\lambda, E) < \infty$ e $v(\lambda_n, E) < \infty$, dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existem $(F_1, F_2, \dots, F_p)$, $(E_1, E_2, \dots, E_q) \in \mathcal{D}(H, E)$ tais que

$$v(\lambda, E) - \sum_{i=1}^p |\lambda(F_i)| < \varepsilon \text{ e } v(\lambda_n, E) - \sum_{i=1}^q |\lambda_n(E_i)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Como a seqüência finita $(F_1, F_2, \dots, F_p, E_1, E_2, \dots, E_q)$ pode não ser de elementos dois a dois disjuntos, tomemos

$(H_1, H_2, \dots, H_k) \in \mathcal{D}(H, E)$ tal que

$$\{H_1, H_2, \dots, H_k\} = \{F_i \cap E_j, F_i \cap (\bigcup_{j=1}^q E_j)^c, E_j \cap (\bigcup_{i=1}^p F_i)^c : i \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ e } j \in \{1, 2, \dots, q\}\}$$

Então por (1), vale que

$$|v(\lambda, E) - \sum_{i=1}^k |\lambda(H_i)|| < \varepsilon \text{ e } |v(\lambda_n, E) - \sum_{i=1}^k |\lambda_n(H_i)|| < \varepsilon. \quad (2)$$

Portanto por (2), (4.30.vii) e (4.30.viii), temos que

$$\begin{aligned} |v(\lambda, E) - v(\lambda_n, E)| &< 2\varepsilon + \left| \sum_{i=1}^k (|\lambda(H_i)| - |\lambda_n(H_i)|) \right| \\ &\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^k \int_{H_i} |f - f_n| dv(G, \cdot) \\ &\leq 2\varepsilon + \int_X |f - f_n| dv(G, \cdot). \end{aligned}$$

Como $\varepsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário e vale (4.30.x), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v(\lambda, E) - v(\lambda_n, E)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| dv(G, \cdot) = 0,$$

o que prova (ii), como foi observado inicialmente.

O item (iii) segue de (4.30.v) e (4.24.iv). Para provarmos (iv), seja $\varepsilon \in]0, \infty[$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ como em (4.24.iii). Então se $B = \{x \in X: f_{n_0}(x) \neq 0\}$, temos que $B \in \mathcal{H}$ e $v(G, B) < \infty$, pois f_{n_0} é G -integrável, e ainda, por (4.30.v) obtemos que

$$\left| \int_{B^c} |f_{n_0}| dv(G, \cdot) - \int_{B^c} |f| dv(G, \cdot) \right| < \varepsilon.$$

Portanto

$$\int_{B^c} |f| dv(G, \cdot) \leq \left| \int_{B^c} |f_{n_0}| dv(G, \cdot) - \int_{B^c} |f| dv(G, \cdot) \right| + \int_{B^c} |f_{n_0}| dv(G, \cdot) < \varepsilon,$$

o que prova (iv).

Finalmente para (v) basta provarmos que se $\int_X |f| dv(G, \cdot) = 0$, então $v^*(G, \{x \in X: |f(x)| > \delta\}) = 0$ para $\delta \in]0, \infty[$, pois a implicação contrária segue de (4.27), (4.30.v), (4.16) e (4.25).

Sejam $\delta \in]0, \infty[$, $n \in \mathbb{N}$ e $E_n = \{x \in X: |f_n(x)| > \frac{\delta}{2}\}$.

Como $E_n \subset \{x \in X: f_n(x) \neq 0\}$ e f_n é H -simples e G -integrável temos que $E_n \in \mathcal{H}$, e portanto $v^*(G, E_n) = v(G, E_n)$. Além disso, por (4.30.vii) e (4.30.v), vale que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} v(G, E_n) \frac{\delta}{2} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f_n| dv(G, \cdot) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| dv(G, \cdot) = \int_X |f| dv(G, \cdot) = 0. \end{aligned}$$

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f e

$$\{x \in X: |f(x)| > \delta\} \subset E_n \cup \{x \in X: |f(x) - f_n(x)| > \frac{\delta}{2}\},$$

concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} v^*(G, \{x \in X: |f(x)| > \delta\}) = 0$, o que prova (v). //

(4.32) Lema. Sejam f uma função G -integrável, $c \in]0, \infty[$ e $E = \{x \in X: |f(x)| \geq c\}$. Tem-se

- (i) existe $F \in H$ com $v(G, F) < \infty$ e tal que $E \subseteq F$;
- (ii) se $E \in A$, então $E \in H$ e $v(G, E) < \infty$.

Demonstração. O item (ii) segue de (i) e de (4.1.ii). Provaremos (i) a seguir.

Como f é G -integrável, existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções H -simples e G -integráveis, que converge em G -medida para f (4.27.i). Portanto, por (4.10), existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $F_0 \in H$ tais que

$$v(G, F_0) < 1 \quad \text{e} \quad |f - f_{n_0}|_{\xi_{F_0}^c} \leq \frac{c}{2}.$$

Seja $F = F_0 \cup \{x \in X: |f_{n_0}(x)| \neq 0\}$. Como f_{n_0} é H -simples e G -integrável, e $v(G, F_0) < \infty$ concluimos que $F \in H$ e $v(G, F) < \infty$.

Para provarmos que $E \subseteq F$ basta notarmos que

$$|f|_{\xi_{F^c}^c} \leq |f - f_{n_0}|_{\xi_{F^c}^c} + |f_{n_0}|_{\xi_{F^c}^c} \leq \frac{c}{2}.$$

Portanto $E \subseteq F$, $F \in H$ e $v(G, F) < \infty$, o que prova (i). //

(4.33) Proposição. Sejam f e g funções G -mensuráveis. Se g é G -integrável e $|f| \leq |g|$ G -q.s., então

(i) existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções H -simples e G -integráveis, com $|f_n| \leq 2|f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que converge em G -medida para f e tal que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) = 0.$$

Demonstração. Como f é G -mensurável, existe uma seqüência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções H -simples e que converge em G -medida para f .

Vamos construir a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Para $k \in \mathbb{N}$, por (4.10) existem $E_k \in H$ e $n_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$v(G, E_k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad |h_{n_k} - f|_{\xi_{E_k^c}} \leq \frac{1}{k}. \quad (1)$$

Tomando

$$H_k = \{x \in X: |h_{n_k}(x)| > \frac{2}{k}\} \cap E_k^c, \quad (2)$$

e

$$f_k = h_{n_k} \xi_{H_k},$$

provaremos que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é a seqüência procurada.

Por (1) e (2) temos que

$$\begin{aligned} |f_k| &\leq |h_{n_k} - f|_{\xi_{H_k}} + |f|_{\xi_{H_k}} \leq \frac{1}{k} + |f| \\ &\leq \frac{1}{2}|h_{n_k}|_{\xi_{H_k}} + |f| = \frac{1}{2}|f_k| + |f| \end{aligned}$$

e portanto $|f_k| \leq 2|f|$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Verificaremos que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para f .

Fixado $\beta \in]0, \infty[$, seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{6}{k_0} < \beta$. Então para $k \geq k_0$ temos que

$$\{x \in X: |f_k(x) - f(x)| > \beta\} \subset \{x \in X: |(h_{n_k} - f)(x)|_{\xi_{H_k}} > \frac{3}{k}\} \cup \{x \in X: |f_{\xi_{H_k}^c}(x)| > \frac{3}{k}\}.$$

Como por (1), sabemos que $|h_{n_k} - f|_{\xi_{H_k}} \leq \frac{1}{k}$ e, lembrando (2), $|f_{\xi_{H_k}^c} \cap E_k^c| \leq (|f - h_{n_k}| + |h_{n_k}|)_{\xi_{H_k}^c \cap E_k^c} \leq \frac{3}{k}$, concluímos que

$$\{x \in X: |f_k(x) - f(x)| > \beta\} \subset \{x \in X: |f_{\xi_{H_k}^c}(x)| > \frac{3}{k}\} \cap E_k \subset E_k,$$

para $k \geq k_0$.

Portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v^*(G, \{x \in X: |f_k(x) - f(x)| > \beta\}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} v^*(G, E_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0,$$

provando que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para f .

Agora provaremos que f_k é G-integrável para $k \in \mathbb{N}$ e que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_X |f_m - f_n| dv(G, \cdot) = 0.$$

É imediato que f_k é H-simples e portanto que se $c \in]0, \infty[$ e $E = \{x \in X: |f_k(x)| = c\}$, então $E \in H$. Verificaremos que $v(G, E) < \infty$.

Como $|f_k| \leq 2|f| \leq 2|g|$ <G-q.s.>, sabemos que $E \subset \{x \in X: |g(x)| \geq \frac{c}{2}\} \cup \{x \in X: |g(x)| < |f(x)|\}$. Tendo em vista que $|f| \leq |g|$ <G-q.s.> e vale (4.32.i), existe $H \in H$ com $v(G, H) < \infty$ tal que $E \subset H$. Portanto $v(G, E) < \infty$, provando que f_k é G-integrável, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $\epsilon \in]0, \infty[$. Por (4.31.iii) e (4.31.iv), existem $\delta \in]0, \infty[$ e $F_\epsilon \in H$ tais que

$$- \text{ se } F \in H \text{ e } v(G, F) < \delta, \text{ então } \int_F |g| dv(G, \cdot) < \frac{\epsilon}{12}; \quad (3)$$

$$- v(G, F_\epsilon) < \infty \text{ e } \int_{F_\epsilon^c} |g| dv(G, \cdot) < \frac{\epsilon}{12}. \quad (4)$$

Como $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para f , por (4.10) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$, existe $E_m^n \in H$ satisfazendo as condições:

$$v(G, E_m^n) < \delta \text{ e } |f_n - f_m|_{\xi(E_m^n)^c} < \frac{\epsilon}{3(v(G, F_\epsilon) + 1)}. \quad (5)$$

Portanto, lembrando que $|f_k| \leq 2|f| \leq 2|g| < G\text{-q.s.}>$ e o resultado (4.30.ix), temos por (4), (5) e (3) que se $m, n \geq n_0$, então

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) &\leq \int_{F_\epsilon^c} 4|g| dv(G, \cdot) + \int_{F_\epsilon \cap E_m^n} 4|g| dv(G, \cdot) + \\ &+ \int_{F_\epsilon \cap (E_m^n)^c} |f_n - f_m| dv(G, \cdot) < \epsilon, \end{aligned}$$

e por conseguinte $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) = 0$, terminando assim a prova desta proposição. //

(4.34) Corolário. Sejam f e g funções G -mensuráveis. Se g é G -integrável e $|f| \leq |g|$ $\langle G\text{-q.s.} \rangle$, então

(i) f é G -integrável.

Além disso, existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções H -simples e G -integráveis, com $|f_n| \leq 2|f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que converge em G -medida para f , e que para $E \in \mathcal{A}$ tem-se

$$(ii) \quad \int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

Demonstração. Segue de (4.33) e (4.27). //

(4.35) Corolário. Uma função f é G -integrável se, e somente se, $|f|$ é G -integrável.

Demonstração. Segue de (4.30.i) e (4.34), lembrando que $|f| = | |f| |$. //

(4.36) Teorema. Sejam f uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções G -integráveis tais que

(i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f ;

(ii) para todo $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que, se $F \in H$ e $v(G, F) < \delta$, então

$$\int_F |f_n| dv(G, \cdot) < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

(iii) para todo $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $F_\varepsilon \in H$ tal que

$$v(G, F_\varepsilon) < \infty \text{ e } \int_{F_\varepsilon^c} |f_n| dv(G, \cdot) < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tem-se

(iv) f é G -integrável;

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| dv(G, \cdot) = 0$.

Demonstração. Provaremos, em primeiro lugar, que $|f|$ é G -integrável, e assim (iv) segue de (4.35).

Dado $\epsilon \in]0, \infty[$ sejam δ como em (ii), e $F_\epsilon \in H$ como em (iii).

Por (i) e (4.11), sabemos que $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para $|f|$, e assim lembrando (4.10), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, existe $E_m^n \in H$ satisfazendo:

$$v(G, E_m^n) < \delta \quad \text{e} \quad ||f_n| - |f_m||_{\xi_{(E_m^n)^c}} < \frac{\epsilon}{v(G, F_\epsilon) + 1}. \quad (1)$$

Por (4.29.iv), (4.29.i) e (4.30.ix), observando que (1), (ii), (iii) são verdadeiros, temos que

$$\begin{aligned} \int_X ||f_n| - |f_m|| dv(G, \cdot) &\leq \int_{E_m^n \cap F_\epsilon} |f_n - f_m| dv(G, \cdot) + \\ &+ \int_{F_\epsilon^c} |f_n - f_m| dv(G, \cdot) + \\ &+ \int_{F_\epsilon \cap (E_m^n)^c} ||f_n| - |f_m|| dv(G, \cdot) \\ &\leq 2\epsilon + 2\epsilon + \frac{\epsilon}{v(G, F_\epsilon) + 1} v(G, F_\epsilon \cap (E_m^n)^c) \leq 5\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_X | |f_n| - |f_m| | dv(G, \cdot) = 0,$$

o que por (4.27), prova que $|f|$ é G -integrável.

Demonstraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| dv(G, \cdot) = 0.$$

Sejam ϵ , δ e F_ϵ como anteriormente, e tomemos δ_0 e $\tilde{H}_0$, respectivamente, como em (4.31.iii) e (4.31.iv), isto é,

$$\text{se } F \in H \text{ e } v(G, F) < \delta_0, \text{ então } \int_F |f| dv(G, \cdot) < \epsilon; \quad (2)$$

$$\tilde{H}_0 \in H, \quad v(G, \tilde{H}_0) < \infty \text{ e } \int_{\tilde{H}_0^c} |f| dv(G, \cdot) < \epsilon. \quad (3)$$

Tomemos $\gamma = \min\{\delta, \delta_0\}$ e $E = F_\epsilon \cup \tilde{H}_0 \in H$.

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f , existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq n_1$, existe $H_m \in H$ satisfazendo:

$$v(G, H_m) < \gamma \text{ e } |f_m - f|_{\xi_{H_m}^c} < \frac{\epsilon}{v(G, E) + 1}. \quad (4)$$

Portanto para $m \geq n_1$ temos por (iii), (3), (4), (ii) e (2) que

$$\begin{aligned} \int_X |f_m - f| dv(G, \cdot) &\leq \int_{(EUH_m)^c} (|f_m| + |f|) dv(G, \cdot) + \int_{H_m} (|f_m| + |f|) dv(G, \cdot) + \\ &\quad + \int_{E \cap (H_m)^c} |f_m - f| dv(G, \cdot) \\ &\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{v(G, E) + 1} v(G, E \cap (H_m)^c) \leq 5\varepsilon, \end{aligned}$$

e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| dv(G, \cdot) = 0$, o que prova (v). //

Como consequência do teorema acima obtemos (4.37), conhecido como Teorema de Vitali, que será frequentemente usado no §5.

(4.37) Corolário. Sejam f uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções G -integráveis como em (4.36), isto é, tais que

(i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f ;

(ii) para todo $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que, se $F \in H$ e $v(G, F) < \delta$, então

$$\int_F |f_n| dv(G, \cdot) < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

(iii) para todo $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $F_\varepsilon \in H$ tal que $v(G, F_\varepsilon) < \infty$ e $\int_{F_\varepsilon^c} |f_n| dv(G, \cdot) < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então

(iv) f é G -integrável;

(v) para todo $E \in A$ tem-se

$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

Demonstração. O item (iv) segue de (4.36.iv). Por (4.29.i), (4.29.iii), (4.30.vii) e (4.30.viii), para todo $E \in \mathcal{A}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\left| \int_E f dG - \int_E f_n dG \right| \leq \int_E |f - f_n| dv(G, \cdot) \leq \int_X |f - f_n| dv(G, \cdot),$$

e assim (v) segue de (4.36.v). //

O próximo resultado é a recíproca de (4.36).

(4.38) Teorema. Sejam f uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções G -integráveis tais que

- (i) f é G -integrável;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| dv(G, \cdot) = 0$.

Então os três primeiros itens de (4.36) estão satisfeitos.

Demonstração. Para obtermos (4.36.i), fixemos $\beta \in]0, \infty[$.

Para $n \in \mathbb{N}$ seja $g_n = |f_n - f|$. Lembrando (i), g_n é G -integrável, e por (4.34) existe uma seqüência $(h_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$, de funções H -simples e G -integráveis, com $|h_k^n| \leq 2|g_n|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e que converge em G -medida para g_n .

Tomemos $\varepsilon \in]0, \infty[$. Por (ii), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n \geq n_0, \text{ então } \int_X g_n dv(G, \cdot) < \frac{\beta \varepsilon}{8}. \quad (1)$$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$.

Como $(h_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para g_n , existem $k_n \in \mathbb{N}$ e $E_{k_n}^n \in H$ tais que

$$v(G, E_{k_n}^n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |h_{k_n}^n - g_n|_{\xi_{(E_{k_n}^n)^c}} \leq \frac{\beta}{2}. \quad (2)$$

Seja

$$H_{k_n}^n = \{x \in X: |h_{k_n}^n(x)| > \frac{\beta}{2}\}. \quad (3)$$

Tendo em vista que $h_{k_n}^n$ é H -simples e G -integrável, temos que $H_{k_n}^n \in H$ e $v(G, H_{k_n}^n) < \infty$.

Por (3), (4.30.ix) e (1), se $n \geq n_0$, então

$$v(G, H_{k_n}^n)^{\frac{\beta}{2}} \leq \int_X |h_{k_n}^n| dv(G, \cdot) \leq 2 \int_X |g_n| dv(G, \cdot) < \frac{\beta \varepsilon}{4},$$

e assim

$$v(G, H_{k_n}^n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{se } n \geq n_0. \quad (4)$$

Se $n \geq n_0$ e $H_n = E_{k_n}^n \cup H_{k_n}^n$, temos por (2) e (4), que $v(G, H_n) < \varepsilon$, e por (2) e (3) que

$$|f_n - f|_{\xi_{H_n^c}} = |g_n - h_{k_n}^n|_{\xi_{H_n^c}} \leq |g_n - h_{k_n}^n|_{\xi_{H_n^c}} + |h_{k_n}^n|_{\xi_{H_n^c}} \leq \beta.$$

Portanto para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$, existe $H_n \in H$ com $v(G, H_n) < \varepsilon$ e $|f_n - f|_{\xi_{H_n^c}} \leq \beta$. Assim $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para f , o que prova (4.36.i).

Para obtermos (4.36.ii) e (4.36.iii) basta observarmos que para $E \in \mathcal{A}$ vale a relação:

$$\int_E |f_n| dv(G, \cdot) \leq \int_X g_n dv(G, \cdot) + \int_E |f| dv(G, \cdot), \text{ para } n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

e como f é G -integrável, por (4.31.iii) e (4.31.iv) existem $\delta_1 \in]0, \infty[$ e $F_\varepsilon \in \mathcal{H}$ tais que

$$\begin{aligned} & - \text{ se } F \in \mathcal{H} \text{ e } v(G, F) < \delta_1, \text{ então } \int_F |f| dv(G, \cdot) < \frac{\varepsilon}{2}; \\ & - \text{ } v(G, E_\varepsilon) < \infty \text{ e } \int_{E_\varepsilon^c} |f| dv(G, \cdot) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo (1) para $\beta=4$ e tomemos

$$\delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{2+2 \|f_n\|_\infty} : n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq n \leq n_0 \right\}$$

e

$$F_\varepsilon = E_\varepsilon \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n_0} \{x \in X : f_j(x) \neq 0\} \right).$$

Então por (5) e (1) concluímos que δ e F_ε satisfazem, respectivamente, (4.36.ii) e (4.36.iii). //

(4.39) Corolário. Se f é uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções G -integráveis, então f é G -integrável e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| dv(G, \cdot) = 0$ se, e somente se, são verdadeiras as seguintes asserções:

- (i) a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f ;
- (ii) para todo $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que; se

$F \in H$ e $v(G, F) < \delta$, então

$$\int_F |f_n| dv(G, \cdot) < \epsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

- (iii) para todo $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $F_\epsilon \in H$ tal que
 $v(G, F_\epsilon) < \infty$ e $\int_{F_\epsilon^c} |f_n| dv(G, \cdot) < \epsilon$, para todo
 $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Segue de (4.36) e (4.38). //

(4.40) Teorema. (Teorema da "Convergência Dominada"). Sejam f uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções G -mensuráveis que converge em G -medida para f . Se g é uma função G -integrável, com $|f_n| \leq |g|$ $\langle G$ -q.s. $\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

- (i) f é G -integrável;
(ii) para todo $E \in A$ tem-se
$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

Demonstração. Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $E \in A$, a função f_n é G -integrável (4.34.i) e que, por (4.29.i) e (4.30.ix), vale a seguinte relação

$$\int_E |f_n| dv(G, \cdot) \leq \int_E |g| dv(G, \cdot), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Aplicando (4.31.iii) e (4.31.iv) para g e lembrando (1), concluímos por (4.37) que o teorema é verdadeiro. //

Em (4.41) provaremos que, se existe uma medida $\tilde{G}$ em A , que é extensão de uma medida G em H , então toda função G -integrável é $\tilde{G}$ -integrável e as integrais são iguais, sendo que a integral relativa

a $\tilde{G}$ coincide com a dada por Dunford e Schwartz em [DS], pois $\tilde{G}$ está de finida em A .

(4.41) Proposição. Sejam G uma medida em H e $\tilde{G}$ uma extensão de G em A . Se f é uma função G -integrável, então f é $\tilde{G}$ -integrável, e para todo $E \in A$ tem-se

$$\int_E f dG = \int_E f d\tilde{G}.$$

Demonstração. Como $\tilde{G}(H) = G(H)$ para todo $H \in H$ é fácil verificar que, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções que converge em G -medida para f , então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $\tilde{G}$ -medida para f . Além disso, se g é uma função H -simples e G -integrável, então g é $\tilde{G}$ -integrável e

$$\int_X g dG = \int_X g d\tilde{G} \quad \text{e} \quad \int_X |g| dv(G, \cdot) = \int_X |g| dv(\tilde{G}, \cdot).$$

Portanto é claro que, se f é G -integrável, então f é $\tilde{G}$ -integrável, e para $E \in A$ vale que $\int_E f dG = \int_E f d\tilde{G} //$

(4.42) Proposição. Se G é uma medida em H , de variação limitada, então existe uma medida $\tilde{G}$ em A que é uma extensão de G .

Demonstração. Como G é de variação limitada, por (4.6) existem G_1 e G_2 medidas em H , não-negativas tais que $G = G_1 - G_2$ e $v(G, \cdot) = G_1 + G_2$.

Seja $\tilde{G}$ definida em A por

$$\tilde{G}(E) = \sup\{G_1(F): F \subseteq E \text{ e } F \in H\} - \sup\{G_2(F): F \subseteq E \text{ e } F \in H\}.$$

Então $\tilde{G}$ está bem definida, pois para $F \in H$ temos que

$$G_1(F) + G_2(F) = v(G, F) \leq \sup\{v(G, E): E \in H\} < \infty.$$

É claro que $\tilde{G}$ é uma extensão de G , e como

$$\sup\{G_i(F): F \subseteq E \text{ e } F \in H\} < \infty, \text{ para } i \in \{1, 2\},$$

é fácil verificar que $\tilde{G}$ é uma medida em A . //

O resultado a seguir é também interessante.

(4.43) Proposição. Sejam G , G_1 e G_2 medidas finitas em H tais que

- (i) $v(G, \cdot)$ é uma medida finita;
- (ii) G_1, G_2 são não-negativas;
- (iii) $G = G_1 - G_2$;
- (iv) $v(G, \cdot) = G_1 + G_2$.

Se f é uma função G -integrável e $i \in \{1, 2\}$, então

- (v) f é G_i -integrável;
- (vi) para todo $E \in A$ tem-se

$$\int_E f dG = \int_E f dG_1 - \int_E f dG_2.$$

Demonstração. É fácil verificar, usando (iv) e (iii), que

- se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções que converge em G -medida para f , então também converge em G_i -medida para f ,

e que

- se g é H -simples e G -integrável, então g é G_i -integrável e para $E \in A$ temos que

$$\int_E g dG = \int_E g dG_1 - \int_E g dG_2$$

e

$$\int_E |g| dv(G,) = \int_E |g| dG_1 + \int_E |g| dG_2.$$

Com estas informações e (4.27) obtemos (v) e (vi). //

§5. O espaço $G_A(X, \Sigma, \mu, H)$

Daqui para frente (X, Σ, μ) será um espaço de medida que não tem átomos de medida infinita (1.27). Os símbolos $A, \bar{A}, a, \bar{a}, b$ e $\bar{b}$ serão como em (1.5) e Σ_1 denotará o ideal de Σ cujos elementos são os E de Σ com $\mu(E) < \infty$.

Neste parágrafo H denotará um ideal de Σ que, a partir de (5.13), conterá Σ_1 ; G será uma medida em H , no sentido de (4.2).

Nosso objetivo é estabelecer que, se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, então toda função de $L_{\bar{A}}$ é G -integrável (5.21), e transformar o espaço $G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, sob certas hipóteses, num espaço normado (5.25).

