HIPOELLIPTICIDADE DE UMA CLASSE DE
OPERADORES DE EVOLUÇÃO
COM CARACTERÍSTICAS DUPLAS

Oscar F. Vilcachagua Erazo

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Antonio Giljoli.

São Paulo, junho, 1985

ABSTRACT

Given an abstract Hilbert space H and an unbounded selfadjoint positive definite operator A on H , which has a bounded inverse A^{-1} , we study in this thesis sufficient conditions for the hypoellipticity and the analytic hypoellipticity for evolution operators of the form:

$$(1) \quad P = (\partial_t + a(t, A)A)(\partial_t + b(t, A)A) + c(t, A),$$

where the coefficients $a(t, A)$, $b(t, A)$ and $c(t, A)$ are power series with respect to A^{-1} , with coefficients in $C^\infty(J)$, for some open set J on the real line, with leading terms $a_0(t)$, $b_0(t)$ and $c_0(t)$ of the form:

$$\begin{aligned} a_0(t) &= at^\ell + g(t)t^{\ell+1}, \quad b_0(t) = bt^k + f(t)t^{k+1}, \quad c_0(t) = \\ &= ct^{\ell-1} + h(t)t^\ell, \end{aligned}$$

where ℓ and k are odd positive integers with $1 \leq \ell \leq k$.

The main result of this thesis is the followings. (Where the maximum degree of regularity is explained in chapter II, condition $(2.2)_{s,m}$).

Theorem: Let P be of the form (1). Then $(I) \Rightarrow (II) \Rightarrow (III)$, where:

$$(I) \quad a) \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b < 0, \frac{c}{a} \neq m(\ell+1) \quad e \quad \frac{c}{a} \neq m(\ell+1)-1, m \geq 1.$$

$$b) \quad \operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0 \quad \ell=1, \frac{c}{a} \neq 0, -1, -2, \dots$$

$$c) \quad \operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0 \quad \ell > 1, \operatorname{Re} a(|a|^{2\ell-2} \operatorname{Re}(c - \frac{\ell-1}{2} a) \bar{a}) > 0$$

(II) P is hypoelliptic, with maximum degree of regularity

(III) P is analytic hypoelliptic.

Í N D I C E

ABSTRACT	i
Introdução	ii
CAPÍTULO 0 - NOTAÇÕES	1
CAPÍTULO I - OS ESPAÇOS $H^s(R)$, $H^s_{loc}(J)$, $d_{H^s_{loc}(J)}^s$, $d_{H^s_{loc}(J)}^m$	5
CAPÍTULO II - UMA CLASSE DE ESTIMATIVAS	31
CAPÍTULO III - UMA ESTIMATIVA "SUB-ELIPTICA"	43
CAPÍTULO IV - HIPOELIPTICIDADE DE $\tilde{P}$	49
CAPÍTULO V - HIPOELIPTICIDADE ANALÍTICA	69
CAPÍTULO VI - GRAU DE REGULARIDADE DE UMA CLASSE PARTICULAR DE OPERADORES	85
BIBLIOGRAFIA	93

Introdução

Dado um espaço de Hilbert H e um operador A sobre H , A sendo densamente definido, autoadjunto, positivo definido e tendo um inverso limitado A^{-1} , estudaremos neste trabalho operadores de evolução da forma

$$(1) \quad P = (\partial_t + a(t,A)A)(\partial_t + b(t,A)A) + c(t,A)A,$$

onde ∂_t significa $\frac{\partial}{\partial t}$ e onde os coeficientes $a(t,A), b(t,A), c(t,A)$ são séries de potências com relação a A^{-1} , com coeficientes em $C^\infty(J)$, para algum conjunto aberto J contido na reta. Suporemos que estas séries de potências são convergentes em $L(H,H)$, assim como cada uma de suas derivadas com relação a t , uniformemente com relação a t nos subconjuntos compactos de J . Quando os coeficientes dominantes $a_0(t)$ e $b_0(t)$ das séries de potências $a(t,A)$ e $b(t,A)$ se anulam simultaneamente (suporemos que isto sempre ocorre para $t=0$), estamos no caso de características duplas.

Consideraremos a seguinte condição

$$(2) \quad \text{Existem inteiros positivos ímpares } \ell \text{ e } k \text{ satisfazendo } 1 \leq \ell \leq k \\ \text{e } \operatorname{Re} a_0^{(\ell)}(0) \operatorname{Re} b_0^{(k)}(0) < 0, \quad a_0^{(p)}(0) = 0 \quad p \leq \ell-1, \quad b_0^{(p)}(0) = 0 \\ p \leq k-1, \text{ e } c_0^{(p)}(0) = 0 \text{ para todo } p \leq \ell-2 \text{ (se } \ell \geq 3).$$

No caso $\ell = k = 1$, o estudo da resolubilidade local e a hipoeleptividade foi feito completamente em [6].

O caso $\ell = k > 1$ foi estudado em [3], no que concerne à regularidade máxima possível das soluções (quando ele for hipoeleptico).

Em [1], foi estudado o caso $1 = \ell < k$ e $h = 0$ para o operador

$$(3) \quad (\partial_t + at^\ell A)(\partial_t + bt^k(A) + Ct^{\ell-1}A + ht^{k-1}A$$

no que concerne à regularidade máxima das soluções.

Por outro lado, em [5] foi estudada a hipoelipticidade analítica dos operadores considerados em [3] e [6].

Neste trabalho, estudamos a regularidade máxima das soluções do operador (1), quando o mesmo satisfaz a condição (2) e $\operatorname{Re} a_0^{(\ell)}(0) > 0$. Quando $\operatorname{Re} a_0^{(\ell)}(0) < 0$ e $\ell = 1$, obtemos os mesmos resultados de [1], mas para os operadores da forma (1) que são mais gerais do que aqueles da forma (3). Quando $\operatorname{Re} a_0^{(\ell)} < 0$ e $\ell > 1$, obtivemos apenas resultados parciais. Também estudamos a hipoelipticidade analítica destes operadores, assim como o grau de regularidade das soluções de certos operadores hipoelípticos considerados no capítulo 6 de [3], quando o mesmo não for máximo.

Os principais resultados da tese, são os Teoremas 4.2, 5.1 e 6.2.

Vamos agora descrever brevemente o conteúdo dos capítulos nos quais este trabalho foi dividido, mostrando as diferenças (quando existirem) com os resultados já existentes na literatura.

No capítulo 0, como o título indica, fixamos as notações que usaremos no desenvolvimento do trabalho. Estas são as mesmas usadas em [1], [3], [5] e [6].

No capítulo I, introduzimos alguns espaços de distribuições que usaremos nos capítulos seguintes. Os espaços $H^S(R)$, $H_{loc}^S(R)$,

$d_{H_{loc}}^{s,m}(J)$ foram construídos em [3] e aqui damos algumas de suas propriedades, geralmente sem demonstração. A razão de demonstrarmos com detalhe a Proposição 1.2.1 é devido ao fato de que sua validade foi colocada em dúvida em [2], no caso $m > 1 + \frac{1}{d}$. Os espaços $d_{W_{loc}}^{s,m}(J)$ foram introduzidos em [1] para s e m inteiros positivos. Sendo estes definidos através dos espaços $d_{H_{loc}}^{s,m}(J)$, é natural que possuam propriedades análogas aos mesmos, e portanto, também demonstramos só algumas delas.

No capítulo II, demonstramos uma classe de estimativas envolvendo os espaços $d_{H_{loc}}^{m,m}(J)$ e $d_{W_{loc}}^{m,m}(J)$, ($m \in \mathbb{Z}_+$) as quais nos permitem reduzir a demonstração da hipoelipticidade dos operadores da forma (1) à da hipoelipticidade daquelas da forma (3). Essas estimativas também foram utilizadas no capítulo V, na demonstração da hipoelipticidade analítica.

No capítulo III, provamos uma estimativa "sub-elíptica" para o operador (3). Aqui seguimos de perto [1].

No capítulo IV, mostramos a hipoelipticidade de (3). Para isto usamos um mixto das técnicas usadas em [1] e [3]. A principal diferença deste trabalho com [1], é que nós usamos "concatenações" exatas entre os operadores da forma (3) (ver as identidades (4.19) e (4.20)) para valores apropriados de h . Isto evita o aparecimento de "restos" que se apresentam nas concatenações usadas em [1] (ver Proposição 4.4 de [1]) e a introdução de hipóteses adicionais na formulação do resultado principal (ver Proposição 5.3 de [1]). Também, é claro que as concatenações usadas em [1] não são apropriadas para o estudo dos operadores da forma (3), quando $\ell > 1$.

Nossas concatenações permitiram o estudo completo da hipoelipticidade de (3), quando $\operatorname{Re} a_0^{(\ell)} > 0$, além de simplificar a demonstração de [1], para $\operatorname{Re} a_0^{(\ell)} < 0$, com $\ell = 1$.

No capítulo V, seguimos de perto [5]. Isto seria exatamente igual a [5] se sempre tivéssemos a desigualdade (5.8) com $m=0$, o que não acontece em nosso caso (ver Teorema 4.2: nós só conseguimos (5.8), para algum $m \geq 0$). Desta forma somos levados a estimar normas nos espaços $d_{H_C}^{m,m}(K)$ e $d_{W_C}^{m,m}(K)$ onde K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Para este fim demonstramos o Lema 5.1, o qual não é necessário em [5]. O resto, com modificações óbvias, é semelhante a [5].

Finalmente, no capítulo VI, estudamos o grau de regularidade das soluções de uma classe bastante particular de operadores da forma (1), cuja hipoelipticidade foi demonstrada no capítulo 6 de [3].

Para terminar, queremos expressar nossos agradecimentos a todas as pessoas e entidades que fizeram possível a realização deste trabalho. Menção especial merece o Professor Dr. Antonio Gilioli por haver-nos sugerido o tema matéria desta tese e pelas múltiplas conversas que com ele tivemos sobre a mesma. Agradecemos também à Joanete, Janaína e Oscar pela compreensão e estímulo, e a Antonia Soares pela datilografia.

São Paulo, Junho de 1985

Oscar Vilcachagua Erazo

0. NOTAÇÕES

Neste trabalho, seguiremos as notações de [1], [3],[4], [5] e [6]. Como nos referidos artigos, A denotará um operador linear, densamente definido em um espaço de Hilbert H , não limitado, autoadjunto, positivo definido e tendo um inverso limitado A^{-1} . (Por exemplo o operador A pode ser $(1-\Delta_x)^{\theta/2}$ onde $\theta > 0$ sobre $\mathbb{R}^n$, ou uma extensão autoadjunta de $|D_x|$ sobre $\mathbb{R}$).

Introduziremos uma família de "espaços de Sobolev" H^s (para $s \in \mathbb{R}$) ("na variável x ") definidos por A : se $s \geq 0$, H^s é o espaço dos elementos u de H tais que $A^s u \in H$; munido com a norma $\|u\|_s = \|A^s u\|_0$, onde $\|\cdot\|_0$ denota a norma em $H = H^0$; se $s < 0$, H^s é o completado de H para a norma $\|u\|_s = \|A^s u\|_0$. Denotaremos o produto interno em H^s por $(\cdot, \cdot)_s$. Dados s e $m \in \mathbb{R}$, A^m é um isomorfismo (para as estruturas de espaços de Hilbert) de H^s sobre H^{s-m} .

Denotaremos por H^∞ a intersecção dos espaços H^s , munido com a topologia limite projetivo, e por $H^{-\infty}$ sua reunião, com a topologia limite indutivo. Desde que, para cada $s \in \mathbb{R}$, H^s e H^{-s} podem ser considerados como dual um do outro H^∞ e $H^{-\infty}$ podem ser considerados como dual um do outro.

Seja J um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$; denotaremos por $C^\infty(J, H^\infty)$ o espaço das funções de classe C^∞ definidas em J a valores em H^∞ . Este é a intersecção dos espaços $C^j(J, H^k)$ (das funções j -vezes continuamente diferenciáveis em J e a valores em H^k) para todos os inteiros j e k . Munimos $C^\infty(J, H^\infty)$ da topologia C^∞ natural. Se K é qualquer subconjunto compacto de J , denotaremos por $C_c^\infty(K; H^\infty)$ o subespaço de $C^\infty(J, H^\infty)$ consistindo das funções que se anulam identi-

camente fora de K . Este é um subespaço fechado de $C^\infty(J, H^\infty)$, e portanto um espaço de Fréchet, e denotaremos por $C_c^\infty(J, H^\infty)$ o limite indutivo dos espaços $C_c^\infty(K; H^\infty)$ quando K percorre todos os subconjuntos compactos de J .

Denotaremos por $A(J, H^\omega)$ o subespaço de $C^\infty(J, H^\infty)$ consistindo das funções $u \in C^\infty(J, H^\infty)$ tais que para todo ponto $t_0 \in J$ existe uma vizinhança aberta relativamente compacta I de t_0 contida em J e uma constante $C > 0$, tais que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$,

$$(0.1) \quad \sup_{t \in I} \|\partial_t^\alpha A^\beta u(t)\|_0 \leq C^{\alpha+\beta+1} (\alpha+\beta)!$$

Denotaremos por $\mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ o dual de $C_c^\infty(J; H^\infty)$; e o chamaremos de espaço das distribuições em J a valores em $H^{-\infty}$. Em $\mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$, vale o teorema de "estrutura local": Se u é qualquer distribuição em J a valores em $H^{-\infty}$ e se J' é qualquer subconjunto aberto relativamente compacto de J , podemos encontrar um conjunto finito $\{f_{j,k}\}$ ($j+k \leq M$) de funções contínuas em J a valores em H , tais que

$$(0.2) \quad u = \sum_{j+k \leq M} A^j \partial_t^k f_{j,k} \quad \text{em } J'.$$

Consideremos o operador diferencial sobre $\mathbb{R}$ definido por

$$(0.3) \quad P = (\partial_t + a(t, A)A)(\partial_t + b(t, A)A) + c(t, A)A$$

onde $a(t, A)$; $b(t, A)$ e $c(t, A)$ pertencem ao anel $Q_A(J)$ definido como segue: J é um subconjunto aberto da reta; os elementos de $Q_A(J)$ são as séries em potências não negativas de A^{-1} , com coeficientes em $C^\infty(J)$, convergentes em $L(H, H)$ (o espaço de Banach dos operadores limitados sobre H), assim como suas derivadas em t , uniformemente

com relação a t sobre os subconjuntos compactos de J .

Lembremos algumas definições e resultados formulados em [3] e [6].

Definição 0.1: Seja t_0 qualquer ponto do conjunto aberto J . Dizemos que P é *localmente resolúvel* em t_0 se existe uma vizinhança aberta J' de t_0 , contida em J , tal que, para toda $f \in C_c^\infty(J', H^\infty)$, existe $u \in \mathcal{D}'(J', H^{-\infty})$ satisfazendo $Pu = f$ em J' . Dizemos que P é *localmente resolúvel* num subconjunto S de J se P é localmente resolúvel em todo ponto de S .

Definição 0.2: Dizemos que P é *hipoelíptico* em J se dado qualquer subconjunto aberto J' de J e qualquer distribuição $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$, a seguinte condição é verificada.

$$(0.4) \quad Pu \in C^\infty(J'; H^\infty) \text{ implica } u \in C^\infty(J'; H^\infty)$$

Definição 0.3: Dizemos que P é *hipoelíptico num ponto* $t_0 \in J$, se existe uma vizinhança aberta J' de t_0 tal que P seja hipoelíptico em J' .

Definição 0.4: P diz-se *analítico hipoelíptico* em J se P é hipoelíptico em J e se, dado qualquer subconjunto aberto $J' \subset J$ e qualquer $u \in \mathcal{D}'(J', H^{-\infty})$

$$(0.5) \quad Pu \in A(J', H^{\infty}) \text{ implica } u \in A(J', H^{\infty})$$

P é *analítico hipoelíptico num ponto* t_0 de J se existe uma vizinhança aberta J' de t_0 tal que P é analítico hipoelíptico em J' .

Definição 0.4: Denotemos por P^* o adjunto formal de P ; i.é. o operador definido por

$$(0.6) \quad \int (P^*u, v)_0 dt = \int (u, Pv)_0 dt \quad \forall u, v \in C_c^\infty(J, H^\infty)$$

Proposição 0.1: Se $\mathbb{P}$ é hipoelíptico no conjunto aberto J_0 de J , então P^* é localmente resolúvel em J_0 .

Proposição 0.2: Seja X o operador diferencial $\partial_t + a(t, A)A$, onde $a(t, A) \in Q_A(J)$ (deste modo, podemos escrever $a(t, A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t)A^{-i}$), e suponhamos que existe um inteiro $p \geq 0$ tal que

$$(0.7) \quad \operatorname{Re} a_0^{(p)}(0) \neq 0, \quad \operatorname{Re} a_0^{(q)}(0) = 0 \quad \text{se } q < p$$

Então, X é hipoelíptico em $t=0$ se e só se a seguinte condição é satisfeita:

$$\text{Ou } p \text{ é par ou, se } p \text{ é ímpar, } \operatorname{Re} a_0^{(p)}(0) < 0$$

Proposição 0.3: Seja X como na proposição 0.2, satisfazendo também (0.7). Então, X é localmente resolúvel em $t=0$ se e só se a seguinte condição é satisfeita:

$$\text{Ou } p \text{ é par ou, se } p \text{ é ímpar, } \operatorname{Re} a_0^{(p)}(0) > 0.$$

CAPÍTULO I

OS ESPAÇOS $H^s(\mathbb{R})$; $d_{H_{loc}^{s,m}}(J)$; $d_{W_{loc}^{s,m}}(J)$

Neste capítulo, lembraremos as definições e propriedades de alguns espaços de distribuições utilizados em [1] e [3].

§1.1. Os Espaços de "Sobolev" H^s .

Denotaremos por $S(\mathbb{R}; H^\infty)$ o espaço de todas as funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}, H^\infty)$ tais que, para todos os pares de polinômios P e Q na variável t , e com coeficientes complexos, $P(t)Q(\partial_t)u(t)$ está contido num subconjunto limitado de H^∞ para todo $t \in \mathbb{R}$, i.e., tal que

$$(1.1) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|P(t)Q(\partial_t)u(t)\|_s < \infty$$

Munimos $S(\mathbb{R}; H^\infty)$ com sua topologia natural (i.e., tomamos como uma base de seminormas contínuas as expressões em (1.1)).

Definimos a integral de uma função contínua a valores num espaço localmente convexo como o limite de somas de Riemann. Então, se $u \in S(\mathbb{R}; H^\infty)$; definimos sua transformada de Fourier $\hat{u}$ por

$$(1.2) \quad \hat{u}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} u(t) dt \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Pode-se mostrar que $\hat{u}(\tau) \in H^\infty$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$; e que $\hat{u} \in S(\mathbb{R}; H^\infty)$. Mais ainda, a transformada de Fourier é uma aplicação linear contínua de $S(\mathbb{R}; H^\infty)$ em si mesmo, e pode-se verificar que sua inversa é dada pela fórmula usual:

$$(1.3) \quad u(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \hat{u}(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

o que prova que a transformada de Fourier é um isomorfismo de $S(\mathbb{R}; H^\infty)$

sobre si mesmo.

Como usual, salvo uma constante multiplicativa, a transformada de Fourier pode-se estender como uma isometria de $L^2(R;H)$ sobre si mesmo. Mais precisamente, temos:

$$(1.4) \quad \int_0^\infty \| \hat{u}(\tau) \|^2 d\tau = 2\pi \int_0^\infty \| u(t) \|^2 dt .$$

Denotamos por $S'(R;H^{-\infty})$ o dual de $S(R;H^\infty)$; e o chamaremos de o espaço das *distribuições temperadas sobre R, a valores em $H^{-\infty}$* . Como $C_c^\infty(R;H^\infty)$ é denso em $S(R;H^\infty)$, podemos identificar $S'(R;H^{-\infty})$ (como um conjunto) com um subespaço de $\mathcal{D}'(R;H^{-\infty})$. A transposta da transformada de Fourier dá um isomorfismo de $S'(R;H^{-\infty})$ sobre si mesmo; que estende a inicial, e será também chamada transformada de Fourier.

O operador $1 + \tau^2 + A^2$; definido em um subespaço de $L^2(R;H)$ com valores em $L^2(R;H)$, e que associa a cada v em seu domínio de definição o elemento w em $L^2(R;H)$ dado por $w(\tau) = v(\tau) + \tau^2 v(\tau) + A^2(v(\tau))$, é densamente definido em $L^2(R;H)$, autoadjunto e positivo definido, e sua inversa é contínua com norma ≤ 1 . Portanto, podemos considerar suas potências $(1 + \tau^2 + A^2)^s$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

Devemos observar que as vezes A é considerado como uma função de um subespaço de H em H , as vezes como uma função de um subespaço de $L^2(R;H)$ em si mesmo, como na expressão $1 + \tau^2 + A^2$. Isto não causará nenhuma confusão pois será claro do contexto o que entendemos por A .

Consideremos a resolução espectral do operador A (considerado em H):

$$(1.5) \quad A = \int \lambda dE(\lambda)$$

Então, para todo $v \in L^2(R;H)$, temos

$$(1.6) \quad ((1+\tau^2+A^2)^{s/2}v)(\tau) = \int (1+\tau^2+\lambda^2)^{s/2} dE(\lambda) v(\tau)$$

e

$$(1.7) \quad \| (1+\tau^2+A^2)^{s/2}v \|_{L^2(R;H)}^2 = \iint |1+\tau^2+\lambda^2|^s d\|E(\lambda)v(\tau)\|^2 d\tau$$

Usaremos a escala de espaços de "Sobolev" H^s , (que não deve ser confundida com H^s), para $s \in \mathbb{R}$, "sobre todas as variáveis t e x " definida por $(1-\partial_t^2 + A^2)^{1/2}$ (ou, na forma de transformada de Fourier, por $(1+\tau^2+A^2)^{1/2}$): se $s \geq 0$, H^s é o espaço dos elementos $u \in L^2(R;H)$ tais que $(1+\tau^2+A^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(R;H)$, munido com a norma $\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-1} \| (1+\tau^2+A^2)^{s/2}\hat{u} \|_{L^2(R;H)}^2$. Se $s < 0$, H^s é o completado de $L^2(R;H)$ para a norma

$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-1} \| (1+\tau^2+A^2)^{s/2}\hat{u} \|_{L^2(R;H)}^2$. O produto interno em H^s será denotado por $((,))_s$, para distingui-lo do produto interno em H^s . Para todo $s, m \in \mathbb{R}$, $(1-\partial_t^2 + A^2)^{m/2}$ é um isomorfismo (para as estruturas de espaço de Hilbert) de H^s sobre H^{s-m} .

Como no capítulo 0, definimos os espaços H^∞ e $H^{-\infty}$, e desde que para cada $s \in \mathbb{R}$, H^s e H^{-s} podem ser considerados como o dual um do outro, o mesmo acontece com H^∞ e $H^{-\infty}$.

Observação 1.1: Uma definição equivalente dos espaços H^s , $s \in \mathbb{R}$, é a seguinte: H^s é o espaço das distribuições temperadas u sobre R , a valores em $H^{-\infty}$, tais que sua transformada de Fourier é uma função mensurável e

$$\iint \| (1+\tau^2+A^2)^{s/2}\hat{u}(\tau) \|^2 d\tau < \infty.$$

Definição 1.1: Seja K um subconjunto compacto de R . Então chamaremos $H_C^S(K) = \{u \in H^S \mid \text{supp } u \text{ é um subconjunto de } K\}$, com a topologia induzida por H^S . Por $\text{supp } u$ denotamos o suporte de u .

Definição 1.2: Seja J um subconjunto aberto de R . Então chamamos $H_C^S(J)$ ao limite indutivo dos espaços $H_C^S(K)$, quando K percorre todos os subconjuntos compactos de J .

Definição 1.3: Seja J um subconjunto aberto de R . Então chamamos $H_{loc}^S(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty}) \mid \forall \phi \in C_c^\infty(J) \text{ temos } \phi u \in H^S\}$; com a topologia localmente convexa menos fina que torna contínuas todas as aplicações $u \mapsto \phi u$ de $H_{loc}^S(J)$ em H^S .

Observamos que $C_c^\infty(J, H^\infty)$ é denso em $H_C^S(J)$ e $H_{loc}^S(J)$ e que $H_{loc}^S(J)$ é um espaço de Frechet.

Os espaços acima definidos têm as propriedades usuais dos espaços de Sobolev. Para detalhes, ver [3], aqui nos limitaremos a enunciar o seguinte resultado:

Proposição 1.1.1 [3]: Sejam $a, r \in R$; $a > 0$, $r \geq 0$, e seja d um inteiro positivo. Então:

- Se $\partial_t u$ e $|t|^a A^r u$ pertencem a $L^2(R; H^S)$, então para todo número real b tal que $0 \leq b \leq a$, temos $|t|^b A^{r(b+1)/(a+1)} u \in L^2(R; H^S)$.
Mais ainda, existe uma constante $C > 0$ (dependendo somente de a, b e r) tal que $\| |t|^b A^{r(b+1)/(a+1)} u \|^2 \leq C (\| \partial_t u \|^2 + \| |t|^a A^r u \|^2)$, onde $\| \cdot \|$ significa a norma de $L^2(R; H^S)$.
- Se $\partial_t u$ e $t^d A u$ pertencem a $H_C^S(R)$, então $t^j u \in H_C^{s+(j+1)/(d+1)}$ para $j = 0, 1, \dots, d$.

c) O mesmo que b) substituindo J por R e H_{loc}^S por H_C^S .

