OS HELICÓIDES NOS
ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

Cláudia Cueva Cândido

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: GEOMETRIA

ORIENTADORA:
PROFA. DRA. CÉLIA CONTIN GÓES

São Paulo, Dezembro de 1986

A minha avô
Maria Martos Cueva
e a meus pais
Cãrmen e Brito, com amor.

INTRODUÇÃO

Este trabalho propõe-se a descrever todas as subvariedades regradas mínimas em espaços de curvatura constante, ou seja, a esfera S^n , o espaço euclidiano E^n ou o espaço hiperbólico H^n . Para desenvolvê-lo, baseamo-nos no artigo "Minimal ruled submanifolds in spaces of constant curvature" de Barbosa, Dajczer e Jorge [2].

Os capítulos 1 e 2 são meramente técnicos e o corpo do trabalho, com seus resultados essenciais, concentra-se nos capítulos 3 a 5.

Não há muitos exemplos de subvariedades regradas mínimas. Ao contrário, o teorema de Catalan estabelece que a única subvariedade regrada mínima no espaço euclidiano E^3 é o helicóide. Mais recentemente, temos os seguintes resultados:

- Blair e Vanstone [4] mostraram que superfícies regradas mínimas completas no E^{n+1} são hiperplanos ou produtos de E^{n-2} com um helicóide de E^3 .

- Barbosa e do Carmo [1] exibiram um exemplo de uma hipersuperfície não completa, regrada, mínima, em E^4 , e anunciaram que, mesmo localmente, qualquer outra hipersuperfície regrada mínima em E^{n+1} está contida em um produto de um helicóide com E^{n-2} ou no produto de seu próprio exemplo com E^{n-3} . Eles também construíram um exemplo de uma subvariedade regrada mínima de dimensão 4 no E^6 .

Esses exemplos já haviam sido mencionados por Lumiste [7] e Thas [10] e surge, a partir deles, a motivação para definirmos helicóides e helicóides generalizados.

- Lawson [6] descreveu todas as superfícies regradas mínimas do S^3 .

Começamos este trabalho escrevendo o capítulo 3. Nele definimos subvariedades regradas e encontramos uma parametrização simples o bastante para chegarmos a uma expressão para a curvatura média H . Intuitivamente, uma subvariedade regrada é formada por folhas totalmente geodésicas, ortogonais a uma curva do espaço. Ainda no capítulo 3, demonstramos dois resultados interessantes: o primeiro estabelece que toda subvariedade regrada do E^n , com curvatura média de comprimento constante, não nulo, ao longo das folhas, é um cilindro generalizado; o segundo diz que não existe subvariedade regrada de curvatura média de comprimento constante, não nulo, no espaço hiperbólico H^n . A classificação das subvariedades regradas com curvatura média de comprimento constante não nulo, no S^n , é dada em Barbosa e Delgado [3]. Com isso, temos uma classificação completa de tais subvariedades em espaços de curvatura constante.

As noções de helicóides e helicóides generalizados em espaços de curvatura constante aparecem no capítulo 4. Mostramos facilmente que essas subvariedades são regradas mínimas e demonstramos, na proposição 4.10, que para classificarmos os helicóides de E^n , S^n ou H^n é suficiente classificá-los no E^{n+1} ou L^{n+1} , o que é feito no teorema 4.11.

Para podermos trabalhar no L^{n+1} surgiu a necessidade de estudarmos as variedades semi-riemannianas. No capí

tulo 1, demonstramos que podemos usar uma série de resultados da geometria riemanniana em tais variedades e fazemos, especificamente, um estudo dos espaços de Lorentz e suas propriedades principais.

No capítulo 2, damos a definição de espaço hiperbólico; trabalhamos no modelo do hiperbolóide e fixamos os resultados a serem usados ao longo da dissertação. Na segunda parte desse capítulo, colocamos diversos fatos sobre curvas em variedades semi-riemannianas necessários para a definição de helicóides generalizados e para grande parte das conclusões obtidas do capítulo 4 em diante.

Finalmente, no capítulo 5, demonstramos que toda subvariedade regrada, mínima, num espaço de curvatura constante é um helicóide generalizado, o que nos dá uma caracterização completa de tais subvariedades.

A G R A D E C I M E N T O S

a *Adriana, Ione e Márcia*, pela torcida.

a *Antônia*, uma datilógrafa cheia de estilo e calor humano.

a *Cármen e Brito*, meus pais, pelo apoio, incentivo e carinho que me deram sempre e principalmente nos momentos mais difíceis. Eles me ensinaram a paciência e a perseverança.

a *Célia Contin Gões* que, desde agosto de 84, quando concordou em orientar-me, tem se dedicado incansavelmente.

a *Cristina de Abreu Suzuki*, pela grande idéia de formarmos um "grupo" de estudos. Ela é responsável pelo meu retorno ao Mestrado.

a *Dona Eva Kitty Zach*, minha fonoaudióloga, excelente profissional e grande amiga.

a *José Roberto Soares Pires*, do Banco do Brasil, pelo apoio e incentivo em momentos decisivos.

e, finalmente

ao *Wálter*, pelo carinho e compreensão durante a elaboração desta dissertação.

Í N D I C E

CAPÍTULO 1

Variedades Semi-Riemannianas	01
------------------------------------	----

CAPÍTULO 2

O Espaço Hiperbólico $H^N(C)$	
Curvas em Variedades Semi-Riemannianas	20

CAPÍTULO 3

Subvariedades Regradas	52
------------------------------	----

CAPÍTULO 4

Helicóides	73
------------------	----

CAPÍTULO 5

Subvariedades Regradas Mínimas	117
--------------------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA	137
--------------------	-----

CAPÍTULO 1

VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

(1.1) Definição: Uma forma bilinear simétrica $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, sobre um espaço vetorial V , é:

- (a) positiva [negativa]-definida, se $v \neq 0$ implica $B(v,v) > 0$ [< 0].
- (b) positiva [negativa]-semi-definida, se $B(v,v) \geq 0$ [≤ 0], para todo $v \in V$.
- (c) não-degenerada, se $B(v,w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.

Se B é uma forma bilinear simétrica sobre V , então, para qualquer subespaço W de V , a restrição $B|_{W \times W}$ denotada por $B|_W$, é, também, simétrica e bilinear. Se B é definida, $B|_W$ também o é e se B é semi-definida, então $B|_W$ também o é.

(1.2) Definição: Seja $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear simétrica e seja $n = \dim V$. Dado um subespaço $W \subset V$; seja $n(W) = \dim W$. Seja:

$$A = \{m \in \mathbb{N} / m = n(W) \text{ e } B|_W \text{ é negativa-definida}, W \subset V\}.$$

Temos $0 \leq n(W) \leq n$, para todo subespaço W , de V ; então, existe $v = n(W_0) = \max A$. Dizemos que v é o índice da forma bilinear simétrica B .

Observação: Se $v = 0$, B é positiva-semi-definida e se $v = n$, B é negativa-semi-definida em V .

Dada uma variedade regular M , denotaremos o conjunto dos campos vetoriais de M por $\chi(M)$ e por $F(M)$ o conjunto das funções C^∞ definidas em M a valores reais.

(1.3) Definição: Um tensor métrico g , sobre uma variedade regular M é uma aplicação $g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow F(M)$ que, a cada ponto $p \in M$, associa uma forma bilinear simétrica não-degenerada, $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que o índice de g_p é o mesmo para todo $p \in M$.

(1.4) Definição: Chamamos variedade semi-riemanniana a um par (M, g) em que M é uma variedade regular e g é um tensor métrico sobre M .

O valor comum, v , do índice de g_p sobre uma variedade semi-riemanniana M é chamado índice de M e temos $0 \leq v \leq \dim M$.

(1.5) Definição: Se $v = 0$, M é uma variedade riemanniana; cada g_p é, então, um produto interno positivo-definido em $T_p M$. Se $v = 1$ e $n \geq 2$, M é uma variedade de Lorentz.

Usaremos $\langle , \rangle$ como notação alternativa para g , escrevendo $g(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$, para vetores tangentes, e $g(V, W) = \langle V, W \rangle \in F(M)$, para campos de vetores.

Se $(x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas definido em um aberto $U \subset M$, as componentes do tensor métrico g , em U , são:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Assim, para campos de vetores $V = \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e

$$W = \sum_{j=1}^n W_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad g(V, W) = \langle V, W \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} V_i W_j.$$

Uma vez que g é não-degenerada, a matriz $(g_{ij}(p))$ é inversível para cada $p \in U$ e denotamos sua inversa por $(g^{ij}(p))$. Como g é simétrica, temos $g_{ij} = g_{ji}$ e, portanto, $g^{ij} = g^{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

No caso particular do $\mathbb{R}^n$, existe, para cada $p \in \mathbb{R}^n$, um isomorfismo canônico entre $\mathbb{R}^n$ e $T_p \mathbb{R}^n$, associando

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{a} \quad v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p \mathbb{R}^n$$

Dessa forma, o produto interno canônico do $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, dá origem a um tensor métrico g , sobre $\mathbb{R}^n$, definido por:

$$g(v_p, w_p) = \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Denotamos por E^n a variedade riemanniana $(\mathbb{R}^n, g)$, chamada espaço euclidiano.

(1.6) Para um inteiro v , com $0 \leq v \leq n$, definimos sobre $\mathbb{R}^n$ um tensor métrico g_v , de índice v , por:

$$g_v(v_p, w_p) = - \sum_{i=1}^v v_i w_i + \sum_{j=v+1}^n v_j w_j .$$

Denotaremos por E_v^n a variedade semi-riemanniana $(\mathbb{R}^n, g_v)$, chamando-a espaço semi-euclidiano e notando que $E_v^n = E^n$, se $v = 0$. Para $n \geq 1$, $E_1^n = L^n$ é chamado espaço de Lorentz n -dimensional.

(1.7) Definição: Uma conexão D sobre uma variedade regular M é uma aplicação $D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ tal que:

- (D1) $D_v W$ é $F(M)$ -linear em V
- (D2) $D_v W$ é $\mathbb{R}$ -linear em W
- (D3) $D_v(fW) = V[f]W + fD_v W$, para $f \in F(M)$.

$D_v W$ é chamada derivada covariante de W com relação a V , para a conexão D .

Com o resultado enunciado a seguir, estaremos aptos a demonstrar um importante teorema da geometria semi-riemanniana.

(1.8) Lema: Seja $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade semi-riemanniana. Se $V \in \chi(M)$, seja V^* a 1-forma em M tal que $V^*(X) = \langle V, X \rangle$, para todo $X \in \chi(M)$. Então, a função $V \mapsto V^*$ é um isomorfismo $F(M)$ -linear de $\chi(M)$ em $(\chi(M))^*$.

Prova: Dado $V \in \chi(M)$, a aplicação $V^*: \chi(M) \rightarrow F(M)$ é $F(M)$ -linear e, portanto, uma 1-forma em M . Além disso, $(fV)^*(X) = \langle fV, X \rangle = fV^*(X)$, para todo $X \in \chi(M)$ e toda $f \in F(M)$, e $(V + W)^*(X) = \langle V+W, X \rangle = V^*(X) + W^*(X) = (V^* + W^*)(X)$, para todo $X \in \chi(M)$. Logo, a aplicação $V \mapsto V^*$ é $F(M)$ -linear.

Suponha que $V^* = W^*$, isto é, $\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle$, para todo $X \in \chi(M)$; então, $\langle V_p, X_p \rangle = \langle W_p, X_p \rangle$, para todo $p \in M$ e para todo $X_p \in T_p M$. Como a métrica é não-degenerada segue $V_p = W_p$, para todo p , isto é: $V = W$. Assim, mostramos que a aplicação $V \mapsto V^*$ é injetora.

Consideremos $\theta \in (\chi(M))^*$ e seja $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dx_i$ sua expressão num sistema de coordenadas $(U, x_1, \dots, x_n)$. Tome

$$V = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \theta_i \frac{\partial}{\partial x_j}; \text{ temos, para cada } 1 \leq k \leq n,$$

$$V^*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \langle V, \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle = \sum_{i=1}^n \theta_i \sum_{j=1}^n g^{ij} g_{jk} = \theta_k = \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right). \quad \text{Então, por}$$

$F(M)$ -linearidade, segue que $\theta = V^*$ e, portanto, a aplicação $V \mapsto V^*$ é sobrejetora. $\square$

(1.9) Definição: Dados $V = \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $W \in \chi(M)$ e $f \in F(M)$,

definimos o colchete $[V, W] \in \chi(M)$ pela expressão:

$$[V, W][f] = V[W[f]] - W[V[f]],$$

onde $V[f] = \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ é a derivada de f na direção de V .

(1.10) Teorema: Dada uma variedade semi-riemanniana $(M, \langle, \rangle)$ existe uma conexão D tal que:

$$(D4) \quad [V, W] = D_V W - D_W V$$

$$(D5) \quad X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle, \text{ para todos } X, V, W \in \chi(M).$$

D é chamada conexão de Levi-Civita de M e é caracterizada pela fórmula de Koszul:

$$2\langle D_V W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle + \\ -\langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle.$$

Prova: Suponhamos que existe uma tal D . Então, por (D5), temos:

$$(1) \quad W\langle V, X \rangle = \langle D_W V, X \rangle + \langle V, D_W X \rangle$$

$$(2) \quad V\langle X, W \rangle = \langle D_V X, W \rangle + \langle X, D_V W \rangle$$

$$(3) \quad X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle$$

Fazendo (1) + (2) - (3) e aplicando (D4), obtemos a fórmula de Koszul. Para a existência e unicidade consideremos para cada $V, W \in \chi(M)$, a 1-forma $\Theta_{VW}: \chi(M) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\Theta_{VW}(X) = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle + \\ -\langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle.$$

Pelo lema (1.8) existe um único campo de vetores, que denotaremos por $D_V W$, tal que $2\langle D_V W, X \rangle = \Theta_{VW}(X)$, para todo $X \in \chi(M)$.

É fácil verificar que valem (D1) a (D5) e conclui -
-se que D é a conexão procurada. $\square$

(1.11) Notação: A conexão de Levi-Civita de uma variedade se
mi-riemanniana será denotada por ∇ .

(1.12) Definição: Seja $(x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas
em uma vizinhança U de uma variedade semi-riemanniana M. Os
símbolos de Christoffel, para esse sistema de coordenadas,
são as funções a valores reais Γ_{ij}^k em U, tais que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Observação: Como $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, segue de (D4) que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e, portanto, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

(1.13) Proposição. Para um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$
em U, temos:

$$(1) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_{j=1}^n W_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial W_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k W_j \right\} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde os símbolos de Christoffel são dados por:

$$(2) \quad \Gamma_{ij}^k = 2 \sum_{m=1}^n g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right).$$

Prova. A prova de (1) é imediata das propriedades de ∇ . Para provar (2), ponha $V = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $W = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $X = \frac{\partial}{\partial x_m}$ na fórmula de Koszul, dada em (1.10). Como os colchetes são todos nulos, temos:

$$2 \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_m} \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}.$$

Então:

$$2 \sum_{r=1}^n \Gamma_{ij}^r \langle \frac{\partial}{\partial x_r}, \frac{\partial}{\partial x_m} \rangle = \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}$$

e multiplicando ambos os lados por $\sum_{m=1}^n g^{mk}$, obtemos:

$$2 \sum_{r=1}^n \Gamma_{ij}^r \delta_{rk} = \sum_{m=1}^n g^{mk} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right\},$$

donde segue o resultado. $\square$

(1.14) A conexão Levi-Civita da variedade semi-riemanniana E_v^n

Seja $(u_1, \dots, u_n)$ sistema de coordenadas usual de E_v^n e seja ∇ a conexão Levi-Civita cuja existência ficou assegurada pelo Teorema (1.10). Denotando por g o tensor métrico g_v , temos $g_{ij} = \epsilon_j \delta_{ij}$, onde $\epsilon_j = -1$, $j = 1, \dots, v$, e $\epsilon_j = 1$, para $j = v+1, \dots, n$; logo, da proposição (1.13) segue que $\Gamma_{ij}^k = 0$, para $1 \leq i, j, k \leq n$. Portanto, se $V, W \in \chi(E_v^n)$ e $W = \sum_{i=1}^n W_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, temos:

$$\nabla_V W = \nabla_V \left(\sum_{i=1}^n W_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) = \sum_{i=1}^n V[W_i] \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^n W_i \nabla_V \frac{\partial}{\partial u_i}$$

por (D2) e (D3). Por (D1), obtemos:

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^n V[W_i] \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i,j=1}^n W_i V_j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Assim, como os símbolos de Christoffel de E_V^n são todos nulos, sua conexão Levi-Civita é dada por:

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^n V[W_i] \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

O ponto crucial da demonstração do teorema (1.10) é a não-degeneração do tensor métrico, (usada no lema (1.8)). A partir daquele resultado definem-se, para variedades semi-riemannianas, conceitos da geometria riemanniana tais como derivação covariante ao longo de curvas, transporte paralelo, geodésicas, aplicação exponencial, segunda forma fundamental e subvariedades totalmente geodésicas, dentre outros. Além disso, provam-se os mesmos resultados gerais com relação aos conceitos acima, de maneira semelhante, senão idêntica, à que é feita para variedades riemannianas. Vamos ver alguns desses conceitos no espaço semi-euclidiano E_V^n .

(1.15) Geodésicas do Espaço Semi-Euclidiano

No espaço semi-euclidiano E_V^n , temos, conforme visto em (1.14), $\Gamma_{ij}^k = 0$, $1 \leq i, j, k \leq n$. $\gamma: I \rightarrow E_V^n$ é geodésica se e só se $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ e, por (1.13) isso é equivalente ao sistema:

$$\frac{d^2(u_i \circ \gamma)}{dt^2} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

A solução é dada por $u_i(\gamma(t)) = p_i + tv_i$, onde p_i e v_i são constantes arbitrárias. Portanto, as geodésicas de E_v^n são retas $\gamma(t) = p + tv$. Disto segue que E_v^n é variedade semi-riemanniana geodesicamente completa.

(1.16) As aplicações exponenciais de E_v^n

A geodésica por $p \in E_v^n$ com velocidade inicial $v_p \in T_p E_v^n$ é a reta $\gamma_v(t) = p + tv$. Assim, $\exp_p(v_p) = \gamma_v(1) = p + v$. Portanto, $\exp_p$ é a composição do isomorfismo canônico entre $T_p E_v^n$ e E_v^n com a translação $x \mapsto x+p$, donde segue que $\exp_p$ é um difeomorfismo. Na verdade, considerando o tensor métrico usual de E_v^n definido em (1.6), ambas as aplicações são isometrias e, portanto, $\exp_p$ é uma isometria.

(1.17) Definição: Seja M uma subvariedade de uma variedade semi-riemanniana $(\bar{M}, \bar{g})$. Se $g = \bar{g}|_{\chi(M)}$ é um tensor métrico, então (M, g) é uma subvariedade semi-riemanniana de $(\bar{M}, \bar{g})$. Em outras palavras, M é uma subvariedade semi-riemanniana de $\bar{M}$ se, para todo $p \in M$, a forma bilinear simétrica $\bar{g}_p|_{T_p M}$ é não-degenerada e o índice de $\bar{g}_p|_{T_p M}$ é o mesmo para todo $p \in M$.

(1.18) As subvariedades totalmente geodésicas de E_v^n

Se W é um subespaço k -dimensional [não-degenerado] de E_v^n , então qualquer translação $x + W$ é chamada um k -plano [não-degene]

rado] de E_V^n . Se W é um k -plano não-degenerado, então, W é uma subvariedade totalmente geodésica de E_V^n , pois, dado um vetor $v \in T_p E_V^n$ tal que $v \in T_p W$, então a geodésica por p com velocidade inicial v é $\gamma(t) = p + tv$ e, portanto, está contida em W . Reciprocamente, se M é subvariedade totalmente geodésica de E_V^n , toda geodésica de M é geodésica de E_V^n e, portanto, toda geodésica de M é uma reta. Então, para cada $p \in M$, existe um disco $\mathcal{D}_p \subset T_p M$ tal que $\mathcal{D}_p \subset M$. Como p é arbitrário, segue que M é parte de um hiperplano não-degenerado. Assim, os k -planos não degenerados são as únicas subvariedades totalmente geodésicas, completas, conexas de E_V^n .

O significado geométrico do índice de uma variedade semi-riemanniana decorre da seguinte tricotomia:

(1.19) Definição. Um vetor v , tangente a $(M, \langle, \rangle)$ é chamado:

- (1) "spacelike", se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$
- (2) nulo, se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$
- (3) "timelike", se $\langle v, v \rangle < 0$.

A categoria na qual um vetor se enquadra é chamada seu carácter causal.

(1.20) A norma de um vetor v tangente a $(M, \langle, \rangle)$ é

$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$. Assim, fala-se normalmente em ortogonalidade, vetores unitários e ortonormalidade.

Passemos, agora, ao caso particular das variedades de Lorentz, ou seja, variedades (M^n, g) em que g é de índice 1 e $n \geq 2$.

(1.21) Dizemos que um espaço vetorial é um espaço vetorial de Lorentz se é um espaço munido de uma forma bilinear, simétrica, não-degenerada, de índice 1 e tem dimensão $n \geq 2$. A noção de carácter causal tem, nesse contexto, uma generalização natural a espaços vetoriais.

(1.22) Definição: Seja W um subespaço de um espaço vetorial de Lorentz V e seja g a forma bilinear simétrica, não-degenerada, de índice 1, definida em V . Existem três possibilidades mutuamente exclusivas para W :

- (1) $g|_W$ é positiva-definida. Então W é chamado "spacelike".
- (2) $g|_W$ é não degenerada de índice 1. Então, W é chamado "timelike".
- (3) $g|_W$ é degenerada. Então, W é chamado "lightlike".

A categoria em que se enquadra o subespaço W é chamada seu carácter causal.

(1.23) Lema: Seja W um subespaço de um espaço vetorial V , munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada g . Então $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ e $(W^\perp)^\perp = W$.

Prova: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de V tal que $\{e_1, \dots, e_k\}$ é base de W . Dado $v \in V$, $v \in W^\perp$ se e só se $g(v, e_i) = 0$, para todo $1 \leq i \leq k$. Considere a aplicação $f: V \rightarrow W$ definida por:

$$f(v) = \sum_{i=1}^k g(v, e_i) e_i$$

e note que $f(v) = 0$ se e só se $g(v, e_i) = 0$, para todo $1 \leq i \leq k$. Ou seja, $\text{Ker}(f) = W^\perp$.

$$\text{Dado } w = \sum_{i=1}^k w_i e_i \in W, \text{ seja } \tilde{w} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^k w_i g^{i\ell} e_\ell.$$

Então,

$$f(\tilde{w}) = \sum_{j=1}^k g\left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^k w_i g^{i\ell} e_\ell, e_j\right) e_j \Rightarrow f(\tilde{w}) = \sum_{i,j=1}^k w_i \delta_{ij} e_j = w.$$

Portanto, f é sobrejetora, isto é:

$\dim \text{Im}(f) = \dim W = k$, o que implica $\dim \text{Ker}(f) = n-k$. Portanto, $\dim W^\perp = n-k$ e temos $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$. Além disso, se $v \in W$, então $g(v, w) = 0$, para todo $w \in W^\perp$; logo $v \in (W^\perp)^\perp$ e, portanto, $W \subset (W^\perp)^\perp$ e, da mesma forma, obtém-se a inclusão contrária e, então $(W^\perp)^\perp = W$. $\square$

O lema seguinte será útil em vários pontos deste trabalho.

(1.24) Lema: Se z é um vetor "timelike" em um espaço de Lorentz V , então o subespaço $[z]^\perp$ é "spacelike" e V é a soma direta $[z] \oplus [z]^\perp$.

Prova: Da definição (1.22), o subespaço $[z]$ é não-degenerado de índice 1. Como para qualquer outro subespaço temos a igualdade:

$$\dim([z] + [z]^\perp) + \dim([z] \cap [z]^\perp) = \dim[z] + \dim[z]^\perp.$$

Pelo lema (1.23), temos então:

$$\dim([z] + [z]^\perp) + \dim([z] \cap [z]^\perp) = \dim V.$$

Seja $w \in [z] \cap [z]^\perp$. De $w \in [z]$, segue $w = az$, $a \in \mathbb{R}$, e como $w \in [z]^\perp$, temos $g(w, w) = 0$, isto é, $a^2 g(z, z) = 0$. Mas como $g(z, z) < 0$, isso implica $a = 0$, ou seja, $w = 0$.

Então, segue que $V = [z] \oplus [z]^\perp$. Afirmamos que $[z]^\perp$ é não-degenerado. De fato: suponhamos que existe $u \in [z]^\perp$ tal que $g(u, w) = 0$, $\forall w \in [z]^\perp$ e note que $g(u, z) = 0$, já que $u \in [z]^\perp$. Entretanto, todo $v \in V$ escreve-se, de modo único, como $v = w + az$, onde $w \in [z]^\perp$ e $a \in \mathbb{R}$; logo, temos $g(u, v) = 0$, para todo $v \in V$, o que implica $u = 0$, pois g é não-degenerada em V . Portanto, $[z]^\perp$ é não-degenerado. Resta mostrar que $g|_{[z]^\perp}$ é positiva -definida. Em primeiro lugar, observemos que se tivéssemos $w \in [z]^\perp$ tal que $g(w, w) < 0$, $g(z, w) = 0$ implicaria $g|_{[z, w]}$ negativa-definida e isto é absurdo pois $[z, w]$ tem dimensão 2 e o índice de V é 1. Assim sendo, temos $g(w, w) \geq 0$, para todo $w \in [z]^\perp$.

Além disso, se $w \in [z]^\perp$, $w \neq 0$, fosse tal que $g(w, w) = 0$, então $W = [w + z, w - z]$ seria subespaço de dimensão 2 de V com $g|_W$ negativa-definida. De fato, se $v = a(w + z) + b(w - z)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$g(v,v) = (a-b)^2 g(z,z) < 0.$$

Então, temos $g(w,w) > 0$, para todo $w \in [z]^\perp$, ou seja, $[z]^\perp$ é "spacelike". $\square$

Desse lema segue que um subespaço W é "timelike" se e só se $W^\perp$ é "spacelike". Uma vez que $(W^\perp)^\perp = W$, os termos "timelike" e "spacelike" podem ser trocados e segue que W é "lightlike" se e só se $W^\perp$ é "lightlike". Os subespaços "spacelike" são mais fáceis de lidar; neles vale, por exemplo, a desigualdade de Schwarz:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| ,$$

verificando-se a igualdade se e só se v e w são linearmente dependentes. O próximo lema fornece critérios para um subespaço W ser "timelike".

(1.25) Lema: Seja W um subespaço de dimensão ≥ 2 em um espaço de Lorentz V . São equivalentes:

- (1) W é "timelike", portanto é, ele próprio um espaço de Lorentz.
- (2) W contém dois vetores nulos linearmente independentes.
- (3) W contém um vetor "timelike".

Prova: (1) $\implies$ (2) Se W é "timelike", deduz-se do lema (1.24) que existe base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de W , tal que e_1 é ve-

tor "timelike". Então, $e_1 + e_2$ e $e_1 - e_2$ são vetores nulos l.i.. De fato: $g(e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_2) = -1 + 1 = 0$ e se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a(e_1 + e_2) + b(e_1 - e_2) = 0$ temos $a + b = a - b = 0$, ou seja, $a = b = 0$.

(2) $\implies$ (3) Sejam u e v vetores nulos, linearmente independentes, de W . Afirmamos que $g(u, v) \neq 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $g(u, v) = g(u, u) = g(v, v) = 0$. Seja e_1 vetor unitário "timelike" em V . Então, pelo lema (1.24), existem reais u_1, v_1, a e b , únicos, tais que $u = u_1 e_1 + a u'$ e $v = v_1 e_1 + b v'$, onde u' e v' pertencem ao subespaço "spacelike" $[e_1]^\perp$.