(5.1) Definição. Sejam λ e ν medidas em H (4.2). Dizemos que λ é absolutamente contínua em relação a ν (escrevemos $\lambda \ll \nu$) se, e somente se, para todo $F \in H$ com $\nu(\nu, F) = 0$ tem-se $\lambda(F) = 0$. Dizemos que λ é ν -contínua se, e somente se, dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que, se $F \in H$ e $\nu(\nu, F) < \delta$, então $\nu(\lambda, F) < \epsilon$.

É fácil verificar que, se λ é ν -contínua, então $\lambda \ll \nu$, e que $\lambda \ll \nu$ se, e somente se $\nu(\lambda, \cdot) \ll \nu$. Ainda, se ν é não-negativa substituimos $\nu(\nu, \cdot)$ por ν , pois neste caso $\nu(\nu(\nu, \cdot), \cdot) = \nu$.

(5.2) Exemplo. Se G é uma medida em H , f uma função G -integrável (4.27) e λ a função dada por

$$\lambda(E) = \int_E f dG, \quad E \in \Sigma,$$

então

- (i) λ é uma medida em Σ ;
- (ii) λ é G -contínua;
- (iii) $\lambda \ll G$.

De fato, os dois primeiros itens seguem, respectivamente, de (4.31.i) e (4.31.iii). A última asserção segue da definição de integral (4.27), observando que, se g é uma função H -simples e G -integrável, e se $F \in H$ é tal que $v(G,F) = 0$, então $\int_F g dG = 0$.

(5.3) Definição. Se G é uma medida em H e $G \ll \mu^{(*)}$, então para todo $E \in \Sigma$ e $k \in]0, \infty[$, definimos

$$I_A\left(\frac{G}{k}, E\right) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n A\left(\frac{|G(E_i)|}{k\mu(E_i)}\right) \mu(E_i) : (E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(H \cap \Sigma_1, E) \right\},$$

sendo que, $\mathcal{D}(H \cap \Sigma_1, E)$ é como em (4.3). Convencionamos que $0/0 = 0$.

Escrevemos $I_A\left(\frac{G}{k}\right)$ em vez de $I_A\left(\frac{G}{k}, X\right)$.

(5.4) Proposição. Seja G uma medida em H tal que $G \ll \mu$. Então

- (i) para $k \in]0, \infty[$ fixado, a função $I_A\left(\frac{G}{k}, \cdot\right)$ é uma medida em Σ e $I_A\left(\frac{G}{k}, \cdot\right) \ll \mu$;

(*) Na verdade trata-se da restrição de μ a H .

(ii) para $k \in [1, \infty[$ tem-se $I_A(\frac{G}{k}, \cdot) \leq \frac{1}{k} I_A(G, \cdot)$;

(iii) para $E \in \Sigma$ fixado, a função $I_A(\frac{G}{\cdot}, E)$ é não-crescente em $]0, \infty[$.

Demonstração. Para obtermos (i) fixemos $k \in]0, \infty[$. É claro que $I_A(\frac{G}{k}, \emptyset) = 0$.

Sejam $E_1, E_2 \in \Sigma$ com $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. É fácil verificar que $I_A(\frac{G}{k}, E_1) + I_A(\frac{G}{k}, E_2) \leq I_A(\frac{G}{k}, E_1 \sqcup E_2)$. Para a desigualdade contrária basta observarmos que, se $F \in H \cap \Sigma_1$ é tal que $F \subseteq E_1 \sqcup E_2$, então por (1.2.viii) e (1.2.iii), temos que

$$\begin{aligned} A\left(\frac{|G(F)|}{k\mu(F)}\right) &\leq A\left(\frac{|G(F \cap E_1)|}{k\mu(F)} + \frac{|G(F \cap E_2)|}{k\mu(F)}\right) \\ &\leq \frac{\mu(F \cap E_1)}{\mu(F)} A\left(\frac{|G(F \cap E_1)|}{k\mu(F \cap E_1)}\right) + \frac{\mu(F \cap E_2)}{\mu(F)} A\left(\frac{|G(F \cap E_2)|}{k\mu(F \cap E_2)}\right). \end{aligned}$$

Portanto $I_A(\frac{G}{k}, \cdot)$ é uma medida e como $G \ll \mu$ é claro que $I_A(\frac{G}{k}, \cdot) \ll \mu$, provando (i).

Os dois últimos itens seguem de (5.3) e, respectivamente, de (1.2.iv) e (1.2.viii). //

(5.5) Proposição. Sejam $a=0$, e $g \in L_A$ não-negativa. Se G é a medida em Σ definida por

$$G(E) = \int_E g d\mu,$$

então $G \ll \mu$ e para $k \in]0, \infty[$ tem-se

- (i) $I_A(\frac{G}{K}, E) = \int_E A(\frac{g}{k}) d\mu$, para todo $E \in \Sigma$;
- (ii) $I_A(\frac{G}{K}) = 0$ se, e somente se, $g \xi_E = 0$ μ -q.s. para $E \in \Sigma_1$;
- (iii) se $\|g\|_A > 0$, então $I_A(\frac{G}{\|g\|_A}, E) \leq 1$, para todo $E \in \Sigma$;
- (iv) se $A(g/k) \in L_1$, então $I_A(\frac{G}{K}, \cdot)$ é μ -contínua;
- (v) se $A(g/k) \in L_1$, então dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $F \in \Sigma_1$ tal que $I_A(\frac{G}{K}, F^c) < \varepsilon$.

Demonstração. É imediato que $G \ll \mu$. Para provarmos (i), tomemos $E \in \Sigma$ e $(E_1, E_2, \dots, E_p) \in \mathcal{D}(\Sigma_1, E)$. Então por (1.44) e (1.20), temos que

$$\sum_{i=1}^p A\left(\frac{G(E_i)}{k\mu(E_i)}\right)\mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^p \int_{E_i} A\left(\frac{g}{k}\right) d\mu \leq \int_E A\left(\frac{g}{k}\right) d\mu,$$

e com isto concluímos que

$$I_A\left(\frac{G}{K}, E\right) \leq \int_E A\left(\frac{g}{k}\right) d\mu. \quad (1)$$

Suponhamos, em primeiro lugar, $g \in \sigma \cap L_A$. Por (1.19.iii), existem $(F_1, F_2, \dots, F_\ell) \in \mathcal{D}(\Sigma_1, X)$ e $(c_1, c_2, \dots, c_\ell) \in (]0, \infty[)^\ell$ tais que

$$g = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \xi_{F_i}.$$

Com (1) e observando que

$$I_A\left(\frac{G}{K}, E\right) \geq \sum_{i=1}^{\ell} A\left(\frac{G(E \cap F_i)}{k\mu(E \cap F_i)}\right)\mu(E \cap F_i) = \int_E A\left(\frac{g}{k}\right) d\mu,$$

obtemos, neste caso, o item (i).

No caso geral, por (1.23), existe uma seqüência não-decrescente $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de L_A tal que $0 \leq g_n \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que converge para g μ -q.s.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ seja G_n a medida em Σ definida por

$$G_n(E) = \int_E g_n d\mu.$$

Como (i) é verdadeiro para G_n e $G_n \leq G$, concluímos por (1.2.viii), que

$$\int_E A\left(\frac{g_n}{k}\right) d\mu = I_A\left(\frac{G_n}{k}, E\right) \leq I_A\left(\frac{G}{k}, E\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Por (1), (2) e o Teorema da Convergência Monótona, lembrando que A é contínua à esquerda em $]0, \infty[$, temos que

$$I_A\left(\frac{G}{k}, E\right) \leq \int_E A\left(\frac{g}{k}\right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E A\left(\frac{g_n}{k}\right) d\mu \leq I_A\left(\frac{G}{k}, E\right),$$

o que prova (i).

Para obtermos (ii) basta notarmos que $A(0) = 0$ e que, se $a = 0$ e $A(u) = 0$, então $u=0$. Tendo em vista (i), o item (iii) segue de (1.17.i), e as duas últimas asserções decorrem, respectivamente, de (4.31.iii) e (4.31.iv), tomando $A = H = \Sigma$. //

(5.6) Definição. Se G é uma medida em H tal que $G \ll \mu$ denotaremos

$$\alpha_G^A = \inf\{k \in]0, \infty[: I_A\left(\frac{G}{k}\right) \leq 1\}.$$

Com a convenção que $\inf \emptyset = \infty$, temos que $0 \leq \alpha_G^A \leq \infty$.

(5.7) Lema. Se G é uma medida em H tal que $G \ll \mu$ e $0 < \alpha_G^A < \infty$, então $I_A\left(\frac{G}{\alpha_G^A}\right) \leq 1$.

Demonstração. Como $0 < \alpha_G^A < \infty$, existe uma seqüência não-crescente $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de números reais, que converge para α_G^A e tal que

$$I_A\left(\frac{G}{k_n}\right) \leq 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Sejam $(E_1, E_2, \dots, E_p) \in \mathcal{D}(H \cap \Sigma_1, X)$. Então da continuidade à esquerda de A em $]0, \infty[$ (1.2.ii); de (5.4.iii) e (1), observando que $(|G(E_i)|/k_n \mu(E_i))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-decrescente, sendo $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq p$, temos que

$$\sum_{i=1}^p A\left(\frac{|G(E_i)|}{\alpha_G^A \mu(E_i)}\right) \mu(E_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p A\left(\frac{|G(E_i)|}{k_n \mu(E_i)}\right) \mu(E_i)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_A\left(\frac{G}{k_n}\right) \leq 1.$$

Portanto $I_A\left(\frac{G}{\alpha_G^A}\right) \leq 1$. //

(5.8) Proposição. Se G é uma medida em H tal que $G \ll \mu$, são verdadeiras as seguintes asserções:

(i) se $\alpha_G^A = 0$, então $G(E) = 0$ para todo $E \in H \cap \Sigma_1$;

(ii) se $H = \Sigma_1$, então $\alpha_G^A = 0$ se, e somente se, $G = 0$.

Demonstração. Para obtermos (i), suponhamos por absurdo que exista $E \in H \cap \Sigma_1$ com $G(E) \neq 0$. Então $\mu(E) > 0$ pois $G \ll \mu$, e como $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = \infty$ (1.2.ix), existe $k \in]0, \infty[$ tal que

$$A\left(\frac{|G(E)|}{k\mu(E)}\right) > \frac{1}{\mu(E)}.$$

Portanto $I_A\left(\frac{G}{k}\right) > 1$ e assim $\alpha_G^A > k > 0$, o que é uma contradição.

O item (ii) é consequência de (i) e do fato que, se $G = 0$ então $I_A\left(\frac{G}{k}\right) = 0$ para todo $k \in]0, \infty[$, pois $A(0) = 0$. //

(5.9) Proposição. Se G_1 e G_2 são medidas em H tais que $G_j \ll \mu$ e $\alpha_{G_j}^A < \infty$, para $j \in \{1, 2\}$, então

$$(i) \quad \alpha_{G_1+G_2}^A \leq \alpha_{G_1}^A + \alpha_{G_2}^A;$$

$$(ii) \quad \alpha_{\gamma G_1}^A = |\gamma| \alpha_{G_1}^A, \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. O item (ii) é consequência imediata da definição de $\alpha_{(\cdot)}^A$ (5.6).

Para obtermos (i) sejam $G = G_1 + G_2$, $\alpha_1 = \alpha_{G_1}^A$, $\alpha_2 = \alpha_{G_2}^A$ e $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$.

Suponhamos, em primeiro lugar, que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, e tomemos $(E_1, E_2, \dots, E_p) \in \mathcal{D}(H \cap \Sigma_1, X)$. Então por (1.2.viii), (1.2.iii) e (5.7), temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^p A\left(\frac{|G(E_i)|}{\beta \mu(E_i)}\right) \mu(E_i) &\leq \sum_{i=1}^p A\left(\frac{\alpha_1 |G_1(E_i)|}{\beta \alpha_1 \mu(E_i)} + \frac{\alpha_2 |G_2(E_i)|}{\beta \alpha_2 \mu(E_i)}\right) \mu(E_i) \\
 &\leq \sum_{i=1}^p \left(\frac{\alpha_1}{\beta} A\left(\frac{|G_1(E_i)|}{\alpha_1 \mu(E_i)}\right) + \frac{\alpha_2}{\beta} A\left(\frac{|G_2(E_i)|}{\alpha_2 \mu(E_i)}\right)\right) \mu(E_i) \\
 &\leq \frac{\alpha_1}{\beta} I_A\left(\frac{G_1}{\alpha_1}\right) + \frac{\alpha_2}{\beta} I_A\left(\frac{G_2}{\alpha_2}\right) \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta} = 1.
 \end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$, temos que

$$\alpha_G^A \leq \beta = \alpha_{G_1}^A + \alpha_{G_2}^A. \quad (1)$$

Se $\alpha_{G_1}^A = 0$ (ou $\alpha_{G_2}^A = 0$) a relação (1) é uma consequência simples de (5.8.i), pois neste caso $G = G_2$ (ou $G = G_1$) em $H \cap \Sigma_1$. //

(5.10) Proposição. Se $\bar{b} = \infty$ e G é uma medida em H tal que $G \ll \mu$ e $\alpha_G^A < \infty$, então

- (i) a restrição de G a $H \cap \Sigma_1$ é uma medida μ -contínua^(*)
- (ii) se $\Sigma_1 \subset H$, então G é μ -contínua.

Demonstração. Sejam $M \in [1, \infty[$, $E \in H \cap \Sigma_1$ e $(E_1, E_2, \dots, E_p) \in \mathcal{D}(H \cap \Sigma_1, E)$.

Suponhamos, em primeiro lugar, que $\alpha = \alpha_G^A > 0$. Então por (1.9.i), (1.2.iv) e (5.7), temos que

(*) Na verdade trata-se da restrição de μ a $H \cap \Sigma_1$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^p |G(E_i)| &= \sum_{i=1}^p \frac{|G(E_i)| M \alpha}{M \alpha \mu(E_i)} \mu(E_i) \\
 &\leq \alpha \sum_{i=1}^p \left(A \left(\frac{|G(E_i)|}{M \alpha \mu(E_i)} \right) + \bar{A}(M) \right) \mu(E_i) \\
 &\leq \alpha \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{M} A \left(\frac{|G(E_i)|}{\alpha \mu(E_i)} \right) + \bar{A}(M) \right) \mu(E_i) \\
 &\leq \alpha \left(\frac{1}{M} I_A \left(\frac{G}{\alpha} \right) + \bar{A}(M) \mu(E) \right) \leq \alpha \left(\frac{1}{M} + \bar{A}(M) \mu(E) \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha = \alpha_G^A > 0$, temos que

$$v(G, E) \leq \alpha \left(\frac{1}{M} + \bar{A}(M) \mu(E) \right). \quad (1)$$

É claro, por (5.8.i), que a relação (1) também é verdadeira se $\alpha = \alpha_G^A = 0$.

Dado $\epsilon \in]0, \infty[$, tomemos $M = \max\{1, 2\alpha/\epsilon\}$ e $\delta = \epsilon/[2(\alpha\bar{A}(M) + 1)]$. Então por (1), se $E \in H \cap \Sigma_1$ e $\mu(E) < \delta$, temos que $v(G, E) < \epsilon$, o que prova (i).

O item (ii) segue de (i). //

(5.11) Proposição. Sejam $\Sigma_1 \subset H$ e G uma medida em H que é μ -contínua. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis que converge em μ -medida para uma função mensurável f , então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f (4.9).

Demonstração. Fixemos $\gamma \in]0, \infty[$. Dado $\epsilon \in]0, \infty[$, como G é μ -contínua, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que

se $E \in \Sigma_1$ e $\mu(E) < \delta$, então $v(G, E) < \varepsilon$. (1)

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em μ -medida para f temos que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \gamma\}) < \delta, \text{ para } n \geq n_0. \quad (2)$$

Por (2) e (1), para $n \geq n_0$ temos que

$$v^*(G, \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \gamma\}) = v(G, \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \gamma\}) < \varepsilon.$$

Portanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f . //

(5.12) Corolário. Sejam $\bar{b} = \infty$, $\Sigma_1 \subset H$ e G uma medida em H tal que $G \ll \mu$ e $\alpha_G^A < \infty$. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis que converge em μ -medida para uma função mensurável f , então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f .

Demonstração. Segue de (5.10.ii) e (5.11). //

(5.13) Definição. Seja H um ideal de Σ que contém Σ_1 ; no caso em que $\bar{a} > 0$, seja $H = \Sigma$. Denotaremos por $G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ o conjunto das medidas G , definidas em H e com valores em $\mathbb{R}$, tais que

- (i) $G \ll \mu$;
- (ii) $v(G, \cdot)$ é uma medida finita em H ;
- (iii) $\alpha_G^A < \infty$.

A condição de que $H = \Sigma$ se $\bar{a} > 0$ imposta na definição acima não é essencial. Colocamo-la apenas porque quando $\bar{a} > 0$ o caso que interessa neste trabalho é $H = \Sigma$.

Lembrando (5.9) vê-se que $G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

Até o fim deste parágrafo o ideal H conterá o ideal Σ_1 .

(5.14) Proposição. A função $\alpha_A^A(\cdot)$ definida em (5.6) é uma norma em $G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$.

Demonstração. Segue de (5.8.ii) e (5.9). //

Nosso próximo objetivo é verificar que, se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, então toda $f \in L_{\bar{A}}$ é G -integrável. Isso será feito em (5.21).

(5.15) Proposição. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, então toda função simples de $L_{\bar{A}}$ é H -simples (4.12) e G -integrável (4.18).

Demonstração. Seja $f \in \sigma \cap L_{\bar{A}}$. Para verificar que f é H -simples, basta lembrar que $\Sigma_1 \subset H$ e aplicar (1.19.iii). Segue de (5.13.ii) que f é G -integrável. //

(5.16) Proposição. Se $f \in L_{\bar{A}}$ é não-negativa, então existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de $L_{\bar{A}}$ tal que

$$(i) \quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge para } f \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

Ainda, para toda $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ tem-se

(iii) f_n é H -simples e G -integrável, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iv) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f .

Demonstração. Notemos que, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções simples que satisfaz (i), então fixado $n \in \mathbb{N}$, temos que $f_n \in L_{\bar{A}}$ (1.16.i) e assim por (5.15), f_n verifica (iii). Portanto basta provarmos (i), (ii) e (iv).

Se $\bar{b} = \infty$ usamos (1.23) para obter uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples, que satisfaz (i) e (ii). Por (5.12) ela também verifica (iv).

Se $\bar{b} < \infty$, de (2.11.i) temos que f é limitada μ -q.s. e portanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pode ser escolhida satisfazendo (i) e convergindo para f uniformemente, exceto num conjunto $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$, verificando assim (ii). Como $\nu(G, \cdot) \ll \mu$, segue que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz (iv). //

(5.17) Corolário, Se $f \in L_{\bar{A}}$, então existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de $L_{\bar{A}}$ tal que

(i) $|f_n - f| \leq |f|$ e $|f_n| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f μ -q.s.

Ainda, para toda $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ tem-se

(iii) f_n é H -simples e G -integrável, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iv) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f .

Demonstração. Basta aplicar (5.16) às funções $f_+ = \max\{f, 0\}$ e $f_- = \max\{-f, 0\}$, lembrando que $f = f_+ - f_-$. //

(5.18) Corolário. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ e $f \in L_{\bar{A}}$, então f é G -mensurável (4.13).

Demonstração. Segue de (5.17). //

(5.19) Lema. Seja $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$. Se $f \in \sigma \cap L_{\bar{A}}$ e é não-negativa, então

$$(i) \quad \int_X f dv(G, \cdot) \leq \|f\|_{\bar{A}} (2\alpha_G^A + c),$$

sendo que $c=0$ se $\bar{a} = 0$ ou $\mu(X) < \infty$, e $c = \bar{a}v(G, X)$ se $\bar{a} > 0$ e $\mu(X) = \infty$.

Demonstração. Observemos que o primeiro membro de (i) tem sentido ((5.15) e (4.23.i)). Como $G \ll \mu$ temos que, se $f=0$ μ -q.s., então $\int_X f dv(G, \cdot) = 0$. Portanto basta verificarmos (i) quando $\|f\|_{\bar{A}} > 0$.

Sejam $(E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(H, X)$ e $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in [0, \infty]^n$ tais que $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$. Consideremos os conjuntos

$$I_1 = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \text{ e } E_i \in \Sigma_1\}$$

e

$$I_2 = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \text{ e } E_i \notin \Sigma_1\}.$$

Seja $i \in I_1$. Suponhamos, em primeiro lugar, que $\alpha_G^A > 0$. Então se $(F_1, F_2, \dots, F_\ell) \in \mathcal{D}(H, E_i)$, por (1.9.i) temos que

$$\sum_{j=1}^{\ell} c_j |G(F_j)| \leq \alpha_G^A \|f\|_{\bar{A}} \left[\sum_{j=1}^{\ell} \left(A \left(\frac{|G(F_j)|}{\alpha_G^A \mu(F_j)} \right) + \bar{A} \left(\frac{c_j}{\|f\|_{\bar{A}}} \right) \mu(F_j) \right) \right],$$

e portanto

$$c_i v(G, E_i) \leq \alpha_G^A \|f\|_{\bar{A}} \left(I_A \left(\frac{G}{\alpha_G^A}, E_i \right) + \bar{A} \left(\frac{c_i}{\|f\|_{\bar{A}}} \right) \mu(E_i) \right).$$

Com esta relação e (5.4.i) obtemos que

$$\sum_{i \in I_1} c_i v(G, E_i) \leq \alpha_G^A \|f\|_{\bar{A}} \left(I_A \left(\frac{G}{\alpha_G^A} \right) + \int_X \bar{A} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{\bar{A}}} \right) d\mu \right). \quad (1)$$

Portanto se $\alpha_G^A > 0$ temos por (1), (5.7) e (1.17.i) que

$$\sum_{i \in I_1} c_i v(G, E_i) \leq 2\alpha_G^A \|f\|_{\bar{A}}. \quad (2)$$

É claro por (5.8.i), que a relação (2) também é verdadeira se $\alpha_G^A = 0$.

Se $\bar{a} = 0$ ou $\mu(X) < \infty$, então $I_2 = \emptyset$ (1.19.iii) e por (2) obtemos que

$$\int_X f dv(G, \cdot) \leq 2\alpha_G^A \|f\|_{\bar{A}},$$

provando (i), neste caso.

Se $\bar{a} > 0$, lembrando que $H = \Sigma$, temos por (2) e (1.19.ii) que

$$\begin{aligned} \int_X f dv(G, \cdot) &= \sum_{i \in I_1} c_i v(G, E_i) + \sum_{i \in I_2} c_i v(G, E_i) \\ &\leq 2\alpha_G^A \|f\|_{\bar{A}} + \bar{a} \sum_{i \in I_2} c_i \| \xi_{E_i} \|_{\bar{A}} v(G, E_i) \\ &\leq 2\alpha_G^A \|f\|_{\bar{A}} + \bar{a} \|f\|_{\bar{A}} v(G, X), \end{aligned}$$

provando (i), neste caso. //

(5.20) Teorema. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, $f \in L_{\bar{A}}$ é não-negativa e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções simples de $L_{\bar{A}}$ como em (5.16), então

- (i) para $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que, se $E \in H$ e $v(G, E) < \delta$ tem-se

$$\int_E f_n dv(G, \cdot) < \epsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$
- (ii) para $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $F \in H$ com $v(G, F) < \infty$ e tal que

$$\int_{F^c} f_n dv(G, \cdot) < \epsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$
- (iii) f é G -integrável (4.27) e para $E \in \Sigma$ tem-se

$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

Demonstração. Basta provarmos (i) e (ii) pois (iii) segue do Teorema de Vitali (4.37).

Para todo $n \in \mathbb{N}$ seja $y_n = \int_X f_n dv(G, \cdot)$. Como a seqüência de números reais $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada ((5.19.i) e (1.16.i)) e não-decresce

cente (4.30.ix) temos que ela é convergente. Portanto dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq \int_X f_n dv(G, \cdot) - \int_X f_{n_0} dv(G, \cdot) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } n \geq n_0. \quad (1)$$

Seja $E \in \Sigma$. Suponhamos, em primeiro lugar, que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$. Então por (1) temos que

$$\begin{aligned} \int_E f_n dv(G, \cdot) &= \int_X f_n dv(G, \cdot) - \int_{E^c} f_n dv(G, \cdot) \\ &\leq \int_X f_n dv(G, \cdot) - \int_{E^c} f_{n_0} dv(G, \cdot) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_X f_{n_0} dv(G, \cdot) - \int_{E^c} f_{n_0} dv(G, \cdot) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \int_E f_{n_0} dv(G, \cdot), \end{aligned}$$

mais precisamente que

$$\int_E f_n dv(G, \cdot) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_E f_{n_0} dv(G, \cdot). \quad (2)$$

É claro que a relação (2) também é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$ com $1 \leq n \leq n_0$, pois $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não-decrescente.

