O TEOREMA DE FROBENIUS
PARA
ÁLGEBRAS NÃO-ASSOCIATIVAS

HENRIQUE GUZZO JUNIOR

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ÁREA: ÁLGEBRA

ORIENTADOR: PROF. DR. ROBERTO CELSO FABRÍCIO COSTA

SÃO PAULO, 1985

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa, por tudo que tem feito pela minha pessoa, em todos os sentidos. Foi ele quem me orientou no programa de mestrado e quem sugeriu o tema desta dissertação, devido a isto e a sua salutar paciência, foi possível a realização do presente trabalho.

Ao Prof. Dr. Artibano Micali, pelas sugestões apresentadas, o que foi de grande valia na elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Milton Damato, pela orientação e apoio recebido, em todos esses anos, em que temos tido o privilégio de sua companhia. Nele sempre encontramos não só o grande professor, bem como, o amigo de todas as horas.

Aos professores Jair Minoru Abe e Antonio Elias Fabris, não só pela grande amizade, como também pelo apoio e incentivo nos momentos mais difíceis.

A Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos, pelo espontâneo e constante incentivo.

A Profa. Dra. Mineko Yamashita, pela primorosa colaboração.

Ao CNPq que me concedeu auxílio financeiro, essencial para a minha manutenção como estudante de pós-graduação.

A minha avó Carmela de Francisco, ao meu tio Roberto Guzzo e aos meus pais Henrique Guzzo e Maria Aparecida Lima Guzzo, por tudo que fizeram em todos esses anos de minha vida.

O autor

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
I. ÁLGEBRAS ALGÉBRICAS	17
§ 1. Álgebras alternativas à direita	17
§ 2. Álgebras com potências associativas	24
§ 3. Álgebras quadráticas alternativas à direita	29
§ 4. Álgebras algébricas	40
II. ÁLGEBRAS COM VALOR ABSOLUTO	45
§ 1. Complexificação de uma álgebra real	45
§ 2. Álgebras algébricas com valor absoluto	48
§ 3. Álgebras com valor absoluto	54
§ 4. Álgebras isotópicas	61
III. ÁLGEBRAS COM VALOR ABSOLUTO PRÉ-HILBERTIANAS	67
§ 1. Preliminares	67
§ 2. Álgebras com valor absoluto pré-hilbertianas que verificam a identidade $(x, x, x) = 0$	69
IV. ÁLGEBRAS FLEXÍVEIS COM VALOR ABSOLUTO	83
§ 1. Preliminares	83
§ 2. Álgebras flexíveis com valor absoluto	86

V. ÁLGEBRAS NORMADAS SEM DIVISORES TOPOLÓGICOS DE ZERO	93
§ 1. Preliminares	93
§ 2. O espectro	99
§ 3. Divisor topológico de zero	105
§ 4. Álgebras normadas com potências associativas sem divisores topológicos de zero	110
BIBLIOGRAFIA	113

INTRODUÇÃO

Nesta monografia apresentamos algumas generalizações e resultados interligados com o teorema de Frobenius, no contexto das álgebras não-associativas.

A versão associativa deste teorema é conhecida como 1º teorema de Frobenius, da qual uma generalização foi obtida em 1950 por Bruck e Kleinfeld, a saber:

"Se A é uma R -álgebra alternativa, de divisão, com elemento unidade e de dimensão finita, então A é isomorfa a R , C , H ou C ."

Como é bem conhecido a álgebra de quatérnios H foi "descoberta" em 1843 por W.R. Hamilton e a álgebra dos octônios C por Cayley em 1845.

Apresentamos a seguir um resumo dos principais resultados expostos nesta monografia.

No capítulo I, provamos que se A é uma R -álgebra alternativa à direita, sem divisores de zero e para todo $x \in A$,

$R_x(A(x)) = A(x)$, então A é isomorfa a R , C , H ou C . Aparecerão também outros resultados, neste capítulo, ligados a este teorema, os quais possuem interesse próprio, a saber: 1) Seja A uma R -álgebra algébrica, alternativa à direita e sem divisores de zero. Então A é isomorfa a R , C , H ou C ; 2) Seja A uma R -álgebra algébrica, comutativa, com potências associativas e sem divisores de zero. Então A é isomorfa a R ou C ; 3) Seja A uma R -álgebra algébrica, com potências associativas e sem divisores de zero. Suponhamos que, para todo x, y em A , (x, y, y) comuta com x . Então A é isomorfa a R , C , H ou C ; 4) Seja A uma R -álgebra algébrica, flexível, com potências associativas e sem divisores de zero. Suponhamos que, para todo x, y em A , (x, y, y) comuta com y . Então A é isomorfa a R , C , H ou C . Para obter estes resultados, no parágrafo 1 deste capítulo, apresentamos o trabalho de J.M. Mikheev cf. [13], sobre álgebras alternativas à direita.

No parágrafo 2, mostramos que se A é uma F -álgebra com potências associativas, sem divisores de zero e e é um idempotente não nulo de A , então e é elemento unidade de A , onde F tem no mínimo quatro elementos e $\text{car } F \neq 2$. Este resultado foi obtido através da análise do trabalho de M.L. El-Mallah e A. Micali cf. [6], através do qual ficou provado resultado idêntico para $F = R$.

No parágrafo 3, utilizamos parte do estudo de A.A. Albert, apresentado em [3], onde está demonstrado que se A é uma F -álgebra alternativa, quadrática e $\text{car } F \neq 2$, então A é de dimensão finita, assumindo um dos valores 1, 2, 4 ou 8.

Utilizando o parágrafo 1, foi possível, neste resultado, trocar, alternativa, por, alternativa à direita e além disso, mostrar que se A é uma R -álgebra alternativa à direita e quadrática, então A é isomorfa a R , C , H ou C .

No capítulo II, apresentamos o seguinte resultado, devido à K. Urbanik e F.B. Wright cf. [18]: se A é uma R -álgebra com valor absoluto e com elemento unidade, então A é isomorfa a R , C , H ou C . Este resultado somado ao trabalho de A.A. Albert cf. [1], possibilita-nos mostrar que se A é uma R -álgebra com valor absoluto e a um elemento de A , tal que as transformações R_a e L_a são inversíveis, então A é isótopa a R , C , H ou C . Aqui surge naturalmente como consequência que se A é uma R -álgebra com valor absoluto e de dimensão finita, então A é isótopa a R , C , H ou C , cf. A.A. Albert em [1]. Ainda neste capítulo, destacamos os seguintes teoremas:

- 1) Se A é uma R -álgebra com valor absoluto e comutativa, então A é isomorfa a R , C ou C^* , do qual apresentamos uma demonstração direta e
- 2) se A é uma R -álgebra com valor absoluto e com potências associativas, então A é isomorfa a R , C , H ou C . O primeiro foi provado por K. Urbanik e F.B. Wright cf. [18] e o segundo por M.L. El-Mallah e A. Micali cf. [6]. Aparecerão outros resultados obtidos por M.L. El-Mallah e A. Micali cf. [7], a saber:

- 1) Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Suponhamos que exista um elemento $x \in A$, $x \neq 0$, tal que x, x^2 sejam R -linearmente independentes e que comutem com todos os elementos de A . Então A é isomorfa a C ou C^* ;
- 2) Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Suponhamos que exis

ta um elemento idempotente e de A , não nulo, que comute com todos os elementos de A e $(z, e, z) = 0$, para todo z em A , ortogonal a e . Então A é isótopa a R , C , H ou C ; 3) Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Suponhamos que, para todo $x \in A$, $(x, x, x) = 0$ e que exista $a \in A$, $a \neq 0$, que comute com todos os elementos de A . Então A é isótopa a R , C , H ou C ; 4) Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Suponhamos que exista $a \in A$, $a \neq 0$, que comute com todos os elementos de A e para todo $x \in A$, $(x, a, x) = 0$. Então A é isótopa a R , C , H ou C . Neste último resultado, era admitido também, que a^2 comutasse com todos os elementos de A , condição esta que aqui conseguimos eliminar. Destacamos também, neste capítulo, o seguinte resultado, obtido por M.L. El-Mallah em [8]: se A é uma R -álgebra algébrica com valor absoluto e se existe um idempotente e de A , $e \neq 0$, que comuta com todos os elementos de A , então A é isótopa a R , C , H ou C . Para apresentarmos estes resultados, foi necessário conhecermos os seguintes teoremas devido a A.A. Albert cf. [1] e [3], a saber: 1) Se A é uma R -álgebra com valor absoluto, com elemento unidade e de dimensão finita, então A é isomorfa a R , C , H ou C ; e 2) Se A é uma R -álgebra algébrica, com valor absoluto e com elemento unidade, então A é isomorfa a R , C , H ou C .

No capítulo III, apresentamos o seguinte teorema obtido por M.L. El-Mallah cf. [8]: Se A é uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x, x, x) = 0$, então A é isótopa a R , C , H ou C . Destacamos também, deste mesmo trabalho, os seguintes teoremas: 1) Seja A

uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x,x,x) = 0$ e que possui uma subálgebra isomorfa a C . Então A é isomorfa a C , H ou C ; 2) Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x,x,x) = 0$. Suponhamos que A não tenha subálgebra isomorfa a C^* . Então A é isomorfa a R , C , H ou C ; 3) Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x,x,x) = 0$. Se os idempotentes de A comutam entre si, então A é isomorfa a R , C , C^* , H ou C ; 4) Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x,x,x) = 0$. Suponhamos que para todos idempotentes e_1 e e_2 de A , $\langle e_1, e_2 \rangle \neq \frac{1}{4}$. Então A é isomorfa a R , C , C^* , H ou C . Assim podemos evidenciar o resultado ao qual chegamos: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x,x,x) = 0$. Sejam a, b dois elementos de A e $e \in A(a,b)$ um idempotente não nulo. Se a e b comutam com e , então $A(a,b)$ é isótopa a R , C , H ou C .

No capítulo IV, apresentamos o seguinte resultado, que se deve à M.L. El-Mallah e A. Micali cf. [7]: Se A é uma R -álgebra flexível com valor absoluto, então A é isótopa a R , C , H ou C . Destacamos também de [7] os seguintes teoremas: 1) Seja A uma R -álgebra flexível com valor absoluto. Suponhamos que A possui uma subálgebra isomorfa a C , então A é isomorfa a C , H ou C ; 2) Seja A uma R -álgebra flexível com valor absoluto. Se os idempotentes de A comutam entre si, então A é isomorfa a R , C , C^* , H ou C . Destacamos os seguintes resultados obtidos por nós, a saber: 1) Se A é uma F -álgebra

flexível, $\text{Car } F \neq 2$ e B é uma parte comutativa de A , então $A(B)$ é comutativa e 2) Sejam A uma R -álgebra com valor absoluto flexível, x, y dois elementos de A e $e \in A(x, y)$ um idempotente não nulo. Se x e y comutam com e , então $A(x, y)$ é isótopa a R, C, H ou C . O primeiro foi obtido do seguinte resultado devido a R. Raffin cf. [14]: Se A é um anel flexível de característica prima com dois e B é uma parte finita de A comutativa, então o subanel gerado por B é comutativo.

No capítulo V, apresentamos o seguinte resultado devido a M.L. El-Mallah e A. Micali cf. [6]: Se A é uma R -álgebra normada, alternativa à direita e sem divisores topológicos de zero, então A é isomorfa a R, C, H ou C . Este resultado é uma generalização do seguinte teorema devido a I. Kaplansky cf. [12], que prova que se A é uma R -álgebra normada, associativa e sem divisores topológicos de zero, então A é isomorfa a R, C ou H . Lançando mão do trabalho de I. Kaplansky, [12], dos livros de K. Hoffman, [10] e C.E. Rickart, [15], demos uma demonstração direta do teorema obtido por M.L. El-Mallah e A. Micali. Destacamos também de [6] os seguintes teoremas: 1) Seja A uma R -álgebra normada, comutativa, com potências associativas e sem divisores topológicos de zero. Então A é isomorfa a R ou C ; 2) Seja A uma R -álgebra normada, com potências associativas e sem divisores topológicos de zero. Suponhamos que, para todo x, y em A , (x, y, y) comuta com x . Então A é isomorfa a R, C, H ou C ; 3) Seja A uma R -álgebra normada, flexível, com potências associativas e sem divisores topológicos de zero. Suponhamos que para todo x, y em A ,

(x, y, y) comuta com y . Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Neste momento cabe observar que L. Ilgelstom cf.[11], nos mostra que entre as R -álgebras R , C , H e C , somente C é uma C -álgebra e aqui nós mostramos que também C^* não é uma C -álgebra, assim nos teoremas apresentados neste trabalho, se trocarmos, " A uma R -álgebra", por, " A uma C -álgebra", então, onde aparece isomorfa, teremos A isomorfa a C , onde aparece isótopa, teremos A isótopa a C .

CAPÍTULO I

ÁLGEBRAS ALGÉBRICAS

§ 1. ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS À DIREITA

Neste parágrafo, F será um corpo de característica diferente de dois. Para toda F -álgebra A , denotaremos por $(x,y) = xy - yx$ o comutador de dois elementos x e y de A e $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$ o associador de três elementos x , y e z de A . É fácil ver que o comutador é uma função bilinear e o associador é uma função trilinear.

(1.1) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra A é *alternativa à direita* (*esquerda*) se para todo $x,y \in A$, $(x,y,y) = 0$ ($((x,x,y) = 0)$). Diremos que A é *alternativa* se A for alternativa à direita e à esquerda.

(1.2) DEFINIÇÃO: Sejam A uma F -álgebra e $x \in A$. Definimos $x^1 = x$ e $x^{i+1} = x^i x$ para $i=1,2,\dots$ (chamadas potências principais à direita).

(1.3) LEMA: Seja A uma F -álgebra alternativa à direita. Então para todo x, y e z de A , temos:

$$(1.4) \quad (x, y, z) + (x, z, y) = 0$$

$$(1.5) \quad (x, x, z) + (x, z, x) = 0$$

$$(1.6) \quad (xy)z + (xz)y = x(yz + zy)$$

$$(1.7) \quad [(xy)z]y = x[(yz)y] \quad (\text{identidade de Moufang à direita})$$

Demonstração: Usando a definição (1.1) temos: $0 = (x, y+z, y+z) = (x, y, z) + (x, z, y)$, assim fica provado (1.4). Como consequência, temos (1.5) e (1.6). Para provarmos (1.7) façamos $x=y$ em (1.5), obtendo: $0 = (y, y, z) + (y, z, y) = y^2 z - y(yz) + (yz)y - y(zy)$. Logo, $-y^2 z + y(yz) + y(zy) = (yz)y$. Daí, $(zy + yz)y + y(zy + yz) - (zy^2 + y^2 z) = zy^2 + (yz)y + y(zy) + y(yz) - zy^2 - y^2 z = 2(yz)y$. Finalmente, usando (1.6), obtemos: $2x[(yz)y] = x[(zy + yz)y + y(zy + yz)] - x(zy^2 + y^2 z) = [x(zy + yz)]y + (xy)(zy + yz) - (xz)y^2 - (xy^2)z = [(xz)y + (xy)z]y + [(xy)z]y + [(xy)y]z - (xz)y^2 - (xy^2)z = (xz)y^2 + [(xy)z]y + [(xy)z]y + (xy^2)z - (xz)y^2 - (xy^2)z = 2[(xy)z]y. \blacksquare$

Observemos que (1.7) pode ser representada da seguinte maneira:

$$(1.8) \quad (x, yz, y) = (x, z, y)y.$$

$$\begin{aligned} \text{De fato, } 0 &= [(xy)z]y - x[(yz)y] = (x,y,z)y + [x(yz)]y - x[(yz)y] \\ &= (x,y,z)y + (x,yz,y) = -(x,z,y)y + (x,yz,y) \end{aligned}$$

Se A é uma F -álgebra e B uma parte de A , denotaremos por $A(B)$ a subálgebra de A gerada por B . Quando $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, indicaremos $A(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}) = A(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

(1.9) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra A é uma *álgebra com potências associativas*, se para todo $x \in A$, $A(x)$ é uma subálgebra associativa de A .

(1.10) TEOREMA: Se A é uma F -álgebra alternativa à direita, então A é uma álgebra com potências associativas.

Demonstração: Dado $x \in A$, denotaremos por $p = p(x)$ o produto $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ (com alguma distribuição de parênteses) com n fatores $a_i = x$; n será chamado grau de p e denotado por ∂p . Para provar que $A(x)$ é uma álgebra associativa é suficiente provar que $(p_1, p_2, p_3) = 0$ para todos produtos $p_i = p_i(x)$, com $i = 1, 2, 3$. Faremos a demonstração por indução sobre a soma $\partial p_1 + \partial p_2 + \partial p_3$. É claro que o resultado é verdadeiro se $\partial p_1 + \partial p_2 + \partial p_3 = 3$. Assumiremos que $(p_1, p_2, p_3) = 0$ sempre que $\partial p_1 + \partial p_2 + \partial p_3 < n$. Sejam os produtos p_i com $i = 1, 2, 3$ tais que $\partial p_1 + \partial p_2 + \partial p_3 = n$. Para cada $i = 1, 2, 3$, como $\partial p_i < n$, pela hipótese de indução, podemos usar a associatividade no produto $p_i = p_i(x)$. Se $\partial p_3 > 1$ então $p_3 = p'_3 x$. Do fato que em uma álgebra qualquer vale a igualdade $(ab, c, d) = (a, bc, d) + (a, b, cd) = a(b, c, d) + (a, b, c)d$ e que $\partial p_1 + \partial p_2 + \partial p'_3 < n$ temos que

$$(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3'x) = p_1(p_2, p_3', x) + (p_1, p_2, p_3')x - (p_1 p_2, p_3', x) + (p_1, p_2 p_3', x) = p_1(p_2, p_3', x) - (p_1 p_2, p_3', x) + (p_1, p_2 p_3', x).$$

Logo podemos assumir $p_3 = x$. Se $\partial p_2 = 1$ então $p_2 = x$, logo $(p_1, p_2, p_3) = (p_1, x, x) = 0$. Se $p_2 > 1$ então $p_2 = xp_2'$, como $\partial p_1 + \partial p_2' + \partial p_3 < n$ e de (1.8) temos $(p_1, p_2, p_3) = (p_1, xp_2', x) = (p_1, p_2', x)x = 0$. ■

(1.11) DEFINIÇÃO: Sejam A uma F -álgebra e a um elemento de A . A aplicação linear $R_a: A \rightarrow A$ ($L_a: A \rightarrow A$) definida por $R_a(x) = xa$ ($L_a(x) = ax$) é chamada de *transformação à direita (esquerda) determinada por a* .

Se A é uma F -álgebra alternativa à direita, então da definição (1.1) e de (1.7), para todo a e b de A temos

$$(1.12) \quad R_a^2 = R_a^2; \quad R_{(ab)a} = R_a R_b R_a$$

A partir de (1.12), para todo a, b e c de A desenvolvendo $R_{(a+b)}^2 = R_{a+b}^2$ e $R_{[(a+c)b](a+c)} = R_{a+c} R_b R_{a+c}$ obtemos

$$(1.13) \quad R_{ab+ba} = R_a R_b + R_b R_a, \quad R_{(ab)c+(cb)a} = R_a R_b R_c + R_c R_b R_a$$

Para todo a e b elementos de uma F -álgebra A , consideremos as aplicações lineares a^b e a_b de A em A definidas por $a^b = R_{ab} - R_a R_b$ e $a_b = R_{ab} - R_b R_a$.

(1.14) LEMA: Seja A uma F -álgebra alternativa à direita. Então para todo a, b, c e x de A temos:

$$(1.15) \quad a^b + b^a = a_b + b_a = 0, \quad a_b + a^b = R_q$$

$$(1.16) \quad a_b(x) = -(x, a, b), \quad a^b(x) = x(a, b) + (x, a, b)$$

$$(1.17) \quad a^b a_b = 0, \quad a^b a_c + a^c a_b = 0$$

$$(1.18) \quad a_b a^b = -R_{(q, a, b)}$$

$$(1.19) \quad a^b R_a a_b = 0, \quad a_b R_a a^b = -R_{(qa, a, b)}$$

$$(1.20) \quad R_p = a_{ba} - a_b R_a = a^{ba} - R_a a^b$$

onde $p = (a, a, b)$ e $q = (a, b)$.

Demonstração: (1.15): $a^b + b^a = R_{ab} - R_a R_b + R_{ba} - R_b R_a = R_{ab+ba} - (R_a R_b + R_b R_a)$, logo por (1.13) temos o resultado. Analogamente, $a_b + b_a = 0$; $R_q = R_{(a, b)} = R_{ab-ba} = R_{ab+ba} - R_{2ba} = R_a R_b + R_b R_a - 2R_{ba} = -b^a - b_a = a^b + a_b$.

(1.16): $a_b(x) = R_{ab}(x) - (R_b R_a)(x) = x(ab) - (xa)b = -(x, a, b)$; $a^b(x) = x(ab) - (xb)a = x(a, b) + x(ba) - (xb)a = x(a, b) - (x, b, a) = x(a, b) + (x, a, b)$ (na última igualdade utilizamos (1.4)).

(1.17): $a^b a_b = (R_{ab} - R_a R_b)(R_{ab} - R_b R_a) = R_{ab}^2 - R_{ab} R_b R_a - R_a R_b R_{ab} + R_a R_b^2 R_a = R_{(ab)^2} - R_{[(ab)b]a} - R_{(ab)(ab)} + R_{(ab^2)a} = R_{(ab)^2 - (ab^2)a - (ab)^2 + (ab^2)a} = 0$. (utilizamos (1.12) e (1.13)).

$$0 = a^{b+c} a_{b+c} = (a^b + a^c)(a_b + a_c) = a^b a_c + a^c a_b$$

(1.18): $a_b a^b = (R_{ab} - R_b R_a)(R_{ab} - R_a R_b) = R_{(ab)^2} - R_{ab} R_a R_b - R_b R_a R_{ab} + R_b R_a^2 R_b = R_{(ab)^2} - R_{[(ab)a]b} - R_{(ba)(ab)} + R_{(ba^2)b} = R_{(ab)^2 - [(ab)a]b - (ba)(ab) + (ba^2)b} =$

$$= R_{(ab-ba)(ab)-[(ab)a-ba^2]b} = R_{q(ab)-(qa)b} = -R_{(q,a,b)}$$

$$\begin{aligned} (1.19): \quad a^b R_a a_b &= (R_{ab} - R_a R_b) R_a (R_{ab} - R_b R_a) = \\ &= R_{ab} R_a R_{ab} - R_{ab} R_a R_b R_a - R_a R_b R_a R_{ab} + R_a R_b R_a R_b R_a = \\ &= R_{[(ab)a](ab)} - R_{ab} R_{(ab)a} - R_{(ab)a} R_{ab} + R_a R_{(ba)b} R_a = \\ &= R_{[(ab)a](ab)} - R_{(ab)[(ab)a] + [(ab)a](ab)} + R_{\{a[(ba)b]\}a} = \\ &= R_{\{a[(ba)b]\}a} - (ab)[(ab)a]. \quad \text{Mas } \{a[(ba)b]\}a - (ab)[(ab)a] = \\ &= (R_a R_{(ba)b})(a) - (R_{(ab)a} R_b)(a) = (R_a R_b R_a R_b - R_a R_b R_a R_b)(a) = 0, \\ \text{logo } a^b R_a a_b &= 0. \quad (\text{utilizamos (1.12) e (1.13)}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_b R_a a^b &= (R_{ab} - R_b R_a) R_a (R_{ab} - R_a R_b) = R_{ab} R_a R_{ab} - \\ &- R_{ab} R_a^2 R_b - R_b R_a^2 R_{ab} + R_b R_a^3 R_b = R_{[(ab)a](ab)} - R_{[(ab)a^2]b} - \\ &- R_{(ba^2)(ab)} + R_{(ba^3)b} = R_{[(ab-ba)a](ab) - [(ab-ba)a^2]b} = R_{(qa)(ab) - (qa^2)b} = \\ &= -R_{(qa,a,b)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.20): \quad R_p - a_{ba} &= R_{(a,a,b)} - R_a(ba) + R_{ba} R_a = \\ &= -R_{(a,b,a)} - R_a(ba) + R_{ba} R_a = -R_{(ab)a} + R_a(ba) - R_a(ba) + R_{ba} R_a = \\ &= -R_a R_b R_a + R_{ba} R_a = (R_{ba} - R_a R_b) R_a = b_a R_a = -a_b R_a \quad (\text{utilizamos} \\ (1.5), (1.12) \text{ e } (1.15)). \end{aligned}$$

$$\text{Analogamente, } R_p = a^{ba} - R_a a^b. \quad \blacksquare$$

(1.21) LEMA: Seja A uma F-álgebra alternativa à direita. Então para todo a e b em A, sendo $p = (a, a, b)$ e $q = (a, b)$ temos:

$$(1.22) \quad p(q, a, b) = 0$$

$$(1.23) \quad p(qa, a, b) = 0.$$

Demonstração: Fazendo $x = a$ em (1.16) temos: $a_b(a) = -(a, a, b) = -p$. Utilizando (1.18) e (1.17) temos:

$p(q,a,b) = -(R_{(q,a,b)} a_b)(a) = (a_b a^b a_b)(a) = 0$, o que prova (1.22).

Utilizando (1.19) e (1.17) temos:

$p(qa,a,b) = -(R_{(qa,a,b)} a_b)(a) = (a_b R_a a^b a_b)(a) = 0$, o que prova (1.23). ■

(1.24) TEOREMA (Mikheev). Seja A uma F -álgebra alternativa à direita. Então para todo a e b de A , tem-se

$$(a,a,b)^4 = 0.$$

Demonstração: Pondo $p = (a,a,b)$, $R_p R_p R_p a_b = (a^{ba} - R_a a^b)(a_{ba} - a_b R_a)(a^{ba} - R_a a^b) a_b = -(a^{ba} a_b R_a + R_a a^b a_{ba}) a^{ba} a_b = -a^{ba} a_b R_a a^{ba} a_b - R_a a^b a_{ba} a^{ba} a_b = a^{ba} a_b R_a a^b a_{ba} - R_a a^{ba} a_b a^b a_{ba}$. Como $R_p a_b R_a a^b R_p = (a^{ba} - R_a a^b) a_b R_a a^b (a_{ba} - a_b R_a) = a^{ba} a_b R_a a^b a_{ba}$ e $R_a R_p a_b a^b R_p = R_a (a^{ba} - R_a a^b) a_b a^b (a_{ba} - a_b R_a) = R_a a^{ba} a_b a^b a_{ba}$, então, $R_p R_p R_p a_b = R_p a_b R_a a^b R_p - R_a R_p a_b a^b R_p = -R_p R(qa,a,b) R_p + R_a R_p R(q,a,b) R_p = -R[p(qa,a,b)]_p + R_a R[p(q,a,b)]_p = 0$ (utilizamos os lemas (1.14) e (1.21)). Por (1.16) $a_b(a) = -p$, então $p^4 = -(R_p R_p R_p a_b)(a)$, logo $p^4 = 0$. ■

(1.25) COROLÁRIO (Kleinfeld). Se A é uma F -álgebra alternativa à direita sem elementos nilpotentes, então A é alternativa.