De $g(u, u) = g(v, v) = 0$, segue que u_1, v_1, a e b são não nulos e:

$$u_1^2 = a^2 g(u', u') \quad \text{e} \quad v_1^2 = b^2 g(v', v') .$$

Temos $g(u, v) = 0$ se e só se:

$$(1.26) \quad u_1 v_1 = a b g(u', v') .$$

Então, obtemos:

$$|a b \sqrt{g(u', u')} \sqrt{g(v', v')}| = |a b g(u', v')| ;$$

portanto:

$$\|u'\| \|v'\| = |g(u', v')| .$$

Como $[e_1]^\perp$ é "spacelike" segue, então, do Teorema de Schwarz que u' e v' são l.d., isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u' = \lambda v'$. Substituindo em (1.26), obtemos $u_1 = \frac{\lambda a}{b} v_1$ e, então,

$$u = \frac{\lambda a}{b}(v_1 e_1 + bv') = \frac{\lambda a}{b} v;$$

absurdo, pois u e v são, por hipótese, l.i.. Então, temos $g(u,v) \neq 0$ e daí temos duas possibilidades:

$$\text{ou} \quad g(u+v, u+v) = 2g(u,v) < 0$$

$$\text{ou} \quad g(u-v, u-v) = -2g(u,v) < 0.$$

Isto é: ou $u+v$ é "timelike" ou $u-v$ é "timelike".

(3) $\implies$ (1) Seja z um vetor "timelike" em W ; então, $W^\perp \subset [z]^\perp$ e como $[z]^\perp$ é "spacelike", $W^\perp$ também o é. Mas então $W = (W^\perp)^\perp$ é "timelike". $\square$

Passaremos a analisar as isometrias de E_v^n e definiremos grupos semi-ortogonais.

Observemos que, dado um operador linear $A: E_v^n \rightarrow E_v^n$, podemos identificá-lo com a matriz $n \times n$, (a_{ij}) , onde $a_{ij} = g_v(Ae_i, e_j)$, onde g_v é dada em (1.6).

Para $0 \leq v \leq n$, a matriz assinatura ε é a matriz diagonal $(\delta_{ij} \varepsilon_j)$, cujas entradas diagonais são $\varepsilon_1 = \dots \varepsilon_v = -1$ e $\varepsilon_{v+1} = \dots = \varepsilon_n = 1$.

Portanto, $\varepsilon^{-1} = \varepsilon = \varepsilon^t$.

A partir dessa identificação, o conjunto de todas as isometrias lineares $A: E_v^n \rightarrow E_v^n$ é o conjunto $O(v, n-v)$ de todas as matrizes $A \in GL(n, \mathbb{R})$ que preservam a semi-métrica $g_v(v, w) = \langle \varepsilon v, w \rangle$, de E_v^n (onde $\langle, \rangle$ representa o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$).

$O(v, n-v)$ é chamado grupo semi-ortogonal e será denotado por $O_v(n)$.

(1.27) Teorema: As condições seguintes são equivalentes:

- (1) $A \in O_v(n)$
- (2) $A^t = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$
- (3) As colunas [linhas] de A formam uma base ortonormal para E_v^n (onde os v primeiros vetores são "timelike").
- (4) A leva base ortonormal em base ortonormal.

Prova: $(1) \iff (2)$: $A \in O_v(n) \iff g_v(Av, Aw) = g_v(v, w)$,
 $\forall v, w \in E_v^n \iff \langle \varepsilon Av, Aw \rangle = \langle \varepsilon v, w \rangle$, $\forall v, w \in E_v^n \iff \langle A^t \varepsilon Av, w \rangle =$
 $\langle \varepsilon v, w \rangle$, $\forall v, w \in E_v^n$, pois a transposta de uma matriz $n \times n$ é a
 adjunta relativa ao produto interno do $\mathbb{R}^n$. Da não-degenera-
 ção do produto interno segue que:

$A^t \varepsilon Av = \varepsilon v$, para todo $v \in V$, que é equivalente a $A^t = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$.

$(1) \iff (4)$ Sejam $A \in O_v(n)$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V , isto é, $g_v(e_i, e_j) = \varepsilon_j \delta_{ij}$; então, $g_v(Ae_i, e_j) = g_v(e_i, e_j) = \varepsilon_j \delta_{ij}$, ou seja: $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ é base ortonormal de E_v^n .

Reciprocamente, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base ortonormal de E_v^n , com $g_v(e_i, e_j) = \varepsilon_j \delta_{ij}$, temos, por hipótese, que $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ é base ortonormal de E_v^n e pelo lema 2.26 da página 51 de [9], temos

$$g_v(Ae_i, Ae_j) = \varepsilon_j \delta_{ij},$$

onde

$$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_v = -1 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{v+1} = \dots = \varepsilon_n = 1.$$

(3) $\iff$ (4) Basta observar que as colunas de A são os vetores $Ae_1, \dots, Ae_n$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de E_v^n , ortogonal com relação a g_v . E para linhas, basta notar que (2) implica $A \in O_v(n)$ se e só se $A^t \in O_v(n)$. De fato se $A \in O_v(n)$, $g_v(A^t v, A^t w) = \langle \varepsilon A^t v, A^t w \rangle = \langle A^{-1} \varepsilon v, A^t w \rangle$, por (2). Então, $g_v(A^t v, A^t w) = \langle AA^{-1} \varepsilon v, w \rangle = g_v(v, w)$ e, portanto, $A^t \in O_v(n)$. $\square$

Observação. Se $v = 0$ ou $v = n$, $O_v(n)$ é o grupo ortogonal $O(n)$ de isometrias lineares do $\mathbb{R}^n$ de isometrias lineares do $\mathbb{R}^n$. Se $v = 1$ e $n \geq 2$, $O_1(n)$ é o grupo de Lorentz de todas as isometrias lineares do L^n .

(1.28) Definição. Chamamos movimentos rígidos de E_v^n às aplicações:

$$F: E_v^n \rightarrow E_v^n,$$

tais que:

$$g_v(dF_p v, dF_p w) = g_v(v, w),$$

isto é, $dF_p \in O_v(n)$. Logo, os movimentos rígidos de E_v^n são, precisamente, as aplicações da forma $v \mapsto Av + q$, onde $A \in O_v(n)$ e $q \in E_v^n$.

CAPÍTULO 2

O ESPAÇO HIPERBÓLICO $H^n(c)$

CURVAS EM VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

No espaço de Lorentz $L^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, g_1)$ definido em (1.6), considere a hipersuperfície

$$\{p = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in L^{n+1} / g_1(p, p) = \frac{1}{c}\},$$

onde c é um real negativo.

Essa hipersuperfície é composta por duas componentes conexas, cada uma delas homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

(2.1) Definição: Escolhemos a componente formada pelos pontos $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ tais que $p_0 > 0$ e definimos:

$$H^n(c) = \{p = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in L^{n+1} / g_1(p, p) = \frac{1}{c} \text{ e } p_0 > 0\}$$

$H^n(c)$ é subvariedade do L^{n+1} chamada espaço hiperbólico n -dimensional.

Consideremos em $H^n(c)$ a métrica induzida do L^{n+1} e determinemos o espaço tangente $T_p H^n(c)$ ao $H^n(c)$ em um ponto p .

Dada uma curva $\alpha: I \rightarrow H^n(c)$, temos

$$g_1(\alpha(t), \alpha(t)) = \frac{1}{c} \Rightarrow g_1(\alpha(t), \alpha'(t)) = 0, \forall t \in I.$$

Então, qualquer que seja $p \in H^n(c)$, $T_p H^n(c)$ é o espaço dos vetores $v_p \in T_p L^{n+1}$, tais que $g_1(v_p, p) = 0$, isto é, é o kernel de $F: T_p L^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(v) = g_1(v, p)$. Segue

que, qualquer que seja $p \in H^n(c)$,

$$(2.2) \quad T_p H^n(c) = \{v_p \in L^{n+1} / g_1(v, p) = 0\}.$$

Observação: Considerando a identificação $T_p L^{n+1} = L^{n+1}$, podemos escrever $T_p H^n(c) = [p]^\perp$ e como p é vetor "timelike", pelo lema (1.24), $T_p H^n(c)$ é subespaço "spacelike" do L^{n+1} . Logo, em cada $p \in H^n(c)$, $g_1|_{T_p H^n(c)}$ é positiva-definida e, portanto, $H^n(c)$ é subvariedade riemanniana do espaço de Lorentz L^{n+1} .

(2.3) As isometrias de $H^n(c)$

Lema: Sejam $f, h: M \rightarrow N$ isometrias da variedade riemanniana conexa M na variedade riemanniana N . Se existe um ponto $p \in M$ tal que $f(p) = h(p)$ e $(df)_p = (dh)_p$, então $f = h$.

Prova: Considere a isometria $\phi = f^{-1} \circ h: M \rightarrow M$ e observe que $\phi(p) = p$ e $d\phi_p = (df^{-1})_{h(p)} \circ dh_p = (df^{-1})_{f(p)} \circ df_p = \text{id}_{T_p M}$.

Seja V uma vizinhança totalmente normal de p em M e seja $q \in V$. Então, existe um único $v \in T_p M$ tal que $\exp_p v = q$ e $\gamma(t) = \exp_p tv$ é a geodésica minimizante ligando p a q .

Seja $r = \phi(q)$. Como ϕ é isometria, $\phi \circ \gamma$ é geodésica minimizante ligando $\phi(p) = p$ a $\phi(q) = r$ e $r \in V$; então, novamente $p \in$

lo fato de V ser totalmente normal, $(\phi \circ \gamma)(t) = \exp_p tw$, onde w é o único vetor tal que $\exp_p w = r$.

Então, $\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(0) = w$ e, por outro lado,

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0} = d\phi_p \gamma'(0) = d\phi_p v = v ;$$

portanto $w = v$ e segue que $r = q$, isto é $\phi(q) = q$ e, como q é arbitrário, $\phi|_V = \text{id}_V$.

Como M é conexa, qualquer ponto $r \in M$ pode ser ligado a p por um número finito de tais vizinhanças. Segue que $\phi(r) = r$, para todo $r \in M$. Logo, $\phi = \text{id}_M$ e $f = h$. $\square$

(2.4) Proposição: As isometrias de $H^n(c)$ são as aplicações $A \in O_1(n+1)$ que deixam fixado o conjunto

$$\{p = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in L^{n+1} / p_0 > 0 \text{ e } g_1(p, p) = \frac{1}{c}\}$$

Prova: Seja $A \in O_1(n+1)$ isometria de L^{n+1} que deixa fixado o conjunto $H^n(c)$, isto é $A(p) \in H^n(c)$ para todo $p \in H^n(c)$. Então A é isometria do espaço hiperbólico.

Reciprocamente, consideremos uma isometria $\tilde{A}$ de $H^n(c)$. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de $T_p H^n(c)$, $p \in H^n(c)$ fixado, e sejam $w_i = d\tilde{A}_p(v_i)$, $i = 1, \dots, n$. Então, $\{w_1, \dots, w_n\}$ é base ortonormal de $T_{\tilde{A}(p)} H^n(c)$ e, além disso,

$$g_1(p, v_i) = 0 \implies g_1(\tilde{A}(p), w_i) = 0,$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Assim, $\{\sqrt{-c}p, v_1, \dots, v_n\}$ é base ortonormal de $T_p L^{n+1}$ e $\{\sqrt{-c}\tilde{A}(p), w_1, \dots, w_n\}$ é base ortonormal de $T_{\tilde{A}(p)} L^{n+1}$.

Consideremos a aplicação linear $A: L^{n+1} \rightarrow L^{n+1}$ definida por $A(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$, e $A(p) = \tilde{A}(p)$. Pelo teorema (1.27), $A \in O_1(n+1)$.

Se $q \in L^{n+1}$ é tal que $g_1(q, q) = \frac{1}{c}$, então

$$g_1(A(q), A(q)) = g_1(q, q) = \frac{1}{c}.$$

Portanto, A deixa o hiperbólide $\{q/g_1(q, q) = \frac{1}{c}\}$ invariante. Por outro lado, sendo A contínua e $p, A(p) \in H^n(c)$, temos que $A(H^n(c)) = H^n(c)$. Logo, A é isometria de $H^n(c)$ e, pelo lema (2.3), $A = \tilde{A}$. $\square$

(2.5) A Curvatura de $H^n(c)$

Consideremos a parametrização de $H^n(c)$ dada pela projeção

$$x: H^n(c) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

Como $x_0^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{c}$, temos a inversa:

$$x^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow H^n(c)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{c}}, x_1, \dots, x_n \right).$$

Para qualquer $p \in H^n(c)$, a base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ de $T_p H^n(c)$ é dada por:

$$dx_p^{-1} e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 - 1/c}}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \right).$$

Então, as componentes da métrica são:

$$(g_1)_{ij} = g_1\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{-x_i x_j}{x_0^2} + \delta_{ij}.$$

A normal unitária a $T_p H^n(c)$, no ponto p , é $\xi(p) = \frac{p}{\|p\|} = \sqrt{-c} p$.

Então, $\xi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sqrt{-c} (x_0, x_1, \dots, x_n)$, onde $x_0^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1/c$. O operador de Weingarten associado a ξ é dado por $A(X) = -(\nabla_X \xi)^T$, onde ∇ é a conexão Levi-Civita do L^{n+1} e $X \in \chi(H^n(c))$.

Calculando na base:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= - \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \sqrt{-c} (x_0, x_1, \dots, x_n) \right)^T \\ A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= - \sqrt{-c} \left(\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1/c}}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \right) \\ A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= - \sqrt{-c} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Portanto, $A_p = -\sqrt{-c} \operatorname{id}_{T_p H^n(c)}$.

Os símbolos de Christoffel do L^{n+1} são todos nulos (1.14) e isto implica que a curvatura do L^{n+1} é nula.

Então, sendo R a curvatura do $H^n(c)$, a equação de Gauss se escreve:

$$g_1(R(X,Y)Z,W) = g_1(AY,Z)g_1(AX,W) - g_1(AX,Z)g_1(AY,W),$$

$\forall p \in H^n(c), \forall X,Y,Z,W \in T_p H^n(c)$.

Para dois campos quaisquer X e Y , tangentes ao $H^n(c)$, temos, então:

$$g_1(R(X,Y)X,Y) = g_1(-\sqrt{-c} Y,X)g_1(-\sqrt{-c} Y,X) - g_1(-\sqrt{-c} X,X)g_1(-\sqrt{-c} Y,Y)$$

$$g_1(R(X,Y)X,Y) = c[g_1(X,X)g_1(Y,Y) - g_1(X,Y)^2]$$

$$g_1(R(X,Y)X,Y) = c g_1(X \wedge Y, X \wedge Y)$$

Então, a curvatura seccional de $H^n(c)$ no plano gerado por X e Y é dada por

$$\frac{g_1(R(X,Y)X,Y)}{g_1(X \wedge Y, X \wedge Y)} = c.$$

Assim, o $H^n(c)$ é variedade riemanniana de curvatura constante negativa c .

(2.6) Geodésicas de $H^n(c)$

Seja $\alpha: I \rightarrow H^n(c)$ geodésica parametrizada pelo comprimento de arco em $H^n(c)$.

Então $\frac{D}{dt} \alpha'(t) = 0$, para todo t , isto é, $\alpha''(t) \in L^{n+1}$ é normal a $T_{\alpha(t)} H^n(c)$; logo, existe uma função real λ tal que $\alpha''(t) = \lambda(t) \alpha(t)$. De $g_1(\alpha'(t), \alpha(t)) = 0$, segue que $g_1(\alpha''(t), \alpha(t)) = -g_1(\alpha'(t), \alpha'(t))$ e, então, $\lambda(t) \frac{1}{c} = -1$, ou seja $\lambda(t) = -c$.

Então, α deve satisfazer à equação diferencial $\alpha''(t) + c\alpha(t) = 0$. Uma solução dessa equação é do tipo:

$$\alpha(t) = (\cosh \sqrt{-c} t) A + \frac{1}{\sqrt{-c}} (\sinh \sqrt{-c} t) B,$$

onde A e $B \in L^{n+1}$. Impondo condições iniciais $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p H^n(c)$, $\|v\| = 1$, temos:

$$\alpha(t) = (\cosh \sqrt{-c} t) p + \frac{1}{\sqrt{-c}} (\sinh \sqrt{-c} t) v;$$

ou seja, a geodésica do $H^n(c)$ passando por p com velocidade inicial v está contida no plano pela origem gerado por p e v .

Conclui-se, então, que as geodésicas do H^n são as intersecções $H^n \cap \pi$, onde π é o plano $[p, v]$ do L^{n+1} passando pela origem.

Segue, também, que as subvariedades totalmente geodésicas do $H^n(c)$ são do tipo $H^n \cap V$, onde V é subespaço vetorial do L^{n+1} .

No capítulo seguinte, trabalharemos com variedades com curvatura seccional constante e, em particular, com as variedades com curvatura seccional constante negativa. Será útil observarmos que, na verdade, poderemos sempre pensar apenas em H^n , S^n ou E^n , segundo a curvatura seja negativa, positiva ou nula, uma vez que estes serão os respectivos espaços de recobrimento da variedade.

(2.7) Definição: Se M e $\tilde{M}$ são duas variedades de dimensão m , a aplicação $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento se:

- a) π é contínua e $\pi(\tilde{M}) = M$
- b) todo ponto $p \in M$ admite uma vizinhança U , em M , tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$, onde os V_{α} são abertos disjuntos dois a dois de $\tilde{M}$, tais que a restrição de π a cada V_{α} é um homeomorfismo de V_{α} sobre U .

Os abertos U são chamados abertos admissíveis do recobrimento e $\tilde{M}$ é chamada variedade de recobrimento de M ou espaço de recobrimento de M .

(2.8) Proposição: Uma variedade conexa M , de dimensão n , admite um espaço de recobrimento $\tilde{M}$, simplesmente conexo.

O espaço $\tilde{M}$, de que fala esta proposição, "contém" todos os outros espaços de recobrimento, a menos de difeomorfismo, e é, por isso, chamado espaço de recobrimento universal de M .

(2.9) Teorema: Seja M^n uma variedade riemanniana completa e de curvatura seccional constante c . Então, o recobrimento universal $\tilde{M}$, de M , com a métrica induzida pela aplicação de recobrimento, é, a menos de isometria:

- a) $H^n(c)$, se $c < 0$
- b) E^n , se $c = 0$
- c) $S^n(c)$, se $c > 0$

Prova: O recobrimento universal $\tilde{M}$, de M , é uma variedade completa, simplesmente conexa, de curvatura seccional constante c .

Consideremos $c < 0$ ou $c = 0$ e indiquemos tanto o $H^n(c)$ quanto o E^n por Δ . Fixemos pontos $p \in \Delta$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e uma isometria linear $i: T_p \Delta \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$.

Seja $f: \Delta \rightarrow \tilde{M}$ dada por:

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}.$$

Δ e $\tilde{M}$ são completas com curvaturas seccionais não positivas, o que implica que para todo $p \in \Delta$ e $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $\exp_p: T_p \Delta \rightarrow \Delta$ e $\exp_{\tilde{p}}: T_{\tilde{p}} \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ são difeomorfismos locais; portanto, f está bem definida.

Nessas condições, como Δ e $\tilde{M}$ têm a mesma curvatura seccional, por um teorema de Cartan [6] segue que f é uma isometria local que preserva comprimentos. Isso implica que f é uma aplicação de recobrimento. Como $\tilde{M}$ é simplesmente conexo, f é um difeomorfismo e, portanto, uma isometria.

Tomemos, agora, $c > 0$. Fixemos pontos $p \in S^n(c)$ e $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e seja $i: T_p S^n(c) \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ uma isometria linear.

Seja $q \in S^n(c)$ o ponto antípoda de p e defina:

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}: S^n(c) \setminus \{q\} \rightarrow \tilde{M}$$

Novamente pelo teorema de Cartan, f é uma isometria local, já que as curvaturas de $S^n(c)$ e $\tilde{M}$ são iguais.

Seja $p' \in S^n(c)$, $p' \neq p$ e $p' \neq q$ e sejam $\tilde{p}' = f(p')$ e $i' = df_{p'}$.

Definamos:

$$\bar{f} = \exp_{\tilde{p}'} \circ i' \circ \exp_{p'}^{-1}: S^n(c) \setminus \{q'\} \rightarrow \tilde{M},$$

onde q' é o antípoda de p' .

Temos $S^n(c) \setminus \{q, q'\} = W$ conexo, $p' \in W$, $f(p') = \tilde{p}' = \bar{f}(p')$, $df_{p'} = i' = d\bar{f}_{p'}$ e como $\bar{f}$ é, pelo mesmo motivo anterior, isometria local, segue do lema (2.3) que $f = \bar{f}$ em W .

Então, podemos definir $g: S^n(c) \rightarrow \tilde{M}$ por:

$$g(r) = \begin{cases} f(r) & , \text{ se } r \in S^n(c) \setminus \{q\} \\ \bar{f}(r) & , \text{ se } r \in S^n(c) \setminus \{q'\} \end{cases}$$

É claro que g é isometria local e, portanto, um difeomorfismo local. Pela compacidade de $S^n(c)$, g é uma aplicação de recobrimento e como $\tilde{M}$ é simplesmente conexo, g é um difeomorfismo.

Logo, g é uma isometria. $\square$

(2.10) Definição: As variedades completas com curvatura seccional constante são chamadas formas espaciais.

Nos capítulos seguintes estudaremos subvariedades regradas em formas espaciais. Se $\bar{M}^N(c)$ é uma forma espacial de curvatura seccional c , então, como assinalamos anteriormente, $\bar{M}^N(c)$ pode ser pensado, localmente, como sendo o $H^N(c)$, o E^N ou o $S^N(c)$, respectivamente para $c < 0$, $c = 0$ ou $c > 0$.

Curvas em Variedades semi-riemannianas

(2.11) O referencial de Frenet

Sejam $(M, \langle, \rangle)$ uma variedade semi-riemanniana, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\frac{D}{ds}$ a derivação covariante ao longo de α .

Vamos definir, ao longo de α , um referencial especial que é a generalização, para variedades semi-riemannianas, do triedro de Frenet para uma curva no espaço euclidiano E^3 .

Começamos tomando $E_1(s) = \alpha'(s)$. Então:

$$\langle E_1, E_1 \rangle = \pm 1 \implies \left\langle \frac{DE_1}{ds}, E_1 \right\rangle = 0.$$

Definimos a primeira função curvatura k_1 , de α , por: $k_1(s) = \left\| \frac{DE_1}{ds} \right\|$ e, no domínio em que $k_1(s) \neq 0$, consi

deramos:

$$E_2(s) = \frac{1}{k_1(s)} \frac{DE_1}{ds}(s).$$

Portanto, E_2 é campo unitário ao longo de α e $E_2(s)$ é ortogonal a $E_1(s)$, para todo s onde $k_1(s) \neq 0$. Temos, então, a primeira fórmula de Frenet:

$$(F1) \quad \frac{DE_1}{ds}(s) = k_1(s)E_2(s).$$

Agora, $\langle E_2, E_2 \rangle = \pm 1 \implies \langle \frac{DE_2}{ds}, E_2 \rangle = 0$; além disso,

$$\langle E_1, E_2 \rangle = 0 \implies \langle \frac{DE_1}{ds}, E_2 \rangle + \langle E_1, \frac{DE_2}{ds} \rangle = 0$$

e, então:

$$\langle E_1(s), \frac{DE_2}{ds}(s) \rangle = -k_1(s).$$

Logo, o campo $w(s) = \frac{DE_2}{ds} + k_1(s)E_1(s)$ é ortogonal a E_1 e a E_2 .

Definimos a segunda função curvatura por:

$$k_2(s) = \left\| \frac{DE_2}{ds} + k_1(s)E_1(s) \right\|$$

e, no domínio em que $k_2(s) \neq 0$, tomamos:

$$E_3(s) = \frac{1}{k_2(s)} \left[\frac{DE_2}{ds}(s) + k_1(s)E_1(s) \right],$$

de modo que E_3 é campo unitário ao longo de α , ortogonal a

E_1 e a E_2 . E temos:

$$(F2) \quad \frac{DE_2}{ds} = -k_1(s)E_1(s) + k_2(s)E_3(s) ,$$

para todo s onde $k_1(s) \neq 0$ e $k_2(s) \neq 0$.

Suponhamos, agora, por indução, que para um certo $j < m = \dim M$, temos j campos de vetores $E_1, \dots, E_j$, ortonormais ao longo de α , e funções curvatura $k_1, \dots, k_{j-1}$, que não se anulam em nenhum ponto, tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (F1) \quad \frac{DE_1}{ds}(s) = k_1(s)E_2(s) \\ (F2) \quad \frac{DE_2}{ds}(s) = -k_1(s)E_1(s) + k_2(s)E_3(s) \\ \vdots \\ \vdots \\ (F(j-1)) \quad \frac{DE_{j-1}}{ds}(s) = -k_{j-2}(s)E_{j-2}(s) + k_{j-1}(s)E_j(s) . \end{array} \right.$$

Então, $\langle E_j, E_j \rangle = \pm 1$ implica $\langle \frac{DE_j}{ds}, E_j \rangle = 0$. Além disso, pela hipótese de indução, temos $\langle E_i, E_j \rangle = 0$, para $i < j$, e daí:

$$\langle E_i, \frac{DE_j}{ds} \rangle = - \langle \frac{DE_i}{ds}, E_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j-1 \\ -k_{j-1}(s), & \text{se } i = j-1 \end{cases}$$

Portanto, o campo $\tilde{w}(s) = \frac{DE_j}{ds}(s) + k_{j-1}(s)E_{j-1}(s)$

é perpendicular a $E_1, \dots, E_j$. Definimos a j -ésima função curvatura por:

$$k_j(s) = \left\| \frac{DE_j}{ds}(s) + k_{j-1}(s)E_{j-1}(s) \right\|$$

e, no domínio em que $k_j(s) \neq 0$, tomamos:

$$E_{j+1}(s) = \frac{1}{k_j(s)} \left[\frac{DE_j}{ds}(s) + k_{j-1}(s)E_{j-1}(s) \right] .$$

Temos, então:

$$(F \ j) \quad \frac{DE_j}{ds} = -k_{j-1}(s)E_{j-1}(s) + k_j(s)E_{j+1}(s) ,$$

para todo s onde $k_1, \dots, k_j$ não se anulam.

O processo termina se, para um $j \leq m = \dim M$, $k_j = 0$ e, neste caso:

$$\frac{DE_j}{ds}(s) = -k_{j-1}(s)E_{j-1}(s) .$$

Restringindo-nos ao intervalo em que $k_1(s), \dots, k_j(s)$ não se anulam e $k_j \equiv 0$, temos o referencial $\{E_1, \dots, E_j\}$ chamado referencial de Frenet para a curva α .

Sabemos que uma curva $\alpha: I \rightarrow E^3$, tal que $k_1(s) \neq 0$, para todo s em I , e $k_2 \equiv 0$, está totalmente contida em um plano. Veremos uma generalização desse fato para curvas no espaço semi-euclidiano E^n_ν e para curvas em variedades riemannianas de curvatura constante.

(2.12) Lema: Seja $\alpha: I \rightarrow E^n_\nu$ uma curva regular e, para cada s , seja $\Delta(s) \subset T_{\alpha(s)}E^n_\nu$ um subespaço de dimensão j tal que $\frac{D\alpha}{ds} = \alpha'(s) \in \Delta(s)$. Suponha que os $\Delta(s)$ são todos para-

lelos. Então α é uma curva em um hiperplano $P = \Delta(a)$, onde $a \in I$.

Prova: Seja $a \in I$ e consideremos $P = \Delta(a)$. A menos de uma isometria de E_V^n , podemos assumir que P é o hiperplano coordenado $(x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0)$.

Suponhamos, por absurdo, que $\alpha(I)$ não está contida em P . Então, existe $k > j$ e $s_1, s_2 \in I$, $s_1 \neq s_2$, tais que $\alpha_k(s_1) \neq \alpha_k(s_2)$ e, pelo teorema do valor médio, existe $\bar{s} \in]s_1, s_2[$ tal que:

$$\alpha_k(s_2) - \alpha_k(s_1) = \alpha'_k(\bar{s})(s_2 - s_1).$$

Portanto, $\alpha'_k(\bar{s}) \neq 0$, mas isso é absurdo, pois, por hipótese, $\alpha'(\bar{s}) \in \Delta(\bar{s})$ e $\Delta(\bar{s})$ é paralelo a P .