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2(\|f_{n_0}\|_\infty + 1)}$. Então se $E \in \mathcal{H}$ e $v(G, E) < \delta$ temos

que

$$\int_E f_{n_0} dv(G, \cdot) \leq \|f_{n_0}\|_\infty v(G, E) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Por (2) e (3) concluímos que, se $E \in \mathcal{H}$ e $v(G, E) < \delta$, então

$$\int_E f_n dv(G, \cdot) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que prova (i).

Seja $F = \{x \in X: f_{n_0}(x) \neq 0\}$. Então

$$\int_{F^c} f_{n_0} dv(G, \cdot) = 0. \quad (4)$$

Por (2) e (4) concluímos que

$$\int_{F^c} f_n dv(G, \cdot) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Lembrando que $H = \Sigma$ quando $\bar{a} > 0$, e que valem (1.19.iii) e (5.13.ii), obtemos (ii). //

(5.21) Corolário. Se $f \in L_{\bar{A}}$, então existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de $L_{\bar{A}}$ tal que

$$(i) \quad |f - f_n| \leq |f| \quad \text{e} \quad |f_n| \leq |f|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge para } f \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

Ainda, para todo $G \in \mathcal{G}_A(X, \Sigma, \mu, H)$ tem-se

$$(iii) \quad f_n \text{ é } H\text{-simples e } G\text{-integrável, para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(iv) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge em } G\text{-medida para } f;$$

$$(v) \quad f \text{ é } G\text{-integrável e para todo } E \in \Sigma \text{ tem-se}$$

$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG ;$$

$$(vi) \quad \left| \int_X f dG \right| \leq \int_X |f| dv(G, \cdot) \leq \|f\|_{\bar{A}} (2\alpha_G^A + c) ,$$

sendo que $c=0$ se $\bar{a} = 0$ ou $\mu(X) < \infty$, e $c = \bar{a}v(G, X)$ se $\bar{a} > 0$ e $\mu(X) = \infty$.

Demonstração. Sejam $f_+ = \max\{f, 0\}$ e $f_- = \max\{-f, 0\}$. Aplicando (5.16) e (5.20.iii) às funções f_+ e f_- , observando que $f = f_+ - f_-$, temos que os cinco primeiros itens são verdadeiros. Provaremos (vi) a seguir.

Por (4.30.vii), (4.30.v), (5.19) e (1.16.i), lembrando (v), concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \int_X f dG \right| &\leq \int_X |f| dv(G, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| dv(G, \cdot) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\bar{A}} (2\alpha_G^A + c) \leq \|f\|_{\bar{A}} (2\alpha_G^A + c) , \end{aligned}$$

o que prova (vi). //

Definiremos em (5.23) uma função com domínio $G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ que será uma norma neste espaço nos casos em que $H = \Sigma_1$ e $\bar{a} = 0$, e em que $H = \Sigma$ e $\bar{a} > 0$.

(5.22) Proposição. Se $G_1, G_2 \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, $f \in L_{\bar{A}}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $E \in \Sigma$, então

$$(i) \quad \int_E f d(G_1 + G_2) = \int_E f dG_1 + \int_E f dG_2 ;$$

$$(ii) \quad \int_E f d(\gamma G_1) = \gamma \int_E f dG_1.$$

Demonstração. Se $f \in \sigma \cap L_{\bar{A}}$ é fácil verificar que (i) e (ii) são verdadeiros. No caso geral, basta lembrar que por (5.21), existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de $L_{\bar{A}}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_E f d(G_1 + G_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d(G_1 + G_2), \\ \int_E f d(\gamma G_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d(\gamma G_1), \end{aligned}$$

e

$$\int_E f dG_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG_j, \text{ para } j \in \{1, 2\}. //$$

(5.23) Definição. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, então definimos

$$\|G\|_A = \sup \left\{ \left| \int_X f dG \right| : f \in L_{\bar{A}} \text{ e } \|f\|_{\bar{A}} \leq 1 \right\}.$$

(5.24) Proposição. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, então

$$\|G\|_A \leq 2\alpha_G^A + c < \infty,$$

sendo que $c=0$ se $\bar{a}=0$ ou $\mu(X) < \infty$, e $c = \bar{a}v(G, X)$ se $\bar{a} > 0$ e $\mu(X) = \infty$.

Demonstração. Segue de (5.21.vi). //

(5.25) Proposição. Seja $\|\cdot\|_A$ a função definida em (5.23). Tem-se

(i) $\|\cdot\|_A$ é uma semi-norma em $G_A(X, \Sigma, \mu, H)$;

(ii) se $\bar{a}=0$ ou $\mu(X) < \infty$, então $\|\cdot\|_A$ é uma norma em $G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$;

(iii) Se $\bar{a} > 0$, então $\|\cdot\|_A$ é uma norma em $G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$.

Demonstração. O item (i) é consequência de (5.24) e (5.22). Para os dois últimos itens basta verificarmos que $\|G\|_A = 0$ se, e somente se, $G=0$.

É imediato que, se $G=0$, então $\|G\|_A = 0$. Por outro lado, se $\|G\|_A = 0$, então para todo $E \in \Sigma$ tal que $\chi_E \in L_{\bar{A}}$ temos que $G(E) = \int_X \chi_E dG = 0$. Portanto G é nula sobre Σ_1 (1.19.i) e sobre todo o Σ se $\bar{a} > 0$ (1.19.ii), terminando assim a prova de (ii) e (iii). //

Estabeleceremos em (5.27) algumas relações entre as semi-normas $\alpha_{(\cdot)}^A$ e $\|\cdot\|_A$. Antes porém um lema.

(5.26) Lema. Seja G uma medida finita em Σ , de variação limitada e $G \ll \mu$. Tem-se

(i) se $f \in L_{\infty}$, então f é G -integrável;

(ii) $v(G, X) = \sup\left\{\left|\int_X f dG\right| : f \in L_{\infty} \text{ e } \|f\|_{\infty} \leq 1\right\}$.

Demonstração. Para obtermos (i) seja $f \in L_{\infty}$. Então existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples, que converge uniformemente para f , exceto num conjunto $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$.

Portanto, dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

se $n, m \geq n_0$, então $|f_n - f_m|_{\chi_{E^c}} < \varepsilon$. (1)

É claro que f_n é Σ -simples e G -integrável, e como $G \ll \mu$

também é imediato que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G-medida para f.

Por (1), temos que

$$\int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) = \int_{E^c} |f_n - f_m| dv(G, \cdot) \leq \epsilon v(G, X), \text{ para } m, n \geq n_0.$$

Portanto $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| dv(G, \cdot) = 0$, o que prova que f é

G-integrável (4.27).

Para (ii) observemos que se $f \in L_\infty$, então

$F = \{x \in X: |f(x)| > \|f\|_\infty\} \in \Sigma$ e $\mu(F) = 0$. Como $G \ll \mu$ temos que

$$\left| \int_X f dG \right| \leq \int_{F^c} |f| dv(G, \cdot) \leq \|f\|_\infty v(G, X),$$

e assim

$$\sup \left\{ \left| \int_X f dG \right| : f \in L_\infty \text{ e } \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \leq v(G, X). \quad (2)$$

Provaremos que em (2) temos a igualdade.

Dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $(E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(\Sigma, X)$ tal que

$$v(G, X) \geq \sum_{i=1}^n |G(E_i)| > v(G, X) - \epsilon. \quad (3)$$

Seja $f = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(G(E_i)) \chi_{E_i}$. Então $f \in L_\infty$, $\|f\|_\infty = 1$ e, lem-

brando (3), obtemos que

$$\left| \int_X f dG \right| = \sum_{i=1}^n |G(E_i)| > v(G, X) - \epsilon.$$

Portanto $\sup\left\{\left|\int_X f dG\right| : \|f\|_\infty \leq 1\right\} \geq v(G, X) - \epsilon$.

Como $\epsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário e vale a relação (2), concluímos que

(ii) é verdadeira. //

(5.27) Proposição. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, tem-se

$$(i) \quad \alpha_G^A \leq \|G\|_A ;$$

$$(ii) \quad \text{se } \bar{a} = 0 \text{ ou } \mu(X) < \infty, \text{ então } \|G\|_A \leq 2\alpha_G^A ;$$

$$(iii) \quad \text{se } \bar{a} > 0, \text{ então } \bar{a}v(G, X) \leq \|G\|_A ;$$

$$(iv) \quad \text{se } H = \Sigma \text{ e } \bar{b} < \infty, \text{ então } \alpha_G^A \leq \bar{b}v(G, X) \text{ e } \|G\|_A \leq \bar{b}v(G, X);$$

$$(v) \quad \text{se } \bar{a} > 0 \text{ e } \bar{b} < \infty, \text{ então } \bar{a}v(G, X) \leq \|G\|_A \leq \bar{b}v(G, X);$$

$$(vi) \quad \text{se } \bar{a} = \bar{b} = 1, \text{ então } \|G\|_A = v(G, X).$$

Demonstração. Para provarmos (i) notemos que, se $\|G\|_A = 0$, então a restrição de G a Σ_1 é nula, e por conseguinte $\alpha_G^A = 0$. Como $\alpha_{(\cdot)}^A$ e $\|\cdot\|_A$ são semi-normas, é claro que basta provarmos (i) no caso em que $\|G\|_A = 1$.

Sejam $\gamma \in]0, 1[$, $(E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(\Sigma_1, X)$, e $u_i = (\gamma |G(E_i)|) / \mu(E_i)$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Fixemos $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e observemos que

$$u_i = \frac{\gamma |G(E_i)|}{\mu(E_i)} < b. \tag{1}$$

Isto é óbvio se $b = \infty$. Se $b < \infty$, então por (1.19.iv) vale que

$$u_i = \frac{\gamma |G(E_i)|}{\mu(E_i)} \leq \frac{\gamma}{\mu(E_i)} \|\xi_{E_i}\|_{\bar{A}} \|G\|_A \leq \frac{\gamma}{\mu(E_i)} b_{\mu(E_i)} < b,$$

provando (1).

Sejam $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $c_i = \lim_{t \downarrow u_i} A'(t)$ que por (1),

(1.2.xi) e (1.2.xii), pertence a $\mathbb{R}$. Tomemos

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \operatorname{sgn}(G(E_i)) \xi_{E_i}.$$

Então é fácil verificar que $f \in L_{\bar{A}}$ e que por (1.9.ii) e (1.32.iii), valem as desigualdades

$$\begin{aligned} \|f\|_{\bar{A}} &= \|f\|_{\bar{A}} \|G\|_A \geq \left| \int_X f dG \right| = \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\mu(E_i)^\gamma} |G(E_i)| \mu(E_i)^\gamma \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[\sum_{i=1}^n (\bar{A}(c_i) + A(\frac{\gamma}{\mu(E_i)} |G(E_i)|)) \mu(E_i) \right] \\ &\geq \int_X \bar{A}(f) d\mu + \sum_{i=1}^n A(\frac{\gamma}{\mu(E_i)} |G(E_i)|) \mu(E_i) \\ &\geq \|f\|_{\bar{A}} - 1 + \sum_{i=1}^n A(\frac{\gamma}{\mu(E_i)} |G(E_i)|) \mu(E_i). \end{aligned}$$

Portanto $\sum_{i=1}^n A(\frac{\gamma}{\mu(E_i)} |G(E_i)|) \mu(E_i) \leq 1$, e assim $I_A(\gamma G) \leq 1$.

Com este resultado concluímos que $\alpha_G^A \leq \frac{1}{\gamma} = \frac{\|G\|_A}{\gamma}$, e como $\gamma \in]0, 1[$ é arbitrário obtemos (i).

O item (ii) é consequência de (5.24).

Antes de provarmos os demais itens, observemos que, se $H = \Sigma$,

então G é de variação limitada (5.13.ii) e por (5.26.ii) vale a igualdade

$$v(G, X) = \sup \left\{ \left| \int_X f dG \right| : f \in L_\infty \text{ e } \|f\|_\infty \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

Além disso, é fácil verificar que,

$$\text{se } \bar{a} > 0 \text{ e } f \in L_\infty, \text{ então } f \in L_{\bar{A}} \text{ e } \|f\|_{\bar{A}} \leq \|f\|_\infty / \bar{a}. \quad (3)$$

Lembrando (2) e usando (3) obtemos (iii). Provaremos (iv) a seguir.

Por (2) e (2.11.i), é fácil constatar que $\|G\|_A \leq \bar{b}v(G, X)$. Verificaremos que $\alpha_G^A \leq \bar{b}v(G, X)$.

Notemos, em primeiro lugar, que por (1.3.v) e (1.2.vi), vale a desigualdade

$$A(x) \leq \bar{b}x, \text{ para todo } x \in [0, \infty[. \quad (4)$$

Sejam $(E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(\Sigma_1, X)$. Por (4), temos que

$$\sum_{i=1}^n A\left(\frac{|G(E_i)|}{\bar{b}v(G, X)\mu(E_i)}\right)\mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{|G(E_i)|}{v(G, X)} \leq 1,$$

e portanto segue que $\alpha_G^A \leq \bar{b}v(G, X)$, o que prova (iv).

O item (v) é consequência de (iii) e (iv), lembrando que $H = \Sigma$ quando $\bar{a} > 0$. A asserção (vi) segue de (v). //

(5.28) Proposição. São verdadeiras as seguintes afirmações:

- (i) se $\bar{a}=0$ ou $\mu(X) < \infty$, então as funções $\alpha^A(\cdot)$ e $\|\cdot\|_A$ são normas equivalentes em $G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$;
- (ii) se $\bar{a} > 0$ e $\bar{b} < \infty$, então as funções $\|\cdot\|_A$ e $v(\cdot, X)$ são normas equivalentes em $G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$.

Demonstração. O item (i) segue de (5.14), (5.25.ii), (5.27.i) e (5.27.ii). A asserção (ii) segue do fato que $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$ é de variação limitada (5.13.ii) e dos resultados (5.25.iii) e (5.27.v). //

(5.29) Proposição. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ e $\bar{b} = \infty$, então G é σ -aditiva em Σ_1 , isto é,

- (i) se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de Σ_1 , dois a dois disjuntos, tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma_1$, então
- $$G\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} G(E_n).$$

Demonstração. Seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de Σ_1 , dois a dois disjuntos, tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma_1$. Basta provarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| G(E) - \sum_{j=1}^n G(E_j) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| G\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) \right| = 0. \quad (1)$$

Como μ é σ -aditiva sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) = 0,$$

e portanto por (5.10.ii), temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} v(G, \bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j) = 0$, o que prova (1). //

O próximo resultado garante que, sob certa condição, toda $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ admite uma extensão $\tilde{G} \in G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$ tal que, a integral de $f \in L_{\bar{A}}$ relativa a G , definida no §4, coincide com a integral dada em [DS] relativa a $\tilde{G}$.

(5.30) Proposição. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ é de variação limitada (4.4), então existe $\tilde{G} \in G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$ que é extensão de G , e tal que para $f \in L_{\bar{A}}$ tem-se

- (i) f é $\tilde{G}$ -integrável;
- (ii) $\int_E f dG = \int_E f d\tilde{G}$, para $E \in \Sigma$;
- (iii) $\|G\|_A = \|\tilde{G}\|_A$.

Demonstração. A existência de $\tilde{G}$ e os dois primeiros itens seguem de (4.42) e (4.41). O item (iii) segue de (ii) e (5.23). //

Encerramos este parágrafo fornecendo em (5.31) uma nova expressão para $\|G\|_A$ (que será usada em (6.2)) e em (5.32) um resultado auxiliar para (6.9), mas que também é interessante.

(5.31) Proposição. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$, então

- (i) $\|G\|_A = \sup \left\{ \left| \int_X f dG \right| : f \in M_{\bar{A}} \text{ e } \|f\|_{\bar{A}} \leq 1 \right\}$.

Demonstração. Seja $\tau = \sup \left\{ \left| \int_X f dG \right| : f \in M_{\bar{A}} \text{ e } \|f\|_{\bar{A}} \leq 1 \right\}$. É imediato que $\tau \leq \|G\|_A$. Provaremos a desigualdade contrária.

Seja $f \in M_{\bar{A}}$ com $\|f\|_{\bar{A}} \leq 1$. Por (5.21), existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de $L_{\bar{A}}$, com $|f_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que

$$\int_X f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dG. \quad (1)$$

Por (1) e (1.16.i), temos que

$$\left| \int_X f dG \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_X f_n dG \right| \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|f_n\|_{\bar{A}} \tau \leq \|f\|_{\bar{A}} \tau \leq \tau,$$

e portanto $\|G\|_A \leq \tau$. //

(5.32) Proposição. Se $G \in G_A(X, \Sigma, \mu, H)$ e $a = \bar{a} = 0$, então existe $E \in \Sigma$ tal que

(i) E é reunião enumerável de elementos de Σ_1 ;

(ii) se $S \in \Sigma_1$ e $S \subset E^c$, então $G(S) = 0$.

Demonstração. Se $\|G\|_A = 0$, nada temos a demonstrar. Suponhamos $\|G\|_A > 0$.

Para $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in M_{\bar{A}}$ com $\|f_n\|_{\bar{A}} \leq 1$ e tal que

$$\left| \int_X f_n dG \right| > \|G\|_A \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

Definindo

$$E_m^n = \{x \in X: |f_n(x)| > \frac{1}{m}\}, \text{ com } n, m \in \mathbb{N},$$

e tomando $E = \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} E_m^n$, provaremos que E é o conjunto desejado.

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Como $\bar{a} = 0$ e

$$\overline{A}\left(\frac{1}{m}\right)\mu(E_m^n) \leq \int_X \overline{A}(|f_n|)d\mu \leq 1 ,$$

temos que $\mu(E_m^n) < \infty$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e assim (i) é verdadeiro.

Para (ii) tomemos $S \in \Sigma_1$ e $S \subset E^c$. Se $\mu(S) = 0$ é claro que $G(S) = 0$, pois $G \ll \mu$.

Suponhamos $\mu(S) > 0$ e tomemos $\varepsilon \in]0, \infty[$. Como $a=0$, por (1.6.ii) existe $x_0 \in]0, \infty[$ tal que

$$\frac{\overline{A}(x_0)}{x_0} \leq \frac{\varepsilon}{\mu(S)} . \quad (2)$$

Sejam $h = (x_0 \operatorname{sgn}(G(S)))\chi_S$ e $g_n = f_n \operatorname{sgn}\left(\int_X f_n dG\right)$.

Por (1.2.iv) e (1.17.ii), lembrando que $\|g_n\|_{\overline{A}} = \|f_n\|_{\overline{A}} \leq 1$ e (2), temos que

$$\begin{aligned} \int_X \overline{A}\left(\frac{|h+g_n|}{1+x_0\varepsilon}\right)d\mu &= \int_E \overline{A}\left(\frac{|g_n|}{1+x_0\varepsilon}\right)d\mu + \int_S \overline{A}\left(\frac{x_0}{1+x_0\varepsilon}\right)d\mu \\ &\leq \frac{1}{1+x_0\varepsilon} \left[\int_E \overline{A}(|g_n|)d\mu + \overline{A}(x_0)\mu(S) \right] \leq 1 . \end{aligned}$$

Portanto $\|h+g_n\|_{\overline{A}} \leq 1 + x_0\varepsilon$, e por (1) temos que

$$\begin{aligned} x_0 |G(S)| &= \int_X h dG = \int_X (g_n+h) dG - \int_X g_n dG \\ &\leq \|g_n+h\|_{\overline{A}} \|G\|_A - \left| \int_X f_n dG \right| \leq (1+x_0\varepsilon) \|G\|_A - \|G\|_A \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \|G\|_A (x_0\varepsilon + \frac{1}{n}) . \end{aligned}$$

Assim $x_0 |G(S)| \leq \|G\|_A (x_0 \varepsilon + \frac{1}{n})$. Como $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon \in]0, \infty[$ são arbitrários e $x_0 \neq 0$ concluímos que $|G(S)| = 0$, o que prova (ii). //

o0o

CAPÍTULO III

Se E é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e p é uma semi-norma em E , então indicamos por E^* o dual de E , isto é, o espaço das funções de E em $\mathbb{R}$ que são lineares e contínuas.

É fácil verificar que uma função f de E em $\mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, existe $M \in [0, \infty[$ tal que $|f(x)| \leq Mp(x)$, para todo $x \in E$.

Em E^* temos a norma usual, isto é se $f \in E^*$, então $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in E \text{ e } p(x) \leq 1\}$.

Se $(E, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado, então para $x \in E$, denotamos: $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x) \vee 0$ e $|x| = x_+ + x_-$.

Se $(E, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado e p é uma semi-norma em E , então E^* é parcialmente ordenado, sendo a relação de ordem parcial dada por

$x^* \leq y^*$ se, e somente se, $x^*(z) \leq y^*(z)$, para todo $z \in E$ com $0 \leq z$.

Neste capítulo usamos resultados que se encontram no Apêndice, onde definimos L -espaço, M -espaço, e estudamos algumas das suas propriedades.

No §8 apresentamos uma caracterização do dual de L_A através da caracterização dos espaços $(M_A)^*$ e $(N_A)^*$ que se encontram, respectivamente, nos §6 e §7.

§6. Caracterização do dual de $M_A(X, \Sigma, \mu)$

Neste parágrafo a letra H denotará um ideal de Σ tal que $H = \Sigma_1$ se $a=0$, e $H = \Sigma$ se $a > 0$. Nestas condições, pelos três primeiros itens de (1.19), $\xi_E \in L_A$ se, e somente se, $E \in H$.

Em (6.4) provaremos que o dual de $M_A(X, \Sigma, \mu)$ é isometricamente isomorfo a $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$.

Tendo em vista que $L_A(X, \Sigma, \mu) = M_A(X, \Sigma, \mu)$ quando A satisfaz a condição Δ_2 , veremos em (6.13) que, com esta hipótese sobre A o resultado apresentado em (6.4) coincide com a conhecida caracterização de $(L_A(X, \Sigma, \mu))^*$, encontrada por exemplo em [5.5] e [5.7] de [M].

No final deste parágrafo, sob certas hipóteses, estabeleceremos condições necessárias e suficientes para um espaço de Orlicz ser reflexivo.

(6.1) Proposição. Se $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$, então a função x^* definida em L_A por

$$x^*(f) = \int_X f dG ,$$

pertence a $(L_A)^*$ e $\|x^*\| = \|G\|_{\bar{A}}$.

Demonstração. Por (5.21.v), sabemos que x^* está bem definida, e que é linear (4.29.iii).

Como por (5.23),

$$|x^*(f)| = \left| \int_X f dG \right| \leq \|G\|_{\bar{A}} \|f\|_A, \text{ para } f \in L_A,$$

concluimos que $x^* \in (L_A)^*$.

É imediato que $\|x^*\| = \|G\|_{\bar{A}} //$.

De modo análogo ao feito acima e lembrando (5.31), temos o seguinte resultado:

(6.2) Proposição. Se $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$, então a função x^* definida em M_A por

$$x^*(f) = \int_X f dG,$$

pertence a $(M_A)^*$ e $\|x^*\| = \|G\|_{\bar{A}}$.

(6.3) Proposição. Se $x^* \in (M_A)^*$ e G é a função definida em H por $G(E) = x^*(\xi_E)$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) G é uma medida finita em H ;
- (ii) $G \ll \mu$;
- (iii) $\nu(G, \cdot)$ é uma medida finita em H ;
- (iv) $\alpha_G^{\bar{A}} \leq \|x^*\|$;
- (v) $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$;
- (vi) $x^*(f) = \int_X f dG$, para toda $f \in M_A$;
- (vii) $\|x^*\| = \|G\|_{\bar{A}}$.

Demonstração. Os dois primeiros itens seguem da hipótese de que x^* é linear, contínua e assume valores em $\mathbb{R}$. A asserção (v) segue das quatro primeiras.

Provaremos (iii) a seguir.

Seja $E \in H$ e tomemos $(E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(H, E)$.

Então tomando

$$I_1 = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \text{ e } x^*(\xi_{E_i}) \geq 0\}$$

e

$$I_2 = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \text{ e } x^*(\xi_{E_i}) < 0\},$$

temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |G(E_i)| &= \sum_{i \in I_1} x^*(\xi_{E_i}) - \sum_{i \in I_2} x^*(\xi_{E_i}) = x^*(\xi_{\bigcup_{i \in I_1} E_i}) - x^*(\xi_{\bigcup_{i \in I_2} E_i}) \\ &\leq \|x^*\| [\|\xi_{\bigcup_{i \in I_1} E_i}\|_A + \|\xi_{\bigcup_{i \in I_2} E_i}\|_A] \leq 2 \|x^*\| \|\xi_E\|_A < \infty. \end{aligned}$$

É claro então que vale (iii).

Para (iv) notemos que se $\|x^*\| = 0$, então $G=0$, e assim (iv) é imediato. Suponhamos $\|x^*\| \neq 0$ e observemos que, se $E \in \Sigma_1$ e $\bar{c} \in]0, 1[$, então

$$\bar{A}(\bar{c} |G(E)| / (\|x^*\| \mu(E))) < \infty. \quad (1)$$

De fato, se $\bar{b} = \infty$ então (1) é imediato, e se $\bar{b} < \infty$ temos por (1.19.iv), que

$$\frac{\bar{c} |G(E)|}{\|x^*\|_{\mu}(E)} \leq \frac{\bar{c} \|x^*\| \|\xi_E\|_A}{\|x^*\|_{\mu}(E)} \leq \bar{c} \bar{b} < \bar{b} ,$$

e portanto (1) é verdadeira.