A proposição a seguir se demonstra adaptando ao caso aqui considerado, a demonstração do teorema 2.4.3 de [4].

Proposição 1.1.2: Se $u \in H^{s-1}$, $a \in S(R)$, então

$$a(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} u) - \rho_\varepsilon * (e^{-\varepsilon A} a u) \rightarrow 0 \text{ em } H^s \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$$

Aqui ρ_ε é definido da maneira usual, isto é, $\rho \in C_c^\infty(R)$, $\int \rho(t) dt = 1$ e $\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \rho(\frac{t}{\varepsilon})$.

$e^{-\varepsilon A} u = \int e^{-\varepsilon \lambda} dE(\lambda) u$; se $u \in H$ e $e^{-\varepsilon A}$ é a extensão contínua de $e^{-\varepsilon A}$ a H^s se $s < 0$. Em qualquer caso $e^{-\varepsilon A} u \in H^\infty$ se $u \in H^{-\infty}$.

§1.2. Os espaços $d_{H_{loc}^{s,m}}(J)$.

Os espaços $d_{H_{loc}^{s,m}}(J)$ foram introduzidos em [3], (ver também [2]). Enunciaremos aqui as definições e principais resultados que usaremos neste trabalho. Provaremos só aquelas cujas demonstrações não se encontram explicitamente em [3].

Definição 1.2.1: Sejam $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+/d$ e $J \subset \mathbb{R}$ um subconjunto aberto. Denotaremos por $d_{H_{loc}^{s,m}}(J)$ (ou simplesmente $d_{H_{loc}^{s,m}}$ quando o intervalo J estiver subentendido) ao espaço vetorial das distribuições $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ que têm a seguinte propriedade:

$$(1.2.1) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \text{ com } \frac{\alpha}{d} + \beta \leq m \text{ temos } t^\alpha \partial_t^\beta u \in H_{loc}^{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}}(J).$$

Estes espaços têm uma topologia natural: a topologia localmente convexa menos fina que torna as aplicações

$$f_{\alpha, \beta}: d_{H_{loc}}^{s, m} \longrightarrow H_{loc}^{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}}$$

$$f_{\alpha, \beta}(u) = t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u ; \text{ para } \frac{\alpha}{d} + \beta \leq m, \text{ contínuas.}$$

Com esta topologia, $d_{H_{loc}}^{s, m}(J)$ é um espaço de Fréchet.

Se K é um subconjunto compacto arbitrário de J , denotamos por

$d_{H_c}^{s, m}(K)$ o subespaço vetorial fechado de $d_{H_{loc}}^{s, m}(J)$ constituído por todas as distribuições com suporte em K , e por $d_{H_c}^{s, m}(J)$ o limite indutivo dos espaços de Fréchet $d_{H_c}^{s, m}(K)$, quando K percorre os subconjuntos compactos de J .

Na realidade, os espaços de Fréchet $d_{H_c}^{s, m}(K)$ são espaços de Hilbert cuja norma proveniente do produto interno é dada por

$$(1.2.2) \quad \|u\|_{s, m}^2 = \left\{ \sum_{\substack{\frac{\alpha}{d} + \beta \leq m \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+}} \|t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u\|_{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}}^2 \right\}^{1/2}.$$

A seguinte proposição foi formulada em [3] sem demonstração. Nós a provaremos aqui só por completitude.

Proposição 1.2.1: Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}_+/d$, se $u \in d_{H_c}^{s, m}(J)$ temos

$$\rho_{\varepsilon} * (e^{-\varepsilon A} u) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u \quad \text{em } d_{H_c}^{s, m}(J),$$

onde ρ é como usual uma função de $C_c^\infty(\mathbb{R})$, satisfazendo $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = 1$;

$\rho_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ e quando $u(s) \in H$ para todo s .

$$[\rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A}u)](t) = \int_R \int_{\sigma(A)} \rho_{\varepsilon}(t-s)e^{-\varepsilon \lambda} dE(\lambda) u(s) ds.$$

Demonstração: Se $\varepsilon_0 > 0$ é suficientemente pequeno, o suporte de $\rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A}u)$ está contido num compacto fixo de J , para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$. Assim, basta provar que

$$\|\rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A}u) - u\|_{s,m} \longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Usando (1.2.2) temos

$$\begin{aligned} \|\rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A}u) - u\|_{s,m}^2 &= \sum_{\frac{\alpha}{d} + \beta \leq m} \|t^{\alpha} \partial_t^{\beta} (\rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A}u)) - t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u\|_{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}}^2 \\ &\leq 2 \left\{ \sum_{\frac{\alpha}{d} + \beta \leq m} \|\rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A} t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u) - t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u\|_{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{\alpha}{d} + \beta \leq m} \|t^{\alpha} (\rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A} \partial_t^{\beta} u)) - \rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A} t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u)\|_{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}}^2 \right\} \end{aligned}$$

O primeiro termo do segundo membro desta desigualdade tende a zero com ε , pois $t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u \in H^{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}}$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$, $\frac{\alpha}{d} + \beta \leq m$.

Para mostrar que o segundo termo também tende para zero com ε , observemos que:

$$\begin{aligned} F(t^{\alpha} (\rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A} \partial_t^{\beta} u)) - \rho_{\varepsilon}*(e^{-\varepsilon A} t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u))(\tau) \\ = (-1)^{\alpha} \partial_{\tau}^{\alpha} \hat{\rho}(\varepsilon \tau) \cdot e^{-\varepsilon A} \widehat{\partial_t^{\beta} u}(\tau) - \hat{\rho}(\varepsilon \tau) \cdot e^{-\varepsilon A} \widehat{t^{\alpha} \partial_t^{\beta} u}(\tau) \\ = \sum_{\gamma < \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{\alpha - \gamma} \widehat{\rho^{\alpha - \gamma}}(\varepsilon \tau) \cdot e^{-\varepsilon A} \widehat{t^{\gamma} \partial_t^{\beta} u}(\tau) \end{aligned}$$

onde temos denotado $\rho^{\alpha - \gamma}(t) = t^{\alpha - \gamma} \rho(t)$ (usaremos esta notação outras vezes).

Para cada $0 < \gamma < \alpha$ temos $t^\gamma \partial_t^\beta u \in H^{s - \frac{dm - \gamma + \beta}{d+1}}$ portanto,

$$\begin{aligned} & 2\pi \| t^\alpha (\rho_\varepsilon * (e^{-\varepsilon A} \partial_t^\beta u)) - \rho_\varepsilon * (e^{-\varepsilon A} t^\alpha \partial_t^\beta u) \|^2_{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}} \\ &= \sum_{\gamma < \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \iint (1 + \tau^2 + \lambda^2)^{s - \frac{dm - \alpha + \beta}{d+1}} \varepsilon^{2(\alpha - \gamma)} |\widehat{\rho^{\alpha - \gamma}(\varepsilon \tau)}|^2 e^{-2\varepsilon \lambda_d} \| E(\lambda) \cdot \widehat{t^\gamma \partial_t^\beta u(\tau)} \|^2 d\tau = \\ &= \sum_{\gamma < \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \iint (1 + \tau^2 + \lambda^2)^{s - \frac{dm - \gamma + \beta}{d+1} + \frac{\alpha - \gamma}{d+1}} \varepsilon^{2(\alpha - \gamma)} |\widehat{\rho^{\alpha - \gamma}(\varepsilon \tau)}|^2 e^{-2\varepsilon \lambda_d} \| E(\lambda) \widehat{t^\gamma \partial_t^\beta u(\tau)} \|^2 d\tau \\ &\leq \sum_{\gamma < \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \cdot \sup_{\substack{\tau \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R}_+}} \{ \varepsilon^{2(\alpha - \gamma)} (1 + \tau^2 + \lambda^2)^{\frac{\alpha - \gamma}{d+1}} |\widehat{\rho^{\alpha - \gamma}(\varepsilon \tau)}|^2 e^{-2\varepsilon \lambda_d} \} \| t^\gamma \partial_t^\beta u \|^2_{s - \frac{dm - \gamma + \beta}{d+1}} \\ &\leq \sum_{\gamma < \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \cdot \varepsilon^{\frac{2(\alpha - \gamma)d}{d+1}} \sup_{\substack{\tau \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R}_+}} \{ (1 + \tau^2 + \lambda^2)^{\frac{\alpha - \gamma}{d+1}} |\widehat{\rho^{\alpha - \gamma}(\tau)}|^2 e^{-2\lambda_d} \} \| t^\gamma \partial_t^\beta u \|^2_{s - \frac{dm - \gamma + \beta}{d+1}}, \end{aligned}$$

o que prova a proposição.

Corolário 1.2.1: Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}_+/d$. Então $C_c^\infty(J, H^\infty)$ é denso em $d_{H_c^{s,m}}(J)$ e em $d_{H_{loc}^{s,m}}(J)$, com inclusão contínua.

Demonstração: A primeira afirmação é resultado da proposição 1.2.1. A segunda é obtida da primeira usando funções de corte.

Proposição 1.2.2: Sejam $s, s' \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}_+/d$. As seguintes inclusões são contínuas

- a) $d_{H_{loc}^{s,m}} \subset d_{H_{loc}^{s',m}}$ se $s' \leq s$
- b) $d_{H_{loc}^{s,m}} \subset d_{H_{loc}^{s, m + \frac{1}{d}}}$ se $m + \frac{1}{d} \notin \mathbb{Z}_+$
- c) $d_{H_{loc}^{s,m}} \subset d_{H_{loc}^{s, m+1}}$

$$d) \quad d_{H_{loc}}^{s,m} \subset d_{H_{loc}}^{s - \frac{1}{d+1}, m - \frac{1}{d}}; \quad d_{H_{loc}}^{s,m} \subset d_{H_{loc}}^{s-1, m-1 - \frac{1}{d}}$$

e) O operador "multiplicação por t^α " define um operador linear contínuo de $d_{H_{loc}}^{s,m}$ em $d_{H_{loc}}^{s, m - \frac{\alpha}{d}}$ (se $m - \frac{\alpha}{d} \geq 0$)

f) Sejam $m, j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq j \leq d-1$. Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ pertence a $d_{H_{loc}}^{s, m + \frac{j}{d}}(J)$ se e só se $u \in d_{H_{loc}}^{s - \frac{1}{d+1}, m + \frac{j-1}{d}}(J)$

e $tu \in d_{H_{loc}}^{s, m + \frac{j-1}{d}}(J)$.

g) Se $m \geq 1$ e $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$, então $u \in d_{H_{loc}}^{s,m}(J)$ se e só se $\partial_t u$ e $t^d Au$ pertencem a $d_{H_{loc}}^{s,m}(J)$.

$$h) \quad H_{loc}^s(J) \subset d_{H_{loc}}^{s,m}(J) \subset H_{loc}^{s - \frac{dm}{d+1}}(J).$$

Observação 1.2.1: A parte "se" de g) é verdadeira sem restrições sobre m .

Proposição 1.2.3: Seja K um compacto de J , e suponhamos que

$$(1.2.3) \quad s' < s; \quad s' - \frac{dm'}{d+1} < s - \frac{dm}{d+1} \quad \text{e que} \quad d_{H_{loc}}^{s,m} \subset d_{H_{loc}}^{s',m'} \quad (\text{ver}$$

prop. 1.2.2). Então, a injeção $d_{H_c}^{s,m}(K) \rightarrow d_{H_c}^{s',m'}(K)$ é compacta e, dado qualquer número real s_1 (arbitrariamente próximo a $-\infty$) e qualquer $\varepsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que, para todo $u \in d_{H_c}^{s,m}(K)$ temos:

$$(1.2.4) \quad \|u\|_{s',m'} \leq \varepsilon \|u\|_{s,m} + C \|u\|_{s_1}.$$

Demonstração: Prop. 4.3' de [3].

Na proposição a seguir, estaremos interessados na convergência (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) nos espaços $d_{H_C}^{s,m}(J)$ do seguinte comutador

$$f(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} u) - \rho_\varepsilon * (e^{-\varepsilon A} f u)$$

onde $u \in d_{H_C}^{s,m}(J)$ e $f \in S(R)$. Para começar vejamos as identidades

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \partial_t [f(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} u) - \rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} f u] \\ &= \{f'(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} u) - \rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} f' u + f(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} \partial_t u) - \rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} f \partial_t u\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & t^d [f(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} u) - \rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} f u] = f(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} t^d u) - \rho_\varepsilon * (e^{-\varepsilon A} f t^d u) \\ &+ \sum_{\delta < d} \binom{d}{\delta} \varepsilon^{d-\delta} \{f[(\rho^{d-\delta})_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} t^\delta u] - (\rho^{d-\delta})_\varepsilon * (e^{-\varepsilon A} f t^\delta u)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & t[f(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} u) - \rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} f u] = f(\rho_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} t u) - \rho_\varepsilon * (e^{-\varepsilon A} f t u) \\ &+ \varepsilon \{f(t)[(\rho^1)_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} u] - [(\rho^1)_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} f u]\}. \end{aligned}$$

As identidades (ii) e (iii) são demonstradas, por exemplo, usando transformada de Fourier como na demonstração da proposição 1.2.1.

Lema 1.2.1: Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}_+/d$. Se $u \in d_{H_C}^{s,m}(J)$ e $f \in S(R)$, então:

1) Se $d > 1$ e $m \geq 1 - \frac{1}{d}$, então, para $\delta < d$ temos:

$$\| \varepsilon^{d-\delta} \{f[(\rho^{d-\delta})_\varepsilon * (e^{-\varepsilon A} t^\delta u) - (\rho^{d-\delta})_\varepsilon * e^{-\varepsilon A} f t^\delta u]\|_{s + \frac{2}{d+1}, m-1 + \frac{1}{d}}$$

converge a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

2) Se $d > 1$ e $0 \leq m < 1 - \frac{1}{d}$

$$\| \epsilon \{ f[(\rho^1)_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u] - [(\rho^1)_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u] \} \|_{s + \frac{2}{d+1}, m}$$

converge a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.

3) Se $d=1$, existe uma constante $C > 0$ (C independente de ϵ) tal que:

$$\| \epsilon [f(\rho^1)_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u] - (\rho^1)_{\epsilon^*} (e^{-\epsilon A} f u) \|_{s+1, m} \leq C \| u \|_{s, m}.$$

Demonstração: A mesma demonstração se aplica aos três casos. Daremos explicitamente apenas a demonstração de 1) e de 3).

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ satisfazendo $(\alpha/d) + \beta \leq m-1 + (1/d)$. Observemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} t^{\alpha} \partial_t^{\beta} \{ f[(\rho^{d-\delta})_{\epsilon^*} (e^{-\epsilon A} t^{\delta} u)] \} &= \\ &= \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \mu \leq \alpha}} C_{\beta, \gamma, \alpha, \mu} f^{\beta-\gamma} \epsilon^{\alpha-\mu} [(\rho^{d-\delta+\alpha-\mu})_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} t^{\mu} \partial_t^{\gamma} (t^{\delta} u)] \end{aligned}$$

Logo é suficiente estimar

$$\| \epsilon^{d-\delta+\alpha-\mu} [(\rho^{d-\delta+\alpha-\mu})_{\epsilon^*} (e^{-\epsilon A} t^{\mu} \partial_t^{\gamma} (t^{\delta} u))] \|_{s + \frac{2}{d+1} - \frac{d(m-1 + \frac{1}{d}) - \alpha + \beta}{d+1}}$$

para todo μ, γ , α, β com $(\alpha/d) + \beta \leq m-1 + (1/d)$, $\mu \leq \alpha$ e $\gamma \leq \beta$.

Observemos primeiro que como $u \in d_{H_C}^{s, m}(J)$ temos

$t^{\delta} u \in d_{H_C}^{s, m - \frac{\delta}{d}}(J)$ e como $(\mu/d) + \gamma \leq m-1 + (1/d) \leq m$, temos

$$t^{\mu} \partial_t^{\gamma} (t^{\delta} u) \in H_c^{s - \frac{d(m - \frac{\delta}{d}) - \mu + \gamma}{d+1}}$$

Portanto, chamando $a = s + \frac{2}{d+1} - \frac{d(m-1 + \frac{1}{d}) - \alpha + \beta}{d+1}$ e $b = s - \frac{d(m - \frac{\delta}{d}) - \mu + \gamma}{d+1}$

vemos que $a-b = \frac{d+1-\delta}{d+1} - \frac{\beta-\gamma}{d+1} + \frac{\alpha-\mu}{d+1}$, temos portanto

$$\begin{aligned} & ||| \varepsilon^{d-\delta+\alpha-\mu} [(\rho^{d-\delta+\alpha-\mu})_{\varepsilon*} (e^{-\varepsilon A} t^{\mu} \partial_t^{\gamma} (t^{\delta} u))] |||_a \\ & \leq \varepsilon^{1-\delta+\alpha-\mu} \sup_{\tau, \lambda} \{ (1+\tau^2 + \lambda^2)^{\frac{a-b}{2}} | \rho^{d-\delta+\alpha-\mu}(\varepsilon \tau) | e^{-\varepsilon \lambda} \} ||| t^{\mu} \partial_t^{\gamma} (t^{\delta} u) |||_b \\ & \leq \varepsilon^{(d-\delta)\frac{d}{d+1} + (\alpha-\mu)\frac{d}{d+1} - \frac{1}{d+1} + \frac{\beta-\gamma}{d+1}} \sup_{\tau, \lambda} (1+\tau^2 + \lambda^2)^{\frac{a-b}{2}} | \rho^{d-\delta+\alpha-\mu}(J) | e^{-\lambda} ||| t^{\mu} \partial_t^{\gamma} (t^{\delta} u) |||_b \end{aligned}$$

observemos que o expoente de ε na última expressão é sempre positivo se $d > 1$. Se $d=1$ (e portanto $\delta=0$), $\alpha=\mu$ e $\gamma=\beta$ ele é zero. Isto prova 1) e 3).

Proposição 1.2.4: Sejam s, m, u e f como no lema 1.2.1. Então

$$(1.26) \quad f(\rho_{\varepsilon*} e^{-\varepsilon A} u) - \rho_{\varepsilon*} (e^{-\varepsilon A} f u) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{em } d_{H_c}^{s + \frac{2}{d+1}, m + \frac{1}{d}}(J)$$

Demonstração: Para $m=0$ (1.2.6) segue da proposição 1.1.2. Se $0 < m < 1 - \frac{1}{d}$ (e portanto $d > 1$) pela proposição 1.2.2 d), e) e f)

temos $u \in d_{H_c}^{s - \frac{1}{d+1}, m - \frac{1}{d}}$, $tu \in d_{H_c}^{s, m - \frac{1}{d}}$ e, usando (1.2.5.iii), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \| f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u \|_{s+\frac{2}{d+1}, m+\frac{1}{d}} \leq \\
 & \leq C \{ \| f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u \|_{s+\frac{1}{d+1}, m} + \| t[f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u] \|_{s+\frac{2}{d+1}, m} \\
 & \leq C \{ \| f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u \|_{s+\frac{1}{d+1}, m} + \| f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} t u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f t u \|_{s+\frac{2}{d+1}, m} \\
 & \quad + \| \epsilon \{ f[(\rho^1)_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u] - [(\rho^1)_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u] \} \|_{s+\frac{2}{d+1}, m} \}
 \end{aligned}$$

Portanto, supondo a afirmação demonstrada para $m = \frac{1}{d}$, (1.2.6), vale para m .

Para $m = 1 - \frac{1}{d}$, temos que:

$$\begin{aligned}
 & \| f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u \|_{s+\frac{2}{d+1}, 1} \leq C \| \partial_t \{ f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u \} \|_{s-1+\frac{2}{d+1}, 0} \\
 & \quad + \| t^d \{ f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f u \} \|_{s+\frac{2}{d+1}, 0} .
 \end{aligned}$$

Observando as identidades (1.2.5) e o lema (1.2.1), basta considerar o termo

$$(1.2.7) \quad f(\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} \partial_t u) - \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} f \partial_t u$$

$$\text{Como } u \in d_{H_C}^{s, 1-\frac{1}{d}}(J) \subset d_{H_C}^{s-1+\frac{2}{d+1}, 0}(J)$$

temos

$$\partial_t u \in H^{s-2+\frac{2}{d+1}}$$

e portanto pela proposição 1.1.2, vemos que (1.2.7) converge a zero

$$\text{em } H^{s+\frac{2}{d+1}-1} .$$

Para $m \geq 1$, as identidades 1.2.5 e a proposição 1.2.2 g) mostram que

$$\begin{aligned} & \| f(\rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon} * (e^{-\epsilon A} f u) \|_{s + \frac{2}{d+1}, m + \frac{1}{d}} \\ & \leq C \| f'(\rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} f' u \|_{s-1 + \frac{2}{d+1}, m-1 + \frac{1}{d}} + \| f(\rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} \partial_t u) - \rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} f \partial_t u \|_{s-1 + \frac{2}{d+1}, m + \frac{1}{d}} \\ & \quad + \| f(\rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} t^d u) - \rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} f t^d u \|_{s + \frac{2}{d+1}, m-1 + \frac{1}{d}} + \\ & \quad \sum_{\delta < d} \epsilon^{d-\delta} \{ \| f[(\rho^{d-\delta})_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} t^{\delta} u] - (\rho^{d-\delta})_{\epsilon} * (e^{-\epsilon A} f t^{\delta} u) \|_{s + \frac{2}{d+1}, m-1 + \frac{1}{d}} \}. \end{aligned}$$

O resultado geral segue por indução usando o Lema 1.2.1. Para $d=1$, uma inspeção das demonstrações acima (e evidentemente também da proposição 1.1.2) mostram que existe uma constante $C > 0$ que independe de ϵ tal que

$$\| f(\rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} u) - \rho_{\epsilon} * e^{-\epsilon A} f u \|_{s+1, m+1} \leq C \| u \|_{s, m}$$

Como a proposição é claramente verdadeira para $u \in C_c^{\infty}(J, H^{\infty})$, uma aplicação do Teorema de Banach-Steinhaus dá o resultado desejado.

§ 1.3. Os Espaços $d_{W_{loc}}^{s, m}(J)$

Seguindo [1], vamos definir os espaços $d_{W_{loc}}^{s, m}(J)$ da seguinte maneira:

Definição 1.3.1: Mesmas condições da definição 1.2.1. Denotaremos por $d_{W_{loc}}^{s, m}(J)$ (ou simplesmente $d_{W_{loc}}^{s, m}$ quando o intervalo J estiver

subentendido) ao espaço vetorial das distribuições $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ que têm a seguinte propriedade:

$$(1.3.1) \quad \partial_t^2 u, t^{k+\ell} A^2 u, t^\ell A \partial_t u, t^{\ell-1} A u \in {}^d H_{\text{loc}}^{s,m}(J).$$

Munimos ${}^d W_{\text{loc}}^{s,m}(J)$ com a sua topologia localmente convexa natural.

Os espaços ${}^d W_{\text{loc}}^{s,m}(J)$ têm propriedades análogas às dos espaços ${}^d H_{\text{loc}}^{s,m}(J)$. Em particular temos a seguinte proposição:

Proposição 1.3.1: Nas condições da proposição 1.2.2 temos: as propriedades a), b), c) e d) se verificam se substituirmos ${}^d H_{\text{loc}}^{s,m}(J)$ por ${}^d W_{\text{loc}}^{s,m}(J)$.

Na seguinte proposição distinguiremos os casos $d = \ell$ e $d=k$, onde ℓ e k são números inteiros ímpares com $1 \leq \ell < k$.

Proposição 1.3.2: Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}_+/d$.

- a) $d=k$, $t^\ell A$ e ∂_t definem aplicações lineares contínuas de ${}^k W_{\text{loc}}^{s,m}(J)$ em ${}^n H_{\text{loc}}^{s+1,m+1}(J)$.
- b) $d=\ell$, $t^k A$ e ∂_t definem aplicações lineares contínuas de ${}^\ell W_{\text{loc}}^{s,m}(J)$ em ${}^\ell H_{\text{loc}}^{s+1,m+1}(J)$.

Demonstração: (a) e (b) seguem da definição 1.3.1 e da proposição 1.2.2. g).