(1.26) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra A não tem divisores de zero, se para todo $a, b \in A$ com $a \neq 0$, $b \neq 0$, então $ab \neq 0$.

(1.27) COROLÁRIO: Se A é uma F -álgebra alternativa à direita, sem divisores de zero, então A é alternativa.

§ 2. ÁLGEBRAS COM POTÊNCIAS ASSOCIATIVAS

É fácil ver que, A é uma F -álgebra com potências associativas (cf. (1.9)) se e somente se, para todo $x \in A$, i e j inteiros positivos, $x^i x^j = x^{i+j}$.

Se A é uma F -álgebra com potências associativas, para todo x em A temos:

$$(1.28) \quad x x^2 = x^2 x$$

$$(1.29) \quad x^2 x^2 = x (x x^2)$$

Escrevendo (1.28) e (1.29) em termos do associador temos:

$$(1.30) \quad (x, x, x) = 0; \quad (x, x, x^2) = 0$$

Escrevendo (1.28) em termos do comutador temos:

$$(1.31) \quad (x^2, x) = 0$$

Para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in F$, de (1.30) e (1.31) temos:

$$(x + \lambda y, x + \lambda y, (x + \lambda y)^2) = 0$$

$$e \quad ((x + \lambda y)^2, x + \lambda y) = 0.$$

Daí, se F possui no mínimo três elementos distintos obtemos

$$(1.32) \quad (xy + yx, x) + (x^2, y) = 0$$

e se F possui no mínimo quatro elementos distintos

$$(1.33) \quad (x, x, xy + yx) + (x, y, x^2) + (y, x, x^2) = 0$$

$$(1.34) \quad (x, x, y^2) + (x, y, xy + yx) + (y, x, xy + yx) + (y, y, x^2) = 0$$

Logo, se $e \in A$ é um idempotente que comuta com todos os elementos de A , para todo $y \in A$, fazendo $x = e$ em (1.33),
 $0 = (e, e, 2ey) + (e, y, e) + (y, e, e) = 2e(ey) - 2e(e(ey)) + (ye)e - ye = -2((ye)e)e + 3(ye)e - ye$, assim

$$(1.35) \quad 2((ye)e)e - 3(ye)e + ye = 0, \quad \text{ou}$$

$$(1.36) \quad 2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 0.$$

Admitiremos até o final deste parágrafo que F é um corpo com no mínimo quatro elementos e que $\text{car } F \neq 2$.

Os dois teoremas a seguir fornecem uma decomposição de Peirce para álgebras com potências associativas.

(1.37) TEOREMA: Sejam A uma F -álgebra com potências associativas e $e \in A$ um idempotente que comuta com todos os elementos de A . Então

$$A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0,$$

onde A_i é o F -subespaço de A dado por

$$A_i = \{x \in A / xe = ix\} \quad (i = 0, \frac{1}{2}, 1)$$

Demonstração: Para todo $x \in A$, de (1.35) temos

$(2(xe)e - 3xe + x)e = 0$, logo $2(xe)e - 3xe + x \in A_0$,
 $(-4(xe)e + 4xe)e = -4((xe)e)e + (4xe)e = -2(2((xe)e)e - 3(xe)e + xe) - 2(xe)e + 2xe = -2(xe)e + 2xe = \frac{1}{2}(-4(xe)e + 4xe)$, daí,
 $-4(xe)e + 4xe \in A_{\frac{1}{2}}$, $(2(xe)e - xe)e = 2((xe)e)e - (xe)e =$
 $= 2((xe)e)e - 3(xe)e + xe + 2(xe)e - xe = 2(xe)e - xe$, então
 $2(xe)e - xe \in A_1$. Como $x = (2(xe)e - xe) + (-4(xe)e + 4xe) +$
 $+ (2(xe)e - 3xe + x)$, então $x \in A_1 + A_{\frac{1}{2}} + A_0$. Sejam $u_1, v_1 \in A_1$,
 $u_{\frac{1}{2}}, v_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$ e $u_0, v_0 \in A_0$, tais que $u_1 + u_{\frac{1}{2}} + u_0 = v_1 + v_{\frac{1}{2}} + v_0$,
multiplicando por e , obtemos $u_1 + \frac{1}{2}u_{\frac{1}{2}} = v_1 + \frac{1}{2}v_{\frac{1}{2}}$, multiplicando
do novamente por e , $u_1 + \frac{1}{4}u_{\frac{1}{2}} = v_1 + \frac{1}{4}v_{\frac{1}{2}}$, daí $\frac{1}{4}u_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}v_{\frac{1}{2}}$,
logo $u_{\frac{1}{2}} = v_{\frac{1}{2}}$, portanto $u_1 = v_1$ e $u_0 = v_0$. ■

Se A é uma F -álgebra, consideremos a F -álgebra A^+ obtida como segue:

1. Como F -espaço vetorial, A^+ coincide com A
2. A multiplicação de A^+ é definida por $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, com $x, y \in A^+$.

É fácil ver que A^+ é uma álgebra comutativa e, além disso, se A é uma álgebra com potências associativas, então A^+ também o será.

(1.38) TEOREMA: Sejam A uma F -álgebra com potências associativas e e um idempotente de A . Então,

$$A = A_{(1)} \oplus A_{(\frac{1}{2})} \oplus A_{(0)},$$

onde $A_{(i)}$ é o F -subespaço de A dado por

$$A_{(i)} = \{x \in A / ex = xe = ix\} \quad (i=0,1) \quad e$$

$$A_{(\frac{1}{2})} = \{x \in A / ex + xe = x\}$$

Demonstração: A^+ é uma F-álgebra comutativa com potências associativas e e é um idempotente de A^+ , então por (1.37), $A^+ = A_1^+ \oplus A_{\frac{1}{2}}^+ \oplus A_0^+$ onde A_i^+ são os F-espacos de A^+ definidos por $A_i^+ = \{x \in A^+ / x.e = ix\}$ para $i=0, \frac{1}{2}, 1$. Denotemos por $A_{(i)} = A_i^+$ e pela forma como foi definido A^+ , $A_{(i)}$ é um F-subespaço de A . Por outro lado se $x \in A_{(i)}$, $i=0,1$, em (1.32) substituindo x por e , y por x , obtemos $(ex + xe, e) + (e^2, x) = 0$, logo, $0 = (2e.x, e) + (e, x) = (2ix, e) + (e, x) = (2i-1)(x, e)$. Como $i \neq \frac{1}{2}$, então $(x, e) = 0$, portanto $xe = ex = ix$; reciprocamente temos $x.e = \frac{1}{2}(xe + ex) = \frac{1}{2}(ix + ix) = ix$. ■

(1.39) TEOREMA: Sejam A uma F-álgebra com potências associativas, sem divisores de zero e e um idempotente de A não nulo. Então e é elemento unidade de A .

Demonstração: Por (1.38), $A = A_{(1)} \oplus A_{(\frac{1}{2})} \oplus A_{(0)}$; como A não tem divisores de zero (Def. (1.26)), então $A_{(0)} = \{0\}$. Resta demonstrar que $A_{(\frac{1}{2})} = \{0\}$. De fato, para todo $x \in A_{(\frac{1}{2})}$, fazendo $y=e$ em (1.32) obtemos $0 = (xe + ex, x) + (x^2, e) = (x, x) + (x^2, e)$; logo

$$(1.40) \quad x^2 e = ex^2$$

Substituindo x por e , y por x em (1.34) e usando (1.40), obtemos: $0 = (e, e, x^2) + (e, x, ex+xe) + (x, e, ex+xe) + (x, x, e) = (e, e, x^2) + (e, x, x) + (x, e, x) + (x, x, e) = (e, e, x^2) + (ex)x -$

$$- ex^2 + (xe)x - x(ex) + x^2e - x(xe) = (e, e, x^2) + (ex+xe)x - x(ex +$$

$$+ xe) = ex^2 - e(ex^2) + x^2 - x^2; \text{ logo,}$$

$$(1.41) \quad ex^2 = e(ex^2)$$

Por outro lado existem $u \in A_{(1)}$ e $v \in A_{(\frac{1}{2})}$ tais que $x^2 = u+v$, então por (1.40) $ex^2 = u+ev = u+ve$, logo $2ex^2 = 2u+v$, daí $ex^2 = u + \frac{1}{2}v$, logo $\frac{1}{2}v = ev = ve$, assim $e(ex^2) = u + \frac{1}{2}ev = u + \frac{1}{4}v$. Por (1.41) $u + \frac{1}{2}v = u + \frac{1}{4}v$, logo $v=0$, portanto $x^2 = u$, então $ex^2 = u = x^2$, daí

$$(1.42) \quad ex^2 = x^2$$

Fazendo $y=e$ em (1.33) e usando (1.42) obtemos $0 = (x, x, ex +$
 $+ xe) + (x, e, x^2) + (e, x, x^2) = (x, x, x) + (xe)x^2 - x(ex^2) + (ex)x^2 -$
 $- e(xx^2) = (xe+ex)x^2 - xx^2 - e(xx^2) = xx^2 - xx^2 - e(xx^2)$, logo $e(xx^2) = 0$. Como $e \neq 0$ e A não tem divisores de zero, segue $x=0$. ■

(1.43) TEOREMA: Sejam A uma F -álgebra com potências associativas, sem divisores de zero e a um elemento de A não nulo, tal que $R_a(A(a)) = L_a(A(a)) = A(a)$. Então A é uma álgebra com elemento unidade e . Além disso $e \in A(a)$.

Demonstração: Sejam as transformações lineares f e g de $A(a)$ em $A(a)$ definidas por $f(x) = R_a(x) = xa$ e $g(x) = L_a(x) = ax$. Como $R_a(A(a)) = L_a(A(a)) = A(a)$, existem $e, e' \in A(a)$, não nulos, tais que $f(e) = R_a(e) = a$ e $g(e') = L_a(e') = e$, então $ea = a$ e $ae' = e$. Assim como $A(a)$ é associativa, temos $e^2 = ee = e(ae') = (ea)e' = ae' = e$. Portanto e é um idempotente não nulo de A e por (1.39), e é elemento unidade de A . ■

§ 3. ÁLGEBRAS QUADRÁTICAS ALTERNATIVAS A DIREITA

Se A é uma F -álgebra com elemento unidade 1 , o conjunto dos elementos da forma $\alpha.1$, com $\alpha \in F$, é uma subálgebra de A isomorfa a F e assim podemos assumir F como uma subálgebra de A .

(1.44) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra A com elemento unidade é uma *álgebra quadrática* se existem funções t e n de A em F (chamadas *traço* e *norma*, respectivamente), tais que para todo $x \in A$, tem-se

$$(1.45) \quad x^2 - t(x)x + n(x) = 0 \quad \text{e} \quad n(x) \neq 0 \text{ se } x \neq 0.$$

Se $\alpha \in F$, definimos $t(\alpha) = 2\alpha$ e $n(\alpha) = \alpha^2$.

(1.46) LEMA: Em uma F -álgebra quadrática A as funções t e n são únicas.

Demonstração: Sejam t' e n' funções de A em F , que verificam as condições da definição (1.44); então, para todo $\alpha \in F$, claramente $t(\alpha) = t'(\alpha)$ e $n(\alpha) = n'(\alpha)$. Dado $x \in A \setminus F$, $x^2 - t(x)x + n(x) = x^2 - t'(x)x + n'(x)$, daí $(t(x) - t'(x))x = n(x) - n'(x)$, como $n(x) - n'(x) \in F$ e $x \notin F$, então $n(x) - n'(x) = t(x) - t'(x) = 0$, logo $t(x) = t'(x)$ e $n(x) = n'(x)$, portanto $t = t'$ e $n = n'$. ■

Assumiremos até o final deste parágrafo que F é um corpo de característica distinta de 2.

(1.47) LEMA: Se A é uma F -álgebra quadrática e $x \in A \setminus F$, então $t(y) = 0$ e $y^2 = -n(y) = -n(x) + \frac{1}{4}(t(x))^2$, onde $y = x - \frac{1}{2}t(x)$.

Demonstração: Por (1.45), $y^2 = x^2 - t(x)x + \frac{1}{4}(t(x))^2 = -n(x) + \frac{1}{4}(t(x))^2$. Por outro lado, $0 = y^2 - t(y)y + n(y) = -n(x) + \frac{1}{4}(t(x))^2 - t(y)y + n(y)$, daí $-n(x) + \frac{1}{4}(t(x))^2 + n(y) = t(y)y$, como $y \notin F$ e $-n(x) + \frac{1}{4}(t(x))^2 + n(y) \in F$, então $t(y) = 0$, logo $y^2 = -n(y)$. ■

(1.48) DEFINIÇÃO: Diremos que um elemento y de uma F -álgebra com elemento unidade é uma *raiz quadrada* se $y \notin F$ e $y^2 \in F$.

O Lema (1.47) nos mostra que se A é uma F -álgebra quadrática, para todo $x \in A \setminus F$ o elemento $y = x - \frac{1}{2}t(x)$ é uma raiz quadrada.

(1.49) LEMA: Sejam u e v raízes quadradas de uma F -álgebra quadrática A , tais que $1, u$ e v são F -linearmente independentes. Então $uv + vu \in F$.

Demonstração: De (1.44), $(u+v)^2 = t(u+v)(u+v) - n(u+v)$ e $(u+2v)^2 = t(u+2v)(u+2v) - n(u+2v)$, logo $uv + vu = (u+v)^2 - u^2 - v^2 =$

$= -(n(u+v) + u^2 + v^2) + t(u+v)u + t(u+v)v$ e $2(uv+vu) = (u+2v)^2 - u^2 - 4v^2 = -(n(u+2v) + u^2 + 4v^2) + t(u+2v)u + 2t(u+2v)v$. Como $1, u$ e v são F -linearmente independentes, então $2t(u+v) = t(u+2v)$ e $t(u+v) = t(u+2v)$, daí $t(u+v) = t(u+2v) = 0$, portanto, $uv + vu = -(n(u+v) + u^2 + v^2) \in F$. ■

(1.50) DEFINIÇÃO: Dois elementos não nulos u e v de uma F -álgebra A são chamados *J-ortogonais* se seu produto de Jordan $uv + vu$ for nulo. Uma seqüência $u_1, \dots, u_n$ de elementos não nulos de A é chamada *seqüência J-ortogonal* se para todo i e j , $1 \leq i \neq j \leq n$, u_i e u_j são *J-ortogonais*.

(1.51) LEMA: Seja $u_1, \dots, u_n$ uma seqüência *J-ortogonal* na F -álgebra quadrática A . Se $u_i \notin F$ ($i=1, \dots, n$), então, $1, u_1, \dots, u_n$ são F -linearmente independentes.

Demonstração: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ tais que $t = \sum_{j=0}^n \lambda_j u_j = 0$, onde $u_0 = 1$. Para $1 \leq i \leq n$, temos:

$$0 = tu_i + u_i t = \sum_{j=0}^n \lambda_j (u_j u_i + u_i u_j) = 2\lambda_0 u_i + 2\lambda_i u_i^2.$$
 Se $\lambda_i \neq 0$, então $u_i^2 + \lambda_i^{-1} \lambda_0 u_i = 0$, logo $n(u_i) = 0$ que é uma contradição. Portanto $\lambda_i = 0$ e conseqüentemente, $\lambda_0 = 0$. ■

(1.52) LEMA: Seja $u_1, \dots, u_n$ uma seqüência *J-ortogonal* de raízes quadradas de uma F -álgebra quadrática A . Se $B = F + u_1 F + \dots + u_n F$ e $w \in A \setminus B$, então existe $b \in B$ tal que $u = w - b$ é uma raiz quadrada e $u_1, \dots, u_n, u$ é uma

seqüência J-ortogonal.

Demonstração: Seja $v = w - \frac{1}{2}t(w)$; então, por (1.47), v é uma raiz quadrada. Como $v \notin B$, para todo $1 \leq i \leq n$, $1, u_i, v$ são F-linearmente independentes e por (1.49), $u_i v + v u_i = \delta_i \in F$.

Seja $b_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{-1} \delta_j u_j$, onde $\alpha_j = u_j^2 \in F$, então $(v - b_0)u_i + u_i(v - b_0) = v u_i + u_i v - (b_0 u_i + u_i b_0) = \delta_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{-1} \delta_j (u_j u_i + u_i u_j) = \delta_i - \alpha_i^{-1} \delta_i \alpha_i = 0$, então pondo $u = v - b_0$, temos $u_1, \dots, u_n, u$ é uma seqüência J-ortogonal. Mostremos que u é uma raiz qua-

drada: $u^2 = v^2 - (v b_0 + b_0 v) + b_0^2 = v^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{-1} \delta_j (v u_j + u_j v) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{-2} \delta_j^2 u_j^2 = v^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{-1} \delta_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{-1} \delta_j^2 = v^2 - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{-1} \delta_j^2 \in F$.

Por outro lado, $u = v - b_0 = w - (\frac{1}{2}t(w) + b_0)$, pondo $b = \frac{1}{2}t(w) + b_0$, então $u = w - b$ e $b \in B$. ■

(1.53) LEMA: Seja A uma F-álgebra quadrática alternativa à direita. Então A não tem divisores de zero e é alternativa.

Demonstração: Sejam dados $x, y \in A$ tais que $xy = 0$. Por (1.44), $y^2 = t(y)y - n(y)$, daí $xy^2 = t(y)xy - n(y)x$, logo $(xy)y = -n(y)x$, daí $n(y)x = 0$, então $x = 0$ ou $n(y) = 0$, logo $x = 0$ ou $y = 0$. Por (1.27) A é alternativa. ■

(1.54) LEMA: Sejam u e v raízes quadradas J-ortogonais de uma F-álgebra quadrática alternativa à direita A . Então, $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = uv$ é uma seqüência J-ortogonal de raízes quadradas e além disso, $D = F + Fu_1 + Fu_2 + Fu_3$

é uma subálgebra de A associativa de dimensão quatro, cuja tábua de multiplicação na base $1, u_1, u_2, u_3$ é dada por:

	1	u_1	u_2	u_3
1	1	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	α	u_3	αu_2
u_2	u_2	$-u_3$	β	$-\beta u_1$
u_3	u_3	$-\alpha u_2$	βu_1	$-\alpha\beta$

onde $u_1^2 = u^2 = \alpha \in F$, $u_2^2 = v^2 = \beta \in F$.

Demonstração: Por (1.53), A é alternativa e como u, v são J-ortogonais temos $u(uv) = u^2v = \alpha v$, $(uv)u = -(vu)u = -vu^2 = -\alpha v$, logo $u(uv) + (uv)u = 0$. Analogamente $v(uv) + (uv)v = 0$. Portanto u, v e uv são J-ortogonais. Por outro lado, $(uv)^2 = t(uv)(uv) - n(uv)u$, então $u(uv)^2 = t(uv)(u(uv)) - n(uv)u$. Como $u(uv)^2 = (u(uv))(uv) = \alpha v(uv) = -\alpha v(vu) = -\alpha\beta u$ e $t(uv)(u(uv)) = \alpha t(uv)v$, então, $t(uv) = 0$ e $n(uv) = \alpha\beta$. Logo $(uv)^2 = -\alpha\beta \neq 0$. Se $uv \in F$, então $0 = u(uv) + (uv)u = 2(uv)u$, logo $uv = 0$ que é uma contradição, assim $uv \notin F$. Por (1.51) $1, u, v$ e uv são F-linearmente independentes, assim $D = [1, u, v, uv]$ é um subespaço vetorial de dimensão quatro. É fácil ver que a tábua de multiplicação da base $1, u_1=u, u_2=v, u_3=uv$ é a dada no enunciado do Lema, daí D é fechada em relação à multiplicação de A . Portanto, D é uma subálgebra de

A. Por inspecção à tabela é fácil ver que D é associativa. ■

(1.55) LEMA: Sejam $u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=uv$ e $u_4=w$ uma seqüência J-ortogonal de raízes quadradas de uma F-álgebra quadrática alternativa à direita A . Então $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5=uw$, $u_6=vw$ e $u_7=(uv)w$ é uma seqüência J-ortogonal de raízes quadradas e além disso $B = F + Fu_1 + \dots + Fu_7$, é uma subálgebra de A alternativa de dimensão oito, cuja tábua de multiplicação na base $1, u_1, \dots, u_7$ é dada por

	1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
1	1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_1	u_1	α	u_3	αu_2	u_5	αu_4	$-u_7$	$-\alpha u_6$
u_2	u_2	$-u_3$	β	$-\beta u_1$	u_6	u_7	βu_4	βu_5
u_3	u_3	$-\alpha u_2$	βu_1	$-\alpha\beta$	u_7	αu_6	$-\beta u_5$	$-\alpha\beta u_4$
u_4	u_4	$-u_5$	$-u_6$	$-u_7$	γ	$-\gamma u_1$	$-\gamma u_2$	$-\gamma u_3$
u_5	u_5	$-\alpha u_4$	$-u_7$	$-\alpha u_6$	γu_1	$-\alpha\gamma$	γu_3	$\alpha\gamma u_2$
u_6	u_6	u_7	$-\beta u_4$	βu_5	γu_2	$-\gamma u_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma u_1$
u_7	u_7	αu_6	$-\beta u_5$	$\alpha\beta u_4$	γu_3	$-\alpha\gamma u_2$	$\beta\gamma u_1$	$\alpha\beta\gamma$

onde $u_1^2 = u^2 = \alpha \in F$, $u_2^2 = v^2 = \beta \in F$ e $u_4^2 = w^2 = \gamma \in F$.

Demonstração: Por (1.54) temos $u_1=u$, $u_4=w$ e $u_5=uw$ são J-ortogonais e além disso $u_5^2 = (uw)^2 = -\alpha\gamma$; analogamente, $u_2=v$, $u_4=w$ e $u_6=vw$ são J-ortogonais e $u_6^2 = -\beta\gamma$. Como u e w são

J-ortogonais então $(u+w)^2 = \alpha + \gamma$ e como por (1.53) A é alternativa temos $(\alpha + \gamma)v = (u+w)^2 v = (u+w)[(u+w)v] = (u+w)(uv + wv) = u(uv) + u(wv) + w(uv) + w(wv) = \alpha v + \gamma v - u(vw) - (uv)w = (\alpha + \gamma)v - u(vw) - (uv)w$, logo

$$(1.56) \quad u(vw) = -(uv)w = -u_7$$

Por outro lado, $v(\alpha + \gamma) = v(u+w)^2 = [v(u+w)](u+w) = (vu + vw)(u+w) = v\alpha + (vu)w + (vw)u + v\gamma = v(\alpha + \gamma) + (vw)u - (uv)w$, então

$$(1.57) \quad (vw)u = (uv)w = u_7$$

De (1.56) e (1.57) temos $u_1 u_6 + u_6 u_1 = u(vw) + (vw)u = 0$, logo u_1 e u_6 são J-ortogonais, $u_1 u_6 = u(vw) = -u_7$ e $u_7^2 = -u_1^2 u_6^2 = \alpha \beta \gamma$.

Aplicando o mesmo processo, trocando u por v e v por u temos

$$(1.58) \quad v(uw) = -(vu)w = (uv)w = u_7,$$

$u_2 = v$ e $u_5 = uw$ são J-ortogonais e $u_2 u_5 = u_7$. Aplicando o mesmo processo, trocando u por uv obtemos que $u_3 = uv$ e $u_6 = vw$ são J-ortogonais e $u_3 u_6 = (uv)(vw) = -[(uv)v]w = -\beta uw = -\beta u_5$. Trocando-se u por uv e v por u obtemos que $u_3 = uv$ e $u_5 = uw$ são J-ortogonais e

$$(1.59) \quad (uv)(uw) = -[(uv)u]w = \alpha vw = \alpha u_6$$

logo $u_3 u_5 = \alpha u_6$. Trocando v por uv obtemos $u_1 = u$ e $u_7 = (uv)w$ são J-ortogonais e $u_1 u_7 = u[(uv)w] = -[u(uv)]w = -\alpha vw = -\alpha u_6$. Trocando u por v e v por uv obtemos que $u_2 = v$ e $u_7 = (uv)w$ são J-ortogonais e $u_2 u_7 = v[(uv)w] = -[v(uv)]w = \beta uw = \beta u_5$. De

(1.58) e (1.56) obtemos $(uw)v = -v(uw) = (vu)w = -(uv)w = u(vw)$,
 de (1.59) obtemos $(uw)(uv) = -(uv)(uw) = -\alpha vw$, então $\alpha uv -$
 $-\alpha \gamma uv = (\alpha - \alpha \gamma)(uv) = (u + uw)^2(uv) = (u + uw)[(u + uw)(uv)] =$
 $= (u + uw)(\alpha v + (uw)(uv)) = (u + uw)(\alpha v - \alpha vw) = \alpha uv - \alpha u(vw) +$
 $+ \alpha(uw)v - \alpha(uw)(vw) = \alpha uv - \alpha u(vw) + \alpha u(vw) - \alpha(uw)(vw) = \alpha uv -$
 $- \alpha(uw)(vw)$, logo

$$(1.60) \quad (uw)(vw) = \gamma uv$$

Como em (1.60) trocando u por v e v por u obtemos $(vw)(uw) =$
 $= \gamma vu = -\gamma uv$, logo $u_5 = uw$ e $u_6 = vw$ são J -ortogonais e $u_5 u_6 =$
 $= \gamma u_3$. Aplicando o mesmo processo, trocando u por uv obte-
 mos $u_7 = (uv)w$ e $u_6 = vw$ são J -ortogonais e $u_7 \cdot u_6 = [(uv)w](vw) =$
 $= \gamma(uv)v = \beta \gamma u = \beta \gamma u_1$. Trocando u por uv e v por u , obtemos que
 $u_7 = (uv)w$ e $u_5 = uw$ são J -ortogonais e $u_7 u_5 = [(uv)w](uw) =$
 $= \gamma(uv)u = -\alpha \gamma v = -\alpha \gamma u_2$. Portanto $u_1, \dots, u_7$ é uma seqüência
 J -ortogonal de raízes quadradas e como $u_i \notin F$ ($i=1, \dots, 7$) por
 (1.51) $1, u_1, \dots, u_7$ são F -linearmente independentes; logo,
 $B = [1, u_1, \dots, u_7]$ é um subespaço vetorial de A de dimensão oi-
 to e pelos resultados obtidos é fácil ver que a tábua de mul-
 tiplicação da base $1, u_1, \dots, u_7$ é a dada no enunciado do Le-
 ma; daí, B é fechada em relação à multiplicação de A . Portan-
 to, B é uma subálgebra de A . ■

(1.61) TEOREMA: Se A é uma F -álgebra quadrática alternativa
 à direita, então A possui dimensão finita sobre F , as-
 sumindo um dos valores 1, 2, 4 ou 8.