Sejam $\bar{c} \in]0,1[$ e $(E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(\Sigma_1, X)$.

Tomemos $u_i = \bar{c} |G(E_i)| / (\|x^*\|_{\mu}(E_i))$, $c_i = \lim_{t \uparrow u_i} \bar{A}'(t)$, sendo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \operatorname{sgn}(G(E_i)) \xi_{E_i} ,$$

que pertence a $\sigma \cap L_A$.

Por (1.9.ii) e (1.32.iii) vale que

$$\begin{aligned} \|f\|_A &\geq \frac{|x^*(f)|}{\|x^*\|} \geq \sum_{i=1}^n \frac{c_i \bar{c} |G(E_i)|}{\|x^*\|} \\ &= \sum_{i=1}^n A(c_i)_{\mu}(E_i) + \sum_{i=1}^n \bar{A}\left(\frac{\bar{c} |G(E_i)|}{\|x^*\|_{\mu}(E_i)}\right)_{\mu}(E_i) \\ &= \int_X A(|f|) d\mu + \sum_{i=1}^n \bar{A}\left(\frac{\bar{c} |G(E_i)|}{\|x^*\|_{\mu}(E_i)}\right)_{\mu}(E_i) \\ &\geq \|f\|_A - 1 + \sum_{i=1}^n \bar{A}\left(\frac{\bar{c} |G(E_i)|}{\|x^*\|_{\mu}(E_i)}\right)_{\mu}(E_i) , \end{aligned}$$

e assim

$$\sum_{i=1}^n \bar{A}\left(\frac{\bar{c} |G(E_i)|}{\|x^*\|_{\mu}(E_i)}\right)_{\mu}(E_i) \leq 1 . \quad (2)$$

Por (2) temos que $I_{\bar{A}}\left(\frac{\bar{c} G}{\|x^*\|}\right) \leq 1$, e portanto $\alpha_G^{\bar{A}} \leq \frac{\|x^*\|}{\bar{c}}$.

Como $\bar{c} \in]0,1[$ é arbitrário concluímos que $\alpha_G^{\bar{A}} \leq \|x^*\|$, o que prova (iv).

Para os dois últimos itens tomemos

$$y^*(f) = \int_X f dG, \text{ para } f \in M_A.$$

Então por (6.2), temos que $y^* \in (M_A)^*$.

É claro que $y^*(h) = x^*(h)$ para $h \in \sigma \cap L_A$, e como $M_A = \overline{\sigma \cap L_A}$ concluímos que $x^* = y^*$, o que prova (vi).

A afirmação (vii) segue de (vi) e (5.31). //

Por intermédio de (6.2) e (6.3) podemos obter a caracterização de $(M_A)^*$, que é a seguinte:

(6.4) Teorema. O espaço $(M_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$ se $a=0$, e a $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$ se $a > 0$. Mais precisamente, a todo $x^* \in (M_A)^*$ corresponde uma única $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ sendo que

$$(i) \quad G(E) = x^*(\xi_E) \text{ para } E \in H,$$

e tal que

$$(ii) \quad x^*(f) = \int_X f dG, \text{ para toda } f \in M_A;$$

$$(iii) \quad \|x^*\| = \|G\|_{\bar{A}}.$$

A correspondência $x^* \mapsto G$ é linear e sobrejetora.

Demonstração. Dado $x^* \in (M_A)^*$ tomemos G a medida em H dada por $G(E) = x^*(\xi_E)$. Por (6.3), temos que $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ e valem (ii) e

(iii).

Para concluirmos o teorema observemos que a função $x^* \mapsto G$, acima definida, é linear, e por (6.2) é sobrejetora. //

(6.5) Proposição. Os espaços $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$ e $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$ com a norma $\|\cdot\|_{\bar{A}}$ (5.23) são espaços de Banach.

Demonstração. Segue de (6.4) e do fato que $(M_A)^*$ é um espaço de Banach. //

O resultado abaixo coincide com [20.35] de [HS] quando (X, Σ, μ) é um espaço de medida σ -finita. Neste caso o espaço L_∞ (habitual) coincide com o definido por Hewitt e Stromberg em [HS].

Para (6.6) denotaremos por $ba(X, \Sigma, \mu)$ o espaço das medidas em Σ , limitadas e absolutamente contínuas em relação a μ . O espaço $ba(X, \Sigma, \mu)$ terá como norma a função $v(\cdot, X)$.

(6.6) Proposição. O espaço $(L_\infty)^*$ é isometricamente isomorfo a $ba(X, \Sigma, \mu)$. Mais precisamente, a todo $x^* \in (L_\infty)^*$ corresponde uma única $G \in ba(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$(i) \quad x^*(f) = \int_X f dG, \text{ para toda } f \in L_\infty ;$$

$$(ii) \quad \|x^*\| = v(G, X).$$

A correspondência $x^* \mapsto G$ é linear e sobrejetora.

Demonstração. Seja $A =]-\infty, \xi] \cup]1, \infty[$. É claro que $L_A = L_\infty$ e, por (5.27.iv), que $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma) = ba(X, \Sigma, \mu)$.

Como $a > 0$ e $b < \infty$, por (2.11.iii) sabemos que

$L_\infty = M_A = L_A$ e assim, por (6.4) a todo $x^* \in (L_\infty)^*$ corresponde uma $\bar{u}$ -nica $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$ que verifica (i) e tal que $\|x^*\| = \|G\|_{\bar{A}}$, e ainda a correspondência $x^* \mapsto G$ é linear e sobrejetora. Para concluirmos esta proposição basta lembrar (5.27.vi). //

Em [5.5] e [5.7] de [M] encontra-se o seguinte resultado:

- Seja A uma função de Young satisfazendo a condição Δ_2 (2.7). Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida σ -finita, ou se $\bar{a} = 0$, então $(L_A(X, \Sigma, \mu))^*$ é isometricamente isomorfo a $L_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$. Observando que $L_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ é o espaço quociente de $L_A(X, \Sigma, \mu)$ pelo espaço $\{f \in L_A(X, \Sigma, \mu): f = 0 \text{ } \mu\text{-q.s.}\}$.

Veremos em (6.13) que o resultado apresentado em (6.4) está de acordo com o acima, já que naquelas hipóteses (lembrando que para nós o espaço de medida (X, Σ, μ) não tem átomos de medida infinita) é verdade que $M_A = L_A$ (2.8) e, provaremos que, $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$ é isometricamente isomorfo a $L_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$. Esta última afirmação também é verdadeira se $J_A = M_A$, como pudemos observar após uma leitura cuidadosa da prova de [5.5] e [5.7] de [M]; é o que demonstraremos a seguir.

Apesar de A satisfazer a condição Δ_2 implicar em $J_A = M_A$, a recíproca é falsa. Para ver isto basta tomar $A(u) = e^u - 1$ para $u \in [0, \infty[$, e lembrar (2.5.v).

(6.7) Proposição. Se $F \in \Sigma_1$ e $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ é uma medida σ -aditiva em Σ_1 , então existe $g \in L_{\bar{A}}$ tal que

$$(i) \quad \int_F f dG = \int_F f g d\mu, \text{ para toda } f \in L_A;$$

$$(ii) \quad N_{\bar{A}}(g) \leq \|G\|_{\bar{A}};$$

(iii) se $b = \infty$ e $h \in L_{\bar{A}}$ é tal que

$$\int_F f dG = \int_F f h d\mu, \text{ para toda } f \in J_A,$$

então $h \xi_F = g$ μ -q.s.

Demonstração. Sejam G_1 e μ_1 medidas em Σ definidas por $G_1(E) = G(E \cap F)$ e $\mu_1(E) = \mu(E \cap F)$. É claro que G_1 e μ_1 são medidas finitas, σ -aditivas em Σ e $G_1 \ll \mu_1$. Então pelo Teorema de Radon-Nikodým ([19.36] de [HS]), temos que

$$\text{existe } g_1 \in L_1(X, \Sigma, \mu_1) \text{ tal que } G_1(E) = \int_E g_1 d\mu_1, \text{ para } E \in \Sigma; \quad (1)$$

$$\text{se } h \in L_1(X, \Sigma, \mu_1) \text{ satisfaz (1), então } h = g_1 \text{ } \mu_1\text{-q.s.} \quad (2)$$

É fácil verificar que $h \in L_1(X, \Sigma, \mu_1)$ se, e somente se $h \xi_F \in L_1(X, \Sigma, \mu)$, e nestas condições vale que $\int_X h d\mu_1 = \int_X h \xi_F d\mu$.

Seja $g = g_1 \xi_F$. Então $g \in L_1(X, \Sigma, \mu)$ e ainda é claro que

$$\int_F f dG = \int_F f dG_1 = \int_F f g d\mu_1 = \int_F f g d\mu, \text{ para } f \in \sigma \cap L_A. \quad (3)$$

Provaremos esta relação para $f \in L_A$.

Para isto tomemos $f \in L_A$. Por (5.21), existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de L_A , com $|f_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que converge para f μ -q.s, e tal que

$$\int_F f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n dG. \quad (4)$$

Por (1.44) segue que $fg\xi_F \in L_1(X, \Sigma, \mu)$. Assim aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, lembrando (4) e (3), temos que

$$\int_F f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n g d\mu = \int_F f g d\mu,$$

o que prova (i).

Para (ii), notemos que para toda $f \in L_A$ com $\|f\|_A \leq 1$ vale que

$$\int_X |fg| d\mu = \int_F |fg| d\mu = \int_X (|f| \operatorname{sgn} g) \xi_F dG \leq \|f\|_A \|g\|_{\bar{A}} \leq \|g\|_{\bar{A}}.$$

Portanto $N_{\bar{A}}(g) \leq \|g\|_{\bar{A}}$, que é (ii), e ainda por (1.31), temos que $g \in L_{\bar{A}}$,

Para (iii) suponhamos $b = \infty$, e que exista $h \in L_{\bar{A}}$ tal que

$$\int_F f dG = \int_F f h d\mu \quad \text{para toda } f \in J_A.$$

Então $h\xi_F \in L_1(X, \Sigma, \mu)$ por (1.44), e para todo $E \in \Sigma$ temos que

$$G_1(E) = G(E \cap F) = \int_F \xi_{E \cap F} dG = \int_F \xi_{E \cap F} h d\mu = \int_E h \xi_F d\mu = \int_E h d\mu_1.$$

Então como $h \in L_1(X, \Sigma, \mu_1)$ temos por (2) que $h = g_1 \mu_1$ -q.s., e assim $h \xi_F = g_1 \xi_F = g \mu$ -q.s., o que prova (iii)//

(6.8) Proposição. Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida σ -finita, $b = \infty$ e $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$, então existe $g \in L_{\bar{A}}$ tal que

$$(i) \quad \int_X f dG = \int_X f g d\mu, \quad \text{para toda } f \in J_A;$$

$$(ii) \quad N_{\bar{A}}(g) \leq \|G\|_{\bar{A}}$$

(iii) se $h \in L_{\bar{A}}$ é tal que

$$\int_X f dG = \int_X f h d\mu, \quad \text{para toda } f \in J_A,$$

então $h = g \mu$ -q.s.;

(iv) se $J_A = M_A$, então $N_{\bar{A}}(g) = \|G\|_{\bar{A}}$.

Demonstração. Seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-decrescente de elementos de Σ_1 tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Como $b = \infty$, sabemos por (5.29), que G é σ -aditiva sobre Σ_1 , e assim para todo $n \in \mathbb{N}$, aplicando (6.7), existe

$g_n \in L_{\bar{A}}$ tal que

$$\int_{E_n} f dG = \int_{E_n} f g_n d\mu, \quad \text{para } f \in L_A; \quad (1)$$

se $h_n \in L_{\bar{A}}$ satisfaz (1), para $f \in J_A$, então $h_n \xi_{E_n} = g_n \mu$ -q.s. (2)

Fixemos $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Para $f \in L_A$, lembrando que

$E_k \subset E_n$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{E_k} f(g_n - g_k) d\mu &= \int_{E_n} f \xi_{E_k} g_n d\mu - \int_{E_k} f g_k d\mu \\ &= \int_{E_n} f \xi_{E_k} dG - \int_{E_k} f dG = 0\end{aligned}$$

Sejam $H = \{x \in E_k : g_n(x) \neq g_k(x)\}$ e

$f_0 = \text{sgn}(g_n - g_k)$. Como $\mu(H) \leq \mu(E_k) < \infty$ é claro que $f \in \sigma \cap L_A$, e assim

$$0 = \int_{E_k} f_0 (g_n - g_k) d\mu = \int_{E_k} |g_n - g_k| d\mu = \int_H |g_n - g_k| d\mu.$$

Portanto $\mu(H) = 0$ e podemos supor, sem perda de generalidade que $g_n \xi_{E_k} = g_k \xi_{E_k}$.

Seja $g = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n \xi_{E_n})$. Então, se $x \in X$ e $k = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\}$, temos que $g(x) = g_k(x)$ e portanto g está bem definida e é uma função mensurável.

Pelo Teorema da Convergência Monótona e (1) temos que, para $f \in L_A$ vale a relação

$$\begin{aligned}\int_X |fg| d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f g_n \xi_{E_n}| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| \text{sgn}(g_n) g_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| \text{sgn}(g_n) dG \leq \|f \text{sgn}(g_n) \xi_{E_n}\|_A \|G\|_{\bar{A}} \\ &\leq \|f\|_A \|G\|_{\bar{A}} < \infty.\end{aligned}$$

Portanto $fg \in L_1$ para todo $f \in L_A$ e $N_{\bar{A}}(g) \leq \|g\|_{\bar{A}}$, que é (ii). Por (1.31) temos que $g \in L_{\bar{A}}$.

Provaremos que g verifica (i).

Seja $f \in J_A$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e (1.21) temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f\xi_{E_n}\|_A = 0$.

Como $b = \infty$, por (1.22) e (5.12) temos que $(f\xi_{E_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f .

Por (5.19) existe $c \in [0, \infty[$ tal que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_X |f\xi_{E_n} - f\xi_{E_m}| dv(G, \cdot) \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f\xi_{E_n} - f\xi_{E_m}\|_A (2\alpha_G^{\bar{A}} + c) = 0.$$

Portanto por (4.27), temos que

$$\int_X f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f\xi_{E_n} dG. \quad (3)$$

Por (3), (1) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, lembrando que $fg \in L_1$, temos que

$$\int_X f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f\xi_{E_n} dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f\xi_{E_n} g_n d\mu = \int_X fg d\mu,$$

o que prova (i).

Para (iii), suponhamos que exista $h \in L_{\bar{A}}$ tal que

$$\int_X f dG = \int_X fh d\mu, \text{ para toda } f \in J_A.$$

Então para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f \in J_A$ temos que

$$\int_{E_n} f dG = \int_X f \xi_{E_n} dG = \int_X f \xi_{E_n} h d\mu = \int_{E_n} f h d\mu .$$

Por (2) concluímos que $h \xi_{E_n} = g_n$ μ -q.s., para $n \in \mathbb{N}$, e portanto $h=g$ μ -q.s.

Para (iv), como $J_A = M_A$ temos por (5.31) e (ii) que

$$\begin{aligned} \|G\|_{\bar{A}} &\geq N_{\bar{A}}(g) \geq \sup\left\{\int_X |fg| d\mu : f \in J_A \text{ e } \|f\|_A \leq 1\right\} \\ &\geq \sup\left\{\left|\int_X fg d\mu\right| : f \in J_A \text{ e } \|f\|_A \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_X f dG\right| : f \in J_A \text{ e } \|f\|_A \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_X f dG\right| : f \in M_A \text{ e } \|f\|_A \leq 1\right\} = \|G\|_{\bar{A}} , \end{aligned}$$

o que prova (iv). //

Obteremos (6.8.i) sem a hipótese de que (X, Σ, μ) seja um espaço de medida σ -finita.

(6.9) Proposição. Se $\bar{a}=0$, $J_A = M_A$ e $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$, então existe $g \in L_{\bar{A}}$ tal que

$$(i) \quad \int_X f dG = \int_X f g d\mu, \text{ para toda } f \in M_A ;$$

$$(ii) \quad N_{\bar{A}}(g) = \|G\|_{\bar{A}} ;$$

$$(iii) \quad \text{se } h \in L_{\bar{A}} \text{ é tal que}$$

$$\int_X f dG = \int_X f h d\mu, \text{ para toda } f \in M_A,$$

então $h=g$ μ -q.s.

Demonstração. Observemos que da hipótese $J_A = M_A$, lembrando que (X, Σ, μ) não tem átomos de medida infinita, temos que $b=\infty$ (2.6.ii).

Se $\mu(X) < \infty$, nada temos a demonstrar (6.8).

Suponhamos $\mu(X) = \infty$. A hipótese de que $J_A = M_A$, juntamente com (2.6.i), garante que $a=0$. Como $\bar{a}=0$, temos por (5.32), que existe $E \in \Sigma$ tal que

E é reunião enumerável de elementos de Σ_1 ; (1)

se $S \in \Sigma_1$ e $S \subset E^c$, então $G(S) = 0$. (2)

Seja $f \in M_A$. Por (5.21.v) existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de L_A tal que

$$\int_F f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n dG, \text{ para todo } F \in \Sigma. \quad (3)$$

Tendo em vista que $a=0$ e que $f_n \in \sigma \cap L_A$, temos por (1.19.iii), que $\mu(\{x \in X: f_n(x) \neq 0\}) < \infty$. Portanto por (2) concluímos que

$$\int_{E^c} f_n dG = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Por (3) e (4) temos que

$$\int_X f dG = \int_E f dG. \quad (5)$$

Observemos ainda que, se $h \in L_{\bar{A}}$ e

$$\int_{E^c} f h d\mu = 0 \text{ para toda } f \in M_A, \text{ então } h \xi_{E^c} = 0 \text{ } \mu\text{-q.s.} \quad (6)$$

De fato, se $\|h\|_{\bar{A}} = 0$ a relação (6) é imediata. Se $\|h\|_{\bar{A}} \neq 0$, então por (1.17.i) temos que para $\gamma \in]0, \infty[$ e $H = \{x \in E^c: |h(x)| > \gamma\}$ vale que

$$\bar{A}\left(\frac{\gamma}{\|h\|_{\bar{A}}}\right)\mu(H) \leq \int_{E^c} \bar{A}\left(\frac{|h|}{\|h\|_{\bar{A}}}\right)d\mu \leq 1,$$

e como $\bar{a}=0$ concluímos que $\mu(H) < \infty$. Assim $\text{sgn}(h)\xi_H \in M_A$ e

$$0 = \int_{E^c} \text{sgn}(h)\xi_H h d\mu = \int_{E^c} |h|\xi_H d\mu \geq \gamma\mu(H).$$

Portanto $\mu(H) = 0$, o que prova (6).

Lembrando (5) e (6), obtemos por (1) e (6.8) o resultado desejado. //

(6.10) Proposição. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida σ -finita, ou seja $\bar{a}=0$. Se $J_A = M_A$, então $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$ (e portanto $(M_A)^*$) é isometricamente isomorfo a $L_{\bar{A}}$. Mais precisamente, a toda $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$ corresponde uma única $\dot{g} \in L_{\bar{A}}$ tal que

$$(i) \quad \int_X f dG = \int_X f g d\mu, \text{ para toda } f \in M_A;$$

$$(ii) \quad \|G\|_{\bar{A}} = N_{\bar{A}}(g).$$

A correspondência $G \mapsto \dot{g}$ é linear e sobrejetora.

Demonstração. Lembrando (2.6), por (6.8) e (6.9) basta provar que a correspondência $G \mapsto \dot{g}$, obviamente linear, é sobrejetora. Para isto seja $\dot{g} \in L_{\bar{A}}$ e tomemos

$$G(E) = \int_E g d\mu, \text{ para } E \in \Sigma_1.$$

É imediato que G está bem definida (1.44), que é uma medida em Σ_1 , que $G \ll \mu$, e que $v(G, E) \leq \|g\|_1 < \infty$, para todo $E \in \Sigma_1$. Resta verificarmos que $\alpha_G^{\bar{A}} < \infty$, visto que (i) é satisfeita para $f \in \sigma \cap L_A$ e vale (5.21).

Se $\|g\|_{\bar{A}} = 0$, então $G=0$ e $\alpha_G^{\bar{A}} = 0$. Suponhamos $\|g\|_{\bar{A}} > 0$.

Tomemos $(E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(\Sigma_1, X)$. Então por (1.20) e (1.17.i), temos que

$$\sum_{i=1}^n \bar{A}\left(\frac{|G(E_i)|}{\|g\|_{\bar{A}}^\mu(E_i)}\right) \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \bar{A}\left(\frac{|g|}{\|g\|_{\bar{A}}}\right) d\mu \leq 1,$$

e assim $I_{\bar{A}}\left(\frac{G}{\|g\|_{\bar{A}}}\right) \leq 1$, e por conseguinte $\alpha_G^{\bar{A}} \leq \|g\|_{\bar{A}} < \infty$.

Portanto $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$. //

A conclusão de (6.10) pode ser falsa se $J_A \neq M_A$; é o que mostraremos em (6.11).

(6.11) Proposição. Se $b=\infty$ e $J_A \neq M_A$, então existe $x^* \in (M_A)^*$ tal que, para toda $\dot{g} \in L_{\bar{A}}$ a igualdade (6.10.i) é falsa.

Demonstração. Observemos que das hipóteses concluímos por (2.5.v) que $a > 0$, e por (2.5.iv) que $\mu(X) = \infty$.

Como $\xi_X \in M_A$ e $\xi_X \notin J_A$, existe pelo Teorema de Hahn-Banach ([1.7.2] de [E]), observando que J_A é fechado, um $x^* \in (M_A)^*$ tal que

$$x^*(\xi_X) \neq 0, \text{ e } x^*(f) = 0 \text{ para toda } f \in J_A. \quad (1)$$

Suponhamos que exista $\dot{g} \in L_{\bar{A}}$ tal que

$$x^*(f) = \int_X fg d\mu, \text{ para toda } f \in M_A. \quad (2)$$

Como $x^*(\xi_X) \neq 0$ e vale (2) temos que $\mu(\{x \in X: g(x) \neq 0\}) > 0$. Portanto existe $\gamma \in]0, \infty[$ tal que, se $E = \{x \in X: |g(x)| > \gamma\}$, então $\mu(E) > 0$.

Tendo em vista que $a > 0$ e por conseguinte $\bar{a} = 0$ (1.3.iv), temos lembrando (1.17.i), que

$$\bar{A}\left(\frac{\gamma}{\|g\|_{\bar{A}}}\right)\mu(E) \leq \int_E \bar{A}\left(\frac{|g|}{\|g\|_{\bar{A}}}\right)d\mu \leq \int_X \bar{A}\left(\frac{|g|}{\|g\|_{\bar{A}}}\right)d\mu \leq 1.$$

Assim $\mu(E) < \infty$.

Seja $f = \xi_E \operatorname{sgn}(g)$. É claro que $f \in J_A$ pois $\mu(E) < \infty$ e $b = \infty$.

Por (1), lembrando (2), concluímos que

$$0 = x^*(f) = \int_X fg d\mu = \int_E |g| d\mu \geq \gamma \mu(E).$$

Portanto $\mu(E) = 0$, o que é uma contradição. Assim não existe $\dot{g} \in L_{\bar{A}}$ que satisfaça (2). //

(6.12) Observações: Denotando

$$M_A = \{\dot{f} \in L_A : f \in M_A\} \quad \text{e} \quad J_A = \{\dot{f} \in L_A : f \in J_A\},$$

observamos o seguinte:

(i) $J_A = M_A$ se, e somente se, $J_A = M_A$.

(ii) O espaço $(M_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $(M_A)^*$.

Mais precisamente, a todo $x^* \in (M_A)^*$ corresponde $\tilde{x}^* \in (M_A)^*$ tal que $x^*(f) = \tilde{x}^*(\dot{f})$ para $f \in M_A$, $\|x^*\| = \|\tilde{x}^*\|$, e a correspondência $x^* \mapsto \tilde{x}^*$ é linear e sobrejetora.

(iii) De modo análogo a (ii), verifica-se que $(L_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $(L_A)^*$.

A seguir mostramos que o resultado (6.4) coincide com [5.5] e [5.7] de [M].

(6.13) Proposição. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida σ -finita, ou seja $\bar{a}=0$. Se A verifica a condição Δ_2 , então $(L_A(X, \Sigma, \mu))^*$ é isometricamente isomorfo a $L_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$.

Demonstração. Segue de (6.10), lembrando que $J_A = M_A = L_A$ quando A satisfaz a condição Δ_2 (2.8), e de (6.12.iii). //

(6.14) Observações: (i) Se $p, q \in]1, \infty[$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e $A(u) = u^p$ para $u \in [0, \infty[$, então $L_A = L_p$, $L_{\bar{A}} = L_q$, $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_p$ e $N_{\bar{A}}(\cdot) = \|\cdot\|_q$, sendo que por (1.7.iii) e [2.19] de [B], a função $\bar{A}$ é dada por $\bar{A}(u) = \left(\frac{u}{p}\right)^q \cdot \frac{1}{q}$ para $u \in [0, \infty[$.