Proposição 1.3.3: Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$. Então:

a) Se $m, j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq j \leq d-1$ temos:

$$u \in d_{W_{loc}}^{s, m + \frac{j}{d}}(J) \text{ se e s\o se } u \in d_{W_{loc}}^{s - \frac{1}{d+1}, m + \frac{j-1}{d}}(J) \text{ e}$$

$$tu \in d_{W_{loc}}^{s, m + \frac{j-1}{d}}(J)$$

b) Se $m \geq 1$, temos: (aqui e no que segue $\ell=1$ se $d=k$).

$$u \in d_{W_{loc}}^{s, m}(J) \text{ se e s\o se, } t^d Au \text{ e } \partial_t u \in d_{W_{loc}}^{s-1, m-1}(J).$$

$$c) \ell_{W_{loc}}^{s, m}(J) \subset \ell_H^{s+1 + \frac{1}{k+1}, m+1} \text{ e } k_{W_{loc}}^{s, m}(J) \subset k_H^{s+1 + \frac{1}{\ell+1}, m+1}$$

$$d) u \in \ell_{W_{loc}}^{s, m}(J), \text{ implica } t^j A^{\frac{j+1}{k+1}} u \in \ell_H^{s+1, m+1}(J) \quad 0 \leq j \leq k \text{ e}$$

$$u \in k_{W_{loc}}^{s, m}(J), \text{ implica } t^j A^{\frac{j+1}{\ell+1}} u \in k_H^{s+1, m+1}(J) \quad 0 \leq j \leq \ell$$

Demonstra\c{c}\~ao: Como ilustra\c{c}\~ao vamos mostrar a sufici\~encia de b) (quando $d=\ell$) e c), o resto \~e semelhante.

b) Suponhamos que $\partial_t u, t^\ell Au \in \ell_{W_{loc}}^{s-1, m-1}(J)$. Vamos mostrar que $u \in \ell_{W_{loc}}^{s, m}(J)$; isto \~e, vamos mostrar

i) $\partial_t^2 u$, ii) $t^{k+\ell} A^2 u$, iii) $t^\ell A \partial_t u$, iv) $t^{\ell-1} Au$ pertencem a $\ell_H^{s, m}(J)$. Da proposi\c{c}\~ao 1.3.2 b) temos i), ii) e $\partial_t(t^\ell Au) = t^\ell A \partial_t u + \ell t^{\ell-1} Au$ pertencem a $\ell_H^{s, m}(J)$. Logo \~e suficiente mostrar que $t^\ell A \partial_t u$ ou $t^{\ell-1} Au$ est\~ao em $\ell_H^{s, m}(J)$. Por hip\~otese temos:

v) $t^{\ell-1} A \partial_t u$, vi) $t^{2\ell-1} A^2 u$, vii) $\partial_t^2(t^\ell Au) = t^\ell A \partial_t^2 u + 2\ell t^{\ell-1} A \partial_t u + \ell(\ell-1)t^{\ell-2} Au$ e viii) $t^\ell A \partial_t^2 u$ pertencem a $\ell_H^{s-1, m-1}(J)$. Portanto, de v), vii) e viii) temos

ix) $(\ell-1)t^{\ell-2} Au \in \ell_H^{s-1, m-1}(J)$; v), vi) e ix) mostram

que $\partial_t(t^{\ell-1}Au)$ e $t^\ell A(t^{\ell-1}Au) \in {}^\ell H_{loc}^{s-1,m-1}(J)$. Logo $t^{\ell-1}Au \in {}^\ell H_{loc}^{s,m}(J)$.

c) Suponhamos primeiro $m=0$, $d=\ell$ (o caso $d=k$ é semelhante). Se $u \in {}^\ell W_{loc}^{s,0} = {}^k W_{loc}^{s,0}$, pela parte a) da proposição 1.3.2, temos

$\partial_t u, t^\ell Au \in {}^k H_{loc}^{s+1,1}(J) \subset {}^k H_{loc}^{s+\frac{1}{k+1},0}(J) = {}^\ell H_{loc}^{s+\frac{1}{k+1},0}(J)$, logo pela proposição 1.2.2 g) temos $u \in {}^\ell H_{loc}^{s+1+\frac{1}{k+1}}(J)$.

Suponhamos agora $m = \frac{j}{\ell}$, $1 \leq j \leq \ell-1$ e suponhamos o resultado mostrado para $0 \leq m \leq \frac{j-1}{\ell}$. Neste caso a proposição segue de a). Quando $m=1$, usamos b) e a parte já demonstrada $m=0$. O resultado geral segue por indução.

d) igual que c).

Na seguinte proposição consideraremos os operadores diferenciais de primeira ordem

$$X = \partial_t + a(t,A)A$$

(1.3.2)

$$Y = \partial_t + b(t,A)A$$

onde $a(t,A)$; $b(t,A)$ pertencem a $Q_A(J)$. Suporemos além disso que:

$$a(t,A) = at^\ell + g(t)t^{\ell+1} + \sum_{v=1}^{\infty} a_v(t)A^{-v}$$

(1.3.3)

$$b(t,A) = bt^k + f(t)t^{k+1} + \sum_{v=1}^{\infty} b_v(t)A^{-v}$$

A proposição 1.3.2 a) e b) afirma que

$$X: {}^k W_{loc}^{s,m}(J) \longrightarrow {}^k H_{loc}^{s+1,m+1}(J) \quad \text{e} \quad Y: {}^\ell W_{loc}^{s,m}(J) \longrightarrow {}^\ell H_{loc}^{s+1,m+1}(J)$$

são lineares contínuos.

Proposição 1.3.4: Sejam $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ e $\theta \in C_c^\infty(J)$, definamos

$$(1.3.4) \quad B_\varepsilon(u) = \rho_{\varepsilon*}(e^{-\varepsilon A}\theta u)$$

Então:

a) Se $u \in \mathcal{L}_{W_{loc}}^{s, m_0}(J)$ temos

$$[B_\varepsilon, Y]u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\theta, Y]u \quad \text{em } \mathcal{L}_{H_c}^{s+1+\frac{1}{k+1}, m_0+1}$$

b) Se $u \in \mathcal{K}_{W_{loc}}^{s, m_0}(J)$ temos

$$[B_\varepsilon, X]u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\theta, X]u \quad \text{em } \mathcal{K}_{H_c}^{s+1+r, m_0+1}$$

$$\text{onde } r = \min\left\{\frac{1}{\ell+1}, \frac{2}{k+1}\right\}.$$

Demonstração: Sô demonstraremos a parte a) pois b) é análogo. Observemos também que podemos supor as funções f e b_v pertencentes a $C_c^\infty(J)$ e que por causa das proposições 1.3.3 c) e 1.2.4, podemos supor Y da forma $\partial_t + bt^k A + f(t)t^{k+1}A$.

Vejamos então

$$i) \quad [B_\varepsilon, \partial_t]u = -\rho_{\varepsilon*}e^{-\varepsilon A}(\partial_t \theta)u$$

Como $(\partial_t \theta)u \in \mathcal{L}_{H_{loc}}^{s+1+\frac{1}{k+1}, m_0+1}(J)$, o resultado segue da proposição

1.2.1.

$$ii) \quad [B_\varepsilon, t^k A]u = \rho_{\varepsilon*}(e^{-\varepsilon A}(t^k A \theta u)) - t^k A(\rho_{\varepsilon*}e^{-\varepsilon A}\theta u) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{em}$$

$$\mathcal{L}_{H_c}^{s+1+\frac{1}{k+1}, m_0+1}(J).$$

Denotando $\rho^{k-j}(t) = t^{k-j} \rho(t)$ temos:

$$\begin{aligned} \rho_{\varepsilon^*}(e^{-\varepsilon A}(t^k A \Theta u)) - t^k A(\rho_{\varepsilon^*} e^{-\varepsilon A} \Theta u) &= \rho_{\varepsilon^*}(e^{-\varepsilon A}(t^k A \Theta u)) - \sum_{j \leq k} \binom{k}{j} \varepsilon^{k-j} (\rho^{k-j})_{\varepsilon^*}(e^{-\varepsilon A} t^j A \Theta u) \\ &= - \sum_{j < k} \binom{k}{j} \varepsilon^{k-j} (\rho^{k-j})_{\varepsilon^*}(e^{-\varepsilon A} t^j A \Theta u) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} t^{\alpha\beta} \partial_t^{[\beta} [B_\varepsilon, t^k A] u &= - \sum_{j < k} \binom{k}{j} \varepsilon^{k-j} t^\alpha (\rho^{k-j})_{\varepsilon^*}(e^{-\varepsilon A} A^{\frac{k-j}{k+1}} t^{\frac{j+1}{k+1}} \Theta u) \\ &= - \sum_{j < k} \binom{k}{j} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{k-j+\alpha-\gamma} (\rho^{k-j+\alpha-\gamma})_{\varepsilon^*}(e^{-\varepsilon A} A^{\frac{k-j}{k+1}} t^{\gamma\beta} (t^{\frac{j+1}{k+1}} \Theta u)) \end{aligned}$$

basta estimar a norma $||| \quad |||_{s+1+\frac{1}{k+1} - \frac{\ell(m_0+1)-\alpha+\beta}{\ell+1}}$ de cada um

dos termos do segundo lado da igualdade acima. Lembrando que, pela proposição 1.3.3 d) temos $t^j A^{\frac{j+1}{k+1}} u \in \mathcal{H}_{H_c}^{s+1, m_0+1}(J)$ e por conseguinte $t^{\gamma\beta} \partial_t^\beta (t^j A^{\frac{j+1}{k+1}} \Theta u) \in H^{s+1 - \frac{(m_0+1)-\gamma+\beta}{\ell+1}}$

De forma análoga à demonstração do lema 1.2.1 obtemos

$$\begin{aligned} &\int \int \varepsilon^{(k-j+\alpha-\gamma)} (1+\tau^2+\lambda^2)^{s+1+\frac{1}{k+1} - \frac{\ell(m_0+1)-\alpha+\beta}{\ell+1}} \left| \widehat{\rho^{k-j+\alpha-\gamma}(\varepsilon\tau)} \right|^2 e^{-2\varepsilon\lambda \frac{2(k-j)}{k+1}} d \left\| E(\lambda) t^{\gamma\beta} \partial_t^\beta u_j \right\|^2 d\tau \\ &\leq \varepsilon \frac{2[k(k-j)-1]}{k+1} + \frac{2\ell}{\ell+1} (\alpha-\gamma) \sup_{\substack{\tau \in \mathbb{R} \\ \lambda > 0}} (1+\tau^2+\lambda^2)^{\frac{\alpha-\gamma}{\ell+1} + \frac{k-j+1}{k+1}} e^{-2\lambda \left| \widehat{\rho^{k-j+\alpha-\gamma}(\tau)} \right|^2} \times \end{aligned}$$

$$||| u_j |||_{s+1 - \frac{\ell(m_0+1)-\gamma+\beta}{\ell+1}}$$

onde temos denotado $t^j A^{\frac{j+1}{k+1}} \Theta u$ por u_j . Isto prova ii).

iii) $[B_\epsilon, f(t)t^{k+1}A]u \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0$ em $\mathcal{L}_{H_C}^{s+1+\frac{1}{k+1}, m_0+1}$ como em ii)

$$\begin{aligned} [B_\epsilon, f(t)t^{k+1}A]u &= \rho_{\epsilon^*}(e^{-\epsilon A} f t^{k+1} A \Theta u) - t^{k+1} A f (\rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} \Theta u) \\ &= \rho_{\epsilon^*}(e^{-\epsilon A} f \cdot t^{k+1} A \Theta u) - f \left(\sum_{j \leq k+1} \binom{k+1}{j} \epsilon^{k+1-j} (\rho^{k+1-j})_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} t^j A \Theta u \right) \\ &= [B_\epsilon, f] t^{k+1} A \Theta u - \sum_{j < k+1} \binom{k+1}{j} \epsilon^{k+1-j} f ((\rho^{k+1-j})_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} t^j A \Theta u) \end{aligned}$$

Nesta última expressão estamos denotando $B_\epsilon u = \rho_{\epsilon^*} e^{-\epsilon A} u$. Como $t^{k+1} A \Theta u \in \mathcal{L}_{H_C}^{s+1, m_0+1-(1/2)}(J)$ temos pela proposição 1.2.4, que o primeiro termo do lado direito da igualdade acima tende a zero em $\mathcal{L}_{H_C}^{s+1+\frac{2}{k+1}, m_0+1}(J)$. Para os outros termos procedemos como em ii).

(ver também a demonstração do lema 1.2.1).

Definição 1.3.2: Se $K \subset J$ é um subconjunto compacto, definimos da maneira usual o espaço $d_{W_C}^{s,m}(K)$, isto é, $d_{W_C}^{s,m}(K)$ é o subespaço vetorial fechado de $d_{W_{loc}}^{s,m}(J)$ constituído por todas as distribuições com suporte em K . Os espaços $W_C^{s,m}(K)$ são espaços de Hilbert.

No capítulo seguinte, necessitaremos o seguinte resultado.

Proposição 1.3.5: Sejam $s \in \mathbb{R}$; $J \subset \mathbb{R}$ aberto. Então as seguintes inclusões são compactas, ($K \subset J$ é compacto).

- a) $d_{W_C}^{s,m}(K) \longrightarrow d_{W_C}^{s-1,m-1}(K)$
- b) $d_{W_C}^{s,m}(K) \longrightarrow d_{W_C}^{s-1,m}(K)$
- c) $d_{W_C}^{s,m}(K) \longrightarrow d_{H_C}^{s-1,m+1}(K)$

Demonstração: Basta mostrar que a inclusão $d_{W_C}^{s,m}(K) \rightarrow d_{W_C}^{s',m}(K)$

$s' < s$ é compacta. Isto segue do seguinte quadro

$$\begin{array}{ccc} d_{W_C}^{s,m}(K) & \longrightarrow & d_{W_C}^{s',m}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ d_{H_C}^{s,m}(K) & \longrightarrow & d_{H_C}^{s',m}(K) \end{array}$$

Os operadores ∂_t^2 ; $t^{k+\ell}A^2$, $t^\ell A \partial_t$ e $t^{\ell-1}A$: $d_{W_C}^{s,m}(K) \longrightarrow d_{W_C}^{s,m}(K)$ são contínuos e a inclusão $d_{H_C}^{s,m}(K) \longrightarrow d_{H_C}^{s',m}(K)$ é compacta (proposição 1.2.3). Temos portanto o seguinte:

- a) $d_{W_C}^{s,m}(K) \xrightarrow[\text{contínua}]{d_{W_C}^{s-1+\frac{1}{d+1},m-1}} d_{W_C}^{s-1+\frac{1}{d+1},m-1}(K) \xrightarrow[\text{compacta}]{d_{W_C}^{s-1,m-1}} d_{W_C}^{s-1,m-1}(K)$
- b) já foi mostrado
- c) $\ell_{W_C}^{s,m}(K) \xrightarrow[\text{contínua}]{d_{H_C}^{s+1+\frac{1}{k+1},m+1}} d_{H_C}^{s+1+\frac{1}{k+1},m+1}(K) \xrightarrow[\text{compacta}]{\ell_{H_C}^{s+1,m+1}} \ell_{H_C}^{s+1,m+1}(K)$
(Prop. 1.3.3 c) (Prop. 1.2.3)

Observação 1.3.1: Da definição dos espaços $d_{W_C}^{s,m}(K)$ segue que:

$$\|u\|_{d_{W_C}^{s,m}(K)}^2 \sim \{ \|\partial_t^2 u\|_{s,m}^2 + \|t^{k+\ell} A^2 u\|_{s,m}^2 + \|t^\ell A \partial_t u\|_{s,m}^2 + \|t^{\ell-1} A u\|_{s,m}^2 + \\ + \|\partial_t u\|_{s,m}^2 + \|u\|_{s,m}^2 \}^{1/2}$$

No capítulo V, necessitaremos do seguinte resultado

Proposição 1.3.6: Seja $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ e $m \in \mathbb{Z}_+$. Então,

(a) $u \in {}^dH_{loc}^{m,m}(J)$ se e somente se

$$(1.3.4) \quad t^{\alpha(d+1)-p+\beta} A^\alpha \partial_t^\beta u \in L_{loc}^2(J, H)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ com $\alpha + \beta \leq p \leq \alpha(d+1) + \beta$, $0 \leq p \leq m$

(b) $u \in {}^dW_{loc}^{m,m}(J)$ se e somente se

$$(1.3.5) \quad t^{\alpha(d+1)-p+\beta} A^\alpha \partial_t^\beta u \in W_{loc}(J) = W_{loc}^{0,0}(J).$$

Demonstração: (a) Seja $u \in {}^dH_{loc}^{m,m}(J)$. Como

$$\frac{\alpha(d+1)-p+\beta}{d} + \beta = \alpha - \frac{(p-\alpha-\beta)}{d} + \beta \leq m$$

temos

$$t^{\alpha(d+1)-p+\beta} A^\alpha \partial_t^\beta u \in H_{loc}^{m-\alpha-\frac{dm-\alpha(d+1)+p+\beta+\beta}{\alpha+1}}(J) = H_{loc}^{\frac{m-p}{d+1}}(J) \subset L_{loc}^2(J, H)$$

e portanto 1.3.4 vale.

Faremos a demonstração da recíproca por indução em m .

Seja $m=1$. Por hipótese temos

$$t^d A u, \partial_t u, u \in L_{loc}^2(J, H).$$

Logo, da proposição 1.1.2 g) obtemos $u \in {}^dH_{loc}^{1,1}(J)$.

Suponhamos o resultado demonstrado para $m-1$, e demonstre mos para m .

Suponhamos que (1.3.4) vale. Vamos demonstrar que

$u \in {}^d H_{loc}^{m,m}(J)$. Pela proposição 1.1.2 g) é suficiente mostrar que

$$t^d Au, \partial_t u \in {}^d H_{loc}^{m-1,m-1}(J)$$

e, para isto, é suficiente mostrar, pela hipótese indutiva, que

$$t^{\gamma(d+1)-p+\delta} A^\gamma \partial_t^\delta (t^d Au); t^{\gamma(d+1)-p-\delta} A^\gamma \partial_t^\delta (\partial_t u) \in L_{loc}^2(J, H)$$

para todo $\gamma, \delta \in \mathbb{N}$, com $\gamma + \delta \leq p \leq \gamma(d+1) + \beta$, $0 \leq p \leq m-1$.

Observemos que:

$$\begin{aligned} t^{\gamma(d+1)-p+\delta} A^\gamma \partial_t^\delta (t^d Au) &= \sum_{\mu=0}^{\min\{\delta, d\}} C_\mu t^{\gamma(d+1)-p+\delta} A^\gamma t^{d-\delta+\mu} A \partial_t^\mu u \\ &= \sum_{\mu=0}^{\min\{\delta, d\}} C_\mu t^{(\gamma+1)(p+1)-(p+1)+\mu} A^{\gamma+1} \partial_t^\mu u \end{aligned}$$

Por 1.3.4, cada termo da última expressão pertence a $L_{loc}^2(J, H)$.

Analogamente,

$$t^{\gamma(d+1)-p+\delta} A^\gamma \partial_t^\delta (\partial_t u) = t^{\gamma(d+1)-(p+1)+\delta+1} A^\gamma \partial_t^{\delta+1} u \in L_{loc}^2(J, H)$$

e a proposição está demonstrada.

A parte b) se demonstra de modo semelhante usando a proposição 1.3.3.b).

Corolário 1.3.1: Mesmas hipóteses da proposição anterior.

(a) Se $K \subset J$ é compacto, então em ${}^d H_c^{m,m}(K)$ temos:

$$(1.3.6) \quad \|u\|_{m,m} \sim \left\{ \sum_{p=0}^m \sum_{\alpha+\beta \leq p \leq \alpha(d+1)+\beta} \|t^{\alpha(d+1)-p+\beta} A^\alpha \partial_t^\beta u\|_{L^2(K,H)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

b) Se $K \subset J$ é compacto, então em $d_{W_C}^{m,m}(K)$ temos:

$$\|u\|_{d_{W_C}^{m,m}} \sim \left\{ \sum_{p=0}^m \sum_{\alpha+\beta \leq p \leq \alpha(d+1)+\beta} \|t^{\alpha(d+1)-p+\beta} A^\alpha \partial_t^\beta u\|_{W(K)}^2 \right\}^{1/2}$$

Demonstração: (a) Os operadores $t^{\alpha(d+1)-p+\beta} A^\alpha \partial_t^\beta: d_{H_C}^{m,m}(K) \rightarrow L^2(K, H)$ são contínuos. Portanto a identidade

$$I: (d_{H_C}^{m,m}(K), \|\cdot\|_{m,m}) \longrightarrow (d_{H_C}^{m,m}(K), \|\cdot\|_{m,m})$$

é contínua ($\|\cdot\|_{m,m}$ é dado pela expressão no lado direito de 1.3.6). Como as duas normas fazem de $d_{H_C}^{m,m}(K)$ um espaço de Banach, o Teorema do homomorfismo mostra a equivalência das normas.

b) Semelhante:

No capítulo II usaremos o seguinte resultado bem conhecido. Definimos o espaço $d_{H^s}^{s,m}(R)$ da maneira natural, isto é, substituindo na definição 1.2.1 J por R e suprimindo o sub-índice loc.

Nestas condições temos:

Proposição 1.3.7: Sejam $s, t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+/d$ e $\Lambda = (1 - \partial_t^2 + A^2)^{t/2}$.

Então:

- (a) $\Lambda: d_{H^{s+t}}^{s+t,m}(R) \longrightarrow d_{H^s}^{s,m}(R)$ é bicontínuo
- (b) $[\Lambda, \psi]: d_{H^{s+t-1}}^{s+t-1,m}(R) \longrightarrow d_{H^s}^{s,m}(R)$ é contínuo.
- (c) Os seguintes operadores são contínuos de $d_{H^{s+t}}^{s+t,m}(R)$ em $d_{H^s}^{s,m}(R)$.
 - i) $[\psi \Lambda, t^j A]$; ii) $[\psi \Lambda, \partial_t]$; iii) $[\Lambda, \psi t^j A]$;
 - iv) $[[\psi, \partial_t^2], \Lambda]$.

A proposição seguinte é um complemento à proposição 1.3.4 e a demonstração é semelhante à mesma.

Proposição 1.3.8: Mesmas condições da proposição 1.3.4. Suponhamos que $u \in d_{H_C^S, m}^{loc}(J)$. Então:

$$(a) \quad [B_\epsilon, c(t, A)]u \longrightarrow [\Theta, c(t, A)]u \quad \text{em} \quad d_{H_C^{S+1}, m}(J)$$

$$(b) \quad [B_\epsilon, \partial_t]u \longrightarrow [\Theta, \partial_t]u \quad \text{em} \quad d_{H_C^S, m}(J)$$

ooo

CAPÍTULO II

UMA CLASSE DE ESTIMATIVAS

Neste capítulo, relacionaremos a regularidade das soluções do operador (0,2) com certas estimativas envolvendo as normas nos espaços $d_{H_{loc}}^{s,m}(J)$ e $d_{W_{loc}}^{s,m}(J)$ construídos no capítulo I. Como sempre, sō estaremos interessados no caso $m \geq 0$ e P serā da forma:

$$P = XY + c(t,A)A$$

onde X e Y sōo como em (1.3.2) e satisfazem as condiçōes (1.3.3). Tambēo suporemos que

$$(2.1) \quad c(t,A) = ct^{\ell-1}A + h(t)t^{\ell}A + \sum_{v=0}^{\infty} c_v(t)A^{-v}.$$

Nestas condiçōes, P define um operador linear contínuo de $d_{W_{loc}}^{s,m}(J)$ em $d_{H_{loc}}^{s,m}(J)$.

A seguir, Ω serā um conjunto aberto de R contendo a origem, J denotarā um intervalo aberto limitado de R , contendo a origem e com fecho $\bar{J}$ contido em Ω e d serā um inteiro ímpar fixado (ℓ ou k).

Daremos a seguir dois tipos de propriedades relacionados com o problema da hipoelipticidade de P .

$$(2.2)_{s,m} \quad \forall u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty}), Pu \in d_{H_{loc}}^{s,m}(J) \text{ implica } u \in d_{W_{loc}}^{s,m}(J)$$

Observação 2.1: Se $(2.2)_{s,m}$ vale para uma família de conjuntos abertos $J_i \subset J$ e $\bigcup_i J_i = J$, então $(2.2)_{s,m}$ vale para J .

A segunda propriedade é uma estimativa envolvendo as normas $\|\cdot\|_{d_W s,m}$ e $\|\cdot\|_{d_H s,m}$.

$(2.3)_{s,m}$ Para todo $\theta \in C_c^\infty(J)$, para todo $s' \in \mathbb{R}$, para todo subconjunto compacto K de J , existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $\phi \in C_c^\infty(K, H^\infty)$.

$$(2,3')_{s,m} \quad \|\theta\phi\|_{d_W s,m} \leq C(\|P(\theta\phi)\|_{d_H s,m} + \|\phi\|_{s'})$$

Nas aplicações de $(2,3')$, geralmente escolhemos s' próximo de $-\infty$. É claro que, se $(2,3)$ é verdadeira, então ela é verdadeira substituindo-se J por qualquer um dos seus subconjuntos abertos.

Proposição 2.1: Para um par $(s,m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_+/d$ fixado $(2,2)_{s,m}$ implica $(2,3)_{s,m}$.

Demonstração: Isto é "standard". Ver por exemplo [3]. Teorema 5.1.

Na proposição a seguir, suporemos $m \in \mathbb{Z}_+$. Isto será suficiente para nossos propósitos.

Proposição 2.2: Se $(2.3)_{s,m}$ se verifica para algum $(s_0, m_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_+$, $(2.3)_{s,m_0}$ vale para todo $s \in \mathbb{R}$.

Antes de darmos a prova da proposição 2.2, demonstraremos o lema seguinte.