Demonstração: Suponhamos o contrário. Sejam x, y em A tais que $1, x, y$ são F -linearmente independentes; considerando $x_1 = x - \frac{1}{2}t(x)$ e $y_1 = y - \frac{1}{2}t(y)$, por (1.47) x_1 e y_1 são raízes quadradas e claramente são F -linearmente independentes, logo por (1.49) $x_1 y_1 + y_1 x_1 = \delta \in F$. Sejam $u = \frac{1}{2} \delta \beta_1^{-1} y_1 - x_1 \neq 0$ e $v = y_1$, onde $y_1^2 = \beta_1$, agora $u^2 = \frac{1}{4} \delta^2 \beta_1^{-2} y_1^2 + x_1^2 - \frac{1}{2} \delta \beta_1^{-1} y_1 x_1 - \frac{1}{2} \delta \beta_1^{-1} x_1 y_1 = \frac{1}{4} \delta^2 \beta_1^{-1} + x_1^2 - \frac{1}{2} \delta \beta_1^{-1} (y_1 x_1 + x_1 y_1) = \frac{1}{4} \delta^2 \beta_1^{-1} + x_1^2 - \frac{1}{2} \delta^2 \beta_1^{-1} = x_1^2 - \frac{1}{4} \delta^2 \beta_1^{-1} \in F$ e $uv + vu = \frac{1}{2} \delta \beta_1^{-1} y_1^2 - x_1 y_1 + \frac{1}{2} \delta \beta_1^{-1} y_1^2 - y_1 x_1 = \delta - (x_1 y_1 + y_1 x_1) = 0$, então u e v são raízes quadradas J -ortogonais de A , logo por (1.54) $u_1 = u, u_2 = v$ e $u_3 = uv$ é uma seqüência J -ortogonal de raízes quadradas e $D = F + u_1 F + u_2 F + u_3 F$ é uma subálgebra de A de dimensão quatro. Como $D \neq A$, por (1.52) existe $w \in A \setminus D$, tal que u_1, u_2, u_3 e w é uma seqüência J -ortogonal de raízes quadradas, por (1.55) $u_1, u_2, u_3, u_4 = w, u_5 = uw, u_6 = vw$ e $u_7 = (uv)w$ é uma seqüência J -ortogonal de raízes quadradas e $B = F + Fu_1 + \dots + Fu_7$ é uma subálgebra de A de dimensão oito. Como $B \neq A$, por (1.52) existe $z \in A \setminus B$ tal que $u_1, \dots, u_7, z$ é uma seqüência J -ortogonal de raízes quadradas. Seja $t = (uv)(wz)$, então $(uv)t = (uv)[(uv)(wz)] = (uv)^2(wz) = -\alpha\beta(wz)$, onde $u^2 = \alpha$ e $v^2 = \beta$, $((uv)t)^2 = \alpha^2\beta^2(wz)^2 = -\alpha^2\beta^2\gamma\rho \neq 0$, portanto $t \neq 0$, onde $w^2 = \gamma$ e $z^2 = \rho$. Em (1.56) trocando u por uv , v por w e w por z , obtemos $(uv)(wz) = -[(uv)w]z$, daí por (1.56) $t = (uv)(wz) = -[(uv)w]z = [u(vw)]z$. Em (1.56) trocando v por vw e w por z , obtemos $u[(vw)z] = -[u(vw)]z = -t$, da mesma forma trocando u por v , v por w e w por z , obtemos $(vw)z = -v(wz)$, daí $t = -u[(vw)z] = u[v(wz)]$. Aplicando (1.55) para $v_1 = u, v_2 = w,$

$v_3 = uw$ e $v_4 = z$ obtemos que wz e u são raízes quadradas J-ortogonais. Da mesma forma considerando $w_1 = v$, $w_2 = w$, $w_3 = vw$ e $w_4 = z$ obtemos wz e v são raízes quadradas J-ortogonais e $z_1 = uv$, $z_2 = w$, $z_3 = (uv)w$ e $z_4 = z$ obtemos wz e uv são raízes quadradas J-ortogonais. Então em (1.56) trocando w por wz temos $t = u[v(wz)] = -(uv)(wz) = -t$, logo $t = 0$ que é uma contradição. ■

(1.62) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra quadrática alternativa à direita. Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Demonstração: Se $x \in A \setminus R$, por (1.47), $y^2 = -n(y)$, onde $y = x - \frac{1}{2}t(x)$. Se $n(y) < 0$, então $(y - \sqrt{-n(y)})(y + \sqrt{-n(y)}) = 0$. Como por (1.53) A não tem divisores de zero, então $y = \pm \sqrt{-n(y)}$ que é uma contradição. Logo $n(y) > 0$, daí $\left(\frac{y}{\sqrt{n(y)}}\right)^2 = -1$. Por (1.61) A possui dimensão finita sobre R assumindo um dos valores $1, 2, 4$ ou 8 . Se $\dim_R A = 1$, então A é isomorfa a R . Se $\dim_R A = 2$, existe $x \in A$ tal que $A = [1, x]$; seja $u = \frac{y}{\sqrt{n(y)}}$, onde $y = x - \frac{1}{2}t(x)$, daí $A = [1, u]$ e $u^2 = -1$. Assim A é isomorfa a C . Se $\dim_R A = 4$, então existem $u, v_1 \in A$ tais que $1, u, v_1$ são R -linearmente independentes e $u^2 = v_1^2 = -1$. Por (1.49) $uv_1 + v_1u = \alpha \in F$, daí $(u + v_1)^2 = \alpha - 2 = -n(u + v_1) < 0$ e $(u - v_1)^2 = -\alpha - 2 = -n(u - v_1) < 0$, portanto $-2 < \alpha < 2$, logo $4 - \alpha^2 > 0$. Seja $v = \frac{1}{\sqrt{4 - \alpha^2}}(2v_1 + \alpha u)$, mostremos que $v^2 = -1$ e que u e v são J-ortogonais; $v^2 = \frac{1}{4 - \alpha^2}(-4 - \alpha^2 + 2\alpha(v_1u + uv_1)) = \frac{1}{4 - \alpha^2}(-4 - \alpha^2 + 2\alpha^2) = -\frac{4 - \alpha^2}{4 - \alpha^2} = -1$; $uv + vu = \frac{1}{\sqrt{4 - \alpha^2}}(2uv_1 - \alpha + 2v_1u - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4 - \alpha^2}}(2(uv_1 + v_1u) - 2\alpha) = 0$. Como u e v são J-ortogonais

e $u^2 = v^2 = -1$, por (1.54) A é isomorfa a H . Se $\dim_R A = 8$, sejam u e v como obtidos anteriormente. Por (1.52) existe $z \in A \setminus D$, onde $D = F + Fu + Fv + Fuv$, tal que u, v, uv e z é uma sequência J -ortogonal de raízes quadradas. Se $w = \frac{z}{\sqrt{n(z)}}$, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = uv$ e $u_4 = w$ é uma sequência J -ortogonal de raízes quadradas e como $u_1^2 = u_2^2 = u_4^2 = -1$, por (1.55) A é isomorfa a C . ■

(1.63) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra alternativa à direita e sem divisores de zero. Suponhamos que para todo $x \in A$, $R_x(A(x)) = A(x)$. Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Demonstração: Por (1.62) basta mostrar que A tem elemento unidade e é uma álgebra quadrática. Dado $x \in A$, $x \neq 0$, existe $e \in A(x)$ tal que $R_x(e) = ex = x$. Como A não tem divisores de zero e por (1.10) $A(x)$ é associativa, então $e^2 x = e(ex) = ex = x$, daí $e^2 = e$, logo por (1.39) e é elemento unidade de A . Portanto, como o elemento unidade é único, A tem elemento unidade 1 e além disso para todo $x \in A$, $1 \in A(x)$. Para todo $x \in A$, se $x \in R$, então como em (1.44) consideremos $t(x) = 2x$ e $n(x) = x^2$. Se $x \notin R$, como $1 \in A(x) = [x, x^2, \dots]$, então $1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i$, onde $\alpha_i \in R$ ($i=1, \dots, n$), consideremos o polinômio $f = -1 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n \in R[X]$. Sejam $f_1, f_2, \dots, f_m \in R[X]$ polinômios irredutíveis, tais que $f = f_1 \dots f_m$. Como A não tem divisores de zero e $0 = f(x) = f_1(x) \dots f_m(x)$, existe k , $1 \leq k \leq m$ tal que $f_k(x) = 0$, como $x \notin R$ e f_k é irredutível,

então existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, tais que $f_k = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, daí existem $\frac{\beta}{\alpha}$ e $\frac{\gamma}{\alpha}$, que são únicos, tais que $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$. Assim definimos $t(x) = -\frac{\beta}{\alpha}$ e $n(x) = \frac{\gamma}{\alpha}$. Se $n(x) = 0$, então $x(x - t(x)) = 0$, logo $x = 0$ ou $x = t(x)$ que é uma contradição, portanto $n(x) \neq 0$. ■

§ 4. ÁLGEBRAS ALGÉBRICAS

(1.64) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra A é *algébrica* se para todo $x \in A$ a subálgebra $A(x)$ de A é um F -espaço vetorial de dimensão finita.

(1.65) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra algébrica, alternativa à direita e sem divisores de zero. Então A é isomorfa a R , $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$.

Demonstração: Para todo $x \in A$, $x \neq 0$, como A não tem divisores de zero, a aplicação linear $R_x: A(x) \rightarrow A(x)$ é injetora. Como $A(x)$ é um R -espaço vetorial de dimensão finita, R_x é sobrejetora, daí $R_x(A(x)) = A(x)$, portanto de (1.63) o teorema está demonstrado. ■

(1.66) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra A é uma *álgebra de divisão*, se para todo a e $b \in A$, $a \neq 0$, as equações $ax=b$ e $ya=b$ têm soluções únicas em A .

É fácil ver que A é uma álgebra de divisão se, e somente se, para todo $a \in A$, $a \neq 0$, as transformações lineares R_a e L_a são inversíveis. Como consequência de (1.65), observando que se A é uma álgebra com divisão, então A não tem divisores de zero, obtemos o 1º Teorema de Frobenius (1878) e o 2º Teorema de Frobenius (1950, Bruck e Kleinfeld).

(1.67) TEOREMA (1º Teorema de Frobenius): Seja A uma R -álgebra de divisão, associativa, com elemento unidade e de dimensão finita. Então A é isomorfa a R , C ou H .

(1.68) TEOREMA (2º Teorema de Frobenius): Seja A uma R -álgebra de divisão, alternativa, com elemento unidade e de dimensão finita. Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

(1.69) LEMA: Seja A uma R -álgebra algébrica, com potências associativas e sem divisores de zero. Então para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R ou C e além disso, A tem elemento unidade 1 e $1 \in A(x)$.

Demonstração: Para todo $x \in A$, $x \neq 0$, como A não possui divisores de zero, então as transformações lineares R_x e L_x consideradas de $A(x)$ em $A(x)$ são injetoras e como $A(x)$ é um R -espaço

vetorial de dimensão finita, então R_x e L_x são sobrejetoras, daí $R_x(A(x)) = A(x)$ e $L_x(A(x)) = A(x)$, logo por (1.43) A tem elemento unidade 1 e $1 \in A(x)$. Como $A(x)$ é associativa e comutativa, por (1.65) $A(x)$ é isomorfa a R ou C . ■

(1.70) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra algébrica, com potências associativas, comutativa e sem divisores de zero. Então A é isomorfa a R ou C .

Demonstração: Por (1.69), para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R ou C , A tem elemento unidade 1 e $1 \in A(x)$. Se para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R , então A é isomorfa a R . Suponhamos que existe $x \in A$, $x \neq 0$, tal que $A(x)$ seja isomorfa a C , daí $A(x) = [1, i]$ onde $i^2 = -1$. Mostremos que $A = [1, i]$. Suponhamos que exista $y \in A \setminus A(x)$, então $A(y)$ é isomorfa a C , daí $A(y) = [1, j]$ onde $j^2 = -1$, como A é comutativa, temos $0 = i^2 - j^2 = (i-j)(i+j)$, como A não tem divisores de zero, então $i = \pm j$ que é uma contradição. ■

(1.71) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra algébrica, com potências associativas e sem divisores de zero. Suponhamos que, para todo $x, y \in A$, (x, y, y) comuta com x . Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Demonstração: Por (1.65) basta mostrar que, para todo x, y em A , $(x, y, y) = 0$. Por (1.69), para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R ou C , A tem elemento unidade 1 e $1 \in A(x)$. Suponhamos que existam x e y em A tais que $A((x, y, y))$ seja

isomorfa a $\mathbb{C}$, então existe $i \in A$ tal que $A((x, y, y)) = [1, i]$ e $i^2 = -1$. Por outro lado $A(x)$ e $A(y)$ são isomorfas a $\mathbb{C}$, daí existem $j, k \in A$ tais que $A(x) = [1, j]$, $A(y) = [1, k]$ e $j^2 = k^2 = -1$. Como $0 = (x+y, (x+y, y, y)) = (x+y, (x, y, y)) = (y, (x, y, y))$, então j e k comutam com i , daí $0 = j^2 - i^2 = (j-i)(j+i)$ e como A não tem divisores de zero, então $j = \pm i$; analogamente $k = \pm i$, portanto $(x, y, y) = 0$, que é uma contradição. Logo, para todo x e y em A existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, y) = \alpha 1$. Dados x e y dois elementos de A , se $A(x)$ ou $A(y)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, então $(x, y, y) = 0$. Suponhamos que $A(x)$ e $A(y)$ sejam isomorfos a $\mathbb{C}$. Então existem $i, j \in A$ tais que $A(x) = [1, i]$, $A(y) = [1, j]$ e $i^2 = j^2 = -1$, logo $x = \alpha + \beta i$ e $y = \gamma + \delta j$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Como $(ij, j, j) = \alpha_1$ e $(i, j, j) = \alpha_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, temos $\alpha_1 = (ij, j, j) = (i, j, j)j = \alpha_2 j$, logo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, então $(i, j, j) = 0$, daí $(x, y, y) = \beta \delta^2 (i, j, j) = 0$. ■

(1.72) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra A é *flexível*, se para todo x, y em A , temos $(x, y, x) = 0$.

(1.73) TEOREMA: Seja A uma $\mathbb{R}$ -álgebra algébrica, com potências associativas, flexível e sem divisores de zero. Suponhamos que para todo x, y em A , (x, y, y) comuta com y ; então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{C}$.

Demonstração: Por (1.65) basta mostrar que, para todo x, y em A , $(x, y, y) = 0$. Para todo $x \in A$, $x \neq 0$, por (1.69), $A(x)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A tem elemento unidade 1 e $1 \in A(x)$. Para todo x e y em A , se $A(x)$ ou $A(y)$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, então

$(x, y, y) = 0$. Suponhamos que existam x e y em A tais que $A(x)$ e $A(y)$ sejam isomorfas a $\mathbb{C}$, daí existem $i, j \in A$ tais que $A(x) = [1, i]$, $A(y) = [1, j]$ e $i^2 = j^2 = -1$. Se $A(ij + ji)$ for isomorfa a $\mathbb{C}$, então $A(ij + ji) = [1, k]$, onde $k^2 = -1$. Usando (1.32) obtemos $(ij + ji, i) = (ij + ji, j) = 0$, logo i e j comutam com k , como A não tem divisores de zero, então $i = \pm k$ e $j = \pm k$, daí $(x, y, y) = 0$. Suponhamos que $A(ij + ji)$ seja isomorfa a $\mathbb{R}$, então $ij + ji = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Por outro lado, $(ji, j, j) - (j, ij, j) = ((ji)j)j + ji - (j(ij))j + j((ij)j) = j((ij)j + i) + ((ji)j - j(ij))j = j(i, j, j) + (j, i, j)j$, daí $(ji, j, j) - (j, ij, j) = j(i, j, j) + (j, i, j)j$. Como A é flexível, j comuta com (i, j, j) , $ji = \alpha - ij$ e $(ij, j, j) = (i, j, j)j$, obtemos $j(i, j, j) = (ji, j, j) = (\alpha - ij, j, j) = \alpha(1, j, j) - (ij, j, j) = -(i, j, j)j$, daí $2j(i, j, j) = 0$, logo $(i, j, j) = 0$. Como $x = \beta + \gamma i$ e $y = \lambda + \delta j$, onde $\beta, \gamma, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$, temos $(x, y, y) = \gamma \delta^2 (i, j, j) = 0$. ■

(1.74) OBSERVAÇÃO: Entre as $\mathbb{R}$ -álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, H e C , somente $\mathbb{C}$ é uma $\mathbb{C}$ -álgebra. De fato, considerando A igual a H ou C , suponhamos que A seja uma $\mathbb{C}$ -álgebra. Sejam $e, e_1, e_2 \in A$, $\mathbb{R}$ -linearmente independentes, tais que $e^2 = e$, $e_1^2 = e_2^2 = -e$, $ee_1 = e_1e = e_1$, $ee_2 = e_2e = e_2$. Assim, para $k=1, 2$, temos $0 = (ie)^2 - e_k^2 = (ie - e_k)(ie + e_k)$, logo $e_k = \pm ie$, então $e_1 = \pm e_2$, que é uma contradição. Com isso nos teoremas (1.62), (1.63), (1.65), (1.67), (1.68), (1.70) e (1.71) se trocarmos, "A uma $\mathbb{R}$ -álgebra", por, "A uma $\mathbb{C}$ -álgebra", como A também será uma $\mathbb{R}$ -álgebra, pelo comentário feito acima, concluimos que A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

CAPÍTULO III

ÁLGEBRAS COM VALOR ABSOLUTO

§ 1. COMPLEXIFICAÇÃO DE UMA ÁLGEBRA REAL

Sejam A uma $\mathbb{R}$ -álgebra e $A_{\mathbb{C}} = A \times A$; em $A_{\mathbb{C}}$ definimos para $(x, y), (z, t) \in A_{\mathbb{C}}$ e $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$,

$$(x, y) + (z, t) = (x+z, y+t).$$

$$\alpha(x, y) = (a + bi)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

$$(x, y) \cdot (z, t) = (xz - yt, xt + yz).$$

É fácil ver que $A_{\mathbb{C}}$, com as operações e a multiplicação por escalar definidas acima é uma $\mathbb{C}$ -álgebra; além disso, se A for associativa $A_{\mathbb{C}}$ também será.

É fácil ver que $A' = \{(x, 0) \in A_{\mathbb{C}} / x \in A\}$ é uma subálgebra de $A_{\mathbb{C}}$, naturalmente isomorfa a A , o isomorfismo $f: A \rightarrow A'$ sendo dado por $f(x) = (x, 0)$. Identifiquemos A' com

A , isto é, para todo $x \in A$, poremos $(x, 0) = x$. Com isso, para todo $(x, y) \in A_{\mathbb{C}}$, temos $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + i(y, 0) = x + iy$, logo todo elemento $u \in A_{\mathbb{C}}$ se escreve de modo único da forma $u = x + iy$, onde $x, y \in A$.

(2.1) LEMA: Seja A uma R -álgebra de dimensão finita. Se $\{a_1, \dots, a_n\}$ é uma base de A , então $\{a_1, \dots, a_n\}$ é uma base de $A_{\mathbb{C}}$, como $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e portanto $\dim_R A = \dim_{\mathbb{C}} A_{\mathbb{C}}$.

Demonstração: Trivial. ■

Seja f uma transformação linear de A em A . Consideremos $f_{\mathbb{C}}: A_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$, dada por $f_{\mathbb{C}}(u + iv) = f(u) + if(v)$. É fácil ver que $f_{\mathbb{C}}$ é uma transformação linear do $\mathbb{C}$ -espaço vetorial $A_{\mathbb{C}}$ em si mesmo.

(2.2) LEMA: Sejam A uma R -álgebra de dimensão finita e f uma transformação linear de A em A . Então $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma raiz característica de f se e somente se λ é uma raiz característica de $f_{\mathbb{C}}$.

Demonstração: Se $\{a_1, \dots, a_n\}$ é uma base de A , por (2.1), $\{a_1, \dots, a_n\}$ é uma base de $A_{\mathbb{C}}$, como $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e como $f(a_i) = f_{\mathbb{C}}(a_i)$, para todo $i = 1, \dots, n$, as matrizes de f e $f_{\mathbb{C}}$ em relação a base $\{a_1, \dots, a_n\}$ são iguais, portanto o polinômio característico de f e $f_{\mathbb{C}}$ são os mesmos. ■

(2.3) LEMA: Seja A uma R -álgebra com elemento unidade, sem divisores de zero e de dimensão finita. Então, para todo $x \in A \setminus R$, os fatores irredutíveis do polinômio característico de R_x em sua decomposição em $R[X]$ são de grau 2 e como consequência, $\dim_R A$ é par.

Demonstração: Indiquemos por I o operador idêntico de A e por $p_x = \det(XI - R_x)$ o polinômio característico de R_x . Para todo $x \in A$, $x \neq 0$, como A não tem divisores de zero e A é de dimensão finita, então R_x é inversível. Dado $x \in A \setminus R$, se $\alpha \in R$ é raiz de p_x , então $0 = \det(\alpha I - R_x) = \det(R_{\alpha-x})$, daí $\alpha = x$, que é uma contradição, logo o teorema está demonstrado. ■

Para todo $x \in A$, como para todo $u+iv \in A_{\mathbb{C}}$, temos
 $(R_x)_{\mathbb{C}}(u+iv) = R_x(u) + iR_x(v) = ux + ivx = (u+iv)x$, indicaremos
 $(R_x)_{\mathbb{C}}$ por R_x .

(2.4) LEMA: Seja A uma R -álgebra com elemento unidade, sem divisores de zero e de dimensão finita. Então, para todo $x \in A \setminus R$, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma raiz característica de R_x , $\lambda \notin R$ e além disso existe $u+iv \in A_{\mathbb{C}}$, $u+iv \neq 0$ tal que $R_x(u+iv) = \lambda(u+iv)$.

Demonstração: Dado $x \in A \setminus R$, por (2.3) se $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma raiz característica de R_x , então $\lambda \notin R$, por (2.2) existe $u+iv \in A_{\mathbb{C}}$, $u+iv \neq 0$ tal que $R_x(u+iv) = \lambda(u+iv)$. ■

§ 2. ÁLGEBRAS ALGÉBRICAS COM VALOR ABSOLUTO

(2.5) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é uma álgebra com valor absoluto se existir uma função $\| \cdot \| : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in F$:

- 1) $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- 3) $\|xy\| = \|x\| \|y\|$;
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Observemos que uma álgebra com valor absoluto não tem divisores de zero.

(2.6) LEMA: Seja A uma $\mathbb{R}$ -álgebra com valor absoluto, com elemento unidade e de dimensão finita. Dado $x \in A \setminus \mathbb{R}$, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma raiz característica de R_x , então $|\lambda| = \|x\|$.

Demonstração: Por (2.4) $\lambda \notin \mathbb{R}$ e existe $z = u + iv \neq 0$ tal que $R_x(z) = \lambda z$ e daí $R_x^m(z) = \lambda^m z$, para todo inteiro $m \geq 1$. Pondo $\lambda = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, onde $\rho = |\lambda|$ e θ é um argumento de λ , temos que $R_x^m(u + iv) = \rho^m(\cos(m\theta) + i \sin(m\theta))(u + iv)$, daí

$$\begin{aligned} R_x^m(u) &= \rho^m(u \cos(m\theta) - v \sin(m\theta)) \\ R_x^m(v) &= \rho^m(u \sin(m\theta) + v \cos(m\theta)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como $|\cos(m\theta)| \leq 1$ e $|\sin(m\theta)| \leq 1$, obtemos os seguintes resultados:

$$\|R_X^m(u)\| = \|u\| \|x\|^m \leq \rho^m \gamma \quad \text{e} \quad \|R_X^m(v)\| = \|v\| \|x\|^m \leq \rho^m \gamma$$

onde $\gamma = \|u\| + \|v\|$; daí $\|u\| \|x\|^m + \|v\| \|x\|^m \leq 2\rho^m \gamma$, logo, $\gamma \|x\|^m \leq 2\rho^m \gamma$, então $(\|x\| \rho^{-1})^m \leq 2$ para todo inteiro $m \geq 1$, logo $\|x\| \rho^{-1} \leq 1$, portanto $\|x\| \leq \rho$. Por outro lado, de (2.7) $R_X^m(u \cos(m\theta) + v \sin(m\theta)) = \rho^m(u \cos^2(m\theta) - v \sin(m\theta) \cos(m\theta) + u \sin^2(m\theta) + v \cos(m\theta) \sin(m\theta)) = \rho^m u$. Da mesma forma obtemos $R_X^m(v \cos(m\theta) - u \sin(m\theta)) = \rho^m v$. Logo $\rho^m \|u\| \leq \gamma \|x\|^m$ e $\rho^m \|v\| \leq \gamma \|x\|^m$, daí $\rho^m \gamma \leq 2\|x\|^m \gamma$, portanto $(\rho \|x\|^{-1})^m \leq 2$, para todo inteiro $m \geq 1$, logo $\rho \|x\|^{-1} \leq 1$, então $\rho \leq \|x\|$. Como $\|x\| \leq \rho$ temos $\rho = \|x\|$. ■

(2.8) LEMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto, com elemento unidade e de dimensão finita. Se $x \in A \setminus R$, $p_x = (x^2 - \alpha x + \beta)^t$ onde $x^2 - \alpha x + \beta$ é um polinômio real irredutível e $t \geq 1$.

