PARTIÇÕES PRÉ-PROJETIVAS
DE ÁLGEBRAS DE ARTIN

Flávio Ulhoa Coelho

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ÁLGEBRA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt

São Paulo, Dezembro, 1985

Aos meus pais

À Elisa

AGRADECIMENTOS

- . Ao professor *Héctor Merklen* que sempre esteve presente em todas as fases deste trabalho, desde a sugestão do tema a até a leitura cuidadosa dos originais. Tenho no professor Merklen um exemplo de verdadeiro matemático.
- . Ao grupo de álgebra do IME-USP, especialmente aqueles com os quais pude trabalhar mais longamente:
Prof. *Alfredo Rosário Jones Rodriguez*,
Prof. *Francisco Cesar Polcino Milies* e
Profa. *Maria Isabel Ramalho Belon Martins Fernandes*.
- . Aos colegas de estudos pelo incentivo e carinho de sempre.
- . À companheira *Elisa Yoshiko Takada* que reviu os originais (não a comprometam!) e também pelos dois últimos anos.
- . À *Antonia Soares* pelo bonito trabalho de datilografia.

Os amigos me emocionam mais que as teses

Dezembro, 1984

I N D I C E

CAPÍTULO 0

1. Introdução 1
2. Resultados e conceitos Básicos 4

CAPÍTULO I

1. Teorema de existência e unidade para partições pré-projetivas 13
2. Caracterização dos módulos pré-projetivos e resultados sobre o submódulo A_0 de A 26
3. Um critério para tipo de representação finita 32

CAPÍTULO II

1. Alguns resultados 40
2. Álgebras de Artin Λ com $\Lambda_0 = 0$ 49
3. Álgebra de Artin hereditária e o Teorema de Todorov 56

- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 67

CAPÍTULO 0

§1. Introdução

Sejam Λ uma álgebra de Artin, $\text{mod } \Lambda$ a categoria dos Λ -módulos finitamente gerados e $\text{ind } \Lambda$ a subcategoria de $\text{mod } \Lambda$ formada pelos Λ -módulos indecomponíveis não isomorfos dois a dois (ver 0.1 para as definições).

Dentre os módulos de $\text{ind } \Lambda$ podemos distinguir um subconjunto finito formado pelos módulos projetivos, que indicaremos por $\underline{P}_0(\Lambda)$ ou $\underline{P}_0$. $\underline{P}_0$ tem as seguintes características:

(1) $\underline{P}_0$ é uma cobertura minimal finita de $\text{mod } \Lambda$, isto é, dado $A \in \text{mod } \Lambda$ existe $P \in \text{add}(\underline{P}_0)$ e $f: P \rightarrow A$ um epimorfismo. Minimal, pois nenhum subconjunto próprio de $\underline{P}_0$ tem esta propriedade.

(2) Todo epimorfismo $f: A \rightarrow P$ com $P \in \underline{P}_0$ cinde, isto é, existe $\bar{f}: P \rightarrow A$ com $f \circ \bar{f} = \text{id}_P$.

(3) Se A é uma cobertura minimal de $\text{ind } \Lambda$ então $A = \underline{P}_0$.

É claro que estas características são muito importantes para o estudo de $\text{ind } \Lambda$ e nos leva a perguntar se é possível, para determinadas subcategorias $\mathcal{C} \subset \text{mod } \Lambda$, encontrar algum subconjunto $\underline{P}_0(\mathcal{C}) \subset \text{ind } \mathcal{C}$ que seja uma cobertura minimal finita de $\mathcal{C}$. Estas subcategorias são importantes pois, como veremos mais adiante, se $\mathcal{C}$ é uma subcategoria de $\text{mod } \Lambda$ tal que $\text{ind } \mathcal{C}$ tem uma

cobertura minimal finita $\underline{P}_0(\mathbf{C})$ então $\text{ind} \Lambda \setminus \underline{P}_0(\mathbf{C})$ também tem uma cobertura minimal finita. Utilizando-se deste fato podemos, indutivamente, construir uma partição de $\text{ind} \Lambda$:

Definição: - Uma partição $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_n, \dots, \underline{P}_\infty$ de $\text{ind} \Lambda$ é dita ser *pré-projetiva* se cumpre:

$$(1) \quad \text{ind} \Lambda = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \underline{P}_i$$

$$(2) \quad \underline{P}_i \cap \underline{P}_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j$$

$$(3) \quad \underline{P}_i \text{ é cobertura minimal finita de } \text{ind} \Lambda \setminus \bigsqcup_{j < i} \underline{P}_j \text{ para todo } i < \infty.$$

Vamos mostrar no capítulo I que dada uma álgebra de Artin Λ existe uma e só uma partição pré-projetiva de $\text{ind} \Lambda$.

Dizemos que um Λ -módulo A é *pré-projetivo* se todo somando indecomponível de A pertence a $\underline{P} = \bigsqcup_{i < \infty} \underline{P}_i$.

A noção de partição pré-projetiva da maneira como se encontra acima é devida a Auslander e Smalø (ver [AS2]), que generalizam uma idéia que aparece implícita em trabalhos de Gabriel ([Ga]) e Roiter ([Ro]).

Na literatura matemática, o nome 'pré-projetivo' já tinha aparecido no trabalho de Dlab e Ringel ([DR]), que versa sobre a teoria de representações de álgebras tensoriais de dimensão finita. Platzeck, no seu trabalho de teoria de representações de álgebras de Artin estavelmente equivalentes às álgebras

de Artin hereditárias [Pl], estudou módulos que são análogos aos pré-projetivos de Dlab e Ringel. É possível mostrar que a definição de pré-projetivos dada por Auslander e Smalø engloba os pré-projetivos de Dlab e Ringel e os referidos módulos de Platzeck.