Assim, $\alpha(I) \subset P$ (e $\Delta(s) = P$, $\forall s$).

(2.13) Teorema: Seja $\alpha: I \rightarrow E_V^n$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que as curvaturas $k_1, \dots, k_{j-1}$ não se anulam em nenhum ponto e $k_j \equiv 0$. Então, α está contida no hiperplano $[E_1(0), \dots, E_j(0)]$, onde $\{E_1, \dots, E_j\}$ é o referencial de Frenet associado a α .

Prova: Seja $\Delta(s) \subset T_{\alpha(s)} E_V^n$ o subespaço j -dimensional gerado por $E_1(s), \dots, E_j(s)$. Afirmamos que os $\Delta(s)$ são todos paralelos.

Consideremos a equação matricial:

$$M(s) \begin{pmatrix} E_1(s) \\ \vdots \\ E_j(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(0) \\ \vdots \\ E_j(0) \end{pmatrix}$$

Essa equação tem solução se e só se tem solução a equação diferencial:

$$M'(s) \begin{pmatrix} E_1(s) \\ \vdots \\ E_j(s) \end{pmatrix} + M(s) \begin{pmatrix} E'_1(s) \\ \vdots \\ E'_j(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

com condição inicial $M(0) = \text{id}$, onde $E'_i(0) = \frac{D}{ds}E_i(0)$ e $\frac{D}{ds}$ é a derivação covariante de E^n_v .

Das equações de Frenet, temos:

$$E'_i(s) = -k_{i-1}(s)E_{i-1}(s) + k_i(s)E_{i+1}(s) .$$

e, portanto, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} E'_1(s) \\ \vdots \\ E'_j(s) \end{pmatrix} = B(s) \begin{pmatrix} E_1(s) \\ \vdots \\ E_j(s) \end{pmatrix}$$

onde $B(s) = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & & \\ 0 & -k_2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -k_{j-1} & 0 \end{pmatrix}$

Então, o problema reduz-se a resolvermos a equação diferencial matricial:

$$M'(s) + M(s)B(s) = 0, \text{ com condição inicial } M(0) = \text{id}.$$

Como as funções em B são diferenciáveis, existe uma única solução $M(s)$, tal que $M(0) = \text{id}$, inversível numa vizinhança de $s = 0$, pois $\det M(0) = 1$. Isto é, $M(s)$ é a matriz de mudança da base $\{E_1(s), \dots, E_j(s)\}$ para a base $\{E_1(0), \dots, E_j(0)\}$. Portanto, os $\Delta(s)$ próximos de $\Delta(0)$ são todos paralelos ao subespaço $\Delta(0) = [E_1(0), \dots, E_j(0)]$ e, pelo lema (2.12) segue que o trecho correspondente da curva está no plano $\Delta(0)$. Repetindo o processo para uma vizinhança de cada ponto, temos que $\alpha(I) \subset \Delta(0)$. $\square$

(2.14) Definição: Dada uma curva $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ em uma variedade riemanniana M , suponhamos que, para cada $s \in I$, temos um espaço j -dimensional $\Delta(s) \subset T_{\alpha(s)}M$ tal que existem campos diferenciáveis $V_1, \dots, V_j$ ao longo de α , tais que

$\Delta(s) = [V_1(s), \dots, V_j(s)]$, para todo $s \in I$. Então, a aplicação $\Delta: s \in I \rightarrow \Delta(s) \subset T_{\alpha(s)}M$ é chamada uma distribuição j -dimensional em M , ao longo de α . Fixado $a \in I$, seja

$\tau_s: T_{\alpha(a)}M \rightarrow T_{\alpha(s)}M$ o transporte paralelo, ao longo de α , de $\alpha(a)$ a $\alpha(s)$. Dizemos que Δ é distribuição paralela, ao longo de α , se $\tau_s(\Delta(a)) = \Delta(s)$, para todo $s \in I$.

(2.15) Lema: Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva em uma variedade riemanniana M e seja Δ uma distribuição j -dimensional ao longo de α . Então, Δ é paralela ao longo de α se e somente se $\frac{DV}{ds} \in \Delta$ para todo campo vetorial $V \in \Delta$.

Prova: Suponhamos que Δ é paralela. Para cada s , existe base $\{V_1(s), \dots, V_j(s)\}$, onde cada V_i é campo paralelo ao longo de α . Logo, dado $V \in \Delta$, temos

$$V(s) = \sum_{i=1}^j v_i(s) V_i(s)$$

e então:

$$\frac{DV}{ds}(s) = \sum_{i=1}^j v_i'(s) V_i(s) \in \Delta(s),$$

para cada s .

Reciprocamente, suponhamos que, para todo $V \in \Delta$ temos $\frac{DV}{ds} \in \Delta$ e consideremos $V_1, \dots, V_j$ campos de vetores linearmente independentes ao longo de α .

Então,

$$\frac{DV_i}{ds}(s) = \sum_{k=1}^j a_{ki}(s) V_k(s) , \quad i=1, \dots, j ,$$

onde as a_{ki} são funções diferenciáveis.

Vamos mostrar que, para cada s , existe base $\{W_1(s), \dots, W_j(s)\}$ de $\Delta(s)$, onde os W_i são campos vetoriais paralelos ao longo de α .

$$\text{Um campo } W_i, \quad W_i(s) = \sum_{\lambda=1}^j b_{\lambda i}(s) V_{\lambda}(s) \in \Delta(s) ,$$

é paralelo ao longo de α se e só se:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=1}^j b'_{\lambda i}(s) V_{\lambda}(s) + \sum_{\lambda=1}^j b_{\lambda i}(s) \frac{DV_{\lambda}}{ds} = 0 \\ \iff & \sum_{k=1}^j b'_{ki} V_k(s) + \sum_{\lambda,k=1}^j b_{\lambda i} a_{k\lambda} V_k(s) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff b'_{ki}(s) + \sum_{\lambda=1}^j b_{\lambda i} a_{k\lambda} = 0 , \quad i, k = 1, \dots, j$$

Temos um sistema linear de equações diferenciais e, então, dadas condições iniciais $b_{\lambda i}(a) = \delta_{\lambda i}$, $a \in I$, existe uma única solução $b_{\lambda i}(s)$, $\lambda, i = 1, \dots, j$, em I . Então,

$$\{W_1, \dots, W_j\} , \quad \text{onde } W_i(s) = \sum_{\lambda=1}^j b_{\lambda i}(s) V_{\lambda}(s) ,$$

é conjunto de campos paralelos ao longo de α , linearmente independente em a ($W_i(a) = V_i(a)$) e, portanto, linearmente independente em todo ponto. $\square$

(2.16) Lema: Seja $\bar{M}^N(c)$ uma variedade riemanniana de curvatura constante $c \neq 0$. Seja $\alpha: I \rightarrow \bar{M}^N$ uma curva e seja Δ distribuição j -dimensional ao longo de α tal que

$$\frac{\bar{D}}{ds} \alpha(s) \in \Delta(s), \quad \forall s \in I,$$

onde $\frac{\bar{D}}{ds}$ é a derivação covariante ao longo de α em $\bar{M}$. Se Δ é a distribuição paralela ao longo de α , então α está contida em alguma subvariedade totalmente geodésica $P \subset \bar{M}$:

Prova: Localmente, $\bar{M}^N(c) = H^N(c) \subset L^{N+1}$ ou $\bar{M}^N(c) = S^N(c) \subset E^{N+1}$, se $c < 0$ ou $c > 0$, respectivamente. Consideremos $c < 0$ e sejam $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões Levi-Civita em $H^N(c)$ e L^{N+1} respectivamente.

Seja ν o campo normal unitário em $H^N(c)$ e consideremos a distribuição $\tilde{\Delta}$, no L^{N+1} , dada por:

$$\tilde{\Delta}(s) = \Delta(s) \oplus [\nu(\alpha(s))] \subset T_{\alpha(s)} L^{N+1},$$

para cada $s \in I$:

Seja W um campo de vetores ao longo de α em L^{N+1} tal que $W(s) \in \tilde{\Delta}(s)$, $\forall s \in I$. Então, podemos escrever, de modo único:

$$W(s) = W_1(s) + \lambda(s)\nu(\alpha(s)),$$

onde $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $W_1(s) \in \Delta(s)$, $\forall s \in I$.

Sendo $\frac{D}{ds}$ a derivação covariante ao longo de α em L^{N+1} , temos:

$$\frac{DW}{ds} = \frac{DW_1}{ds}(s) + \lambda'(s)v(\alpha(s)) + \lambda(s)\frac{Dv}{ds}.$$

Como Δ é paralela, do lema (2.15), segue que

$\frac{\overline{DW}_1}{ds} \in \Delta(s)$, ou seja,

$$\left(\frac{DW_1}{ds}(s)\right)^T = \frac{\overline{DW}_1}{ds}(s) \in \Delta(s),$$

onde $()^T$ é a projeção, em L^{N+1} , sobre o espaço tangente de $\overline{M}$. Então,

$$\frac{DW_1}{ds}(s) \in \Delta(s) \oplus [v(\alpha(s))].$$

Além disso,

$$\frac{Dv}{ds} = \frac{D}{ds}(\sqrt{|c|}\alpha(s)) = \sqrt{|c|} \frac{D\alpha}{ds} = \sqrt{|c|} \frac{\overline{D}\alpha}{ds}$$

e como, por hipótese, $\frac{\overline{D}\alpha}{ds} \in \Delta(s)$, temos $\frac{Dv}{ds} \in \Delta(s)$.

Segue, então, que

$$\frac{DW}{ds}(s) \in \Delta(s) \oplus [v(\alpha(s))] = \tilde{\Delta}(s)$$

e já que W é arbitrário, novamente pelo lema (2.15), $\tilde{\Delta}$ é distribuição $(j+1)$ -dimensional no L^{N+1} , paralela ao longo de α .

Então, pelo lema (2.12), α está contida num hiperplano $\tilde{P} = \tilde{\Delta}(a)$, $a \in I$, e como $v(\alpha(a)) \in \tilde{P}$, segue que $\tilde{P}$ é hiperplano pela origem do L^{N+1} .

Portanto, α está contida na subvariedade totalmente geodésica $P = \tilde{P} \cap H^N(c)$, do $H^N(c)$.

Para $c > 0$, a demonstração é idêntica. $\square$

(2.17) Teorema: Seja $\bar{M}^N(c)$ variedade de curvatura constante $c \neq 0$. Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}^N$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que as curvaturas $k_1, \dots, k_{j-1}$ não se anulam em nenhum ponto e $k_j \equiv 0$. Então, α está contida numa subvariedade totalmente geodésica $[\alpha(a), E_1(a), \dots, E_j(a)] \cap \bar{M}^N$, de $\bar{M}^N$, onde $a \in I$ e $\{E_1, \dots, E_j\}$ é o referencial de Frenet associado a α em $\bar{M}^N$.

Prova: Seja $\Delta(s) = [E_1(s), \dots, E_j(s)] \subset T_{\alpha(s)}\bar{M}^N$, para cada $s \in I$.

Para cada i , $\frac{\overline{DE}_i}{ds} = -k_{i-1}E_{i-1} + k_iE_{i+1}$; portanto $\frac{\overline{DE}_i}{ds} \in \Delta(s)$. Então, pelo lema (2.15), Δ é distribuição paralela ao longo de α e, pelo lema (2.16) segue que α está contida na subvariedade totalmente geodésica

$$[\alpha(a), E_1(a), \dots, E_j(a)] \cap \bar{M}, a \in I.$$

Além disso, da demonstração de (2.16):

$$[\alpha(s), E_1(s), \dots, E_j(s)] = [\alpha(a), E_1(a), \dots, E_j(a)],$$

para todo $s \in I$. $\square$

(2.18) Seja $\alpha: I \rightarrow E_v^n$ curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvaturas $k_1, \dots, k_{j-1}$, que não se anulam em nenhum ponto, e $k_j \equiv 0$. Pela demonstração do teorema (2.13),

$$[E_1(s), \dots, E_j(s)] = [E_1(0), \dots, E_j(0)].$$

Se W é o complemento ortogonal desse subespaço em E_v^n , $\dim W = n-j$, podemos escolher uma base ortonormal $\{E_{j+1}, \dots, E_n\}$, de W , e dizer que $\{E_1(s), \dots, E_n(s)\}$ é o referencial de Frenet estendido da curva α , onde $E_i(s) = E_i$, para $i = j+1, \dots, n$; temos, também, as equações de Frenet satisfeitas trivialmente tomando curvaturas k_i identicamente nulas, para $i = j+1, \dots, n$.

Da mesma forma, para uma curva $\alpha: I \rightarrow \bar{M}^N(c)$ nessas mesmas condições, onde $\bar{M}^N(c)$ é variedade riemanniana de curvatura constante $c \neq 0$, temos, pelo teorema (2.17),

$$[\alpha(s), E_1(s), \dots, E_j(s)] = [\alpha(0), E_1(0), \dots, E_j(0)].$$

Então, sendo W o complemento ortogonal desse subespaço no espaço ambiente, E^{N+1} ou L^{N+1} , temos $\dim W = N-j$ e podemos escolher uma base $\{E_{j+1}, \dots, E_N\}$ de W e dizer, como antes, que $\{E_1(s), \dots, E_N(s)\}$ é o referencial de Frenet estendido, onde $E_i(s) = E_i$, $i = j+1, \dots, N$.

(2.19) Definição: Dizemos que $G = \{A(s): M \rightarrow M, s \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de M se:

- (1) $A(s)$ é movimento rígido de M , para todo s .
- (2) G é um grupo em relação à composição
- (3) $A(0) = \text{id}_M$ e $A(s+t) = A(s) \circ A(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

Vimos em (1.28) que os movimentos rígidos de E_V^n são do tipo $\tilde{A} = T \circ A$, onde T é uma translação e A é uma transformação semi-ortogonal.

Sabemos que se A é um movimento rígido da esfera $S^N(c) \subset E^{N+1}$, então A é uma isometria linear, isto é, A pertence ao subgrupo $O(N+1)$ das transformações ortogonais do E^{N+1} . Da mesma forma, por (2.4), um movimento rígido A do espaço hiperbólico $H^N(c) \subset L^{N+1}$ é uma isometria linear do $E_1^{N+1} = L^{N+1}$, isto é, $A \in O_1(N+1)$.

(2.20) Proposição: Denotemos por $\bar{M}^N(c)$ a esfera $S^N(c)$ ou o espaço hiperbólico $H^N(c)$. Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}^N(c)$ curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então, α tem curvaturas constantes se e só se existe um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$, de $\bar{M}^N$, tal que

$$A(s)\alpha(t) = \alpha(s+t).$$

Neste caso, $A(s)E_j(t) = E_j(s+t)$, para todo j , onde $\{E_1, \dots, E_N\}$ é o referencial de Frenet de α .

Prova: Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow H^N(c) [S^N(c)]$, uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvaturas constantes $k_1, \dots, k_{m-1}$, não nulas e $k_m \equiv 0$, onde $m \leq N$, e seja $\{E_1(s), \dots, E_N(s)\}$ o

referencial de Frenet associado a α , definido como em (2.18).

Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos uma aplicação linear

$$A(s): L^{N+1} \rightarrow L^{N+1} [A(s): E^{N+1} \rightarrow E^{N+1}]$$

por:

$$\begin{cases} A(s)\alpha(0) = \alpha(s) \\ A(s)E_j(0) = E_j(s), \quad j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

$\alpha(s) \in H^N(c)[S^N(c)]$ e, portanto, é normal aos $E_j(s)$. Logo

$$\{\sqrt{|c|}\alpha(s), E_1(s), \dots, E_N(s)\}$$

é base ortonormal de $L^{N+1}[E^{N+1}]$ e, pelo teorema (1.27), segue que $A(s) \in O_1(N+1)$, $[A(s) \in O(N+1)]$, ou seja, $A(s)$ é isometria linear de $L^{N+1}[E^{N+1}]$. Então, $A(s)$ restrita a $H^N(c)[S^N(c)]$ é, também, uma isometria.

Consideremos o sistema linear:

$$\begin{cases} \frac{\overline{D}\psi_0}{dt} = \psi_1 \\ \frac{\overline{D}\psi_j}{dt} = -k_{j-1}\psi_{j-1} + k_j\psi_{j+1} \end{cases}$$

$$\text{com condição inicial} \quad \begin{cases} \psi_0(0) = \alpha(s) \\ \psi_j(0) = E_j(s), \quad \forall j \end{cases} \quad \text{para cada } s \text{ fi-}$$

xado, onde $\frac{\overline{D}}{dt}$ é a derivação covariante de $\overline{M}^N(c)$.

Pelo teorema de existência e unicidade de soluções para sistemas lineares de equações diferenciais com condição

inicial, existe uma única solução para o sistema. Verifiquemos que

$$\{A(s)\alpha(t), A(s)E_1(t), \dots, A(s)E_N(t)\}$$

e

$$\{\alpha(s+t), E_1(s+t), \dots, E_N(s+t)\}$$

são, ambos, soluções para tal sistema.

De fato, se tomarmos:

$$\Psi_0(t) = \alpha(s+t) \quad \text{e} \quad \Psi_j(t) = E_j(s+t),$$

teremos:

$$\frac{\bar{D}\Psi_0}{dt} = \frac{\bar{D}}{dt} \alpha(s+t) = E_1(s+t) = \Psi_1(t)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}\Psi_j}{dt} &= \frac{\bar{D}}{dt} E_j(s+t) = -k_{j-1}(s+t)E_{j-1}(s+t) + k_j(s+t)E_{j+1}(s+t) = \\ &= -k_{j-1}E_{j-1}(s+t) + k_jE_{j+1}(s+t). \end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{\bar{D}\Psi_j}{dt} = -k_{j-1}\Psi_{j-1} + k_j\Psi_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

e, pondo $t=0$, vemos que as Ψ_i satisfazem às condições iniciais.

Logo $\{\alpha(s+t), E_1(s+t), \dots, E_N(s+t)\}$ é solução.

Por outro lado, observamos que sendo $A(s)$ linear, temos para qualquer curva $\beta = \beta(t)$ em $\bar{M}$:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}}{dt} A(s)\beta(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(s)\beta(t+h) - A(s)\beta(t)}{h} = \\ &= A(s) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\beta(t+h) - \beta(t)}{h}, \end{aligned}$$

ou seja:

$$(2.21) \quad \frac{\bar{D}}{dt} A(s) \beta(t) = A(s) \frac{\bar{D}\beta}{dt}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Daí, segue que tomando $\Psi_0(t) = A(s) \alpha(t)$ e $\Psi_j(t) = A(s) E_j(t)$, $j = 1, \dots, N$, temos:

$$\frac{\bar{D}\Psi_0}{dt}(t) = A(s) \frac{\bar{D}}{dt} \alpha(t) = \Psi_1(t).$$

$$\frac{\bar{D}\Psi_j}{dt}(t) = A(s) \frac{\bar{D}}{dt} E_j(t) = A(s) [-k_{j-1}(t) E_{j-1}(t) + k_j(t) E_{j+1}(t)]$$

$$\frac{\bar{D}\Psi_j}{dt}(t) = -k_{j-1} \Psi_{j-1}(t) + k_j \Psi_{j+1}(t), \quad j = 1, \dots, N.$$

Além disso, para $t = 0$, temos, por definição $A(s) \alpha(0) = \alpha(s)$ e $A(s) E_j(0) = E_j(s)$, para $j = 1, \dots, N$.

Pela unicidade de solução do sistema, obtemos:

$$\begin{cases} A(s) \alpha(t) = \alpha(s+t) \\ A(s) E_j(t) = E_j(s+t), \quad j=1, \dots, N. \end{cases}$$

Resta provar que o conjunto $G = \{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ é subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $H^N(c) [S^N(c)]$.

Por definição, temos $A(0) = \text{id}_{L^{N+1}}$ [$A(0) = \text{Id}_{E^{N+1}}$].

Portanto, a identidade pertence a G .

Além disso, observemos que

$$A(s+t)\alpha(0) = \alpha(s+t) = A(s)\alpha(t) = A(s) \circ A(t)\alpha(0)$$

e da mesma forma:

$$A(s+t)E_j(0) = A(s) \circ A(t)E_j(0), \quad j = 1, \dots, N,$$

donde se conclui que $A(s+t) = A(s) \circ A(t)$ e também que $A(s)^{-1} = A(-s)$. Portanto, $A(s), A(t) \in G$ implica $A(s) \circ A(t) \in G$ e $A(s)^{-1} \in G$; logo G é subgrupo de $GL(N+1, \mathbb{R})$ e como satisfaz as outras condições em (2.19), G é subgrupo a 1-parâmetro de isometrias de $\bar{M}^N(c)$.

Reciprocamente, se $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ é subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $H^N(c)$ [$S^N(c)$] tal que $A(s)\alpha(t) = \alpha(s+t)$, onde $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}^N(c)$ é curva parametrizada pelo comprimento de arco, então, como $A(s)$ é linear, temos por (2.21):

$$A(s)E_1(t) = \frac{\bar{D}}{dt}A(s)\alpha(t) = \frac{\bar{D}}{dt}\alpha(s+t) = E_1(s+t)$$

Derivando novamente:

$$A(s)\frac{\bar{D}E_1}{dt}(t) = \frac{\bar{D}}{dt}E_1(s+t)$$

e, então:

$$k_1(t) = \left\| \frac{\bar{D}E_1}{dt}(t) \right\| = \left\| A(s)\frac{\bar{D}E_1}{dt}(t) \right\| = \left\| \frac{\bar{D}E_1}{dt}(s+t) \right\| = k_1(s+t),$$

ou seja, k_1 é constante e segue que:

$$A(s)E_2(t) = E_2(s+t).$$

Por indução, suponhamos que as curvaturas $k_1, \dots, k_{j-1}$ são constantes e que

$$A(s)E_i(t) = E_i(s+t) \quad , \quad i = 1, \dots, j.$$

Então:

$$A(s)\frac{\overline{D}}{dt}E_j(t) = \frac{\overline{D}}{dt}A(s)E_j(t) = \frac{\overline{D}}{dt}E_j(s+t)$$

$$A(s)[-k_{j-1}(t)E_{j-1}(t) + k_j E_{j+1}(t)] = -k_{j-1}(s+t)E_{j-1}(s+t) + k_j(s+t)E_{j+1}(s+t) .$$

Da linearidade de $A(s)$ e da hipótese de indução se segue $k_j(t)A(s)E_{j+1}(t) = k_j(s+t)E_{j+1}(s+t)$ e como $A(s)$ é isometria deduz-se que k_j é constante e $A(s)E_{j+1}(t) = E_{j+1}(s+t)$. $\square$

(2.22) Proposição: Representemos por $\overline{M}^N$ o E^N ou o L^N e seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \overline{M}^N$ curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então, α tem curvaturas constantes se e só se existe subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $\overline{M}^N$, $\{\tilde{A}(s), s \in \mathbb{R}\}$, tal que $\tilde{A}(s)\alpha(t) = \alpha(s+t)$. Além disso, se $\tilde{A}(s) = T(s) \circ A(s)$, onde $A(s)$ é isometria linear, então:

$$A(s)E_j(t) = E_j(s+t) \quad , \quad j = 1, \dots, N,$$

onde $\{E_1, \dots, E_N\}$ é o referencial de Frenet associado a α .

Prova: Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow L^N[E^N]$ curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvaturas constantes $k_1, \dots, k_m$, $m \leq N$, e seja $\{E_1, \dots, E_N\}$ o referencial de Frenet associado a α como em (2.18). Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos uma aplicação linear $A(s): L^N \rightarrow L^N$, $[A(s): E^N \rightarrow E^N]$, por: $A(s)E_i(0) = E_i(s)$,

$i = 1, \dots, N.$

Então, $A(s) \in O_1(N) [O(N)]$ e, como na demonstração da proposição (2.20), mostra-se que $A(s)E_j(t) = E_j(s+t)$, para $j = 1, \dots, N.$

Vamos construir um movimento rígido $\tilde{A}(s) = T(s) \circ A(s)$, tal que:

$$\tilde{A}(s)\alpha(t) = \alpha(s+t) ,$$

onde $T(s)$ é uma translação.

Para cada $s \in \mathbb{R}$, $A(s)\alpha'(t) = \alpha'(s+t)$. Então:

$$\int_0^t A(s)\alpha'(\tau) d\tau = \int_0^t \alpha'(s+\tau) d\tau$$

$$A(s)[\alpha(t) - \alpha(0)] = \alpha(s+t) - \alpha(s)$$

$$\text{Portanto: } \alpha(s+t) = A(s)\alpha(t) + [\alpha(s) - A(s)\alpha(0)].$$

Assim, sendo $T(s)$ a translação do $L^N[E^N]$ por $\alpha(s) - A(s)\alpha(0)$, podemos escrever:

$$\alpha(s+t) = \tilde{A}(s)\alpha(t), \quad \text{onde } \tilde{A}(s) = T(s) \circ A(s).$$

Se $G = \{\tilde{A}(s) = T(s) \circ A(s), s \in \mathbb{R}\}$, onde $A(s)$ é isometria linear e $T(s)$ é a translação por $\alpha(s) - A(s)\alpha(0)$, então:

- (i) $\tilde{A}(0) = T(0) \circ A(0) = \text{id}_{L^N}[\text{id}_{E^N}]$, pois $T(0)$ é a translação pela origem.
- (ii) $\tilde{A}(s+t) = \tilde{A}(s) \circ \tilde{A}(t)$, pois para todo X :

$$\tilde{A}(s+t)X = A(s+t)X + \alpha(s+t) - A(s+t)\alpha(0)$$

$$\tilde{A}(s+t)X = A(s)A(t)X + \tilde{A}(s)\alpha(t) - A(s)A(t)\alpha(0)$$

$$\tilde{A}(s+t)X = A(s)[A(t)X + \alpha(t) - A(t)\alpha(0)] + \alpha(s) - A(s)\alpha(0).$$

$$\tilde{A}(s+t)X = \tilde{A}(s) \circ \tilde{A}(t)X.$$

(iii) A composição é associativa, pois de (ii)

$$\begin{aligned}\tilde{A}(s) \circ [\tilde{A}(t) \circ \tilde{A}(u)] &= \tilde{A}(s) \circ \tilde{A}(t+u) = \tilde{A}(s+t+u) = \\ &= [\tilde{A}(s) \circ \tilde{A}(t)] \circ \tilde{A}(u) .\end{aligned}$$

(iv) Se $\tilde{A}(s) \in G$, então, por (ii), $\tilde{A}(s)^{-1} = \tilde{A}(-s)$ e, portanto, $\tilde{A}(s)^{-1} \in G$.

De (i) a (iv) segue que G é grupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $L^N[E^N]$.

Reciprocamente, se $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow L^N[E^N]$ é curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\tilde{A}(s)\alpha(t) = \alpha(s+t)$, onde $\{\tilde{A}(s), s \in \mathbb{R}\}$ é subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $E^N[L^N]$, temos $\tilde{A}(s) = T(s) \circ A(s)$, onde $T(s)$ é translação e $A(s) \in O_1(N) [O(N)]$. Da condição $\tilde{A}(s)\alpha(t) = \alpha(s+t)$, tomando $t = 0$, segue que $T(s)$ é a translação por $\alpha(s) - A(s)\alpha(0)$. Então:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{D}}{dt}\tilde{A}(s)\alpha(t) &= \frac{\overline{D}}{dt}\alpha(s+t) \implies \frac{\overline{D}}{dt}[A(s)\alpha(t) + \alpha(s) - A(s)\alpha(0)] = \\ &= E_1(s+t) \implies A(s)E_1(t) = E_1(s+t) .\end{aligned}$$

Agora, como na demonstração da proposição (2.20),
deduz-se que as curvaturas de α são constantes e que

$$A(s)E_j(t) = E_j(s+t) \quad , \quad j=1, \dots, N \quad . \quad \square$$

oOo

CAPÍTULO 3

SUBVARIEDADES REGRADAS

(3.1) Definição: Seja M^n uma variedade C^∞ , de dimensão n . Uma subvariedade k -dimensional, desconexa, $\tilde{M}$, de M , é chamada uma folheação de M se todo ponto de M pertence a alguma componente de $\tilde{M}$ e se, em torno de cada $p \in M$, existe um sistema de coordenadas (x, U) com $x(U) =]-\varepsilon, \varepsilon[^n$, tal que as componentes $\tilde{M} \cap U$ são os conjuntos da forma:

$$\{q \in U: x_{k+1}(q) = a_{k+1}, \dots, x_n(q) = a_n, a_i \in \mathbb{R}, |a_i| < \varepsilon\}$$

Cada componente de $\tilde{M}$ é chamada folha da folheação.