Demonstração: Seja λ uma raiz característica de R_x , pondo $y = 1 + x$, temos $R_y = I + R_x$, então $\det((\lambda+1)I - R_y) = \det(\lambda I - R_x) = 0$, logo $\lambda+1$ é raiz característica de R_y . Sejam $\alpha_1 + \beta_1 i$ e $\alpha_2 + \beta_2 i$ duas raízes características de R_x , podemos assumir sem perda de generalidade que $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$. Por (2.6) $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \|x\|^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2$. Da mesma forma, aplicando em R_y , obtemos $(\alpha_1 + 1)^2 + \beta_1^2 = \|y\|^2 = (\alpha_2 + 1)^2 + \beta_2^2$, daí $2\alpha_1 = 2\alpha_2$ e $\beta_1^2 = \beta_2^2$, logo $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$; assim o teorema está demonstrado. ■

(2.9) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto, com elemento unidade e de dimensão finita. Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Demonstração: Por (1.65) basta mostrar que A é alternativa à direita. Para todo $x \in A$, se $x \in R$, então para todo $y \in A$ $(y, x, x) = 0$. Suponhamos que exista $x \in A \setminus R$. Por (2.8) $p_x = (x^2 - \alpha x + \beta)^t$, onde $x^2 - \alpha x + \beta$ é um polinômio real irreduzível, então $(R_x^2 - \alpha R_x + \beta I)^t = 0$. Seja $\lambda = a + bi \in C \setminus R$ uma raiz característica de R_x , então $x^2 - \alpha x + \beta = (x - (a + bi))(x - (a - bi))$, daí $2a = \alpha$ e $\beta = a^2 + b^2 = |\lambda|^2$. Seja $u = \frac{1}{b}(x - a)$, então $(R_x^2 - \alpha R_x + \beta I)^h = 0$ se, e somente se $(R_u^2 + I)^h = 0$, pois para todo $y \in A$, temos $(R_u^2 + I)(y) = (yu)u + y = \frac{1}{b^2}[(y(x-a))(x-a) + b^2 y] = \frac{1}{b^2}[(yx - ay)(x-a) + b^2 y] = \frac{1}{b^2}[(yx)x - ayx - ayx + a^2 y + b^2 y] = \frac{1}{b^2}[(yx)x - 2ayx + (a^2 + b^2)y] = \frac{1}{b^2}[(yx)x - \alpha yx + \beta y] = \frac{1}{b^2}(R_x^2 - \alpha R_x + \beta I)(y)$. Seja k o menor inteiro positivo tal que $(R_u^2 + I)^k = 0$, mostremos que $k = 1$. Por (2.6) temos $\|u\| = |\sqrt{-1}| = 1$, daí para todo $y \in A$, $\|R_u^2(y)\| = \|(yu)u\| = \|y\|$, então $\|R_u^{2m}(y)\| = \|y\|$, para todo inteiro $m \geq 1$. Suponhamos que $k > 1$, chamando $T = (R_u^2 + I)^{k-2} \neq 0$, então $(R_u^2 + I)^{k-1} = (R_u^2 + I)T \neq 0$ e $(R_u^2 + I)^2 T = 0$. Seja $v \in A$ tal que $((R_u^2 + I)T)(v) \neq 0$, pondo $w = T(v)$, temos $(R_u^2 + I)(w) \neq 0$ e $(R_u^2 + I)^2(w) = 0$, daí $R_u^4(w) = -(2R_u^2 + I)(w)$. Mostremos por indução, que para todo inteiro $m \geq 1$, temos

$$(2.10) \quad R_u^{2m}(w) = (-1)^{m+1}(mR_u^2 + (m-1)I)(w)$$

É fácil ver que (2.10) é verdadeira para $m = 1$ e $m = 2$. Admitimos (2.10) verdadeira para $m \geq 2$; então $R_u^{2m+2}(w) =$

$$\begin{aligned}
 &= R_u^2(R_u^{2m}(w)) = R_u^2((-1)^{m+1}(mR_u^2 + (m-1)I)(w)) = (-1)^{m+1}[mR_u^4(w) + \\
 &+ (m-1)R_u^2(w)] = (-1)^{m+1}[-m(2R_u^2 + I)(w) + mR_u^2(w) - R_u^2(w)] = \\
 &= (-1)^{m+1}[-(m+1)R_u^2(w) - mI(w)] = (-1)^{m+2}((m+1)R_u^2 + mI)(w).
 \end{aligned}$$

Por (2.10) temos $R_u^{2m}(w) = (-1)^{m+1}(m(R_u^2 + I)(w) - w)$, para todo inteiro $m \geq 1$, daí $\|R_u^{2m}(w)\| \geq m\delta - \|w\|$, onde $\delta = \|(R_u^2 + I)(w)\| > 0$. Como $\|R_u^{2m}(w)\| = \|w\|$, então $\|w\| \geq m\delta - \|w\|$, logo $2\|w\| \geq m\delta$, para todo inteiro $m \geq 1$, que é uma contradição. Portanto, $k=1$, logo $R_x^2 = \alpha R_x - \beta I$. Para todo $y \in A$ temos, $(yx)x = R_x^2(y) = \alpha R_x(y) - \beta I(y) = \alpha yx - \beta y = y(\alpha x - \beta) = y(\alpha R_x - \beta I)(1) = yR_x^2(1) = y(xx) = yx^2$. ■

(2.11) TEOREMA (Albert): Seja A uma R -álgebra algébrica com valor absoluto e com elemento unidade. Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Demonstração: Para todo $x \in A$, como $A(x)$ é um R -espaço vetorial de dimensão finita, então $A(1,x)$ também o é, pois, se $A(x) = [u_1, \dots, u_n]$ então $A(1,x) = [1, u_1, \dots, u_n]$. Por (2.9) $A(1,x)$ é isomorfa a R ou C , pois, se $x \in R$, então $A(1,x)$ é isomorfa a R , se $x \notin R$, como C , H e C são álgebras quadráticas, existem $a, b \in R$ tais que $x^2 - ax + b = 0$, logo $A(1,x) = [1, x]$.

Para todo $x \in A \setminus R$, temos $A(1,x)$ é isomorfa a C . Considerando $R_x: A(1,x) \rightarrow A(1,x)$, por (2.8) $p_x = x^2 - \alpha x + \beta$ que é um polinômio real irreduzível. Se λ é uma raiz característica de R_x , por (2.6) $|\lambda| = \|x\|$, daí como $p_x = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$, então $\beta = |\lambda|^2 = \|x\|^2$. Por outro lado, $R_x^2 - \alpha R_x + \beta I = 0$, logo

$$0 = R_x^2(1) - \alpha R_x(1) + \beta I(1) = x^2 - \alpha x + \beta, \quad \text{daí } x^2 - \alpha x + \|x\|^2 = 0.$$

Seja $u_1, \dots, u_n$ uma sequência J-ortogonal de elementos de A (def (1.50)) tal que $u_i^2 = -1$ ($i=1, \dots, n$). Se $x = \lambda_0 + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$, onde $\lambda_i \in R$ ($i=0, 1, \dots, n$), então $x^2 - 2\lambda_0 x + \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0$, daí $x^2 - 2\lambda_0 x + \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = x^2 - \alpha x + \|x\|^2$, então $\|x\|^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$.

Por (1.65) para demonstrar o teorema, basta mostrar que A é alternativa à direita. Dados x e y elementos de A, se $x \in R$ ou $y \in R$, então $(x, y, y) = 0$. Suponhamos que $x \notin R$ e $y \notin R$. Como $A(1, x)$ e $A(1, y)$ são isomorfas a C , então existem u_1, v , elementos de A tais que $A(1, x) = [1, u_1]$, $A(1, y) = [1, v]$ e $u_1^2 = v^2 = -1$. Se $1, u_1$ e v são R-linearmente dependentes, então $A(1, x) = A(1, y)$, logo $(x, y, y) = 0$. Suponhamos que $1, u_1$ e v sejam R-linearmente independentes, daí por (1.49) $u_1 v + v u_1 = \delta \in R$. Como na demonstração de (1.62), se tomamos $u = \frac{1}{\sqrt{4-\delta^2}}(2u_1 + \delta v)$, então u e v são J-ortogonais e $u^2 = v^2 = -1$. Se $uv \in B = R + Ru + Rv$, então $uv = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 v$, onde $\lambda_i \in R$ ($i=0, 1, 2$), então $1 = \|uv\|^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Por outro lado, $\|1+v\|^2 = \|(1+v)^2\| = \|2v\| = 2$, então $2 = \|1+v\|^2 = \|u\|^2 \|1+v\|^2 = \|u+uv\|^2 = \|\lambda_0 + (\lambda_1 + 1)u + \lambda_2 v\|^2 = \lambda_0^2 + (\lambda_1 + 1)^2 + \lambda_2^2$, logo $2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 + 1 = 2 + 2\lambda_1$, daí $\lambda_1 = 0$. Analogamente $\lambda_2 = 0$, logo $\lambda_0^2 = 1$. Como $4 = \|1+u\|^2 \|1+v\|^2 = \|1+u+v+uv\|^2 = \|1+\lambda_0 + u+v\|^2 = (1+\lambda_0)^2 + 1 + 1$, logo $\lambda_0 = 0$ que é uma contradição, portanto $uv \notin B$. Por (1.52) existe $b \in B$ tal que $t = uv - b$ é uma raiz quadrada e u, v, t são J-ortogonais. Como t é uma raiz quadrada, então $t^2 = \gamma \in R$, $\gamma < 0$, pois, caso contrário, $(t - \sqrt{\gamma})(t + \sqrt{\gamma}) = 0$, daí $t = \pm \sqrt{\gamma} \in R$.

Tomando $w = \frac{t}{\sqrt{-\gamma}}$, temos u, v, w são J-ortogonais e $w^2 = -1$. Como $uv = t + b$ e $b \in B$, então $uv = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$, onde $\lambda_i \in R$ ($i=0,1,2$) e $\lambda_3 = \sqrt{-\gamma}$. Procedendo da mesma forma, como foi feito anteriormente, temos $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, daí $\lambda_3 = \pm 1$, logo $uv = \pm w$, portanto u, v e uv são J-ortogonais, $u^2 = v^2 = (uv)^2 = -1$. Aplicando o mesmo procedimento para uv e v concluimos, uv, v e $(uv)v$ são J-ortogonais e $((uv)v)^2 = -1$. Suponhamos que $(uv)v \notin R + Ru + Rv + Ruv$, então por (1.52) existe $z \in A$, que podemos considerar $z^2 = -1$, tal que u, v, uv e z são J-ortogonais e $(uv)v = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 uv + \alpha_4 z$, onde $\alpha_i \in R$ ($i=0, \dots, 4$) e $\alpha_4 \neq 0$. Como $uv, v, (uv)v$ são J-ortogonais, então $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, logo $(uv)v = \alpha_1 u + \alpha_4 z$. Por outro lado $1 = \|(uv)v\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_4^2$ e $\|(u+uv)(-1+v)\|^2 = \|u\|^2 \|1+v\|^2 \|-1+v\|^2 = 4$, daí $4 = \|(u+uv)(-1+v)\|^2 = \|-u + uv - uv + (uv)v\|^2 = \|-u + \alpha_1 u + \alpha_4 z\|^2 = \|(-1 + \alpha_1)u + \alpha_4 z\|^2 = (-1 + \alpha_1)^2 + \alpha_4^2 = 1 - 2\alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_4^2 = 1 - 2\alpha_1 + 1$, logo $\alpha_1 = -1$, então $\alpha_4 = 0$, que é uma contradição. Portanto $(uv)v \in R + Ru + Rv + Ruv$. Procedendo da mesma forma, concluimos que $(uv)v = -u$. Como $x \in [1, u_1]$ e $y \in [1, v]$, então $x = \lambda_1 + \beta_1 u_1$ e $y = \lambda_2 + \beta_2 v$. Mas $u_1 = \frac{\sqrt{4-\delta^2}}{2} u - \frac{\delta}{2} v$, então $x = \lambda_1 + \frac{\beta_1 \sqrt{4-\delta^2}}{2} u - \frac{\beta_1 \delta}{2} v$. Como $u^2 = v^2 = -1$ e $(uv)v = -u$ é fácil ver que $(x, y, y) = 0$. ■

§ 3. ÁLGEBRAS COM VALOR ABSOLUTO

Observe-se que se A é uma F -álgebra ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com valor absoluto, então todo F -subespaço vetorial de A é um F -espaço vetorial normado.

(2.12) LEMA (Teorema de Schoenberg): Um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial normado S tem sua norma proveniente de um produto interno, se para todo x, y em S com $\|x\| = \|y\| = 1$ tem-se $\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 \geq 4$.

Demonstração: Vide [17]. ■

(2.13) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{R}$ -álgebra com valor absoluto e B um subconjunto de A tal que $xy = yx$ para todo $x, y \in B$. Então o $\mathbb{R}$ -subespaço vetorial normado de A , gerado por B , tem sua norma proveniente de um produto interno.

Demonstração: É fácil ver que, para todo $x, y \in B$ temos $xy = yx$ daí $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, conseqüentemente se $\|x\| = \|y\| = 1$, temos $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|(x+y)^2\| + \|(x-y)^2\| \geq \|(x+y)^2 - (x-y)^2\| = 4\|xy\| = 4$, logo por (2.12) o Lema está demonstrado. ■

(2.14) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{R}$ -álgebra com valor absoluto, x e y elementos de A $\mathbb{R}$ -linearmente independentes tais que $xy = yx$ e $\|x\| = 1$. Então o $\mathbb{R}$ -subespaço vetorial norma

do $[x, y]$, de A , tem sua norma proveniente de um produto interno e além disso existe $z \in [x, y]$ tal que $\|z\| = 1$, z é ortogonal a x e $[x, y] = [x, z]$.

Demonstração: Como $xy = yx$, então por (2.13) o R -subespaço vetorial normado $[x, y]$ tem sua norma proveniente de um produto interno. Por outro lado como x e y são R -linearmente independentes, $\dim_R [x, y] = 2$, logo existe $z \in [x, y]$, z ortogonal a x , $\|z\| = 1$ e $[x, y] = [x, z]$. ■

(2.15) LEMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Sejam x e y elementos de A tais que $xy = yx$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| = 2$. Então $x + y = 0$.

Demonstração: Se x e y são R -linearmente dependentes, então $x = \lambda y$, onde $\lambda \in R$, daí $1 = \|x\| = \|\lambda y\| = |\lambda|$ e $2 = \|x - y\| = \|\lambda y - y\| = |\lambda - 1|$, logo $\lambda = -1$, portanto $x + y = 0$. Suponhamos que x e y sejam R -linearmente independentes. Por (2.14) existe $z \in [x, y]$, tal que $\|z\| = 1$, z é ortogonal a x e $[x, y] = [x, z]$. Como $\|x\| = \|z\| = 1$, z é ortogonal a x , então para todo $\lambda, \mu \in R$, temos: $\|\lambda x + \mu z\|^2 = \lambda^2 + \mu^2$. Como $y \in [x, z]$, $y = \alpha x + \beta z$ onde $\alpha, \beta \in R$, daí $1 = \|y\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Por outro lado $4 = \|x - y\|^2 = \|x - \alpha x - \beta z\|^2 = \|(1 - \alpha)x - \beta z\|^2 = (1 - \alpha)^2 + \beta^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 2 - 2\alpha$, assim, $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, que é uma contradição. ■

(2.16) TEOREMA: Se A é uma R -álgebra com valor absoluto e com elemento unidade, então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Demonstração: Por (2.11) basta mostrar que A é uma álgebra algébrica. Sejam $x \in A$, $x \neq 0$. Se 1 e x são R -linearmente dependentes então $A(x)$ é isomorfa a R . Suponhamos que 1 e x sejam R -linearmente independentes. Mostremos que $x^2 \in [1, x]$. Por (2.14) existe $z \in [1, x]$ tal que, $\|z\| = 1$, z é ortogonal a 1 e $[1, x] = [1, z]$. Como $x \in [1, z]$, então $x = \alpha + \beta z$, onde $\alpha, \beta \in R$, daí $x^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 z^2$, logo $x^2 \in [1, z, z^2]$. Por outro lado, $\|1 - z^2\| = \|1 - z\| \|1 + z\| = 2$, então por (2.15) $1 + z^2 = 0$, logo $z^2 \in [1, z]$, portanto $x^2 \in [1, z, z^2] = [1, z] = [1, x]$. Assim $[1, x]$ é uma subálgebra de A que contém 1 e x , então $A(1, x) = [1, x]$, como $A(x) \subset A(1, x)$, então $\dim_R A(x) \leq 2$. ■

Denotaremos por C^* a R -álgebra obtida como segue:

- 1) Como R -espaço vetorial C^* coincide com C ;
- 2) A multiplicação de C^* é definida por $x * y = \bar{x} \bar{y}$, onde $\bar{x}$ significa o conjugado de x .

Obtemos assim uma R -álgebra com valor absoluto, comutativa, não associativa e sem elemento unidade. É fácil ver que C^* possui uma base $\{e, i\}$ verificando $e * e = e$, $i * e = -i$ e $i * i = -e$. Esta álgebra é uma isótopa de C . (Ver § 4).

(2.17) TEOREMA: Se A é uma R -álgebra comutativa e com valor absoluto, então A é isomorfa a R , C ou C^* .

Demonstração: Como A é comutativa, por (2.13) o R -espaço vetorial normado A tem sua norma proveniente de um produto interno. Suponhamos que existam x, y e z em A , ortonormais; então

$\|x^2 - y^2\| = \|x - y\|\|x + y\| = 2$, $\|x^2 - z^2\| = 2$, daí por (2.15) $x^2 + y^2 = x^2 + z^2 = 0$. Segue $0 = y^2 - z^2 = (y - z)(y + z)$, logo $y = \pm z$, que é uma contradição. Portanto A é de dimensão finita menor ou igual a dois. Se $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$, então existe $u \in A$, $u \neq 0$, tal que $A = \mathbb{R}u$. Como $u^2 \in A$, então $u^2 = \alpha u$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Seja $e = \alpha^{-1}u \neq 0$, daí $e^2 = \alpha^{-2}u^2 = \alpha^{-2}\alpha u = \alpha^{-1}u = e$. Como $e \neq 0$ e $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$, então $A = \mathbb{R}e$. Para todo $x \in A$, $x = \lambda e$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, daí $xe = \lambda e^2 = \lambda e = x$, portanto e é elemento unidade de A , logo A é isomorfa a $\mathbb{R}$.

Suponhamos que $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$. Seja $\{a, b\}$ uma base ortonormal de A . Como a transformação linear à direita R_a é invertível, existe $c \in A$ tal que $R_a(c) = ca = a$. Como $\|a\| = 1$, então $1 = \|a\| = \|c\|\|a\| = \|c\|$. Por outro lado $\|a^2 - b^2\| = \|a - b\|\|a + b\| = 2$ e $\|a^2 - (cb)^2\| = \|(ca)^2 - (cb)^2\| = \|ca - cb\|\|ca + cb\| = \|c\|\|a - b\|\|c\|\|a + b\| = 2$, logo por (2.15) $a^2 + b^2 = a^2 + (cb)^2 = 0$, daí $0 = (b - cb)(b + cb)$, portanto $cb = b$ ou $cb = -b$.

Supondo que $cb = b$, mostremos que A é isomorfa a $\mathbb{C}$. Para todo $x \in A = [a, b]$, $x = \rho a + \theta b$, onde $\rho, \theta \in \mathbb{R}$, então $xc = \rho ac + \theta bc = \rho a + \theta b = x$, logo c é elemento unidade de A , daí por (2.16) A é isomorfa a $\mathbb{C}$.

Suponhamos que $bc = -b$; mostremos que A é isomorfa a $\mathbb{C}^*$. Inicialmente, provemos que A possui um idempotente não nulo. Como $c \in A = [a, b]$ e $\|c\| = 1$, então $c = \alpha a + \beta b$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Se $\beta = 0$, então $c = \alpha a$, daí $c^2 = \alpha ac = \alpha a = c$. Se $\alpha = 0$, então $c = \beta b$, daí $c^2 = \beta bc = -\beta b = -c$; seja $d = -c$, daí $d^2 = c^2 = -c = d$. Suponhamos $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Se $\gamma \in \mathbb{R}$ é raiz de $4x^3 - 3x - \alpha = 0$, é fácil ver que $\gamma \neq 0$ e $\alpha + 2\gamma \neq 0$. Sendo $\eta = \frac{\beta\gamma}{\alpha+2\gamma} \neq 0$ e $f = \gamma a + \eta b \neq 0$, mostremos que f é idempotente. Determinemos a^2 e ab como combinações lineares de a e b . Como $c = \alpha a + \beta b$, então

$$(2.18) \quad \begin{aligned} a &= ac = \alpha a^2 + \beta ab \\ -b &= bc = \alpha ab + \beta b^2 = -\beta a^2 + \alpha ab \end{aligned}$$

Em (2.18) multiplicando a primeira identidade por β , a segunda por α e somando, obtemos

$$(2.19) \quad ab = \beta a - \alpha b.$$

Substituindo (2.19) em (2.18) obtemos

$$(2.20) \quad a^2 = \alpha a + \beta b = c.$$

Usando (2.19) e (2.20), temos $f^2 = [(\gamma^2 - \eta^2)\alpha + 2\gamma\eta\beta]a + [(\gamma^2 - \eta^2)\beta - 2\gamma\eta\alpha]b$. Por outro lado, $(\gamma^2 - \eta^2)\alpha + 2\gamma\eta\beta = \gamma^2\alpha - \frac{\beta^2\gamma^2\alpha}{(\alpha+2\gamma)^2} + \frac{2\gamma^2\beta^2}{\alpha+2\gamma} = \gamma \cdot \frac{\gamma\alpha(\alpha+2\gamma)^2 - \beta^2\gamma\alpha + 2\gamma\beta^2(\alpha+2\gamma)}{(\alpha+2\gamma)^2} =$

$$\begin{aligned} &= \gamma \cdot \frac{\gamma\alpha^3 + 4\alpha^2\gamma^2 + 4\alpha\gamma^3 - \beta^2\gamma\alpha + 2\gamma\beta^2\alpha + 4\gamma^2\beta^2}{(\alpha+2\gamma)^2} = \\ &= \gamma \cdot \frac{\gamma\alpha + 4\gamma^2 + 4\alpha\gamma^3}{(\alpha+2\gamma)^2} = \gamma \cdot \frac{\gamma\alpha + 4\gamma^2 + \alpha(3\gamma + \alpha)}{(\alpha+2\gamma)^2} = \gamma \cdot \frac{\alpha^2 + 4\alpha\gamma + 4\gamma^2}{(\alpha+2\gamma)^2} = \gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \quad (\gamma^2 - \eta^2)\beta - 2\gamma\eta\alpha &= \eta\left(\frac{\gamma^2\beta}{\eta} - \eta\beta - 2\gamma\alpha\right) = \eta\left(\gamma\alpha + 2\gamma^2 - \frac{\beta^2\gamma}{\alpha+2\gamma} - 2\gamma\alpha\right) \\ &= \eta \cdot \frac{(2\gamma^2 - \gamma\alpha)(\alpha+2\gamma) - \beta^2\gamma}{\alpha+2\gamma} = \eta \cdot \frac{4\gamma^3 - \gamma}{\alpha+2\gamma} = \eta \cdot \frac{3\gamma + \alpha - \gamma}{\alpha+2\gamma} = \\ &= \eta \cdot \frac{\alpha+2\gamma}{\alpha+2\gamma} = \eta. \end{aligned}$$

Sejam $e \in A$, $e \neq 0$, idempotente e $g \in A$, g ortogonal a e com $\|g\| = 1$. Para concluir que A é isomorfa a C^* , mostremos que $g^2 = -e$ e $ge = -g$. Como $\|e - g^2\| = \|e - g\|\|e + g\| = 2$,

por (2.15), $g^2 = -e$. Por outro lado $\|e - (ge)^2\| = \|e - ge\| \|e + ge\| = \|e - g\| \|e + g\| = 2$, então $(ge)^2 = -e$, daí $0 = g^2 - (ge)^2 = (g - ge)(g + ge)$, logo $ge = g$ ou $ge = -g$. Se $ge = g$, então e é elemento unidade de A . Mas $ac = a = ae$, logo $c = e$, por outro lado $-b = bc = be = b$, daí $b = 0$, que é uma contradição. Portanto, $ge = -g$. ■

(2.21) TEOREMA: Se A é uma R -álgebra, com valor absoluto e com potências associativas, então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Demonstração: Dado $x \in A$, $x \neq 0$, a subálgebra $A(x)$ é associativa e comutativa. Por (2.17), $A(x)$ é isomorfa a R ou C , logo existe $e \in A$, um idempotente não nulo, daí por (1.39) e é elemento unidade de A e por (2.16), A é isomorfa a R , C , H ou C . ■

(2.22) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Suponhamos que exista um elemento $x \in A$, não nulo, tal que x, x^2 sejam R -linearmente independentes e que comutem com todos os elementos de A . Então A é isomorfa a C ou C^* .

Demonstração: Podemos supor que $\|x\| = 1$. Mostremos que $A = [x, x^2]$, daí A é comutativa, então por (2.17) o teorema está provado. Suponhamos que exista $y \in A \setminus [x, x^2]$. Como x, x^2 e y comutam entre si, por (2.13) o R -subespaço vetorial normado $[x, x^2, y]$, de A , tem sua norma proveniente de um produto inter

no, logo existe $z \in [x, x^2, y]$, ortogonal a x e a x^2 com $\|z\| = 1$. Por outro lado $\|x^2 - z^2\| = \|x - z\| \|x + z\| = 2$, daí por (2.15) $z^2 = -x^2$. Como $\|z^2\| = \|(x^2)^2\| = 1$, $z^2 (x^2)^2 = (-x^2) (x^2)^2 = (x^2)^2 (-x^2) = (x^2)^2 z^2$ e $\|(x^2)^2 - z^2\| = \|x^2 - z\| \|x^2 + z\| = 2$, então por (2.15) $z^2 = -(x^2)^2$, logo $0 = x^2 - (x^2)^2 = (x - x^2)(x + x^2)$, daí $x = \pm x^2$ que é uma contradição. ■

(2.23) OBSERVAÇÃO: Como na observação (1.74), entre as R -álgebras R , C , H e C , somente C é uma C -álgebra, além disso, a R -álgebra C^* não é uma C -álgebra. De fato, $C^* = [e, e_1]$, onde $e^2 = e \neq 0$, $ee_1 = e_1e = -e_1$, $e_1^2 = -e$. Se C^* é uma C -álgebra, então $(ie)^2 = -e$, assim $0 = (ie)^2 - e_1^2 = (ie - e_1)(ie + e_1)$, daí $e_1 = \pm ie$. Dado $x = ae + be_1 \in C^*$ onde $a, b \in R$, temos $x = ae \pm bie = (a \pm bi)e$, daí $xe = (a \pm bi)e^2 = (a \pm bi)e = x$, portanto e é elemento unidade de C^* , que é uma contradição. Assim nos teoremas (2.16), (2.17), (2.21) e (2.22) se trocarmos, "A uma R -álgebra", por, "A uma C -álgebra", obtemos que A é isomorfa a C .

§ 4. ÁLGEBRAS ISÓTOPAS

(2.24) DEFINIÇÃO: Sejam A e B duas álgebras sobre um corpo F . Diremos que A é *isótropa* a B , se A e B , como F -espaços vetoriais, são isomorfas e além disso existirem isomorfismos ϕ , ψ e η do F -espaço vetorial A no F -espaço vetorial B , tais que o produto $x \circ y$ de dois elementos x e y de A , está definido em função do produto em B pela relação

$$x \circ y = \eta^{-1}(\psi(x)\psi(y)).$$

A relação entre os produtos de A e de B pode ser representada pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{\mu_1} & A \\ (\psi, \psi) \downarrow & & \uparrow \eta^{-1} \\ B \times B & \xrightarrow{\mu_2} & B \end{array}$$

onde μ_1 e μ_2 são as multiplicações em A e B , respectivamente.

Observemos que a relação de isotopia é de equivalência.

Observemos também, que duas álgebras isótomas podem não ser isomorfas. Por exemplo C e C^* são isótomas mas não isomorfas.

(2.25) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto e suponhamos que exista $a \in A$ tal que as transformações lineares R_a e L_a sejam inversíveis. Então A é isótopa a R , C , H ou C .

Demonstração: Podemos supor $\|a\| = 1$. Consideremos a R -álgebra A° , obtida como segue:

1. Como R -espaço vetorial A° coincide com A ;
2. A multiplicação de A é definida por $x \circ y = R_a^{-1}(x)L_a^{-1}(y)$, com $x, y \in A^\circ$.

Dados $x, y \in A$, como $x = R_a(R_a^{-1}(x)) = R_a^{-1}(x)a$ e $y = L_a(L_a^{-1}(y)) = aL_a^{-1}(y)$, então para todo $x, y \in A^\circ$ temos $\|x \circ y\| = \|R_a^{-1}(x)L_a^{-1}(y)\| = \|R_a^{-1}(x)\| \|L_a^{-1}(y)\| = \|R_a^{-1}(x)a\| \|aL_a^{-1}(y)\| = \|x\| \|y\|$. Obtemos assim uma R -álgebra com valor absoluto, isótopa a A .