Lema 2.1: Dados s_0 e $s \in \mathbb{R}$, existem constantes positivas C e C' satisfazendo

$$(a) \quad \|u\|_{\ell_W^{s_0+s, m_0}} \leq C \{ \|\psi \Lambda u\|_{\ell_W^{s_0, m_0}} + \|u\|_{\ell_W^{s_0+s-1, m_0}} + \|u\|_{\ell_H^{s_0+s+1, m_0+1}} \}$$

$$\forall u \in C_c^\infty(K, H^\infty)$$

$$(b) \quad \|u\|_{k_W^{s_0+s, m_0}} \leq C' \{ \|\psi \Lambda u\|_{k_W^{s_0, m_0}} + \|u\|_{k_W^{s_0+s-1, m_0}} + \|u\|_{k_W^{s_0+s-1, m_0-1}} + \|u\|_{k_W^{s_0+s+1, m_0+1}} \} \quad \forall u \in C_c^\infty(K, H^\infty).$$

onde $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ satisfaz $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi \equiv 1$ em K e Λ é o operador de ordem $s (1 - \partial_t^2 + A^2)^{s/2}$.

Demonstração: Vamos denotar $\|\cdot\|_{s, m}$ a norma $\|\cdot\|_{d_H^{s, m}}$. Por definição:

$$(2.1) \quad \|u\|_{d_W^{s_0+s, m_0}}^2 = \|\partial_t^2 u\|_{s_0+s, m_0}^2 + \|t^{k+\ell} A^2 u\|_{s_0+s, m_0}^2 + \|t^\ell A \partial_t u\|_{s_0+s, m_0}^2 + \|t^{\ell-1} \Lambda u\|_{s_0+s, m_0}^2 \leq C_1 \{ \|\Lambda \psi \partial_t^2 u\|_{s_0, m_0}^2 + \|\Lambda \psi t^{k+\ell} A^2 u\|_{s_0, m_0}^2 + \|\Lambda \psi t^\ell A \partial_t u\|_{s_0, m_0}^2 + \|\Lambda \psi t^{\ell-1} \Lambda u\|_{s_0, m_0}^2 \}.$$

observemos as seguintes identidades:

$$(a) \quad \begin{aligned} \Lambda \psi \partial_t^2 u &= \partial_t^2 \psi \Lambda u + \Lambda \psi \partial_t^2 u - \partial_t^2 \psi \Lambda u + \psi \Lambda \partial_t^2 u - \psi \Lambda \partial_t^2 u \\ &= \partial_t^2 \psi u + [\Lambda, \psi] \partial_t^2 u + [\psi, \partial_t^2] \Lambda u \\ &= \partial_t^2 \psi \Lambda u + [\Lambda, \psi] \partial_t^2 u + [[\psi, \partial_t^2], \Lambda] u \end{aligned}$$

pois ∂_t^2 comuta com Λ e $[\psi, \partial_t^2]$ se anula nos elementos de $C_c^\infty(K; H^\infty)$.

$$(b) \quad \Lambda \psi t^{k+\ell} A^2 u = t^{k+\ell} A^2 \psi \Lambda u + [\Lambda, \psi] t^{k+\ell} A^2 u + [\psi \Lambda, t^k A] t^\ell A u + \\ + t^k A [\psi \Lambda, t^\ell A] u$$

$$(b') \quad = t^{k+\ell} A^2 \psi \Lambda u + [\Lambda, \psi] t^{k+\ell} A^2 u + [\psi \Lambda, t^\ell A] t^k A u + \\ + t^\ell A [\psi \Lambda, t^k A] u$$

$$(c) \quad \Lambda \psi t^\ell A \partial_t u = t^\ell A \partial_t \psi \Lambda u + [\Lambda, \psi] t^\ell A \partial_t u + [\psi \Lambda, t^\ell A] \partial_t u + \\ + t^\ell A [\psi \Lambda, \partial_t] u$$

$$(d) \quad \Lambda \psi t^{\ell-1} A u = \psi t^{\ell-1} A \Lambda u - [\psi t^{\ell-1} A, \Lambda] u.$$

Substituindo (a), (b'), (c) e (d) em (2.1) temos:

$$\|u\|_{d_W^{s_0+s, m_0}}^2 \leq C_1 \{ 3 \| \partial_t^2 \psi \Lambda u \|_{s_0, m_0}^2 + 3 \| [\Lambda, \psi] \partial_t^2 u \|_{s_0, m_0}^2 \\ + 3 \| [\psi \partial_t^2], \Lambda u \|_{s_0, m_0}^2 + 4 \| t^{k+\ell} A^2 \psi \Lambda u \|_{s_0, m_0}^2 + \\ + 4 \| [\Lambda, \psi] t^{k+\ell} A u \|_{s_0, m_0}^2 + 4 \| [\psi \Lambda, t^\ell A] t^k A u \|_{s_0, m_0}^2 + \\ + 4 \| t^\ell A [\psi \Lambda, t^k A] u \|_{s_0, m_0}^2 + 4 \| t^\ell A \partial_t \psi \Lambda u \|_{s_0, m_0}^2 \\ + 4 \| [\Lambda, \psi] t^\ell A \partial_t u \|_{s_0, m_0}^2 + 4 \| [\psi \Lambda, t^\ell A] \partial_t u \|_{s_0, m_0}^2 + \\ + 4 \| t^\ell A [\psi \Lambda, \partial_t] u \|_{s_0, m_0}^2 + 2 \| t^{\ell-1} A \psi \Lambda u \|_{s_0, m_0}^2 \\ + 2 \| [t^{\ell-1} A, \Lambda] u \|_{s_0, m_0}^2 \}$$

donde

$$\begin{aligned} \|u\|_{d_W^{s_0+s, m_0}}^2 &\leq 4C_1 \{ \|\psi \Lambda u\|_{d_W^{s_0, m_0}}^2 + C \|u\|_{d_W^{s_0+s-1, m_0}}^2 \} \\ &\quad + 3C_1 \|[\psi, \partial_t^2], \Lambda] u\|_{s_0, m_0}^2 + 4C_1 \|[\psi \Lambda, t^\ell A] t^k A u\|_{s_0, m_0}^2 \\ &\quad + 4C_1 \|t^\ell A [\psi \Lambda, \partial_t] u\|_{s_0, m_0}^2 + 4C_1 \|[\psi \Lambda, t^\ell A] t u\|_{s_0, m_0}^2 \\ &\quad + 4C_1 \|t^\ell A [\psi \Lambda, \partial_t] u\|_{s_0, m_0}^2 + 2C \|[\psi t^{\ell-1} A, \Lambda] u\|_{s_0, m_0}^2 \end{aligned}$$

observemos agora que todos os comutadores são operadores de ordem s (ver proposição 1.3.7) e $t^\ell A$; ∂_t definem operadores contínuos de $\ell_{H_{loc}^{s, m}}$ em $\ell_{H_{loc}^{s-1, m_0-1}}$ portanto, quando $d=\ell$ temos:

$$\begin{aligned} \|[\psi \Lambda, t^\ell A] t^k A u\|_{s_0, m_0}^2 &\leq C_2 \|t^k A u\|_{s_0+s, m_0}^2 \leq C_2 \|u\|_{s_0+s+1, m_0+1}^2 \\ \|t^\ell A [\psi \Lambda, t^k A] u\|_{s_0, m_0}^2 &\leq C_3 \|[\Lambda \psi, t^k A] u\|_{s_0+1, m_0+1}^2 \leq C_3' \|u\|_{s_0+s+1, m_0+1}^2 \\ \|[\psi t^{\ell-1} A, \Lambda] u\|_{s_0, m_0}^2 &\leq C_1 \|u\|_{s_0+s, m_0}^2 \\ \|[\psi, \partial_t^2], \Lambda] u\|_{s_0, m_0}^2 &\leq C_5 \|u\|_{s_0+s, m_0}^2 \end{aligned}$$

Quando $d=k$ e $m_0=0$ as estimativas acima servem. Para $m \geq 1$, usamos b) (no lugar de b') e o fato de que $t^\ell A: k_{W_c^{s, m}}(J) \rightarrow k_{H_c^{s+1, m+1}}(J)$ é linear contínuo para estimar

$$\|[\psi \Lambda, t^k A] t^\ell A u\|_{s_0, m_0} \leq C \|t^\ell A u\|_{s_0+s, m_0} \leq C' \|u\|_{k_{W_c^{s_0+s+1, m_0-1}}}$$

De outro lado, como Λ comuta com ∂_t temos

$$[\psi\Lambda, \partial_t]u = \psi\Lambda\partial_t u - \partial_t\psi\Lambda u = \psi\Lambda\partial_t u - \psi\partial_t\Lambda u - \psi_t u = -\psi_t\Lambda u$$

Logo

$$\begin{aligned} \|t^\ell A[\psi\Lambda, \partial_t]u\|_{s_0, m_0}^2 &= \|t^\ell A\psi_t\Lambda u\|_{s_0, m_0}^2 = \|t^k A \frac{\psi_t}{t^{k-\ell}} \Lambda u\|_{s_0, m_0}^2 \\ &\leq C \left\| \frac{\psi_t}{t^{k-\ell}} \Lambda u \right\|_{s_0+1, m_0+1}^2 \leq C' \|u\|_{s_0+s+1, m_0+1} \end{aligned}$$

pois $\psi_t \equiv 0$ numa vizinhança de zero. O resultado segue de (2.2) e as estimativas acima.

Demonstração da Proposição 2.2: Seja $K \subset J$ compacto e sejam ψ e Λ como no lema 2.1. Então, pelo referido lema parte a) e porque $(2,3)_{s_0, m_0}$ se verifica, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\ell_W s_0+s, m_0} &\leq C\{\|P(\psi\Lambda u)\|_{s_0, m_0} + \|u\|_{\ell_W s_0+s-1, m_0} \\ &\quad + \|u\|_{s_0+s+1, m_0+1} + \|\Theta\Lambda u\|_s\} \end{aligned}$$

onde $\Theta \in C_c^\infty(J)$ e $\Theta \equiv 1$ no suporte de ψ . Donde

$$\begin{aligned} \|u\|_{\ell_W s_0+s, m_0} &\leq C\{\|\psi\Lambda Pu\|_{s_0, m_0} + \|u\|_{\ell_W s_0+s-1, m_0} \\ &\quad + \|u\|_{s_0+s-1, m_0+1} + \|[\psi\Lambda, P]u\|_{s_0, m_0} + \|\Theta\Lambda u\|_s\} \end{aligned}$$

observemos agora o seguinte:

$$[\psi\Lambda, P] = X[\psi\Lambda, Y] + [\psi\Lambda, X]Y + [\psi\Lambda, c(t, A)]A$$

Procedemos agora de maneira semelhante à demonstração do lema 2.1, para obtermos:

$$\begin{aligned} \|\psi\Lambda, Pu\|_{s_0, m_0} &\leq C \{ \|\psi\Lambda, Y\|_{s_0+1, m_0+1} + \|Yu\|_{s_0+s, m_0} + \|u\|_{s_0, m_0} \} \\ &\leq C' \|u\|_{s_0+s+1, m_0+1} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}_W^{s_0+s, m_0}} &\leq C \{ \|Pu\|_{s_0+s, m_0} + \|u\|_{\mathcal{L}_W^{s_0+s-1, m_0}} \\ &\quad + \|u\|_{s_0+s+1, m_0+1} + \|\Theta\Lambda u\|_{s_1} \}. \end{aligned}$$

Usamos agora a proposição 1.3.4 para conseguirmos o resultado desejado.

Para $d=k$, usamos a seguinte forma de P .

$$P = XY + c(t, A)A = YX + [c(t, A) + b_t(t, A) - a_t(t, A)]A = YX + R(t, A)A$$

donde

$$[\psi\Lambda, P] = Y[\psi\Lambda, X] + [\psi\Lambda, Y]X + [\psi\Lambda, R(t, A)A]$$

e portanto, como no lema, usamos a continuidade de $X: \mathcal{L}_W^{s, m}(J) \rightarrow \mathcal{L}_H^{s+1, m+1}(J)$ para estimar o termo $[\psi\Lambda, Y]Xu$. O resto é análogo ao anterior, usando o lema 2.1 parte b).

Proposição 2.3: Para um m_0 fixado, se (2.3) $_{s, m_0}$ vale para todo s , também vale (2.2) $_{s, m_0}$.

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ tal que $Pu \in \mathcal{L}_{H_{loc}}^{s, m_0}(J)$ e seja $J' \subset\subset J$ arbitrário, temos então que existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $u \in \mathcal{L}_{W_{loc}}^{\sigma, m_0}(J')$.

Assim, se $\theta \in C_c^\infty(J')$, usando o operador B_ϵ definido em (1.3.4) temos: $B_\epsilon u \in C_c^\infty(\bar{J}', H^\infty)$ para ϵ suficientemente pequeno e portanto por $(2,3')$ _{s,m₀} (escolhendo $\psi \in C_c^\infty(J)$, $\psi \equiv 1$ em $\bar{J}', s' = \sigma$) temos:

$$(2.3) \quad \|\psi B_\epsilon u\|_{\ell_W^{\sigma + \frac{1}{k+1}, m_0}} \leq C \{ \|P(\psi B_\epsilon u)\|_{\ell_W^{\sigma + \frac{1}{k+1}, m_0}} + \|B_\epsilon u\|_{s'} \}.$$

observemos agora que

$$(2.4) \quad P(\psi B_\epsilon u) = B_\epsilon P(\psi u) - [B_\epsilon, P](\psi u) + P[\psi, B_\epsilon]u$$

Pela escolha de ψ e θ , temos $[\psi, B_\epsilon] = 0$ e $B_\epsilon P(\psi u) = B_\epsilon(\psi Pu)$ observemos além disso que

$$[B_\epsilon, P] = X[B_\epsilon, Y] + [B_\epsilon, X]Y + [B_\epsilon, c(t, A)]A$$

temos então:

$$(a) \quad B_\epsilon P(\psi u) \rightarrow \theta P(\psi u) = \theta Pu \quad \text{em } \ell_H^{s, m_0} \quad (\text{Prop. 1.2.1})$$

$$(b) \quad [B_\epsilon, c(t, A)](\psi u) \rightarrow [\theta, c(t, A)](\psi u) \quad \text{em } \ell_H^{\sigma + 1 + \frac{1}{k+1}, m_0 + 1} \quad (\text{Prop. 1.3.8})$$

$$(c) \quad [B_\epsilon, Y](\psi u) \rightarrow [\theta, Y](\psi u) \quad \text{em } \ell_H^{\sigma + 1 + \frac{1}{k+1}, m_0 + 1} \quad (\text{Prop. 1.3.4 a}) \quad \text{e como}$$

$$X: \ell_H^{\sigma + 1 + \frac{1}{k+1}, m_0 + 1} \longrightarrow \ell_H^{\sigma + \frac{1}{k+1}, m_0} \quad \text{é contínuo, temos}$$

$$X[B_\epsilon, Y](\psi u) \rightarrow X[\theta, Y](\psi u) \quad \text{em } \ell_H^{\sigma + \frac{1}{k+1}, m_0}.$$

$$(d) \quad \text{Pela Proposição 1.3.2 b) } Y(\psi u) \in \ell_{H_C}^{\sigma + 1, m_0 + 1} \text{ e portanto pela Proposição 1.3.8, } [B_\epsilon, X]Y(\psi u) \rightarrow [\theta, X]Y(\psi u) \text{ em } \ell_{H_C}^{\sigma + 1, m_0 + 1} \subset \ell_{H_C}^{\sigma + \frac{1}{k+1}, m_0}$$

Segue de (2.4) e as afirmações acima que $P(\psi_{B_\epsilon} u)$ converge a $P(\theta u)$ em $\ell_{H_c}^{\sigma', m_0}(J')$, onde $\sigma' = \min\{\sigma + \frac{1}{k+1}, s\}$, donde concluimos da maneira usual que $u \in \ell_{W_{loc}}^{\sigma', m_0}(J')$, onde $J' \subset\subset J$ é arbitrário. Repetindo o argumento um número finito de vezes obtemos o resultado desejado.

No caso $d=k$, usamos o operador P na forma $P = XY + c(t, A)A = YX + R(t, A)A$ onde $R(t, A) = c(t, A)A + b_t(t, A)A - a_t(t, A)A$.

Para finalizar o capítulo, daremos um resultado que relaciona a estimativa $(2.3')_{s, m}$ para P com outra para o operador $\tilde{P}$ que definiremos a seguir.

Suponhamos então $P = XY + c(t, A)Au$, onde X e Y são da forma 1.3.2 com $a(t, A)$ e $b(t, A)$ satisfazendo (1.3.3) e $c(t, A)$ satisfazendo (2.1). Definamos $\tilde{P}$ como segue

$$(2.5) \quad \tilde{P} = (\partial_t + at^\ell)(\partial_t + bt^k A) + ct^{\ell-1}A$$

Por conseguinte

$$P = \tilde{P} + (P - \tilde{P})$$

onde

$$(2.6) \quad (P - \tilde{P})u = f_1(t, A)t^{\ell+1}A\partial_t u + g_1(t, A)t^{k+\ell+1}A^2 u + f_0(t, A)\partial_t u + g_0(t, A)t^\ell A u + h(t, A)u$$

observemos as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned}
 \partial_t(P-\tilde{P}) &= (P-\tilde{P})\partial_t + f_1'(t,A)t^{\ell+1}A\partial_t + f_1(t,A)t^{\ell}A\partial_t + g_1(t,A)(k+\ell+1)t^{k+\ell}A^2 \\
 (2.7) \quad &+ g_1'(t,A)t^{k+\ell+1}A^2 + f_0'(t,A)\partial_t + g_0'(t,A)t^{\ell}A + g_0(t,A)t^{\ell-1}A + h'(t,A) \\
 &= (P-\tilde{P})\partial_t + (P-\tilde{P})'u + \tilde{R}u
 \end{aligned}$$

onde $(P-\tilde{P})'$ é obtido derivando $f(t,A), \dots, h(t,A)$ e

$$\tilde{R} = f_1(t,A)(\ell+1)t^{\ell}A + g_1(t,A)(k+\ell+1)t^{k+\ell}A^2 + g_0(t,A)t^{\ell-1}A.$$

$$(2.8) \quad t^d A(P-\tilde{P}) = (P-\tilde{P})(t^d A) - \tilde{\tilde{R}}$$

$$\text{onde} \quad \tilde{\tilde{R}} = -df_1(t,A)t^{\ell+1}A(t^{d-1}A) - df_0(t,A)t^{d-1}Au.$$

Proposição 2.4: Seja $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, $0 \in J \subset \mathbb{R}$, aberto se $\tilde{P}$ satisfaz

$(2.3)_{m_0, m_0}$. Então P satisfaz $(2.3)_{m_0, m_0}$ (diminuindo J se necessário).

Demonstração: Faremos a demonstração para $m=0$ e $m=1$. O caso geral segue o mesmo esquema.

$m=0$

$$\begin{aligned}
 \|(P-\tilde{P})u\|_0^2 &= \|(f_1(t,A)t^{\ell+1}A\partial_t + g_1(t,A)t^{k+\ell+1}A^2 + f_0(t,A)\partial_t + g_0(t,A)t^{\ell}A + h(t,A))u\|_0^2 \\
 &\leq 5\{\|f_1(t,A)t^{\ell+1}A\partial_t u\|_0^2 + \|g_1(t,A)t^{k+\ell+1}A^2 u\|_0^2 + \|f_0(t,A)\partial_t u\|_0^2 + \|g_0(t,A)t^{\ell}Au\|_0^2 \\
 &+ \|h(t,A)u\|_0^2\} \leq 5C\{|t|^2[\|t^{\ell}A\partial_t u\|_0^2 + \|t^{k+\ell}A^2 u\|_0^2 + \|t^{\ell-1}Au\|_0^2] + \|\partial_t u\|_0^2 + \|u\|_0^2\}.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\int \| (P-\tilde{P})u \|_0^2 dt \leq 5C \left\{ \int |t|^2 [\| t^\ell A \partial_t u \|_0^2 + \| t^{k+\ell} A^2 u \|_0^2 + \| t^{\ell-1} A u \|_0^2] dt \right. \\ \left. + \int \| \partial_t u \|_0^2 dt + \int \| u \|_0^2 dt \right\}$$

Notemos que para $u \in C_c^\infty(J, H^\infty)$

$$\int \| u \|_0^2 dt = -2\text{Re} \int (t \partial_t u, u)_0 dt$$

Portanto

$$\int \| u \|_0^2 dt \leq 4 \int |t|^2 \| \partial_t u \|^2 \quad \text{e} \quad \int \| \partial_t u \|_0^2 dt \leq 4 \int t^2 \| \partial_t u \|_0^2 dt$$

donde

$$(2.9) \quad \int \| (P-\tilde{P})u \|_0^2 dt \leq C m(J)^2 \| u \|_W^2$$

$m=1$. De (2.7) e (2.8) temos

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & \| (P-\tilde{P})u \|_{1,1} \leq C \{ \| \partial_t (P-\tilde{P})u \|_{L^2(J,H)} + \| t^d A (P-\tilde{P})u \|_{L^2(J,H)} \} \\ & \leq C \{ \| (P-\tilde{P})(\partial_t u) \|_{L^2(J,H)} + \| (P-\tilde{P})'(u) \|_{L^2(J,H)} + \| \tilde{R}u \|_{L^2(J,H)} \\ & \quad + \| (P-\tilde{P})(t^d A u) \|_{L^2(J,H)} + \| \tilde{R}u \|_{L^2(J,H)} \} \\ & \leq C'(m(J)) \{ \| \partial_t u \|_W + \| u \|_W + \| t^d A u \|_W \} + C \| \tilde{R}u \|_{L^2(J,H)} + C \| \tilde{R}u \|_{L^2(J,H)} \end{aligned}$$

agora como na demonstração de (2.9) temos

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \|\tilde{R}u\|_L^2 &\leq C_1 \{m(J)\}^2 \int \{ \|t^{\ell-1}Au\|^2 + \|t^{\ell-2}Au\|^2 + \|t^{\ell+k-1}A^2u\|^2 \} dt \\ \|\tilde{R}u\|_L^2 &\leq C_2 \{m(J)\}^2 \int \{ \|t^{\ell+d-1}A^2u\|^2 + \|t^{d-2}Au\|^2 \} dt \end{aligned}$$

Segue-se portanto de (2.10), (2.11) e o corolário 1.3.1 b) que

$$\|(P-\tilde{P})u\|_{1,1} \leq C m(J) \|u\|_{d_W 1,1}$$

finalmente, se $\tilde{P}$ satisfaz (2.3)_{1,1} temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{s,+} + \|P\theta u\|_{1,1} &\geq \|u\|_{s,+} + \|\tilde{P}\theta u\|_{1,1} - \|(P-\tilde{P})\theta u\|_{1,1} \\ &\geq C_1 \|\theta u\|_{d_W 1,1} - C_2 m(J) \|\theta u\|_{d_W 1,1} \geq C_3 \|\theta u\|_{d_W 1,1} \end{aligned}$$

Se $m(J)$ for suficientemente pequeno.

Corolário 2.1: Se $\tilde{P}$ satisfaz (2.3)_{m,m} para algum $m \in \mathbb{Z}_+$, então existe um intervalo J' contendo a origem tal que P satisfaz (2.3)_{s,m} para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Isto segue das proposições 2.2 e 2.4.

Corolário 2.2: Se $\tilde{P}$ satisfaz (2.3)_{m,m} para algum $m \in \mathbb{Z}_+$, então P é hipoelíptico em $t_0=0$.

Demonstração: Segue do Corolário 2.1 e da Proposição 2.3.

CAPÍTULO III

UMA ESTIMATIVA "SUB-ELIPTICA"

Neste capítulo, demonstraremos uma estimativa "sub-elíptica" para o operador $\tilde{P}$ considerado em (2.5). Isto nos permitirá obter $(2.2)_{0,0}$ para $\tilde{P}$ e, pelos resultados do capítulo II, para P .

Vamos considerar aqui um operador aparentemente mais geral que $\tilde{P}$. Mas que, como veremos oportunamente, é essencialmente o mesmo. Isto, no entanto, nos permitirá simplificar a demonstração da hipoeleptividade de $\tilde{P}$ no capítulo seguinte. Vamos denotar $\tilde{P}$ por $P(a,b,c,h)$.

$$(3.1) \quad P(a,b,c,h) = (\partial_t + at^\ell A)(\partial_t + bt^k A) + ct^{\ell-1}A + ht^{k-1}A$$

k e ℓ inteiros ímpares, $1 \leq \ell < k$, $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b < 0$. Isto difere de $\tilde{P}$ pelo termo $ht^{k-1}A$.