Notação: Denotemos por $\bar{M}^N(c)$ as formas espaciais ou o espaço de Lorentz L^N , usando a seguinte convenção: se $c > 0$, $\bar{M}^N(c)$ indica a esfera $S^N(c)$; se $c < 0$, indica o espaço hiperbólico $H^N(c)$ e se $c = 0$, indica o E^N ou o L^N .

(3.2) Definição: Seja M^{n+1} uma subvariedade $(n+1)$ -dimensional de $\bar{M}^N(c)$. Dizemos que M é subvariedade regrada de $\bar{M}$ se existe uma folheação n -dimensional de M tal que cada componente conexa é subvariedade totalmente geodésica de $\bar{M}$. Isto é, dado $p \in M$, se S_p é a folha da folheação passando por p , então S_p é subvariedade totalmente geodésica de dimensão n , de $\bar{M}$, e existe um sistema de coordenadas (x, U) , em torno de p , tal que $S_p \cap U$ é um conjunto da forma:

$$\{q \in U: x_{n+1}(q) = a_{n+1}, a_{n+1} \in \mathbb{R}, |a_{n+1}| < \varepsilon\}.$$

Seja $M^{n+1} \subset \bar{M}^N$, $N \geq n+2$, uma subvariedade regradada, de dimensão $n+1$ de $\bar{M}^N$. Dado um ponto $p \in M$, denotaremos por S_p a folha da folheação que passa por p .

O campo de direções normais à folheação, em M^{n+1} , é localmente integrável. De fato: dado um campo v , normal à folheação, e um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_N)$ em torno de p , uma curva $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_N(t))$, em $\bar{M}$, é curva integral de v se e só se

$$\sum_{i=1}^N \beta'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ou seja, se e só se β é solução do sistema de equações diferenciais

$$\{\beta'_i(t) = v_i(\beta(t))\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

com condição inicial $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = v_p$.

Seja $\alpha: I \rightarrow \bar{M}^N$ uma curva integral do campo v , parametrizada pelo comprimento de arco; escolha n campos ortonormais $e_1(s), \dots, e_n(s)$, ao longo de α , que geram o espaço tangente

$T_{\alpha(s)} S_{\alpha(s)}$, para todo s . Isso pode ser feito tomando-se uma base ortonormal $\{e_1(s_0), \dots, e_n(s_0)\}$ de $T_{\alpha(s_0)} S_{\alpha(s_0)}$ e estendendo-a por transporte paralelo ao longo de α .

O lema seguinte mostra que os campos $e_1, \dots, e_n$ podem ser escolhidos de maneira especial.

(3.3) Lema: Dada uma curva α e campos vetoriais $e_1, \dots, e_n$, ao longo de α , em uma variedade semi-riemanniana $(\bar{M}, \langle, \rangle)$, podemos sempre escolher campos de vetores ortonormais $f_1, \dots, f_n$, ao longo de α , tais que:

- (a) os conjuntos de vetores $\{f_j(s), 1 \leq j \leq n\}$ e $\{e_j(s), 1 \leq j \leq n\}$ geram o mesmo subespaço de $T_{\alpha(s)}\bar{M}$.
- (b) para cada $i, 1 \leq i \leq n$, o campo de vetores $\frac{\bar{D}}{ds}f_i(s)$ é normal ao subespaço gerado por $\{f_j(s), j = 1, \dots, n\}$, onde $\frac{\bar{D}}{ds}$ é a derivação covariante, em $\bar{M}$, ao longo de α .

Prova: O caso $n = 1$ é trivial. Suponha $n \geq 2$ e escreva

$$f_i(s) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)e_j(s), \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde s é o parâmetro de α e $a_{ij}(s)$ são funções a serem determinadas.

Os campos f_i satisfazem a condição (b) se e só se

$$\left\langle \frac{\bar{D}f_i}{ds}(s), f_j(s) \right\rangle = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

ou, por (a),

$$\left\langle \frac{\bar{D}f_i}{ds}(s), e_j(s) \right\rangle = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Ou seja, devemos ter:

$$\sum_{k=1}^n \left\langle \frac{d}{ds} a_{ik}(s) e_k(s), e_j(s) \right\rangle + \sum_{k=1}^n a_{ik} \left\langle \frac{\bar{D}}{ds} e_k(s), e_j(s) \right\rangle = 0 ,$$

$1 \leq i, j \leq n$. Portanto, a condição (b) é equivalente ao sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \frac{d}{ds} a_{ij}(s) + \sum_{k=1}^n a_{ik}(s) \left\langle \frac{\bar{D}}{ds} e_k(s), e_j(s) \right\rangle = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \right.$$

Esse sistema tem sempre solução e, portanto, as funções a_{ij} podem ser determinadas dadas condições iniciais. Para s_0 fixado, vamos impor $a_{ij}(s_0) = \delta_{ij}$.

Então, os campos de vetores f_j estão determinados, geram o mesmo subespaço gerado pelos e_i e, além disso, por (b), temos:

$$\langle f_j(s), f_k(s) \rangle = \langle f_j(s_0), f_k(s_0) \rangle = a_{jk}(s_0) = \delta_{jk} .$$

Portanto, os campos $f_1, \dots, f_n$ são ortonormais satisfazendo (a) e (b). $\square$

Daqui por diante, vamos supor que os campos e_j escolhidos satisfazem as condições do lema (3.3). Como os e_j são tangentes a M e, portanto, a $\bar{M}^N(c)$, isso significa dizer que para todos $1 \leq i, j \leq n$, temos:

$$(3.4) \quad \langle e_i', e_j \rangle = 0 ,$$

onde $\langle, \rangle$ denota o tensor métrico do espaço ambiente E^{N+1} ou L^{N+1} e $(\cdot)$ representa a derivação usual nesses espaços.

Nosso objetivo, agora, é parametrizar a subvariedade de M a partir de α , curva integral do campo de direções normais à folheação, e dos campos ortonormais $e_1, \dots, e_n$.

Para cada s fixado, todo ponto $q \in S_{\alpha}(s)$ pode ser escrito na forma $q = \exp_{\alpha(s)} v$, onde $\exp$ é a aplicação exponencial de $\bar{M}$ e $v \in T_{\alpha(s)} S_{\alpha}(s)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i(s), \quad v_i \in \mathbb{R}.$$

Seque que M pode ser localmente parametrizada por:

$$(3.5) \quad X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \left(\sum_{i=1}^n t_i e_i(s) \right).$$

Vamos obter uma expressão mais simples para (3.5) e, a partir dela, mostraremos que X é uma imersão em torno do ponto $(s_0, 0, \dots, 0)$, para um s_0 fixado.

Para tanto, levemos em conta o seguinte fato:

Dados $p \in \bar{M}^N(c)$ e $v \in T_p \bar{M}^N(c)$, com $\|v\| = 1$, γ é geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, se e somente se:

- (i) $\gamma(s) = p + sv$, se $c = 0$ ($\bar{M}^N$ é o E^N ou L^N).
- (ii) $\gamma(s) = \cos(\sqrt{c} s)p + \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c} s)v$, se $c > 0$.
- (iii) $\gamma(s) = \cosh(\sqrt{-c} s)p + \frac{1}{\sqrt{-c}} \sinh(\sqrt{-c} s)v$, se $c < 0$.

A partir disso, podemos escrever, de modo geral:

$$(3.6) \quad \exp_p(rv) = f(r)p + g(r)v ,$$

onde $p \in \bar{M}(c)$, $v \in T_p \bar{M}$, com $\|v\| = 1$, e as funções f e g são dadas por:

$$(3.7) \quad \begin{cases} f(r) = 1 & \text{e} & g(r) = r & , & \text{se} & c = 0 \\ f(r) = \cos \sqrt{c} r & \text{e} & g(r) = \frac{1}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c} r & , & \text{se} & c > 0 \\ f(r) = \cosh \sqrt{-c} r & \text{e} & g(r) = \frac{1}{\sqrt{-c}} \sinh \sqrt{-c} r & \text{se} & c < 0. \end{cases}$$

Voltando a (3.5) escrevemos, então:

$$\begin{aligned} X(s, t_1, \dots, t_n) &= \exp_{\alpha(s)} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s) = \\ &= \exp_{\alpha(s)} r(t_1, \dots, t_n) \left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i e_i(s)}{r(t_1, \dots, t_n)} \right), \end{aligned}$$

onde $r(t_1, \dots, t_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n t_i^2}$ e, portanto,

$$\left\| \frac{\sum_{i=1}^n t_i e_i(s)}{r(t_1, \dots, t_n)} \right\| = 1 .$$

De (3.6) segue que

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = f(r(t_1, \dots, t_n)) \alpha(s) + \frac{g(r(t_1, \dots, t_n))}{r(t_1, \dots, t_n)} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s),$$

com f e g dadas em (3.7).

Calculemos os vetores $X_s, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$, da base de T_p^M , para $p = X(s, t_1, \dots, t_n)$.

$$(3.8) \quad \begin{cases} X_s = \frac{\partial X}{\partial s}(s, t_1, \dots, t_n) = f(r) \alpha'(s) + \frac{g(r)}{r} \sum_{i=1}^n t_i \frac{\bar{D}e_i}{ds}(s) \\ X_{t_j} = \frac{\partial X}{\partial t_j}(s, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial}{\partial t_j}(\text{for}) \alpha(s) + \\ + \frac{\partial}{\partial t_j} \left(\frac{g \text{ or}}{r} \right) \sum_{i=1}^n t_i e_i(s) + \frac{g \text{ or}}{r} e_j(s), \quad 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Calculando os limites, obtemos, para $c \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(\text{for})(0, \dots, 0) = \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{g \text{ or}}{r} \right)(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{g \text{ or}}{r} \right)(0, \dots, 0) = 1.$$

Para $c = 0$, temos:

$$(3.9) \quad \begin{cases} X_s(s, t_1, \dots, t_n) = \alpha'(s) + \sum_{i=1}^n t_i e_i'(s) \\ X_{t_j}(s, t_1, \dots, t_n) = e_j(s), \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Então, no ponto $(s_0, 0, \dots, 0)$, encontramos, nos três casos:

$$\begin{cases} X_s(s_0, 0, \dots, 0) = \alpha'(s_0) \\ X_{t_j}(s_0, 0, \dots, 0) = e_j(s_0), \quad 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Como o conjunto $\{\alpha'(s_0), e_1(s_0), \dots, e_n(s_0)\}$ é linearmente independente, segue que X é uma imersão numa vizinhança do ponto $(s_0, 0, \dots, 0)$ e, portanto, (3.5) é realmente uma parametrização local de M , como afirmáramos anteriormente.

Fixando s_0 , os vetores $X_{t_j}(s_0, t_1, \dots, t_n)$ são tangentes à folha $S_{\alpha(s_0)}$ no ponto $X(s_0, t_1, \dots, t_n)$, pois esta pode ser parametrizada por

$$q(t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s_0)} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s_0).$$

Vamos mostrar que $X_s(s, t_1, \dots, t_n)$ é normal à folha $S_{\alpha(s)}$ no ponto $X(s, t_1, \dots, t_n)$.

No caso $c = 0$, temos X_s e X_{t_j} dados por (3.9) e, de (3.4), segue que $\langle X_s, X_{t_j} \rangle = 0$, em todo ponto, para todo $1 \leq j \leq n$.

Para $c \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \langle X_s, X_{t_j} \rangle &= (\text{for}) \frac{\partial (\text{for})}{\partial t_j} \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \\ &+ (\text{gor}) \frac{\partial (\text{for})}{\partial t_j} \left\langle \sum_{i=1}^n t_i \frac{\overline{D}e_i}{ds}, \alpha(s) \right\rangle, \end{aligned}$$

pois $\langle \alpha'(s), e_i(s) \rangle = 0$, por construção e $\langle \frac{\overline{D}e_i}{ds}, e_j \rangle = 0$, pelo lema (3.3).

Como, localmente, $\overline{M} = S^N(c)$ ou $H^N(c)$, $\alpha(s)$ é normal a $\overline{M}$ no espaço ambiente e como $\frac{\overline{D}e_j}{ds}$ é tangente a $\overline{M}$, temos $\langle \frac{\overline{D}e_j}{ds}, \alpha \rangle = 0$, para $1 \leq j \leq n$.

Mostramos, assim, que $\langle X_s, X_{t_j} \rangle = 0$, para todo j e em todo ponto, isto é, X_s é normal às folhas da folheação em todo ponto.

Logo, o espaço tangente a M em um ponto $p = X(s, t_1, \dots, t_n)$ é dado pela soma direta

$$T_p M = [X_s] \oplus [X_{t_1}, \dots, X_{t_n}]$$

e, dado $v \in T_p M$, escrevemos $v = v_O X_s + v_{S_p}$, onde v_{S_p} é a componente tangente à folha.

Denotando por $d\sigma^2$ a métrica de M , temos:

$$d\sigma^2(v) = v_O^2 \|X_s\|^2 + \|v_{S_p}\|^2 = \|X_s\|^2 ds^2(v) + d\theta^2(v),$$

onde $d\theta^2$ é a métrica induzida na folha e ds^2 é a métrica induzida em $[X_s]$.

Podemos, então, estender os campos vetoriais $e_1, \dots, e_n, \alpha'$, ao longo de α , a campos de vetores $f_1, \dots, f_{n+1}$, em uma vizinhança de α , de modo que:

$$(3.10) \quad f_{n+1} = \frac{X_s}{\|X_s\|}$$

e $f_1, \dots, f_n$ sejam tangentes à folha S_α .

Vamos calcular, agora, o vetor curvatura média, H , de M .

Sendo $B: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow (\chi(M))^1$, a segunda forma fundamental de M , temos:

$$(3.11) \quad H = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} B(f_i, f_i).$$

Observemos que, como S_α é totalmente geodésica em $\bar{M}$, sua segunda forma fundamental é identicamente nula. Mostremos que também é identicamente nula a segunda forma fundamental de M restrita a S_α .

Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de S_α e $\bar{M}$, respectivamente, e seja

$$\tilde{B}: \chi(S_\alpha) \times \chi(S_\alpha) \rightarrow (\chi(S_\alpha))^\perp$$

a segunda forma fundamental de S_α .

Então, se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(S_\alpha)$ e os campos $\bar{X}$ e $\bar{Y} \in \chi(\bar{M})$ são extensões de $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ a $\bar{M}$, temos:

$$\tilde{B}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = 0,$$

pois S_α é totalmente geodésica em $\bar{M}$.

Portanto, $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^{\tilde{N}} = 0$, onde $()^{\tilde{N}}$ indica a projeção normal à folha em $\bar{M}$. Daí, como $S_\alpha \subset M$, segue que $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^N = 0$, onde $()^N$ indica a projeção normal a M .

Então, se $X, Y \in \chi(M)$ são extensões de $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ a M , temos, reescolhendo $\bar{X}$ e $\bar{Y}$, se necessário:

$$B(X, Y) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^N = 0.$$

Logo, $B|_{\chi(S_\alpha)}$ é identicamente nula. Portanto,

$B(f_i, f_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, pois os campos $f_1, \dots, f_n$ são tangentes à folha e segue de (3.11) que:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n+1} B(f_{n+1}, f_{n+1}) = \frac{1}{n+1} (\bar{\nabla}_{f_{n+1}} f_{n+1})^N = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\bar{\nabla}_{X_S} X_S}{\|X_S\|} \right)^N = \frac{1}{(n+1) \|X_S\|^2} (\bar{\nabla}_{X_S} X_S)^N. \end{aligned}$$

Temos $\bar{\nabla}_{X_S} X_S = \frac{\bar{D}}{ds}(X_S(s, t_1, \dots, t_n))$ e, denotando esse vetor por X_{SS} , escrevemos:

$$(3.12) \quad H = \frac{1}{(n+1) \|X_S\|^2} (X_{SS})^N,$$

onde $(\)^N$ é a projeção sobre o espaço normal de M como subvariedade de $\bar{M}$.

Para $c \neq 0$, vemos por (3.8) que cada X_{t_j} é combinação linear de α e dos e_i . Como X é, também, combinação linear de α e dos e_i e é normal a X_S e aos X_{t_j} , segue que, na vizinhança em que X é imersão, temos:

$$[X, X_S, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}] = [\alpha, X_S, e_1, \dots, e_n].$$

Denotando por $\wedge$ o produto exterior do espaço ambiente, E^{N+1} ou L^{N+1} , temos:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge X_{SS} &= \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge (X_{SS})^T + \\ &+ \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge (X_{SS})^N. \end{aligned}$$

$(X_{SS})^T$ é combinação linear de X_S e dos X_{t_j} ; portanto, é combinação linear de X_S , de $\alpha(s)$ e dos $e_i(s)$. Logo,

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge (X_{SS})^T = 0.$$

Assim:

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge X_{SS} = \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge (X_{SS})^N.$$

Então, por (3.12), temos:

$$(3.13) \quad \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge X_{SS} = (n+1) \|X_S\|^2 \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H.$$

Segue que:

$$(n+1) \|X_S\|^2 \|\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H\| = \|\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge X_{SS}\|.$$

Calculando:

$$\langle \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H, \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H \rangle =$$

$\langle \alpha, \alpha \rangle$	$\langle \alpha, e_1 \rangle$	$\dots$	$\langle \alpha, e_n \rangle$	$\langle \alpha, X_S \rangle$	$\langle \alpha, H \rangle$
$\langle e_1, \alpha \rangle$	$\langle e_1, e_1 \rangle$	$\dots$	$\langle e_1, e_n \rangle$	$\langle e_1, X_S \rangle$	$\langle e_1, H \rangle$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\langle e_n, \alpha \rangle$	$\langle e_n, e_1 \rangle$	$\dots$	$\langle e_n, e_n \rangle$	$\langle e_n, X_S \rangle$	$\langle e_n, H \rangle$
$\langle X_S, \alpha \rangle$	$\langle X_S, e_1 \rangle$	$\dots$	$\langle X_S, e_n \rangle$	$\langle X_S, X_S \rangle$	$\langle X_S, H \rangle$
$\langle H, \alpha \rangle$	$\langle H, e_1 \rangle$	$\dots$	$\langle H, e_n \rangle$	$\langle H, X_S \rangle$	$\langle H, H \rangle$

onde $\langle, \rangle$ denota a métrica em E^{N+1} ou L^{N+1} .

Agora, como $\alpha(s) \in \bar{M} = S^N(c)$ ou $H^N(c)$, sabemos que $\alpha(s)$ é normal a $\bar{M}$ no espaço ambiente. Segue, portanto:

$$\langle \alpha, X_S \rangle = \langle \alpha, H \rangle = 0 \quad \text{e, também,} \quad \langle \alpha, e_j \rangle = 0, \quad \text{para todo } j.$$

Além disso, sendo H normal a M em $\bar{M}$, temos

$$\langle X_S, H \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle e_j, H \rangle = 0, \quad \text{para todo } j.$$

Então:

$$\langle \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H, \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H \rangle = \begin{vmatrix} 1/c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \|X_S\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \|H\|^2 \end{vmatrix}$$

Logo:

$$\langle \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H, \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H \rangle = \frac{1}{c} \|X_S\|^2 \|H\|^2 .$$

Portanto:

$$(3.14) \quad \frac{(n+1)}{\sqrt{|c|}} \|X_S\|^3 \|H\| = \|\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge X_{SS}\|$$

onde $c \neq 0$.

Para $c = 0$, temos $X_{t_j}(s, t_1, \dots, t_n) = e_j(s)$.

Então, consideremos o produto:

$$\begin{aligned} e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge X_{SS} &= e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge (X_{SS})^T + \\ &+ e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge (X_{SS})^N . \end{aligned}$$

Da mesma forma que para $c \neq 0$, a primeira parcela se anula, pois $(X_{SS})^T$ é combinação linear de X_S e dos $X_{t_i} = e_i$.

Então, de (3.12):

$$(n+1) \|X_S\|^2 e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H = e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge X_{SS} .$$

e temos:

$$\|e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge H\|^2 = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle & \langle e_1, X_S \rangle & \langle e_1, H \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle & \langle e_n, X_S \rangle & \langle e_n, H \rangle \\ \langle X_S, e_1 \rangle & \dots & \langle X_S, e_n \rangle & \langle X_S, X_S \rangle & \langle X_S, H \rangle \\ \langle H, e_1 \rangle & \dots & \langle H, e_n \rangle & \langle H, X_S \rangle & \langle H, H \rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \|X_S\|^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \|H\|^2 \end{vmatrix} = \|X_S\|^2 \|H\|^2.$$

Assim, obtemos:

$$(3.15) \quad (n+1) \|X_S\|^3 \|H\| = \|e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_S \wedge X_{SS}\|, \quad c = 0.$$

Como simples aplicação de (3.12), vamos provar o:

(3.16) Teorema: Se M é uma subvariedade regradada de E^N com curvatura média constante, não nula, ao longo das folhas, então M é um cilindro generalizado.

Prova: Seja M uma subvariedade regradada de E^N dada por

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s),$$

onde α e os e_i estão na situação anterior e $\exp$ é a exponen-

cial do E^N . Observamos que X está definida e é regular para todo ponto $(s, t_1, \dots, t_n)$, pois para todo $p = \alpha(s)$, $\exp_p: T_p E^N \cong E^N \rightarrow E^N$ é difeomorfismo.

Sendo H o vetor curvatura média de M , temos, por hipótese, $\|H\|$ constante, não nula, ao longo das folhas, ou seja $\|H\| = h(s) \neq 0$, para todo s .

De (3.12), temos:

$$\|H\| = \frac{1}{(n+1) \|X_s\|^2} \| (X_{ss})^N \|^2.$$

ou seja:

$$(n+1)^2 \|X_s\|^4 \|H\|^2 = \| (X_{ss})^N \|^2.$$

Pondo $t = t_1$ e $t_2 = \dots = t_n = 0$, temos:

$$\begin{aligned} X_s &= \alpha'(s) + t e_1'(s) \Rightarrow \\ \|X_s\|^2 &= 1 + 2t \langle \alpha', e_1' \rangle + t^2 \|e_1'\|^2 \end{aligned}$$

Isto é, $\|X_s\|^2$ é um polinômio da forma:

$$\|X_s\|^2 = \sum_{k=0}^2 a_k t^k,$$

onde $a_k = a_k(s)$ e $a_2 = \|e_1'\|^2$.

Por outro lado, $X_{ss} = \alpha''(s) + t e_1''(s)$, o que implica, como antes:

$$\| (X_{ss})^N \|^2 = \sum_{j=0}^2 A_j t^j.$$

Então, a igualdade acima é equivalente a:

$$(n+1)^2 \left(\sum_{k=0}^2 a_k t^k \right)^2 h^2(s) = \sum_{j=0}^2 A_j t^j.$$

Daí, $a_2(s) = 0$, para todo s , e, portanto $e_1'(s) \equiv 0$,
 donde $e_1(s) = e_1$ é constante.

Analogamente, fazendo $t = t_i$ e $t_j = 0$, para
 $j \neq i$, obtemos $e_i(s) = e_i$, constante.

Então, M é dada por:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \alpha(s) + \sum_{i=1}^n t_i e_i,$$

com os $e_i \in E^n$, isto é, as folhas são n -planos paralelos.

Ou, escrevendo de outra forma, temos:

$$X: \mathbb{R} \times E^n \longrightarrow E^{N-n} \times E^n$$

$$(s, (t_1, \dots, t_n)) \longmapsto (\alpha(s), (t_1, \dots, t_n))$$

Portanto, M é um cilindro generalizado no E^N . $\square$

Como consequência de (3.14), mostraremos que não
 existe subvariedade regrada no $H^N(c)$ com curvatura média de
 comprimento constante, não nulo. Esse resultado é inespera-
 do, pois, como veremos no capítulo 4, há inúmeros exemplos
 de subvariedades regradas mínimas no $H^N(c)$.

(3.17) Teorema: Não existe subvariedade regrada de $H^N(c)$ com curvatura média de comprimento constante não nulo.

Prova: Seja M^{n+1} subvariedade regrada de $H^N(c)$, de dimensão $n+1$, e suponhamos $\|H\|$ constante, $\|H\| \neq 0$. Consideremos a parametrização local $X: U \rightarrow H^N$, dada, como em (3.5), por:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s),$$

onde U é vizinhança do ponto $(s_0, 0, \dots, 0)$, α é curva integral do campo de direções normais à folheação de M , $\{e_1(s), \dots, e_n(s)\}$ é base ortonormal de cada folha satisfazendo o lema 3.3 e, ainda, $\{\alpha'(s_0), e_1(s_0), \dots, e_n(s_0)\}$ é conjunto linearmente independente.

Para facilidade dos cálculos, usaremos a seguinte notação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{-c}} f(r) \quad , \quad r = r(t_1, \dots, t_n) \\ \phi_i = \frac{g(r)}{r} t_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ e_0(s) = \sqrt{-c} \alpha(s) \end{array} \right.$$

Então, X se escreve:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n \phi_i e_i(s) \quad , \quad \phi_i = \phi_i(t_1, \dots, t_n).$$

Derivando com relação a s , temos:

$$X_s = \sum_{i=0}^n \phi_i \frac{\bar{D}e_i}{ds} \quad \text{e} \quad X_{ss} = \sum_{i=0}^n \phi_i \frac{\bar{D}^2 e_i}{ds^2}$$

onde $\frac{\bar{D}}{ds}$ é a derivação covariante no $H^N(c)$.

Por (3.14), temos:

$$\langle \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_s \wedge X_{ss}, \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_s \wedge X_{ss} \rangle = \frac{(n+1)^2}{c} \|X_s\|^6 \|H\|^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \langle \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_s \wedge X_{ss}, \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_s \wedge X_{ss} \rangle = \\ & = \langle \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \sum_{i=0}^n \phi_i \frac{\bar{D}e_i}{ds} \wedge \sum_{j=0}^n \phi_j \frac{\bar{D}^2 e_j}{ds^2}, \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \sum_{k=0}^n \phi_k \frac{\bar{D}e_k}{ds} \wedge \sum_{\ell=0}^n \phi_\ell \frac{\bar{D}^2 e_\ell}{ds^2} \rangle \end{aligned}$$

Pondo:

$$B_{ijkl} = \langle \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \frac{\bar{D}e_i}{ds} \wedge \frac{\bar{D}^2 e_j}{ds^2}, \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \frac{\bar{D}e_k}{ds} \wedge \frac{\bar{D}^2 e_\ell}{ds^2} \rangle,$$

$B_{ijkl} = B_{ijkl}(s)$, chegamos a:

$$\sum_{0 \leq i, j, k, \ell \leq n} B_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell = \frac{(n+1)^2}{c} \|H\|^2 \|X_s\|^6.$$

Da mesma forma:

$$\langle X_s, X_s \rangle = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} \phi_i \phi_j ,$$

onde $b_{ij} = b_{ij}(s) = \langle \frac{\bar{D}e_i}{ds} , \frac{\bar{D}e_j}{ds} \rangle$ e obtemos:

$$\sum_{0 \leq i,j,k,l \leq n} B_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l = \left(\sum_{i,j=0}^n b_{ij} \phi_i \phi_j \right)^3 \frac{(n+1)^2 ||H||^2}{c}$$

Para $s = s_0$, B_{ijkl} e b_{ij} são constantes reais,

$$\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$$

é uma parametrização de uma vizinhança

$$\mu = X(U) \cap L^{n+1}$$

do ponto

$$p = (\alpha(s_0), 0, \dots, 0) \text{ do } H^n \subset L^{n+1} .$$

$$(L^{n+1} = [\alpha(s_0), e_1(s_0), \dots, e_n(s_0)]).$$

Segue que o polinômio:

$$\sum_{0 \leq i, j, k, \ell \leq n} B_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell = \left(\sum_{i, j=0}^n b_{ij} \phi_i \phi_j \right)^3 \frac{(n+1)^2 \|H\|^2}{c}$$

é homogêneo e anula-se sobre a vizinhança μ .