Seja $e = aa = R_a(a) = L_a(a)$, logo $R_a^{-1}(e) = a = L_a^{-1}(e)$. Para todo $x \in A^\circ$, temos $x \circ e = R_a^{-1}(x)L_a^{-1}(e) = R_a^{-1}(x)a = x$ e $e \circ x = R_a^{-1}(e)L_a^{-1}(x) = aL_a^{-1}(x) = x$, portanto e é elemento unida-de de A° , logo por (2.16) A° é isomorfa a R , C , H ou C e daí A é isótopa a R , C , H ou C . ■

(2.26) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto de dimensão finita. Então A é isótopa a R , C , H ou C .

Demonstração: Seja $a \in A$, $a \neq 0$. Como A não tem divisores de zero e é de dimensão finita, as transformações lineares R_a e L_a são inversíveis, logo por (2.25) A é isótopa a R , C , H ou C . ■

(2.27) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Suponhamos que exista um idempotente e de A , não nulo, que comuta com todos os elementos de A e $(z, e, z) = 0$ para todo z em A , ortogonal a e . Então A é isótopa a R , C , H ou C .

Demonstração: Se as transformações lineares R_e e L_e forem inversíveis, então por (2.25) o teorema estará provado. É claro que R_e e L_e são injetoras. Dado $x \in A$, se x, e são R -linearmente dependentes, então $x = \lambda e$, com $\lambda \in R$, daí $R_e(\lambda e) = x = L_e(\lambda e)$. Suponhamos que x, e sejam R -linearmente independentes. Como e comuta com x , então por (2.13) o R -subespaço vetorial normado $[e, x]$, de A , tem sua norma proveniente de um produto interno, daí existe $z \in [e, x]$, z ortogonal a e , tal que $\|z\| = 1$ e $[e, x] = [e, z]$. Por outro lado $\|e - z^2\| = \|e - z\|\|e + z\| = 2$ e $\|e - (ez)^2\| = \|e - ez\|\|e + ez\| = \|e - z\|\|e + z\| = 2$, então por (2.15) $z^2 = -e = (ez)^2$. Como ez comuta com z , então $0 = z^2 - (ez)^2 = (z - ez)(z + ez)$, daí $ez = \pm z$, portanto $[e, x] = [e, z] = [e, ez]$. Como $x \in [e, ez]$, então $x = \alpha e + \beta ez$, com $\alpha, \beta \in R$, logo $x = R_e(\alpha e + \beta z) = L_e(\alpha e + \beta z)$. Portanto R_e e L_e são sobrejetoras. ■

(2.28) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Suponhamos que, para todo $x \in A$, $(x, x, x) = 0$ e que exista $a \in A$, $a \neq 0$, que comuta com todos os elementos de A . Então A é isótopa a R , C , H ou C .

Demonstração: Para todo $x \in A$, temos $0 = (x+a, x+a, x+a) = (x, x, a) + (x, a, x) + (x, a, a) + (a, x, x) + (a, x, a) + (a, a, x) = x^2 a - x(xa) + (xa)x - x(ax) + (xa)a - xa^2 + (ax)x - ax^2 + (ax)a - a(xa) + a^2 x - a(ax) = -2x(ax) + 2(ax)x - xa^2 + a^2 x$. Também $0 = (x-a, x-a, x-a) = -(x, x, a) - (x, a, x) + (x, a, a) - (a, x, x) + (a, x, a) + (a, a, x) = -x^2 a + x(xa) - (xa)x + x(ax) + (xa)a - xa^2 - (ax)x + ax^2 + (ax)a - a(xa) + a^2 x - a(ax) = 2x(ax) - 2(ax)x - xa^2 + a^2 x$. Daí $-2xa^2 + 2a^2 x = 0$ ou seja $a^2 x = xa^2$. Se a e a^2 são R -linearmente independentes, como eles comutam com todos os elementos de A , por (2.22) A é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$, logo isótopa a $\mathbb{C}$. Se a e a^2 são R -linearmente dependentes, então $a^2 = \lambda a$, com $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, seja $e = \lambda^{-1} a \neq 0$, então $e^2 = \lambda^{-2} a^2 = \lambda^{-2} \lambda a = \lambda^{-1} a = e$. É claro que e comuta com todos os elementos de A . Por outro lado, dado $x \in A$, $0 = (x+e, x+e, x+e) = (x, x, e) + (x, e, x) + (x, e, e) + (e, x, x) + (e, x, e) + (e, e, x) = (x, e, x) + x^2 e - x(xe) + (xe)e - xe + (ex)x - ex^2 + (ex)e - e(xe) + ex - e(ex) = (x, e, x) + (x, e, x) = 2(x, e, x)$, logo $(x, e, x) = 0$, daí por (2.27) A é isótopa a R , $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$. ■

(2.29) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto. Suponhamos que exista $a \in A$, não nulo, que comuta com todos os elementos de A e para todo $x \in A$, $(x, a, x) = 0$. Então A é isótopa a R , $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$.

Demonstração: Mostremos inicialmente que a^2 comuta com todos os elementos de A . Dado $x \in A$, $0 = (x+a, a, x+a) = (x, a, a) + (a, a, x) = (xa)a - xa^2 + a^2 x - a(ax) = -xa^2 + a^2 x$, daí $a^2 x = xa^2$. Se a e a^2 forem R -linearmente independentes, então por (2.22)

A é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$, logo isótopa a $\mathbb{C}$. Se a e a^2 forem R -linearmente dependentes, então $a^2 = \lambda a$, com $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, então $e = \lambda^{-1}a$ é um idempotente de A , não nulo, que comuta com todos os elementos de A e além disso, para todo $x \in A$, $(x, e, x) = 0$. Por (2.27) A é isótopa a R , $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$. ■

(2.30) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra algébrica com valor absoluto. Suponhamos que exista um idempotente não nulo $e \in A$, que comuta com todos os elementos de A . Então A é isótopa a R , $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$.

Demonstração: Mostremos que as transformações lineares R_e e L_e são inversíveis, daí por (2.25) o teorema está demonstrado. Seja $x \in A$. Se $x = \lambda e$, $\lambda \in R$, então $R_e(x) = x = L_e(x)$. Suponhamos que e, x sejam R -linearmente independentes, então por (2.14) existe $z \in [e, x]$, z ortogonal a e , tal que $\|z\| = 1$ e $[e, x] = [e, z]$. Como $\|e - z\|^2 = \|e - z\| \|e + z\| = 2$, então por (2.15) $z^2 = -e$, daí $e \in A(z)$. Como $x \in [e, z]$, então $x \in A(z)$. $A(z)$ é de dimensão finita, então as transformações lineares R_e e L_e restritas a $A(z)$ são bijetoras, como $x \in A(z)$, então existe $y \in A(z)$ tal que $R_e(y) = x = L_e(y)$. ■

(2.31) OBSERVAÇÃO: Como consequência da observação (2.23) e das demonstrações dos teoremas (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30), concluímos que se nestes teoremas, trocarmos, " A uma R -álgebra", por, " A uma $\mathbb{C}$ -álgebra", Então A será isótopa a $\mathbb{C}$.

No teorema (2.16) gostaríamos de "tirar" o elemento unidade e obter, A isótopa a R , C , H ou C , mas K . Urbanik e F. Wright em [18], nos dão um exemplo de uma R -álgebra com valor absoluto de dimensão infinita.

(2.32) EXEMPLO: Seja A o conjunto das seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, tal que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ seja convergente.

Seja $\psi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função bijetora. Dados $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\alpha \in R$, definimos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$\alpha(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde

$z_{\psi(m,k)} = x_m y_k$ ($m, k = 0, 1, 2, \dots$). É fácil ver que A é uma R -

-álgebra. Dado $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$, definimos $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

É claro que 1, 2 e 4 da definição (2.5) estão verificadas.

Dados $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dois elementos de A , então

$$\begin{aligned} \|xy\| &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z_{\psi(m,k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_m^2 y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

CAPÍTULO III

ÁLGEBRAS COM VALOR ABSOLUTO PRÉ-HILBERTIANAS

§ 1. PRELIMINARES

Seja $\{e, i\}$ uma base de C^* , tal que $e^2 = e$, $ei = ie = -i$, $i^2 = -e$.

Dado $a = \alpha e + \beta i$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, um idempotente não nulo de C^* , então $a = a^2 = (\alpha^2 - \beta^2)e - 2\alpha\beta i$, assim $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha$ e $\beta = -2\alpha\beta$.

Se $\beta = 0$, então $\alpha^2 = \alpha$, e como $\alpha \neq 0$, temos $\alpha = 1$, daí $a = e$.

Se $\beta \neq 0$, então $\alpha = -\frac{1}{2}$, daí $\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, assim $a = -\frac{1}{2}e \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Portanto C^* possui três idempotentes não nulos, a saber: e ,

$e_1 = -\frac{1}{2}e + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e_2 = -\frac{1}{2}e - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. É fácil ver que $ee_1 = e_2$,

$ee_2 = e_1$, $e_1e_2 = e$, $e + e_1 + ee_1 = e + e_2 + ee_2 = e_1 + e_2 + e_1e_2 = 0$ e

que $\{e, e_1\}$, $\{e, e_2\}$ e $\{e_1, e_2\}$ são bases de C^* sobre $\mathbb{R}$.

(3.1) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F-álgebra A ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é uma álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana se A for uma álgebra com valor absoluto que provém de um produto interno. Indicaremos por $\langle x, y \rangle$ o produto interno de dois elementos x e y de A.

(3.2) LEMA: Seja A uma F-álgebra ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com valor absoluto pré-hilbertiana e sejam x, y elementos de A tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| = 2$. Então $x + y = 0$.

Demonstração: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = 4$. Como $\|x - y\| = 2$, então $\|x + y\|^2 = 0$, daí $x + y = 0$. ■

(3.3) LEMA: Sejam A uma F-álgebra ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com valor absoluto pré-hilbertiana, x e y dois elementos R-linearmente independentes de A que comutam entre si. Se z é um elemento de A que comuta com x e com y, então $z \in [x, y]$.

Demonstração: Podemos supor $\|x\| = \|y\| = 1$. Suponhamos que $z \notin [x, y]$. Então existe $w \in [x, y, z]$ tal que $\|w\| = 1$ e w é ortogonal a x e a y. Por outro lado $\|w^2 - x^2\| = \|w - x\| \|w + x\| = 2$ e $\|w^2 - y^2\| = 2$, então por (3.2) $w^2 + x^2 = w^2 + y^2 = 0$, assim $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, daí $x = \pm y$, que é uma contradição. ■

Observemos que se A é uma F-álgebra, F um corpo com no mínimo três elementos, que verifica $(x, x, x) = 0$, para todo x em A, então para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in F$ de

$(x + \lambda y, x + \lambda y, x + \lambda y) = 0$, obtemos

$$(3.4) \quad (xy + yx, x) + (x^2, y) = 0.$$

§ 2. ÁLGEBRAS COM VALOR ABSOLUTO PRÉ-HILBERTIANAS QUE VERIFICAM A IDENTIDADE $(x, x, x) = 0$

(3.5) LEMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo $x \in A$, $(x, x, x) = 0$. Se B é uma parte comutativa de A , que possui no mínimo um elemento não nulo, então $A(B)$ é isomorfa a R , C ou C^* .

Demonstração: Suponhamos que existam em B dois elementos x e y R -linearmente independentes. Assim, existem $a, b \in [x, y]$ ortonormais tais que $[x, y] = [a, b]$. Como $ab = ba$, então $\|a^2 - b^2\| = \|a+b\| \|a-b\| = 2$, daí por (3.2) $a^2 + b^2 = 0$. Por outro lado $0 = ((a+b)^2, a+b) = 2(ab, a+b)$ e $0 = ((a-b)^2, a-b) = -2(ab, a-b)$ então $(ab, a) = (ab, b) = 0$, logo por (3.3) $ab \in [a, b]$. Como $(a^2, a) = (b^2, b) = 0$ e $a^2 + b^2 = 0$, então $(b^2, a) = (a^2, b) = 0$, logo $a^2, b^2 \in [a, b]$, portanto $[a, b] = [x, y]$ é uma sub-álgebra de A . Por (3.3) $B \subset [x, y]$, então $A(B) \subset [x, y]$, assim $A(B)$ é uma álgebra comutativa, de (2.17) $A(B)$ é isomorfa a R , C ou C^* .

Suponhamos que em B não existam dois elementos linearmente independentes, então dado $z \in B$, $z \neq 0$, temos $A(B) =$

$= A(z)$. Se z e z^2 são R -linearmente independentes, como $z^2 z = z z^2$, por demonstração análoga a que foi feita anteriormente, concluímos que $A(z)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$. Se z e z^2 são R -linearmente dependentes, então $z^2 = \lambda z$, onde $\lambda \in R, \lambda \neq 0$. Então $e = \lambda^{-1} z$ é um idempotente de $A(z)$, não nulo. Como Re é uma sub-álgebra de A que contém z , então $A(z) = Re$, assim $A(z)$ é isomorfa a R . ■

(3.6) LEMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo $x \in A$, $(x, x, x) = 0$. Suponhamos que A possua duas subálgebras B e D isomorfas a $\mathbb{C}$ e a $\mathbb{C}^*$, respectivamente. Se um idempotente $e \in B \cap D$, então $e = 0$.

Demonstração: Suponhamos que $e \neq 0$. Como B é isomorfa a $\mathbb{C}$ e D isomorfa a $\mathbb{C}^*$, então existem $i, e' \in A$, tais que $i^2 = -e$, $ie = ei = i$, $B = [e, i]$; e' um idempotente não nulo, $e' + e + e'e = 0$, $ee' = e'e$ e $D = [e, e']$. Se $e' + i = \alpha e$, com $\alpha \in R$, então $e' = \alpha e - i$, daí $e' \in B$, logo $B = D$ que é uma contradição, portanto $e, e' + i$ são R -linearmente independentes. Como e comuta com $e' + i$, por (3.5) $A(e, e' + i)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$, assim $\dim_R A(e, e' + i) = 2$, logo $A(e, e' + i) = [e, e' + i]$. Por outro lado, como $e(e' + i) \in A(e, e' + i)$, então $e(e' + i) = \beta e + \gamma(e' + i)$, com $\beta, \gamma \in R$, como $ee' = -e - e'$, temos $-e - e' + i = ee' + i = e(e' + i) = \beta e + \gamma(e' + i)$, assim $(\beta + 1)e + (\gamma + 1)e' = (1 - \gamma)i$, como e, e' são R -linearmente independentes, então $1 \neq \gamma$, daí $i \in [e, e']$ que é uma contradição. ■

(3.7) LEMA: Sejam A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x, x, x) = 0$ e sejam e_1 e e_2 dois idempotentes de A tais que $(e_1, e_2) \neq 0$. Então existe um idempotente não nulo $e \in A$, que comuta com e_1 e com e_2 tal que $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$, com $\lambda \in R$. Além disso, $A(e, e_1)$ e $A(e, e_2)$ são isomorfas a C^* e e é o único idempotente não nulo de A que comuta com e_1 e com e_2 .

Demonstração: É claro que $(e_1 - e_2)^2 \neq 0$, pois A não tem divisores de zero e $e_1 \neq e_2$. Como $0 = ((e_1 + e_2)^2, e_1 + e_2) = (e_1 e_2 + e_2 e_1, e_1 + e_2)$, então $((e_1 - e_2)^2, e_1 + e_2) = 0$. Como $((e_1 - e_2)^2, e_1 - e_2) = 0$, então $((e_1 - e_2)^2, e_1) = 0 = ((e_1 - e_2)^2, e_2)$. Como $(e_1, e_2) \neq 0$, então $(e_1 - e_2)^2, e_1$ e $(e_1 - e_2)^2, e_2$ são R -linearmente independentes, assim por (3.5) $A((e_1 - e_2)^2, e_1)$ e $A((e_1 - e_2)^2, e_2)$ são isomorfas a C ou C^* , logo $\dim_R A((e_1 - e_2)^2, e_1) = \dim_R A((e_1 - e_2)^2, e_2) = 2$. Como $A((e_1 - e_2)^2) \subset A((e_1 - e_2)^2, e_1) \cap A((e_1 - e_2)^2, e_2)$, então $0 < \dim_R A((e_1 - e_2)^2) \leq 2$. Se $\dim A((e_1 - e_2)^2) = 2$, temos $A((e_1 - e_2)^2, e_1) = A((e_1 - e_2)^2) = A((e_1 - e_2)^2, e_2)$, daí $(e_1, e_2) = 0$, pois $A((e_1 - e_2)^2)$ é isomorfa a C ou C^* . Assim $\dim_R A((e_1 - e_2)^2) = 1$, logo existe $u \in A$, $u \neq 0$, tal que $A((e_1 - e_2)^2) = Ru$. Como $u^2 \in Ru$, então $u^2 = \alpha u$, com $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Seja $e = \alpha^{-1} u^2 \neq 0$, que é um idempotente e $A((e_1 - e_2)^2) = Re$. Como $(e_1 - e_2)^2 \in Re$, então $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$, com $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$. No início desta demonstração mostramos que $((e_1 - e_2)^2, e_1) = 0 = ((e_1 - e_2)^2, e_2)$. Como $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$, com $\lambda \neq 0$, então $(e, e_1) = 0 = (e, e_2)$. Como $(e_1, e_2) \neq 0$, então e, e_1 e e, e_2 são

R-linearmente independentes e como e, e_1 e e_2 são três idempotentes distintos, por (3.5) obtemos que $A(e, e_1)$ e $A(e, e_2)$ são isomorfas a C^* . Seja e_3 um idempotente não nulo de A que comuta com e_1 e com e_2 , mostremos que $e_3 = e$. Como $(e_1, e_2) \neq 0$, então $A(e_1, e_3)$ e $A(e_2, e_3)$ são isomorfas a C^* , daí $e_1 + e_3 + e_1 e_3 = 0$ e $e_2 + e_3 + e_2 e_3 = 0$, assim $e_3(e_1 - e_2) = e_2 - e_1$. Da mesma forma, obtemos $e(e_1 - e_2) = e_2 - e_1$, daí $(e_3 - e)(e_1 - e_2) = 0$, como $e_1 \neq e_2$, então $e_3 = e$. ■

(3.8) LEMA: Seja A uma R-álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x, x, x) = 0$. Então A não pode possuir, ao mesmo tempo, uma subálgebra isomorfa a C e uma subálgebra isomorfa a C^* .

Demonstração: Suponhamos que A possua uma subálgebra B isomorfa a C e uma subálgebra D isomorfa a C^* . Existem e, j, e' e e'' elementos de A , tais que $e^2 = e$, $ej = je = j$, $j^2 = -e$, $B = [e, j]$, $e'^2 = e'$, $e''^2 = e''$, $e'e'' = e''e'$, $e' + e'' + e'e'' = 0$ e $D = [e', e'']$. Se $(e, e') = 0$, por (3.5) e (3.6), $A(e, e')$ é isomorfa a R ou C , então $e = e'$, que novamente por (3.6) é uma contradição. Assim, $(e, e') \neq 0$. Por (3.7) existe um e''' de A tal que $A(e, e''')$ é isomorfa a C^* , que por (3.6) é uma contradição. ■

(3.9) TEOREMA: Seja A uma R-álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x, x, x) = 0$ e que possui uma subálgebra isomorfa a C . Então A é isomorfa a C, H ou C .

Demonstração: Para todo $x \in A$, $x \neq 0$, por (3.5) e (3.8) $A(x)$ é isomorfa a R ou C . Dados e_1 e e_2 dois idempotentes não nulos de A , mostremos que $e_1 = e_2$, assim existe um único idempotente não nulo e em A e além disso, para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $e \in A(x)$, o que se conclui que e é elemento unidade de A , então por (2.16) o teorema está demonstrado. De fato, se $(e_1, e_2) \neq 0$, por (3.7) existe um idempotente não nulo e de A tal que $A(e, e_1)$ é isomorfa a C^* , que por (3.8) é uma contradição, assim $(e_1, e_2) = 0$, daí por (3.5) e (3.8) $A(e_1, e_2)$ é isomorfa a R ou C , então $e_1 = e_2$. ■

(3.10) COROLÁRIO: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x, x, x) = 0$. Suponhamos que exista b em A tal que b e b^2 sejam R -linearmente independentes e $(b, b, b^2) = 0$. Então A é isomorfa a C , H ou C .

Demonstração: De (3.5) $A(b)$ é isomorfa a C ou C^* . Suponhamos que $A(b)$ seja isomorfa a C^* , então existem $e, i \in A$ tais que $e^2 = e$, $ei = ie = -i$, $i^2 = -e$ e $A(b) = [e, i]$. Seja $b = \alpha e + \beta i$, com $\alpha, \beta \in R$ como $(b, b, b^2) = 0$, então $0 = (b, b, b^2) = (\alpha e + \beta i, \alpha e + \beta i, (\alpha e + \beta i)^2) = (\alpha e + \beta i, \alpha e + \beta i, (\alpha^2 - \beta^2)e - 2\alpha\beta i) = -2\alpha^3\beta(e, e, i) + \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)(e, i, e) - 2\alpha^2\beta^2(e, i, i) + \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)(i, e, e) - 2\alpha^2\beta^2(i, e, i) + \beta^2(\alpha^2 - \beta^2)(i, i, e)$. Por outro lado $(e, e, i) = ei - e(ei) = -i + ei = -2i$; $(e, i, e) = (ei)e - e(ie) = 0$; $(e, i, i) = (ei)i - ei^2 = -i^2 + e = 2e$; $(i, e, e) = (ie)e - ie = -ie + i = 2i$; $(i, e, i) = (ie)i - i(ei) = 0$; $(i, i, e) = i^2e - i(ie) = -e + i^2 = -2e$, assim $4\alpha^3\beta i - 4\alpha^2\beta^2e + 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)i - 2\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)e = 0$,

então $2\alpha^3\beta + \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = 0$ e $2\alpha^2\beta^2 + \beta^2(\alpha^2 - \beta^2) = 0$, daí $3\alpha^3\beta - \alpha\beta^3 = 0$ e $3\alpha^2\beta^2 - \beta^4 = 0$. Como $\beta \neq 0$, pois caso contrário $b = \alpha e$, que é uma contradição, devido b e b^2 serem R -linearmente independentes. Portanto $3\alpha^2 = \beta^2$, logo $b^2 = (\alpha^2 - \beta^2)e - 2\alpha\beta i = -2\alpha^2e - 2\alpha\beta i = -2\alpha(\alpha e + \beta i) = -2\alpha b$, que novamente é uma contradição. Assim $A(b)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$, então por (3.9) o corolário está demonstrado. ■

(3.11) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x, x, x) = 0$. Suponhamos que A não tenha subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}^*$. Então A é isomorfa a R , $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$.

Demonstração: De (3.5), para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R ou $\mathbb{C}$. Se A possui uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$, então por (3.10) A é isomorfa a $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$. Suponhamos que A não possua subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$, então para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R . Sejam e_1, e_2 dois idempotentes de A . Se $(e_1, e_2) \neq 0$, então por (3.7) existe um idempotente e de A , tal que $A(e, e_1)$ é isomorfa a $\mathbb{C}^*$, que é uma contradição. Assim $(e_1, e_2) = 0$, daí por (3.5) $A(e_1, e_2)$ é isomorfa a R , então $e_1 = e_2$. Logo existe um idempotente $e \neq 0$ de A , tal que para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $e \in A(x)$. Como $A(x)$ é isomorfa a R , então $A(x) = Re$, portanto A é isomorfa a R . ■

(3.12) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x, x, x) = 0$. Se os idempotentes de A comutam entre si, então A é isomorfa a R , C , C^* , H ou C .

Demonstração: De (3.5), para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R , C ou C^* . Se A possui uma subálgebra isomorfa a C , então por (3.9) A é isomorfa a C , H ou C . Se A possui uma subálgebra isomorfa a C^* , então por (3.8) A não tem subálgebra isomorfa a C , assim para todo x em A , $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R ou C^* . Sejam D a subálgebra de A , isomorfa a C^* , e_1 e e_2 dois idempotentes de A , tais que $D = [e_1, e_2]$, $e_1 e_2 = e_2 e_1$, $e_1 + e_2 + e_1 e_2 = 0$. Mostremos que todo idempotente de A , está em D . Como todo elemento de A é combinação linear de um ou de dois idempotentes, virá $A = D$, logo A é isomorfa a C^* . De fato, seja e um idempotente não nulo de A , por (3.5) $A(e, e_1, e_2)$ é isomorfa a C^* . Como $D \subset A(e, e_1, e_2)$, então $A(e, e_1, e_2) = D$, daí $e \in D$.

Suponhamos que A não tenha subálgebra isomorfa a C ou a C^* , então para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R . Sejam e', e'' dois idempotentes de A , por (3.5) $A(e', e'')$ é isomorfa a R , então $e' = e''$. Assim existe um idempotente $e \neq 0$ de A tal que, para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $e \in A(x)$ e como $A(x)$ é isomorfa a R , $A(x) = Re$, daí A é isomorfa a R . ■

(3.13) LEMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo x em A , $(x, x, x) = 0$. Sejam

e_1 e e_2 dois idempotentes de A tais que $(e_1, e_2) \neq 0$.

Então existe um idempotente $e \neq 0$ de A que comuta com

e_1 e com e_2 , tal que $(e_1, e_2)^2 = \alpha e$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Além disso $A(e, e_1)$ e $A(e, e_2)$ são isomorfas a C^* .

Demonstração: Se e é um idempotente não nulo de A , então para todo $x, y \in A$, temos

$$(3.14) \quad \begin{aligned} (ey + ye - y, e) &= 0 \\ \langle ye, xe \rangle &= \langle y, x \rangle = \langle ey, ex \rangle. \end{aligned}$$

De fato, em (3.4) fazendo $x = e$, obtemos $0 = (ey + ye, e) + (e, y) = (ey + ye, e) - (y, e) = (ey + ye - y, e)$. $\|ye + xe\| = \|(y+x)e\| = \|y+x\|$, da mesma forma $\|ey + ex\| = \|y+x\|$; assim $\|ye + xe\|^2 = \langle ye + xe, ye + xe \rangle = \|y\|^2 + \|x\|^2 + 2\langle ye, xe \rangle$, $\|y+x\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 + 2\langle y, x \rangle$, logo $\langle ye, xe \rangle = \langle y, x \rangle$. Da mesma forma, $\langle ey, ex \rangle = \langle y, x \rangle$.

Sejam $u = e_1(e_1, e_2) + (e_1, e_2)e_1 - (e_1, e_2)$ e $v = e_2(e_1, e_2) + (e_1, e_2)e_2 - (e_1, e_2)$. Mostremos que $u = v = 0$. Inicialmente, verifiquemos que u é ortogonal a e_1 e v a e_2 . Utilizando a segunda identidade de (3.14) considerando $x = e_1$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle u, e_1 \rangle &= \langle e_1(e_1, e_2), e_1 \rangle + \langle (e_1, e_2)e_1, e_1 \rangle - \langle (e_1, e_2), e_1 \rangle = \\ &= \langle (e_1, e_2), e_1 \rangle + \langle (e_1, e_2), e_1 \rangle - \langle (e_1, e_2), e_1 \rangle = \\ &= \langle e_1 e_2 - e_2 e_1, e_1 \rangle = \langle e_1 e_2, e_1 \rangle - \langle e_2 e_1, e_1 \rangle = \\ &= \langle e_2, e_1 \rangle - \langle e_2, e_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma $\langle v, e_2 \rangle = 0$.