Proposição 3.1: Seja $P(a,b,c,h)$ o operador diferencial dado em (3.1) e suponhamos que $\operatorname{Re} a(|a|^{2\ell} - 2\operatorname{Re} c \bar{a}) > 0$. Então existem constantes $T > 0$ e $C > 0$ tais que para todo $\phi \in C_c^\infty(J-T, T[, H^\infty)$ tem-se

$$(3.2) \quad \left(\|\partial_t \phi\|^2 + \left\| t^{\frac{k+\ell}{2}} A\phi \right\|^2 + \left\| t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \phi \right\|^2 \right) \leq C \left| \int (P(a,b,c,h)\phi; \phi)_0 dt \right|$$

onde

$$\|u\|^2 = \int \|u\|_0^2 dt \quad u \in L^2(J-T, T[, H).$$

Demonstração: Se $J =]-T, T[$, então para $\phi \in C^\infty(J, H^\infty)$ temos

$$\begin{aligned} \int_J (P(a, b, c, h)\phi, \phi)_0 dt &= \int_J ((\partial_t + at^\ell A)(\partial_t + bt^k A)\phi, \phi)_0 dt + c \int_J (t^{\ell-1} A\phi, \phi)_0 dt + \\ &+ h \int_J (t^{k-1} A\phi, \phi)_0 dt \\ &= - \left[\int_J ((\partial_t + bt^k A)\phi, (\partial_t - \bar{a}t^\ell A)\phi)_0 dt - c \int_J \|t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt - h \int_J \|t^{\frac{k-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt \right] \\ &= - \left[\int_J \{ \|\partial_t \phi\|_0^2 + b(t^k A\phi, \partial_t \phi)_0 - ab(t^k A\phi, t^\ell A\phi)_0 - a(\partial_t \phi, t^\ell A\phi)_0 \} dt \right. \\ &\quad \left. - c \int_J \|t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt - h \int_J \|t^{\frac{k-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt \right] \end{aligned}$$

Uma integração por partes dá:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \int_J (\partial_t \phi, t^\ell A\phi)_0 dt &= -\ell \int_J (\phi, t^{\ell-1} A\phi)_0 dt = -\ell \int_J \|t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt \\ 2\operatorname{Re} \int_J (t^k A\phi, \partial_t \phi)_0 dt &= -k \int_J \|t^{\frac{k-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(\bar{a} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|}) \int_J (P(a, b, c, h)\phi, \phi)_0 dt &= \\ &= |\operatorname{Re} a| \int_J \|\partial_t \phi\|_0^2 dt - |a|^2 \frac{\operatorname{Re} a \operatorname{Re} b}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \|t^{\frac{k+\ell}{2}} A\phi\|_0^2 dt + \frac{|a|^2 \ell}{2} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \|t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt \\ &+ \operatorname{Re}(\bar{a} b \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|}) \int_J (t^k A\phi, \partial_t \phi)_0 dt - \operatorname{Re} c \bar{a} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \|t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt \\ &- \operatorname{Re} h \bar{a} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \|t^{\frac{k-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |\operatorname{Re} a| \int_J \|\partial_t \phi\|_0^2 dt - |a|^2 \frac{\operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} b}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \|t^{\frac{k+\ell}{2}} A\phi\|_0^2 dt \\
 &+ \left(\frac{|a|^2 \ell}{2} - \operatorname{Re} c \bar{a} \right) \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \|t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt + \operatorname{Re} \bar{a} b \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \operatorname{Re} \int_J (t^k A\phi, \partial_t \phi)_0 dt \\
 &- \operatorname{Im} a b \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \operatorname{Im} \int_J (t^k A\phi, \partial_t \phi)_0 dt - \operatorname{Re}(h\bar{a}) \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \|t^{\frac{k-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt \\
 &= |\operatorname{Re} a| \int_J \|\partial_t \phi\|_0^2 dt - |a|^2 \frac{\operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} b}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \|t^{\frac{k+\ell}{2}} A\phi\|_0^2 dt \\
 &+ \int_J \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \left[\frac{|a|^2 \ell}{2} - \operatorname{Re} c \bar{a} - \left(\frac{R}{2} \operatorname{Re} \bar{a} b + \operatorname{Re} h\bar{a} \right) t^{k-\ell} \right] (t^{\ell-1} A\phi, \phi)_0 dt \\
 &- \operatorname{Im} \bar{a} b \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \operatorname{Im} \int_J (t^k A\phi, \partial_t \phi)_0 dt.
 \end{aligned}$$

Por hipótese, $\frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} (|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re} c \bar{a}) > 0$, $k > \ell$ e $A \bar{e}$

definido positivo; por conseguinte existem constantes $T_1 > 0$ e $C_1 > 0$ tais que:

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad &\int \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \left[\frac{|a|^2 \ell}{2} - \operatorname{Re} c \bar{a} - \operatorname{Re} \bar{a} \left(\frac{bk}{2} + h \right) t^{k+\ell} \right] (t^{\ell-1} A\phi, \phi)_0 dt \\
 &\geq C_1 \int_{-1}^{T_1} \|t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi\|_0^2 dt \quad \forall \phi \in C_c^\infty(J-T_1, T_1; H^\infty)
 \end{aligned}$$

De outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$|\operatorname{Im} \int_J (t^k A \phi, \partial_t \phi)_0 dt| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_J \|\partial_t \phi\|_0^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_J t^{k-\ell} \left\| t^{\frac{k+\ell}{2}} A \phi \right\|_0^2 dt$$

Seja $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b < 0$, existem constantes $C_2 > 0$ e $T_2 > 0$ tais que para $\phi \in C_c^\infty([-T_2, T_2], H^\infty)$ temos:

$$\begin{aligned} & |\operatorname{Re} a| \int_J \|\partial_t \phi\|_0^2 - |a|^2 \frac{\operatorname{Re} a \operatorname{Re} b}{|\operatorname{Re} a|} \int_J \left\| t^{\frac{k+\ell}{2}} A \phi \right\|_0^2 - \operatorname{Im} \bar{a} b \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \operatorname{Im} \int_J (t^k A \phi, \partial_t \phi)_0 dt \\ & \geq C_2 \left\{ \int_J \|\partial_t \phi\|_0^2 dt + \int_J \left\| t^{\frac{k+\ell}{2}} A \phi \right\|_0^2 dt \right\}. \end{aligned}$$

Logo, para $T = \min\{T_1, T_2\}$ existe $C > 0$ tal que:

$$(3.4) \quad \int_{-T}^T \left\{ \|\partial_t \phi\|_0^2 + \left\| t^{\frac{k+\ell}{2}} A \phi \right\|_0^2 + \left\| t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi \right\|_0^2 \right\} dt \leq C \left| \int (P(a, b, c, h) \phi, \phi)_0 dt \right|$$

para todo $\phi \in C_c^\infty([-T, T], H^\infty)$.

Observação 3.1: A proposição 1.1.1, afirma que existem constantes $C_j > 0$ satisfazendo:

$$(3.5) \quad \left\| t^j A^{\frac{j+1}{\ell+1}} \phi \right\|^2 \leq C_j \left\{ \|\partial_t \phi\|^2 + \left\| t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi \right\|^2 \right\} \quad \forall \phi \in C_c^\infty([-T, T], H^\infty)$$

qualquer que seja $0 \leq j \leq \frac{\ell-1}{2}$.

De outro lado, para todo $0 < s < 1$ temos

$$\begin{aligned} \left\| |t|^{\frac{k+\ell}{2}} s + \frac{\ell-1}{2} (1-s) A^{\frac{s+\frac{1}{2}(1-s)}{\lambda}} \phi \right\|^2 &= \int \int_{R \sigma(A)} |t|^{\frac{k+\ell}{2} s + \frac{\ell-1}{2} (1-s)} \lambda^{\frac{s+\frac{1}{2}(1-s)}{\lambda}} d\|E(\lambda)\phi(t)\| d\lambda \\ &= \int \int_{R \sigma(A)} [(|t|^{\frac{k+\ell}{2}} \lambda)^s] [|t|^{\frac{\ell-1}{2}} \lambda^{1/2}]^{1-s} d\|E(\lambda)\phi(t)\|^2 dt \\ &\leq s \left\| |t|^{\frac{k+\ell}{2}} A\phi \right\|^2 + (1-s) \left\| |t|^{\frac{\ell-1}{2}} A^{1/2} \phi \right\|^2 \end{aligned}$$

Segue disto que para $\frac{\ell-1}{2} \leq j \leq \frac{k+\ell}{2}$ existem constantes C_j que não dependem de ϕ tais que:

$$(3.6) \quad \left\| |t|^j A^{\frac{k+2j-\ell+2}{2(k+1)}} \phi \right\| \leq C_j \left\{ \left\| |t|^{\frac{\ell-1}{2}} A\phi \right\| + \left\| |t|^{\frac{k+\ell}{2}} A\phi \right\| \right\} \quad \forall \phi \in C_c^\infty(]-T, T[, H^\infty)$$

De (3.4), (3.5) e (3.6), temos, (eventualmente aumentando a constante em (3.3)) existe $T > 0$ e $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} (3.7) \quad & \int_J \left\{ \left\| \partial_t \phi \right\|_0^2 + \left\| |t|^{\frac{k+\ell}{2}} A\phi \right\|_0^2 + \left\| |t|^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2} + \frac{\ell+1}{2(k+1)}} \phi \right\|_0^2 + \left\| |t|^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \phi \right\|_0^2 \right. \\ & \left. + \left\| |t|^{\frac{\ell-3}{2}} A^{\frac{\ell-1}{2(k+1)}} \phi \right\|_0^2 + \left\| A^{\frac{1}{\ell+1}} \phi \right\|_0^2 \right\} dt \leq C \left| \int (P(a, b, c, h)\phi, \phi)_0 dt \right| \quad \forall \phi \in C_c^\infty(]-T, T[, H^\infty). \end{aligned}$$

Observação 3.2: A demonstração da desigualdade (3.3), mostra que se c' é um número complexo satisfazendo a relação $-\operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} c' a > 0$, então se c satisfaz $\operatorname{Re} a(|a|^2 \ell - 2 \operatorname{Re} c \bar{a}) > 0$, e portanto (3.7) vale para $P(a, b, c, h)$, o mesmo acontece para $P(a, b, c+c', h)$ no mesmo intervalo $]-T, T[$. Isto usaremos diversas vezes no capítulo IV.

CAPÍTULO IV

HIPOELLIPTICIDADE DE $P(a,b,c,h)$

Definição 4.1: Se J é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, chamamos $V(J)$ o completado de $C_c^\infty(J, H^\infty)$ para a norma dada pela raiz quadrada da expressão do lado esquerdo de (3.6).

Se $V'(J)$ é o dual de $V(J)$, temos evidentemente que $V'(J)$ é um espaço de distribuições.

A proposição a seguir, mostra-se da forma usual.

Proposição 4.1: $V'(J)$ é o espaço das distribuições $u \in \mathcal{D}'(J, H^\infty)$ que podem ser escritas na forma

$$(4.0) \quad u = \partial_t v_0 + t^{\frac{k+\ell}{2}} A v_1 + t^\ell A^{\frac{1}{2} \frac{\ell+1}{2(k+1)}} v_2 + t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} v_3 + t^{\frac{\ell-3}{2}} A^{\frac{\ell-1}{2(\ell+1)}} v_4 + A^{\frac{1}{\ell+1}} v_5$$

onde v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 pertencem a $L_2(J, H)$.

Munimos $V'(J)$ com sua norma natural

$$\|u\|_{V'(J)} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^5 \|v_i\|_{L_2(J, H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, v_i \right.$$

satisfazendo (4.0).

Lema 4.1: Suponhamos que para algum $\theta > 0$, $A^\theta u \in V(J)$. Então $u \in V(J)$.

Demonstração: Seja E o espaço $C_c^\infty(J, H^\infty)$ munido da norma de $V(J)$. É claro que $A^{-\theta}: E \rightarrow E$ é linear contínuo. Logo, ele admite uma extensão linear contínua $B: V(J) \rightarrow V(J)$ ao completado $V(J)$ de E .

Como a topologia de $V(J)$ é mais fina do que a induzida em V por $\mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$, e $A^{-\Theta}: \mathcal{D}'(J, H^{-\infty}) \rightarrow \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ é contínuo, segue que B é a restrição de $A^{-\Theta}$ a $V(J)$. Logo, $A^{-\Theta}: V(J) \rightarrow V(J)$ é linear contínuo. Em particular, se $A^{\Theta}u \in V(J)$, então $u = A^{-\Theta}(A^{\Theta}u) \in V(J)$.

Proposição 4.2: Nas hipóteses da proposição (3.1), existem constantes $T > 0$ e $C > 0$ tais que para todo $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ satisfazendo

$$A^{\frac{k-l}{2(k+1)}}u \in V(J), \text{ tem-se } u \in V(J), P(a,b,c,h)u \in V'(J) \text{ e}$$

$$\|u\|_{V(J)} \leq C \|P(a,b,c,h)u\|_{V'(J)}.$$

Demonstração: Para $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ temos

$$\begin{aligned} P(a,b,c,h)u &= \partial_t u + abt^{k+l}A^2u + at^lA\partial_t u + bt^kA\partial_t u + (bk+h)t^{k+1}Au + ct^{l-1}Au \\ &= \partial_t(\partial_t u) + abt^{\frac{k+l}{2}}A(t^{\frac{k+l}{2}}Au) + at^{\frac{l}{2}}A^{\frac{1}{2}+\frac{l+1}{2(k+1)}}(A^{\frac{k-l}{2(k+1)}}\partial_t u) \\ (4.1) \quad &+ bt^{\frac{k+l}{2}}A(t^{\frac{k-l}{2}}\partial_t u) + (bk+h)t^{\frac{l-1}{2}}A^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{l-1}{2}}\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}u) + ct^{\frac{l-1}{2}}A^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{l-1}{2}}\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}u) \end{aligned}$$

Da hipótese, proposição 4.1 e lema 4.1 segue que $P(a,b,c,h)u \in V'(J)$ e que

$$(4.2) \quad \|P(a,b,c,h)u\|_{V'(J)} \leq C_1 \|A^{\frac{k-l}{2(k+1)}}u\|_{V(J)}$$

Com $\Theta = \frac{k-l}{2(k+1)}$, sejam $\{v_n\}$ uma sequência de $C_c^\infty(J, H^\infty)$ que converge

para $A^{\Theta}u$ em $V(J)$ e $u_n = A^{-\Theta}v_n$. De (4.2) temos

$$(4.3) \quad \|P(a,b,c,h)(u_n - u)\|_{V'(J)} \leq C_2 \|A^{\Theta}(u_n - u)\|_{V(J)} = C_2 \|v_n - A^{\Theta}u\|_{V(J)}$$

e portanto

$$(4.4) \quad P(a,b,c,h)u_n \longrightarrow P(a,b,c,h)u \quad \text{em } V'(J)$$

Como evidentemente, temos de (3.6) que

$$\|u_n\|_{V(J)} \leq C' \|P(a,b,c,h)u_n\|_{V'(J)}$$

concluimos de (4.4) e o lema (4.1) que

$$\|u\|_{V(J)} \leq C \|P(a,b,c,h)u\|_{V'(J)}.$$

Isto prova a proposição.

Lembremos que: Para $u \in L^2(J,H)$ temos

$$(e^{-\epsilon A}u)(t) = \int_{\sigma(A)} e^{-\epsilon \lambda} dE(\lambda)u(t)$$

A família de operadores $\{e^{-\epsilon A} | 0 < \epsilon \leq 1\}$ é um subconjunto equicontínuo de $L(L^2(J,H))$, pois $\sup_{\substack{0 < \epsilon \leq 1 \\ \lambda > 0}} e^{-\epsilon \lambda} \leq 1$ (donde $\|e^{-\epsilon A}\|_{L(L^2(J,H))} \leq 1$).

temos também

$$\|e^{-\epsilon A}u - u\|_{L^2(J,H)} \longrightarrow 0$$

quando $\epsilon > 0$ tende para zero. Se $u \in V(J)$ temos a seguinte afirmação.

Proposição 4.3: Sejam $u \in V(J)$, $s \in R_+$. Então para cada $\epsilon > 0$ fixado temos:

a) $A^s e^{-\varepsilon A} u = A^s u_\varepsilon \in V(J)$ e $A^s e^{-\varepsilon A}: V(J) \longrightarrow V(J)$ é linear contínuo

b) $\| e^{-\varepsilon A} u - u \|_{V(J)} \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ e $\{e^{-\varepsilon A} | 0 < \varepsilon \leq 1\}$ é um subconjunto equicontínuo de $L(V(J))$ e de $L(V'(J))$.

c) Se $u \in V'(J)$, então $e^{-\varepsilon A} u \longrightarrow u$ em $V'(J)$.

Demonstração: a) Para cada $s \in \mathbb{R}_+$, temos: $A^s e^{-\varepsilon A}: L^2(J, H) \rightarrow L^2(J, H)$ é contínuo, pois $\sup_{\lambda > 0} \lambda^{2s-2} < \infty$. Como $A^s e^{-\varepsilon A}$ comuta com os operadores que definem $V(J)$, segue que, se E for o espaço do Lema 4.1., $A^s e^{-\varepsilon A}: E \longrightarrow E$ é linear contínua e portanto admite extensão contínua $A^s e^{-\varepsilon A}: V(J) \longrightarrow V(J)$ (ver demonstração do Lema 4.1). Em particular, se $u \in V(J)$, então $A^s e^{-\varepsilon A} u \in V(J)$.

b) Temos que $\{e^{-\varepsilon A} | 0 < \varepsilon \leq 1\}$ é subconjunto equicontínuo de $L(L^2(J, H))$. Como $e^{-\varepsilon A}$ comuta com os operadores que definem $V(J)$, segue que $e^{-\varepsilon A}: E \longrightarrow E$ é linear contínua com norma ≤ 1 , para todo $0 < \varepsilon \leq 1$, donde admitem extensão contínua $e^{-\varepsilon A}: V(J) \longrightarrow V(J)$, com $\| e^{-\varepsilon A} \|_{L(V(J))} \leq 1$, para todo $0 < \varepsilon \leq 1$. Por dualidade, segue imediatamente que $\| e^{-\varepsilon A} \|_{L(V'(J))} \leq 1$ para todo $0 < \varepsilon \leq 1$.

Se $\phi \in C_c^\infty(J, H^\infty)$, é claro que $e^{-\varepsilon A} \phi \longrightarrow \phi$ em $V(J)$. Se $u \in V(J)$, e $\delta > 0$ for dado, tomemos $\phi \in C_c^\infty(J, H^\infty)$ tal que $\| u - \phi \|_{V(J)} \leq \delta$. Então

$$\begin{aligned} \| e^{-\varepsilon A} u - u \|_{V(J)} &\leq \| e^{-\varepsilon A} (u - \phi) \|_{V(J)} + \| e^{-\varepsilon A} \phi - \phi \|_{V(J)} + \| \phi - u \|_{V(J)} \\ &\leq 2\delta + \| e^{-\varepsilon A} \phi - \phi \|_{V(J)}. \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\|e^{-\varepsilon A} \phi - \phi\|_{V(J)} \leq \delta$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$: então

$$\|e^{-\varepsilon A} u - u\|_{V(J)} \leq 3\delta \quad \text{para} \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

c) A demonstração segue da representação (4.0) dos elementos de V' e do fato de que $e^{-\varepsilon A} u \rightarrow u$ em $L^2(J, H)$ se $u \in L^2(J, H)$.

Corolário 4.1: Nas hipóteses da proposição 3.1, existe $T > 0$ tal que se $u \in V([-T, T])$ e $A^r P(a, b, c, h)u \in V'([-T, T])$ para algum número real não negativo r , então $A^r u \in V([-T, T])$.

Demonstração: Pela proposição 4.3.a)

$$A^{\frac{k-l}{2(k+1)}} u_n = A^{\frac{k-l}{2(k+1)}} A^r e^{-\frac{1}{n} A} u \in V([-T, T]). \quad \text{Portanto pela proposição 4.2,}$$

$$u_n = A^r e^{-\frac{1}{n} A} u \in V([-T, T]) \quad \text{e} \quad \|u_n\|_{V([-T, T])} \leq C \|P(a, b, c, h)u_n\|_{V'([-T, T])}$$

Como $A^r P(a, b, c, h)u \in V'([-T, T])$, $P(a, b, c, h)u_n$ converge para $A^r P(a, b, c, h)u$ em $V'([-T, T])$ quando n tende para infinito (pela proposição 4.3, c). Isto implica que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$(4.4) \quad \|u_n\|_{V([-T, T])} \leq C \|P(a, b, c, h)u_n\|_{V'([-T, T])} \leq M.$$

A desigualdade (4.4) mostra que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $V([-T, T])$. Portanto, podemos afirmar (considerando uma subsequência se necessário) que $\{u_n\}$ converge fracamente para um elemento $v \in V([-T, T])$ quando $n \rightarrow \infty$. De outro lado, sabemos que

$$e^{-\frac{1}{n} A} u \rightarrow u \quad \text{em} \quad V([-T, T]) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{logo} \quad u_n \rightarrow A^r u \quad \text{em}$$

em $\mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$. Como também $u_n \rightarrow v$ em $\mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$, temos $A^r u = v$, donde $A^r u = v \in V(J-T, T[])$.

Proposição 4.4: Seja $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ tendo suporte compacto e satisfazendo

$$(4.5) \quad \partial_t u, t^{\frac{k+\ell}{2}} A u, t^{\ell} A^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(k+1)} u, t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u, t^{\frac{\ell-3}{2}} A^{\frac{\ell-1}{2(\ell+1)}} u, A^{\frac{1}{\ell+1}} u \in L^2(J, H)$$

Então $u \in V(J)$.

Demonstração: Em primeiro lugar, observemos que $u \in L^2(J, H)$. Como sempre, consideremos os regularizados de u :

$$u_{\varepsilon}(t) = (\rho_{\varepsilon} * e^{-\varepsilon A} u)(t).$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno cada $u_{\varepsilon} \in C_c^{\infty}(J, H^{\infty})$. Mostraremos que $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ em $V(J)$.

$$\text{Evidentemente } \partial_t u_{\varepsilon} \rightarrow \partial_t u \text{ e } A^{\frac{1}{\ell+1}} u_{\varepsilon} \rightarrow A^{\frac{1}{\ell+1}} u \text{ em } L^2(J, H).$$

De outro lado

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \| t^j A^s (\rho_{\varepsilon} * e^{-\varepsilon A} u) - t^j A^s u \|_{L^2(J, H)} \\ & \leq \| t^j A^s (\rho_{\varepsilon} * e^{-\varepsilon A} u) - \rho_{\varepsilon} * (e^{-\varepsilon A} t^j A^s u) \|_{L^2(J, H)} + \\ & + \| \rho_{\varepsilon} * (e^{-\varepsilon A} t^j A^s u) - t^j A^s u \|_{L^2(J, H)} \end{aligned}$$

onde temos usado j e s para os expoentes de t e A respectivamente em 4.5.

Por hipótese, o segundo termo do lado direito de (4.6) converge para zero quando ε tende a 0. Por outro lado, como

$\frac{1}{\ell+1} \leq s \leq 1$ e u tem suporte compacto, temos $A^s u \in H_c^{-1}$ e portanto,

da proposição 1.1.2 temos que o primeiro termo do lado direito de (4.6) converge para zero quando ε tende a zero.

Proposição 4.5: Suponhamos $\operatorname{Re} a < 0$ e $|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re}[(c - \frac{\ell-1}{2}a)\bar{a}] < 0$. Então existe $T > 0$ tal que se $u \in V([-T, T]) \cap E'([-T, T], H^{-\infty})$ e $P(a, b, c, h)u \in L^2([-T, T]; H)$ tem-se $u \in W_{loc}([-T, T]) = {}^dW_{loc}^{0,0}([-T, T])$.

Demonstração: Por hipótese temos evidentemente que:

$|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re} c\bar{a} < 0$, portanto $\operatorname{Re} a(|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re} c\bar{a}) > 0$. A proposição

4.1 implica que $A^{\frac{1}{\ell+1}}P(a, b, c, h)u \in V'([-T, T])$ e portanto segue do

corolário 4.1 que $A^{\frac{1}{\ell+1}}u \in V([-T, T])$. Consequentemente

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & \partial_t A^{\frac{1}{\ell+1}}u, t^{\frac{k+\ell}{2}} A(A^{\frac{1}{\ell+1}}u), t^{\ell} A^{\frac{1}{2} + \frac{\ell+1}{2(k+1)}} \frac{1}{\ell+1}u, t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\ell+1}}u, \\ & t^{\frac{\ell-3}{2}} \frac{1}{A^2}u, A^{\frac{2}{\ell+1}}u \end{aligned} \quad \text{pertencem a } L^2([-T, T], H)$$

a) Demonstraremos que $t^{\frac{\ell+1}{2}} A^{\frac{1}{2}}u \in V([-T, T])$. Para isto, observemos que:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{A^2}P(a, b, c - \frac{\ell-1}{2}a, h)(t^{\frac{\ell-1}{2}}u) = \\ & = t^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{1}{A^2}P(a, b, c, h)u + (\ell-1)t^{\frac{\ell-3}{2}} \frac{1}{A^2} \partial_t u + \\ & + (\frac{\ell-1}{2})(\frac{\ell-3}{2})t^{\frac{\ell-5}{2}} \frac{1}{A^2}u + \frac{\ell-1}{2}bt^{\frac{\ell-3}{2}} A^{\frac{\ell-1}{2(\ell+1)}}(t^k A^{1+\frac{1}{\ell+1}}u). \end{aligned}$$

De (4.7) segue que:

$$\frac{\ell-3}{2} t^{\frac{\ell-5}{2}} \frac{1}{A^2}u = \partial_t(t^{\frac{\ell-3}{2}} \frac{1}{A^2}u) - t^{\frac{\ell-3}{2}} A^{\frac{\ell-1}{2(\ell+1)}} \partial_t A^{\frac{1}{\ell+1}}u \in V'([-T, T])$$

Portanto o segundo lado de (4.8) pertence a $V'([-T, T])$ (segue de 4.7 e proposição 4.1). Como evidentemente $t^{\frac{\ell-1}{2}} u \in V([-T, T])$, concluímos do corolário 4.1 aplicado ao operador $P(a, b, c - \frac{\ell-1}{2} a, h)$ que $t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in V([-T, T])$. Em particular temos

$$(4.9) \quad t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \partial_t u, t^{\ell-1} Au, t^{\frac{k-1}{2} + \ell} A^{\frac{3}{2}} u, \dots \in L^2([-T, T], H)$$

b) Demonstremos que $\partial_t u \in V$.