Consideremos, então, o polinômio:

$$P(x_0, \dots, x_n) = -c \sum_{0 \leq i, j, k, \ell \leq n} B_{ijkl} x_i x_j x_k x_\ell (x_0^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2) + \\ - \frac{(n+1)^2}{c} \|H\|^2 \left(\sum_{i, j=0}^n b_{ij} x_i x_j \right)^3,$$

onde $(x_0, \dots, x_n)$ são as coordenadas usuais do L^{n+1} .

Temos $P(\phi_0, \dots, \phi_n) = 0$; portanto, P anula-se sobre μ . Além disso, como P é homogêneo, P anula-se sobre cada reta que liga a origem a um ponto de μ , ou seja, P anula-se no cone aberto formado por μ e pela origem do L^{n+1} . Isso implica que P é identicamente nulo como polinômio do L^{n+1} .

Restringindo nossa atenção a cada plano (x_0, x_j) , seja:

$$Q(x_0, x_j) = P(x_0, 0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0).$$

Então, $Q(x_0, x_j)$ é polinômio da forma:

$$Q(x_0, x_j) = \left(\sum_{i=0}^4 A_i x_0^i x_j^{4-i} \right) (x_0^2 - x_j^2) - \left(\sum_{i=0}^2 a_i x_0^i x_j^{2-i} \right)^3 \equiv 0.$$

Igualando a zero cada um dos coeficientes, obtemos:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0^3 & - A_1 &= 3a_0^2 a_1 \\ A_0 - A_2 &= 3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2 \\ A_1 - A_3 &= a_1^3 + 6a_0 a_1 a_2 \\ A_2 - A_4 &= 3a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2 \\ A_3 &= 3a_1 a_2^2 & e & A_4 = a_2^3 \end{aligned}$$

Comparando as equações em que aparecem A_1 e A_3 , se que $a_1 = 0$ e, portanto $A_1 = A_3 = 0$.

Daí: $(a_0 + a_2)^3 = -A_0 + (A_0 - A_2) + (A_2 - A_4) + A_4 = 0$,
e portanto, $a_0 = -a_2$.

Voltando à expressão inicial do polinômio P , vemos que:

$$a_0 = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2 \|H\|^2}{c}} b_{00} \quad e \quad a_2 = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2 \|H\|^2}{c}} b_{jj}.$$

Como estamos supondo $\|H\| \neq 0$, $a_0 = -a_2$ se e só se $b_{00} = -b_{jj}$, para todo j , ou seja, se e só se:

$$\langle \sqrt{-c} \alpha'(s), \sqrt{-c} \alpha'(s) \rangle = - \left\langle \frac{\overline{De}_j}{ds}, \frac{\overline{De}_j}{ds} \right\rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Mas $\frac{\overline{De}_j}{ds}$ é tangente ao hiperbolóide; então, temos $\left\langle \frac{\overline{De}_j}{ds}, \frac{\overline{De}_j}{ds} \right\rangle \geq 0$. Disso e da igualdade acima, segue que $-c \langle \alpha', \alpha' \rangle \leq 0$, o que é absurdo, pois $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ e $-c > 0$, por hipótese. $\square$

CAPÍTULO 4

HELICÓIDES

Neste capítulo, $\bar{M}^N$ será usado para denotar as formas espaciais E^N , S^N e H^N ou, ainda, o espaço de Lorentz L^N ; denotaremos por $\bar{\nabla}$ a conexão Levi-Civita de $\bar{M}^N$.

Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}^N$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvaturas constantes e seja $\{E_1, \dots, E_m\}$ o referencial de Frenet associado a α , isto é:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\bar{D}\alpha}{ds} = \alpha'(s) \\ \frac{\bar{D}E_j}{ds} = -k_{j-1}E_{j-1} + k_jE_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

onde $k_1, \dots, k_m$ são as curvaturas de α , $k_0 = k_m = 0$, $(')$ denota a derivação no espaço euclidiano ou no espaço de Lorentz, conforme o caso, e $\bar{D}/ds$ denota a derivação covariante em $\bar{M}$, ao longo de α .

Tomemos $n = [m/2]$, o maior inteiro contido em $m/2$, e seja $\exp$ a exponencial de $\bar{M}^N$.

Consideremos a aplicação $X: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \bar{M}^N$ dada por:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(s).$$

Para cada s_0 fixado,

$$S_{\alpha(s_0)} = \left\{ \exp_{\alpha(s_0)} \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(s_0), (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

é subvariedade totalmente geodésica de $\overline{M}^N$, de dimensão n . Então, sendo $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto tal que $X|_U: U \rightarrow \overline{M}^N$ é aplicação regular, X define em U uma imersão regradada em $\overline{M}^N$.

(4.1) Definição: A aplicação regular $X: U \rightarrow \overline{M}^N$, dada por:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(s)$$

é chamada helicóide de $\overline{M}^N$ ou, mais especificamente, helicóide de $\overline{M}^N$ associado a α . Qualquer reparametrização de X também será um helicóide associado a α .

(4.2) Proposição: O helicóide X , associado a $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \overline{M}^N$, descreve, no domínio em que é regular, uma imersão mínima em $\overline{M}^N$.

Prova: Seja $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $X|_U$ é regular, ou seja $X: U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \overline{M}^N$ é imersão. Seja

$$M = \{X(s, t_1, \dots, t_n) / (s, t_1, \dots, t_n) \in U\}.$$

Temos:

$$X_s(s, t_1, \dots, t_n) = f(r)\alpha'(s) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n t_j \frac{\overline{D}}{ds} E_{2j}(s),$$

onde f e g são as funções reais dadas em (3.7) e

$$r = \left\| \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(s) \right\| = \left(\sum_{j=1}^n t_j^2 \right)^{1/2}.$$

Derivando, novamente, com relação a s :

$$\frac{\bar{D}}{ds} X_s = f(r) \frac{\bar{D}}{ds} E_1(s) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n t_j \frac{\bar{D}^2}{ds^2} E_{2j}(s).$$

Sendo as curvaturas de α , k_i , constantes, das equações de Frenet obtemos:

$$\frac{\bar{D}^2}{ds^2} E_{2j} = k_{2j-1} k_{2j-2} E_{2j-2} - (k_{2j-1}^2 + k_{2j}^2) E_{2j} + k_{2j} k_{2j+1} E_{2j+2}.$$

Além disso, $\frac{\bar{D}E_1}{ds} = k_1 E_2(s)$ e, portanto, $\frac{\bar{D}X_s}{ds}$ é combinação linear dos E_{2i} , $1 \leq i \leq n$.

Como $\alpha'(s) = E_1(s)$ é ortogonal aos $E_{2i}(s)$, $1 \leq i \leq n$, α é uma curva integral do campo de direções normais à folheação. Portanto, X é uma parametrização do mesmo tipo dado em (3.5). Valem, então, as expressões (3.14) ou (3.15), caso se trate do S^N e H^N ou do E^N e L^N , respectivamente. Sendo X_{ss} combinação linear dos $E_{2i}(s)$, $1 \leq i \leq n$, obtemos $H \equiv 0$, em todos os casos, isto é, M é subvariedade regrada, mínima, de $\bar{M}^N$. $\square$

(4.3) Proposição: Seja $\bar{M}^N$ uma forma espacial ou o L^N e seja X um helicóide associado a uma curva α em $\bar{M}$. Então, existe um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $\bar{M}^N$, tal que:

$$A(s)X(t, t_1, \dots, t_n) = X(s+t, t_1, \dots, t_n),$$

para todos $s, t, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$.

Prova: Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}^N$ curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvaturas constantes, e seja $\{E_1, \dots, E_N\}$ o referencial de Frenet estendido, associado a α , obtido como em (2.18).

Seja X o helicóide associado a α , isto é:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{i=1}^n t_i E_{2i}(s),$$

onde $n = [m/2]$ e m é tal que k_m , a m -ésima curvatura de α , é nula.

Temos dois casos a considerar:

1º) Se $\bar{M}^N$ é o S^N ou o H^N , pela proposição (2.20), existe um subgrupo a 1-parâmetro $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ de isometrias lineares tal que $A(s)\alpha(t) = \alpha(s+t)$ e $A(s)E_j(t) = E_j(s+t)$, para $j = 1, \dots, N$. Então:

$$A(s)X(t, t_1, \dots, t_n) = A(s) \left[\exp_{\alpha(s)} \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(t) \right] =$$

$$= A(s) \left[f(r)\alpha(t) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(t) \right],$$

onde f e g são dadas em (3.7) e $r = r(t_1, \dots, t_n) = \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{1/2}$.

Como $A(s)$ é linear:

$$A(s)X(t, t_1, \dots, t_n) = f(r)A(s)\alpha(t) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n t_j A(s)E_{2j}(t) =$$

$$= f(r)\alpha(s+t) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(s+t).$$

Portanto:

$$A(s)X(t, t_1, \dots, t_n) = X(s+t, t_1, \dots, t_n) .$$

- 2o) Se $\overline{M}^N$ é o E^N ou o L^N , pela proposição (2.22), existe um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $\overline{M}^N$, $\{\tilde{A}(s), s \in \mathbb{R}\}$ tal que $\tilde{A}(s)\alpha(t) = \alpha(s+t)$ e, para cada s , $\tilde{A}(s) = T(s) \circ A(s)$, onde $T(s)$ é a translação por $\alpha(s) - A(s)\alpha(0)$ e $A(s)$ é a isometria linear tal que $A(s)E_j(t) = E_j(s+t)$, $j = 1, \dots, N$. Então:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(s)X(t, t_1, \dots, t_n) &= \tilde{A}(s) \left[\alpha(t) + \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(t) \right] \\ &= T(s) \left[A(s)\alpha(t) + \sum_{j=1}^n t_j A(s)E_{2j}(t) \right] \\ &= A(s)\alpha(t) + \sum_{j=1}^n t_j A(s)E_{2j}(t) + \\ &\quad + \alpha(s) - A(s)\alpha(0) \\ &= T(s) A(s)\alpha(t) + \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(s+t) \\ &= \alpha(s+t) + \sum_{j=1}^n t_j E_{2j}(s+t) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\tilde{A}(s)X(t, t_1, \dots, t_n) = X(s+t, t_1, \dots, t_n) . \quad \square$$

Vimos, então, que dado um helicóide em $\bar{M}^N$, existe um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos em $\bar{M}^N$ que o deixa invariante. O próximo exemplo mostra que uma recíproca "exata" desse fato não é verdadeira.

(4.4) Exemplo: Considere o subgrupo a 1-parâmetro de transformações ortogonais do $\mathbb{R}^4$ $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ tal que, para cada s , a matriz de $A(s)$ na base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, do $\mathbb{R}^4$, é:

$$[A(s)] = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}$$

A partir da ação de $A(s)$ sobre o plano $[e_1, e_3]$ do $\mathbb{R}^4$, obtemos uma aplicação $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por:

$$\begin{aligned} X(s, t_1, t_2) &= A(s)(t_1 e_1 + t_2 e_3) \\ &= t_1 A(s)e_1 + t_2 A(s)e_3 \end{aligned}$$

$$X(s, t_1, t_2) = t_1 (\cos s, \sin s, 0, 0) + t_2 (0, 0, \cos s, \sin s)$$

Para $s_0 \in \mathbb{R}$, $\{X(s_0, t_1, t_2), t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} =$
 $= [(\cos s_0, \sin s_0, 0, 0), (0, 0, \cos s_0, \sin s_0)]$ é subvariedade, totalmente geodésica, de dimensão 2 do $\mathbb{R}^4$. Portanto, X descreve, no domínio em que é regular, uma subvariedade regradada do $\mathbb{R}^4$, tri-dimensional.

Calculemos os vetores tangentes a X em cada ponto.

Temos:

$$X_{t_1}(s, t_1, t_2) = (\cos s, \sin s, 0, 0)$$

$$X_{t_2}(s, t_1, t_2) = (0, 0, \cos s, \sin s)$$

$$X_s(s, t_1, t_2) = (-t_1 \sin s, t_1 \cos s, -t_2 \sin s, t_2 \cos s)$$

Vemos que $\|X_{t_1}\| = \|X_{t_2}\| = 1$, em todo ponto, e os vetores $X_{t_1}(s, t_1, t_2)$ e $X_{t_2}(s, t_1, t_2)$ são ortogonais; além disso, $\langle X_s, X_{t_1} \rangle = \langle X_s, X_{t_2} \rangle = 0$. Então, como

$$\|X_s(s, t_1, t_2)\| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2},$$

segue que $\{X_s(s, t_1, t_2), X_{t_1}(s, t_1, t_2), X_{t_2}(s, t_1, t_2)\}$ é linearmente independente se e só se $t_1^2 + t_2^2 \neq 0$, isto é, se e só se $(s, t_1, t_2) \neq (s, 0, 0)$.

Portanto, X é regular no conjunto

$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(s, 0, 0), s \in \mathbb{R}\}.$$

Mostremos que a subvariedade regradada

$M = \{X(s, t_1, t_2) / (s, t_1, t_2) \in U\}$ é mínima. Temos:

$$\begin{aligned} X_{ss}(s, t_1, t_2) &= (-t_1 \cos s, -t_1 \sin s, -t_2 \cos s, -t_2 \sin s) \\ &= -t_1 X_{t_1}(s, t_1, t_2) - t_2 X_{t_2}(s, t_1, t_2), \end{aligned}$$

ou seja X_{ss} é tangente às folhas da subvariedade M .

Sendo X uma parametrização do tipo visto em (3.5), temos, por (3.12), $H = \frac{1}{3(t_1^2 + t_2^2)} (X_{ss})^N$, onde $()^N$ indica a projeção normal sobre M como subvariedade do $\mathbb{R}^4$; então $H \equiv 0$.

Vimos, assim, que $X: \mathbb{R}^3 \setminus \{(s, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^4$ descreve uma subvariedade regular, tri-dimensional, regrada, mínima, do $\mathbb{R}^4$, invariante por $A(s)$, isto é:

$$\begin{aligned} A(s)X(t, t_1, t_2) &= A(s)A(t)(t_1 e_1 + t_2 e_3) \\ &= A(s+t)(t_1 e_1 + t_2 e_3) \\ &= X(s+t, t_1, t_2) \end{aligned}$$

Entretanto, X não é helicóide pois, caso contrário, poderíamos escrever:

$$X(s, t_1, t_2) = \alpha(s) + t_1 E_2(s) + t_2 E_4(s),$$

para uma certa curva α , com curvaturas constantes e referencial de Frenet $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$.

Neste caso, $[X_{t_1}, X_{t_2}] = [E_2(s), E_4(s)]$ é o plano tangente à folha $S_{\alpha(s)}$; sendo $\tilde{A}(s) = T(s) \circ A(s)$ o movimento rígido (cuja existência garantimos na proposição (2.22)), tal que $\tilde{A}(s)\alpha(t) = \alpha(s+t)$ e $A(s)E_j(t) = E_j(s+t)$, $j = 1, \dots, 4$, temos:

$$A(-s) \begin{pmatrix} X_{t_1}(s, t_1, t_2) \\ X_{t_2}(s, t_1, t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2(0) \\ E_4(0) \end{pmatrix}$$

Portanto, dada uma folha S , qualquer, temos

$T_p S = T_{X(0,0,0)} S$, para todo $p = X(s, t_1, t_2)$, ou seja, as folhas da variedade são planos paralelos.

Logo, $X_s(s, t_1, t_2) = X_s(s, 0, 0) = E_1(s)$, em todo ponto e , então:

$$A(-s) \begin{pmatrix} X_s(s, t_1, t_2) \\ X_{t_1}(s, t_1, t_2) \\ X_{t_2}(s, t_1, t_2) \end{pmatrix} = A(-s) \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ E_4(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(0) \\ E_2(0) \\ E_4(0) \end{pmatrix}$$

Portanto, o espaço tri-dimensional

$[E_1(0), E_2(0), E_4(0)]$ é o espaço tangente à variedade em todo ponto. Logo, a variedade X está contida nesse subespaço.

Mas isso é um absurdo, pois da expressão para X , temos:

$$\begin{aligned} X(0, 1, 0) &= e_1 & X(0, 0, 1) &= e_3 \\ X(\pi/2, 1, 0) &= e_2 & X(\pi/2, 0, 1) &= e_4 \end{aligned}$$

Ou seja, M não pode estar contida num subespaço de dimensão 3.

Portanto, M é uma subvariedade regular, regrada, mínima, invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos do $\mathbb{R}^4$ que não é um helicóide.

Na verdade, X é um "helicóide generalizado", cuja definição veremos logo mais.

(4.5) Lema: Dado um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $\bar{M}^N$, $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$, existe uma subvariedade S , de $\bar{M}$, totalmente geodésica, completa, n -dimensional, tal que S é ortogonal às órbitas de $A(s)$.

Prova: Seja $p \in \bar{M}$ e seja $\alpha(s) = A(s)p$ a órbita de $A(s)$ por p .

Se $\bar{M}^N$ é o S^N ou o H^N , como cada $A(s)$ é isometria linear, temos, por (2.21), $\frac{\bar{D}\alpha}{ds}(s) = A(s)\frac{\bar{D}\alpha}{ds}(0)$. Logo α está parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco. Se $\bar{M}^N$ é o E^N ou o L^N , temos $A(s) = T(s) \circ C(s)$, onde $T(s)$ é translação e $C(s)$ é isometria linear de $\bar{M}^N$. Da propriedade $A(s+t) = A(s)A(t)$, segue que se $T(s)$ é a translação por $p(s)$ então $p(s+t) = p(s) + C(s)p(t)$ e, além disso $p(s) = \alpha(s) - C(s)\alpha(0)$. Então:

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \frac{d}{ds}(A(s)p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(s+t)p - A(s)p}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(s+t)p + p(s+t) - C(s)p - p(s)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(s)[C(t)p + p(t) - p]}{t} \\ &= C(s) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} = C(s)\alpha'(0)\end{aligned}$$

Portanto, também neste caso, α está parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco.

Então, pelas proposições (2.20) e (2.22), α tem curvaturas, k_j , constantes; seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $k_j \neq 0$, para $j = 1, \dots, m-1$, e $k_m = 0$ e seja $n = [m/2]$.

Seja $\{E_1, \dots, E_m\}$ o referencial de Frenet associado a α e defina $e_i = E_{2i}(0)$, $1 \leq i \leq n$. Então, $\{e_1, \dots, e_n\}$ é conjunto ortonormal e temos $\langle \alpha'(0), e_i \rangle = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Sendo $\exp$ a aplicação exponencial de $\bar{M}$, definimos

$$S = \{ \exp_{\alpha(0)} \left(\sum_{j=1}^n t_j e_j \right), (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \} ;$$

claramente, S é subvariedade de dimensão n , completa, totalmente geodésica de $\bar{M}$.

Mostremos que S é ortogonal às órbitas de $A(s)$.

Seja $q \in S$; $q = \exp_{\alpha(0)} \sum_{j=1}^n q_j e_j$, e tomemos $\beta(s) = A(s)q$, a órbita de $A(s)$ por q .

Temos dois casos a considerar:

1º) Se $\bar{M}^N$ é o E^N ou o L^N , então $A(s) = T(s) \circ C(s)$, onde $T(s)$ é translação e $C(s)$ é transformação ortogonal e, como temos $A(s)\alpha(0) = \alpha(s)$, segue que $T(s)$ é a translação por $\alpha(s) - C(s)\alpha(0)$ e $C(s)E_j(0) = E_j(s)$, $j = 1, \dots, m$.

Então:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= A(s)q = A(s) \left[\alpha(0) + \sum_{j=1}^n q_j E_{2j}(0) \right] \\ &= C(s)\alpha(0) + \sum_{j=1}^n q_j E_{2j}(s) + \alpha(s) - C(s)\alpha(0) \\ &= \alpha(s) + \sum_{j=1}^n q_j E_{2j}(s).\end{aligned}$$

Derivando, obtemos:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \sum_{j=1}^n q_j \frac{\bar{D}}{ds} E_{2j}(s)$$

Seja v um vetor tangente a S no ponto q ; como S é totalmente geodésica no E^N ou L^N , S é um hiperplano. Logo, $T_p S = T_q S$ e, portanto, $v \in T_p S$. Daí $\langle \alpha'(0), v \rangle = 0$ e $\langle \frac{\bar{D}E_{2j}}{ds}, v \rangle = 0$, pois $\frac{\bar{D}E_{2j}}{ds}$ é combinação linear dos E_{2i+1} , $i = 1, \dots, n-1$, para todo j .

Então, segue que $\langle \beta'(0), v \rangle = 0$, para todo $v \in T_q S$, isto é, β é curva ortogonal a S .

2º) Se $\bar{M}^N$ é o S^N ou o H^N , então $A(s)$ é isometria linear do E^{N+1} ou L^{N+1} para cada s e $\alpha(s) = A(s)\alpha(0)$ implica $E_j(s) = A(s)E_j(0)$, $j = 1, \dots, m$.

Temos:

$$\beta(s) = A(s) \left[f(r)\alpha(0) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^m q_j E_{2j}(0) \right],$$

onde f e g são as funções reais dadas em (3.7) e

$$r = r(t_1, \dots, t_n) = \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{1/2}$$

Como $A(s)$ é linear, derivando $\beta(s)$, obtemos:

$$\beta'(s) = f(r) \alpha'(s) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\overline{DE}_{2j}}{ds}(s),$$

e portanto:

$$\beta'(0) = f(r) \alpha'(0) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\overline{DE}_{2j}}{ds}(0)$$

Temos S parametrizada por

$$Y(t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(0)} \sum_{j=1}^n t_j e_j$$

$$Y(t_1, \dots, t_n) = f(r) \alpha(0) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n t_j e_j$$

Então, os vetores tangentes no ponto $Y(t_1, \dots, t_n)$ são combinações lineares dos $\frac{\partial Y}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_n)$, para $1 \leq i \leq n$, onde:

$$\frac{\partial Y}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} f(r) \alpha(0) + \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n t_j e_j + \frac{g(r)}{r} e_i.$$

Temos $\langle \alpha(0), \alpha'(0) \rangle = 0$ e $\langle \alpha(0), \frac{\overline{DE}_{2j}}{ds} \rangle = 0$, para todo j , pois $\alpha(0)$ é vetor normal a $\overline{M}^N$.

Além disso $\langle \alpha'(0), e_i \rangle = 0$ e

$$\langle e_i, \frac{\overline{DE}_{2j}}{ds} \rangle = \langle E_{2i}, \frac{\overline{DE}_{2j}}{ds} \rangle = 0, \quad \forall i, j,$$

pois, pelas equações de Frenet, cada $\frac{\overline{DE}_{2j}}{ds}$ é combinação linear dos E_{2i+1} .

Então, segue que $\langle \beta'(0), \frac{\partial Y}{\partial t_i}(q_1, \dots, q_n) \rangle = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$; portanto, $\beta'(0)$ é ortogonal a $T_q S$, ou seja, β é ortogonal a S no ponto q . $\square$

A partir do resultado desse lema, podemos definir helicóides generalizados.

Sejam $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $\bar{M}^N$ e S uma subvariedade n -dimensional, completa, totalmente geodésica de $\bar{M}^N$, ortogonal às órbitas de $A(s)$.

Para cada s fixado, $A(s)S$ é subvariedade totalmente geodésica de $\bar{M}^N$. Então, a aplicação

$$X: \mathbb{R} \times S \rightarrow \bar{M}^N$$

definida por:

$$X(s,p) = A(s)p ,$$

descreve, no domínio em que é regular, uma imersão regradada de $\bar{M}^N$.

(4.6) Definição: Chamaremos helicóides generalizados às aplicações do tipo acima que são mínimas.

(4.7) Exemplo: Os helicóides definidos em (4.1) são exemplos particulares de helicóides generalizados. De fato, dada uma curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}^N$, com curvaturas constantes e referencial de Frenet $\{E_1, \dots, E_m\}$, seja $X: U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \bar{M}^N$ o helicóide associado a α , isto é:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{i=1}^n t_i E_{2i}(s).$$

Pela proposição (4.3), existe um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$, de $\bar{M}^N$, tal que

$$A(s)X(t, t_1, \dots, t_n) = X(s+t, t_1, \dots, t_n).$$

Portanto, $X(s, t_1, \dots, t_n) = A(s)X(0, t_1, \dots, t_n)$.

Observando que $S = \{X(0, t_1, \dots, t_n)/t_i \in \mathbb{R}\}$ é subvariedade n -dimensional, completa, totalmente geodésica de $\bar{M}^N$ e que podemos escrever $X(s, p) = A(s)p$, com $s \in \mathbb{R}$ e $p \in S$, segue, então, que X é helicóide generalizado de $\bar{M}^N$.

(4.8) Exemplo: Uma subvariedade totalmente geodésica M^{n+1} , de $\bar{M}^N$, é um helicóide generalizado de $\bar{M}^N$. De fato, considere uma subvariedade S , totalmente geodésica de M^{n+1} , de dimensão n . Seja e um campo normal unitário ao longo de S , tangente a M^{n+1} . Então M^{n+1} pode ser descrita por

$$X: \mathbb{R} \times S \rightarrow \bar{M}^N$$

definida por $X(t, p) = \exp_p te$.

A próxima proposição dá uma idéia de como são os helicóides generalizados.

(4.9) Proposição: Seja $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $\bar{M}^N$. Seja S subvariedade total - mente geodésica, n -dimensional de $\bar{M}^N$, ortogonal às órbitas de $A(s)$. A aplicação $X: \mathbb{R} \times S \rightarrow \bar{M}^N$, definida por $X(s, p) = A(s)p$, é, onde for regular, um helicóide generalizado se e só se a derivada covariante $\frac{\bar{D}\alpha'}{ds}$, do vetor velocidade de $\alpha(s) = X(s, p)$ pertence ao plano tangente de $A(s)S$ em $X(s, p)$, para cada $s \in \mathbb{R}$ e $p \in S$.

Prova: Temos $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos e S n -dimensional, completa, totalmente geodésica de $\bar{M}^N$. Nessa situação, segundo a definição (4.6), a aplicação regular $X: U \subset \mathbb{R} \times S \rightarrow \bar{M}^N$, $X(s,p) = A(s)p$, é helicóide generalizado se e só se X é mínima.

Seja $p \in S$; a curva $\alpha(s) = A(s)p$ é, por hipótese, ortogonal a S . A regularidade de X implica $\alpha'(s) \neq 0$, para todo s , ou seja, α não é constante.

Mostremos que α é curva integral do campo de direções normais às folhas $A(s)S$.

Observamos, em primeiro lugar, que α é parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco, conforme visto na demonstração do lema (4.5).

Se $\bar{M}^N$ é o S^N ou o H^N , $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ é subgrupo de isometrias lineares e, então, dado $w \in T_{\alpha(s)}A(s)S$, existe $v \in T_{\alpha(0)}S$ tal que $w = A(s)v$. Logo,

$$\langle \alpha'(s), w \rangle = \langle A(s)\alpha'(0), A(s)v \rangle = \langle \alpha'(0), v \rangle = 0,$$

pois α é ortogonal a S .

No caso em que $\bar{M}^N$ é o E^N ou o L^N , um movimento rígido $A(s)$ de $\bar{M}^N$ é da forma $A(s) = T(s) \circ C(s)$, onde $T(s)$ é translação e $C(s)$ é isometria linear de $\bar{M}^N$. Então, dado $w \in T_{\alpha(s)}A(s)S$, existe $v \in T_{\alpha(0)}S$ tal que $C(s)v = w$ e segue $\langle \alpha'(s), w \rangle = 0$.