Na primeira identidade de (3.14) fazendo $y = (e_1, e_2)$

e $e = e_1$, obtemos $(u, e_1) = 0$. Da mesma forma $(v, e_2) = 0$. Como A possui dois idempotentes não nulos distintos então por (3.9) A não possui subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$, e por (3.5) $A(e_1, u)$ é isomorfa a R ou C^* . Se $A(e_1, u)$ é isomorfa a R , então $u = \alpha e_1$, com $\alpha \in R$, daí $0 = \langle u, e_1 \rangle = \langle \alpha e_1, e_1 \rangle = \alpha \langle e_1, e_1 \rangle = \alpha$, então $\alpha = 0$. Se $A(e_1, u)$ é isomorfa a C^* , existe e_3 , idempotente, tal que $A(e_1, u) = [e_1, e_3]$, $e_1 e_3 = e_3 e_1$ e $e_1 + e_3 + e_1 e_3 = 0$. Mostremos que u é ortogonal a e_3 . Utilizando a segunda identidade de (3.14) temos $\langle u, e_3 \rangle = -\langle u, e_1 + e_1 e_3 \rangle = -\langle u, e_1 e_3 \rangle = -\langle e_1(e_1, e_2), e_1 e_3 \rangle - \langle (e_1, e_2)e_1, e_3 e_1 \rangle + \langle (e_1, e_2), e_1 e_3 \rangle = -2\langle (e_1, e_2), e_3 \rangle + \langle (e_1, e_2), e_1 e_3 \rangle = 2\langle (e_1, e_2), e_1 + e_1 e_3 \rangle + \langle (e_1, e_2), e_1 e_3 \rangle = 3\langle (e_1, e_2), e_1 e_3 \rangle + \langle (e_1, e_2), e_1 \rangle = 3\langle e_1 e_2 - e_2 e_1, e_1 e_3 \rangle + \langle e_1 e_2 - e_2 e_1, e_1 \rangle = 3\langle e_2, e_3 \rangle - 3\langle e_2, e_3 \rangle + \langle e_2, e_1 \rangle - \langle e_2, e_1 \rangle = 0$. Como $u \in [e_1, e_3]$, então $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_3$, com $\alpha_1, \alpha_3 \in R$. Mas $\langle e_1, e_3 \rangle = -\langle e_3 + e_1 e_3, e_3 \rangle = -1 - \langle e_1, e_3 \rangle$, assim $\langle e_1, e_3 \rangle = -\frac{1}{2}$, daí $0 = \langle u, e_1 \rangle = \alpha_1 - \alpha_3/2$, $0 = \langle u, e_3 \rangle = -(\alpha_1/2) + \alpha_3$, então $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, portanto $u = 0$. Da mesma forma, trocando e_1 por e_2 , concluímos que $v = 0$.

Como $e_1(e_1, e_2) + (e_1, e_2)e_1 = (e_1, e_2)$ e $e_2(e_1, e_2) + (e_1, e_2)e_2 = (e_1, e_2)$, fazendo $x = (e_1, e_2)$ e $y = e_1$, depois $x = (e_1, e_2)$ e $y = e_2$ em (3.4) concluímos que $(e_1, e_2)^2$ comuta com e_1 e com e_2 . Por (3.5) $A((e_1, e_2)^2, e_1)$ e $A((e_1, e_2)^2, e_2)$ são isomorfas a R ou a C^* . Se $A((e_1, e_2)^2, e_1)$ for isomorfa a R , então $(e_1, e_2)^2 = \lambda e_1$, com $\lambda \in R$. Como $(e_1, e_2)^2$ comuta com e_2 , então e_1 comuta com e_2 , que é uma contradição; assim, $A((e_1, e_2)^2, e_1)$ é isomorfa a C^* . Da

mesma forma $A((e_1, e_2)^2, e_2)$ é isomorfa a C^* . Como $A((e_1, e_2)^2)$ é uma subálgebra de $A((e_1, e_2)^2, e_1)$ e de $A((e_1, e_2)^2, e_2)$, então $0 < \dim_R A((e_1, e_2)^2) \leq 2$. Se $\dim_R A((e_1, e_2)^2) = 2$, então $A((e_1, e_2)^2, e_1) = A((e_1, e_2)^2) = A((e_1, e_2)^2, e_2)$ e como estas álgebras são isomorfas a C^* , que é uma álgebra comutativa, então $(e_1, e_2) = 0$, que é uma contradição, portanto $\dim_R A((e_1, e_2)^2) = 1$. Existe um idempotente $e \neq 0$ tal que $(e_1, e_2)^2 = \alpha e$, com $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Como $(e_1, e_2)^2$ comuta com e_1 e com e_2 , então e comuta com e_1 e com e_2 e como $(e_1, e_2) \neq 0$, por (3.5) $A(e, e_1)$ e $A(e, e_2)$ são isomorfas a C^* . ■

(3.15) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana, tal que para todo x em A , $(x, x, x) = 0$. Sejam a, b dois elementos de A e $e \in A(a, b)$ um idempotente não nulo. Se a e b comutam com e , então $A(a, b)$ é isótopa a R , C , H ou C .

Demonstração: Por (2.28) basta mostrar que e comuta com todos os elementos de $A(a, b)$. Seja $z = z_1 \dots z_n$ (com alguma distribuição de parênteses) onde $z_i \in \{a, b\}$ ($i=1, \dots, n$). Mostremos por indução sobre n , que $(e, z) = 0$. Se $n=1$, então $z=a$ ou $z=b$, daí $(e, z) = 0$. Assumimos que $(e, t) = 0$, sempre que $t = z_1 \dots z_k$ (com alguma distribuição de parênteses), onde $z_i \in \{a, b\}$ ($i=1, \dots, k$) e $k < n$. Seja $z = z_1 \dots z_n$ (com alguma distribuição de parênteses), $z_i \in \{a, b\}$ ($i=1, \dots, n$). Como $n > 1$, então $z = (z_1 \dots z_\ell) (z_{\ell+1} \dots z_n)$, pela hipótese de indução, como $\ell < n$ e $n-\ell < n$, $(e, u) = (e, v) = 0$, onde $u = z_1 \dots z_\ell$ e $v = z_{\ell+1} \dots z_n$. Por (3.5) $A(e, u)$ e $A(e, v)$

são isomorfas a R , C ou C^* . Se $A(e,u)$ ou $A(e,v)$ é isomorfa a C , então por (3.9) A é isomorfa a C , H ou C ; daí e é elemento unidade de A , então $(e,z) = 0$. Se $A(e,u)$ e $A(e,v)$ são isomorfas a R , então $(e,z) = (e,uv) = 0$. Suponhamos que $A(e,u)$ seja isomorfa a R e $A(e,v)$ seja isomorfa a C^* , então $u = \alpha e$, com $\alpha \in R$, daí $u \in A(e,v)$ e como $A(e,v)$ é comutativa,

$(e,z) = (e,uv) = 0$. Analogamente, se $A(e,u)$ for isomorfa a C^* e $A(e,v)$ for isomorfa a R . Suponhamos que $A(e,u)$ e $A(e,v)$ sejam isomorfas a C^* , então existem $e_1, e_2 \in A$, idempotentes, não nulos, tais que $ee_1 = e_1e$, $e + e_1 + ee_1 = 0$, $A(e,u) = [e, e_1]$, $ee_2 = e_2e$, $e + e_2 + ee_2 = 0$ e $A(e,v) = [e, e_2]$. Se $(e_1, e_2) = 0$, então por (3.3) $[e, e_1] = [e, e_2]$, assim $A(e,u) = A(e,v)$, daí $(e,z) = 0$. Suponhamos que $(e_1, e_2) \neq 0$, então por (3.7) e (3.13) como e_1 e e_2 comutam com e , temos $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$ e $(e_1, e_2)^2 = \alpha e$, com $\lambda, \alpha \in R$. Assim $e_1 - (e_1e_2 + e_2e_1) + e_2 = \lambda e$, então e comuta com $e_1e_2 + e_2e_1$. Por outro lado $0 = ((e_1, e_2), (e_1, e_2), (e_1, e_2)) = ((e_1, e_2)^2, (e_1, e_2)) = (\alpha e, (e_1, e_2))$, então $(e_1e_2 - e_2e_1, e) = 0$, portanto e comuta com e_1e_2 e com e_2e_1 . Como $u \in A(e,u) = [e, e_1]$ e $v \in A(e,v) = [e, e_2]$, então $u = \alpha_1 e + \beta_1 e_1$ e $v = \alpha_2 e + \beta_2 e_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$, assim $z = uv = \alpha_1 \alpha_2 e + \alpha_1 \beta_2 ee_2 + \beta_1 \alpha_2 e_1 e + \beta_1 \beta_2 e_1 e_2 = \alpha_1 \alpha_2 e - \alpha_1 \beta_2 (e + e_2) - \beta_1 \alpha_2 (e + e_1) + \beta_1 \beta_2 e_1 e_2 = (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e - \alpha_2 \beta_1 e_1 - \alpha_1 \beta_2 e_2 + \beta_1 \beta_2 e_1 e_2$, então $(e,z) = 0$. ■

(3.16) TEOREMA: Se A é uma R -álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana tal que, para todo $x \in A$, $(x, x, x) = 0$, então A é isótopa a R , C , H ou C .

Demonstração: Se existe uma subálgebra de A isomorfa a C , então por (3.9) A é isomorfa a C , H ou C . Suponhamos que A não tenha subálgebra isomorfa a C . Por (3.5), para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R ou C^* . Seja $e \neq 0$ um idempotente de A . Mostremos que as transformações lineares R_e e L_e são inversíveis, daí por (2.25) o teorema estará demonstrado. Seja $x \in A$, $x \neq 0$ e $e' \in A(x)$ um idempotente não nulo. Mostremos que $A(e, e')$ é de dimensão finita. Se $(e, e') = 0$ então por (3.5) $A(e, e')$ é isomorfa a R ou C^* . Se $(e, e') \neq 0$ então por (3.13) existe um idempotente $e'' \neq 0$, que comuta com e' e com e , tal que $(e, e')^2 = \alpha e''$, com $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Como $e'' \in A(e, e')$ então por (3.15) $A(e, e')$ é isótopa a R , C , H ou C , logo de dimensão finita. Sejam as transformações lineares f e g de $A(e, e')$ em $A(e, e')$ definidas por $f(y) = R_e(y)$ e $g(y) = L_e(y)$, com $y \in A(e, e')$. Como A não tem divisores de zero e $A(e, e')$ é de dimensão finita, então f e g são sobrejetoras, daí existem $a, b \in A(e, e')$ tais que $f(a) = R_e(a) = e' = L_e(b) = g(b)$. Se $A(x)$ é isomorfa a R , então $x = \alpha' e'$, com $\alpha' \in R$, daí $x = R_e(\alpha' a) = L_e(\alpha' b)$. Se $A(x)$ é isomorfa a C^* , então existe um idempotente $e_1 \in A$, tal que $A(x) = [e', e_1]$. Da mesma forma que foi feito anteriormente, existem $a', b' \in A$ tais que $R_e(a') = e_1 = L_e(b')$. Como $x = \beta e' + \lambda e_1$, com $\beta, \lambda \in R$, então $x = R_e(\beta a + \lambda a') = L_e(\beta b + \lambda b')$, assim R_e e L_e são sobrejetoras e como elas são injetoras, o teorema está demonstrado. ■

(3.17) TEOREMA: Seja A uma R-álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana, tal que para todo x em A, $(x, x, x) = 0$. Suponhamos que para todos os idempotentes e_1, e_2 de A, $\langle e_1, e_2 \rangle \neq \frac{1}{4}$. Então A é isomorfa a R, C, C^* , H ou C.

Demonstração: Se A possui uma subálgebra isomorfa a C, então por (3.9) o teorema está demonstrado. Suponhamos que A não tenha subálgebra isomorfa a C. Sejam e' e e'' dois idempotentes de A, tais que $(e', e'') \neq 0$, então por (3.7) e (3.13) existe um idempotente $e \neq 0$ de A que comuta com e' e com e'' , tal que $A(e, e')$ e $A(e, e'')$ são isomorfas a C^* . As álgebras $A(e, e'+e'')$ e $A(e, e'-e'')$ são isomorfas a R ou C^* . Se $A(e, e'+e'')$ é isomorfa a R então $e' + e'' = \alpha e$, com $\alpha \in R$, daí $e'e'' + e'' = \alpha ee'' = e''e' + e''$, assim $e'e'' = e''e'$ que é uma contradição, logo $A(e, e'+e'')$ é isomorfa a C^* . Da mesma forma $A(e, e'-e'')$ é isomorfa a C^* . Logo existem idempotentes e_1 e e_2 de A tais que $A(e, e'+e'') = [e, e_1]$, $A(e, e'-e'') = [e, e_2]$, $ee_1 = e_1e$, $ee_2 = e_2e$. Como $e' + e'' \in [e, e_1]$ e $e' - e'' \in [e, e_2]$, então $e' + e'' = \alpha_1 e + \beta_1 e_1$ e $e' - e'' = \alpha_2 e + \beta_2 e_2$, com $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$, $\beta_1 \neq 0 \neq \beta_2$. Por outro lado, como $A(e, e')$ e $A(e, e'')$ são isomorfas a C^* , então $e + e' + ee' = e + e'' + ee'' = 0$, daí por (3.14) $\langle e', e \rangle = -\langle e + e'e, e \rangle = -\langle e, e \rangle - \langle e'e, e \rangle = -1 - \langle e', e \rangle$, logo $\langle e', e \rangle = -\frac{1}{2}$, da mesma forma $\langle e'', e \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle e_1, e \rangle = -\frac{1}{2}$ e $\langle e_2, e \rangle = -\frac{1}{2}$. Assim $-1 = \langle e' + e'', e \rangle = \alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1$, então $\beta_1 = 2(\alpha_1 + 1)$ e $0 = \langle e' - e'', e \rangle = \alpha_2 - \frac{1}{2}\beta_2$, então $\beta_2 = 2\alpha_2$, daí $e' + e'' = \alpha_1 e + 2(\alpha_1 + 1)e_1$ e $e' - e'' = \alpha_2 e + 2\alpha_2 e_2$. Como $e' + e''$ e e são ortogonais a $e' - e''$, temos $0 = \langle e' + e'', e' - e'' \rangle = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 + 1)\alpha_2 + 4(\alpha_1 + 1)\alpha_2 \langle e_1, e_2 \rangle = 2\alpha_2(\alpha_1 + 1)(-\frac{1}{2} + 2\langle e_1, e_2 \rangle)$.

Como $2\alpha_2(\alpha_1+1) = \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \neq 0$, então $\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{4}$, que é uma contradição. Portanto $(e', e'') = 0$, daí por (3.12) o teorema está demonstrado. ■

Gostaríamos de no teorema (3.16) tirar a condição $(x, x, x) = 0$ para todo x na álgebra, mas isto não é possível, pois a álgebra do exemplo (2.32) é uma álgebra com valor absoluto pré-hilbertiana de dimensão infinita que não verifica a condição $(x, x, x) = 0$. De fato, suponhamos que A verifique a condição $(x, x, x) = 0$, para todo $x \in A$. Por (3.11) A tem uma subálgebra isomorfa a C^* , assim existem três idempotentes e_1 , e_2 e e_3 , não nulos, tais que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ (observe os idempotentes de C^* no § 1). Como $e_1 = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $e_2 = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $e_3 = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então $0 = e_1 + e_2 + e_3 = (x_n + y_n + z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Seja $\psi(n, n) = m$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}^2 = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}^2 = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}^2 = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ então $x_n^2 = x_m$, $y_n^2 = y_m$ e $z_n^2 = z_m$, o que resulta $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 0$, daí $x_n = y_n = z_n = 0$, que é uma contradição.

CAPÍTULO IV

ÁLGEBRAS FLEXÍVEIS COM VALOR ABSOLUTO

§ 1. PRELIMINARES

Recordemos que C^* possui três idempotentes não nulos (cf. cap. II, § 3 e cap. III, § 1). Se e, e_1, e_2 são os idempotentes não nulos de C^* , então $e+e_1+ee_1 = e+e_2+ee_2 = e_1+e_2 + e_1e_2 = 0$ e $\{e, e_1\}$, $\{e, e_2\}$, $\{e_1, e_2\}$ são bases de C^* sobre R .

Recordemos também (cf. def. (1.72)) que uma F -álgebra A é flexível se, para todo $x, y \in A$, tem-se $(x, y, x) = 0$.

Observemos que toda álgebra alternativa ou comutativa é flexível. De fato, se A for alternativa, para todo $x, y \in A$, $0 = (x+y, x+y, x) = (x, x, x) + (x, y, x) + (y, x, x) + (y, y, x) = (x, y, x)$. Se A for comutativa, então para todo $x, y \in A$,

$$(x, y, x) = (xy)x - x(yx) = (xy)x - (yx)x = (xy)x - (xy)x = 0.$$

A seguir, obteremos algumas identidades válidas em álgebras flexíveis. Se A é uma F -álgebra (não necessariamente flexível), então para todo $x, y, z \in A$ temos

$$(4.1) \quad (xy, z) - x(y, z) - (x, z)y = (x, y, z) - (x, z, y) + (z, x, y)$$

$$\begin{aligned} \text{De fato: } (xy, z) - x(y, z) - (x, z)y &= (xy)z - z(xy) - x(yz) + x(zy) \\ &- (xz)y + (zx)y = (xy)z - x(yz) - ((xz)y - x(zy)) + (zx)y - z(xy) = \\ &= (x, y, z) - (x, z, y) + (z, x, y). \end{aligned}$$

Como consequência de (4.1), para todo $x, y \in A$, obtemos

$$\begin{aligned} (4.2) \quad (xx^2, y) - x(x^2, y) - (x, y)x^2 &= (x, x^2, y) - (x, y, x^2) + (y, x, x^2) \\ (yx^2, x) - y(x^2, x) - (y, x)x^2 &= (y, x^2, x) - (y, x, x^2) + (x, y, x^2) \end{aligned}$$

A primeira identidade de (4.2) é obtida, substituindo em (4.1) y por x^2 e z por y . A segunda é obtida, substituindo em (4.1), x por y , y por x^2 e z por x .

(4.3) LEMA: Se A é uma F -álgebra flexível, então para todo x, y, z em A e para todo e, e' , idempotentes de A , temos:

$$(4.4) \quad (x, y, z) + (z, y, x) = 0$$

$$(4.5) \quad (xx^2, y) + (yx^2, x) - x(x^2, y) = 0$$

$$(4.6) \quad (x^2, y) = x(x, y) + (x, y)x$$

$$(4.7) \quad (xy + yx, x) + (x^2, y) = 0$$

$$(4.8) \quad (e, e') = e(e, e') + (e, e')e$$

$$(4.9) \quad ((e, e')^2, e) = 0.$$

Demonstração:

$$(4.4): \quad 0 = (x+z, y, x+z) = (x, y, z) + (z, y, x).$$

(4.5): Somando as duas identidades de (4.2), como $0 = (x, x, x) = (x^2, x)$ e $(x, y) = -(y, x)$, temos $(xx^2, y) + (yx^2, x) - x(x^2, y) + (y, x)x^2 - (y, x)x^2 = (x, x^2, y) - (x, y, x^2) + (y, x, x^2) + (y, x^2, x) - (y, x, x^2) + (x, y, x^2) = (x, x^2, y) + (y, x^2, x)$, por (4.4) temos $(xx^2, y) + (yx^2, x) - x(x^2, y) = 0$.

$$(4.6): \quad \text{Por (4.4) temos } (x, x, y) + (y, x, x) = 0, \text{ então}$$

$$0 = x^2y - x(xy) + (yx)x - yx^2 = x^2y - yx^2 - x(xy - yx) - (xy - yx)x =$$

$$= (x^2, y) - x(x, y) - (x, y)x, \text{ daí } (x^2, y) = x(x, y) + (x, y)x.$$

$$(4.7): \quad \text{De (4.4) temos } 0 = (x, x, y) + (y, x, x) = x^2y -$$

$$- x(xy) + (yx)x - yx^2 = (x^2, y) + (xy + yx)x - x(xy + yx) = (x^2, y) +$$

$$+ (xy + yx, x).$$

$$(4.8): \quad \text{Basta tomar } x = e, \quad y = e' \text{ em (4.6).}$$

$$(4.9): \quad \text{Fazendo } x = (e, e'), \quad y = e \text{ em (4.7) e usando}$$

$$(4.8) \text{ obtemos } 0 = ((e, e')e + e(e, e'), (e, e')) + ((e, e')^2, e) =$$

$$= ((e, e'), (e, e')) + ((e, e')^2, e) = ((e, e')^2, e). \quad \blacksquare$$

(4.10) TEOREMA: Sejam A uma F-álgebra flexível, $\text{car } F \neq 2$ e B uma parte comutativa de A. Então $A(B)$ é comutativa.

Demonstração: Inicialmente mostremos que, para todo $x, y, z \in A$, que comutam entre si, temos

$$(4.11) \quad (xy, z) = 0$$

Por (4.4) $0 = (x, y, z) + (z, y, x) = (xy)z - x(yz) + (zy)x - z(yx) =$
 $= (xy)z - z(xy) + (zy)x - x(zy) = (xy, z) + (zy, x)$. Permutando x ,
 y e z , obtemos $(yz, x) + (xz, y) = 0$ e $(zx, y) + (yx, z) = 0$, en-
 tão $(xy, z) + (zy, x) - (yz, x) - (xz, y) + (zx, y) + (yx, z) = 0$, daí
 $2(xy, z) = 0$, logo $(xy, z) = 0$.

Dados $x = a_1 \dots a_n$ e $y = b_1 \dots b_m$ (com alguma dis-
 tribuição de parênteses) com $a_i, b_j \in B$ ($i=1, \dots, n$ e $j=1, \dots, m$),
 provemos que $(x, y) = 0$, usando indução sobre $n+m$. Se $n+m=2$,
 então $n=m=1$, daí $x, y \in B$, logo $(x, y) = 0$. Assumimos que
 $(r, s) = 0$, sempre que $r = a_1 \dots a_n$, $s = b_1 \dots b_m$ (com alguma
 distribuição de parênteses) com $a_i, b_j \in B$ ($i=1, \dots, n$ e
 $j=1, \dots, m$) e $n+m < k$. Sejam $x = a_1 \dots a_n$ e $y = b_1 \dots b_m$ (com
 alguma distribuição de parênteses), $a_i, b_j \in B$ ($i=1, \dots, n$ e
 $j=1, \dots, m$) e $n+m = k$. Suponhamos $n > 1$, daí $x = zt$, onde
 $z = a_1 \dots a_\ell$ e $t = a_{\ell+1} \dots a_n$. Como $m+\ell < k$, $m+(n-\ell) < k$ e
 $\ell+(n-\ell) < k$, pela hipótese de indução y, z e t comutam entre
 si, então por (4.11), temos $(zt, y) = 0$, portanto $(x, y) = 0$. ■

§ 2. ÁLGEBRAS FLEXÍVEIS COM VALOR ABSOLUTO

(4.12) TEOREMA: Se A é uma R -álgebra flexível com valor abso-
 luto que possui um elemento $a \neq 0$, que comuta com todos
 os elementos de A , então A é isótopa a R , C , H ou C .

Demonstração: Como A é flexível, então $(x, x, x) = 0$, para todo $x \in A$, logo por (2.28) o teorema está demonstrado. ■

(4.13) LEMA: Sejam A uma R -álgebra flexível com valor absoluto, e_1 e e_2 idempotentes de A tais que $(e_1, e_2) \neq 0$. Então existe um idempotente não nulo $e \in A$, tal que $(e_1, e_2)^2 = \alpha e$, com $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

Demonstração: Por (4.9) temos que $((e_1, e_2)^2, e_1) = 0 = ((e_1, e_2)^2, e_2)$. Por (4.10), $A((e_1, e_2)^2, e_1)$ e $A((e_1, e_2)^2, e_2)$ são comutativas. Por (2.17), $A((e_1, e_2)^2, e_1)$ e $A((e_1, e_2)^2, e_2)$ são isomorfas a R , C ou C^* , assim $\dim_R A((e_1, e_2)^2, e_1) \leq 2$ e $\dim_R A((e_1, e_2)^2, e_2) \leq 2$. Se $\dim_R A((e_1, e_2)^2) = 2$, como $A((e_1, e_2)^2)$ é uma subálgebra de $A((e_1, e_2)^2, e_1)$ e de $A((e_1, e_2)^2, e_2)$, então $A((e_1, e_2)^2, e_1) = A((e_1, e_2)^2, e_2) = A((e_1, e_2)^2)$, daí $(e_1, e_2) = 0$, que é uma contradição. Logo $\dim_R A((e_1, e_2)^2) = 1$, então existe $u \in A$, $u \neq 0$, tal que $A((e_1, e_2)^2) = Ru$. Por outro lado $u^2 \in Ru$, daí $u^2 = \beta u$, com $\beta \in R$, $\beta \neq 0$, seja $e = \beta^{-1}u \neq 0$, então e é um idempotente de A e $A((e_1, e_2)^2) = Re$, daí $(e_1, e_2)^2 = \alpha e$, com $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. ■

(4.14) LEMA: Seja A uma R -álgebra flexível com valor absoluto que possui duas subálgebras B e D isomorfas a C e a C^* , respectivamente. Se e é idempotente e $e \in B \cap D$ então $e = 0$.

Demonstração: Suponhamos que exista $e \in B \cap D$, um idempotente não nulo. Como B é isomorfa a C e D isomorfa a C^* , então

existem $i, e' \in A$, tais que, $i^2 = -e$, $ie = ei = i$, $B = [e, i]$, e' um idempotente, não nulo, $e' + e + e'e = 0$, $ee' = e'e$ e $D = [e, e']$. Fazendo $x = i$ e $y = e'$ em (4.5) obtemos

$$0 = (-i, e') + (-e'e, i) - i(-e, e') = -(i, e') + (e + e', i) + i(e, e') =$$

$$= (e', i) + (e, i) + (e', i) = 2(e', i), \text{ logo } (e', i) = 0, \text{ portanto}$$

e, e', i comutam entre si. Por (4.10) $A(e, e', i)$ é comutativa. Por (2.17) $A(e, e', i)$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$, daí $\dim_R A(e, e', i) = 2$. Como $B \subset A(e, e', i)$, $D \subset A(e, e', i)$ e $\dim_R B = \dim_R D = 2$, então $B = A(e, e', i) = D$, que é uma contradição. ■

(4.15) TEOREMA: Se A é uma R -álgebra flexível com valor absoluto que possui uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$, então A é isomorfa a $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$.