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \partial_t P(a, b, c, h) u &= P(a, b, c, h) \partial_t u + a \ell t^{\ell-1} A \partial_t u + c(\ell-1) t^{\ell-2} Au \\ &+ (k-1)(h+bk) t^{k-2} Au + b k t^{k-1} A \partial_t u + ab(k+\ell) t^{k+\ell-1} A^2 u \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} P(a, b, c, h) \partial_t u &= \partial_t P(a, b, c, h) u - c(\ell-1) t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} (t^{\frac{\ell-3}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) \\ &- (k-1)(h+bk) t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} (t^{k-\ell+\frac{\ell-3}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) - b k t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} (t^{k-\ell+\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \partial_t u) \\ &- ab(k+\ell) t^{\frac{k+\ell}{2}} A (t^{\frac{k-\ell}{2} + \ell-1} Au) - a \ell t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} (t^{\frac{\ell-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \partial_t u). \end{aligned}$$

De (4.7), (4.9), (4.10) e da hipótese segue que:

$$P(a, b, c, h) \partial_t u = A^{\frac{1}{2}} P(a, b, c+a, h) A^{-\frac{1}{2}} \partial_t u \in V'([-T, T]; H)$$

De outro lado, a igualdade abaixo, (4.7), (4.9) e a hipótese, mostram que $A^{-\frac{1}{2}} \partial_t u \in L^2([-T, T], H)$.

$$P(a,b,c,h)A^{-\frac{1}{2}}u = A^{-\frac{1}{2}}\partial_t^2 u + abt^{k+\ell}A^{\frac{3}{2}}u + at^{\ell}A^{\frac{1}{2}}\partial_t u \\ + bkt^{k-1}A^{\frac{1}{2}}u + bt^k A^{\frac{1}{2}}\partial_t u + ct^{\ell-1}A^{\frac{1}{2}}u + ht^{k-1}A^{\frac{1}{2}}u.$$

Como também

$$t^{\frac{\ell-1}{2}}A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}\partial_t u), A^{\frac{1}{\ell+1}}(A^{-\frac{1}{2}}\partial_t u), t^{\ell}A^{\frac{1}{2}+\frac{\ell+1}{2(k+1)}}(A^{-\frac{1}{2}}\partial_t u), \\ t^{\frac{\ell-3}{2}}A^{\frac{\ell-1}{2(\ell+1)}}(A^{-\frac{1}{2}}\partial_t u), t^{\frac{k+\ell}{2}}A(A^{-\frac{1}{2}}\partial_t u)$$

pertencem a $L^2([-T, T]; H)$, temos, pela proposição 4.4 que

$A^{-\frac{1}{2}}\partial_t u \in V([-T, T])$. Aplicando o corolário 4.1 a $P(a,b,c,h)$ temos $\partial_t u \in V([-T, T])$.

c) Analogamente a a) e b) mostra-se que $t^{\frac{k+\ell}{2}}Au \in V([-T, T])$ e portanto, segue de a), b) e c) que

$$(4.11) \quad t^{\ell-1}Au, \partial_t u, t^{k+\ell}A^2u, t^{\frac{k+\ell}{2}}A\partial_t u \text{ (e portanto } t^k A\partial_t u)$$

pertencem a $L^2([-T, T], H)$. Finalmente (4.11) e o fato de que $P(a,b,c,h)u \in L^2([-T, T]; H)$ mostram que $t^{\ell}A\partial_t u \in L^2([-T, T]; H)$. Isto é, $u \in W_{10c}([-T, T])$.

Proposição 4.6: Se $\operatorname{Re} a > 0$ e $(|a|^{2\ell-2\operatorname{Re} c\bar{a}}) > 0$, existe $T > 0$ tal que se $u \in V([-T, T]) \cap E'([-T, T], H^{-\infty})$ e $P(a,b,c,h)u \in L^2([-T, T], H)$ então $u \in W_{10c}([-T, T])$.

Demonstração: Basta observar que nas hipóteses da proposição, temos $\operatorname{Re} a(|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re}[(c - \frac{-1}{2}a)\bar{a}]) > 0$. A demonstração segue então de maneira análoga à proposição anterior.

Para retirarmos a restrição $u \in V([-T, T]) \cap E'([-T, T]; H^{-\infty})$ nas proposições 4.5 e 4.6, aplicamos os argumentos de Trêves [6] (pág. 226) ao operador $P(a, b, c, h) = (\partial_t + bt^k A)(\partial_t + at^\ell A) + (c - a\ell)t^{\ell-1}A + (h + bk)t^{k-1}A$ e obtemos o

Lema 4.1: Suponhamos que $f = P(a, b, c, h)u$ pertence a $L^2_{loc}([-T, T]; H)$. Então existe $s \in \mathbb{R}$ ($s \leq 0$) tal que $A^s u \in \mathcal{H}^{1,1}_{loc}([-T, T]) \subset V_{loc}([-T, T])$. Em particular $A^s(\phi u) \in V([-T, T])$ para todo $\phi \in C^\infty_c([-T, T])$.

Proposição 4.7: Suponhamos $\operatorname{Re} a < 0$ (resp. $\operatorname{Re} a > 0$) e $[|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re}(c - \frac{\ell-1}{2}a)\bar{a}] < 0$ (resp. $(|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re} c\bar{a}) > 0$). Então existe $T > 0$ tal que

$$u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty}) \quad \text{e} \quad P(a, b, c, h)u \in L^2_{loc}(J, H^\infty) \implies u \in W_{loc}(J)$$

com $J =]-T, T[$.

Prova: Para qualquer $\phi \in C^\infty_c(J)$, temos:

$$\begin{aligned} A^s \phi P(a, b, c, h)u &= P(a, b, c, h)(A^s \phi u) - 2\phi' A^s \partial_t u - \phi'' A^s u \\ (4.12) \quad &- a\phi' t^\ell A(A^s u) - b\phi' t^k A(A^s u). \end{aligned}$$

Portanto, segue do lema 4.1 e de (4.12) que $P(a,b,c,h)(A^S \phi u) \in L^2(J,H)$ e $A^S \phi u \in V(J) \cap E'(J, H^{-\infty})$. Logo, as proposições 4.5 e 4.6 implicam que $A^S \phi u \in W_{loc}(J)$. Pela proposição 1.3.3.c) temos $A^S \phi u \in \mathcal{L}_{H_{loc}}^{1+\frac{1}{k+1},1}(J)$, donde $A^{\frac{1}{k+1}}(A^S \phi u) \in V(J)$. Repetindo o argumento um número finito de vezes, obtemos que $\phi u \in W_{loc}(J)$. Como ϕ é arbitrário temos que $u \in W_{loc}(J)$.

Neste estágio, aplicamos os resultados do capítulo II a $P(a,b,c,h)$ e obtemos: $(2.2)_{s,0}$ para $P(a,b,c,h)$. Isto mostra em particular que se $P(a,b,c,h)$ satisfaz as condições das proposições 4.5 e 4.6, então $P(a,b,c,h)$ é hipoeleptico em $t=0$.

Veremos a seguir como obter $(2.2)_{s,m}$, $m > 0$ para $P(a,b,c,h)$. Lembremos que $\operatorname{Re} a > 0$ quando $d=\ell$ e $\operatorname{Re} a < 0$ quando $d=k$.

Proposição 4.8: Consideremos a propriedade $(2.2)_{s,m}$ para $P(a,b,c,h)$, com c satisfazendo $\operatorname{Re} a(|a|^2 \ell - 2 \operatorname{Re} c \bar{a}) > 0$:

a) Se $(2.2)_{s,m_0}$ vale para todo s , então também vale

$$(2.2)_{s,m_0+\frac{1}{d}}, \text{ se } m_0 + \frac{1}{d} \notin \mathbb{Z}_+$$

b) Se $(2.2)_{s,m_0}$ vale para todo s , então também vale

$$(2.2)_{s,m_0+1} \quad (\text{aqui, } \ell=1 \text{ quando } \operatorname{Re} a < 0).$$

Lembremos que sô estamos considerando $m_0 \in \mathbb{Z}_+/d$.

Demonstração: Necessitamos distinguir dois casos: $d=\ell$ e $d=k$.

a) Seja $u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty})$ tal que $Pu \in d_H^{s, m_0 + \frac{1}{d}}(J)$: então
 $tPu \in d_{H_{loc}}^{s, m_0}(J)$ e $Pu \in d_H^{s - \frac{1}{d+1}, m_0}(J)$. Deste último fato deriva-
 mos, por (2,2) $s - \frac{1}{d+1}, m_0$, que $u \in d_{W_{loc}}^{s - \frac{1}{d+1}, m_0}(J)$.

Pela proposição 1.3.2 temos:

- i) $d=k$, $Xu, Yu \in k_H^{s+1 - \frac{1}{k+1}, m_0+1}(J) \subset n_H^{s, m_0}(J)$
- ii) $d=l$ $\partial_t u, Yu \in l_H^{s+1 - \frac{1}{l+1}, m_0+1}(J) \subset l_H^{s, m_0}(J)$

Portanto as identidades

$$tP(a, b, c, h)u = P(a, b, c, h)(tu) - Xu - Yu$$

e

$$tP(a, b, c, h)u = P(a, b, c-a, h)(tu) - \partial_t u - Yu$$

implicam que: $P(a, b, c, h)(tu) \in k_H^{s, m_0}(J)$ e

$P(a, b, c-a, h)(tu) \in l_H^{s, m_0}(J)$, donde concluímos que $tu \in d_{W_{loc}}^{s, m_0}(J)$.

(temos usado a observação 3.2 no caso $\operatorname{Re} a > 0$ e $m_0 = 0$. Para $0 < m_0 < 1 - \frac{1}{l}$, usamos indução). A proposição 1.3.3.a) mostra que

$$u \in d_{W_{loc}}^{s, m_0 + \frac{1}{d}}(J).$$

b) Como $d_H^{s, m_0+1}(J) \subset d_H^{s-1 + \frac{1}{d+1}, m_0}(J)$, obtemos por (2,2) $s-1 + \frac{1}{d+1}, m_0$
 que $u \in d_{W_{loc}}^{s-1 + \frac{1}{d+1}, m_0}(J)$.

Consideremos novamente dois casos

Caso I : $d=\ell$, $\operatorname{Re} a > 0$. Observemos as identidades

$$1) \quad t^\ell AP(a,b,c,h)u = P(a,b,c-\alpha\ell,h)(t^\ell Au) - \ell t^{\ell-1} A \partial_t u - \ell t^{\ell-1} AY u - \ell(\ell-1)t^{\ell-2} Au$$

$$2) \quad \partial_t P(a,b,c,h)u = P(a,b,c,h)\partial_t u + \alpha \ell t^{\ell-1} AY u + b k t^{k-1} A \partial_t u \\ + ab(k+\ell)t^{k+\ell-1} A^2 u + c(\ell-1)t^{\ell-2} Au + (h+bk)(k-1)t^{k-2} Au$$

Como $u \in \ell_{W_{loc}}^{s-1+\frac{1}{\ell+1}, m_0}(J)$, pela proposição 1.3.2 b) temos

$$(4.13) \quad \partial_t u, t^k Au \text{ e } Yu \in \ell_{H_{loc}}^{s+\frac{1}{\ell+1}, m_0+1}(J) \subset \ell_{H_{loc}}^{s-1+\frac{1}{\ell+1}, m_0-\frac{1}{\ell}}(J)$$

e portanto

$$(4.14) \quad t^{\ell-1} A \partial_t u, t^{k+\ell-1} A^2 u, t^{\ell-1} AY u \in \ell_{H_{loc}}^{s-1+\frac{1}{\ell+1}, m_0+\frac{1}{\ell}}(J) \subset \ell_{H_{loc}}^{s-1, m_0}(J)$$

De outro lado, $u \in \ell_{W_{loc}}^{s-1+\frac{1}{\ell+1}, m_0}(J)$ implica $t^{\ell-1} Au \in \ell_{H_{loc}}^{s-1+\frac{1}{\ell+1}, m_0}(J)$

donde $t^\ell Au \in \ell_{H_{loc}}^{s-1+\frac{1}{\ell+1}, m_0-\frac{1}{\ell}}(J)$ (Proposição 1.2.2.e). Disto, e de (4.13), temos:

$$\partial_t u, t^\ell Au \in \ell_{H_{loc}}^{s-1+\frac{1}{\ell+1}, m_0-\frac{1}{\ell}}(J)$$

Logó, pela observação 1.2.1 temos $u \in \ell_{H_{loc}}^{s+\frac{1}{\ell+1}, m_0+1-\frac{1}{\ell}}$ donde

$$(4.15) \quad t^\ell Au, \partial_t u \in \ell_{W_{loc}}^{s-1, m_0}(J)$$

Portanto, pela proposição 1.3.3.b) temos $u \in \ell_{W_{loc}}^{s, m_0+1}(J)$.

Caso II : $d=k$, $\ell=1$, $\operatorname{Re} a < 0$. Neste caso temos

$$(1') \quad t^k AP(a,b,c,h)u = P(a,b,c,h)(t^k Au) - kt^{k-1}AYu - kt^{k-1}AXu$$

$$(2') \quad YP(a,b,c,h)u = P(a,b,c+a,h)Yu - bkt^{k-1}AYu + h(k-1)t^{k-2}Au.$$

Como $u \in {}^k W_{loc}^{s-1 + \frac{1}{k+1}, m_0}(J)$ temos: (Proposição 1.3.2.a)

$$\partial_t u, tAu, Xu \text{ e } Yu \in {}^k H_{loc}^{s + \frac{1}{k+1}, m_0+1}(J)$$

a demonstração segue como no caso I.

Corolário 4.2: Se $\operatorname{Re} a(|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re} \bar{c}a) > 0$, então $P(a,b,c,h)$ satisfaz $(2.2)_{s,m}$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $m \in \mathbb{Z}_+/d$ (com $d=\ell$ se $\operatorname{Re} a > 0$ e $\ell=1$, $d=k$, se $\operatorname{Re} a < 0$).

Veremos a seguir como estender os resultados da proposição 4.8 para valores de c que não satisfazem a relação

$$(4.17) \quad \operatorname{Re} a(|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re} \bar{c}a) > 0$$

Começaremos mostrando o seguinte resultado:

Proposição 4.9: Consideremos o operador $P(a,b,c,h)$, sejam $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+/d$. Então, existe um intervalo aberto J contendo a origem $t=0$ e tal que:

$$(4.18) \quad u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty}); P(a,b,c,h)u \text{ e } t^{\ell-1}Au \in {}^d H_{loc}^{s,m}(J) \implies u \in {}^d W_{loc}^{s,m}(J)$$

(lembramos que $\ell=1$ quando $d=k$)

Prova: Escolhamos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} a(|a|^2 \ell - 2\operatorname{Re}(c+\alpha)\bar{a}) > 0$$

Temos então

$$P(a, b, c, +\alpha, h)u \in {}^d H_{loc}^{S, m}(J)$$

e portanto o resultado segue do corolário 4.2.

A seguir usaremos as fórmulas de "concatenação"

$$(4.19) \quad (tY + \frac{c}{a} + 2)P(a, b, c, -\frac{bc}{a}) = P(a, b, c+a(\ell+1), -\frac{b}{a}(c+a(k+1)))(tY + \frac{c}{a})$$

$$(4.20) \quad (tX - \frac{c}{a} + 1)P(a, b, c+a(\ell+1), -\frac{b}{a}(c+a(k+1))) = P(a, b, c, -\frac{bc}{a})(tX - \frac{c}{a} - 1).$$

observemos também as seguintes relações:

$$(4.21) \quad t^2 P(a, b, c, -\frac{bc}{a}) - (tX - \frac{c}{a} - 1)(tY + \frac{c}{a}) = (\frac{c}{a} + 1)\frac{c}{a}$$

$$(4.22) \quad t^2 P(a, b, c+a(\ell+1), -\frac{b}{a}(c+a(k+1))) - (tY + \frac{c}{a})(tX - \frac{c}{a} - 1) = (\frac{c}{a} + 1)\frac{c}{a}$$

Será mais conveniente para nós, ter (4.20) e (4.22) nas formas

$$(4.20') \quad (tX - \frac{c-a(\ell+1)}{a} + 1)P(a, b, c, -\frac{b}{a}(c+a(k-\ell))) = \\ = P(a, b, c-a(\ell+1), -\frac{b}{a}(c-a(\ell+1)))(tX - \frac{c-a(\ell+1)}{a} - 1)$$

$$(4.22') \quad t^2 P(a, b, c, -\frac{b}{a}(c+a(k-\ell))) - (tY + \frac{c-a(\ell+1)}{a})(tX - \frac{c-a(\ell+1)}{a} - 1) \\ = (\frac{c-a(\ell+1)}{a} + 1)(\frac{c-a(\ell+1)}{a})$$

Teorema 4.1: a) Suponhamos $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b < 0$ e

$(\frac{c-a(\ell+1)}{a} + 1)(\frac{c-a(\ell+1)}{a}) \neq 0$. Se $P(a, b, c-a(\ell+1), -\frac{b}{a}(c-a(\ell+1)))$ satisfaz $(2.2)_{s,m}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+/\ell$, $m \geq m_0$, então $P(a, b, c, -\frac{b}{a}(c+a(k-\ell)))$ satisfaz $(2.2)_{s,m}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+/\ell$, $m \geq m_0 + \frac{\ell+1}{\ell}$.

b) Suponhamos $\operatorname{Re} a < 0$, $\operatorname{Re} b > 0$ e $(\frac{c}{a} + 1)\frac{c}{a} \neq 0$ (lembramos que neste caso, $\ell=1$). Se $P(a, b, c+a(\ell+1), -\frac{b}{a}(c+a(k+1)))$ e $P(a, b, c+a, -\frac{b}{a}(c+a(k+1)))$ satisfazem $(2.2)_{s,m}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+/k$, $m \geq m_0$, então $P(a, b, c, -\frac{bc}{a})$ satisfaz $(2.2)_{s,m}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+/k$, $m \geq m_0 + \frac{k+1}{k}$.

Demonstração: a) Suponhamos que

$$P(a, b, c, -\frac{b}{a}(c+a(k-\ell)))u \in {}^\ell H_{loc}^{s,m}(J).$$

Pela fórmula de concatenação (4.22') e da proposição 1.2.2. partes d), e) e g) temos:

$$P(a, b, c-a(\ell+1), -\frac{b}{a}(c-a(\ell+1)))(tX - \frac{c-a(\ell+1)}{a} - 1)u \in {}^\ell H_{loc}^{s-1, m-1 - \frac{1}{\ell}}(J)$$

donde, por hipótese concluímos que:

$$(4.23) \quad (tX - \frac{c-a(\ell+1)}{a} - 1)u \in {}^\ell W_{loc}^{s-1, m-1 - \frac{1}{\ell}}(J)$$

Por hipótese e a proposição 1.2.2.e) vemos que

$$t^2 P(a, b, c, -\frac{b}{a}(c+a(k-l)))u \in {}_{\ell}H_{loc}^{s, m - \frac{2}{\ell}}(J)$$

As proposições 1.3.3.b e 1.2.2e), afirmam que

$$(tY + \frac{c-a(l+1)}{a})(tX - \frac{c-a(l+1)}{a} - 1)u \in {}_{\ell}H_{loc}^{s, m - \frac{2}{\ell}}(J)$$

donde por (4.22') temos

$$u \in {}_{\ell}H_{loc}^{s, m - \frac{2}{\ell}}(J)$$

Isto implica

$$(4.24) \quad t^{l-1}Au \in {}_{\ell}H^{s-1, m-1 - \frac{1}{\ell}}$$

Como ${}_{\ell}H_{loc}^{s, m}(J) \subset {}_{\ell}H_{loc}^{s-1, m-1 - \frac{1}{\ell}}(J)$, segue da hipótese e de (4.24) que

$$P(a, b, c, -\frac{b}{a}(c+a(k-l)))u \text{ e } t^{l-1}Au \in {}_{\ell}H_{loc}^{s-1, m-1 - \frac{1}{\ell}}(J).$$

Portanto, a proposição 4.9, afirma que

$$(4.25) \quad u \in {}_{\ell}W_{loc}^{s-1, m-1 - \frac{1}{\ell}}(J)$$

Logo

$$(4.25') \quad t^k Au, \partial_t u \in {}_{\ell}H_{loc}^{s, m - \frac{1}{\ell}}(J)$$

De (4.23) e (4.25) segue que $tXu \in {}_{\ell}W_{loc}^{s-1, m-1 - \frac{1}{\ell}}(J)$. Logo, pela proposição 1.3.2.b) temos

$$(4.26) \quad Y(tXu) = tYXu + Xu = tXYu + a\ell t^\ell Au - bkt^k Au + Xu$$

pertence a $\ell_{H_{loc}}^{s,m-\frac{1}{\ell}}(J)$, donde

$$(4.27) \quad tP(a,b,c,-\frac{b}{a}(c+a(k-\ell)))u - Y(tXu) = (c-a(\ell+1))t^\ell Au + bkt^k Au$$

pertence a $\ell_{H_{loc}}^{s,m-\frac{1}{\ell}}(J)$.

Pela hipótese, por (4.25') e (4.27) temos:

$$\partial_t u, t^\ell Au \in \ell_{H_{loc}}^{s,m-\frac{1}{\ell}}(J)$$

Isto é,

$$(4.28) \quad u \in \ell_{H_{loc}}^{s+1,m+1-\frac{1}{\ell}}(J), \text{ portanto } t^{\ell-1}Au \in \ell_{H_{loc}}^{s,m}(J)$$

Novamente, da hipótese, de (4.28) e da proposição 4.9 obtemos que

$$u \in \ell_{W_{loc}}^{s,m}(J).$$

b) De forma análoga à parte a), mostra-se, usando (4.19) e (4.21) que

$$(4.29) \quad u \in k_{H_{loc}}^{s,m-\frac{2}{k}}(J)$$

Por outro lado, a hipótese e as proposições 1.2.2.e) e 1.3.2.a) implicam:

$$(4.30) \quad tP(a,b,c,-\frac{bc}{a})u - X(tY + \frac{c}{a}) = (\frac{c}{a} + 1)Yu \in k_{H_{loc}}^{s,m-\frac{1}{k}}(J)$$

e portanto, por (4.29) e (4.30) temos:

$$(4.31) \quad t^{k-1}AYu, t^{k-2}Au \in k_{H_{loc}}^{s-1, m-1}(J)$$

Agora

$$\begin{aligned} YP(a, b, c, -\frac{bc}{a})u &= P(a, b, c+a, -\frac{b}{a}(c+a(k+1)))Yu \\ &- \frac{bc}{a}(k-1)t^{k-2}Au + bt^{k-1}AYu \end{aligned}$$

Logo, por hipótese e por (4.31), temos:

$$P(a, b, c+a, -\frac{b}{a}(c+a(k+1)))Yu \in k_{H_{loc}}^{s-1, m-1}(J)$$

donde

$$(4.32) \quad Yu \in k_{W_{loc}}^{s-1, m-1}(J)$$

logo

$$tYu, u \in k_{W_{loc}}^{s-1, m-1 - \frac{1}{k}}(J).$$

Por (4.32) e pela proposição 1.3.2.a) vemos que

$$XYu \in k_{H_{loc}}^{s, m}(J)$$

Isto, e a hipótese implicam que:

$$cAu - \frac{cb}{a} t^{k-1}Au \in k_{H_{loc}}^{s, m}(J).$$

É fácil mostrar que $t^{k-1}Au \in k_{H_{loc}}^{s, m}(J)$ e portanto temos

$$Au \in k_{H_{loc}}^{s, m}(J)$$

O resultado segue agora da proposição 4.9.

Observação: Se considerarmos os operadores $P(a,b,c,h)$, temos visto que as fórmulas (4.19); (4.20); (4.21); (4.22), (4.21') e (4.22') valem para valores particulares de h . Mas isto não causará problema, pois temos visto que a estimativas subelíptica (3.7) não depende essencialmente de h . Portanto, para iniciar as concatenações podemos escolher o h que nos interessa. Para continuar, observamos a demonstração da proposição 2.4. Isto nos permitirá incluir o termo $ht^{k-1}A$ no termo $c(t,A)$.