Portanto, nos dois casos, α é curva ortogonal às folhas $A(s)S$, ou seja, α é uma curva integral do campo de direções normais à folheação; logo a subvariedade X pode ser

reparametrizada, localmente, como em (3.5), por:

$$Y(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s) ,$$

onde $\{e_1(s), \dots, e_n(s)\}$ é base ortonormal de $T_{\alpha(s)}A(s)S$, para cada s .

Para essa parametrização

$$Y_s(s, 0, \dots, 0) = \alpha'(s) \quad \text{e} \quad Y_{ss}(s, 0, \dots, 0) = \frac{\bar{D}\alpha'}{ds}$$

$$\text{e, por (3.12), } H(s, 0, \dots, 0) = \frac{1}{(n+1) \|\alpha'(s)\|^2} (\frac{\bar{D}\alpha'}{ds})^N$$

onde $(\)^N$ indica a projeção sobre o subespaço normal de X como subvariedade de $\bar{M}^N$.

Então, $H(s, 0, \dots, 0) = 0$ se e só se $(\frac{\bar{D}\alpha'}{ds})^N = 0$, isto é, se e só se $\frac{\bar{D}\alpha'}{ds}$ é tangente à imersão. Mas, como $\langle \frac{\bar{D}\alpha'}{ds}, \alpha' \rangle = 0$, conclui-se que $(\frac{\bar{D}\alpha'}{ds})^N = 0$ se e só se

$$\frac{\bar{D}\alpha'}{ds} \in T_{\alpha(s)}A(s)S.$$

Como o ponto p é arbitrário, segue que X é mínima se e só se $\frac{\bar{D}\alpha'}{ds} \in T_{\alpha(s)}A(s)S$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $p \in S$, onde $\alpha(s) = A(s)p$. $\square$

(4.10) Proposição: Um helicóide generalizado $X: \mathbb{R} \times S^n \rightarrow S^N$ é a restrição, a $\mathbb{R} \times S^n$, de um helicóide generalizado $\tilde{X}: \mathbb{R} \times E^{n+1} \rightarrow E^{N+1}$. Um helicóide generalizado $X: \mathbb{R} \times H^n \rightarrow H^N$ é a restrição, a $\mathbb{R} \times H^n$, de um helicóide generalizado $\tilde{X}: \mathbb{R} \times L^{n+1} \rightarrow L^{N+1}$. Em ambos os casos, $\tilde{X}(s, 0) \equiv 0$.

A recíproca é verdadeira para helicóides generalizados que satisfazam a condição $\tilde{X}(s,0) \equiv 0$.

Prova: Seja $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $S^N [H^N]$; então cada $A(s)$ é isometria linear de $E^{N+1} [L^{N+1}]$ que deixa $S^N [H^N]$ invariante.

Considere S subvariedade totalmente geodésica de $S^N [H^N]$, isto é, $S = V \cap S^N [S = V \cap H^N]$, onde V é subespaço de dimensão $n+1$ de $E^{N+1} [L^{N+1}]$.

Veremos, em seguida, que se S é ortogonal às órbitas de $A(s)$, o subespaço V também tem a mesma propriedade. Dado $q \in V, q \neq 0$, consideremos a órbita

$$\beta(s) = A(s)q = \|q\| \alpha(s), \text{ onde } \alpha(s) = A(s) \frac{q}{\|q\|}.$$

Como $T_{\frac{q}{\|q\|}} S = T_{\frac{q}{\|q\|}} V = V$ e $\alpha(0) \in V \cap (T_{\frac{q}{\|q\|}} S)^\perp$, onde $()^\perp$ denota o ortogonal em V , podemos escrever

$$V = T_{\frac{q}{\|q\|}} S \oplus [\alpha(0)].$$

Dessa forma, dado $w \in T_{\frac{q}{\|q\|}} V = V$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $w = \tilde{w} + a\alpha(0)$, onde $\tilde{w} \in T_{\frac{q}{\|q\|}} S$, e, então:

$$\langle \beta'(0), w \rangle = \langle \|q\| \alpha'(0), \tilde{w} \rangle + a \langle \|q\| \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = 0.$$

Assim sendo, considere a aplicação $X: \mathbb{R} \times S \rightarrow S^N [H^N]$ definida por $X(s,p) = A(s)p$ e seja $\tilde{X}: \mathbb{R} \times V \rightarrow E^{N+1} [L^{N+1}]$ definida por $\tilde{X}(s,q) = A(s)q$.

É claro que $X = \tilde{X}|_{\mathbb{R} \times S}$ e $\tilde{X}(s, 0) \equiv 0$, pois $A(s)$ é linear.

Para $q \neq 0$:

$$\tilde{X}(s, q) = A(s)q = \|q\| A(s) \frac{q}{\|q\|},$$

isto é:
$$\tilde{X}(s, q) = \|q\| X(s, \frac{q}{\|q\|})$$

e, como consequência:

$$\tilde{X}_s(s, q) = \|q\| X_s(s, \frac{q}{\|q\|})$$

e
$$\tilde{X}_{ss}(s, q) = \|q\| X_{ss}(s, \frac{q}{\|q\|})$$

Vimos, na demonstração da proposição anterior, que uma órbita $\alpha(s) = A(s)p$ de $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ é uma curva integral do campo de direções normais às folhas $A(s)S$ e, então, uma subvariedade regrada do tipo $X(s, p) = A(s)p$ pode ser parametrizada, localmente, como em (3.5), por:

$$Y(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s),$$

donde
$$Y_s(s, 0, \dots, 0) = \alpha'(s)$$

e
$$Y_{ss}(s, 0, \dots, 0) = \frac{\overline{D}\alpha'}{ds}(s).$$

Então, sendo Y uma parametrização de X e $\tilde{Y}$ uma parametrização de $\tilde{X}$, da forma acima, onde $\alpha(s) = A(s) \frac{q}{\|q\|}$,

temos, no ponto $\alpha(s)$:

$$Y_s(s, 0, \dots, 0) = \alpha'(s) = X_s(s, \frac{q}{\|q\|})$$

e

$$Y_{ss}(s, 0, \dots, 0) = \frac{\overline{D}\alpha'}{ds}(s) = X_{ss}(s, \frac{q}{\|q\|})$$

e, no ponto $\|q\|\alpha(s)$:

$$\tilde{Y}_s(s, 0, \dots, 0) = \|q\|\alpha'(s) = \tilde{X}_s(s, q)$$

e

$$\tilde{Y}_{ss}(s, 0, \dots, 0) = \|q\| \frac{\overline{D}\alpha'}{ds}(s) = \tilde{X}_{ss}(s, q) .$$

Como a métrica de uma subvariedade Y é dada por $d\sigma^2 = \|Y_s\|^2 ds^2 + d\theta^2$, onde $d\theta^2$ é a métrica da folha, segue que $\tilde{X}$ é regular se e somente se X é regular. Além disso:

$$H(s, \frac{q}{\|q\|}) = \frac{1}{(n+1) \|\alpha'(s)\|^2} (\frac{\overline{D}\alpha'}{ds})^N$$

e

$$\tilde{H}(s, q) = \frac{1}{(n+2) \|q\|^2 \|\alpha'(s)\|^2} (\|q\|\alpha''(s))^{\tilde{N}} ,$$

onde $()^N$ indica a projeção normal de X como subvariedade de $S^N_{[H^N]}$ e $()^{\tilde{N}}$ indica a projeção sobre o espaço normal de $\tilde{X}$ como subvariedade de $E^{N+1}_{[L^{N+1}]}$.

Pela proposição (4.9), $\tilde{X}$ é mínima se e só se $\alpha''(s) \in T_{\|q\|\alpha(s)} A(s)V$. Mas, como

$$T_{\|q\|\alpha(s)} A(s)V = T_{\alpha(s)} A(s)S \oplus [\alpha(s)] ,$$

$\alpha''(s) \in T_{\|q\| \alpha(s)} A(s)V$ se e só se $\frac{D\alpha'}{ds} \in T_{\alpha(s)} A(s)S$, o que é equivalente, novamente pela proposição (4.9), a X ser mínima.

Mostramos que se $X: \mathbb{R} \times S \rightarrow S^N[H^N]$ é helicóide generalizado, então

$$\tilde{X}: \mathbb{R} \times V \rightarrow E^{N+1}[L^{N+1}]$$

é helicóide generalizado de $E^{N+1}[L^{N+1}]$ tal que $\tilde{X}(s,0) \equiv 0$.

Reciprocamente, se $\tilde{X}: \mathbb{R} \times V \rightarrow E^{N+1}[L^{N+1}]$ é helicóide generalizado de $E^{N+1}[L^{N+1}]$ dado por $\tilde{X}(s,p) = A(s)p$, $A(s) = T(s) \circ C(s)$, tal que $\tilde{X}(s,0) \equiv 0$, temos $A(s)0 = 0$, para todo s , ou seja, $T(s)$ é a translação pelo vetor nulo. Portanto, $A(s)$ é isometria linear e se $q \in S = V \cap S^N[V \cap H^N]$, $A(s)q \in S^N[H^N]$.

Nesse caso, já vimos que, tomando $X = \tilde{X}|_{\mathbb{R} \times S}$, X é regular e mínima se e só se $\tilde{X}$ é regular e mínima. Então, X é helicóide generalizado de $S^N[H^N]$. $\square$

Dessa proposição, segue que para classificar todos os helicóides generalizados de E^N , L^N , ou H^N , é suficiente classificar os helicóides generalizados de E^{N+1} e L^{N+1} .

(4.11) Teorema: Seja X um helicóide generalizado, de dimensão $n+1$, no E^{N+1} ou no L^{N+1} , onde $2n \leq N$. Então, existe um conjunto ortonormal $\{v_1, \dots, v_{n+k+1}\}$, de E^{N+1} ou L^{N+1} , e $b \in \mathbb{R}$, tais que, a menos de um movimento rígido do espaço ambiente, temos as seguintes expressões:

$$(a) X(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^k t_i e_i(s) + \sum_{i=1}^{n-k} t_{k+i} v_{2k+i} + sbv_{n+k+1}$$

para helicóides generalizados no E^{N+1} ;

$$(b-i) X(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^k t_i e_i(s) + \sum_{i=1}^{n-k} t_{k+i} v_{2k+i} + sbv_{n+k+1}$$

ou

$$(b-ii) X(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^k t_i f_i(s) + \sum_{i=1}^{n-k} t_{k+i} v_{2k+i} + sbv_{n+k+1}$$

para helicóides generalizados no L^{N+1} .

Os campos $e_i(s)$ e $f_i(s)$ são dados por:

$$\begin{cases} e_i(s) = (\cos a_i s) v_{2i-1} + (\sin a_i s) v_{2i}, & i=1, \dots, k \\ f_1(s) = (\cosh a_1 s) v_1 + (\sinh a_1 s) v_2 \\ f_i(s) = e_i(s), & \text{para } i = 2, \dots, k \end{cases}$$

$a_1, \dots, a_k$ são constantes reais e $s, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Além disso, em (b-ii) temos, $\langle v_1, v_1 \rangle = -1$ ou $\langle v_2, v_2 \rangle = -1$.

Prova: Sejam $A(s)$ um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de $E^{N+1}[L^{N+1}]$ e $S \subset E^{N+1}[L^{N+1}]$ um hiperplano, de dimensão n , ortogonal às órbitas de $A(s)$.

Consideremos o helicóide generalizado

$$X: \mathbb{R} \times S \rightarrow E^{N+1}[L^{N+1}]$$

dado por

$$X(s, q) = A(s)q.$$

Sejam $p \in S$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de $T_p S$ e tomemos $\alpha(s) = A(s)p$. Então, $A(s) = T(s) \circ C(s)$, onde $T(s)$ é a translação por $\alpha(s) - C(s)\alpha(0)$, $C(s)$ é isometria linear e $\alpha(0) = p$.

Tomemos também $e_i(s) = C(s)e_i$, $i = 1, \dots, n$.

A subvariedade totalmente geodésica S é parametrizada por:

$$q = p + \sum_{j=1}^n t_j e_j, \quad t_j \in \mathbb{R}$$

Assim,

$$\begin{aligned} X(s, q) &= A(s)q = A(s) \left[p + \sum_{j=1}^n t_j e_j \right] \\ &= C(s)\alpha(0) + \sum_{j=1}^n t_j C(s)e_j + \alpha(s) - C(s)\alpha(0) \end{aligned}$$

Portanto,

$$(4.12) \quad X(s, q) = \alpha(s) + \sum_{j=1}^n t_j e_j(s) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{j=1}^n t_j e_j(s),$$

onde $\exp$ representa a exponencial de E^{N+1} ou de L^{N+1} .

Os vetores $\alpha'(0), e_1'(0), \dots, e_n'(0)$ são normais a S no ponto p . De fato: por hipótese, as curvas $\beta(s) = A(s)q$, com $q \in S$, são ortogonais a S . Logo, $\alpha'(0)$ é normal a S no ponto p . Da mesma forma, tomando $\beta_i(s) = A(s)q_i$, onde $q_i = p + e_i \in S$, temos $\beta_i'(0) \in (T_{q_i} S)^\perp$.

Como $\beta_i'(0) = \alpha'(0) + e_i'(0)$ e $T_{q_i} S = T_p S$, já que S é hiperplano, segue que $e_i'(0) \in (T_p S)^\perp$.

Como consequência, $\alpha'(s), e_1'(s), \dots, e_n'(s)$ são vetores normais à folha $A(s)S$ no ponto $\alpha(s)$, pois se $w \in T_{\alpha(s)}A(s)S$, então existe $v \in T_p S$ tal que $w = C(s)v$ e temos:

$$\langle \alpha'(s), w \rangle = \langle C(s)\alpha'(0), C(s)v \rangle = \langle \alpha'(0), v \rangle = 0$$

$$\langle e_i'(s), w \rangle = \langle C(s)e_i'(0), C(s)v \rangle = \langle e_i'(0), v \rangle = 0,$$

$i = 1, \dots, n$. Portanto, $\alpha'(s), e_1'(s), \dots, e_n'(s)$ são normais a $A(s)S$.

Decorre da proposição (4.9) que $\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)}A(s)S$

$$\beta_i''(s) = \alpha''(s) + e_i''(s) \in T_{\beta_i(s)}A(s)S = T_{\alpha(s)}A(s)S.$$

Então, $e_i''(s) \in T_{\alpha(s)}A(s)S$.

Daí, como $e_j'(s)$ é normal a $A(s)S$ para cada j , temos $\langle e_i''(s), e_j'(s) \rangle = 0$, para todos i e j , e, como consequência, as funções $\langle e_i'(s), e_j'(s) \rangle$ são constantes, $1 \leq i, j \leq n$.

Observemos ainda que $[e_1(s), \dots, e_n(s), e_1'(s), \dots, e_n'(s)]$ é subespaço de $E^{N+1}[L^{N+1}]$ independente de s , já que $C(s)e_i(0) = e_i(s)$ e $C(s)e_i'(0) = e_i'(s)$, para todo i .

Seja $a_{ij} = \langle e_i''(s), e_j'(s) \rangle = -\langle e_i'(s), e_j''(s) \rangle$. Como já vimos, as funções a_{ij} são constantes e, então, a matriz (a_{ij}) é constante e simétrica e, portanto, diagonalizável. Denotemos ainda por $\{e_i, i=1, \dots, n\}$ a nova base ortonormal para a qual

$$e_i''(s) = \lambda_i e_i(s), \quad \text{onde } \lambda_i = -\frac{\langle e_i', e_i' \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}.$$

Vamos analisar as possibilidades de solução para a equação acima, no E^{N+1} e no L^{N+1} , separadamente.

1º) No E^{N+1} , temos apenas duas possibilidades para cada i :

$$\lambda_i = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_i < 0.$$

a) $\lambda_i = 0$ se e só se $\langle e_i', e_i' \rangle = 0$, o que é equivalente a $e_i(s) = e_i$, constante.

b) Se $\lambda_i < 0$, a solução para $e_i''(s) = \lambda_i e_i(s)$, com $\lambda_i = -\langle e_i', e_i' \rangle$ é dada por:

$$e_i(s) = (\cos \sqrt{-\lambda_i} s) v_{2i-1} + (\sin \sqrt{-\lambda_i} s) v_{2i},$$

$$\text{onde } v_{2i-1} = e_i(0) \text{ e } v_{2i} = \frac{e_i'(0)}{\|e_i'(0)\|}.$$

O subespaço $V_i = [v_{2i-1}, v_{2i}]$ é subespaço invariante por $C(s)$, pois:

$$C(s)v_{2i-1} = C(s)e_i(0) = e_i(s) \in V_i$$

e

$$C(s)v_{2i} = C(s) \frac{e_i'(0)}{\|e_i'(0)\|} = \frac{e_i'(s)}{\|e_i'(s)\|} \in V_i$$

Portanto, neste caso, $e_i(s)$ descreve um círculo no subespaço bi-dimensional V_i de E^{N+1} .

Reordenando a base $\{e_i\}$, seja k tal que $\lambda_j = 0$, para $k < j \leq n$ e $\lambda_j < 0$, para $1 \leq j \leq k$ e seja $v_{2k+j} = e_{k+j}$, para $j = 1, \dots, n-k$.

Então, voltando a (4.12), temos, para o helicóide generalizado X , a expressão:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \alpha(s) + \sum_{j=1}^k t_j e_j(s) + \sum_{j=1}^{n-k} t_{k+j} v_{2k+j},$$

onde

$$e_j(s) = (\cos \sqrt{-\lambda_j} s) v_{2j-1} + (\sin \sqrt{-\lambda_j} s) v_{2j}.$$

2º) No L^{N+1} , há quatro possibilidades de solução para

$$e_i''(s) = \lambda_i e_i(s), \text{ com } \lambda_i = - \frac{\langle e_i', e_i' \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$$

a) Se $\langle e_i', e_i' \rangle = 0$, ou seja, $\lambda_i = 0$, estamos no caso $e_i(s)$ constante.

b) Se $\langle e_i', e_i' \rangle \neq 0$, podemos ter:

(i) Se $\langle e_i', e_i' \rangle > 0$ e $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, isto é,

$\lambda_i < 0$, a solução é dada por:

$$e_i(s) = (\cos \sqrt{-\lambda_i} s) v_{2i-1} + (\sin \sqrt{-\lambda_i} s) v_{2i},$$

onde $v_{2i-1} = e_i(0)$ e $v_{2i} = \frac{e_i'(0)}{\|e_i'(0)\|}$.

Ou seja, novamente, $e_i(s)$ descreve um círculo S^1 no subespaço $V_i = [v_{2i-1}, v_{2i}]$, invariante por $C(s)$.

(ii) Se $\langle e_i', e_i' \rangle > 0$ e $\langle e_i, e_i \rangle = -1$, isto é,

$\lambda_i > 0$, a solução é:

$$e_i(s) = (\cosh \sqrt{\lambda_i} s) v_{2i-1} + (\sinh \sqrt{\lambda_i} s) v_{2i},$$

onde $v_{2i-1} = e_i(0)$ e $v_{2i} = \frac{e_i'(0)}{\|e_i'(0)\|}$ e, portanto,

$$\langle v_{2i-1}, v_{2i-1} \rangle = -1 \quad \text{e} \quad \langle v_{2i}, v_{2i} \rangle = 1 .$$

(iii) Se $\langle e'_i, e'_i \rangle < 0$, como temos, para todo j , $\langle e_j, e'_i \rangle = 0$ e $\langle e'_j, e'_i \rangle = 0$, $j \neq i$, segue pelo lema (1.24) que

$$\langle e_j, e_j \rangle = 1, \quad \forall j, \quad \text{e} \quad \langle e'_j, e'_j \rangle \geq 0 ,$$

para todo $j \neq i$. Então, $\lambda_i > 0$ e $e_i(s)$ é dada por:

$$e_i(s) = (\cosh \sqrt{\lambda_i} s) v_{2i-1} + (\sinh \sqrt{\lambda_i} s) v_{2i} ,$$

onde $v_{2i-1} = e_i(0)$ e $v_{2i} = \frac{e'_i(0)}{\|e'_i(0)\|}$ e, portanto,

$$\langle v_{2i-1}, v_{2i-1} \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle v_{2i}, v_{2i} \rangle = -1 .$$

Neste dois últimos casos, (b-ii) e (b-iii),

$V_i = [v_{2i-1}, v_{2i}]$ é subespaço de Lorentz invariante por $C(s)$ e $e_i(s)$ descreve uma hipérbole H^1 no subespaço V_i .

No L^{N+1} , encontraremos, então, duas expressões distintas para o helicóide generalizado.

Se não existe índice j tal que e_j ou e'_j é vetor "timelike", então $\lambda_j \leq 0$, para todo j , $1 \leq j \leq n$. Reordenando a base $\{e_i\}$, seja k o índice tal que $\lambda_i < 0$, para $1 \leq i \leq k$ e $\lambda_i = 0$, para $k < i \leq n$, e denotemos por v_{2k+i} cada um dos campos constantes e_{k+i} , $1 \leq i \leq n-k$.

Chegamos, então, à expressão:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \alpha(s) + \sum_{j=1}^k t_j e_j(s) + \sum_{j=1}^{n-k} t_{k+j} v_{2k+j} ,$$

onde os $e_i(s)$ são dados em (b-i).

Se existe um índice j tal que e_j ou e_j' é "timelike", novamente pelo lema (1.24) ele é único, pois $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\langle e_i', e_j \rangle = 0$, para todo i .

Reordenando a base $\{e_i, i=1, \dots, n\}$, podemos tomar $j=1$ e k tal que $\lambda_i = 0$, para $i > k$, e $\lambda_i < 0$, para $2 \leq i \leq k$. Denotando novamente por v_{2k+i} os vetores e_{k+i} , $1 \leq i \leq n-k$, obtemos a expressão:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \alpha(s) + \sum_{i=1}^k t_i e_i(s) + \sum_{i=1}^{n-k} t_{k+i} v_{2k+i},$$

onde $e_1(s)$ é dado em (b-ii) ou (b-iii) e $e_j(s)$ é dado em (b-i), para $j=2, \dots, k$.

Para completar a prova, afirmamos que, desde o começo, poderíamos ter escolhido o ponto p de modo que $\alpha(s)=A(s)p$ fosse um ponto ou uma reta. Para mostrar que essa escolha é possível, usamos o fato de que, para cada s ,

$\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)} A(s)S$ e, portanto:

$$\alpha''(s) = \sum_{j=1}^n a_j(s) e_j(s),$$

onde as funções a_j são dadas por:

$$a_j(s) = \frac{\langle \alpha''(s), e_j(s) \rangle}{\langle e_j(s), e_j(s) \rangle} = - \frac{\langle \alpha'(s), e_j'(s) \rangle}{\langle e_j(s), e_j(s) \rangle}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Como $\langle \alpha''(s), e_j'(s) \rangle = 0 = \langle \alpha'(s), e_j''(s) \rangle$, segue que as funções $\langle \alpha'(s), e_j'(s) \rangle$ são constantes e, portanto, $a_j(s)$ é constante, para todo j .

Lembrando que $\lambda_i = 0$, para $k < i \leq n$, ou seja $e'_i = 0$, $k < i \leq n$, temos, em particular, $a_i = 0$, para $k < i \leq n$. Além disso, $e_i(s) = \frac{1}{\lambda_i} e''_i(s)$, para $1 \leq i \leq k$, e, então, obtemos $\alpha''(s) = \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{\lambda_j} e''_j(s)$.

Consideremos, agora, o ponto $p_0 = p + \sum_{j=1}^k \left(\frac{-a_j}{\lambda_j}\right) e_j$

e a curva $\beta(s) = A(s)p_0$, isto é:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{-a_j}{\lambda_j}\right) e_j(s) .$$

Então:

$$\beta''(s) = \alpha''(s) - \sum_{j=1}^k \left(\frac{a_j}{\lambda_j}\right) e''_j(s) = 0$$

e $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle$ é constante; logo, p_0 é o ponto procurado.

Se $\beta'(0) \neq 0$, então β é uma reta e tomamos

$$v_{n+k+1} = \frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} .$$

Observemos que:

$$\langle e_i(0), \beta'(0) \rangle = \langle e_i(0), \alpha'(0) - \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{\lambda_j} e'_j(0) \rangle = 0$$

e

$$\langle e'_i(0), \beta'(0) \rangle = \langle e'_i(0), \alpha'(0) - \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{\lambda_j} e'_j(0) \rangle =$$

$$= \langle e'_i(0), \alpha'(0) \rangle - \langle e'_i(0), \frac{a_i}{\lambda_i} e'_i(0) \rangle$$

$$= -a_i \langle e_i, e_i \rangle - \frac{a_i \langle e_i, e_i \rangle}{(-\langle e'_i, e'_i \rangle)} \langle e'_i, e'_i \rangle = 0.$$

Portanto, v_{n+k+1} é ortogonal aos v_j , $1 \leq j \leq n+k$.

Se $\beta'(0) = 0$, isto é, se β é um ponto, escolhemos um vetor v_{n+k+1} , unitário, ortogonal aos v_j , $1 \leq j \leq n+k$ e, nos dois casos, podemos escrever $\beta(s) = \beta(0) + sbv_{n+k+1}$, $b \in \mathbb{R}$, onde β é um ponto se e só se $b = 0$.

Dessa forma, substituindo α por β , encontramos para $X(s, q)$, a menos de translação por $\beta(0)$, as expressões procuradas. $\square$

Observação: Completamos o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n+k+1}\}$ a uma base ortonormal do $E^{N+1}[L^{N+1}]$. Será de utilidade, em demonstrações futuras, vermos como é a decomposição de $A(s)$ nessa base.

Denotando por $T(s)$ a translação por $\beta(s)$, isto é:
 $T(s)q = q + sbv_{n+k+1}$, e por $A_j(s)$ a transformação ortogonal do $E^{N+1}[L^{N+1}]$ que deixa o subespaço V_j invariante, temos:

$$(4.13) \quad A(s) = T(s) \circ A_1(s) \circ \dots \circ A_k(s)$$

Para o E^{N+1} , cada A_j é dada pela matriz

$(a_{i\ell}^j)_{(N+1) \times (N+1)}$ tal que:

$$(4.14) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{jj}^j & a_{j,j+1}^j \\ a_{j+1,j}^j & a_{j+1,j+1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{-\lambda_j} s & -\sin\sqrt{-\lambda_j} s \\ \sin\sqrt{-\lambda_j} s & \cos\sqrt{-\lambda_j} s \end{pmatrix} \\ a_{i\ell}^j = \delta_{i\ell}, \text{ nas outras posições.} \end{cases}$$

Para o L^{N+1} , há duas possibilidades:

1º) Se $\langle v_i, v_i \rangle > 0$, $i = 1, \dots, 2k$, então cada A_j é dada por (4.14).

2º) Se $\langle v_1, v_1 \rangle = -1$ ou $\langle v_2, v_2 \rangle = -1$, A_j é dada por (4.14), para $j = 2, \dots, k$, e A_1 é dada pela matriz $(a_{i\ell}^1)_{(N+1) \times (N+1)}$, onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{\lambda_1} s & \sinh \sqrt{\lambda_1} s \\ \sinh \sqrt{\lambda_1} s & \cosh \sqrt{\lambda_1} s \end{pmatrix} \\ a_{i\ell}^1 = \delta_{i\ell}, \text{ nas outras posições} \end{array} \right.$$

(4.15) Definição: Um helicóide generalizado do E^{N+1} dado por (4.11-a) é chamado helicóide generalizado do tipo (n,k).

(4.16) Definição: Um helicóide generalizado do L^{N+1} dado por (4.11-b-i) é chamado helicóide generalizado do tipo (n,k,1).

(4.17) Definição: Um helicóide generalizado do L^{N+1} dado por (4.11-b-ii) com $v_1, v_1 = -1$ é chamado helicóide generalizado do tipo (n,k,-1).

A seguir, determinaremos o conjunto dos pontos singulares de um helicóide generalizado no E^{N+1} ou no L^{N+1} .