Demonstração: Seja B a subálgebra de A isomorfa a $\mathbb{C}$, seja $e \in B$, $e \neq 0$, o idempotente. Mostremos que e é o único idempotente não nulo de A . Seja e' um idempotente de A , suponhamos que $(e, e') \neq 0$. Por (4.13), existe um idempotente, não nulo, e'' de A , tal que $(e, e')^2 = \alpha e''$, com $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Por (4.9) $(e, e')^2$ comuta com e e com e' , assim e'' comuta com e e com e' . Por (4.10) $A(e, e'')$ é comutativa. Por (2.17) $A(e, e'')$ é isomorfa a R , $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$. Por (4.14) $A(e, e'')$ é isomorfa a R ou $\mathbb{C}$, logo $e = e''$, assim $(e, e') = (e'', e') = 0$, que é uma contradição. Portanto $(e, e') = 0$. Por (4.10), (2.17) e (4.14), $A(e, e')$ é isomorfa a R ou $\mathbb{C}$, assim $e = e'$. Para todo $x \in A$, $x \neq 0$, por (4.10) e (2.17), $A(x)$ é isomorfa a R , $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$. Como $\mathbb{C}^*$ possui três idempotentes, não nulos, então $A(x)$ é isomorfa a R ou $\mathbb{C}$, assim $A(x)$ tem elemento unidade.

Como elemento unidade de $A(x)$ é idempotente, então e é o elemento unidade de $A(x)$, assim e é elemento unidade de A , então por (2.16) A é isomorfa a $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$. ■

(4.16) TEOREMA: Se A é uma R -álgebra flexível com valor absoluto cujos idempotentes comutam entre si, então A é isomorfa a R , $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, H ou $\mathbb{C}$.

Demonstração: Para todo $x \in A$, $x \neq 0$, por (4.10) e (2.17), $A(x)$ é isomorfa a R , $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$. Se A possui uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$, então por (4.15) A é isomorfa a $\mathbb{C}$, H ou $\mathbb{C}$. Suponhamos que A não tenha uma subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$ e que possua uma subálgebra D isomorfa a $\mathbb{C}^*$. Sejam e' e e'' dois idempotentes de A tais que $D = [e', e'']$. Para todo idempotente $e \in A$, como e, e' e e'' comutam entre si, então por (4.10) e (2.17) $A(e, e', e'')$ é isomorfa a $\mathbb{C}^*$, assim $A(e, e', e'') = D$, portanto D possui todos os idempotentes de A . Como para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R ou $\mathbb{C}^*$, então x é combinação linear de um ou de dois idempotentes de A , logo $x \in D$, assim $D = A$, portanto A é isomorfa a $\mathbb{C}^*$. Suponhamos que A não tenha subálgebra isomorfa a $\mathbb{C}$ ou a $\mathbb{C}^*$, assim, para todo $x \in A$, $x \neq 0$, $A(x)$ é isomorfa a R . Então existe um idempotente não nulo $e_x \in A(x)$ tal que $A(x) = Re_x$. Dados x e y em A , com $x \neq 0 \neq y$, como $(e_x, e_y) = 0$, então por (4.10) e (2.17) $A(e_x, e_y)$ é isomorfa a R , assim $e_x = e_y$. Portanto A tem elemento unidade, daí por (2.16) A é isomorfa a R . ■

(4.17) TEOREMA: Sejam A uma R -álgebra flexível com valor absoluto, $x, y \in A$ e $e \in A(x, y)$ um idempotente, não nulo. Se x e y comutam com e , então $A(x, y)$ é isótopa a R , C , H ou C .

Demonstração: Por (4.12) basta mostrar que e comuta com todos os elementos de $A(x, y)$. Seja $z = z_1 \dots z_n$ (com alguma distribuição de parênteses) onde $z_i \in \{x, y\}$ ($i=1, \dots, n$). Mostremos por indução sobre n , que $(e, z) = 0$. Se $n=1$, então $z=x$ ou $z=y$, daí $(e, z) = 0$. Assumimos que $(e, t) = 0$, sempre que $t = z_1 \dots z_k$ (com alguma distribuição de parênteses), onde $z_i \in \{x, y\}$ ($i=1, \dots, k$) e $k < n$. Seja $z = z_1 \dots z_n$ (com alguma distribuição de parênteses), $z_i \in \{x, y\}$ ($i=1, \dots, n$). Como $n > 1$, então $z = (z_1 \dots z_\ell)(z_{\ell+1} \dots z_n)$, pela hipótese de indução, como $\ell < n$ e $n-\ell < n$, e comuta com $u = z_1 \dots z_\ell$ e com $v = z_{\ell+1} \dots z_n$. Por (4.10) e (2.17), $A(e, u)$ e $A(e, v)$ são isomorfas a R , C ou C^* . Se $A(e, u)$ ou $A(e, v)$ é isomorfa a C , então por (4.15) A é isomorfa a C , H ou C , daí e é elemento unidade de A , assim $(e, z) = 0$. Se $A(e, u)$ ou $A(e, v)$ forem isomorfas a R , é claro que $(e, z) = (e, uv) = 0$. Suponhamos que $A(e, u)$ e $A(e, v)$ sejam isomorfas a C^* , assim existem idempotentes e_1 e e_2 tais que, $A(e, u) = [e, e_1]$, $A(e, v) = [e, e_2]$, $ee_1 = e_1e$, $ee_2 = e_2e$, $e + e_1 + ee_1 = e + e_2 + ee_2 = 0$. Se $(e_1, e_2) = 0$, então por (4.10) e (2.17) $A(e, e_1, e_2)$ é isomorfa a C^* , como $A(e, u) \subset A(e, e_1, e_2)$ e $A(e, v) \subset A(e, e_1, e_2)$, então $A(e, u) = A(e, e_1, e_2) = A(e, v)$, assim $(e, z) = (e, uv) = 0$. Suponhamos que $(e_1, e_2) \neq 0$, então por (4.13), existe um idempotente $e_3 \in A$, $e_3 \neq 0$, tal que $(e_1, e_2)^2 = \alpha e_3$, com $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

Por (4.9) $(e_1, e_2)^2$ comuta com e_1 e com e_2 , assim e_3 comuta com e_1 e com e_2 , daí por (4.10) e (2.17) $A(e_1, e_3)$ e $A(e_2, e_3)$ são isomorfas a R , C ou C^* . Se $A(e_1, e_3)$ ou $A(e_2, e_3)$ é isomorfa a R ou C , então $e_1 = e_3$ ou $e_2 = e_3$, daí $(e_1, e_2) = (e_3, e_2) = 0$ ou $(e_1, e_2) = (e_1, e_3) = 0$, que é uma contradição, assim $A(e_1, e_3)$ e $A(e_2, e_3)$ são isomorfas a C^* . Logo $A(e_1, e_3) = [e_1, e_3]$ e $A(e_2, e_3) = [e_2, e_3]$, $e_1 + e_3 + e_1 e_3 = e_2 + e_3 + e_2 e_3 = 0$. Por outro lado $e + e_1 + e e_1 = 0$ e $e + e_2 + e e_2 = 0$, assim $(e - e_3)(e_1 - e_2) = 0$, então $e = e_3$, pois $e_1 \neq e_2$. Fazendo $x = e_1 + e_2$ e $y = e$ em (4.7) obtemos $0 = ((e_1 + e_2)e + e(e_1 + e_2), e_1 + e_2) + ((e_1 + e_2)^2, e) = (2ee_1 + 2ee_2, e_1 + e_2) + (e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2, e) = -2(e + e_1 + e + e_2, e_1 + e_2) + (e_1 e_2 + e_2 e_1, e) = -4(e, e_1 + e_2) - 2(e_1 + e_2, e_1 + e_2) + (e_1 e_2 + e_2 e_1, e)$, assim $(e_1 e_2 + e_2 e_1, e) = 0$. Como $0 = ((e_1, e_2), (e_1, e_2), (e_1, e_2)) = ((e_1, e_2)^2, (e_1, e_2)) = (\alpha e, (e_1, e_2))$, então $(e_1 e_2 - e_2 e_1, e) = 0$. Portanto $(e_1 e_2 + e_2 e_1, e) = (e_1 e_2 - e_2 e_1, e) = 0$, daí e comuta com $e_1 e_2$ e com $e_2 e_1$. Como $u \in A(e, u) = [e, e_1]$ e $v \in A(e, v) = [e, e_2]$, então $u = \beta e + \gamma e_1$ e $v = \lambda e + \delta e_2$, com $\beta, \gamma, \lambda, \delta \in R$, assim $uv = \beta \lambda e + \beta \delta e e_2 + \gamma \lambda e_1 e + \gamma \delta e_1 e_2 = \beta \lambda e - \beta \delta (e + e_2) - \gamma \lambda (e_1 + e) + \gamma \delta e_1 e_2 = (\beta \lambda - \beta \delta - \gamma \lambda) e - \gamma \lambda e_1 - \beta \delta e_2 + \gamma \delta e_1 e_2$, então $(e, z) = (e, uv) = 0$. ■

(4.18) TEOREMA: Se A é uma R -álgebra flexível com valor absoluto, então A é isótota a R , C , H ou C .

Demonstração: Para todo $x \in A$, $x \neq 0$, por (4.10) e (2.17), $A(x)$ é isomorfa a R , C ou C^* . Se A possui uma subálgebra isomorfa a C , então por (4.15) A é isomorfa a C , H ou C . Suponha mos que A não tenha subálgebra isomorfa a C . Dado $u \in A$,

$u \neq 0$, como $A(u)$ é isomorfa a R ou C^* , existe $e \in A(u)$, idempotente não nulo. Mostremos que as transformações lineares R_e e L_e são inversíveis, daí por (2.25) o teorema está demonstrado. Claramente R_e e L_e são injetoras. Dado $x \in A$, $x \neq 0$, seja $e' \in A(x)$ um idempotente não nulo. Mostremos que $A(e, e')$ é de dimensão finita. Se $(e, e') = 0$, então por (4.10) e (2.17) $A(e, e')$ é isomorfa a R ou C^* . Se $(e, e') \neq 0$, então por (4.13), existe um idempotente $e'' \neq 0$ tal que $(e, e')^2 = \alpha e''$, com $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Por (4.9) e'' comuta com e e com e' , assim por (4.17) $A(e, e')$ é isótopa a R , C , H ou C , logo de dimensão finita. Sejam as transformações lineares f, g de $A(e, e')$ em $A(e, e')$, definidas por $f(y) = R_e(y)$ e $g(y) = L_e(y)$, com $y \in A(e, e')$. Como f e g são injetoras e $A(e, e')$ é de dimensão finita, então f e g são sobrejetoras, assim existem $a, b \in A(e, e')$ tais que $f(a) = R_e(a) = e' = L_e(b) = g(b)$. Se $A(x)$ é isomorfa a R , então $A(x) = Re'$, daí $x = \alpha'e$, com $\alpha' \in R$, logo $R_e(\alpha'a) = x$ e $L_e(\alpha'b) = x$. Se $A(x)$ for isomorfa a C^* , então existe um idempotente $e_1 \in A(x)$, tal que $A(x) = [e', e_1]$. Da mesma forma que foi feito anteriormente, existem $a', b' \in A$, tais que $R_e(a') = e_1 = L_e(b')$. Como $x = \beta e' + \lambda e_1$, com $\beta, \lambda \in R$. temos $x = R_e(\beta a + \lambda a') = L_e(\beta b + \lambda b')$. Portanto R_e e L_e são sobrejetoras. ■

CAPÍTULO V

ÁLGEBRAS NORMADAS SEM DIVISORES TOPOLÓGICOS DE ZERO

§ 1. PRELIMINARES

(5.1) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é uma *álgebra normada*, se existir uma função $\| \cdot \|: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

- 1) se $x \neq 0$, $\|x\| > 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- 3) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$;
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Uma álgebra normada possui uma métrica natural que é $d(x, y) = \|x - y\|$.

(5.2) TEOREMA (Adjunção da unidade): Se A é uma F -álgebra normada ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), então existe uma F -álgebra normada $A(1)$ com elemento unidade, tal que F e A são subálgebras de $A(1)$, $A(1) = F \oplus A$. Além disso, se $\| \cdot \|_{(1)}$ é a norma em $A(1)$, então para todo $x \in A$ e $\alpha \in F$,

$$\|x\|_{(1)} = \|x\| \quad \text{e} \quad \|\alpha\|_{(1)} = |\alpha|.$$

Demonstração: Seja $A(1) = F \times A$ que é um F -espaço vetorial, onde a adição e a multiplicação por escalar são as habituais.

Dados (α, x) e (β, y) elementos de $A(1)$, definimos

$(\alpha, x) \cdot (\beta, y) = (\alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy)$. É fácil ver que $A(1)$ é uma F -álgebra com elemento unidade $1' = (1, 0)$. Dado $(\alpha, x) \in A(1)$ definimos $\|(\alpha, x)\|_{(1)} = |\alpha| + \|x\|$ e é fácil ver que $\| \cdot \|_{(1)}$ é uma norma. Se $A' = \{(0, x) \in A(1) \mid x \in A\}$ e

$F' = \{(\alpha, 0) \in A(1) \mid \alpha \in F\}$ é fácil ver que A' e F' são subálgebras de $A(1)$ isomorfas a A e a F respectivamente e $A(1) = F' \oplus A'$.

Além disso as aplicações $f: A \rightarrow A'$ e $g: F \rightarrow F'$ definidas por $f(x) = (0, x)$ e $g(\alpha) = (\alpha, 0)$ são isometrias, pois

$$\|f(x)\|_{(1)} = \|(0, x)\|_{(1)} = \|x\| \quad \text{e} \quad \|g(\alpha)\|_{(1)} = \|(\alpha, 0)\|_{(1)} = |\alpha|.$$

Por meio dos isomorfismos f e g identificaremos A com A' e F com F' , isto é, para cada $x \in A$ e $\alpha \in F$, poremos $x = (0, x)$ e $\alpha = (\alpha, 0)$, daí A e F passam a ser subálgebras de $A(1)$. Para todo $x \in A$ e $\alpha \in F$ temos $(\alpha, x) = (\alpha, 0) + (0, x) = \alpha + x$,

$$\|x\|_{(1)} = \|x\| \quad \text{e} \quad \|\alpha\|_{(1)} = |\alpha|. \quad \blacksquare$$

Observemos que $A(1)$ é associativa se, e somente se A o for.

(5.3) DEFINIÇÃO: Sejam A uma $\mathbb{R}$ -álgebra normada e $x+iy \in A_{\mathbb{C}}$, onde $A_{\mathbb{C}}$ é a complexificação de A (cf. § 1. capítulo II). Definimos

$$|x+iy| = \|x\| + \|y\|, \quad \|x+iy\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\theta} |e^{i\theta}(x+iy)|.$$

(5.4) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{R}$ -álgebra normada e $A_{\mathbb{C}}$ a sua complexificação. Então $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ define uma norma em $A_{\mathbb{C}}$ e além disso, para todo $x \in A$, $\|x\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{2} \|x\|$.

Demonstração: Para todo $x, y, z, t \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

- 1) $|x+iy| > 0$ se $x+iy \neq 0$;
- 2) $|\alpha(x+iy)| = |\alpha| |x+iy|$;
- 3) $|(x+iy)(z+it)| = |(xz-yt) + i(xt+yz)| =$
 $= \|xz-yt\| + \|xt+yz\| \leq \|x\|\|z\| + \|y\|\|t\| + \|x\|\|t\| + \|y\|\|z\| =$
 $= (\|x\| + \|y\|)(\|z\| + \|t\|) = |x+iy| |z+it|$;
- 4) $|(x+iy) + (z+it)| = |(x+z) + i(y+t)| = \|x+z\| + \|y+t\| \leq$
 $\leq \|x\| + \|z\| + \|y\| + \|t\| = |x+iy| + |z+it|$;
- 5) $\|x+iy\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\theta} (\|(\cos \theta)x - (\sin \theta)y\| + \|(\sin \theta)x + (\cos \theta)y\|).$

De 1) a 5) temos:

- 6) Se $x+iy \neq 0$ então $|e^{i\theta}(x+iy)| = |x+iy| > 0$, daí $\|x+iy\|_{\mathbb{C}} > 0$;
- 7) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \rho e^{i\gamma}$ onde $\rho, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\rho \geq 0$, daí
 $\|\lambda(x+iy)\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\theta} |\rho e^{(\theta+\gamma)i}(x+iy)| = \rho \sup_{\theta} |e^{(\theta+\gamma)i}(x+iy)| =$
 $= |\lambda| \|x+iy\|_{\mathbb{C}}$;
- 8) Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}(x+iy)(z+it)| \leq |e^{\frac{i\theta}{2}}(x+iy)| |e^{\frac{i\theta}{2}}(z+it)|$,
então $\|(x+iy)(z+it)\|_{\mathbb{C}} \leq \|x+iy\|_{\mathbb{C}} \|z+it\|_{\mathbb{C}}$;
- 9) Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}[(x+iy) + (z+it)]| \leq |e^{i\theta}(x+iy)| +$

+ $|e^{i\theta}(z+it)|$, então $\|(x+iy) + (z+it)\|_{\mathbb{C}} \leq \|x+iy\|_{\mathbb{C}} + \|z+it\|_{\mathbb{C}}$.

Finalmente, $\|x\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\theta} |e^{i\theta}x| = [\sup_{\theta} (|\cos\theta| + |\sin\theta|)] \|x\| = \sqrt{2} \|x\|$. ■

(5.5) DEFINIÇÃO: Diremos que uma F -álgebra normada A ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é uma álgebra de Banach se A for completa na sua métrica natural.

(5.6) TEOREMA: Seja A uma $\mathbb{R}$ -álgebra normada. A é uma álgebra de Banach se, e somente se $A_{\mathbb{C}}$ é uma álgebra de Banach.

Demonstração: Para todo $x, y \in A$, temos $|e^{i\theta}(x+iy)| = \|(\cos\theta)x - (\sin\theta)y\| + \|(\sin\theta)x + (\cos\theta)y\|$, assim, $|e^{i\theta}(x+iy)| \leq (|\cos\theta| + |\sin\theta|)(\|x\| + \|y\|) \leq \sqrt{2} \|x+iy\|$, como $\|x+iy\| = |e^{i\theta}(x+iy)|$ obtemos

$$(5.7) \quad \|x+iy\| \leq \|x+iy\|_{\mathbb{C}} \leq \sqrt{2} \|x+iy\|.$$

Para todo $x, y, z, t \in A$, de (5.7) temos

$$\|x-z\| \leq \|(x+iy) - (z+it)\|_{\mathbb{C}}, \quad \|y-t\| \leq \|(x+iy) - (z+it)\|_{\mathbb{C}},$$

$$\|(x+iy) - (z+it)\|_{\mathbb{C}} \leq \sqrt{2} \|x-z\| + \sqrt{2} \|y-t\|.$$

A partir disso, é fácil concluir o teorema. ■

Vamos agora mostrar, brevemente, que toda F -álgebra normada A ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) possui uma extensão que é uma álgebra de Banach, que será indicada por $\bar{A}$.

(5.8) DEFINIÇÃO: Diremos que duas seqüências de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em uma F -álgebra normada A ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) são equivalentes e denotaremos por $x_n \sim y_n$, se $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

É fácil ver que " $\sim$ " é uma relação de equivalência no conjunto A de todas as seqüências de Cauchy de A . Seja $\bar{A} = A/\sim$, cujos elementos denotaremos por (x_n) e para cada elemento $x \in A$, indicaremos por (x) a classe de equivalência da seqüência constante $x_n = x$. Observemos que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em A então $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$, além disso se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em A , $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências de Cauchy, onde $\alpha \in F$. Sejam $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas seqüências de Cauchy tais que $(x_n) = (x'_n)$ e $(y_n) = (y'_n)$. É fácil ver que $(x_n + y_n) = (x'_n + y'_n)$, $(x_n y_n) = (x'_n y'_n)$ e $(\alpha x_n) = (\alpha x'_n)$.

(5.9) DEFINIÇÃO: Sejam $(x_n), (y_n) \in \bar{A}$ e $\alpha \in F$, definimos

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$$

$$(x_n)(y_n) = (x_n y_n).$$

É claro que $\bar{A}$ com estas operações é uma F -álgebra e que se A for associativa então $\bar{A}$ também o será. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas seqüências de Cauchy tais que $(x_n) = (y_n)$. Como $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\|y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências de Cauchy

em $\mathbb{R}$, então elas são convergentes. Suponhamos que $\|x_n\| \rightarrow a$ e $\|y_n\| \rightarrow b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$; por outro lado, $|a-b| \leq |a - \|x_n\|| + |\|y_n\| - b| + \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo $a = b$, com isso definimos

(5.10) DEFINIÇÃO: Seja $(x_n) \in \bar{A}$, definimos

$$\|(x_n)\|_{\bar{A}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

É fácil ver que $\|\cdot\|_{\bar{A}}$ é uma norma em $\bar{A}$ e que para todo $x \in A$, $\|(x)\|_{\bar{A}} = \|x\|$.

Seja $\sigma: A \rightarrow \bar{A}$, definida por $\sigma(x) = (x)$. Como $\|\sigma(x)\|_{\bar{A}} = \|(x)\|_{\bar{A}} = \|x\|$, então σ é uma isometria.

(5.11) TEOREMA: Seja A uma F -álgebra ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) normada. Então $\bar{A}$ é completa e além disso $\sigma(A)$ é denso em $\bar{A}$.

Demonstração: Vide [9] p.100, Teorema (3.3.1), considerando $\rho(x, y) = \|x - y\|$ e $\hat{\rho}(X, Y) = \|X - Y\|_{\bar{A}}$, onde $x, y \in A$ e $X, Y \in \bar{A}$. ■

Seja $A' = \sigma(A) = \{(x) \in \bar{A} \mid x \in A\}$, que é uma subálgebra de $\bar{A}$, isomorfa a A . Por meio do isomorfismo σ , identifiquemos A com A' , isto é, poremos $x = (x)$, para todo $x \in A$, com isso A passa a ser uma subálgebra de $\bar{A}$.

§ 2. O ESPECTRO

Seja A uma F -álgebra. Consideremos a seguinte operação em A

$$(5.12) \quad x \circ y = x + y - xy$$

que será associativa se A o for. Observemos ainda que para todo $x \in A$, $x \circ 0 = 0 \circ x = x$.

(5.13) DEFINIÇÃO: Sejam A uma F -álgebra e $x \in A$. Diremos que x é *quase-inversível* se existir $x' \in A$ tal que $x \circ x' = x' \circ x = 0$. Caso contrário diremos que x é *quase-singular*.

O elemento x' tal que $x \circ x' = x' \circ x = 0$ chama-se um *quase-inverso* de x . Se A for associativa e $x \in A$ é quase-inversível, então x possui um único quase-inverso.

(5.14) DEFINIÇÃO: Sejam A uma $\mathbb{C}$ -álgebra, $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se A tem elemento unidade, diremos que λ é um *espectro* de x se $\lambda \cdot 1 - x$ não é inversível. Se A não tem elemento unidade, diremos que λ é um *espectro* de x se: $\lambda = 0$ ou $\lambda \neq 0$ e $\lambda^{-1}x$ é quase-singular. Indicaremos por $\text{sp}_A(x)$ o conjunto de todos os números complexos que são um espectro de x . Este conjunto é chamado *conjunto espectral* de x .

Observemos que se A tem elemento unidade, $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, então $\lambda^{-1}x$ é quase-singular se, e somente se $\lambda.1 - x$ não é inversível. De fato, se $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível, então existe $y \in A$ tal que $(\lambda^{-1}x) \circ y = y \circ (\lambda^{-1}x) = 0$, assim $(\lambda.1 - x)[\lambda^{-1}(1-y)] = 1 = [\lambda^{-1}(1-y)](\lambda.1 - x)$, logo $\lambda.1 - x$ é inversível. Se $\lambda.1 - x$ é inversível, então existe $z \in A$ tal que $(\lambda.1 - x)z = 1 = z(\lambda.1 - x)$, assim $(\lambda^{-1}x) \circ (1 - \lambda z) = (1 - \lambda z) \circ (\lambda^{-1}x) = 0$, logo $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível. Portanto λ é espectro de x se, e somente se, $\lambda^{-1}x$ é quase-singular.

(5.15) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{C}$ -álgebra e $x \in A$. Então $sp_A(x) = sp_{A(1)}(x)$ ou $sp_A(x) = sp_{A(1)}(x) - \{0\}$.

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$; se $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível em A , é claro que $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível em $A(1)$. Se $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível em $A(1)$, então existem $\alpha \in \mathbb{C}$ e $y \in A$ tais que $(\alpha + y) \circ (\lambda^{-1}x) = 0 = (\lambda^{-1}x) \circ (\alpha + y)$, daí $\alpha + y + \lambda^{-1}x - (\alpha + y)(\lambda^{-1}x) = 0 = \lambda^{-1}x + \alpha + y - (\lambda^{-1}x)(\alpha + y)$; logo $\alpha = 0$ e $y + \lambda^{-1}x - y(\lambda^{-1}x) = 0 = \lambda^{-1}x + y - (\lambda^{-1}x)y$, portanto $y \circ (\lambda^{-1}x) = 0 = (\lambda^{-1}x) \circ y$, daí $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível em A . Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e $y \in A$, $(\alpha + y)x \in A$, e como o elemento unidade de $A(1)$ não pertence a A , então x não é inversível em $A(1)$, portanto $0 \in sp_{A(1)}(x)$. ■

(5.16) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{R}$ -álgebra associativa, $x \in A$ e $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$.

(i) Se $\lambda = 0$ e A tem elemento unidade, então

$\lambda \in \text{sp}_{A_C}(x)$ se, e somente se, x não é inversível em A .

(ii) Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda \in \text{sp}_{A_C}(x)$ se, e somente se, $(\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x) = \frac{1}{a^2+b^2} (2ax - x^2)$ é quase-singular em A .

Demonstração: (i) É fácil ver que se A tem elemento unidade 1 , então 1 é elemento unidade de A_C , reciprocamente se A_C tem elemento unidade 1 , então $1 \in A$, daí x é inversível em A se, e somente se x é inversível em A_C .