Como $\bar{a}=0$ e $J_A = M_A = L_A$ (2.8) temos que (6.10) nos fornece a conhecida caracterização de $(L_p)^*$.

(ii) As funções $A_1(u) = u$ e $A_2(u) = \infty \cdot \chi_{]1, \infty[}(u)$ definidas em $[0, \infty[$, e que correspondem, respectivamente, a L_1 e L_∞ , não satisfazem a hipótese de (6.10). De fato, $\bar{a} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{A_1(u)}{u} = 1 > 0$ e $J_{A_2} \neq M_{A_2}$ por (2.5.iii).

Agora estudaremos a reflexividade do espaço L_A .

(6.15) Proposição. Se $L_A = J_A$ e $L_{\bar{A}} = J_{\bar{A}}$, então L_A e $L_{\bar{A}}$ são reflexivos.

Demonstração. Como no caso em que $\mu(X) = \infty$ essas hipóteses implicam que $a = \bar{a} = 0$ (2.6.i), temos que (6.10) nos fornece um isomorfismo isométrico de $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$ em $L_{\bar{A}}$, e outro de $G_A(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$ em L_A .

Por (6.4), (6.12.i) e (6.12.ii), temos que

$(L_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $L_{\bar{A}}$

e

$(L_{\bar{A}})^*$ é isometricamente isomorfo a L_A .

Portanto, a aplicação canônica de L_A em $(L_A)^{**}$, e a de $L_{\bar{A}}$ em $(L_{\bar{A}})^{**}$, são isomorfismos isométricos, e assim L_A e $L_{\bar{A}}$ são reflexivos. //

Em (6.17.ii) obteremos, sob a hipótese de que $b = \bar{b} = \infty$, a recíproca de (6.15).

(6.16) Proposição. Se L_A é reflexivo e $b = \infty$, então $J_A = M_A$.

Demonstração. Se $\mu(X) < \infty$, então por (2.5.iv) temos que $J_A = M_A$ e portanto nada temos a demonstrar.

Suponhamos $\mu(X) = \infty$. Se $J_A \neq M_A$, então $J_A \neq M_A$, e por (6.11) existe $x^* \in (M_A)^*$ tal que para toda $\dot{g} \in L_{\bar{A}}$ é falsa a igualdade

$$x^*(f) = \int_X fg d\mu, \text{ para } f \in M_A. \quad (1)$$

Por [1.7.1] de [E] (tomando para a semi-norma p a função $p(f) = \|x^*\| \|f\|_A$), existe $y^* \in (L_A)^*$ tal que

$$y^*(f) = x^*(f) \text{ para } f \in M_A, \text{ e } \|y^*\| = \|x^*\|.$$

Seja $\phi: L_{\bar{A}} \rightarrow (L_A)^*$ a função dada por

$$\phi(\dot{g}) = \phi_g \text{ sendo } \phi_g(\dot{f}) = \int_X fg d\mu \text{ para } \dot{f} \in L_A.$$

É claro que $\phi_g \in (L_A)^*$ e $\|\phi_g\| = N_{\bar{A}}(g)$.

Tomemos $\tilde{y}^*(\dot{f}) = y^*(f)$ para $\dot{f} \in L_A$. Como a igualdade em (1) é falsa para x^* , e y^* é uma extensão de x^* , temos que $\tilde{y}^* \notin \phi(L_{\bar{A}})$.

Verifica-se facilmente que $\phi(L_{\bar{A}})$ é um subespaço vetorial fechado de $(L_A)^*$, lembrando que $L_{\bar{A}}$ é completo.

Então pelo Teorema de Hahn-Banach ([1.7.2] de [E]) existe $\psi \in (L_A)^{**}$ tal que

$$\psi(\tilde{y}^*) \neq 0 \quad \text{e} \quad \psi(\phi(L_{\bar{A}})) = 0. \quad (2)$$

Como L_A é reflexivo, existe $\dot{f}_0 \in L_A$ tal que

$$\psi(z^*) = z^*(\dot{f}_0), \quad \text{para todo } z^* \in (L_A)^*. \quad (3)$$

Por (2) e (3) temos que

$$0 \neq \psi(\tilde{y}^*) = \tilde{y}^*(\dot{f}_0) \quad \text{e} \quad 0 = \psi(\phi_{f_0}) = \phi_{f_0}(\dot{f}_0) = \int_X f_0^2 d\mu,$$

o que é uma contradição, pois a primeira igualdade afirma que $\tilde{y}^*(\dot{f}_0) \neq 0$, e a outra que $f_0 = 0$ μ -q.s.

Portanto $J_A = M_A$. //

(6.17) Proposição. Se L_A é reflexivo, então

(i) $L_{\bar{A}}$ é reflexivo;

(ii) se $b = \bar{b} = \infty$, então $J_A = M_A = L_A$ e $J_{\bar{A}} = M_{\bar{A}} = L_{\bar{A}}$.

Demonstração. Para (i) basta observar que $(L_A)^*$ é reflexivo

([II.3.24] de [DS]), e que a função $\phi: L_{\bar{A}} \rightarrow (L_A)^*$ definida por

$\phi(\dot{g}) = \phi_g$ sendo $\phi_g(\dot{f}) = \int_X fg d\mu$ para $\dot{f} \in L_A$, é injetora e

$\|\phi_g\| = N_{\bar{A}}(g)$, lembrando [II.3.23] de [DS].

Para (ii) observemos que de (i) e (6.16) temos que $J_A = M_A$ e $J_{\bar{A}} = M_{\bar{A}}$. Provaremos que $M_A = L_A$ e $M_{\bar{A}} = L_{\bar{A}}$.

Como $J_A = M_A$ e $J_{\bar{A}} = M_{\bar{A}}$, temos por (2.6.i), que $a = \bar{a} = 0$ quando $\mu(X) = \infty$.

Por (6.12.ii) e (6.10), temos que

$$(M_{\bar{A}})^* \text{ é isometricamente isomorfo a } L_A. \quad (1)$$

Tendo em vista que $L_{\bar{A}}$ é reflexivo temos que $M_{\bar{A}}$ é reflexivo ([II.3.23] de [DS]), e por (1) concluímos que

$$M_{\bar{A}} \text{ é isometricamente isomorfo a } (L_A)^*. \quad (2)$$

Como $\phi: L_{\bar{A}} \rightarrow (L_A)^*$, definida anteriormente, é um isomorfismo isométrico sobre $\phi(L_{\bar{A}})$ concluímos, por (2) e tendo em vista as expressões dos isomorfismos isométricos, que

$$M_{\bar{A}} = L_{\bar{A}}.$$

$$\text{Analogamente } M_A = L_A.$$

(6.18) Corolário. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida não puramente atômico e $b = \bar{b} = \infty$. Se L_A é reflexivo, tem-se

(i) se $\mu(X) < \infty$, então A e $\bar{A}$ satisfazem a condição Δ_2 para valores grandes;

(ii) se $\mu(X) = \infty$, então A e $\bar{A}$ satisfazem a condição Δ_2 .

Demonstração. Como L_A é reflexivo e $b = \bar{b} = \infty$ temos por (6.17.ii), que $J_A = M_A = L_A$ e $J_{\bar{A}} = M_{\bar{A}} = L_{\bar{A}}$. Então por (2.6.i) concluímos que $a = \bar{a} = 0$ se $\mu(X) = \infty$.

Portanto (i) e (ii) seguem de (2.10). //

Por (6.15) e (6.17) obtemos o seguinte resultado:

(6.19) Proposição. Sejam $b = \bar{b} = \infty$. Tem-se

(i) L_A é reflexivo se, e somente se, $J_A = L_A$ e $J_{\bar{A}} = L_{\bar{A}}$.

o0o

§7. Caracterização do dual de $N_A(X, \Sigma, \mu)$

Convém lembrar que N_A é o espaço quociente de L_A por M_A , que ϕ é a aplicação definida em L_A por

$$\phi(f) = \hat{f} = f + M_A = \{f+h: h \in M_A\} \in N_A,$$

e que $f \in \tilde{L}_A$ se, e somente se, $\int_X A(|f|) d\mu < \infty$.

Neste parágrafo utilizaremos o fato que $(N_A, d(\cdot), \leq)$ é um reticulado de Banach (3.17).

Em (7.4) definiremos L-espaço e M-espaço. A seguir provaremos que $(N_A)^*$ é um L-espaço, e que N_A é um M-espaço, propriedades estas que nos serão úteis.

Definiremos uma nova integral em (7.13), e um espaço de medidas em (7.19), denotado por $\nu_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$, tal que todo $x^* \in (N_A)^*$ (como verificaremos em (7.29)), seja representado por esta integral, relativa a uma única $\nu \in \nu_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$.

Em (7.31) provaremos que $(N_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $(M_A)^\perp$, resultado este que será usado no §8.

(7.1) Proposição. O espaço $(N_A)^*$ é um reticulado de Banach.

Demonstração. Segue de (A.12), lembrando que N_A é um reticulado de Banach (3.17). //

(7.2) Proposição. Se $x^* \in (N_A)^*$ tem-se

$$(i) \quad \|x^*\| = \sup\{|x^*(\hat{f})|: \hat{f} \in \phi(\tilde{L}_A)\};$$

(ii) se $x^* \geq 0$, então

$$\|x^*\| = \sup\{x^*(\hat{f}) : \hat{0} \leq \hat{f} \in N_A \text{ e } d(\hat{f}) \leq 1\} = \sup\{x^*(\hat{f}) : \hat{0} \leq \hat{f} \in \phi(\tilde{L}_A)\}.$$

Demonstração. Seja $\tau = \sup\{|x^*(\hat{f})| : \hat{f} \in \phi(\tilde{L}_A)\}$. Por (3.19.iv) é imediato que $\tau \leq \|x^*\|$.

Para provarmos que $\tau \geq \|x^*\|$, fixemos $\gamma \in]0,1[$, e tomemos $\hat{f} \in N_A$ com $d(\hat{f}) \leq 1$.

Se $g = \gamma f$, então $d(\hat{g}) < 1$, e por (3.19.iii) temos que $\hat{g} \in \phi(\tilde{L}_A)$.

Portanto

$$|x^*(\hat{f})| = \frac{1}{\gamma} |x^*(\hat{g})| \leq \frac{\tau}{\gamma}.$$

Da relação acima concluímos que $\|x^*\| \leq \frac{\tau}{\gamma}$.

Como $\gamma \in]0,1[$ é arbitrário, concluímos que $\|x^*\| \leq \tau$, e assim (i) é verdadeira.

A asserção (ii) segue de (A.6) e (i), lembrando que N_A é um reticulado de Banach, e que $|\hat{f}| = |f|^\wedge$ (3.16). //

(7.3) Proposição. Sejam $x^*, y^* \in (N_A)^*$. Tem-se

(i) se $x^* \wedge y^* = 0$, então $\|x^* + y^*\| = \|x^* - y^*\|$;

(ii) se $x^*, y^* \geq 0$, então $\|x^* + y^*\| = \|x^*\| + \|y^*\|$;

(iii) $\|x^*\| = \| |x^*| \| = \|(x^*)_+\| + \|(x^*)_-\|$.

Demonstração. O item (i) segue de (A.9.i), lembrando N_A é um reticulado de Banach. A asserção (iii) segue das duas primeiras.

Provaremos (ii) a seguir.

Seja $\epsilon \in]0, \infty[$. Então por (7.2.ii), existem $\hat{0} \leq \hat{f}, \hat{g} \in \phi(\tilde{L}_A)$ tais que

$$x^*(\hat{f}) > \|x^*\| - \epsilon \quad \text{e} \quad y^*(\hat{g}) > \|y^*\| - \epsilon.$$

Tomemos $\hat{h} = \hat{f} \vee \hat{g}$. Então $\hat{0} \leq \hat{h} \in \phi(\tilde{L}_A)$ (3.19.v) e ainda

$$x^*(\hat{h}) + y^*(\hat{h}) \geq x^*(\hat{f}) + y^*(\hat{g}) > \|x^*\| + \|y^*\| - 2\epsilon. \quad (1)$$

Por (1), lembrando (7.2.ii), temos que

$$\|x^* + y^*\| \geq \|x^*\| + \|y^*\| - 2\epsilon.$$

Como $\epsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário concluímos que

$\|x^* + y^*\| \geq \|x^*\| + \|y^*\|$, o que prova (iii), pois a desigualdade contrária é imediata. //

(7.4) Definição. Seja $(E, \|\cdot\|, \leq)$ um reticulado de Banach. Dizemos que $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um L-espaco se, e somente se,

$$(L) \quad \text{se } 0 \leq x, y \in E, \text{ então } \|x+y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Dizemos que $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um M-espaco se, e somente se,

$$(M) \quad \text{se } 0 \leq x, y \in E, \text{ então } \|xvy\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

A seguir provaremos o resultado (3.18), que a partir daqui, será frequentemente usado.

(7.5) Proposição. São verdadeiras as seguintes asserções:

(i) $(N_A)^*$ é um L-espço;

(ii) N_A é um M-espço.

Demonstração. O item (i) segue de (7.1) e (7.3.ii). A asserção (ii) decorre de (i) juntamente com (A.17), lembrando que N_A é um reticulado de Banach. //

Nosso objetivo a partir daqui é definir o espaço $V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ que está contido em $ba(X, \Sigma, \mu)$ (sendo $ba(X, \Sigma, \mu)$ o espaço das medidas em Σ , de variação limitada e absolutamente contínuas em relação a μ), e definir uma integral de modo que, se $x^* \in (N_A)^*$, então existe uma única $v \in V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ para a qual se tenha

(i) $x^*(f) = \int_X f dv$, para toda $\hat{f} \in N_A$;

(ii) $\|x^*\| = v(v, X)$.

(7.6) Definição. Dizemos que $\pi = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ é uma partição de X se, e somente se, $(E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(\Sigma, X)$, como em (4.3), e $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$. Dizemos que uma partição π_1 é mais fina que uma partição π_2 (escrevemos $\pi_2 \leq \pi_1$) se, e somente se, sendo $\pi_1 = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ e $\pi_2 = (F_1, F_2, \dots, F_\ell)$, todo o conjunto E_i é subconjunto de algum F_j , sendo $i, j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq \ell$.

Denotaremos por P o conjunto das partições de X .

(7.7) Definição. Sejam $f \in L_A$, não-negativa, e ν uma medida em Σ , limitada. Se $\pi = (E_1, E_2, \dots, E_n) \in P$ e $x_\pi = \sum_{i=1}^n d((f \chi_{E_i})^\wedge) \nu(E_i)$, diremos que $(x_\pi)_{\pi \in P}$ converge para um número real I se, e somente se, dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\pi_\epsilon \in P$ tal que

(i) se $\pi \in P$ e $\pi_\epsilon \leq \pi$, então $|x_\pi - I| < \epsilon$.

Se existe I verificando (i), então I é único, e neste caso escrevemos

$$I = \int_X f d\nu.$$

(7.8) Proposição. Seja ν uma medida em Σ , não-negativa e limitada. Se $f \in L_A$ e é não-negativa, então

(i) existe $\int_X f d\nu$ e

$$0 \leq \int_X f d\nu = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d((f \chi_{E_i})^\wedge) \nu(E_i) : (E_1, E_2, \dots, E_n) \in P \right\} \leq d(\hat{f}) \nu(X);$$

(ii) se $f \in M_A$, então $\int_X f d\nu = 0$;

(iii) se g é uma função mensurável, não-negativa e tal que $f = g$ μ -q.s., então $\int_X g d\nu = \int_X f d\nu$;

(iv) se g é uma função mensurável tal que $0 \leq g \leq f$ μ -q.s., então existe $\int_X g d\nu$ e $0 \leq \int_X g d\nu \leq \int_X f d\nu$.

Se $E \in \Sigma$ e ν_E é a medida em Σ dada por $\nu_E(F) = \nu(E \cap F)$, então

$$(v) \quad \int_X f \xi_E d\nu = \int_X f d\nu_E.$$

Demonstração. Usando a definição de integral, (3.9.i), (2.12) e (1.16.i), é fácil verificar os quatro primeiros itens. Provaremos (v) a seguir.

Seja $E \in \Sigma$. Como por (i), existem $\int_X f \xi_E d\nu$ e $\int_X f d\nu_E$, dado $\varepsilon \in]0, \infty[$ existem $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}$ tais que para $\pi = (H_1, H_2, \dots, H_n) \in \mathcal{P}$ tenhamos:

$$\pi_1 \leq \pi \text{ implica que } \left| \sum_{i=1}^n d((f \xi_E)^\wedge)_{\nu(H_i)} - \int_X f \xi_E d\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$\pi_2 \leq \pi \text{ implica que } \left| \sum_{i=1}^n d((f \xi_E)^\wedge)_{\nu_E(H_i)} - \int_X f d\nu_E \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Suponhamos $\pi_1 = (E_1, E_2, \dots, E_{n_1})$, $\pi_2 = (F_1, F_2, \dots, F_{n_2})$ e seja $\pi_0 = (H_1, H_2, \dots, H_{n_0}) \in \mathcal{P}$ tal que

$$\{H_1, H_2, \dots, H_{n_0}\} = \{E_i \cap F_j \cap E, E_i \cap F_j \cap E^c : i, j \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq n_1 \text{ e } 1 \leq j \leq n_2\}.$$

Tendo em vista que $\pi_1 \leq \pi_0$ e $\pi_2 \leq \pi_0$, temos que

$$\begin{aligned}
 \left| \int_X f \xi_E dv - \int_X f dv_E \right| &= \left| \int_X f \xi_E dv - \sum_{i=1}^{n_0} d((f \xi_{E \cap H_i})^\wedge) v(H_i) \right| + \\
 &+ \left| \sum_{i=1}^{n_0} [d((f \xi_{E \cap H_i})^\wedge) v(H_i) - d((f \xi_{H_i})^\wedge) v_E(H_i)] \right| + \\
 &+ \left| \sum_{i=1}^{n_0} d((f \xi_{H_i})^\wedge) v_E(H_i) - \int_X f dv_E \right| \\
 &\leq \epsilon + \left| \sum_{i=1}^{n_0} [d((f \xi_{E \cap H_i})^\wedge) v(H_i) - d((f \xi_{H_i})^\wedge) v(E \cap H_i)] \right|.
 \end{aligned}$$

Observando que $H_i \subset E$ ou $H_i \subset E^c$ para $i \in \{1, 2, \dots, n_0\}$ segue que

$$\sum_{i=1}^{n_0} d((f \xi_{E \cap H_i})^\wedge) v(H_i) = \sum_{i=1}^{n_0} d((f \xi_{H_i})^\wedge) v(E \cap H_i),$$

e portanto

$$\left| \int_X f \xi_E dv - \int_X f dv_E \right| \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário, concluímos que (v) é verdadeira. //

(7.9) Proposição. Sejam ν_1 e ν_2 medidas em Σ , limitadas, e $f \in L_A$ não-negativa. Se f é tal que existem $\int_X f d\nu_1$ e $\int_X f d\nu_2$, então existem $\int_X f d(\gamma \nu_1)$ e $\int_X f d(\nu_1 + \nu_2)$, sendo $\gamma \in \mathbb{R}$, e ainda

- (i) $\int_X f d(\gamma v_1) = \gamma \int_X f dv_1$;
(ii) $\int_X f d(v_1 + v_2) = \int_X f dv_1 + \int_X f dv_2$.

Demonstração. O item (i) é de fácil verificação. Provaremos (ii).

Como existem $\int_X f dv_1$ e $\int_X f dv_2$, dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existem $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}$ tais que, para $j \in \{1, 2\}$ e $\pi = (H_1, H_2, \dots, H_n) \in \mathcal{P}$ tenhamos:

$$\pi_j \leq \pi \text{ implica que } \left| \sum_{i=1}^n d((f \xi_{H_i})^\wedge) v_j(H_i) - \int_X f dv_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Suponhamos $\pi_1 = (E_1, E_2, \dots, E_{n_1})$, $\pi_2 = (F_1, F_2, \dots, F_{n_2})$ e seja $\pi_0 = (\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_{n_0}) \in \mathcal{P}$ tal que $\{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_{n_0}\} = \{E_i \cap F_j : i, j \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq n_1 \text{ e } 1 \leq j \leq n_2\}$.

Então $\pi_1 \leq \pi_0$, $\pi_2 \leq \pi_0$, e ainda se $\pi = (H_1, H_2, \dots, H_n) \in \mathcal{P}$ é tal que $\pi_0 \leq \pi$, por (1) temos que

$$\left| \sum_{i=1}^n d((f \xi_{H_i})^\wedge) (v_1 + v_2)(H_i) - \int_X f dv_1 - \int_X f dv_2 \right| < \varepsilon.$$

Portanto existe $\int_X f d(v_1 + v_2)$ e vale (ii). //

(7.10) Corolário. Seja $f \in L_A$, não negativa. Se v é uma medida em Σ , limitada, então existe $\int_X f dv$.

Demonstração. Sabemos por (4.6) (fazendo $H = \Sigma$) que existem v_1 e v_2 medidas em Σ , não-negativas, limitadas e tais que $v = v_1 - v_2$.

Então, por (7.8.i), existem $\int_X f dv_1$ e $\int_X f dv_2$, e portanto por (7.9), existe $\int_X f dv$ e $\int_X f dv = \int_X f dv_1 - \int_X f dv_2$.//

(7.11) Proposição. Se $f, g \in L_A$ são não-negativas e ν é uma medida em Σ , não-negativa e limitada, então

- (i) $\int_X (\gamma f) dv = \gamma \int_X f dv$, para todo $\gamma \in [0, \infty[$;
- (ii) $\int_X (f+g) dv = \int_X f dv + \int_X g dv$.

Demonstração. Como $d(\cdot)$ é uma norma em N_A e vale (7.8.i), temos que

(i) e a desigualdade

$$\int_X (f+g) dv \leq \int_X f dv + \int_X g dv, \quad (1)$$

são imediatas. Provaremos que em (1) vale a igualdade.

Sejam $B = \{x \in X: f(x) \neq 0\}$ e $C = \{x \in X: g(x) \neq 0\}$.

Suponhamos, em primeiro lugar, que $B \cap C = \emptyset$.

Como existem $\int_X f dv$ e $\int_X g dv$, dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existem

$\pi_1, \pi_2 \in P$ tais que para $\pi = (H_1, H_2, \dots, H_n) \in P$ tenhamos:

$$\pi_1 \leq \pi \text{ implica que } \left| \sum_{i=1}^n d((f \chi_{H_i})^\wedge) \nu(H_i) - \int_X f dv \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2)$$

e

$$\pi_2 \leq \pi \text{ implica que } \left| \sum_{i=1}^n d((g \chi_{H_i})^\wedge) \nu(H_i) - \int_X g dv \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Suponhamos $\pi_1 = (E_1, E_2, \dots, E_{n_1})$, $\pi_2 = (F_1, F_2, \dots, F_{n_2})$ e seja $\pi_0 = (\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_{n_0}) \in P$ tal que

$$\{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_{n_0}\} = \{E_i \cap F_j \cap B, E_i \cap F_j \cap C, E_i \cap F_j \cap (B \cup C)^c : i, j \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq n_1 \text{ e } 1 \leq j \leq n_2\}.$$

Tomemos $\pi = (H_1, H_2, \dots, H_n) \in P$ com $\pi_0 \leq \pi$ e sejam

$$I_1 = \{\ell \in \mathbb{N} : 1 \leq \ell \leq n \text{ e } H_\ell \subset B\}$$

e

$$I_2 = \{\ell \in \mathbb{N} : 1 \leq \ell \leq n \text{ e } H_\ell \subset C\}.$$

Como $f\xi_{B^c} = g\xi_{C^c} = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(((f+g)\xi_{H_i})^\wedge) \nu(H_i) &= \sum_{i \in I_1} d((f\xi_{H_i})^\wedge) \nu(H_i) + \\ &+ \sum_{i \in I_2} d((g\xi_{H_i})^\wedge) \nu(H_i), \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} d((f\xi_{H_i})^\wedge) \nu(H_i) &= \sum_{i \in I_1} d((f\xi_{H_i})^\wedge) \nu(H_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n_1} d((f\xi_{E_i \cap B^c})^\wedge) \nu(E_i \cap B^c), \end{aligned}$$

e que

$$\sum_{i \in I_2} d((g \xi_{H_i})^\wedge)_v(H_i) = \sum_{i \in I_2} d((g \xi_{H_i})^\wedge)_v(H_i) + \sum_{i=1}^{n_2} d((g \xi_{F_i \cap C^c})^\wedge)_v(F_i \cap C^c).$$

Com estas igualdades e as relações (2) e (3), observando que

$$\pi_1 \leq (H_{k_1}, \dots, H_{k_p}, E_1 \cap B^c, \dots, E_{n_1} \cap B^c),$$

e

$$\pi_2 \leq (H_{\ell_1}, \dots, H_{\ell_q}, F_1 \cap C^c, \dots, F_{n_2} \cap C^c),$$

sendo que $I_1 = \{k_1, \dots, k_p\}$ e $I_2 = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q\}$, temos que

$$\left| \sum_{i=1}^n d(((f+g)\xi_{H_i})^\wedge)_v(H_i) - \int_X f dv - \int_X g dv \right| < \epsilon,$$

$$\text{e portanto } \int_X (f+g) dv = \int_X f dv + \int_X g dv, \text{ se } B \cap C = \emptyset.$$

Agora suponhamos $B \subset C$ e $0 \leq f \leq g$.