(4.18) Pelas expressões encontradas no teorema (4.11) vemos que, em qualquer dos casos, temos:

$$X_{t_i}(s, t_1, \dots, t_n) = e_i(s), \quad 1 \leq i \leq k,$$

e

$$X_{t_{k+i}}(s, t_1, \dots, t_n) = v_{2k+i} = e_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq n-k.$$

Portanto, $\{X_{t_i}(s, t_1, \dots, t_n), i = 1, \dots, n\}$ é conjunto linearmente independente em todo ponto.

Além disso,

$$\langle X_s(s, t_1, \dots, t_n), e_j(s) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k t_i e_i'(s) + b v_{n+k+1}, e_j(s) \right\rangle = 0,$$

para todo $1 \leq j \leq n$.

Logo, $X_s(s, t_1, \dots, t_n)$ é ortogonal aos $X_{t_j}(s, t_1, \dots, t_n)$, $1 \leq j \leq n$.

Portanto, X é regular se e só se X_s é vetor não nulo em todo ponto $(s, t_1, \dots, t_n)$.

Nas proposições seguintes analisaremos caso por caso.

(4.19) Proposição: Seja X um helicóide generalizado do tipo (n, k) , do E^{N+1} , gerado por um subgrupo a 1-parâmetro $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ de movimentos rígidos do E^{N+1} . X é regular se e só se a forma canônica de $A(s)$, dada em (4.13), inclui translação não trivial. Se X é não-regular, então o conjunto de seus pontos singulares é a intersecção de cada folha com um hiperplano de dimensão $n-k+1$.

Prova: Se X é helicóide generalizado do E^{N+1} do tipo (n,k) , então:

$$X_s(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^k t_i e_i'(s) + b v_{n+k+1}.$$

Daí:

$$\langle X_s, X_s \rangle = \sum_{j=1}^k t_j^2 \langle e_j', e_j' \rangle + b^2;$$

portanto, $X_s(s, t_1, \dots, t_n) \neq 0$, em todo ponto, se e somente se $b \neq 0$.

Então, segue da observação em (4.18) que X é regular se e só se a translação $T(s)$, de (4.13), é não trivial.

Se $A(s)$ não contém translação, isto é, se $b = 0$, então $X_s(s, 0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) = 0$.

Portanto, se X é não regular, o conjunto de seus pontos singulares é:

$$\{X(s, t_1, \dots, t_n)/t_1 = \dots = t_k = 0\}. \quad \square$$

(4.20) Proposição: Seja X um helicóide generalizado do L^{N+1} do tipo $(n,k,1)$ ou $(n,k,-1)$ gerado por um subgrupo a 1-parâmetro $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ de movimentos rígidos de L^{N+1} . X é regular se e só se a forma canônica de $A(s)$, dada por (4.13), inclui translação não trivial. Se X é não-regular, o conjunto de seus pontos singulares é a intersecção de cada folha com um hiperplano de dimensão $n-k+1$ do L^{N+1} .

Prova: Se X é do tipo $(n, k, 1)$, isto é, se X é dado por (4.11-b-i), então $X_s(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^k t_i e_i'(s) + b v_{n+k+1}$ e os e_j e e_j' são todos "spacelike". Daí, segue que $X_s(s, t_1, \dots, t_n) \neq 0$ em todo ponto se e somente se $b \neq 0$.

Se X é do tipo $(n, k, -1)$, então

$$X_s(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^k t_i f_i'(s) + b v_{n+k+1}$$

e $f_1(s)$ é "timelike"; portanto, $\langle f_i'(s), f_i'(s) \rangle > 0$ para todo $1 \leq i \leq k$. Novamente, $X_s \neq 0$ em todo ponto se e só se $b \neq 0$.

Assim, nos dois casos, a demonstração segue idêntica à de (4.19). $\square$

(4.21) Observação: Se X é um helicóide generalizado do S^N ou do H^N , a proposição (4.10) garante a existência de um helicóide generalizado $\tilde{X}: \mathbb{R} \times E^{n+1} \rightarrow E^{N+1}$ ou $\tilde{X}: \mathbb{R} \times L^{n+1} \rightarrow L^{N+1}$, satisfazendo $\tilde{X}(s, 0) \equiv 0$, tais que

$$X = \tilde{X}|_{\mathbb{R} \times S^n} \quad \text{ou} \quad X = \tilde{X}|_{\mathbb{R} \times H^n},$$

respectivamente. Decorre da demonstração que

$$\tilde{X}(s, q) = \|q\| X(s, \frac{q}{\|q\|})$$

e

$$\tilde{X}_s(s, q) = \|q\| \tilde{X}_s(s, \frac{q}{\|q\|}),$$

para todo $q \neq 0$. Notemos que, sendo $\tilde{X}$ um helicóide generaliza-
do do E^{N+1} ou do L^{N+1} , $\tilde{X}$ se escreve por uma das expressões em
(4.11) e, então, em qualquer dos casos, a condição $\tilde{X}(s,0) \equiv 0$
é equivalente a $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ ser subgrupo a 1-parâmetro de
transformações ortogonais de E^{N+1} ou semi-ortogonais de L^{N+1} .

(4.22) Observação: Sejam $X: \mathbb{R} \times H^n \rightarrow H^N$ helicóide generali-
zado do H^N e $\tilde{X}: \mathbb{R} \times L^{n+1} \rightarrow L^{N+1}$ helicóide generalizado do
 L^{N+1} tal que $\tilde{X}|_{\mathbb{R} \times H^n} = X$.

Por (4.11) e pela observação (4.21), $\tilde{X}$ é dado por uma
expressão do tipo

$$\tilde{X}(s, t_1, \dots, t_{n+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} t_i e_i(s) + \sum_{j=1}^{n-k} t_{k+1+j} v_{2(k+1)+j}.$$

A folha L^{n+1} é gerada pelos vetores $e_1(0), \dots, e_{n+1}(0)$.
Se $\tilde{X}$ é do tipo $(n+1, k+1, -1)$, isto é, se $\langle e_1(s), e_1(s) \rangle = -1$,
não há restrições a fazer; entretanto, se $\tilde{X}$ é do tipo
 $(n+1, k+1, 1)$, temos $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, para $i \leq k+1$ e, então, como
a intersecção de $\tilde{X}$ com o H^n deve ser não vazia, existe um índi-
ce i_0 , $k+1 < i_0 \leq n+1$, tal que $\langle e_{i_0}, e_{i_0} \rangle = -1$. Logo, se $\tilde{X}$ é
do tipo $(n+1, k+1, 1)$, temos, necessariamente, $k < n$.

(4.23) Definição: Seja X um helicóide generalizado do S^N .
Dizemos que X é do tipo (n, k) se o helicóide generalizado $\tilde{X}$,
do E^{N+1} , dado por (4.10), é do tipo $(n+1, k+1)$.

(4.24) Definição: Seja X um helicóide generalizado do H^N .
Dizemos que X é do tipo $(n, k, \pm 1)$ se o helicóide generalizado

$\tilde{X}$ do L^{N+1} , dado por (4.10), é do tipo $(n+1, k+1, \pm 1)$, respectivamente.

(4.25) Observação: Como consequência da observação (4.22), se X é helicóide do H^N do tipo $(n, k, 1)$, então temos $k < n$.

Estudaremos os pontos singulares de helicóides no $S^N = S^N(1)$ e no $H^N = H^N(1)$.

(4.26) Proposição: Seja X um helicóide generalizado do H^N . Se X é do tipo $(n, k, -1)$, então X é regular. Se X é do tipo $(n, k, 1)$ então X é singular sobre uma subvariedade H^{n-k-1} de cada folha.

Prova: Seja $X: \mathbb{R} \times H^n \rightarrow H^N$ helicóide generalizado do tipo $(n, k, \pm 1)$. Então $X = \tilde{X}|_{\mathbb{R} \times H^n}$, onde $\tilde{X}: \mathbb{R} \times L^{n+1} \rightarrow L^{N+1}$ é um helicóide generalizado do tipo $(n+1, k+1, \pm 1)$. Pela observação (4.21), um ponto $X(s, \frac{q}{\|q\|})$ é ponto regular de X se e só se o ponto $\tilde{X}(s, q)$ é ponto regular de $\tilde{X}$.

Da proposição (4.20) e levando em conta a observação (4.21), o conjunto de pontos singulares de $\tilde{X}$ é $\tilde{X}(V)$, onde V é o hiperplano:

$$V = \{(s, t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} / t_1 = \dots = t_{k+1} = 0\}.$$

Então, o conjunto de pontos singulares de X é $X(V \cap \mathbb{R} \times H^n)$.

Se $\tilde{X}: \mathbb{R} \times L^{n+1} \rightarrow L^{N+1}$ é do tipo $(n, k, -1)$, temos $L^{n+1} = [e_1, \dots, e_{n+1}]$, com $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$ e se

$t = (t_1, \dots, t_{n+1}) = t_1 e_1 + \dots + t_{n+1} e_{n+1} \in L^{n+1}$, então:

$$\langle t, t \rangle = -t_1^2 + \sum_{j=2}^{n+1} t_j^2.$$

Neste caso, $V \cap (\mathbb{R} \times H^n) = \emptyset$, pois se

$$(s, t) \in \mathbb{R} \times H^n, \text{ então } -t_1^2 + \sum_{j=2}^{n+1} t_j^2 = -1$$

e, supondo que $(s, t) \in V$, temos

$$\sum_{j=k+2}^{n+1} t_j^2 = -1,$$

o que é absurdo.

Portanto, todo helicóide generalizado do H^N do tipo $(n, k, -1)$ é regular em seu domínio.

Se $\tilde{X}: \mathbb{R} \times L^{n+1} \rightarrow L^{N+1}$ é do tipo $(n+1, k+1, 1)$, onde $k < n$, temos, pela observação (4.22), $L^{n+1} = [e_1, \dots, e_{n+1}]$, com $\langle e_{i_0}, e_{i_0} \rangle = -1$, para um certo índice i_0 , $k+1 < i_0 \leq n+1$, e se $t = (t_1, \dots, t_{n+1}) = t_1 e_1 + \dots + t_{n+1} e_{n+1} \in L^{n+1}$, então:

$$\langle t, t \rangle = -t_{i_0}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n+1} t_j^2.$$

Segue que o conjunto de pontos singulares de X é $X(V \cap (\mathbb{R} \times H^n))$ e:

$$V^n(\mathbb{R} \times H^n) = \{(s, t_1, \dots, t_{n+1}) / t_1 = \dots = t_{k+1} = 0 \text{ e } -t_{i_0}^2 + \sum_{\substack{j=k+2 \\ j \neq i_0}}^{n+1} t_j^2 = -1\}$$

Podemos escrever $V = \mathbb{R} \times V'$, onde V' é hiperplano de Lorentz, de dimensão $n-k$, e, então, segue que

$$V \cap (\mathbb{R} \times H^n) = \mathbb{R} \times (V' \cap H^n).$$

Assim, para cada $s \in \mathbb{R}$, X é singular sobre a subvariedade totalmente geodésica $H^{n-k-1} = V' \cap H^n$. $\square$

(4.27) Proposição: Seja X um helicóide generalizado do S^N , do tipo (n,k) . Se $k = n$, então X é regular em todo ponto. Se $k < n$, então X é não-regular sobre uma subvariedade totalmente geodésica S^{n-k-1} , de cada folha.

Prova: Seja $\tilde{X}: \mathbb{R} \times E^{n+1} \rightarrow E^{N+1}$ um helicóide generalizado do tipo $(n+1,k+1)$ tal que $X = \tilde{X}|_{\mathbb{R} \times S^n}$.

Pela proposição (4.19) e levando em conta a observação (4.21), segue que se $\tilde{X}$ é não-regular, seu conjunto de pontos singulares é $\tilde{X}(V)$, onde V é o hiperplano

$$\{(s, t_1, \dots, t_{n+1}) / t_1 = \dots = t_{k+1} = 0\}.$$

Então, o conjunto de pontos singulares de X é

$X(V \cap (\mathbb{R} \times S^n))$, onde

$$\begin{aligned} V \cap (\mathbb{R} \times S^n) &= \{(s, t_1, \dots, t_{n+1}) / t_1 = \dots = t_{k+1} = 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{n+1} t_j^2 = 1\} \\ &= \{(s, 0, \dots, 0, t_{k+2}, \dots, t_{n+1}) / \sum_{j=k+2}^{n+1} t_j^2 = 1\} \end{aligned}$$

Se $k = n$, então $V \cap (\mathbb{R} \times S^n) = \emptyset$, ou seja, X é regular no domínio.

Se $k < n$, tomando $V = \mathbb{R} \times V'$, onde V' é hiperplano $(n-k)$ -dimensional de E^{N+1} , temos $V \cap (\mathbb{R} \times S^n) = \mathbb{R} \times (V' \cap S^n)$. Portanto, em cada folha, X é singular sobre a subvariedade totalmente geodésica $V' \cap S^n = S^{n-k-1}$. $\square$

(4.28) Proposição: Seja X um helicóide generalizado de E^N , S^N ou H^N . Se X é regular em todo ponto, então a métrica induzida em seu domínio $(\mathbb{R} \times E^n, \mathbb{R} \times S^N$ ou $\mathbb{R} \times H^n)$ é completa.

Prova: Vimos no capítulo 3 que a métrica induzida por X em $\mathbb{R} \times \bar{M}^n(c)$ é $d\sigma^2 = \|X_s\|^2 ds^2 + d\theta^2$, onde $d\theta^2$ é a métrica usual de $\bar{M}^n(c)$.

Como X é, por hipótese, regular em seu domínio, então $\|X_s\|^2$ é função positiva, diferenciável, definida em $\mathbb{R} \times \bar{M}^n(c)$.

Mostremos que $\|X_s(s, q)\|^2$ depende da variável $q \in \bar{M}^n(c)$, mas não depende de s . Para os três casos, considerando as expressões do teorema (4.11), temos:

$$X_s(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^k t_j e'_j(s) + b v_{n+k+1}$$

onde $b \neq 0$, se $c = 0$ e $b = 0$, se $c = \pm 1$. Portanto:

$$\|X_s\|^2 = \sum_{j=1}^k t_j^2 \langle e'_j(s), e'_j(s) \rangle + b^2$$

e como temos que $\langle e'_j(s), e'_j(s) \rangle$ é constante, segue que $\|X_s(s, q)\|^2$ não depende de s .

Consideremos $\gamma(u) = (s(u), q(u))$ curva divergente em $\mathbb{R} \times \overline{M}^n(c)$. Se $q(u)$ é uma curva divergente, então como $d\sigma^2 = \|X_s\|^2 ds^2 + d\theta^2$, temos:

$$\int_{\gamma} d\sigma \geq \int_q d\theta = \infty ,$$

pois $\overline{M}^n(c)$ é completa.

Se $q(u)$ não é curva divergente, então $q([a, \infty[)$ é conjunto limitado em $\overline{M}^n(c)$, ou, em outras palavras,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} q(u) = q \in \overline{M}^n(c) .$$

e isto implica que $\lim_{u \rightarrow \infty} X(0, q(u))$ é ponto regular do helicóide generalizado. Logo,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \|X_s(0, q(u))\|^2 = \|X_s(0, q)\|^2 > 0$$

Mas

$$\|X_s(s(u), q(u))\|^2 = \|X_s(0, q(u))\|^2 ,$$

pois $\|X_s\|^2$ não depende de s . Então, dado $a' > a$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\|X_s(s(u), q(u))\|^2 \geq \varepsilon_1$, para todo $u \geq a'$.

Além disso, a função $\|X_s\|^2$ atinge o mínimo no compacto $[a, a']$, ou seja, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que se $u \in [a, a']$, então $\|X_s(s(u), q(u))\|^2 \geq \varepsilon_2$.

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, temos $\|X_s(s(u), q(u))\| \geq \varepsilon$, para todo $u \in [a, \infty[$.

$$\text{Assim, } d\sigma^2 = \|X_s\|^2 ds^2 + d\theta^2 \geq \varepsilon ds^2 .$$

Uma vez que γ é divergente e $q([a, \infty[)$ é limitado, então $\lim_{u \rightarrow \infty} s(u) = \infty$ e segue que

$$\int_{\gamma} d\sigma \geq \int_{s(a)}^{\infty} \varepsilon ds = \infty .$$

Mostramos, dessa forma, que o comprimento de qualquer caminho divergente em $\mathbb{R} \times \bar{M}^n(c)$, munido da métrica $d\sigma$, é infinito e, portanto, $(\mathbb{R} \times \bar{M}^n(c), d\sigma)$ é completa. $\square$

Sabe-se que o helicóide do $\mathbb{R}^3$ tem uma reta como curva geradora. Veremos na próxima proposição, que isso é um fato geral para helicóides generalizados sem pontos singulares. Além disso, se um helicóide tem um ponto singular, podemos considerar esse ponto como curva geradora.

(4.29) Proposição: Seja $\bar{M}^N(c)$ uma forma espacial e seja $X: \mathbb{R} \times \bar{M}^n(c) \rightarrow \bar{M}^N(c)$, um helicóide regular em todo o domínio. Então, pelo menos uma das curvas geradoras de X , $\beta(s) = X(s, q)$ é uma geodésica de $\bar{M}^N(c)$.

Prova: 1º) $c = 0$: Seja $X: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow E^N$ helicóide generalizado regular. Pelo teorema (4.11) podemos escrever:

$$\begin{aligned} X(s, t_1, \dots, t_n) &= \tilde{A}(s) \left(\sum_{j=1}^n t_j e_j \right) \\ &= A(s) \left(\sum_{j=1}^n t_j e_j \right) + s b e_0 , \end{aligned}$$

onde $\{A(s), s \in \mathbb{R}\}$ é subgrupo a 1-parâmetro de transformações ortogonais do E^N , $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal especial do $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que, pondo $e_j(s) = A(s)e_j$, temos

$e_j''(s) = \lambda_j e_j(s)$, com $\lambda_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$, e $e_j(s) = e_j$, para $j = k+1, \dots, n$.

Além disso, a regularidade implica, de acordo com a proposição (4.19), $b \neq 0$. Então:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^n t_j A(s) e_j + s b e_0 = \sum_{j=1}^n t_j e_j(s) + s b e_0$$

Daí:

$$X_{ss}(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^k t_j e_j''(s) = \sum_{j=1}^k t_j \lambda_j e_j(s).$$

Uma curva $\beta(s) = A(s) \left(\sum_{j=1}^n \bar{t}_j e_j \right)$ é geodética de E^N se e só se $\beta''(s) = X_{ss}(s, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = 0$, para todo s .

Da expressão acima, como os λ_i são não nulos para $1 \leq i \leq k$, segue que $X_{ss} = 0$ se e só se $t_1 = \dots = t_k = 0$.

Portanto, as curvas $\beta(s) = X(s, 0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n)$ são geodésicas geradoras do helicóide.

2º) $c > 0$: Seja $X: \mathbb{R} \times S^n \rightarrow S^N$ helicóide generalizado regular. Então X é a restrição, a $\mathbb{R} \times S^n$, de um helicóide generalizado do E^{N+1} , ou seja:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = A(s) \sum_{j=1}^n t_j e_j,$$

onde $A(s)$ é transformação ortogonal para todo s , $\sum_{j=1}^n t_j^2 = 1$,

$\{e_1, \dots, e_n\}$ é base ortonormal do $\mathbb{E}^n$ tal que, sendo $e_j(s) = A(s)e_j$, temos $e_j''(s) = \lambda_j e_j(s)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Como X é regular, segue da proposição (4.27) que $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Então

$$X_{ss}(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^n t_j \lambda_j e_j(s).$$

Uma curva $\beta(s) = A(s) \sum_{j=1}^n \bar{t}_j e_j$ é geodésica de S^N se e só se $\frac{\bar{D}\beta'}{ds} = 0$, isto é, se e só se $\frac{\bar{D}X_s}{ds}(s, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = 0$.

$$\text{Temos } \frac{\bar{D}X_s}{ds} = X_{ss} - \langle X_{ss}, X \rangle X.$$

Logo, $\frac{\bar{D}X_s}{ds} = 0$ se e só se $X_{ss} = \langle X_{ss}, X \rangle X$, o que é equivalente ao sistema:

$$\{t_j \lambda_j - t_j \sum_{i=1}^n t_i^2 \lambda_i = 0, \quad 1 \leq j \leq n.\}$$

Como $\sum_{i=1}^n t_i^2 = 1$, vemos que os pontos

$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ são soluções do sistema acima. Portanto, as curvas $\beta(s) = A(s)e_i$ são geodésicas do S^N .

3º) $c < 0$: Seja $X: \mathbb{R} \times H^n \rightarrow H^N$ helicóide generalizado regular. Pela proposição (4.26), X é do tipo $(n, k, -1)$, isto é:

$$X(s, t_1, \dots, t_{n+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} A(s) t_j e_j + \sum_{j=k+2}^{n+1} t_j e_j,$$

onde $-t_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} t_i^2 = -1$, $A(s) \in O_1(n+1)$, $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ é base ortonormal do L^{n+1} com $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$ e $e_j(s) = A(s)e_j$, $j = 1, \dots, n+1$, são tais que $e_j''(s) = \lambda_j e_j(s)$, $j = 1, \dots, k+1$, e $e_j(s) = e_j$, $j > k$. Daí:

$$X_{ss}(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^k t_j \lambda_j e_j(s),$$

com $\lambda_j \neq 0$, para $j = 1, \dots, k+1$.

Uma órbita $\beta(s) = A(s) \left(\sum_{j=1}^n \bar{t}_j e_j \right)$ é uma geodésica do H^N se e só se $\frac{\bar{D}\beta'}{ds} = \frac{\bar{D}X_s}{ds} = 0$.

Como $\frac{\bar{D}X_s}{ds} = X_{ss} + \langle X_{ss}, X \rangle X$, segue que $\frac{\bar{D}X_s}{ds} = 0$ é equivalente ao sistema linear:

$$\{t_i \lambda_i + t_i (-t_1^2 + \sum_{j=2}^k t_j^2 \lambda_j) = 0, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Além disso, devemos ter $-t_1^2 + \sum_{j=2}^n t_j^2 = -1$ e, então, como $t_1 = 1$ e $t_i = 0$, $2 \leq i \leq n$, é uma solução, a órbita $\beta(s) = A(s)e_1$ é uma geodésica do H^N . $\square$

CAPÍTULO 5

SUBVARIEDADES REGRADAS MÍNIMAS

Mostraremos, neste capítulo, que uma subvariedade regrada mínima de uma forma espacial pode ser localmente parametrizada por um helicóide generalizado. Temos, então, a partir do teorema (4.11), uma classificação completa de tais subvariedades.

(5.1) Teorema: Seja M^{n+1} uma subvariedade regrada mínima de $\bar{M}^N(c)$, $n+2 \leq N$. Então, existem um helicóide generalizado $X: \mathbb{R} \times \bar{M}^n(c) \rightarrow \bar{M}^N(c)$ e uma vizinhança $U \subset \mathbb{R} \times \bar{M}^n(c)$, de cada ponto, tal que X restrita a U parametriza M .

Como vimos no capítulo 3, M pode ser localmente parametrizada por

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha(s)} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s),$$

onde $\alpha: I \rightarrow \bar{M}$ é uma curva integral do campo de direções normais às folhas, parametrizada pelo comprimento de arco; as bases ortonormais $\{e_1(s), \dots, e_n(s)\}$ de $T_{\alpha(s)} S_{\alpha(s)}$ são escolhidas de modo que $\langle \frac{\overline{D}e_i}{ds}(s), e_j(s) \rangle = 0$, para todos $1 \leq i, j \leq n$ e para todo s .

Usaremos dois lemas

(5.2) Lema: Se $X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\alpha}(s) \sum_{i=1}^n t_i e_i(s)$ descreve uma subvariedade regradada mínima de $\bar{M}^N(c)$, $n+2 \leq N$, com α e $\{e_i(s)\}$ nas condições acima, então:

$$(a) \quad \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \alpha' \wedge e_j'' = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$(b) \quad \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_i' \wedge e_j'' + \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_j' \wedge e_i'' = 0, \\ 1 \leq i, j \leq n.$$

$$(b') \quad \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_j' \wedge e_j'' = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Prova. Considerando, em primeiro lugar, $c \neq 0$, de (3.14) segue que X é mínima se e só se:

$$(5.3) \quad \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_s \wedge X_{ss} = 0$$

Podemos escrever:

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = f(r) \alpha(s) + \frac{g(r)}{r} \sum_{i=1}^n t_i e_i(s),$$

onde $r = \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{1/2}$ e f e g são dadas em (3.7).

Para $t_1 = \dots = t_n = 0$, temos $X(s, 0, \dots, 0) = \alpha(s)$

e, portanto,

$$X_s(s, 0, \dots, 0) = \alpha'(s)$$

e

$$X_{ss}(s, 0, \dots, 0) = \frac{\bar{D}\alpha'}{ds}(s).$$

Substituindo em (5.3), obtemos

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \alpha' \wedge \frac{\overline{D}\alpha'}{ds} = 0$$

e, então:

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \alpha' \wedge \alpha'' = 0$$

Isso implica que $\alpha''(s)$ é combinação linear de $\alpha(s)$, dos $e_i(s)$ e de $\alpha'(s)$, mas como $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, concluímos que $\alpha''(s)$ é combinação linear de $\alpha(s)$ e dos $e_i(s)$. Note também que $\frac{\overline{D}\alpha'}{ds} \in T_\alpha S_\alpha$.

Daí, como

$$X_{ss}(s, t_1, \dots, t_n) = f(r) \frac{\overline{D}\alpha'}{ds}(s) + \frac{g(r)}{r} \sum_{j=1}^n t_j \frac{\overline{D}e_j'}{ds}(s),$$

de (5.3) segue que:

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_s(s, t_1, \dots, t_n) \wedge \sum_{j=1}^n t_j \frac{\overline{D}e_j'}{ds}(s) = 0,$$

para $(t_1, \dots, t_n) \neq \vec{0}$, e, então:

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_s(s, t_1, \dots, t_n) \wedge \sum_{j=1}^n t_j e_j''(s) = 0.$$

Ou seja:

$$(5.4) \quad f(r) \sum_{j=1}^n t_j \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \alpha' \wedge e_j'' + \\ + \frac{g(r)}{r} \sum_{i,j=1}^n t_i t_j \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_i' \wedge e_j'' = 0,$$

para todo $(s, t_1, \dots, t_n)$ tal que $(t_1, \dots, t_n) \neq \vec{0}$.

$$\text{Pondo } V_i(s) = \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \alpha' \wedge e_i'' \text{ e}$$

$$U_{ij}(s) = \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_i' \wedge e_j'' ,$$

$$\text{temos: } f(r) \sum_{j=1}^n t_j V_j(s) + \frac{g(r)}{r} \sum_{i,j=1}^n t_i t_j U_{ij}(s) = 0$$

Segue que:

$$\langle f(r) \sum_{j=1}^n t_j V_j + \frac{g(r)}{r} \sum_{i,j=1}^n t_i t_j U_{ij} , f(r) \sum_{k=1}^n t_k V_k - \frac{g(r)}{r} \sum_{k,m=1}^n t_k t_m U_{km} \rangle = 0 ,$$

onde $\langle , \rangle$ é o produto escalar no espaço vetorial $\Lambda_p^{n+3} E^{N+1}$ ou $\Lambda_p^{n+3} L^{N+1}$, induzido pela métrica de E^{N+1} ou L^{N+1} . Daí:

$$f^2(r) \sum_{j,k=1}^n t_j t_k \langle V_j, V_k \rangle - \frac{g^2(r)}{r^2} \sum_{i,j,k,m=1}^n t_i t_j t_k t_m \langle U_{ij}, U_{km} \rangle = 0$$

Em particular, tomando $t_i = t \neq 0$ e $t_j = 0$, para $j \neq i$, temos:

$$f^2(|t|) t^2 \|V_i\|^2 - \frac{g^2(|t|)}{t^2} t^4 \|U_{ii}\|^2 = 0, \quad t \neq 0$$

$$\implies f^2(|t|) \|V_i\|^2 - g^2(|t|) \|U_{ii}\|^2 = 0, \quad t \neq 0 .$$

Se $c > 0$, isso significa que:

$$\|V_i\|^2 \cos^2 \sqrt{c} |t| - \|U_{ii}\|^2 \frac{\sin^2 \sqrt{c} |t|}{c} = 0, \quad t \neq 0$$

E se $\|V_i\| \neq 0$, então $\cotg^2 \sqrt{c}|t| = \frac{\|U_{ii}\|^2}{c\|V_i\|^2}$, para todo $t \neq 0$, o que é absurdo; logo $V_i = \vec{0}$.