(ii) Para todo $u, v \in A$, poremos $\overline{u+iv} = u-iv$. Daí $u+iv$ é quase-inversível em A_C se, e somente se $\overline{u+iv}$ é quase-inversível em A_C . Como $x \in A$, então $\overline{\lambda^{-1}x} = \bar{\lambda}^{-1}x$, daí $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível em A_C se, e somente se $\bar{\lambda}^{-1}x$ é quase-inversível em A_C . Observemos que

$$(\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x) = (\bar{\lambda}^{-1}x) \circ (\lambda^{-1}x) = \frac{1}{a^2+b^2} (2ax - x^2)$$

Se $\lambda^{-1}x$ for quase-inversível então $\bar{\lambda}^{-1}x$ é quase-inversível, daí existem y e z em A_C tais que $(\lambda^{-1}x) \circ y = y \circ (\lambda^{-1}x) = (\bar{\lambda}^{-1}x) \circ z = z \circ (\bar{\lambda}^{-1}x) = 0$, então $[(\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x)] \circ (z \circ y) = (\lambda^{-1}x) \circ [((\bar{\lambda}^{-1}x) \circ z) \circ y] = 0$. Analogamente $(z \circ y) \circ [(\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x)] = 0$, portanto $(\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x)$ é quase-inversível em A_C . Se $(\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x)$ é quase-inversível em A_C , então existe $t \in A_C$ tal que $((\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x)) \circ t = t \circ ((\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x)) = 0$, daí $(\lambda^{-1}x) \circ ((\bar{\lambda}^{-1}x) \circ t) = 0$ e $((\bar{\lambda}^{-1}x) \circ t) \circ (\lambda^{-1}x) = (\bar{\lambda}^{-1}x) \circ (t \circ (\lambda^{-1}x)) = [(\bar{\lambda}^{-1}x) \circ (t \circ (\lambda^{-1}x))] \circ [((\bar{\lambda}^{-1}x) \circ (\lambda^{-1}x)) \circ t] = (\bar{\lambda}^{-1}x) \circ (t \circ (\lambda^{-1}x) \circ (\bar{\lambda}^{-1}x)) \circ (\lambda^{-1}x) \circ t =$

$= (\lambda^{-1}x) \circ (\lambda^{-1}x) \circ t = 0$, logo $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível em $A_{\mathbb{C}}$. Portanto $\lambda^{-1}x$ é quase-singular em $A_{\mathbb{C}}$ se e somente se $\frac{1}{a^2+b^2}(2ax-x^2)$ é quase-singular em $A_{\mathbb{C}}$. Como $\frac{1}{a^2+b^2}(2ax-x^2) \in A$, então $\lambda \in \text{sp}_{A_{\mathbb{C}}}(x)$ se, e somente se $\frac{1}{a^2+b^2}(2ax-x^2)$ é quase-singular em A . ■

(5.17) LEMA: Seja A uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach associativa e $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$. Então x é quase-inversível.

Demonstração: Se $y = -\sum_{n \geq 1} x^n$, então $x \circ y = y \circ x = 0$. ■

(5.18) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach associativa, $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $\lambda \in \text{sp}_A(x)$ então $|\lambda| \leq \|x\|$.

Demonstração: Se $\|x\| < |\lambda|$ então $\|\lambda^{-1}x\| < 1$, daí por (5.17) $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível, que é uma contradição. ■

(5.19) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach associativa e $x \in A$. Então $\text{sp}_A(x)$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{C}$.

Demonstração: Por (5.18) $\text{sp}_A(x)$ é limitado. Se $x=0$ então $\text{sp}_A(x) = \{0\}$ portanto fechado. Suponhamos $x \neq 0$. Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{sp}_A(x)$, $\lambda \neq 0$, então $\lambda^{-1}x$ é quase-inversível. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, temos que $(\alpha^{-1}x) \circ (\lambda^{-1}x)' = -(\alpha^{-1} - \lambda^{-1})(\lambda(\lambda^{-1}x)')$, daí $\|(\alpha^{-1}x) \circ (\lambda^{-1}x)'\| = |\alpha^{-1} - \lambda^{-1}| |\lambda| \|(\lambda^{-1}x)'\|$. Se $|\alpha^{-1} - \lambda^{-1}| < \frac{1}{|\lambda| \|(\lambda^{-1}x)'\|}$, por (5.17) $(\alpha^{-1}x) \circ (\lambda^{-1}x)'$ é

quase-inversível, então $\alpha^{-1}x$ é quase-inversível, pois existe $z \in A$ tal que $[(\alpha^{-1}x) \circ (\lambda^{-1}x)'] \circ z = z \circ [(\alpha^{-1}x) \circ (\lambda^{-1}x)'] = 0$, logo $(\alpha^{-1}x) \circ [(\lambda^{-1}x)' \circ z] = 0$ e $z \circ (\alpha^{-1}x) = \lambda^{-1}x$, então $[(\lambda^{-1}x)' \circ z] \circ (\alpha^{-1}x) = (\lambda^{-1}x)' \circ (\lambda^{-1}x) = 0$. Se $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por $f(\alpha) = \alpha^{-1}$ então f é contínua. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{|\lambda| \|(\lambda^{-1}x)'\|}$, existe $\delta > 0$, $\delta < |\lambda|$, tal que se $|\alpha - \lambda| < \delta$, então $|\alpha^{-1} - \lambda^{-1}| < \varepsilon$, daí $\alpha^{-1}x$ é quase-inversível. Portanto se A não tem elemento unidade, como $0 \in \text{sp}_A(x)$ temos que $\text{sp}_A(x)$ é fechado. Suponhamos que A tenha elemento unidade e que $0 \notin \text{sp}_A(x)$, então x é inversível. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, se $|\alpha| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, então αx^{-1} é quase-inversível, daí existe $y \in A$ tal que $(\alpha x^{-1}) \circ y = y \circ (\alpha x^{-1}) = 0$. Pondo $z = 1 - y$ e como $\alpha x^{-1} = 1 - x^{-1}(x - \alpha.1)$, temos que $0 = (\alpha x^{-1}) \circ y = (1 - x^{-1}(x - \alpha.1)) \circ (1 - z) = 1 - x^{-1}(x - \alpha.1) + 1 - z - (1 - x^{-1}(x - \alpha.1))(1 - z) = 1 - x^{-1}(x - \alpha.1)z$. Logo $x^{-1}(x - \alpha.1)z = 1$ e daí $(x - \alpha.1)(zx^{-1}) = 1$; analogamente $(zx^{-1})(x - \alpha.1) = 1$, portanto $x - \alpha.1$ é inversível. ■

Se A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra associativa, $x \in A$ e x não possui espectro não nulo, ou seja $\text{sp}_A(x) \subset \{0\}$, então para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, $(\lambda^{-1})^{-1}x = \lambda x$ é quase-inversível. Como 0 é quase-inversível e $0' = 0$, podemos definir uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow A$ por $f(\lambda) = (\lambda x)'$.

(5.20) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{C}$ -álgebra normada, associativa, $x \in A$, $x \neq 0$ tal que $\text{sp}_A(x) \subset \{0\}$. Então a função $f: \mathbb{C} \rightarrow A$ definida por $f(\lambda) = (\lambda x)'$, satisfaz as

seguintes condições:

- i) é contínua
- ii) é derivável
- iii) não é limitada.

Demonstração: Por (5.15) temos $\text{sp}_{A(1)}(x) = \{0\}$, portanto podemos considerar $f: \mathbb{C} \rightarrow A(1)$, observando que a imagem de f é um subconjunto de A .

i) Para todo $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$, temos $(1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x) = (\lambda_0 x)' \circ (\lambda x)$ daí, $(\lambda_0 x)' = ((\lambda_0 x)' \circ (\lambda x)) \circ (\lambda x)' = [(1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x)] \circ (\lambda x)' = (1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x) + (\lambda x)' - (1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x)(\lambda x)' = (1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x) + (\lambda x)' - (1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x)((\lambda x)' - (\lambda_0 x)') - (1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x)(\lambda_0 x)'$. Assim:

$$[-1 + (1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x)][(\lambda x)' - (\lambda_0 x)'] = (1 - (\lambda_0 x)')(\lambda x - \lambda_0 x)(1 - (\lambda_0 x)'), \text{ logo}$$

$$\|(\lambda x)' - (\lambda_0 x)'\| = (1 + \|(\lambda_0 x)'\|)\|\lambda x - \lambda_0 x\|\|(\lambda x)' - (\lambda_0 x)'\| \leq (1 + \|(\lambda_0 x)'\|)^2 \|\lambda x - \lambda_0 x\|.$$

Então se $|\lambda - \lambda_0|\|x\|(1 + \|(\lambda_0 x)'\|) < 1$ temos

$$\|(\lambda x)' - (\lambda_0 x)'\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|\|x\|(1 + \|(\lambda_0 x)'\|)^2}{1 - |\lambda - \lambda_0|\|x\|(1 + \|(\lambda_0 x)'\|)}$$

Para todo $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < 1$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|x\|(1 + \|(\lambda_0 x)'\|)^2}$, então se $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ temos $\|(\lambda x)' - (\lambda_0 x)'\| < \varepsilon$.

ii) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $(1 - \lambda x)(1 - (\lambda x)') = (1 - (\lambda x)')(1 - \lambda x) = 1$, logo $(1 - \lambda x)^{-1} = 1 - (\lambda x)'$, daí

$(\lambda x)' = 1 - (1 - \lambda x)^{-1}$; assim a função $g: \mathbb{C} \rightarrow A(1)$ definida por $g(\lambda) = (1 - \lambda x)^{-1}$ é contínua. Dados $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$, temos

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = (1 - \lambda_0 x)^{-1} [(\lambda - \lambda_0)x] (1 - \lambda x)^{-1}; \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\lambda}(\lambda_0) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (1 - \lambda_0 x)^{-1} x (1 - \lambda x)^{-1} = \\ &= (1 - \lambda_0 x)^{-1} x (1 - \lambda_0 x)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{portanto } \frac{df}{d\lambda}(\lambda_0) &= -(1 - \lambda_0 x)^{-1} x (1 - \lambda_0 x)^{-1} = \\ &= -(1 - (\lambda_0 x)') x (1 - (\lambda_0 x)') = -x + 2x(\lambda_0 x)' - x((\lambda_0 x)')^2 \in A. \end{aligned}$$

iii) Se f for limitada, então dado ψ um funcional linear contínuo de A , $h = \psi \circ f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, é uma função inteira e limitada e pelo Teorema de Liouville, h é constante. Por outro lado, $h(0) = \psi(f(0)) = \psi(0) = 0$, logo $h(1) = \psi(x') = 0$, daí pelo Teorema de Hahn-Banach $x' = 0$, portanto $x = 0$ que é uma contradição. ■

§ 3. DIVISOR TOPOLÓGICO DE ZERO

(5.21) DEFINIÇÃO: Diremos que um elemento $x \neq 0$ de uma F -álgebra normada A ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é um *divisor topológico de zero* se existir uma seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\|y_n\| = 1$ para todo n e $y_n x \rightarrow 0$ ou $x y_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

É claro que todo divisor de zero à esquerda ou à direita é um divisor topológico de zero.

(5.22) LEMA: Sejam A uma C -álgebra de Banach associativa e $x \in A$ quase-singular. Suponhamos que exista uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A quase-inversíveis que converge para x . Então existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A com $\|y_n\| = 1$ tal que $y_n(1-x) \rightarrow 0$ e $(1-x)y_n \rightarrow 0$, onde $1-x \in A(1)$; daí $1-x$ é um divisor topológico de zero.

Demonstração: Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de A com $z_n \circ x_n = x_n \circ z_n = 0$. Suponhamos que exista $M > 0$, tal que para todo n , existe m , $m \geq n$ com $\|z_m\| \leq M$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{M+1}$, existe n_0 , tal que para todo $n \geq n_0$, $\|x_n - x\| < \frac{1}{M+1}$, como $x \circ z_n = (x - x_n)(1 - z_n)$, daí existe $m \geq n_0$ tal que $\|x \circ z_m\| \leq \|x - x_m\|(1 + \|z_m\|) < 1$, logo por (5.17) $x \circ z_m$ é quase-inversível, portanto x é quase-inversível, que é uma contradição. Assim $\|z_n\| \rightarrow \infty$. Seja $y_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$, daí

$$(1-x)y_n = \frac{z_n - xz_n}{\|z_n\|} = \frac{x \circ z_n - x}{\|z_n\|} = (x - x_n) \left(\frac{1 - z_n}{\|z_n\|} \right) - \frac{x}{\|z_n\|} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Analogamente $y_n(1-x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. ■

(5.23) LEMA: Sejam A uma F -álgebra normada associativa ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $x \in A$, $x \neq 0$.

- i) Se x é um divisor topológico de zero em $\bar{A}$, então x é um divisor topológico de zero em A .

ii) se $F=R$ e x é um divisor topológico de zero em $A_{\mathbb{C}}$, então x é um divisor topológico de zero em A .

Demonstração: i) Suponhamos que x seja um divisor topológico de zero em $\bar{A}$, daí existe uma seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\bar{A}$ tal que $\|y_n\|=1$ e $y_n x \rightarrow 0$ ou $xy_n \rightarrow 0$. Admitamos que $y_n x \rightarrow 0$. Como $y_n \in \bar{A}$, por (5.11) existe uma seqüência $(y_{i,n})_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $y_{i,n} \rightarrow y_n$ quando $i \rightarrow \infty$. Para cada n , seja $i(n)$ o menor inteiro positivo tal que $\|y_{i(n),n} - y_n\| < \frac{1}{n+2}$. Seja a seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A , definida por $z_n = y_{i(n),n}$, então para todo n , $\|z_n - y_n\| < \frac{1}{n+2}$, daí $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n+2} \leq \|z_n\|$, então $\|z_n\| \geq \frac{1}{2}$. Consideremos a seqüência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $w_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$, mostremos que $w_n x \rightarrow 0$. Para todo $\varepsilon > 0$, existem m_ε e n_ε tais que $\frac{1}{m_\varepsilon + 2} \leq \frac{\varepsilon}{4\|x\|}$ e para todo $n \geq n_\varepsilon$, $\|y_n x\| < \frac{\varepsilon}{4}$, seja $k_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, daí para todo $n \geq k_\varepsilon$, tem-se

$$\begin{aligned} \|w_n x\| &= \frac{\|(z_n - y_n)x + y_n x\|}{\|z_n\|} \leq 2\|z_n - y_n\|\|x\| + 2\|y_n x\| < \frac{2\|x\|}{n+2} + \frac{2\varepsilon}{4} \leq \\ &\leq \frac{2\|x\|}{m_\varepsilon + 2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 2\|x\|\frac{\varepsilon}{4\|x\|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente se $xy_n \rightarrow 0$.

ii) Suponhamos que x seja um divisor topológico de zero em $A_{\mathbb{C}}$, daí existe uma seqüência $(x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\|x_n + iy_n\|_{\mathbb{C}} = 1$ e $x(x_n + iy_n) \rightarrow 0$ ou $(x_n + iy_n)x \rightarrow 0$. Admitamos que $x(x_n + iy_n) \rightarrow 0$, daí $xx_n \rightarrow 0$ e $xy_n \rightarrow 0$. Como $\|x_n + iy_n\|_{\mathbb{C}} = 1$, por (5.7) temos $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \|x_n\| + \|y_n\| \leq 1$. Suponhamos que para todo $\varepsilon > 0$, existe n_ε , tal que $\|x_{n_\varepsilon}\| < \varepsilon$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subseqüência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente para zero. Tomando $0 < \varepsilon' < \frac{1}{\sqrt{2}}$, existe k_0 tal que, para todo $k \geq k_0$, $\|x_{n_k}\| < \varepsilon'$, daí $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \|x_{n_k}\| + \|y_{n_k}\|$

$< \varepsilon' + \|y_{n_k}\|$, então $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon' < \|y_{n_k}\|$. Seja a seqüência

$(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dada por $z_k = \frac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|}$. Mostremos que $xz_k \rightarrow 0$. De fa-

to, para todo $\varepsilon > 0$, com $xy_{n_k} \rightarrow 0$, existe k_1 , tal que para todo $k \geq k_1$, $\|xy_{n_k}\| < (\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon')\varepsilon$. Se $k_\varepsilon = \max\{k_0, k_1\}$, para todo $k \geq k_\varepsilon$, temos

$$\|xz_k\| = \frac{\|xy_{n_k}\|}{\|y_{n_k}\|} < \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon')\varepsilon}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon'} = \varepsilon. \text{ Se para todo } n, \|x_n\| > M, \text{ on}$$

de $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, basta tomar $w_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, temos $xw_n \rightarrow 0$. Analogamente se $(x_n + iy_n)x \rightarrow 0$. ■

(5.24) LEMA: Sejam A uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach associativa e $x \in A$, $x \neq 0$ tal que $\text{sp}_A(x) \subset \{0\}$. Então x é um divisor topológico de zero.

Demonstração: Por (5.20) a função $f: \mathbb{C} \rightarrow A$, definida por $f(\lambda) = (\lambda x)'$ não é limitada, então existe uma seqüência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números complexos, tal que $\|(\lambda_n x)'\| \rightarrow \infty$ e $|\lambda_n| \rightarrow \infty$. Seja a seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$z_n = \frac{(\lambda_n x)'}{\|(\lambda_n x)'\|},$$

Como para todo n , $(\lambda_n x) \circ (\lambda_n x)' = (\lambda_n x)' \circ (\lambda_n x) = 0$, temos

$$xz_n = \frac{x(\lambda_n x)'}{\|(\lambda_n x)'\|} = \frac{x}{\|(\lambda_n x)'\|} + \frac{(\lambda_n x)'}{\lambda_n \|(\lambda_n x)'\|}, \text{ daí}$$

$$\|xz_n\| \leq \frac{\|x\|}{\|(\lambda_n x)'\|} + \frac{1}{|\lambda_n|} \rightarrow 0, \text{ logo } xz_n \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

(5.25) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra normada alternativa à direita sem divisores topológicos de zero. Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

Demonstração: Como A não tem divisores topológicos de zero, então A não tem divisores de zero, daí para demonstrar o teorema, por (1.65) basta mostrar que A é algébrica. Dado $x \in A$, $x \neq 0$, por (1.10) $B = A(x)$ é associativa. Por (5.19) $\text{sp}_{\overline{B}_C}(x)$ é um conjunto fechado e limitado, por (5.23) x não é um divisor topológico de zero em $\overline{B}_C$, logo por (5.24), existe $\lambda = a+ib \in C$, $\lambda \neq 0$, na fronteira de $\text{sp}_{\overline{B}_C}(x)$. Seja $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de números complexos não nulos, tal que $\lambda_n \in C \setminus \text{sp}_{\overline{B}_C}(x)$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda$, daí por (5.16) $z_n = (\lambda_n^{-1}x) \circ (\overline{\lambda_n}^{-1}x)$ é quase-inversível, para todo n e $e = (\lambda^{-1}x) \circ (\overline{\lambda}^{-1}x) = \frac{1}{a^2+b^2}(2ax - x^2)$ é quase-singular. Como $z_n \rightarrow e$, por (5.22) existe uma seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\overline{B}_C$, tal que $\|y_n\| = 1$, $y_n(1-e) \rightarrow 0$ e $(1-e)y_n \rightarrow 0$. Dado $y \in B$, se $y(1-e) = y - ye \neq 0$, então $\|[y(1-e)]y_n\| = \|y[(1-e)y_n]\| \leq \|y\|(1-e)y_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, daí $y - ye$ é um divisor topológico de zero em $\overline{B}_C$, como $y - ye \in B$ por (5.23) $y - ye$ é um divisor topológico de zero em B que é uma contradição, daí $y = ye$. Analogamente, $y = ey$, portanto e é elemento unidade de B . Como $x^2 = 2ax - (a^2+b^2)e$, temos $B = [e, x]$, logo A é algébrica. ■

§ 4. ÁLGEBRAS NORMADAS COM POTÊNCIAS ASSOCIATIVAS SEM DIVISORES TOPOLÓGICOS DE ZERO

Gostaríamos de no teorema (5.25) e (1.65) trocar hipótese alternativa à direita por potências associativas ou flexíveis, mas isso não é possível, devido ao seguinte exemplo.

(5.26) EXEMPLO: Seja A uma R -álgebra com valor absoluto $\lambda \in R$. Denotaremos por $A(\lambda)$ a R -álgebra obtida como segue:

- 1) Como R -espaço vetorial $A(\lambda)$ coincide com A .
- 2) A multiplicação em $A(\lambda)$ é definida por

$$x * y = \lambda(xy) + (1 - \lambda)(yx), \text{ com } x, y \in A(\lambda).$$

Se $\lambda \neq \frac{1}{2}$, mostremos que $A(\lambda)$ não tem divisores de zero. Sejam $x, y \in A(\lambda)$ tais que $x * y = 0$, daí $\lambda(xy) = (\lambda - 1)(yx)$, logo $|\lambda| \|x\| \|y\| = |\lambda - 1| \|y\| \|x\|$, então $(|\lambda| - |\lambda - 1|) \|x\| \|y\| = 0$, como $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $|\lambda| - |\lambda - 1| \neq 0$, daí $\|x\| \|y\| = 0$, portanto $x = 0$ ou $y = 0$. Se $\lambda \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é fácil ver que $H(\lambda)$ é uma álgebra com potências associativas, flexível, sem divisores de zero e não é alternativa à direita.

Se $0 \leq \lambda \leq 1$, mostremos que $A(\lambda)$ é uma álgebra normada com o valor absoluto $\| \cdot \|$ de A . De fato, sejam $x, y \in A(\lambda)$ então $\|x * y\| \leq \lambda \|x\| \|y\| + (1 - \lambda) \|x\| \|y\| = \|x\| \|y\|$.

Se $0 \leq \lambda \leq 1$ e $\lambda \neq \frac{1}{2}$, mostremos que $H(\lambda)$ não tem divisores topológicos de zero. Suponhamos que exista $x \in H(\lambda)$, $x \neq 0$ um divisor topológico de zero, daí existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $H(\lambda)$ tal que $\|y_n\| = 1$, $x * y_n \rightarrow 0$ ou $y_n * x \rightarrow 0$. Admitamos $x * y_n \rightarrow 0$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe n_ε tal que, para todo $n \geq n_\varepsilon$, $\|x * y_n\| < \varepsilon \|x\|^2$, como H é uma álgebra associativa e com valor absoluto, então $\|x^{-1}\| \|x * y\| \|x^{-1}\| < \varepsilon$, daí $\|x^{-1}(\lambda(xy_n) + (1-\lambda)(y_n x))x^{-1}\| < \varepsilon$, logo $\|\lambda y_n x^{-1} + (1-\lambda)x^{-1}y_n\| < \varepsilon$, portanto $y_n * x^{-1} \rightarrow 0$. Por outro lado $\|(y_n * x) * y_n\| = \|y_n * (x * y_n)\| \leq \|x * y_n\| \rightarrow 0$, daí $(y_n * x) * y_n \rightarrow 0$, da mesma forma $(y_n * x^{-1}) * y_n \rightarrow 0$. Como H é uma álgebra quadrática (def. (1.44)), existem $\alpha, \beta \in R$ tais que $x^2 + \alpha x + \beta e = 0$, onde e é o elemento unidade de H , daí $x + \alpha e + \beta x^{-1} = 0$, então $(y_n * x) * y_n + \beta (y_n * x^{-1}) * y_n = -\alpha y_n^2$, portanto $\alpha y_n^2 \rightarrow 0$, logo $\alpha = 0$ pois $\|y_n^2\| = 1$, com isso $x = -\beta x^{-1}$, daí $y_n * x = -\beta y_n * x^{-1}$, portanto $y_n * x \rightarrow 0$. Temos então $x * y_n \rightarrow 0$ e $y_n * x \rightarrow 0$, daí $\lambda(xy_n) + (1-\lambda)(y_n x) \rightarrow 0$ e $\lambda(y_n x) + (1-\lambda)(xy_n) \rightarrow 0$, como $\lambda(xy_n) + (1-\lambda)(y_n x) + \lambda(y_n x) + (1-\lambda)(xy_n) = xy_n + y_n x$ e $-\lambda(xy_n) - (1-\lambda)(y_n x) + \lambda(y_n x) + (1-\lambda)(xy_n) = -(2\lambda - 1)(xy_n - y_n x)$, então $xy_n + y_n x \rightarrow 0$ e $xy_n - y_n x \rightarrow 0$ logo $xy_n \rightarrow 0$ que é uma contradição. ■

(5.27) LEMA: Se A é uma R -álgebra normada com potências associativas e sem divisores topológicos de zero, então A é uma álgebra algébrica.

Demonstração: Temos que provar que, para todo $x \in A$, $A(x)$ é um R -espaço vetorial de dimensão finita. Para todo $x \in A$,

$x \neq 0$, por (1.10) $A(x)$ é associativa; logo, por (5.25) o lema está demonstrado. ■

Como consequência do Lema (5.27) os teoremas (1.70), (1.71) e (1.73) podem ser escritos do seguinte modo:

(5.28) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra normada, com potências associativas, comutativa e sem divisores topológicos de zero. Então A é isomorfa a R ou C .

(5.29) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra normada, com potências associativas e sem divisores topológicos de zero. Suponhamos que para todo $x, y \in A$, (x, y, y) comuta com x . Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

(5.30) TEOREMA: Seja A uma R -álgebra normada, flexível, com potências associativas e sem divisores topológicos de zero. Suponhamos que para todo $x, y \in A$, (x, y, y) comuta com y . Então A é isomorfa a R , C , H ou C .

B I B L I O G R A F I A

- [1] ALBERT, A.A. - Absolute valued real algebras. *Ann. of Math.*, 48:495-501, 1947.
- [2] ALBERT, A.A. - Power-associative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64, n° 3:552-593, 1948.
- [3] ALBERT, A.A. - Absolute valued algebraic algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:763-768, 1949.
- [4] ALBERT, A.A. - A note of correction. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:1191, 1949.
- [5] ALBERT, A.A. (ed.) - Studies in Modern Algebra (Studies in mathematics, vol. 2) Math. Assoc. Amer., distributor, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- [6] EL-MALLAH, M.L. & MICALI, A. - Sur les algèbres normées sans diviseurs topologiques de zéro. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 25, n° 1:23-28, 1980.
- [7] EL-MALLAH, M.L. & MICALI, A. - Sur les dimensions des algèbres absolument valuées. *Journal of algebra*, 68:237-246, 1981.
- [8] EL-MALLAH, M.L. - Sur les algèbres normées non-associatives (Thèse d'État). *Cahiers Math.*, Montpellier, 1982.

- [9] FRIEDMAN, A. - Foundations of Modern Analysis. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970.
- [10] HOFFMAN, K. - Fundamentals of Banach Algebras. Inst. Mat. Univ. Paraná, Curitiba, 1962.
- [11] ILGELSTAM, L. - Non-associative normed algebras and Hurwitz' problem. *Arkiv för Matematik*, 5:231-238, 1964.
- [12] KAPLANSKY, I. - Normed algebras. *Duke Math. J.*, 16: 399-418, 1949.
- [13] MIKHEEV, I.M. - A certain identity in right alternative rings (Russian). *Algebra i Logika*, 8:357-366, 1969.
- [14] RAFFIN, R. - Anneaux à puissances commutatives et anneaux flexibles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230:804-806, 1950.
- [15] RICKART, C.E. - General Theory of Banach Algebras. D. Van Nostrand Company, Inc., 1960.
- [16] SCHAFER, R.D. - An Introduction to Nonassociative Algebras. Academic Press, New York, 1966.
- [17] SHOENBERG, I.J. - A remark on M.M. Day's characterization of inner-product spaces and a conjecture of L.M. Blumenthal. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3:961-964, 1952.
- [18] URBANIK, K. & WRIGHT, F.B. - Absolute valued algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:861-866, 1960.
- [19] ZHEVLAKOV, K.A.; SLIN'KO, A.M.; SHESTAKOV, I.P. & SHIRSHOV, A.I. - Rings that are nearly associative. Inst. Math. Acad. Sciences of the U.S.S.R., Siberian Branch Novosibirsk, U.S.S.R., Academic Press, New York, 1982.