Como $0 \leq \int_X f dv \leq \int_X g dv$ (7.8.iv), é imediato que a igualdade em (1) é verdadeira se $\int_X g dv = 0$. Suponhamos que $\int_X g dv > 0$.

Sejam $J = \int_X g dv > 0$ e $h = \frac{f}{g}$, com a convenção de que $0/0 = 0$. Como h é uma função mensurável, não-negativa e limitada, existe uma seqüência não-decrescente $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples não-negativas, com $0 \leq h_n \leq h$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que converge uniformemente para h . Portanto dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq h - h_{n_0} < \epsilon/J. \quad (4)$$

Se $h_{n_0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_{H_i}$ com $\alpha_i \in [0, \infty[$ e $(H_1, H_2, \dots, H_n) \in \mathcal{P}$,

então por (4), temos que

$$0 \leq gh_{n_0} \leq f < g(h_{n_0} + \frac{\varepsilon}{J}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \frac{\varepsilon}{J}) g \xi_{H_i}. \quad (5)$$

Pelo caso anterior, observando que $H_i \cap H_j = \emptyset$ se $i \neq j$, e que vale (1.16.i), temos que

$$\int_X \left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \frac{\varepsilon}{J}) g \xi_{H_i} \right] dv = \sum_{i=1}^n \int_X ((\alpha_i + \frac{\varepsilon}{J}) g \xi_{H_i}) dv,$$

e assim, por (5), (7.8.iv) e (i), obtemos

$$\begin{aligned} \int_X f dv + \int_X g dv &\leq \int_X \left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \frac{\varepsilon}{J}) g \xi_{H_i} \right] dv + \int_X g dv \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \frac{\varepsilon}{J}) \int_X g \xi_{H_i} dv + \int_X g dv \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1) \int_X g \xi_{H_i} dv + \frac{\varepsilon}{J} \int_X g dv \\ &= \int_X (gh_{n_0} + g) dv + \varepsilon \leq \int_X (f+g) dv + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon \in]0, \infty[$ é arbitrário, segue que

$$\int_X (f+g) dv \geq \int_X f dv + \int_X g dv,$$

o que prova a igualdade em (1), neste caso.

Finalmente consideremos o caso geral.

Sejam $E_1 = \{x \in X: 0 \leq f(x) \leq g(x)\}$ e $E_2 = X \cap E_1^c$.

Lembrando que (ii) é verdadeira nos casos anteriores e que

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$, temos que

$$\begin{aligned} \int_X (f+g) dv &= \int_X (f+g) \chi_{E_1} dv + \int_X (f+g) \chi_{E_2} dv \\ &= \int_X f \chi_{E_1} dv + \int_X g \chi_{E_1} dv + \int_X f \chi_{E_2} dv + \int_X g \chi_{E_2} dv \\ &= \int_X f dv + \int_X g dv, \end{aligned}$$

provando (ii). //

(7.12) Corolário. Se $f, g \in L_A$ são não-negativas e ν é uma medida em Σ , limitada, então

$$\begin{aligned} (i) \quad \int_X \gamma f dv &= \gamma \int_X f dv, \text{ para todo } \gamma \in [0, \infty[; \\ (ii) \quad \int_X (f+g) dv &= \int_X f dv + \int_X g dv. \end{aligned}$$

Demonstração. Por (4.6) (tomando $H = \Sigma$), existem ν_1 e ν_2 medidas em Σ , não-negativas, limitadas e tais que $\nu = \nu_1 - \nu_2$. Então por (7.11), sabemos que (i) e (ii) são verdadeiros para ν_1 e ν_2 , e por conseguinte também verdadeiros para $\nu = \nu_1 - \nu_2$ (7.9). //

(7.13) Definição. Seja ν uma medida em Σ , limitada. Para $f \in L_A$, definimos o símbolo $\int_X f dv$ pela expressão

$$(i) \quad \int_X f dv = \int_X f_+ dv - \int_X f_- dv ,$$

sendo que $f_+ = \max\{f, 0\}$ e $f_- = \max\{-f, 0\}$.

(7.14) Proposição. Se $f, g \in L_A$ e ν é uma medida em Σ , limitada, então

$$(i) \quad \int_X \gamma f dv = \gamma \int_X f dv , \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{R} ;$$

$$(ii) \quad \int_X (f+g) dv = \int_X f dv + \int_X g dv .$$

Demonstração. Segue de (7.13) e (7.12), observando que

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_- ,$$

$$(\gamma f)_+ = \gamma f_+ \text{ e } (\gamma f)_- = \gamma f_- , \text{ para } \gamma \in [0, \infty[,$$

e

$$(\gamma f)_+ = -\gamma f_- \text{ e } (\gamma f)_- = -\gamma f_+ , \text{ para } \gamma \in]-\infty, 0[. //$$

(7.15) Proposição. Sejam ν_1 e ν_2 medidas em Σ , limitadas. Se $f \in L_A$, então

$$(i) \quad \int_X f d(\gamma \nu_1) = \gamma \int_X f d\nu_1 , \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{R} ;$$

$$(ii) \quad \int_X f d(\nu_1 + \nu_2) = \int_X f d\nu_1 + \int_X f d\nu_2 .$$

Demonstração. São conseqüências de (7.13), (7.10) e (7.9). //

Definiremos em (7.17) uma função $x^* \in (N_A)^*$ por intermédio de uma medida em Σ , limitada. Antes, um resultado auxiliar.

(7.16) Proposição. Sejam $f, g \in L_A$ e ν uma medida em Σ , limitada. São verdadeiras as seguintes asserções:

- (i) se $f \in M_A$, então $\int_X f d\nu = 0$;
- (ii) se $f = g$ μ -q.s, então $\int_X f d\nu = \int_X g d\nu$;
- (iii) se $g \in M_A$ e $h = f+g$, então $\int_X h d\nu = \int_X f d\nu$.

Demonstração. Lembrando (7.13) temos que (i) segue de (2.12) e (7.8.ii), a asserção (ii) é consequência de (7.8.iii) e (7.12.ii), para (iii) basta aplicarmos (7.14.ii) e (i), observando (4.6) e (7.9). //

(7.17) Proposição. Se ν é uma medida em Σ , limitada, então a igualdade

$$(i) \quad x^*(\hat{f}) = \int_X f d\nu, \text{ para } \hat{f} \in N_A,$$

define uma função de N_A em $\mathbb{R}$ tal que

- (ii) $x^* \in (N_A)^*$;
- (iii) $\|x^*\| \leq \nu(\nu, X)$.

Demonstração. O segundo membro de (i), por (7.16.iii) independe do representante de $\hat{f}$. Por (7.14), a função x^* é linear. Provaremos que, se $\hat{f} \in N_A$, então $|x^*(f)| \leq \nu(\nu, X)d(\hat{f})$, obtendo assim (ii) e (iii).

Por (4.6) (tomando $H = \Sigma$), existem ν_1 e ν_2 medidas em Σ , não-negativas, limitadas e tais que $\nu = \nu_1 - \nu_2$ e $\nu(\nu, X) = \nu_1(X) + \nu_2(X)$. Então, se $f \in L_A$ e $f_+ = \max\{f, 0\}$ e $f_- = \max\{-f, 0\}$, temos por (7.13), (7.9), (7.8.i) e (3.9), que

$$\begin{aligned}
 |x^*(f)| &\leq \int_X f_+ dv_1 + \int_X f_+ dv_2 + \int_X f_- dv_1 + \int_X f_- dv_2 \\
 &\leq d((f_+)^{\wedge})(v_1(X) + v_2(X)) + d((f_-)^{\wedge})(v_1(X) + v_2(X)) \\
 &\leq d(|f|^{\wedge})v(v, X) = d(\hat{f})v(v, X). //
 \end{aligned}$$

(7.18) Observação. Se $\hat{f} \in N_A$ e $\hat{f} \geq \hat{0}$, então existe um representante de $\hat{f}$, que chamaremos de f , que é não-negativo. De fato, se $\hat{f} \geq \hat{0}$, então por (3.6), existem $h \in \hat{f}$ e $g \in M_A$ tais que $h \geq g$. Portanto $h-g \geq 0$ e $h-g \in \hat{f}$.

Definiremos a seguir o espaço que, mostraremos em (7.29), será isometricamente isomorfo a $(N_A)^*$.

(7.19) Definição. Denotaremos por $V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto das medidas v , definidas em Σ e com valores em $\mathbb{R}$ tais que

- (i) v é limitada;
- (ii) $v \ll \mu$;
- (iii) existe $\hat{f} \in N_A$, $\hat{f} \geq \hat{0}$ com $d(\hat{f}) \leq 1$ e tal que, se $E \in \Sigma$ e $v(v, E) \neq 0$, então $d((f|_E)^{\wedge}) = 1$.

Veremos abaixo que $V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial normado, tendo como norma a função $v(\cdot, X)$. Para isto precisaremos do seguinte resultado:

(7.20) Proposição. Sejam v_1 e v_2 medidas em Σ , limitadas e satisfazendo (7.19.iii). Então $v_1 + v_2$ e γv_1 , sendo $\gamma \in \mathbb{R}$, também satisfazem (7.19.iii).

Demonstração. Como $v(\gamma v_1, \cdot) = |\gamma| v(v_1, \cdot)$, é fácil verificar que γv_1 satisfaz (7.19.iii).

Sejam $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in N_A$ tais que para $i \in \{1, 2\}$ se tenha $\hat{f}_i \geq \hat{0}$, $d(\hat{f}_i) \leq 1$ e

$$\text{se } E \in \Sigma \text{ e } v(v_i, E) \neq 0, \text{ então } d((f_i \xi_E)^\wedge) = 1. \quad (1)$$

Tomemos $\hat{f} = \hat{f}_1 \vee \hat{f}_2$. Então por (3.18) temos que $d(\hat{f}) = \max\{d(\hat{f}_1), d(\hat{f}_2)\} \leq 1$. Se $E \in \Sigma$ e $v(v, E) \neq 0$, é claro que $v(v_1, E) \neq 0$ ou $v(v_2, E) \neq 0$, e lembrando (1), concluímos que

$$d((f \xi_E)^\wedge) = \max\{d((f_1 \xi_E)^\wedge), d((f_2 \xi_E)^\wedge)\} = 1.$$

Portanto $v_1 + v_2$ satisfaz (7.19.iii). //

(7.21) Proposição. O conjunto $V_A(X, \Sigma, \mu)$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial normado, tendo como norma a função $v(\cdot, X)$.

Demonstração. É de fácil verificação, observando (7.20). //

(7.22) Proposição. Sejam $v \in V_A(X, \Sigma, \mu)$, não-negativa e $x^* \in (N_A)^*$ tais que

$$(i) \quad x^*(\hat{f}) = \int_X f dv, \quad \text{para toda } \hat{f} \in N_A.$$

Então

$$(ii) \quad \text{existe } \hat{f}_0 \in N_A, \text{ com } \hat{f}_0 \geq \hat{0}, d(\hat{f}_0) \leq 1 \text{ e tal que } x^*(\hat{f}_0) = v(X);$$

$$(iii) \quad \|x^*\| = v(X).$$

Demonstração. O item (iii) segue de (ii), lembrando que $\|x^*\| \leq v(X)$ (7.17).

Para (ii) tomemos $\hat{0} \leq \hat{f}_0 \in N_A$ como em (7.19.iii), isto é, com $d(\hat{f}_0) \leq 1$ e tal que

$$\text{se } E \in \Sigma \text{ e } v(E) \neq 0, \text{ então } d((f_0 \xi_E)^\wedge) = 1. \quad (1)$$

Seja $\pi = (E_1, E_2, \dots, E_n) \in P$. Então lembrando (1) temos que

$$\sum_{i=1}^n d((f_0 \xi_{E_i})^\wedge) v(E_i) = v(X).$$

Como π é uma partição qualquer de X , temos por (7.8.i) que $\int_X f_0 dv = v(X)$, e assim (ii) é verdadeira. //

(7.23) Notação. Se $E \in \Sigma$ e $x^* \in (N_A)^*$, denotaremos por x_E^* a função dada pela expressão

$$(i) \quad x_E^*(\hat{f}) = x^*((f \xi_E)^\wedge), \text{ para } \hat{f} \in N_A.$$

Os lemas a seguir, além de serem auxiliares para (7.27), são também interessantes. O primeiro deles poderia estar no §1.

(7.24) Lema. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções não-negativas tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X A(f_n) d\mu < \infty$, então existe $g \in L_A$ com $g \geq f_n$ μ -q.s, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\int_X A(g) d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X A(f_n) d\mu$.

Demonstração. Para todo $k \in \mathbb{N}$, seja $g_k = \max\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Então $g_k \in L_A$ (1.16.ii), e usando o Princípio da Indução Finita prova-se que

$$\int_X A(g_k) d\mu \leq \sum_{n=1}^k \int_X A(f_n) d\mu < \infty. \quad (1)$$

Seja $h = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$, que é mensurável. Provaremos que

$$\text{se } E = \{x \in X: h(x) = \infty\}, \text{ então } \mu(E) = 0. \quad (2)$$

Para isso, observemos que

$$\text{se } F \in \Sigma, F \subseteq E \text{ e } \mu(F) < \infty, \text{ então } \mu(F) = 0. \quad (3)$$

De fato, como $\mu(F) < \infty$ temos que $\xi_F \in L_{\bar{A}}$, e assim existe $\gamma \in]0, \infty[$ tal que $\int_X \bar{A}(\gamma \xi_F) d\mu < \infty$. Pelo Teorema da Convergência Monôtona, (1.9.i) e (1) temos que

$$\begin{aligned} \infty \cdot \mu(F) &= \int_X \xi_F h d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \xi_F g_k d\mu \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_X \bar{A}(\gamma \xi_F) d\mu + \int_X A(g_k) d\mu \right] \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_X \bar{A}(\gamma \xi_F) d\mu + \sum_{n=1}^k \int_X A(f_n) d\mu \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[\int_X \bar{A}(\gamma \xi_F) d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int_X A(f_n) d\mu \right] < \infty, \end{aligned}$$

o que prova (3).

A relação (3) estabelece obviamente a (2) no caso em que $\mu(E) < \infty$. No caso geral basta lembrar que o espaço de medida (X, Σ, μ)

não tem átomos de medida infinita.

Seja $g = h\xi_E$. É imediato que $g \geq f_n$ μ -q.s., para todo $n \in \mathbb{N}$. Ainda pelo Teorema da Convergência Monótona, lembrando (1), temos que

$$\begin{aligned} \int_X A(g) d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E A(g_k) d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_X A(f_n) d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X A(f_n) d\mu < \infty, \end{aligned}$$

e assim $g \in L_A$. //

(7.25) Lema. Se $f \in L_A$ e $\int_X A(|f|) d\mu < \infty$, então dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $h \in L_A$ tal que

- (i) $0 \leq |h| \leq |f|$;
- (ii) $\int_X A(|h|) d\mu < \varepsilon$;
- (iii) $\hat{h} = \hat{f}$.

Demonstração. Por (1.24), existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de L_A tal que $0 \leq |f_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que converge para f μ -q.s.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X A(|f - f_n|) d\mu = 0. \tag{1}$$

Por (1), dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_X A(|f - f_{n_0}|) d\mu < \varepsilon.$$

Tomando $h = f - f_{n_0}$ temos que os três itens acima estão verificados. //

Lembrando (7.23), temos o seguinte resultado:

(7.26) Lema. Seja $0 \leq x^* \in (N_A)^*$. Tem-se

(i) dado $\varepsilon \in]0, \infty[$, existe $\hat{g} \in N_A$ com $\hat{g} \geq \hat{0}$ e tal que

$$\int_X A(g) d\mu < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x^*\| = x^*(\hat{g});$$

(ii) existe $\hat{g} \in N_A$ com $\hat{g} \geq \hat{0}$, $d(\hat{g}) \leq 1$ e tal que para $E \in \Sigma$ tem-se $\|x_E^*\| = d((g\xi_E)^\wedge)$, e se $\|x_E^*\| \neq 0$, então $d((g\xi_E)^\wedge) = 1$.

Demonstração. Por (7.2.ii), lembrando (7.18), para $n \in \mathbb{N}$ existe $\hat{0} \leq \hat{f}_n \in N_A$ tal que

$$\int_X A(f_n) d\mu < \infty \quad \text{e} \quad x^*(\hat{f}_n) > \|x^*\| - \frac{1}{n}.$$

Dado $\varepsilon \in]0, \infty[$ e $n \in \mathbb{N}$, aplicando (7.25) para f_n e lembrando (3.16), concluímos que existe $h_n \in L_A$ com $0 \leq h_n \leq f_n$ e tal que

$$\int_X A(h_n) d\mu < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{e} \quad \hat{h}_n = \hat{f}_n.$$

Portanto $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções não-negativas de L_A tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X A(h_n) d\mu < \epsilon \text{ e } x^*(\hat{h}_n) = x^*(\hat{f}_n) > \|x^*\| - \frac{1}{n}.$$

Por (7.24) existe $g \in L_A$ com $g \geq h_n$ μ -q.s., para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\int_X A(g) d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X A(h_n) d\mu < \epsilon$.

Portanto $\hat{g} \geq \hat{0}$, $\int_X A(g) d\mu < \epsilon$ e como

$$x^*(\hat{g}) \geq x^*(\hat{h}_n) > \|x^*\| - \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

concluimos que $x^*(\hat{g}) \geq \|x^*\|$. Assim por (7.2.ii) obtemos que $\|x^*\| = x^*(\hat{g})$, o que prova (i).

Provaremos (ii) a seguir.

Por (i), tomando $\epsilon=1$, existe $\hat{0} \leq \hat{g} \in N_A$ com $\int_X A(g) d\mu < 1$, e portanto $d(\hat{g}) \leq \|g\|_A \leq 1$, e tal que $x^*(\hat{g}) = \|x^*\|$.

Então para $E \in \Sigma$, lembrando (7.3.ii), temos que

$$0 \leq \|x_E^*\| - x^*((g\xi_E)^\wedge) = x^*((g\xi_{E^c})^\wedge) - \|x_{E^c}^*\| \leq 0.$$

Portanto

$$\|x_E^*\| = x^*((g\xi_E)^\wedge) = x_E^*((g\xi_E)^\wedge) \leq \|x_E^*\| d((g\xi_E)^\wedge),$$

e assim se $\|x_E^*\| \neq 0$ temos que $d((g\xi_E)^\wedge) \geq 1$.

Como $d((g\xi_E)^\wedge) \leq d(\hat{g}) \leq 1$, obtemos que $d((g\xi_E)^\wedge) = 1$, o que prova (ii). //

Vimos em (7.17) que a toda $\nu \in \mathcal{V}_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu)$ corresponde um $x^* \in (N_A)^*$. Nosso objetivo é provar que a correspondência $\nu \mapsto x^*$ é sobrejetora.

(7.27) Teorema. Se $0 \leq x^* \in (N_A)^*$ e ν é a função definida em Σ por $\nu(E) = \|x_E^*\|$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) ν é uma medida finita em Σ ;
- (ii) $\nu \ll \mu$;
- (iii) ν é limitada;
- (iv) $\nu \in \mathcal{V}_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu)$;
- (v) $x^*(\hat{f}) = \int_X f d\nu$, para toda $\hat{f} \in N_A$;
- (vi) $\|x^*\| = \nu(X)$.

Demonstração. Por (7.3.ii) temos que ν é medida em Σ . O item (ii) segue de (2.2), a afirmação (iii) decorre do fato que $\nu(X) = \|x^*\| < \infty$, que é (vi), e a asserção (iv) é consequência dos três primeiros itens e de (7.26.ii).

Provaremos (v) a seguir.

Seja $z^*(\hat{f}) = \int_X f d\nu$ para $\hat{f} \in N_A$. Então por (7.17) temos que $z^* \in (N_A)^*$ e $\|z^*\| \leq \nu(X) = \|x^*\|$. Para provarmos que $z^* = x^*$ basta que $\|z^* - x^*\| = 0$ e para isto observemos o seguinte:

Se $\hat{0} \leq \hat{f} \in N_A$ e $\pi = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ é uma partição de X ,
então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d((f \chi_{E_i})^\wedge) v(E_i) &= \sum_{i=1}^n d((f \chi_{E_i})^\wedge) \|x_{E_i}^*\| \\ &\geq \sum_{i=1}^n x^*((f \chi_{E_i})^\wedge) = x^*(\hat{f}). \end{aligned}$$

Como π é arbitrária concluímos por (7.8.i) que
 $z^*(\hat{f}) \geq x^*(\hat{f})$. Portanto $z^* \geq x^*$.

Tendo em vista que $(N_A)^*$ é um reticulado de Banach (7.1),
que $z^* \geq x^*$ e que $\|z^*\| \leq \|x^*\|$, temos que $\|x^*\| = \|z^*\|$.

Por (7.3.ii), lembrando que $z^* - x^* \geq 0$, concluímos que

$$\|x^*\| = \|z^*\| = \|z^* - x^*\| + \|x^*\|,$$

e assim $\|z^* - x^*\| = 0$, o que prova (v). //

(7.28) Teorema. Se $0 \leq x^* \in (N_A)^*$, então existe uma única
 $v \in V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$, sendo que

$$(i) \quad v(E) = \|x_E^*\| \quad \text{para } E \in \Sigma,$$

tal que

$$(ii) \quad x^*(\hat{f}) = \int_X f dv, \quad \text{para toda } \hat{f} \in N_A;$$

$$(iii) \quad \|x^*\| = v(X).$$

Demonstração. Sejam $\tilde{v}(E) = \|x_E^*\|$ para $E \in \Sigma$, e $v \in V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$x^*(\hat{f}) = \int_X f dv, \quad \text{para toda } \hat{f} \in N_A. \quad (1)$$

Por (7.27) sabemos que $\tilde{v} \in \mathcal{V}_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu)$ e que

$$x^*(\hat{f}) = \int_X f d\tilde{v}, \text{ para toda } \hat{f} \in N_A. \quad (2)$$

Para concluirmos a prova, basta verificarmos que $v = \tilde{v}$.

Tomemos $E \in \Sigma$ e observemos que, se $\hat{0} \leq \hat{f} \in N_A$, então por (1), (7.8.v) e (7.8.i), temos que

$$x_E^*(\hat{f}) = x^*((f\xi_E)^\wedge) = \int_X f\xi_E d\tilde{v} \leq d(\hat{f})v(E).$$

Como $x_E^* \geq 0$, lembrando (7.2.ii), segue que $\tilde{v}(E) = \|x_E^*\| \leq v(E)$.

Assim $v - \tilde{v} \in \mathcal{V}_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu)$, é não-negativa e, lembrando (1) e (2), vale que

$$\int_X f d(v - \tilde{v}) = 0, \text{ para toda } f \in L_A.$$

Da relação acima e (7.22.iii) concluímos que $(v - \tilde{v})(X) = 0$, provando que $v = \tilde{v}$. //

Por intermédio de (7.28) e (7.17), apresentamos a seguir uma caracterização de $(N_A)^*$.

(7.29) Teorema. O espaço $(N_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{V}_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu)$. Mais precisamente, a todo $x^* \in (N_A)^*$ corresponde uma única $v \in \mathcal{V}_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$(i) \quad x^*(\hat{f}) = \int_X f d\nu, \quad \text{para toda } \hat{f} \in N_A,$$

$$(ii) \quad \|x^*\| = \nu(\nu, X).$$

A correspondência $x^* \mapsto \nu$ é linear e sobrejetora.

Demonstração. Sejam $x^* \in (N_A)^*$, $y^* = (x^*)_+$, $z^* = (x^*)_-$ e $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ dadas por $\nu_1(E) = \|y^*_E\|$ e $\nu_2(E) = \|z^*_E\|$, sendo $E \in \Sigma$.

Como $x^* = y^* - z^*$, se tomarmos $\nu = \nu_1 - \nu_2$ temos por (7.27), que $\nu \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ e que

$$x^*(\hat{f}) = \int_X f d\nu_1 - \int_X f d\nu_2 = \int_X f d\nu, \quad \text{para } \hat{f} \in N_A.$$

Vale ainda que $\|x^*\| = \|y^*\| + \|z^*\| = \nu_1(X) + \nu_2(X)$ (7.3.iii).

Por (7.17.iii) sabemos que

$$\nu_1(X) + \nu_2(X) = \|x^*\| \leq \nu(\nu, X) \leq \nu_1(X) + \nu_2(X),$$

e assim $\|x^*\| = \nu(\nu, X)$.