Para terminar o capítulo temos o seguinte

Teorema 4.2: Consideremos o operador

$$P = XY + c(t,A)A$$

onde X e Y são como em 1.3.2. e satisfazem as condições 1.3.3. e 2.1. Suponhamos que seja verdadeira uma das seguintes condições:

$$\text{a)} \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b < 0, \frac{c}{a} \neq m(\ell+1) \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} \neq m(\ell+1)-1, m \geq 1$$

$$(d = \ell)$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0, \ell=1, \frac{c}{a} \neq 0, -1, -2, \dots \quad (d = k)$$

Nestas condições existem $T > 0, m_0 \in \mathbb{N}$ tais que
 $(2.2)_{s,m_0}$ vale para P (com $J =]-T, T[$) para todo $s \in \mathbb{R}$. Em particular P é hipoelíptico em $t=0$.

CAPÍTULO V

HIPOELIPTICIDADE ANALÍTICA

Neste capítulo, demonstraremos a hipoelepticidade analítica do operador $P = XY + c(t,A)A$. Onde X e Y são dados em (1.3.2) e $c(t,A) \in Q_A(J)$.

Suporemos que

(5.1) Existe uma vizinhança de zero U em $\mathbb{C}$ tal que $J = \mathbb{R} \cap U$, e para todo $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 0$, $a_\mu(t)$, $b_\mu(t)$, $c_\mu(t)$ podem ser extendidas como funções a valores complexos holomorfas sobre U , para os quais $a(t,A)$, $b(t,A)$, $c(t,A) \in H(U, L(H,H))$, onde temos denotado por $H(U, L(H,H))$ o espaço de Fréchet das funções holomorfas sobre U , a valores em $L(H,H)$ munido com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos de U .

Pela fórmula de Cauchy podemos encontrar uma constante $M > 0$, pelo menos diminuindo J , tal que para todo $h \in \mathbb{N}$, todo $t \in J$,

$$(5.2) \quad \{ \| \partial_t^h a(t,A) \|_L, \| \partial_t^h b(t,A) \|_L, \| \partial_t^h c(t,A) \|_L \} \leq M^{h+1} h!$$

onde $\| \cdot \|_L$ denota a norma do espaço $L(H,H)$.

Além disso, suponhamos que o operador P satisfaz as condições (1.3.3) e (2.1). Nesta condições podemos escrever

(5.3) $a_0(t) = a(t)t^\ell$, $b_0(t) = b(t)t^k$, $c_0(t) = c(t)t^{\ell-1}$ donde, por (5.1), $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ admitem extensões holomorfas sobre U e $a(t)$, $b(t)$ nunca se anulam sobre J (pelo menos diminuindo U). En-

tão existe uma constante $M > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{N}$ e $t \in J$

$$(5.4) \quad \{|\partial_t^h a(t)|, |\partial_t^h b(t)|, |\partial_t^h c(t)|\} \leq M^{h+1} h!$$

possivelmente depois de diminuir J . Logo, podemos escrever

$$P = (\partial_t + a(t)t^\ell A + \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu+1}(t)A^{-\mu})(\partial_t + b(t)t^k A + \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\mu+1}(t)A^{-\mu}) \\ + c(t)t^{\ell-1}A + \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu+1}(t)A^{-\mu}$$

e portanto

$$(5.5) \quad Pu = \partial_t^2 u + \beta(t)t^\ell A \partial_t u + \alpha(t)t^{k+\ell} A^2 u + \gamma(t,A) \partial_t u + \\ + \phi(t,A)t^{\ell-1} A u + \psi(t,A)u$$

onde $\alpha(t), \beta(t) \in C^\infty(J)$, $\gamma(t,A), \phi(t,A), \psi(t,A) \in Q_A(J)$.

Por (5.2) e (5.4), existe uma constante $M > 0$, tal que para todo $\lambda \in \mathbb{N}$ e todo $t \in J$

$$(5.6) \quad \{|\partial_t^\lambda \alpha(t)|, |\partial_t^\lambda \beta(t)|, \|\partial_t^\lambda \gamma(t,A)\|_L, \|\partial_t^\lambda \phi(t,A)\|_L, \|\partial_t^\lambda \psi(t,A)\|_L\} \leq M^{\lambda+1} \lambda!$$

Usaremos a seguinte notação de [5]. Se $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq 4$, Γ_p denotará o subconjunto de $\mathbb{N}^2$ dado por

$$\Gamma_p = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha \leq 4; \alpha + \beta \leq p - \alpha\} \cup \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / \alpha \geq 4, \alpha + \beta \leq p - 4\}$$

Se $p < 4$

$$\Gamma_p = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / \alpha + \beta \leq p\}.$$

Notemos que Γ_p contém todos os pares (α, β) com $\alpha + \beta \leq p - 4$.

Usaremos também a notação ${}^n F_J(u)$ definido por

$$(5.7) \quad {}^n F_J(u)^2 = \| \partial_t^2 u \|_{n,n}^2 + \| t^\ell A \partial_t u \|_{n,n}^2 + \| t^{k+\ell} A^2 u \|_{n,n}^2 + \| \partial_t u \|_{n,n}^2 + \\ + \| t^{\ell-1} A u \|_{n,n}^2 + \| u \|_{n,n}^2$$

onde $u \in C_c^\infty(J, H)$ e $\| \cdot \|_{n,n}^2$ é dado pelo corolário 1.3.1 e as normas $\| \cdot \|_{0,0}$ são em $L^2(J, H)$.

Finalmente, usaremos a notação

$${}^n F_J^P(u) = \sup_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_P} \{ {}^n F_J(\partial_t^\alpha A^\beta) \}$$

Suponhamos que P é hipoelíptico e que para algum $m \in \mathbb{Z}_+$ (2.3) $_{m,m}$ se verifica com $s'=0$. Então diminuindo o intervalo J se necessário, (ver por exemplo [1] proposição 5.1) vemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(5.8) \quad \| u \|_{d_W^{m,m}} \leq C \| Pu \|_{m,m} \quad \forall u \in C_c^\infty(J, H^\infty)$$

Portanto, por (5.7)

$$(5.9) \quad {}^m F_J(u) \leq C \| Pu \|_{m,m}$$

Nestas condições temos o

Teorema 5.1: Seja P um operador em J satisfazendo (1.3.3), (2.1), (5.3) e (5.8). Suponhamos que P é hipoelíptico em $t=0$. Então P é analítico hipoelíptico em $t=0$.

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{D}'(J, H^\infty)$ tal que

$$(5.10) \quad Pu \in A(J, H^\omega)$$

Queremos provar que existe um intervalo aberto relativamente compacto $I \subset J$, com centro em 0, independente de u tal que

$$(5.11) \quad u \in A(I, H^\omega).$$

Isto será suficiente, pois P é elíptico e por conseguinte analítico hipoeelíptico em $J - \{0\}$, sendo $a(t), b(t) \neq 0$, para todo $t \in J$ por construção.

Para começar (5.10) implica que, diminuindo J se necessário

$$u \in C^\infty(J, H^\infty)$$

pois P é hipoeelíptico em $t=0$ por hipótese, portanto, para provar (5.11), é suficiente provar que podemos escolher I , independente de u , e uma constante $B > 0$ tal que

$$(5.12) \quad n_{F_I}^p(u) \leq B^{p+1} p! \quad \text{para todo } p \in \mathbb{N}, p \geq p_0$$

onde p_0 é um inteiro fixado, então pela óbvia relação

$$d_{W^{m,m}}^{m,m}(J) \subset W(J) \subset C(J, H)$$

para J limitado, (5.12) implicará

$$\sup \|\partial_t^\alpha A^\beta u\|_H \leq M^{\alpha+\beta+1} (\alpha+\beta)!$$

onde M é uma constante apropriada, o qual prova (5.11).

Na realidade, se (5.12) vale, então dados α e $\beta \in \mathbb{N}$ escolhemos $p = \alpha+\beta+4$. Logo temos $(\alpha, \beta) \in \Gamma_p$ e portanto

$$\sup_I \|\partial_t^{\alpha} A^{\beta} u\| \leq B^{\alpha+\beta+4} (\alpha+\beta+4)! \leq M^{\alpha+\beta+1} (\alpha+\beta)!$$

onde

$$M = \sup_{\alpha, \beta} B B^{\frac{3}{\alpha+\beta+1}} \left(\prod_{j=1}^4 (\alpha+\beta+j) \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta+1}} < \infty.$$

Seja $\Omega =]-2, 2[$, que podemos supor contido em J e para todo λ , $0 \leq \lambda < 2$, seja $\Omega_{\lambda} =]-2+\lambda, 2-\lambda[$.

Sejam $\varepsilon, \varepsilon_1$ dois números tais que $0 < \varepsilon, \varepsilon_1 < 1$ e $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega_{\varepsilon_1})$ tal que:

$$(5.13) \quad \phi(t) = 1 \quad \forall t \in \Omega_{\varepsilon_1+\varepsilon}, \quad \sup_{t \in]-2, 2[} |\partial_t^j \phi| \leq c_j \varepsilon^{-j} \quad 0 \leq j \leq m+2$$

De agora em diante, C denotará uma constante positiva genérica independente de $\alpha, \beta, p, \varepsilon, \varepsilon_1$.

Sejam p qualquer inteiro positivo ≥ 4 e $(\alpha, \beta) \in \Gamma_p$. Então, por (5.9)

$$(5.14) \quad m_F_{\Omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}}(\partial_t^{\alpha} A^{\beta} u) \leq m_F_{\Omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}}(\phi \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u) \leq C \|P(\phi \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u)\|_{m,m} \\ \leq c \{ \|\phi \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u\|_{m,m} + \|[P, \phi] \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u\|_{m,m} + \|\phi [P, \partial_t^{\alpha} A^{\beta}] u\|_{m,m} \}$$

Antes de continuar a demonstração do Teorema 5.1, necessitaremos dos seguintes Lemas:

Lema 5.1: Seja J um intervalo da reta, $K \subset J$ um compacto. Se $u \in C^{\infty}(J, H^{\infty})$ e $\gamma(t, A) \in Q_A(J)$, então

$$\|\gamma(t, A)u\|_{m,m,K} \leq C \sum_{j=0}^m \|\partial_t^j \gamma(t, A)\|_L \|u\|_{m-j, m-j, K}.$$

Demonstração: Por indução em m . Para $m=0$ é evidente. Suponhamos o Lema demonstrado para $m-1$ e demonstremos para m . (Todas as normas serão em K).

Pela proposição 1.2.2.g), existe uma constante $C > 0$ tal que (vamos usar também a hipótese indutiva).

$$\begin{aligned} \|\gamma(t,A)u\|_{m,m} &\leq C\{\|t^d A \gamma(t,A)u\|_{m-1,m-1} + \|\partial_t(\gamma(t,A)u)\|_{m-1,m-1}\} \\ &\leq C \sum_{j=0}^{m-1} \{\|\partial_t^j \gamma(t,A)\|_L (\|t^d Au\|_{m-1-j,m-1-j} + \|\partial_t u\|_{m-1-j,m-1-j}) \\ &\quad + \|\partial_t^{j+1} \gamma(t,A)\|_L \|u\|_{m-1-j,m-1-j}\} \\ &\leq 2C \sum_{j=0}^{m-1} \{\|\partial_t^j \gamma(t,A)\|_L \|u\|_{m-j,m-j} + \|\partial_t^{j+1} \gamma(t,A)\|_L \|u\|_{m-1-j,m-1-j}\} \\ &\leq 2C \sum_{j=0}^m \|\partial_t^j \gamma(t,A)\|_L \|u\|_{m-j,m-j} \end{aligned}$$

Lema 5.2: Nas hipótese acima, isto é, as condições (5.4), (5.5), (5.6) e (5.13) estão verificadas, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|[P,\phi]\partial_t^{\alpha} A^{\beta} u\|_{m,m} \leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-j} \{\epsilon^{-1} m-j F_{\Omega \in 1}^{p-1}(u) + \epsilon^{-2} m-j F_{\Omega \in 1}^{p-2}(u)\},$$

para todo $\alpha, \beta \in \Gamma_p$, $p \geq 4$.

Demonstração: De (5.5) vemos que

$$\begin{aligned} [P,\phi] &= [\partial_t^2, \phi] + [\beta(t)t^{\ell} A \partial_t, \phi] + [\alpha(t)t^{k+\ell} A^2, \phi] + [\gamma(t,A)\partial_t, \phi] + \\ &\quad + [\phi(t,A)t^{\ell-1} A, \phi] + [\psi(t,A), \phi] = 2\phi' \partial_t + \phi'' + \beta(t)t^{\ell} A \phi' + \gamma(t,A)\phi' \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \| [P, \phi] \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u \|_{m,m} &\leq \| \phi'' \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u \|_{m,m+2} \| \phi' \partial_t^{\alpha+1} A^{\beta} u \|_{m,m} \\ &+ \| \beta(t) t^{\ell} \phi' \partial_t^{\alpha} A^{\beta+1} u \|_{m,m} + \| \gamma(t, A) \phi' \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u \|_{m,m} \end{aligned}$$

Estimaremos primeiro $\| \phi'' \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u \|_{m,m}$ e $\| \gamma(t, A) \phi' \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u \|_{m,m}$.

Suponhamos $\alpha \geq 2$. Neste caso temos $(\alpha-2, \beta) \in \Gamma_{p-2}$. Pois se $\alpha-2 \geq 4$, temos $\alpha \geq 4$ e portanto $\alpha+\beta \leq p-4$ implica $\alpha-2+\beta \leq p-2-4$. Se $\alpha-2 \leq 4$ e $\alpha \geq 4$, temos $-4 \leq -(\alpha-2)$ e portanto $\alpha+\beta \leq p-4$ implica $\alpha-2+\beta \leq p-2-4 \leq p-2-(\alpha-2)$. Se $\alpha < 4$, então $\alpha+\beta \leq p-\alpha$ implica $\alpha-2+\beta \leq p-2-(\alpha-2)$. Logo, pelo lema 5.1 obtemos:

$$\begin{aligned} \| \phi'' \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u \|_{m,m} &\leq C \sum_{j=0}^m |\phi^{(j+2)}| \| \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u \|_{m-j, m-j, \Omega_{\epsilon_1}} \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} \| \partial_t^2 (\partial_t^{\alpha-2} A^{\beta} u) \|_{m-j, m-j, \Omega_{\epsilon_1}} \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}} (\partial_t^{\alpha-2} A u) \leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-2}(u) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \| \gamma(t, A) \phi' \partial_t^{\alpha} A^{\beta} u \|_{m,m} &\leq C \sum_{j=0}^m \| \partial_t^j (\phi' \gamma(t, A)) \|_{L^{\infty}} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-2}(u) \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} M^{j+1} j! m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-2}(u), \text{ se } M \geq 1. \end{aligned}$$

Se $\alpha=1$, temos $1+\beta \leq p-1$ e portanto $\beta \leq p-2$. Logo

$(0, \beta) \in \Gamma_{p-2}$ e neste caso temos

$$\begin{aligned} \|\phi'' \partial_t A^\beta u\|_{m,m} &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} \|\partial_t A^\beta u\|_{m-j, m-j, \Omega_{\epsilon_1}} \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}} (A^\beta u) \leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-2}(u) \\ \|\gamma(t, A) \phi' \partial_t A^\beta u\|_{m,m} &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-2}(u) \end{aligned}$$

Finalmente, se $\alpha=0$, por (5.13) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(5.15) \quad \left| \partial_t^j \left(\frac{\phi''}{t^r} \right) \right| \leq c \epsilon^{-(j+2)}, \quad \left| \partial_t^j \left(\frac{\phi'}{t^r} \right) \right| \leq c \epsilon^{-(j+1)} \quad 0 \leq j \leq m$$

(usaremos para r os valores $\ell-1$, ℓ e $k+\ell$).

Portanto, se $\beta \geq 2$ temos $(0, \beta-2) \in \Gamma_{p-2}$, donde

$$\begin{aligned} \|\phi'' A u\|_{m,m} &= \left\| \frac{\phi''}{t^{r+\ell}} t^{k+\ell} A^2 (A^{\beta-2} u) \right\|_{m-j, m-j, \Omega_{\epsilon_1}} \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} \|t^{k+\ell} A^2 (A^{\beta-2} u)\|_{m-j, m-j, \Omega_{\epsilon_1}} \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}} (A^{\beta-2} u) \leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-2}(u). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \|\gamma(t, A) \phi' A^\beta u\|_{m,m} &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} M^{j+1} j! \|t^{k+\ell} A^2 (A^{\beta-2} u)\|_{m-j, m-j, \Omega_{\epsilon_1}} \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} M^{j+1} j! m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-2}(u) \end{aligned}$$

Se $\beta=1$, temos $(0, 0) \in \Gamma_{p-2}$ e

$$\begin{aligned} \|\phi'' A u\|_{m,m} &= \left\| \frac{\phi''}{t^{\ell-1}} t^{\ell-1} A u \right\|_{m,m} \leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} \|t^{\ell-1} A u\|_{m-j, m-j, \Omega_{\epsilon_1}} \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} m-j_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-2}(u) \end{aligned}$$

e

$$\| \gamma(t, A) \phi' A u \|_{m, m} \leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+2)} M^{j+1} j!^{m-j} F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-2}(u)$$

Se $\beta=0$, é ainda mais simples verificar essas desigualdades.

Consideremos agora $\| \phi' \partial_t^{\alpha+1} A^\beta u \|_{m, m}$. Se $\beta \geq 1$, temos por (5.15)

$$\begin{aligned} \| \phi' \partial_t^{\alpha+1} A^\beta u \|_{m, m} &= \| \frac{\phi'}{t^\ell} t^\ell A \partial_t (\partial_t^{\alpha} A^{\beta-1} u) \|_{m, m} \leq C \sum_{j=0}^m c \epsilon^{-(j+1)} m-j F_{\Omega_{\epsilon_1}} (\partial_t^{\alpha} A^{\beta-1} u) \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+1)} m-j F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-1}(u), \end{aligned}$$

pois $(\alpha, \beta-1) \in \Gamma_{p-1}$. Na realidade, se $\alpha \geq 4$ e $\alpha+\beta \leq p-4$, então $\alpha+\beta-1 \leq p-1-4$ e portanto $(\alpha, \beta-1) \in \Gamma_{p-1}$. Se $\alpha \leq 4$ e $\alpha+\beta \leq p-\alpha$, então $\alpha+\beta-1 \leq p-1-\alpha$ e $(\alpha, \beta-1) \in \Gamma_{p-1}$.

Se $\beta=0$ e $\alpha \geq 1$, então $(\alpha-1, 0) \in \Gamma_{p-1}$ e

$$\begin{aligned} \| \phi' \partial_t^{\alpha+1} u \|_{m, m} &= \| \phi' \partial_t^2 (\partial_t^{\alpha-1} u) \|_{m, m} \leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+1)} m-j F_{\Omega_{\epsilon_1}} (\partial_t^{\alpha-1} u) \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+1)} m-j F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-1}(u). \end{aligned}$$

Se $\beta=0$ e $\alpha=0$, é mais simples ainda obter essa desigualdade.

Finalmente, consideremos $\| \beta(t) t^\ell \phi' \partial_t^{\alpha} A^{\beta+1} u \|_{m, m}$.

Se $\beta \geq 1$, $(\alpha, \beta-1) \in \Gamma_{p-1}$ e portanto usando (5.15) vemos que

$$\begin{aligned} \| \beta(t) \phi' t^\ell \partial_t^{\alpha} A^{\beta+1} u \|_{m, m} &= \| \beta(t) \frac{\phi'}{t^k} t^{k+\ell} A^2 \partial_t^{\alpha} A^{\beta-1} u \|_{m, m} \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+1)} M^{j+1} j!^{m-j} F_{\Omega_{\epsilon_1}} (\partial_t^{\alpha} A^{\beta-1} u) \leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-(j+1)} M^{j+1} j!^{m-j} F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-1}(u) \end{aligned}$$

Se $\beta=0$ e $\alpha \geq 1$, temos $(\alpha-1, 0) \in \Gamma_{p-1}$ e portanto

$$\begin{aligned} \|\beta(t)\phi(t)^\ell A \partial_t^{\alpha-1} u\|_{m,m} &\leq C \sum_{j=0}^m \varepsilon^{-(j+1)} M^{j+1} j!^{m-j} F_{\Omega_{\varepsilon_1}}(\partial_t^{\alpha-1} u) \\ &\leq C \sum_{j=0}^m \varepsilon^{-(j+1)} M^{j+1} j!^{m-j} F_{\Omega_{\varepsilon_1}}^{p-1}(u) \end{aligned}$$

Se $\beta = \alpha = 0$, é ainda mais fácil, e o lema está demonstrado, já que $M^{j+1} j! \leq C$, $0 \leq j \leq m$.

Lema 5.3: Nas hipóteses do lema 5.2, existe uma constante $C > 0$, tal que:

$$\|\phi[P, \partial_t^{\alpha\beta}]u\|_{m,m} \leq C \sum_{j=0}^m \varepsilon^{-j} \left(\sum_{h=1}^p C^h \frac{p!}{(p-h)!} m^{-j} F_{\Omega_{\varepsilon_1}}^{p-h}(u) \right), \forall (\alpha, \beta) \in \Gamma_p$$

Demonstração: Vamos supor $\alpha \geq 1$, caso contrário o comutador é zero.

Pelo Lema 5.1. temos:

$$\|\phi[P, \partial_t^{\alpha\beta}]u\|_{m,m} \leq C \sum_{j=0}^m \varepsilon^{-j} \|[P, \partial_t^{\alpha\beta}]u\|_{m-j, m-j, \Omega_{\varepsilon_1}}$$

De (5.5) vemos que (todas as normas são em Ω_{ε_1})

$$\begin{aligned} \|[P, \partial_t^{\alpha\beta}]u\|_{m-j, m-j} &\leq \|[\beta(t)t^\ell, \partial_t^\alpha] \partial_t^{\beta+1} u\|_{m-j, m-j} \\ &+ \|[\gamma(t, A), \partial_t^\alpha] \partial_t^\beta u\|_{m-j, m-j} + \|[\phi(t, A)t^{\ell-1}, \partial_t^\alpha] A^{\beta+1} u\|_{m-j, m-j} \\ &+ \|[\psi(t, A), \partial_t^\alpha] A^\beta u\|_{m-j, m-j} + \|[\alpha(t)t^{k+\ell}, \partial_t^\alpha] A^{\beta+2} u\|_{m-j, m-j} \end{aligned}$$

Vejamos primeiro

$$\|[\beta(t)t^\ell, \partial_t^\alpha] \partial_t^{\beta+1} u\|_{m-j, m-j} \leq \sum_{\substack{\lambda+\mu=\alpha \\ \mu < \alpha}} \frac{\alpha!}{\lambda! \mu!} \|\partial_t^\lambda (\beta(t)t^\ell) \partial_t^{\mu+1} A^{\beta+1} u\|_{m-j, m-j}$$

Pelo Lema 5.1,

$$\begin{aligned} \left\| \partial_t^\lambda (\beta(t)t^\ell) \partial_t^{\mu+1} A^{\beta+1} u \right\|_{m-j, m-j} &\leq C \sum_{r=0}^{m-j} \left| \partial_t^{\lambda+r} (\beta(t)t^\ell) \right| \left\| \partial_t^{\mu+1} A^{\beta+1} u \right\|_{m-j-r, m-j-r} \\ &\leq C \sum_{r=0}^{m-j} M^{\lambda+r+1} (\lambda+r)! \left\| \partial_t^{\mu+1} A^{\beta+1} u \right\|_{m-j-r, m-j-r} \end{aligned}$$

portanto, basta estimar

$$\left\| \partial_t^{\mu+1} A^{\beta+1} u \right\|_{m-j-r, m-j-r}.$$

Se $\mu \geq 1$ e $\alpha \geq 4$ (portanto $p \geq 4$), $\lambda + \mu + \beta \leq p-4$ implica $\mu-1 + \beta+1 \leq p-\lambda-4$. Logo $(\mu-1, \beta+1) \in \Gamma_{p-\lambda}$ (pois Γ_p contém todos os pares com $\alpha + \beta \leq p-4$). Se $\mu \geq 1$ e $\alpha \leq 4$, então $\lambda + \mu + \beta \leq p-\alpha$ implica $\mu-1 + \beta+1 \leq p-\lambda-\alpha < p-\lambda-\alpha < p-\lambda-(\mu-1)$. Isto é, $(\mu-1, \beta+1) \in \Gamma_{p-\lambda}$. Logo, se $\mu \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left\| \partial_t^{\mu+1} A^{\beta+1} u \right\|_{m-j-r, m-j-r} &= \left\| \partial_t^2 (\partial_t^{\mu-1} A^{\beta+1} u) \right\|_{m-j-r, m-j-r} \\ &\leq C^{m-j-r} F_{\Omega_{\varepsilon_1}} (\partial_t^{\mu-1} A^{\beta+1} u) \leq C^{m-j-r} F_{\Omega_{\varepsilon_1}}^{p-\lambda}(\mu) \end{aligned}$$

Vamos estimar agora,

$$\left\| [\alpha(t)t^{k+\ell}, \partial_t^\alpha] A^{\beta+2} u \right\| \leq C \sum_{\substack{\lambda+\mu=\alpha \\ \mu < \alpha}} \frac{\alpha!}{\lambda!\mu!} \left\| \partial_t^\lambda (\alpha t^{k+\ell}) \partial_t^\mu A^{\beta+2} u \right\|_{m-j, n-j}$$