Se $c < 0$, temos da mesma maneira: se $\|V_i\| \neq 0$, então $\cotgh^2 \sqrt{-c}|t| = -\frac{\|U_{ii}\|^2}{c\|V_i\|^2}$, para todo $t \neq 0$; novamente, temos um absurdo e, portanto $V_i = \vec{0}$.

Isto prova a parte (a).

Substituindo $V_i = \vec{0}$, para todo i , em (5.4), segue que:

$$\sum_{i,j=1}^n t_i t_j \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_i \wedge e''_j = 0,$$

para todo $(s, t_1, \dots, t_n)$ tal que $(t_1, \dots, t_n) \neq \vec{0}$.

Derivando em relação a t_k , obtemos:

$$\sum_{i=1}^n t_i \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_i \wedge e''_k + \sum_{j=1}^n t_j \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_k \wedge e''_j = 0.$$

Daí:

$$\sum_{j=1}^n t_j (\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_j \wedge e''_k + \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_k \wedge e''_j) = 0,$$

para $(s, t_1, \dots, t_n)$ tal que $(t_1, \dots, t_n) \neq \vec{0}$.

Em particular, fazendo $t_\ell = 1$ e $t_j = 0$, para $j \neq \ell$, segue que:

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_\ell \wedge e''_k + \alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_k \wedge e''_\ell = 0 ,$$

$$1 \leq \ell, k \leq n.$$

Com isso, provamos (b) e, fazendo $\ell=k$, segue (b').

Para $c = 0$, (3.15) implica que X é mínima se e somente se:

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge X_s \wedge X_{ss} = 0$$

Seguindo o mesmo raciocínio da demonstração para o caso $c \neq 0$, obtemos:

$$\alpha''(s) \in [e_1(s), \dots, e_n(s)] \quad e:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge \alpha' \wedge e''_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n \\ e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_i \wedge e''_j + e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_j \wedge e''_i = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \\ e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e'_j \wedge e''_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n \end{array} \right.$$

Então, ficam satisfeitas trivialmente as igualdades (a), (b) e (b'), observando-se que neste caso, temos $\langle \alpha, \alpha'' \rangle = 0$ e $\langle \alpha, e''_j \rangle = 0$, para todo j . $\square$

(5.5) Lema. Nas condições do lema (5.2), se a subvariedade descrita é tal que $\langle e''_i(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, então:

(a) a curva $\alpha(s)$, tem curvaturas constantes (e, portanto, sendo $\{E_1, \dots, E_m\}$ o referencial de Frenet de α , o subespaço

$$R(\alpha(s)) = [\alpha(s), E_1(s), \dots, E_m(s)]$$

não depende de s).

(b) as curvas $\beta(s) = e_j(s)$, $j = 1, \dots, n$, são curvas com curvaturas constantes.

Prova: Pela parte (a) do lema (5.2), temos

$$e_j''(s) \in [\alpha(s), e_1(s), \dots, e_n(s), \alpha'(s)] ,$$

para todo j , e, então, da hipótese, segue que:

$$e_j''(s) \in [\alpha(s), e_1(s), \dots, e_n(s)] ,$$

para todo j .

Observemos que se $c \neq 0$, $\langle \alpha, e_i' \rangle = 0$, para todo i , pois $\langle \alpha, e_i \rangle = 0$ e $\langle \alpha', e_i \rangle = 0$; logo $e_i' \in T_{\alpha} \bar{M}$ e

$$\frac{\bar{D}e_i}{ds} \in [e_1, \dots, e_n] = T_{\alpha} S_{\alpha} .$$

Além disso, da demonstração do lema anterior,

$$\frac{\bar{D}\alpha'}{ds} \in [e_1, \dots, e_n] = T_{\alpha} S_{\alpha} .$$

No caso $c = 0$, temos, conforme observamos no final da demonstração do lema (5.2), $\alpha''(s) \in [e_1(s), \dots, e_n(s)]$ e $e_j''(s) \in [e_i'(s), \dots, e_n(s), \alpha'(s)]$.

Temos, portanto, para todos os casos:

$$\frac{\overline{D}\alpha'}{ds} \in \frac{\overline{D}e_j'}{ds} \in [e_1, \dots, e_n] = T_\alpha S_\alpha.$$

Note que $\alpha'', e_j'' \in [\alpha, e_1, \dots, e_n]$ implica que

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle e_i'(s), e_j'(s) \rangle = 0 & e \\ \frac{d}{ds} \langle \alpha'(s), e_j'(s) \rangle = 0 \end{cases}$$

Segue que:

(5.6) as funções $\langle e_i'(s), e_j'(s) \rangle$ e $\langle \alpha'(s), e_j'(s) \rangle$ são constantes.

Seja $\{E_1, \dots, E_m\}$ o referencial de Frenet associado a α . Então, $E_1(s) = \alpha'(s)$ e temos as fórmulas de Frenet:

$$\frac{\overline{D}}{ds} E_j = -k_{j-1} E_{j-1} + k_j E_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

onde $k_1, \dots, k_{m-1}$ são as curvaturas de α , não nulas em todos os pontos, e $k_0 = k_m = 0$.

Então, $\frac{\overline{D}\alpha'}{ds} = k_1 E_2$ e, por outro lado,

$$\frac{\overline{D}\alpha'}{ds} = \sum_{j=1}^n a_j(s) e_j(s),$$

onde

$$a_j(s) = \langle \alpha''(s), e_j(s) \rangle = - \langle \alpha'(s), e_j'(s) \rangle ;$$

por (5.6), as funções $a_j(s)$ são constantes e serão denotadas apenas por a_j . Logo:

$$k_1(s)E_2(s) = \sum_{j=1}^n a_j e_j(s)$$

e

$$k_1(s) = \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2} = k_1, \text{ constante.}$$

Daí:

$$E_2(s) = \frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^n a_j e_j(s) \in T_\alpha S_\alpha.$$

Derivando E_2 , temos:

$$-k_1 E_1(s) + k_2(s) E_3(s) = \frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^n a_j e_j'(s)$$

e disto segue que k_2 é constante e

$$E_3 = \frac{k_1}{k_2} \alpha' + \frac{1}{k_1 k_2} \sum_{j=1}^n a_j e_j'(s),$$

portanto $E_3 \in [\alpha', e_1', \dots, e_n']$.

Seja ℓ um inteiro entre 1 e m e suponhamos que temos:

$$\begin{cases} E_{2j} = \sum_{i=1}^n a_i^j e_i(s), & 1 \leq j \leq \ell \\ E_{2j-1} = \sum_{i=1}^n b_i^j e_i'(s) + c_j \alpha'(s), & 1 \leq j \leq \ell \end{cases}$$

onde $a_i^j, b_i^j, c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq \ell$, e, ainda, que as curvaturas $k_1, \dots, k_{2\ell-1}$ são constantes. Então, temos:

$$\sum_{i=1}^n a_i^\ell e_i'(s) = \frac{\bar{D}}{ds} E_{2\ell} = -k_{2\ell-1} E_{2\ell-1} + k_{2\ell} E_{2\ell+1}$$

e daí:

$$\begin{aligned} k_{2\ell}(s) E_{2\ell+1}(s) &= \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^\ell e_i'(s) + k_{2\ell-1} \left(\sum_{i=1}^n b_i^\ell e_i'(s) + c_\ell \alpha'(s) \right) \end{aligned}$$

Das hipóteses, segue que $k_{2\ell}$ é constante e que existem $b_i^{\ell+1}, c_{\ell+1} \in \mathbb{R}$, tais que:

$$E_{2\ell+1} = \sum_{i=1}^n b_i^{\ell+1} e_i'(s) + c_{\ell+1} \alpha'(s).$$

Derivando novamente, obtemos, da mesma forma:

$$E_{2\ell+2} = \sum_{i=1}^n a_i^{\ell+1} e_i(s), \text{ com } a_i^{\ell+1} \in \mathbb{R},$$

para $i = 1, \dots, n$, e $k_{2\ell+1}$ constante.

Assim, demonstramos que α tem curvaturas constantes e que seu referencial de Frenet é tal que existem $a_i^j, b_i^j, c_j \in \mathbb{R}$, tais que:

$$(5.7) \quad E_{2j} = \sum_{i=1}^n a_i^j e_i(s) \quad \text{e} \quad E_{2j-1} = \sum_{i=1}^n b_i^j e_i'(s) + c_j \alpha'(s)$$

Seja $R(\alpha)$ o subespaço do espaço ambiente (E^{N+1} ou L^{N+1}) gerado por $\alpha(s), E_1(s), \dots, E_m(s)$. Pelos teoremas (2.13) e (2.17), $R(\alpha)$ é constante, isto é, não depende de s .

Levando em conta que $\langle e_i^!(s), e_j^!(s) \rangle$ é função constante para todos i e j e repetindo os argumentos acima para cada curva $e_j(s)$, concluímos que cada uma delas descreve, no espaço ambiente, uma curva com curvaturas constantes. Isto prova (b). $\square$

Prova do teorema: Da parte (a) do lema (5.2), segue que $e_j'' \in [\alpha, e_1, \dots, e_n, \alpha']$ e, de (b'), que $e_j'' \in [\alpha, e_1, \dots, e_n, e_j^!]$.

Duas possibilidades podem, então, ocorrer:

$\langle e_i'', \alpha' \rangle \neq 0$, para algum i , ou $\langle e_j'', \alpha' \rangle = 0$, para todo j .

1º) Suponhamos que exista um índice i tal que $\langle e_i'', \alpha' \rangle \neq 0$. Então, temos:

$$(5.8) \quad e_i'' = \langle e_i'', \alpha \rangle \alpha + \sum_{j=1}^n \langle e_i'', e_j \rangle e_j + \langle e_i'', \alpha' \rangle \alpha'$$

e, por (b'):

$$e_i'' = \langle e_i'', \alpha \rangle \alpha + \sum_{j=1}^n \langle e_i'', e_j \rangle e_j + \langle e_i'', e_i^! \rangle e_i^!$$

Comparando as duas expressões, segue que

$\langle e_i'', e_i^! \rangle \neq 0$ e, além disso:

$$e_i' = \frac{\langle e_i'', \alpha' \rangle}{\langle e_i'', e_i' \rangle} \alpha' .$$

Ou seja, e_i' é paralelo a α' . Então, novamente por (a):

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_i' \wedge e_j'' = 0, \text{ para todo } j,$$

e por (b):

$$\alpha \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_j' \wedge e_i'' = 0, \text{ para todo } j$$

Portanto:

$$e_i'' = \langle e_i'', \alpha \rangle \alpha + \sum_{k=1}^n \langle e_i'', e_k \rangle e_k + \langle e_i'', e_j' \rangle e_j'$$

para j arbitrário. Comparando com (5.8), vem que e_j' é paralelo a α' , para todo j .

Consideremos, então, a equação matricial:

$$M(s) \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ e_1(s) \\ \vdots \\ e_n(s) \\ \alpha'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ e_1(0) \\ \vdots \\ e_n(0) \\ \alpha'(0) \end{pmatrix}$$

Essa equação tem solução se e somente se tem solu
ção a equação:

$$M'(s) \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ e_1(s) \\ \vdots \\ e_n(s) \\ \alpha'(s) \end{pmatrix} + M(s) \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ e_1'(s) \\ \vdots \\ e_n'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $e_i' = \lambda_i \alpha'$ e $\alpha'' \in [\alpha, e_1, \dots, e_n]$, existe matriz $B(s)$, diferenciável, tal que:

$$\begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ e_1'(s) \\ \vdots \\ e_n'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix} = B(s) \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ e_1(s) \\ \vdots \\ e_n(s) \\ \alpha'(s) \end{pmatrix}$$

Então, a equação acima tem solução se e só se $M'(s) + M(s)B(s) = 0$. Temos um sistema linear de equações diferenciais com condição inicial $M(0) = \text{id}$. Portanto, existe uma única solução diferenciável $M(s)$, não singular numa vizinhança de $s = 0$.

Repetindo o processo para uma vizinhança de cada ponto, concluímos que $[\alpha(s), e_1(s), \dots, e_n(s), \alpha'(s)]$ é um hiperplano fixado, de dimensão $n+2$, do espaço ambiente, isto é, é um hiperplano que não depende de s .

Das expressões para X_s e X_{t_j} dadas em (3.8), segue que o subespaço gerado por $X(s, t_1, \dots, t_n)$, $X_s(s, t_1, \dots, t_n)$, $X_{t_1}(s, t_1, \dots, t_n), \dots, X_{t_n}(s, t_1, \dots, t_n)$ é o próprio

$[\alpha(s), e_1(s), \dots, e_n(s), \alpha'(s)]$ e, portanto, é um subespaço fixado no espaço ambiente (E^{N+1} ou L^{N+1}). Por isso, $X(\mathbb{R} \times \bar{M}^n(c))$ está contido na intersecção de um $(n+2)$ -plano de E^{N+1} (L^{N+1}) com $\bar{M}$ e, portanto, X descreve uma subvariedade totalmente geodésica de $\bar{M}(c)$. Então, por (4.9), X é um helicóide generalizado de $\bar{M}(c)$.

2º) Se $\langle e_i''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, temos $e_i''(s) \in [\alpha(s), e_1(s), \dots, e_n(s)]$, $1 \leq i \leq n$.

Nesse caso, pelo lema (5.5), a curva α tem curvaturas constantes, as curvas $e_j(s)$ têm curvaturas constantes e sendo $R(\alpha(s)) = [\alpha(s), E_1(s), \dots, E_m(s)]$, onde $\{E_1, \dots, E_m\}$ é o referencial de Frenet de α , $R(\alpha(s))$ não depende de s .

Além disso, por (5.7), os $E_{2j} \in T_{\alpha} S_{\alpha}$. Então, podemos escolher para $R(\alpha) \cap T_{\alpha} S_{\alpha}$ a base $\{E_{2i}, 1 \leq i \leq [\frac{m}{2}]\}$.

Como $R(\alpha(s))$ é constante, seu complemento ortogonal $\bar{R}(\alpha(s))$ no espaço ambiente, E^{N+1} ou L^{N+1} , também é constante.

Vamos escolher uma base especial para cada $\bar{R}(\alpha(s)) \cap T_{\alpha(s)} S_{\alpha(s)}$.

$$\text{Seja } f_j(0) = \sum_{k=1}^n r_{jk} e_k(0), \quad [\frac{m}{2}] < j \leq n,$$

onde os r_{jk} são reais tais que $\langle f_j(0), E_{2i}(0) \rangle = 0$ e $\{f_i(0), [m/2] < i \leq n\}$ é base ortonormal de $\bar{R}(\alpha) \cap T_{\alpha(0)} S_{\alpha(0)}$.

Por (5.7), a primeira condição é equivalente a termos:

$$\sum_{k=1}^n r_{jk} a_k^i = 0 .$$

Definimos então:

$$f_j(s) = \sum_{k=1}^n r_{jk} e_k(s) , \quad [\frac{m}{2}] < j \leq n .$$

Segue que:

$$i) \quad \langle f_j(s), E_{2i}(s) \rangle = \sum_{k=1}^n r_{jk} a_k^i = 0$$

$$ii) \quad \{f_j(s), [\frac{m}{2}] < j \leq n\} \text{ é ortonormal}$$

$$iii) \quad \langle \frac{\overline{D}f_j}{ds}(s), f_i(s) \rangle = \sum_{k,\ell=1}^n r_{jk} r_{i\ell} \langle \frac{\overline{D}e_k}{ds}, e_\ell(s) \rangle = 0,$$

pois $\{e_1, \dots, e_n\}$ satisfaz o lema (3.3).

Portanto, obtivemos uma base ortonormal

$$\{f_{[\frac{m}{2}]+1}(s), \dots, f_n(s)\} \text{ de } T_{\alpha(s)} S_{\alpha}(s) \cap \overline{R}(\alpha),$$

satisfazendo o lema (3.3). Além disso, $\frac{\overline{D}f'_i}{ds} \in T_{\alpha} S_{\alpha}$, para todo $[m/2] < i \leq n$, pois $\frac{\overline{D}f'_i}{ds} = \sum_{k=1}^n r_{ik} \frac{\overline{D}e'_k}{ds}$ e já vimos que $\frac{\overline{D}e'_k}{ds} \in T_{\alpha} S_{\alpha}$.

Temos também $\langle f'_i(s), f'_j(s) \rangle$ constante e, então, segue da demonstração do lema (5.5) que cada $f_j(s)$ descreve, no espaço ambiente, uma curva com curvaturas constantes.

Observemos que como $f_i \in T_\alpha S_\alpha$ e $\frac{\overline{D}E_{2j}}{ds} \in (T_\alpha S_\alpha)^\perp$,

temos:

$$\langle f_i(s), \frac{\overline{D}E_{2j}}{ds} \rangle = 0$$

e, derivando,

$$\begin{aligned} \langle f'_i(s), \frac{\overline{D}E_{2j}}{ds} \rangle &= - \langle f_i(s), \frac{\overline{D}}{ds} \left(\frac{\overline{D}E_{2j}}{ds} \right) \rangle \\ &= - \langle f_i(s), \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\overline{D}}{ds} E_{2k-1} \rangle \\ &= - \langle f_i(s), \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{jk} \sum_{\ell=1}^n b_{k\ell} E_{2\ell}(s) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\langle f'_i(s), E_{2j}(s) \rangle = 0$, segue que

$$\langle \frac{\overline{D}f'_i}{ds}, E_{2j} \rangle = - \langle f'_i, \frac{\overline{D}E_{2j}}{ds} \rangle = 0$$

e como $\frac{\overline{D}f'_i}{ds} \in T_\alpha S_\alpha$, obtemos

$$\frac{\overline{D}f'_i}{ds} = \sum_{[\frac{m}{2}] < j \leq n} c_{ij}(s) f_j(s)$$

onde

$$c_{ij}(s) = \langle \frac{\overline{D}f'_i}{ds}, f_j \rangle = \langle f''_i, f_j \rangle = - \langle f'_i, f'_j \rangle.$$

Portanto, $c_{ij}(s) = c_{ij} \in \mathbb{R}$ e a matriz (c_{ij}) é simétrica.

Diagonalizando a matriz (c_{ij}) , obtemos uma base para $\overline{R}(\alpha) \cap T_{\alpha} S_{\alpha}$, que ainda denotaremos por $\{f_i, i = [\frac{m}{2}] + 1, \dots, n\}$ tal que $\frac{\overline{D}f_i}{ds} = \lambda_i f_i$.

Como a mudança de base é feita por uma matriz constante, todas as propriedades dos $f_j(s)$ são conservadas. Nosso objetivo é verificar que cada curva $f_j(s)$ está contida em um plano V_j do espaço ambiente.

$$\text{De } \frac{\overline{D}f_i}{ds} = \lambda_i f_i, \text{ segue } \lambda_i = - \frac{\langle f_i', f_i' \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}$$

1º) Se o espaço ambiente é o E^{N+1} (casos $c = 0$ e $c > 0$), temos $\lambda_j < 0$, para todo j . Para i fixado, denotemos por $\{E_1, \dots, E_p\}$ o referencial de Frenet da curva $f_i(s)$ e por $k_1, \dots, k_{p-1}$ suas curvaturas. Vamos mostrar que $p = 2$, isto é, $k_2 \equiv 0$.

$$\text{Temos } E_1 = \frac{f_i'}{\|f_i'\|} \text{ e, então:}$$

$$k_1 E_2 = \frac{1}{\|f_i'\|} \frac{\overline{D}f_i'}{ds}.$$

Daí:

$$E_2 = \frac{1}{\left\| \frac{\overline{D}f_i'}{ds} \right\|} \frac{\overline{D}f_i'}{ds} = \frac{\lambda_i f_i}{\|\lambda_i f_i\|} = -f_i,$$

pois $\lambda_i < 0$, e $k_1 = \sqrt{-\lambda_i}$.

Também:

$$\frac{\overline{DE}_2}{ds} = -k_1 E_1 + k_2 E_3$$

$$\implies k_2 = \left\| -\frac{\overline{D}f_i}{ds} + \sqrt{-\lambda_i} \frac{f'_i}{\sqrt{-\lambda_i}} \right\| = 0 ,$$

$$\text{Pois } \langle f'_i, \alpha \rangle = - \langle f_i, \alpha' \rangle = 0 \implies \frac{\overline{D}f_i}{ds} = f'_i .$$

Portanto, $f_i(s)$ é curva com curvaturas constantes $k_1, k_2 \equiv 0$ e, pelo teorema (2.13) f_i está contida no plano fixado $V_i = [f_i(0), f'_i(0)]$.

Além disso, de $\langle f_i, f_i \rangle = 1$, segue:

$$f_i(s) = (\cos \sqrt{-\lambda_i} s) f_i(0) + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} (\sin \sqrt{-\lambda_i} s) f'_i(0)$$

2º) Se o espaço ambiente é o L^{N+1} , então temos duas possibilidades: $\langle f_i, f_i \rangle = 1$ ou $\langle f_i, f_i \rangle = -1$.

a) Se $\langle f_i, f_i \rangle = -1$, então $\langle f'_i, f'_i \rangle \geq 0$, pelo lema (1.24), e, portanto, $\lambda_i \geq 0$. Se $\lambda_i = 0$ temos $f_i(s) = f_i$. Supondo $\lambda_i > 0$ encontramos $E_2 = -f_i$, $k_1 = \sqrt{\lambda_i}$ e

$$k_2 = \left\| \frac{\overline{DE}_2}{ds} + k_1 E_1 \right\| = \left\| -\frac{\overline{D}f_i}{ds} + \sqrt{\lambda_i} \frac{f'_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right\| = 0 .$$

Então, $f_i(s)$ é uma curva contida no plano de Lorentz $V_i = [f_i(0), f'_i(0)]$ e é dada por:

$$f_i(s) = (\cosh \sqrt{\lambda_i} s) f_i(0) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (\sinh \sqrt{\lambda_i} s) f'_i(0) .$$

b) Se $\langle f_i, f_i \rangle = 1$, observamos, em primeiro lugar que sendo M subvariedade regradada do H^N devemos ter $T_\alpha S_\alpha \cap H^N \neq \emptyset$ e isso só ocorre se tivermos um dos $f_j, j = [m/2]+1, \dots, n$, ve-

tor "timelike". Logo, nenhum dos f'_j pode ser "timelike", pois os f'_j são ortogonais aos f_i . Então, se $\langle f'_i, f_i \rangle = 1$, temos $\langle f'_i, f'_i \rangle \geq 0$. Se $\langle f'_i, f'_i \rangle = 0$, então $f_i(s) = f_i$. Se $\langle f'_i, f'_i \rangle > 0$, temos $\lambda_i < 0$ e segue, como para o E^{N+1} , que f_i está contida no plano $[f_i(0), f'_i(0)]$ e é dada por:

$$f_i(s) = \cos\sqrt{-\lambda_i} s f_i(0) + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} (\sin\sqrt{-\lambda_i} s) f'_i(0)$$

Portanto, cada $f_j(s)$ descreve, pela proposição (2.20), uma órbita de um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos $\{A_j(s), s \in \mathbb{R}\}$ do espaço ambiente, que mantém fixado o plano V_j , $[m/2] < j \leq n$.

Os planos V_j são mutuamente ortogonais, pois, para $i \neq j$, temos:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle f_i, f'_j \rangle = \langle f'_i, f_j \rangle = 0$$

e

$$\langle f'_i, f'_j \rangle = -\langle f_i, f''_j \rangle = -\langle f_i, \lambda_j f_j \rangle = 0.$$

Além disso, como α é curva com curvaturas constantes, sendo $\{E_1, \dots, E_m\}$ seu referencial de Frenet, temos, novamente pelas proposições (2.20) ou (2.22), que existe um subgrupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos $\{\tilde{A}(s), s \in \mathbb{R}\}$ de $\bar{M}(c)$ tal que $\tilde{A}(s)\alpha(t) = \alpha(s+t)$ e $d\tilde{A}_s(E_j(t)) = E_j(s+t)$, $1 \leq j \leq m$.

$d\tilde{A}_s$ mantém o subespaço $V = [E_1, \dots, E_m]$ invariante e temos V ortogonal a V_j para todo j , pois:

$$\begin{cases} \langle f_i, E_{2j} \rangle = \langle f'_i, E_{2j} \rangle = 0 \\ \langle f_i, E_{2j-1} \rangle = 0, \text{ pois } f_i \in T_\alpha S_\alpha \text{ e } E_{2j-1} \in (T_\alpha S_\alpha)^\perp \text{ e} \\ \langle f'_i, E_{2j-1} \rangle = -\langle f_i, \frac{\bar{D}}{ds} E_{2j-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

Reordenando a base $\{f_i\}$, se necessário, seja k o inteiro entre $[m/2]+1$ e n tal que:

$$\langle f'_j, f'_j \rangle \neq 0, \quad [m/2] < j \leq k$$

e

$$\langle f'_j, f'_j \rangle = 0, \quad k+1 \leq j \leq n.$$

Tomando $A(s) = d\tilde{A}_s \circ A_{[m/2]+1}(s) \circ \dots \circ A_k(s)$, obtemos a decomposição em (4.13).

Concluindo, temos:

$$T_\alpha S_\alpha = [E_2, \dots, E_{2_{[m/2]}}, f_{[m/2]+1}, \dots, f_n]$$

e, então:

$$\begin{aligned} X(s, t_1, \dots, t_n) &= \exp_\alpha(s) \left(\sum_{i=1}^{[m/2]} t_i E_{2i}(s) + \sum_{j=[m/2]+1}^n t_j f_j(s) \right) \\ &= A(s) X(0, t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Pondo $S = \{X(0, t_1, \dots, t_n) : t_i \in \mathbb{R}\}$, temos, então, $X(s, t_1, \dots, t_n) = A(s)p(t_1, \dots, t_n)$, $s \in \mathbb{R}$, $p(t_1, \dots, t_n) \in S$. Logo, M é um helicóide generalizado de $\overline{M}^N(c)$. $\square$

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.M. BARBOSA e M. do Carmo, Helicoids, Catenoids and minimal hypersurfaces of $\mathbb{R}^n$ invariant by an ℓ -parameter group of motions. *An. Acad. Brasil Ciênc.*, 53: 403-408, 1981.

- [2] J.M. BARBOSA, M. DAJCZER e L.P. JORGE, Minimal ruled submanifolds in spaces of constant curvature. *Indiana University Mathematical Journal*, 33 (4): 531-547, 1984.

- [3] J.M. BARBOSA e J.A. DELGADO, Ruled submanifolds of space forms with mean curvature of nonzero length. *Am. Jour. Math.* 106 (4): 763-780, 1984.

- [4] D.E. BLAIR e J.R. VANSTONE, A generalization of the helicoid in *Minimal submanifolds and Geodesics*, Kaigai Publications, Tokio, 13-16, 1978.

- [5] M. do CARMO, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Aplicada, 1979.

- [6] E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villar, Paris, 1951.

- [7] H.B. LAWSON, JR, Complete Minimal surfaces in S^3 . *Ann. of Math.* 92: 335-374, 1970

- [8] Ju.G. LUMISTE, Die n -dimensionalen Minimalflächen mit einer $(n-1)$ -dimensionalen asymptotischen Richtung in jedem Punkte (Russian, Estonian & German summaries), *Tartu Riikl. Üh. Toimetised*, 62: 117-141, 1958.
- [9] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry: with application to relativity*. New York, Academic Press, 1983.
- [10] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Boston, Publish or Perish, 1970-75.
- [11] C. THAS, Minimal Monosystems, *Yokohama Math. J.*, 26: 157-167, 1978.