Portanto a função $x^* \mapsto \nu$ satisfaz (i) e (ii). Para provar que esta função é sobrejetora basta lembrar (7.17), e demonstrar que

$$\left| \begin{array}{l} \text{se } \tilde{\nu} \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu) \text{ e } x^*(\hat{f}) = \int_X f d\tilde{\nu} \text{ para } \hat{f} \in N_A, \\ \text{então tomando } y^* = (x^*)_+ \text{ e } z^* = (x^*)_- \text{ temos que} \\ \tilde{\nu}(E) = \|y^*_E\| - \|z^*_E\|, \text{ para } E \in \Sigma. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Sejam $\tilde{\nu} \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ e x^* como em (1). Provaremos que (2) é verdadeira.

Como $\tilde{v}$ é limitada (7.19.i), por (4.6) (tomando $H = \Sigma$) existem $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$ medidas em Σ , não-negativas, limitadas e tais que $\tilde{v} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2$ e $v(\tilde{v}, \cdot) = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$.

Provaremos que $\tilde{v}_1 \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ e assim por (7.21) é claro que $\tilde{v}_2 \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$.

Como $\tilde{v} \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$, por (7.19.iii) existe $\hat{0} \leq \hat{g} \in N_A$ com $d(\hat{g}) \leq 1$ e tal que

$$\text{se } E \in \Sigma \text{ e } v(\tilde{v}, E) \neq 0, \text{ então } d((g\xi_E)^\wedge) = 1. \quad (3)$$

É imediato que se $E \in \Sigma$ e $\tilde{v}_1(E) \neq 0$, então $v(\tilde{v}, E) \neq 0$ e assim por (3), temos que $d((g\xi_E)^\wedge) = 1$, o que prova que $\tilde{v}_1$ satisfaz (7.19.iii). Portanto $\tilde{v}_1 \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ visto que (7.19.i) e (7.19.ii) são verdadeiros.

Sejam $y^* = (x^*)_+$, $z^* = (x^*)_-$, $v_1(E) = \|y_E^*\|$, $v_2(E) = \|z_E^*\|$ e $v(E) = v_1(E) - v_2(E)$, para $E \in \Sigma$.

$$\text{Já vimos que } x^*(\hat{f}) = \int_X f dv, \text{ para } \hat{f} \in N_A.$$

Então, lembrando (1) temos que

$$\int_X f d(\tilde{v}_1 + v_2) = \int_X f d(v_1 + \tilde{v}_2) \text{ para } \hat{f} \in N_A. \quad (4)$$

Por (4) e (7.28), concluímos que $\tilde{v}_1 + v_2 = v_1 + \tilde{v}_2$, e assim $\tilde{v} = v_1 - v_2 = v$, o que prova (2).

Finalmente observemos que a correspondência $x^* \mapsto v$ é linear, pois a sua inversa é obviamente linear. //

(7.30) Proposição. O espaço $V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Segue de (7.29), observando que $(N_A)^*$ é um espaço de Banach. //

Demonstraremos em (8.3) que $(L_A)^*$ admite uma decomposição em subespaços suplementares sendo um deles $(M_A)^\perp$. A seguir obteremos uma relação entre $(M_A)^\perp$ e $(N_A)^*$.

(7.31) Proposição. O espaço $(M_A)^\perp$ é isometricamente isomorfo a $(N_A)^*$. Mais precisamente, a todo $y^* \in (M_A)^\perp$ corresponde um único $x^* \in (N_A)^*$ tal que

$$(i) \quad y^*(f) = x^*(\hat{f}) \quad \text{para toda } f \in L_A ;$$

$$(ii) \quad \|y^*\| = \|x^*\| .$$

A correspondência $y^* \mapsto x^*$ é linear e sobrejetora.

Demonstração. Seja $y^* \in (M_A)^\perp$ e observemos que se $f_1 \in \hat{f} \in N_A$, então é claro que $y^*(f) = y^*(f_1)$. Assim a igualdade

$$x^*(\hat{f}) = y^*(f) \quad \text{para } \hat{f} \in N_A ,$$

define uma função, obviamente linear.

Para provarmos que $x^* \in (N_A)^*$ observemos, em primeiro lugar que

$$|x^*(\hat{f})| \leq \|y^*\|, \quad \text{para } \hat{f} \in \phi(\tilde{L}_A). \quad (1)$$

De fato, se $f \in \phi(\tilde{L}_A)$, então por (7.25), existe $g \in L_A$ tal que

$\int_X A(|g|) d\mu < 1$ e $\hat{g} = \hat{f}$. Assim

$$|x^*(\hat{f})| = |y^*(f)| = |y^*(g)| \leq \|y^*\| \|g\|_A \leq \|y^*\|,$$

o que prova (1).

Seja $\hat{f} \in N_A$ com $d(\hat{f}) \leq 1$ e $\gamma \in]0,1[$. Então por (3.19.iii) temos que $\gamma \hat{f} \in \phi(\tilde{L}_A)$ e por (1) vale que

$$|x^*(\hat{f})| \leq \frac{\|y^*\|}{\gamma}.$$

Como $\gamma \in]0,1[$ é arbitrário, concluímos que $|x^*(\hat{f})| \leq \|y^*\|$ para $\hat{f} \in N_A$ com $d(\hat{f}) \leq 1$. Portanto $x^* \in (N_A)^*$ e $\|x^*\| \leq \|y^*\|$.

A desigualdade $\|y^*\| \leq \|x^*\|$ segue do fato que, se $\|f\|_A \leq 1$, então $d(\hat{f}) \leq 1$.

É imediato que a correspondência $y^* \mapsto x^*$ é linear. Notemos que também é sobrejetora, pois dado $x^* \in (N_A)^*$ basta tomar a função y^* definida em L_A por $y^*(f) = x^*(\hat{f})$. //

(7.32) Corolário. O espaço $(M_A)^\perp$ é isometricamente isomorfo a $v_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$. Mais precisamente, a todo $x^* \in (M_A)^\perp$ corresponde uma única $v \in v_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$(i) \quad x^*(f) = \int_X f dv, \quad \text{para toda } f \in L_A;$$

$$(ii) \quad \|x^*\| = v(v, X).$$

A correspondência $x^* \mapsto v$ é linear e sobrejetora.

Demonstração. Segue de (7.31) e (7.29). //

§8. Caracterização do dual de $L_A(X, \Sigma, \mu)$

Aqui o ideal H é como no §6, isto é, $H = \Sigma_1$ se $a=0$, e $H=\Sigma$ se $a > 0$.

Provamos em (8.10), que os espaços $(L_A)^*$ e $G_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu, H) \times V_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu)$ são isometricamente isomorfos. Com isto alcançamos o nosso objetivo que é uma caracterização de $(L_A)^*$. Destacamos os resultados (8.3), (8.9) e (8.11).

(8.1) Notação. Seja ψ a função definida em $G_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ e com valores em $(L_A)^*$, que a todo $G \in G_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ faz corresponder o elemento $y^* \in (L_A)^*$ dado por

$$y^*(f) = \int_X f dG \quad , \text{ para } f \in L_A .$$

Denotaremos por W o conjunto imagem de ψ .

Por (6.1) a função y^* acima definida é um elemento de $(L_A)^*$.

(8.2) Proposição. São verdadeiras as seguintes asserções:

- (i) o conjunto W é um subespaço vetorial de $(L_A)^*$;
- (ii) a função ψ é um isomorfismo isométrico de $G_{\overline{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ em W ;
- (iii) W é um espaço de Banach.

Demonstração. É claro que $W \neq \emptyset$. O item (i) segue de (5.22). A asserção (ii) é consequência de (6.1) e (5.22). A afirmação (iii) decorre de

(ii) e do fato que $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ é um espaço de Banach (6.5). //

(8.3) Teorema. Sejam $x^* \in (L_A)^*$ e G a medida em H definida por $G(E) = x^*(\xi_E)$. Se

$$(i) \quad y^*(f) = \int_X f dG, \quad \text{para toda } f \in L_A,$$

então

$$(ii) \quad y^* \in W;$$

$$(iii) \quad z^* = x^* - y^* \in (M_A)^\perp \text{ e } x^* = y^* + z^* ;$$

$$(iv) \quad \text{se existem } y_1^* \in W \text{ e } z_1^* \in (M_A)^\perp \text{ tais que} \\ x^* = y_1^* + z_1^*, \text{ então } y_1^* = y^* \text{ e } z_1^* = z^*.$$

Demonstração. Lembrando que a restrição de x^* a M_A pertence a $(M_A)^*$, o item (ii) segue de (6.3.v) e da definição de W .

Por (6.3.vi) temos que

$$x^*(f) = \int_X f dG \quad \text{para toda } f \in M_A, \quad (1)$$

e lembrando (i), é claro que $z^* = x^* - y^* \in (M_A)^\perp$. Portanto (iii) é verdadeiro.

Para (iv), seja $G_1 \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ tal que

$$y_1^*(f) = \int_X f dG_1, \quad \text{para toda } f \in L_A. \quad (2)$$

Como $x^* = y_1^* + z_1^*$ e $z_1^* \in (M_A)^\perp$, por (1) e (2) temos que

$$x^*(f) = \int_X f dG = \int_X f dG_1, \quad \text{para toda } f \in M_A,$$

isto é, que

$$\int_X f d(G-G_1) = 0, \text{ para toda } f \in M_A. \quad (3)$$

Por (3) e (6.2) segue que $\|G-G_1\|_{\bar{A}} = 0$, e assim que $G = G_1$.

Portanto $y^* = y_1^*$ e por conseguinte $z^* = z_1^*$, o que prova (iv). //

As duas proposições a seguir são conseqüências dos resultados acima, de (6.4) e de (7.31).

(8.4) Proposição. O espaço $(L_A)^*$ é soma direta de W com $(M_A)^\perp$.

(8.5) Proposição. O espaço $(L_A)^*$ admite uma decomposição em espaços suplementares que são isometricamente isomorfos, respectivamente, a $(M_A)^*$ e a $(N_A)^*$.

A seguir definiremos o espaço de medidas que será isometricamente isomorfo a $(L_A)^*$.

(8.6) Definição. Denotaremos

$$B_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H) = G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H) \times V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu).$$

É claro que $B_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

(8.7) Definição. Em $B_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ definimos a função $|||\cdot|||_{\bar{A}}$ dada por

$$|||(G, v)|||_{\bar{A}} = ||G||_{\bar{A}} + v(v, X).$$

(8.8) Proposição. O espaço $B_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ com a norma $|||\cdot|||_{\bar{A}}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. É de fácil verificação, lembrando que $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ e $v_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ são espaços de Banach ((6.5) e (7.30)). //

Para provarmos que $(L_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $B_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ utilizaremos (8.9).

(8.9) Proposição. Sejam $x^* \in (L_A)^*$, $y^* \in W$ e $z^* \in (M_A)^\perp$ tais que $x^* = y^* + z^*$. São verdadeiras as seguintes asserções:

- (i) se $x^* \geq 0$, então $y^* \geq 0$ e $z^* \geq 0$;
- (ii) se $x^* \geq 0$, então $||x^*|| = ||y^*|| + ||z^*||$;
- (iii) $|x^*| = |y^*| + |z^*|$, onde $|y^*| \in W$, $|z^*| \in (M_A)^\perp$ e $|y^*| \wedge |z^*| = 0$.

Demonstração. Seja $G(E) = x^*(\xi_E)$, para $E \in H$. Por (8.3) sabemos que

$$y^*(f) = \int_X f dG, \text{ para toda } f \in L_A, \quad (1)$$

e que

$$z^* = x^* - y^* \in (M_A)^\perp.$$

Para (i) suponhamos $x^* \geq 0$. É claro que G é não-negativa, e que $y^* \geq 0$, lembrando (4.30.vi). Provaremos que $z^* \geq 0$.

Seja $f \in L_A$, não-negativa. Por (5.16) e (5.20.iii), existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de L_A , com $0 \leq f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que

$$y^*(f) = \int_X f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dG. \quad (2)$$

Lembrando que $z^* \in (M_A)^\perp$ e que $x^* \geq 0$, temos por (2) que

$$y^*(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dG = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*(f_n) \leq x^*(f),$$

provando que $z^*(f) = x^*(f) - y^*(f) \geq 0$.

Portanto $z^* \geq 0$, e assim concluímos (i).

Para (ii) observemos que, como L_A é um espaço vetorial reticulado, semi-nórmado e vale (1.16.i), temos por (A.6.ii) que

$$\|y^*\| = \sup\{y^*(f): 0 \leq f \in L_A \text{ e } \|f\|_A \leq 1\},$$

e

$$\|z^*\| = \sup\{z^*(f): 0 \leq f \in L_A \text{ e } \|f\|_A \leq 1\}.$$

Tomemos $\varepsilon \in]0, \infty[$. Então existem $f, g \in L_A$, não-negativas, com $\|f\|_A \leq 1$, $\|g\|_A \leq 1$ e tais que

$$\|y^*\| < y^*(f) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \|z^*\| < z^*(g) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Seja $k \in \mathbb{N}$. Como por (1.17.ii)

$$(1 + \frac{1}{k}) - \int_X A(f) d\mu > 0 ,$$

temos, aplicando (7.25) para g , que existe $g_1 \in L_A$ tal que

$$g_1 \geq 0 , \int_X A(g_1) d\mu < (1 + \frac{1}{k}) - \int_X A(|f|) d\mu , \quad (4)$$

e ainda que

$$g_1 - g \in M_A . \quad (5)$$

Seja $h = \max\{f, g_1\}$. Então por (1.16.ii), $h \in L_A$ e é fácil verificar que

$$\int_X A(h) d\mu \leq \int_X A(f) d\mu + \int_X A(g_1) d\mu . \quad (6)$$

Por (1.2.iv), (6) e (4) vale que

$$\int_X A(\frac{kh}{k+1}) \leq \frac{k}{k+1} [\int_X A(f) d\mu + (1 + \frac{1}{k}) - \int_X A(f) d\mu] = 1 .$$

$$\text{Portanto } \|h\|_A \leq \frac{k+1}{k} .$$

Observando que $y^*, z^* \geq 0$, que $z^* \in (M_A)^\perp$ e que são verdadeiros (3) e (5) temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \|y^*\| + \|z^*\| &< y^*(f) + z^*(g) + \varepsilon = y^*(f) + z^*(g_1) + \varepsilon \\ &\leq y^*(h) + z^*(h) + \varepsilon = x^*(h) + \varepsilon \\ &\leq \|x^*\| \|h\|_A + \varepsilon \leq \|x^*\| (\frac{k+1}{k}) + \varepsilon . \end{aligned}$$

Como $\varepsilon \in]0, \infty[$ e $k \in \mathbb{N}$ são arbitrários concluímos que $\|y^*\| + \|z^*\| \leq \|x^*\|$, o que prova (ii) pois a desigualdade contrária é imediata.

Provaremos (iii) a seguir.

Sejam $w_1^* \in W$ e $w_2^* \in (M_A)^\perp$ tais que $|x^*| = w_1^* + w_2^*$.

Tendo em vista que

$$w_1^* + w_2^* = |x^*| \geq x^* = y^* + z^* \quad \text{e} \quad w_1^* + w_2^* \geq -x^* = -y^* - z^*,$$

obtemos por (i) que

$$w_1^* \geq y^*, \quad w_1^* \geq -y^*, \quad w_2^* \geq z^* \quad \text{e} \quad w_2^* \geq -z^*. \quad (7)$$

Assim por (A.2.xi) concluímos que

$$|x^*| = w_1^* + w_2^* \geq y^* v(-y^*) + z^* v(-z^*) = |y^*| + |z^*| \geq |y^* + z^*| = |x^*|,$$

ou seja que

$$\text{se } y^* \in W \text{ e } z^* \in (M_A)^\perp, \text{ então } |y^* + z^*| = |z^*| + |y^*|. \quad (8)$$

Para provarmos que $|y^*| = w_1^* \in W$ e $|z^*| = w_2^* \in (M_A)^\perp$,

observemos que por (7) e (8) vale que

$$0 \leq w_1^* - (y^* v(-y^*)) = w_1^* - |y^*| = |z^*| - w_2^* = (z^* v(-z^*)) - w_2^* \leq 0.$$

Verificaremos agora que $|y^*| \wedge |z^*| = 0$. Para isto basta lembrarmos que por (A.2.x) vale a igualdade

$$| |y^*| - |z^*| | = |y^*| \vee |z^*| - (|y^*| \wedge |z^*|) ,$$

e que pela relação (8) também vale

$$| |y^*| - |z^*| | = |y^*| + |-|z^*|| = |y^*| + |z^*| .$$

Portanto temos, observando (A.2.vi), que

$$\begin{aligned} |y^*| + |z^*| &= | |y^*| - |z^*| | = |y^*| \vee |z^*| - (|y^*| \wedge |z^*|) \\ &= |y^*| + |z^*| - 2(|y^*| \wedge |z^*|) , \end{aligned}$$

e por conseguinte $|y^*| \wedge |z^*| = 0$, terminando assim a prova de (iii). //

(8.10) Teorema. O espaço $(L_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $B_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$. Mais precisamente, a todo $x^* \in (L_A)^*$ corresponde um único par $(G, \nu) \in B_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ tal que

$$(i) \quad x^*(f) = \int_X f dG + \int_X f d\nu , \text{ para toda } f \in L_A ;$$

$$(ii) \quad \|x^*\| = \|(G, \nu)\|_{\bar{A}} .$$

A correspondência $x^* \mapsto (G, \nu)$ é linear e sobrejetora. A integral em relação a G é como em (4.27), e aquela em relação a ν como em (7.13).

Demonstração. Dado $x^* \in (L_A)^*$, por (8.4), (8.2.ii) e (7.32), existe um único par $(G, \nu) \in B_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ tal que

$$x^*(f) = \int_X f dG + \int_X f d\nu , \text{ para toda } f \in L_A .$$

Provaremos que $\|x^*\| = \| (G, \nu) \|_{\bar{A}}$.

Sejam as funções y^* e z^* definidas em L_A por

$$y^*(f) = \int_X f dG \quad \text{e} \quad z^*(f) = \int_X f d\nu.$$

Como L_A é um espaço vetorial reticulado, semi-normado e vale (1.16.i), sabemos que (A.9.ii) é verdadeiro. Assim por (8.9.iii) e (8.9.ii) temos que

$$\|x^*\| = \| |x^*| \| = \| |y^*| + |z^*| \| = \| |y^*| \| + \| |z^*| \| = \|y^*\| + \|z^*\|.$$

Tendo em vista que $\|y^*\| = \|G\|_{\bar{A}}$ (6.1) e $\|z^*\| = \nu(\nu, X)$ (7.32), segue que

$$\|x^*\| = \|G\|_{\bar{A}} + \nu(\nu, X) = \| (G, \nu) \|_{\bar{A}},$$

o que prova (ii).

Para concluirmos a prova, observemos que a aplicação $x^* \mapsto (G, \nu)$ obviamente linear, por (6.1) e (7.32) é sobrejetora. //

Como M_A é fechado em L_A sabemos que todo $x^* \in (M_A)^*$ admite uma extensão $x_1^* \in (L_A)^*$ de modo que $\|x^*\| = \|x_1^*\|$ ([1.7.1] de [E], tomando para a semi-norma p a função $p(f) = \|f\|_A \|x^*\|$). Provaremos com o auxílio de (8.10), que esta extensão é única.

(8.11) Proposição. Sejam $x^* \in (M_A)^*$ e G a medida em H dada por $G(E) = x^*(\xi_E)$. Se $y^* \in (L_A)^*$ é definido por

$$(i) \quad y^*(f) = \int_X f dG, \quad \text{para toda } f \in L_A,$$

então

$$(ii) \quad y^*(f) = x^*(f) \quad \text{para toda } f \in M_A ;$$

$$(iii) \quad \|y^*\| = \|x^*\| = \|G\|_{\bar{A}} ;$$

$$(iv) \quad y^* \text{ é o único elemento de } (L_A)^* \text{ que satisfaz (ii) e (iii).}$$

Demonstração. Por (6.3.v) e (6.3.vi) temos que $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ e (ii) é verdadeiro. O item (iii) segue de (6.1) e (6.3.vii).

Para (iv), tomemos $y_1^* \in (L_A)^*$ tal que

$$y_1^*(f) = x^*(f) \quad \text{para toda } f \in M_A , \quad (1)$$

e

$$\|y_1^*\| = \|x^*\|. \quad (2)$$

Por (1) e (ii) temos que $y_1^* - y^* \in (M_A)^\perp$, e como $y_1^* = y^* + (y_1^* - y^*)$ temos, por (8.10), que existe $\nu_1 \in \mathcal{V}_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$(y_1^* - y^*)(f) = \int_X f d\nu_1 \quad \text{para } f \in L_A , \quad (3)$$

e ainda que

$$\|y_1^*\| = \|G\|_{\bar{A}} + \nu(\nu_1, X). \quad (4)$$

Por (2), (4) e (iii) vale que

$$\|x^*\| = \|y_1^*\| = \|x^*\| + \nu(\nu_1, X).$$

Portanto $\nu_1 = 0$, e por (3) temos que $y_1^* = y^*$, o que prova

(iv). //

A proposição abaixo é uma consequência de (8.10) e (6.10).

(8.12) Proposição. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida σ -finita ou, seja $\bar{a}=0$. Se $J_A = M_A$, então $(L_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $L_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu) \times V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$. Mais precisamente, a todo $x^* \in (L_A)^*$ corresponde um único par $(\dot{g}, v) \in L_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu) \times V_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que

$$x^*(f) = \int_X f g d\mu + \int_X f dv \quad \text{para } f \in L_A,$$

$$\|x^*\| = N_{\bar{A}}(g) + v(v, X),$$

e a correspondência $x^* \mapsto (\dot{g}, v)$ é linear e sobrejetora. A integral em relação a v é como em (7.13).

(8.13) Observação. Se $M_A = L_A$, como por exemplo quando $b < \infty$ e $\mu(X) < \infty$, ou quando $a > 0$ e $b < \infty$, temos que $(L_A)^*$ é isometricamente isomorfo a $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ (6.4).

APÊNDICE - Reticulados de Banach

(A.1) Definição. Seja $(E, \leq)$ um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, parcialmente ordenado pela relação $\leq$. Dizemos que $(E, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado se, e somente se,

- (i) $(E, \leq)$ é um reticulado, isto é, para todo $x, y \in E$, existem $x \wedge y$ e $x \vee y$ (3.11);
- (ii) se $x, y, z \in E$ e $x \leq y$, então $x+z \leq y+z$;
- (iii) se $x, y \in E$, $x \leq y$ e $\gamma \in [0, \infty[$, então $\gamma x \leq \gamma y$.

Se $x \in E$ denotamos:

$$x_+ = x \vee 0, \quad x_- = (-x) \vee 0 \quad \text{e} \quad |x| = x_+ + x_-.$$

As vezes escrevemos $y \geq x$, em vez de $x \leq y$.

(A.2) Proposição. Se $(E, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado, então para $x, y, z \in E$ tem-se

- (i) $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$;
- (ii) $\alpha(x \vee y) = \alpha x \vee \alpha y$ e $\alpha(x \wedge y) = \alpha x \wedge \alpha y$, para todo $\alpha \in [0, \infty[$;
- (iii) $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$;
- (iv) $(x \vee y) + z = (x+z) \vee (y+z)$;
- (v) $(x \wedge y) + z = (x+z) \wedge (y+z)$;

- (vi) $x+y = x \wedge y + x \vee y$;
- (vii) $x = x_+ - x_-$;
- (viii) se $y, z \geq 0$ e $x=y-z$, então $x_+ \leq y$;
- (ix) $x_+ \wedge x_- = 0$;
- (x) $|x-y| = xvy - x\wedge y$;
- (xi) $|x| = x\vee(-x)$;
- (xii) se $x, y \geq 0$ e $0 \leq z \leq x+y$, então existem $z_1, z_2 \in E$ tais que $z = z_1+z_2$, $0 \leq z_1 \leq x$ e $0 \leq z_2 \leq y$.

Demonstração. Os cinco primeiros itens são de fácil verificação. A asserção (vi) segue de (iv) fazendo $z = -x-y$ e observando as anteriores. A afirmação (vii) segue de (vi) e (iii), tomando $y=0$. Para (viii) basta observar que $y = x+z \geq x$ e como $y \geq 0$ temos que $y \geq x\vee 0 = x_+$. O item (ix) segue de (v) tomando $z=x_-$ e $y=0$, lembrando que $x = x_+ - x_-$ e que (iii) é verdadeiro.

Provaremos (x) a seguir.

Por (iv) temos que

$$(x-y)\vee 0 = (x-y)\vee(y-y) = (xvy) - y,$$

e por (iii) que

$$-(x-y)\vee 0 = (-x+y)\vee 0 = (-x+y)\vee(-y+y) = (-x\vee-y)+y = -(x\wedge y)+y.$$

Portanto

$$|x-y| = (x-y)\vee 0 + [-(x-y)\vee 0] = xvy - x\wedge y,$$

que é (x).

A asserção (xi) é consequência de (iv) tomando $y=0$ e $z=(-x)\vee 0$.

Para (xii) tomemos $z_1 = z \wedge x$ e $z_2 = z - z \wedge x$. Então $z_1 + z_2 = z$, $0 \leq z_1 \leq x$ e $z_2 \geq 0$. Provemos que $z_2 \leq y$.