Novamente, pelo lema 5.1.

$$\left\| \partial_t^\lambda (\alpha(t)t^{k+\ell}) \partial_t^\mu A^{\beta+2} u \right\|_{m-j, m-j} \leq C \sum_{r=0}^{m-j} M^{\lambda+r+1} (\lambda+r)! \left\| \partial_t^\mu A^{\beta+2} u \right\|_{m-j-r, m-j-r}$$

Portanto é suficiente estimar

$$\left\| \partial_t^\mu A^{\beta+2} u \right\|_{m-j-r, m-j-r}$$

Se $\mu \geq 2$ e $\alpha \geq 4$, temos $\lambda + \mu + \beta \leq p-4$ implica $\mu - 2 + \beta + 2 \leq p - \lambda - 4$. Se $\alpha \leq 4$, temos $\lambda + \mu + \beta \leq p - \alpha$ implica $\mu - 2 + \beta + 2 \leq p - \lambda - (\mu - 2)$. Logo, vemos que $(\mu - 2, \beta + 2) \in \Gamma_{p-\lambda}$ e portanto

$$\begin{aligned} \|\partial_t^\mu A^{\beta+2} u\|_{m-j-r, m-j-r} &= \|\partial_t (\partial_t^{\mu-2} A^{\beta+2} u)\|_{m-j-r, m-j-r} \\ &\leq m-j-r_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}} (\partial_t^{\mu-2} A^{\beta+2} u) \leq m-j-r_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-\lambda} (u) \end{aligned}$$

Se $\mu=1$ e $\alpha \geq 4$, então $\lambda+1+\beta \leq p-4$ implica $\beta+2 \leq p-\lambda-3 < p-\lambda$. Se $\alpha < 4$, então $\lambda+1+\beta \leq p-\alpha$ implica $\beta+2 \leq p-\lambda-(\alpha-1) \leq p-\lambda$. Logo $(0, \beta+2) \in \Gamma_{p-\lambda}$, donde:

$$\|\partial_t A^{\beta+2} u\|_{m-j-r, m-j-r} \leq m-j-r_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}} (A^{\beta+2} u) \leq m-j-r_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-\lambda} (u)$$

Finalmente, se $\mu = 0$ e $\alpha \geq 4$, $\lambda + \beta \leq p-4$ implica $\beta+2 \leq p-\lambda-2 < p-\lambda$ e $\alpha \leq 4$, então $\lambda + \beta \leq p-\lambda$ implica $\beta+2 \leq p-\lambda-(\alpha-2) \leq p-\lambda$ (se $\alpha \geq 2$) temos então $(0, \beta+2) \in \Gamma_{p-\lambda}$ e

$$\|A^{\beta+2} u\|_{m-j-r, m-j-r} \leq m-j-r_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}} (A^{\beta+2} u) \leq m-j-r_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-\lambda} (u)$$

Se $\alpha = 1$ temos

$$\begin{aligned} [\alpha(t)t^{\ell+k}, \partial_t] A^{\beta+2} u &= \alpha' t^{k+\ell} A^{\beta+2} u + (k+\ell) \alpha(t) t^{k+\ell-1} A^{\beta+2} u \\ &= \alpha'(t) t^{k+\ell} A^2 (A^\beta u) + [(k+\ell) \alpha(t) t^k] \cdot t^{\ell-1} A (A^{\beta+1} u) \end{aligned}$$

como $\beta < 1 + \beta \leq p-1$, temos $(0, \beta)$ e $(0, \beta+1) \in \Gamma_{p-1}$ e portanto

$$\|[\alpha(t)t^{k+\ell}, \partial_t] A^{\beta+2} u\| \leq C \sum_{r=0}^{m-j} M^{1+r+1} (r+1)! m-j-r_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-1} (u)$$

Os outros 3 termos estimamos de maneira análoga.

As demonstrações acima mostram que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \|\phi[P, \partial_t^{\alpha\beta} u]\|_{m,m} &\leq \sum_{j=0}^m \epsilon^{-j} \left(\sum_{\substack{\lambda+\mu=\alpha \\ \mu < \alpha}} \frac{\alpha!}{\lambda!\mu!} M^{\lambda+j+1} (\lambda+j)! \right) m^{-j} F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-\lambda}(u) \\ &= C \sum_{\substack{\lambda+\mu=\alpha \\ \mu < \alpha}} \frac{\alpha!}{\lambda!\mu!} M^{\lambda+1} \lambda! \sum_{j=0}^m \epsilon^{-j} M^j \frac{(\lambda+j)!}{\lambda!} m^{-j} F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-\lambda}(u) \\ &\leq C \sum_{\substack{\lambda+\mu=\alpha \\ \mu < \alpha}} \frac{P!}{(\alpha-\lambda)!} \frac{\alpha!}{P!} M^{\lambda+1} \sum_{j=0}^m \epsilon^{-j} M^j \frac{(\lambda+j)!}{\lambda!} m^{-j} F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-\lambda}(u) \\ &\leq C \sum_{\lambda=1}^p \frac{P!}{(P-\lambda)!} M^{\lambda+1} \sum_{j=0}^m \epsilon^{-j} M^j \frac{(\lambda+j)!}{\lambda!} m^{-j} F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-\lambda}(u) \\ &\leq \sum_{\lambda=1}^p \frac{P!}{(P-\lambda)!} C^{\lambda+1} \sum_{j=0}^m \epsilon^{-j} m^{-j} F_{\Omega_{\epsilon_1}}^{p-\lambda}(u) \end{aligned}$$

Pois sendo j finito vemos que existe $C > 0$ tal que

$$M \cdot M^{\frac{1}{\lambda+1}} \left(\prod_{i=1}^j (\lambda+i) \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \leq C, \quad \forall 0 \leq j \leq m$$

donde concluimos que:

$$M^{\lambda+1+j} (\lambda+j)! \leq C^{\lambda+1} \lambda!$$

Isto prova o lema 5.3

Continuação da demonstração do Teorema 5.1: Observemos inicialmente que existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $(\alpha, \beta) \in \Gamma_p$, temos:

$$(5.16) \quad \|\partial_t^{\alpha\beta} u\|_{m-j, m-j, j} \leq C^{p+m-j+1} (p+m-j)! \quad \forall 0 \leq j \leq m.$$

Isto é evidente, pois por (5.10) e (0.1) existe $M > 0$ tal que se $\delta + \mu \leq m-j$ e $(\alpha, \beta) \in \Gamma_p$ temos

$$\sup_j \|\partial_t^{\alpha+\delta} A^{\beta+\mu} u\|_H \leq M^{\alpha+\beta+m-j+1} (\alpha+\beta+m-j)! \leq M^{p+m-j+1} (p+m-j)!$$

Pois $\alpha+\beta \leq p$. Do corolário 1.3.1 temos (5.16) aumentando a constante M se necessário.

Dos lemas (5.1), (5.2) e (5.3) e de (5.14) segue que

$$\begin{aligned} m_{F_{\Omega_{\epsilon+\epsilon_1}}}(\partial_t A^\beta u) &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-j} \{C^{p+m-j} (p+m-j)! + \sum_{k=1}^2 \epsilon^{-k} m_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-k}(u) \\ &\quad + \sum_{n=1}^p C^n \frac{p!}{(p-n)!} m_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-n}(u)\} \end{aligned}$$

donde tomando o supremo sobre $(\alpha, \beta) \in \Gamma_p$ temos

$$\begin{aligned} (5.17) \quad m_{F_{\Omega_{\epsilon+\epsilon_1}}}^p(u) &\leq C \sum_{j=0}^m \epsilon^{-j} \{C^{p+m-j} (p+m-j)! + \sum_{k=1}^2 \epsilon^{-k} m_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-k}(u) \\ &\quad + \sum_{h=1}^p C^h \frac{\epsilon^h p!}{(p-h)!} \epsilon^{-h} m_{F_{\Omega_{\epsilon_1}}}^{p-h}(u)\} \end{aligned}$$

Então, se λ é um inteiro tal que $\lambda \geq p+m+4$, $\epsilon = \frac{1}{\lambda}$, $\epsilon_1 = \frac{p}{\lambda}$ e

$$dm_{p,p} = m_{F_{\Omega_{(p+1)/\lambda}}}^p(u) \lambda^{-p-m-4}$$

de (5.17) temos

$$\begin{aligned}
 m_{F^p}^p(u)_{\Omega \in \epsilon_1} \lambda^{-p-m-4} &\leq C \sum_{j=0}^m \{ C^{p+m-j} (p+m-j)! \lambda^{-p-(m-j)-4} \\
 &+ \sum_{k=1}^2 m-j F_{\Omega \in \epsilon_1}^{p-k}(u) \lambda^{-p-(m-j)+k-4} \\
 &+ \sum_{h=1}^p C^h \frac{\lambda^{-h} p!}{(p-h)!} m-j F_{\Omega \in \epsilon_1}^{p-h}(u) \lambda^{-p-(m-j)+h-4} \}
 \end{aligned}$$

Logo

$$(5.18) \quad d_{m,p} \leq C \sum_{j=0}^m (C^{p+m-j} + \sum_{h=1}^2 d_{m-j,p-h} + \sum_{h=1}^p C^h d_{m-j,p-h})$$

pois

$(p+m-j)! \lambda^{-p-m+j-4} \leq 1$, e $\epsilon_1 = \frac{p}{\lambda} \geq \frac{p-h+1}{\lambda}$ e portanto $\Omega_{\epsilon_1} \subset \Omega_{\frac{p-h+1}{\lambda}}$. Como (5.18) vale para qualquer inteiro p satisfazendo $4 \leq p \leq \lambda-m-4$, então aumentando C (pois m é finito) temos

$$(5.19) \quad d_{m,p} \leq \sum_{j=0}^m (C^p + \sum_{h=1}^p C^h d_{m-j,p-h}) \quad \text{para } 4 \leq p \leq \lambda-m-4$$

Agora $\max_{\substack{0 \leq j \leq m \\ p \leq 4}} \{d_{m-j,p}\}$ é limitado por uma constante indepen-

dente de λ , portanto por indução, podemos achar uma constante $B > 1$, independente de λ , tal que:

$$(5.20) \quad d_{m,p} \leq B^{p+1} \quad 4 \leq p \leq \lambda-m-4.$$

De fato, se (5.19) vale até $p-1$, então, se $B > (1+2C)(m+1)$, de (5.19) temos

$$d_{m,p} \leq \sum_{j=0}^m (C^p + \sum_{h=1}^p C^h B^{p-h+1}) \leq \sum_{j=0}^m (C^p + C B^p \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{C}{B})^{k-1})$$

$$\leq \sum_{j=0}^m (C^p + 2CB^p) \leq (m+1)(1+2C)B^p \leq B^{p+1}$$

Então de (5.20) temos para $\lambda \geq m+8$

$$d_{m, -m-4} \leq B^{\lambda-m-3} \implies m_{F_{\Omega_1}}^{\lambda-m-4}(u) \leq B^{\lambda-m-3} \lambda^\lambda,$$

pois $\Omega_1 \subset \Omega_{\frac{\lambda-m-3}{\lambda}}.$

Portanto, mudando a constante B, pela fórmula de Stirling, obtemos (5.11) com $I = \Omega_1$.

Isto termina a demonstração do Teorema 5.1.

Observação 5.1: As hipóteses do Teorema 5.1, estão verificadas quando P satisfaz as condições do Teorema 4.2, ou quando P satisfaz as condições da proposição 4.7. Neste último caso, a proposição 4.7 implica que $\tilde{P}$ satisfaz $(2.2)_{0,0}$ e as proposições 2.4 (com $m_0=0$) 2.1, 2.2 e 2.3 implicam que P satisfaz $(2.2)_{s,0}$ para todo s em R. Isto é, P é hipoeelíptico.

CAPÍTULO VI

GRAU DE REGULARIDADE DE UMA CLASSE PARTICULAR DE OPERADORES

Neste capítulo estaremos interessados em estudar o grau de regularidade das soluções (nos espaços $H_{loc}^{s,m}(J)$) de certos operadores hipoelípticos quando o mesmo não é máximo.

Mais precisamente, vamos estudar o grau de regularidade das soluções de operadores da forma

$$(6.1) \quad P = (\partial_t - a(t,A)A)(\partial_t - b(t,A)A) + c(t,A)A$$

satisfazendo a seguinte condição bastante restritiva.

Se escrevermos $a(t,A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t)A^{-i}$, $b(t,A) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t)A^{-i}$, $c(t,A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t)A^{-i}$, então suporemos que:

(6.2) Para todo inteiro $i \geq 0$, existem números complexos a_i, b_i, c_i tais que $a_i(t) = a_i t^k$, $b_i(t) = b_i t^k$, $c_i(t) = c_i t^{k-1}$. Chamemos

$$a(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^{-i}, \quad b(A) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i A^{-i}, \quad c(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^{-i}$$

Como $a(t,A)$, $b(t,A)$ e $c(t,A)$ pertencem a $Q_A(J)$, o mesmo acontece com $a(A)$, $b(A)$ e $c(A)$. Observemos que neste caso temos:

$$a(t,A) = t^k a(A), \quad b(t,A) = t^k b(A), \quad c(t,A) = t^{k-1} c(A).$$

Usaremos as notações

$$X = \partial_t - a(t,A)A, \quad Y = \partial_t - b(t,A)A, \quad \delta(t,A) = a(t,A) - b(t,A),$$

$\delta = \delta_0 = a_0 - b_0$ e $\ell_p = \frac{c_0}{\delta_0}$. No caso em que (6.2) se verifica, chamaremos $\delta(A) = a(A) - b(A)$ e daí $\delta(t,A) = t^k \delta(A)$.

Suporemos também que

$$(6.2') \quad d(A) = \frac{c(A)}{\delta(A)} \text{ é uma série convergente}$$

$$(6.3) \quad \operatorname{Re} a_0 > 0, \operatorname{Re} b_0 < 0, \text{ e } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ é ímpar.}$$

Nestas condições, foi demonstrado em [3] (Teorema 6.1) o seguinte:

Teorema 6.1: Seja P um operador da forma (6.1) satisfazendo (6.2) e (6.3). Então, as seguintes duas propriedades são equivalentes:

$$(6.4) \quad P \text{ é hipoelíptico em } t=0;$$

$$(6.5) \quad \text{qualquer que seja o inteiro } q \geq 0, \text{ nenhuma das séries de potências } c(A) - q(k+1)\delta(A) \text{ e } c(A) - (q(k+1)+1)\delta(A) \text{ são identicamente zero.}$$

Foi também demonstrado em [3], (Teorema 7.1) que se

$$(6.6) \quad \ell_p \neq q(k+1) \text{ e } \ell_p \neq q(k+1)+1, \quad \forall q \in \mathbb{N},$$

então P é hipoelíptico com regularidade máxima, isto é:

$$(6.7) \quad u \in \mathcal{D}'(J, H^{-\infty}); Pu \in {}^k H_{loc}^{s,m}(J) \implies u \in {}^k H_{loc}^{s+2,m+2}(J).$$

Na verdade (6.7) vale para operadores $\mathbb{P}$ que não necessariamente verificam 6.2 (mas que verifiquem (1.3.3) e (2.1) onde substituímos ℓ por k , e neste caso $\ell_p = \frac{c}{a-b}$), $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}/k$.

O problema é então o seguinte: Qual é a regularidade das soluções de P quando ℓ_P não satisfaz (6.6) mas satisfaz (6.5)?

Neste sentido temos: (denotando $P(c(A)) = XY + e(A)t^{k-1}A$)

Proposição 6.1: Seja P um operador da forma 6.1, satisfazendo (6.2), (6.2'), (6.3) e (6.5). Suponhamos além disso que $c_i = 0$ para $0 \leq i < n$ e $c_n \neq 0$. Então

$$(6.8) \quad u \in \mathcal{D}'(J, H^-), P(c(A))u \in {}^k H_{loc}^{s,m}(J) \iff \begin{cases} A^{-k}u \in {}^k H_{loc}^{s+2,m+2}(J) \\ Yu \in {}^k H_{loc}^{s+1,m+1}(J) \end{cases}$$

Demonstração: Observemos que para o operador $P(c(A) - (k+1)\delta(A))$ temos

$$\ell_P = \frac{-(k+1)(a_0 - b_0)}{a_0 - b_0} = -(k+1)$$

Portanto $P(c(A) - (k+1)\delta(A))$ satisfaz (6.7).

Vamos mostrar que $P(c(A))$ satisfaz (6.8). Usaremos livremente todos os resultados dos capítulos IV e V de [3].

Suponhamos primeiro $m \in \mathbb{Z}/k$ com $m \geq 1+1/k$ ou $m \leq -1+(1/k)$ (ver observação 5.4 de [3]).

Seja então

$$(6.9) \quad P(c(A))u \in {}^k H_{loc}^{s,m}(J)$$

Prova-se por computação direta que

$$(6.10) \quad (tY - d(A) + 2)P(c(A))u = P(c(A) - (k+1)\delta(A))(tY - d(A))u$$

Como $tY: {}^k H_{loc}^{s,m} \longrightarrow {}^k H_{loc}^{s-1,m-1-(1/k)}$ é contínuo para $m \notin]0,1[$ e

$k_{H_{loc}}^{s,m} \subset k_{H_{loc}}^{s-1,m-1-(1/k)}$, vemos de (6.9) e (6.10) que

$$P(c(A)-(k+1)\delta(A))(tY-d(A))u \in k_{H_{loc}}^{s-1,m-1-(1/k)}(J)$$

e por (6.7) temos

$$(tY-d(A))u \in k_{H_{loc}}^{s+1,m+1-(1/k)}(J)$$

A seguir, usamos a identidade:

$$(6.11) \quad (tX+d(A)-1)(tY-d(A))u - t^2 P c(A))u = d(A)(I-d(A))u$$

para obtermos

$$(6.12) \quad e(A)u = d(A)(I-d(A))u \in k_{H_{loc}}^{s,m-(2/k)}(J)$$

Da definição de $d(A)$, podemos escrever $e(A)$ na forma:

$$(6.13) \quad e(A) = \alpha A^{-n}(I + A^{-1}g(A))$$

onde α é um número complexo diferente de zero e $g(A) \in Q_A(J)$ é independente de t . Portanto, de (6.12) e (6.13) temos:

$$\alpha(I + A^{-1}g(A))(A^{-n}u) \in k_{H_{loc}}^{s,m-(2/k)}(J)$$

donde

$$(6.14) \quad \alpha(I + A^{-1}g(A))t^{k-1}A(A^{-n}u) \in k_{H_{loc}}^{s-1,m-1-(1/k)}(J)$$

Se agora escolhemos um número real r suficientemente próximo a $-\infty$, de (6.9) e (6.14) vemos que:

$$Ru = [P(c(A)) - \gamma \delta_0 t^{k-1} A(I + A^{-1}g(A))](A^{-k}u) \in k_{H_{loc}}^{s-1, m-1 - \frac{1}{k}}(J)$$

e $\ell_R \leq -\frac{k}{2}$, donde por (6.7) aplicado ao operador R,

$$A^{-n}u \in k_{H_{loc}}^{s+1, m+1 - \frac{1}{k}}(J)$$

donde

$$t^{k-1}A(A^{-n}u) \in k_{H_{loc}}^{s, m}(J)$$

Repetindo o argumento, obtemos:

$$(6.15) \quad A^{-n}u \in k_{H_{loc}}^{s+2, m+2}(J)$$

Como $c(A) = c_k A^{-n}(h(A))$, com $h(A) \in Q_A(J)$ independente de t , temos de (6.15)

$$c(A)t^{k-1}Au \in k_{H_{loc}}^{s+1, m+1 + \frac{1}{k}}(J) \subset k_{H_{loc}}^{s, m}(J)$$

donde de (6.9) obtemos

$$XYu \in k_{H_{loc}}^{s, m}(J)$$

sendo X hipoeilíptico (Proposição 0.2) temos

$$Yu \in k_{H_{loc}}^{s+1, m+1}(J)$$

Para os valores de $m \in \mathbb{Z}/k$ satisfazendo $-1 + \frac{1}{k} < m < 1 + \frac{1}{k}$ procedemos como na demonstração do Teorema 5.1 de [3] (partes 5 e 6), (ver também a demonstração da proposição 4), observando que:

$$tP(c(A))u = P(c(A))(tu) - Yu - Xu$$

$$(6.16) \quad YP(c(A))u = P(c(A))(Yu) + k(b(A)-a(A))t^{k-1}AYu + (k-1)c(A)t^{k-2}Au$$

$$t^kAP(c(A))u = P(c(A))(t^kAu) - kt^{k-1}A(X+Y)u - k(k-1)t^{k-2}Au$$

A recíproca é imediata.

Proposição 6.2: Seja $P(c(A))$ um operador da forma (6.1) satisfazendo (6.2), (6.2'), (6.3) e (6.5) e com

$$c_i = q(k+1)(a_i - b_i), \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad \text{e} \quad c_n \neq q(k+1)(a_n - b_n)$$

ou

$$c_i = (q(k+1)+1)(a_i - b_i) \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad \text{e} \quad c_n \neq (q(k+1)+1)(a_n - b_n)$$

para algum $q \in \mathbb{N}$. Se $P(c(A))$ satisfaz (6.8), então

$$P(c(A) + (k+1)\delta(A)) \quad \text{também satisfaz (6.8).}$$

Demonstração: Como na demonstração da proposição 6.1, suponhamos primeiro $m \in \mathbb{Z}/k$ com $m \geq 1 + \frac{1}{k}$ ou $m \leq -1 + \frac{1}{k}$. Seja

$$(6.17) \quad P(c(A) + (k+1)\delta(A))u \in {}^{kHS,m}_{loc}(J)$$

Neste caso, vemos que (6.10) assume a forma:

$$(6.18) \quad \left(tY - \frac{c(A) + (k+1)\delta(A)}{\delta(A)} + 2 \right) P(c(A) + (k+1)\delta(A))u \\ = P(c(A)) \left(tY - \frac{c(A) + (k+1)\delta(A)}{\delta(A)} \right)u.$$

Portanto, como na demonstração da proposição 6.1, temos

$$P(c(A))(tY - \frac{c(A)+(k+1)\delta(A)}{\delta(A)})_u \in k_{H_{loc}}^{s-1, m-1 - \frac{1}{k}}(J)$$

donde por (6.8) temos:

$$(6.19) \quad (tY - \frac{c(A)+(k+1)\delta(A)}{\delta(A)})(A^{-k}u) \in k_{H_{loc}}^{s+1, m+1 - \frac{1}{k}}(J)$$

A seguir, vemos que (6.11) assume a forma

$$\begin{aligned} (6.20) \quad & (tX + \frac{c(A)+(k+1)\delta(A)}{\delta(A)} - 1)(tY - \frac{c(A)+(k+1)\delta(A)}{\delta(A)})_u - t^2 P(c(A)+(k+1)\delta(A))_u \\ & = \frac{c(A)+(k+1)\delta(A)}{\delta(A)}(I - \frac{c(A)+(k+1)\delta(A)}{\delta(A)})_u = R(A)u \end{aligned}$$

onde $R(A) \in Q_A(J)$ é independente de t e $r_0 \neq 0$. Segue de (6.17), (6.19) e (6.20) que

$$R(A)(A^{-n}u) \in k_{H_{loc}}^{s, m - \frac{2}{k}}(J)$$

A demonstração continua como a da proposição 6.1.

Para finalizar temos o seguinte

Teorema 6.2: Seja P um operador da forma (6.1), satisfazendo (6.2), (6.2'), (6.3) e (6.5). Se existe algum $q \geq 0$ para o qual $c_i = q(k+1)(a_i - b_i)$ para $0 \leq i \leq n-1$ e $c_n \neq q(k+1)(a_n - b_n)$, então $P(c(A))$ satisfaz (6.8).

Demonstração: Usamos indução em q e as proposições 6.1 e 6.2.

Observação 6.1: Um resultado análogo ao teorema 6.2 se verifica se $c_i = (q(k+1)+1)(a_i - b_i)$ para $0 \leq i \leq n-1$ e $c_n \neq (q(k+1)+1)(a_n - b_n)$. Para mostrar isto, consideramos na proposição 6.1 o operador $P(c(A) - \delta(A))$.

o0o

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bolley, P., Camus, J.; Helffer, B.: Hypoellipticité pour une equation d'evolution abstraite du second ordre, Springer Lecture Notes, 660, p. 16-32.
- [2] Cordaro, P.D.: Hipoelipticidade de uma classe de operadores diferenciais com características duplas. Dissertação de Mestrado. São Paulo, 1979.
- [3] Gilioli, A.: A class of second-order evolution equations with double characteristics, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl.Sci (4)3 (1976), nº 2, p. 187-250.
- [4] Hörmander, L.: Linear partial differential operators 3 ed. Berlin, Springer, 1969.
- [5] Tosques, M.: Analytic hypoellipticity for a class of second-order evolution operators with double Characteristics, Bolletino U.M.I. (5) 14-B (1977); p. 160-171.
- [6] Trèves, F.: Concatenations of second-order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity. Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973), p. 201-250.