Como $y \geq 0$ e $y \geq z - x$ temos por (iv) e (iii) que

$$y - z = (y \vee 0) - z \geq [(z - x) \vee 0] - z = (-x) \vee (-z) = -(x \wedge z),$$

e portanto $y \geq z - (x \wedge z) = z_2$, o que prova (xii). //

(A.3) Lema. Sejam $(E, \leq)$ um espaço vetorial reticulado, e ϕ uma função definida em $E_+ = \{x \in E: x \geq 0\}$ e com valores em $\mathbb{R}$, tal que

$$(i) \quad \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \text{ para } x, y \in E_+;$$

$$(ii) \quad \phi(\gamma x) = \gamma \phi(x), \text{ para } x \in E_+ \text{ e } \gamma \in [0, \infty[.$$

Então a função ψ definida em E por

$$\psi(x) = \phi(x_+) - \phi(x_-),$$

é linear.

Demonstração. É imediato que $\psi(\gamma x) = \gamma \psi(x)$ para $\gamma \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ ((A.2.ii), (A.2.iii) e (ii)). Para concluirmos que ψ é linear basta provarmos que

$$\psi(z-w) = \phi(z) - \phi(w) \text{ para } z, w \in E_+. \quad (1)$$

De fato, para $x, y \in E$ temos por (A.2.vii), (1) e (i) que

$$\begin{aligned} \psi(x+y) &= \psi((x_+ + y_+) - (x_- + y_-)) = \phi((x_+ + y_+)) - \phi((x_- + y_-)) \\ &= \phi(x_+) + \phi(y_+) - \phi(x_-) - \phi(y_-) \\ &= \psi(x) + \psi(y). \end{aligned}$$

Para obtermos (1), sejam $z, w \in E_+$ e $x = z - w$. Então por (A.2.viii), $u = z - x_+ \geq 0$ e portanto

$$\psi(z-w) = \psi(x) = \phi(x_+) - \phi(x_-) = \phi(x_+ + u) - \phi(x_- + u) = \phi(z) - \phi(w),$$

o que prova (1). //

(A.4) Proposição. Se $(E, \leq)$ e ϕ são como em (A.3), então a função ψ definida em E por

$$(i) \quad \psi(x) = \phi(x_+) - \phi(x_-),$$

é a única extensão linear de ϕ definida em E .

Demonstração. Basta provar a unicidade, pois sabemos que ψ é uma extensão linear de ϕ (A.3).

Seja Φ uma função definida em E , com valores em $\mathbb{R}$, tal que $\Phi(x) = \phi(x)$ para $0 \leq x \in E$, e Φ é linear. Se $x \in E$, então

$$\Phi(x) = \Phi(x_+ - x_-) = \Phi(x_+) - \Phi(x_-) = \phi(x_+) - \phi(x_-) = \psi(x),$$

e portanto $\Phi = \psi$. //

(A.5) Proposição. Seja $(E, p, \leq)$ tal que $(E, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado e p é uma semi-norma em E com a propriedade:

$$(i) \quad \text{se } x, y \in E \text{ e } |x| \leq |y|, \text{ então } p(x) \leq p(y).$$

Então para todo $x \in E$ tem-se

$$(ii) \quad p(|x|) = p(x).$$

Demonstração. O item (ii) segue de (i) e do fato que $||x|| = |x|$ para todo $x \in E$.//

Se (E, p) é um espaço semi-normado, então denotamos por E^* o seu dual, e a norma em E^* é a habitual. Se $(E, p, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado, então para $x^*, y^* \in E^*$ dizemos que

$$x^* \leq y^* \text{ se, e somente se, } x^*(z) \leq y^*(z) \text{ para todo } 0 \leq z \in E.$$

As vezes escrevemos $y^* \geq x^*$, em vez de $x^* \leq y^*$.

(A.6) Proposição. Seja $(E, p, \leq)$ como em (A.5). Se $0 \leq x^* \in E^*$, então

$$(i) \quad |x^*(x)| \leq x^*(|x|) \text{ para todo } x \in E;$$

$$(ii) \quad ||x^*|| = \sup\{x^*(x): 0 \leq x \in E \text{ e } p(x) \leq 1\}.$$

Demonstração. O item (i) segue da seguinte relação:

$$|x^*(x)| \leq |x^*(x_+)| + |x^*(x_-)| = x^*(x_+) + x^*(x_-) = x^*(|x|).$$

Para (ii) seja $\tau = \sup\{x^*(x): 0 \leq x \in E \text{ e } p(x) \leq 1\}$.

Usando (i) é fácil verificar que $||x^*|| \leq \tau$, e como vale que $\tau \leq ||x^*||$, obtemos (ii).//

(A.7) Proposição. Se $(E, p, \leq)$ é como em (A.5) e $x^*, y^* \in E^*$, então existem $x^* \vee y^*$ e $x^* \wedge y^*$. Para $0 \leq z \in E$, tem-se

$$(i) \quad (x^* \vee y^*)(z) = \sup\{x^*(z_1) + y^*(z_2) : 0 \leq z_1, z_2 \in E \text{ e } z = z_1 + z_2\};$$

$$(ii) \quad (x^* \wedge y^*)(z) = \inf\{x^*(z_1) + y^*(z_2) : 0 \leq z_1, z_2 \in E \text{ e } z = z_1 + z_2\}.$$

Demonstração. Seja $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ e tomemos a função w^* definida em E_+ por

$$w^*(z) = \sup\{x^*(z_1) + y^*(z_2) : z_1, z_2 \in E_+ \text{ e } z = z_1 + z_2\}.$$

Notemos que w^* tem valores em $\mathbb{R}$, pois por (A.5.i) temos, para $z \in E_+$, que

$$\begin{aligned} |w^*(z)| &\leq \sup\{\|x^*\|p(z_1) + \|y^*\|p(z_2) : z_1, z_2 \in E_+ \text{ e } z = z_1 + z_2\} \\ &\leq (\|x^*\| + \|y^*\|)p(z) < \infty. \end{aligned}$$

É claro que w^* é linear em E_+ , isto é, $w^*(x+y) = w^*(x) + w^*(y)$ e $w^*(\gamma x) = \gamma w^*(x)$, para todo $x, y \in E_+$ e $\gamma \in [0, \infty[$.

Seja ψ a função definida em E por

$$\psi(x) = w^*(x_+) - w^*(x_-).$$

Por (A.4), ψ é a única extensão linear de w^* definida em E .

Como valem (A.5.i) e (A.5.ii) temos que $\psi \in E^*$, pois para $x \in E$ sabemos que

$$|\psi(x)| \leq |w^*(x_+)| + |w^*(x_-)| \leq \|w^*\|(p(x_+) + p(x_-)) \leq 2\|w^*\|p(x).$$

Provaremos a seguir que $\psi = x^* \vee y^*$ e assim obteremos (i).

É claro que $\psi \geq x^*$ e $\psi \geq y^*$.

Seja $\phi \in E^*$ tal que $\phi \geq x^*$ e $\phi \geq y^*$. Então para todo $z_1, z_2 \in E_+$ temos que

$$\phi(z_1) \geq x^*(z_1) \quad \text{e} \quad \phi(z_2) \geq y^*(z_2).$$

Portanto para $z \in E_+$ vale que

$$\phi(z) \geq \sup\{x^*(z_1) + y^*(z_2) : z_1, z_2 \in E_+ \text{ e } z = z_1 + z_2\} = \psi(z),$$

e assim $\psi = x^* \vee y^*$.

É fácil verificar que $x^* \wedge y^* = -[(-x^*) \vee (-y^*)]$, e assim (ii) é verdadeira. //

(A.8) Corolário. Se $(E, p, \leq)$ é como em (A.5), então E^* é um espaço vetorial reticulado.

Demonstração. Segue de (A.7), observando que as duas últimas condições de (A.1) são verdadeiras. //

(A.9) Proposição. Se $(E, p, \leq)$ é como em (A.5), então para $x^*, y^* \in E^*$ tem-se

$$(i) \quad \text{se } x^* \wedge y^* = 0, \text{ então } \|x^* + y^*\| = \|x^* - y^*\|,$$

$$(ii) \quad \| |x^*| \| = \|x^*\|,$$

$$(iii) \quad \text{se } |x^*| \leq |y^*|, \text{ então } \|x^*\| \leq \|y^*\|.$$

Demonstração. A afirmação (ii) é consequência de (A.8), (A.2.vii), (A.2.ix) e (i). O item (iii) segue de (A.6.ii), observando (ii).

Para provarmos (i), primeiro verificaremos que

$$\|x^* + y^*\| \leq \|x^* - y^*\|, \text{ e depois que vale a desigualdade contrária.}$$

Se $\|x^*+y^*\| = 0$, então $\|x^*+y^*\| \leq \|x^*-y^*\|$.

Suponhamos $\|x^*+y^*\| > 0$ e tomemos $\epsilon \in]0, \|x^*+y^*\|/3[$. Como $x^* \geq x^* \wedge y^* = 0$ e $y^* \geq x^* \wedge y^* = 0$, lembrando (A.6.ii), existe $z \in E$ tal que

$$z \geq 0, \quad p(z) \leq 1 \quad \text{e} \quad x^*(z)+y^*(z) > \|x^*+y^*\| - \epsilon. \quad (1)$$

Por (A.7.ii) sabemos que

$$0 = (x^* \wedge y^*)(z) = \inf\{x^*(z_1)+y^*(z_2): 0 \leq z_1, z_2 \in E \text{ e } z = z_1+z_2\},$$

e assim existem $z_1, z_2 \in E$ tais que

$$z_1, z_2 \geq 0, \quad z = z_1+z_2 \quad \text{e} \quad 0 \leq x^*(z_1)+y^*(z_2) < \epsilon. \quad (2)$$

Seja $w = z_2 - z_1$. Por (A.2.viii) temos que

$$w_+ \leq z_2 \quad \text{e} \quad w_- \leq z_1.$$

Usando (A.5.ii) e (A.5.i), concluímos que

$$p(w) = p(|w|) = p(w_+ + w_-) \leq p(z_2 + z_1) = p(z) \leq 1,$$

e observando que por (1) e (2) valem as desigualdades:

$$\begin{aligned} x^*(w) - y^*(w) &= x^*(z_2) + y^*(z_1) - (x^*(z_1) + y^*(z_2)) \\ &\geq x^*(z_2) + y^*(z_1) - \epsilon \\ &= x^*(z) + y^*(z) - (x^*(z_1) + y^*(z_2)) - \epsilon \\ &\geq \|x^*+y^*\| - 3\epsilon > 0, \end{aligned}$$

obtemos que

$$\|x^*-y^*\| \geq \|x^*+y^*\| - 3\epsilon .$$

$$\text{Portanto } \|x^*-y^*\| \geq \|x^*+y^*\| .$$

Agora provaremos que $\|x^*-y^*\| \leq \|x^*+y^*\|$ supondo, sem perda de generalidade, que $\|x^*-y^*\| > 0$.

Seja $\epsilon \in]0, \|x^*-y^*\|$. Então existe $z \in E$ tal que

$$p(z) \leq 1 \quad \text{e} \quad |x^*(z) - y^*(z)| > \|x^*-y^*\| - \epsilon . \quad (3)$$

Se $w = |z|$, temos por (A.5.ii) que

$$p(w) = p(|z|) = p(z) \leq 1 ,$$

e tendo em vista que por (3) e (A.6.i) valem as desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 < \|x^*-y^*\| - \epsilon < |x^*(z) - y^*(z)| &\leq x^*(|z|) + y^*(|z|) \\ &= (x^*+y^*)(|z|) , \end{aligned}$$

concluimos que

$$\|x^*+y^*\| \geq \|x^*-y^*\| - \epsilon .$$

$$\text{Portanto } \|x^*+y^*\| \geq \|x^*-y^*\| . //$$

(A.10) Definição. Dizemos que $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um reticulado de Banach se, e somente se,

(i) $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach;

(ii) $(E, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado;

(iii) se $x, y \in E$ e $|x| \leq |y|$, então $\|x\| \leq \|y\|$.

(A.11) Proposição. Se $(E, p, \leq)$ é como em (A.5), então E^* é um reticulado de Banach.

Demonstração. Segue de (A.8), (A.9.iii) e do fato que E^* é completo, pois $\mathbb{R}$ é completo. //

Segue de (A.11) o seguinte resultado:

(A.12) Corolário. Se $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um reticulado de Banach, então E^* é um reticulado de Banach.

(A.13) Definição. Seja $(E, \|\cdot\|, \leq)$ um reticulado de Banach. Dizemos que $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um L-espço se, e somente se,

$$(L) \text{ se } 0 \leq x, y \in E, \text{ então } \|x+y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Dizemos que $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um M-espço se, e somente se,

$$(M) \text{ se } 0 \leq x, y \in E, \text{ então } \|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

(A.14) Teorema. Seja $(E, \|\cdot\|, \leq)$ um reticulado de Banach. São verdadeiras as seguintes asserções:

(i) se E é um M-espço, então E^* é um L-espço;

(ii) se E é um L-espço, então E^* é um M-espço.

Demonstração. Para obtermos (i), por (A.12) basta provarmos que E^* satisfaz a condição (L) de (A.13).

Seja $0 \leq x^*, y^* \in E^*$. É claro que $\|x^*+y^*\| \leq \|x^*\| + \|y^*\|$: Verificaremos a desigualdade contrária.

Dado $\epsilon \in]0, \infty[$, observando que $x^*, y^* \geq 0$, por (A.6.ii) exist_{em} $0 \leq x, y \in E$ tais que

$$\|x\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|y\| \leq 1,$$

e

$$x^*(x) > \|x^*\| - \epsilon \quad \text{e} \quad y^*(y) > \|y^*\| - \epsilon.$$

Tomemos $z = xvy$, e notemos que

$$x^*(z) + y^*(z) \geq x^*(x) + y^*(y) > \|x^*\| + \|y^*\| - 2\epsilon.$$

Tendo em vista que $\|z\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \leq 1$, pois E é um M -espaço, concluímos que

$$\|x^* + y^*\| \geq \|x^*\| + \|y^*\| - 2\epsilon.$$

Portanto

$$\|x^* + y^*\| \geq \|x^*\| + \|y^*\|,$$

provando que E^* é um L -espaço.

Agora suponhamos que E seja um L -espaço. Por (A.12) basta provarmos que E^* satisfaz a condição (M) de (A.13).

Seja z^* a função definida em E por

$$z^*(x) = \|x_+\| - \|x_-\|.$$

Mostraremos que $z^* \in E^*$.

Observando que para $x, y \in E$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ valem as igualdades

$$(x+y)_+ + x_- + y_- = (x+y)_- + x_+ + y_+ ;$$

$$(\gamma x)_+ = \gamma x_+ \quad \text{e} \quad (\gamma x)_- = \gamma x_- , \text{ se } \gamma \in [0, \infty[;$$

$$(\gamma x)_+ = -\gamma x_- \quad \text{e} \quad (\gamma x)_- = -\gamma x_+ , \text{ se } \gamma \in]-\infty, 0[,$$

e usando a hipótese que E é um L -espaço, verifica-se facilmente que z^* é linear.

Como E é um reticulado de Banach, e portanto vale (A.10.iii), temos que

$$|z^*(x)| \leq 2\|x\|, \text{ para todo } x \in E.$$

Portanto $z^* \in E^*$, e por (A.6.ii) temos que $\|z^*\| = 1$.

Suponhamos verdadeira a seguinte afirmação:

$$\text{se } w^* \in E^* \text{ e } \|w^*\| \leq 1, \text{ então } w^* \leq z^* . \quad (1)$$

Por (1) sabemos que $y^* \leq \|y^*\|z^*$ e $x^* \leq \|x^*\|z^*$, e assim segue que

$$0 \leq x^*vy^* \leq \max\{\|x^*\|, \|y^*\|\}z^* .$$

Da relação acima, de (A.10.iii) e observando que $x^*vy^* \geq x^* \geq 0$ e $x^*vy^* \geq y^* \geq 0$, temos que

$$\|x^*vy^*\| \leq \max\{\|x^*\|, \|y^*\|\}\|z^*\| = \max\{\|x^*\|, \|y^*\|\} \leq \|x^*vy^*\| ,$$

provando que E^* é um M -espaço.

Para obtermos (1) basta notarmos que, se $w^* \in E^*$ e $\|w^*\| \leq 1$, então para $0 \leq x \in E$ vale que $w^*(x) \leq |w^*(x)| \leq \|x\| = z^*(x)$.

Veremos em (A.17) que, se E é um reticulado de Banach e se E^* é um L -espaço, então E é um M -espaço. Antes alguns resultados auxiliares.

(A.15) Lema. Sejam $(E, \leq)$ e $(F, \leq)$ dois espaços vetoriais reticulados e f uma função linear definida em E e com valores em F . São equivalentes as seguintes afirmações:

$$(i) \quad f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad , \text{ para todo } x, y \in E ;$$

$$(ii) \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \quad , \text{ para todo } x, y \in E ;$$

$$(iii) \quad f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad , \text{ para todo } x, y \in E \text{ com } x \wedge y = 0.$$

Demonstração. Com a hipótese de que f é linear e por (A.2.vi) temos, para todo $x, y \in E$, que

$$\begin{aligned} f(x) \vee f(y) + f(x) \wedge f(y) &= f(x) + f(y) = f(x+y) = f(x \vee y + x \wedge y) \\ &= f(x \vee y) + f(x \wedge y). \end{aligned}$$

Portanto é imediato que (i) é equivalente a (ii) e que (ii) implica (iii). Provaremos que (iii) implica (i).

Sejam $x, y \in E$ e notemos por (A.2.v), que

$$(x - (x \wedge y)) \wedge (y - (x \wedge y)) = x \wedge y - (x \wedge y) = 0. \quad (1)$$

Então por (A.2.iv) e (iii), lembrando (1), concluímos que

$$\begin{aligned}f(xvy) - f(x\wedge y) &= f(xvy - x\wedge y) = f((x - (x\wedge y))v(y - (x\wedge y))) \\&= f(x - (x\wedge y))vf(y - (x\wedge y)) \\&= [f(x) - f(x\wedge y)]v[f(y) - f(x\wedge y)] \\&= (f(x)vf(y)) - f(x\wedge y),\end{aligned}$$

o que prova (i). //

(A.16) Proposição. Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado e Φ a aplicação canônica de E em $(E^*)^*$, isto é, para todo $x \in E$ temos que $\Phi(x) \in (E^*)^*$ e que $(\Phi(x))(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in E^*$. Então

- (i). Φ é linear;
- (ii) $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$;
- (iii) Φ é injetora.

Se ainda $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um reticulado de Banach, então para $x, y \in E$ tem-se

- (iv) $\Phi(xvy) = \Phi(x)v\Phi(y)$;
- (v) $\Phi(x\wedge y) = \Phi(x)\wedge\Phi(y)$.

Demonstração. Os três primeiros itens estão demonstrados na [Proposição 8.10, Capítulo II] de [H]. Provaremos os dois últimos.

Suponhamos que $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um reticulado de Banach. Por (A.15), para termos (iv) e (v), basta provarmos (iv) para $x, y \in E$ com $x\wedge y = 0$.

Sejam $x, y \in E$ com $x\wedge y = 0$.

Provaremos em primeiro lugar que

$$\phi(xvy) \leq \phi(x) \vee \phi(y). \quad (1)$$

A hipótese $x \wedge y = 0$ implica que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Se $x=0$ ou $y=0$, então (1) é verdadeira, lembrando que $\phi \geq 0$.

Se $y = \lambda x$ para algum $\lambda \in [0, \infty[$, então $0 = \lambda x \wedge x = x$ ou $0 = \lambda x \wedge x = \lambda x = y$, e novamente (1) é trivial.

Suponhamos $y \neq \lambda x$ para todo $\lambda \in [0, \infty[$, e seja E_0 o subespaço vetorial de E gerado por x e y .

Tomemos $f \in E^*$, $f \geq 0$ e seja p a função definida em E por $p(z) = f(z_+)$. Por (A.2.viii) e (A.2.ii), temos que p é sublinear, isto é, $p(z_1 + z_2) \leq p(z_1) + p(z_2)$ e $p(\gamma z_1) = \gamma p(z_1)$, para todo $z_1, z_2 \in E$ e $\gamma \in [0, \infty[$.

A função g_0 definida em E_0 por

$$g_0(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) = \alpha p(x), \text{ para } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

é linear em E_0 e $g_0(z) \leq p(z)$ para $z \in E_0$, pois $p(\beta y) = 0$ quando $\beta \in]-\infty, 0]$. Usando o [Teorema 8.5, Capítulo II] de [H], existe g definida em E , linear e tal que

$$g(z) \leq p(z), \quad \text{para todo } z \in E$$

e

$$g(z) = g_0(z), \quad \text{para todo } z \in E_0 \quad (3)$$

Por (A.7.i), sabemos que

$$(\phi(x) \vee \phi(y))(f) = \sup\{f_1(x) + f_2(y) : 0 \leq f_1, f_2 \in E^* \text{ e } f = f_1 + f_2\}. \quad (4)$$

Observemos que para $0 \leq z \in E$ vale que

$$-g(z) = g(-z) \leq p(-z) = 0 \quad \text{e} \quad g(z) \leq p(z) = f(z),$$

e assim

$$g \geq 0 \quad \text{e} \quad h = f - g \geq 0. \quad (5)$$

Como $f = h + g$, e por (3) e (2) temos que $g(x) = g_0(x) = f(x)$, e $h(y) = f(y) - g_0(y) = f(y)$, e ainda vale (5) concluímos, lembrando (4) e (A.2.vi), que

$$\begin{aligned} (\phi(x) \vee \phi(y))(f) &\geq h(y) + g(x) = f(x+y) = f(x \vee y + x \wedge y) \\ &= f(x \vee y) = (\phi(x \vee y))(f). \end{aligned}$$

Portanto

$$\phi(x) \vee \phi(y) \geq \phi(x \vee y).$$

A desigualdade contrária segue do fato que $\phi \geq 0$, que $x \vee y \geq x$ e que $x \vee y \geq y$. //

(A.17) Proposição. Se $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um reticulado de Banach e E^* é um L-espço, então $(E, \|\cdot\|, \leq)$ é um M-espço.

Demonstração. Segue do fato que $(E^*)^*$ é um M-espço ((A.12) e (A.14.ii)) e dos resultados (A.16.ii) e (A.16.iv). //

BIBLIOGRAFIA

- [Ba] BARTLE, R.G. A general bilinear vector integral. *Studia Math.*, 15(3): 337-352, 1956.
- [B] BUND, I.M. *Birnbaum-Orlicz spaces*. São Paulo, IME-USP, 1978. 161 p. (Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Série Matemática, 4).
- [Da] DAY, M.M. *Normed linear spaces*. Berlin, Springer, 1958. 139p. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 21).
- [D] DINCULEANU, N. *Vector measures*. Oxford, Pergamon, 1967. 435p. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, 95).
- [DS] DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J.T. General theory. In: _____. *Linear operators*. New York, Interscience, 1967. vl.
- [E] EDWARDS, R.E. *Functional analysis: theory and applications*. Chicago, Holt, 1965. 781 p.
- [Ha] HALMOS, P.R. *Measure theory*. Princeton, Van Nostrand, 1950. 304p.

- [HS] HEWITT, E. & STROMBERG, K. *Real and abstract analysis*. New York, Springer, c1965. 476p.
- [H] HÖNIG, C.S. *Análise funcional e aplicações*. São Paulo, IME-USP, 1970. v1. (Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo).
- [K] KAKUTANI, S. Concrete representation of abstract (M)-spaces. *Ann. of Math.*, 42(4): 994-1024, 1941.
- [KN] KELLEY, J.L. & NAMIOKA, I. *Linear topological spaces*. New York, Springer, c1963. 256p. (Graduate Texts in Mathematics, 36).
- [KR] KRASNOSEL'SKII, M.A. & RUTICHKII, Ya. B. *Convex functions and Orlicz spaces*. Groningen, P. Noordhoff, 1961. 249p.
- [M] MONTEIRO, M.S. *Funcionais lineares contínuos em espaços de Birnbaum-Orlicz*. São Paulo, 1980. 80p. Dissertação (Mestrado) - IME-USP.
- [R-1] RAO, M.M. Linear functionals on Orlicz spaces: *Nieuw Arch. Wisk.*, 12(2): 77-98, 1964.
- [R-2] RAO, M.M. Linear functionals on Orlicz spaces: general theory. *Pacific J. Math.*, 25(3):553-584, 1968.

- [T] TSUYOSHI, A. Linear functionals on Orlicz spaces. *Nieuw Arch. Wisk.*, 8(1): 1-16, 1960.
- [U] UHL JR., J.J. Orlicz spaces of finitely additive set functions. *Studia Math.*, 29(1): 19-58, 1967.
- [V] VULIH, B.Z. *Introduction to functional analysis for scientists and technologists*. Oxford, Pergamon, 1963. 404p. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, 32).
- [Z] ZAAENEN, A.C. *Linear analysis: measure and integral, Banach and Hilbert spaces, linear integral equations*. Amsterdam, P. Noordhoff, 1953. 600p.