Podemos dualizar a noção de partição pré-projetiva. Sabemos que $\underline{I}_0$, o conjunto dos Λ -módulos injetivos indecomponíveis, é uma cocobertura minimal finita de $\text{mod } \Lambda$, isto é, dado $A \in \text{mod } \Lambda$ existe $I \in \text{add}(\underline{I}_0)$ e $f: A \longrightarrow I$ um monomorfismo. Definimos então uma *partição pré-injetiva* como sendo uma partição $\underline{I}_0, \dots, \underline{I}_m, \dots, \underline{I}_\infty$ de $\text{ind } \Lambda$ que cumpre:

$$(1) \quad \text{ind } \Lambda = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \underline{I}_j$$

$$(2) \quad \underline{I}_i \cap \underline{I}_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j.$$

$$(3) \quad \text{Para todo } j < \infty, \underline{I}_j \text{ é uma cocobertura minimal finita de } \text{ind } \Lambda \setminus \bigsqcup_{i < j} \underline{I}_i.$$

Nesta dissertação só trataremos explicitamente das partições pré-projetivas estabelecendo sua existência e unicidade e principais técnicas para sua utilização. No entanto, todos os conceitos e resultados explicitados para as partições pré-projetivas valem, em sua forma dual, para as partições pré-injetivas. Via de regra não serão enunciadas estas formas duais. O leitor interessado poderá encontrá-las, em sua maioria, no trabalho de Auslander e Smalø [AS2].

O capítulo I será dedicado a demonstrar a existência e unicidade da partição pré-projetiva e estabeleceremos dois importantes teoremas: o da caracterização de um módulo pré-projetivo e o da caracterização de uma álgebra de Artin de tipo finito em termos das partições pré-projetiva e pré-injetiva.

No capítulo II discutiremos a partição pré-projetiva para alguns casos particulares de álgebras de Artin.

Dedicaremos o resto deste capítulo 0 às principais noções, conceitos e resultados básicos necessários à compreensão dos outros capítulos. Em particular, discutiremos a importante noção de sequência de Auslander e Reiten.

§2. Resultados e conceitos básicos

0.1. Seja R um anel comutativo e artíniano. Uma *álgebra de Artin* Λ é uma R -álgebra que é finitamente gerada se vista como R -módulo.

Indicaremos por $\text{mod}\Lambda$ a categoria dos Λ -módulos à esquerda finitamente gerados. Entendemos por *subcategoria* de $\text{mod}\Lambda$ uma subcategoria plena fechada para somandos diretos. Se $\mathcal{C}$ é uma subcategoria de $\text{mod}\Lambda$, $\text{ind}\mathcal{C}$ será a subcategoria de $\mathcal{C}$ formada pelos Λ -módulos indecomponíveis dois a dois não isomorfos. No caso em que $\mathcal{C} = \text{mod}\Lambda$ indicaremos $\text{ind}(\text{mod}\Lambda)$ por $\text{ind}\Lambda$.

Em diversas circunstâncias, é preciso considerar, em vez de módulos, classes de módulos isomorfos entre si. Se-

guindo os usos já costumeiros na área de Teoria de representações, não faremos esta distinção que será facilmente reconhecida pelo leitor a partir do contexto.

Se $\mathcal{A}$ é um conjunto de Λ -módulos, indicamos por $\text{add } \mathcal{A}$ a subcategoria de $\text{mod } \Lambda$ formada por todos os Λ -módulos cujos somandos diretos indecomponíveis são componentes de elementos de $\mathcal{A}$.

Dizemos que Λ é de *tipo de representação finita* (resp. *infinita*) ou apenas de *tipo finito* (*infinito*) quando $\text{ind } \Lambda$ for finito (infinito).

Para dizer que A é um somando direto de B , escrevemos $A|B$. Por fim, (A,B) indicará o grupo dos morfismos de A para B em $\text{mod } \Lambda$.

02. Um morfismo $f: A \longrightarrow B$ é um *epimorfismo que cinde* quando existir $\bar{f}: B \longrightarrow A$ tal que $f\bar{f} = \text{id}_B$. Analogamente, $g: A \longrightarrow B$ é um *monomorfismo que cinde* quando existir $\bar{g}: B \longrightarrow A$ tal que $\bar{g}g = \text{id}_A$.

03. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$ subcategorias de $\text{mod } \Lambda$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *cobertura* para $\mathcal{D}$ quando para todo $D \in \mathcal{D}$ existir um $A \in \text{add } \mathcal{A}$ e um epimorfismo $f: A \longrightarrow D$.

Dualmente, $\mathcal{A}$ é uma *cocobertura* para $\mathcal{D}$ quando para todo $D \in \mathcal{D}$ existir $A \in \text{add } \mathcal{A}$ e um monomorfismo $g: D \longrightarrow A$.

Uma cobertura (cocobertura) $\mathcal{A}$ é *minimal* quando nenhum subconjunto próprio de $\mathcal{A}$ for uma cobertura (cocobertura).

04. Se Λ é uma álgebra de Artin sobre o anel comutativo e artiniano R denotamos por D_Λ ou simplesmente D o funtor

$$\text{Hom}_R(, I_0(\frac{R}{\text{rad}R})): \text{mod}\Lambda \longrightarrow \text{mod}\Lambda^{\text{op}},$$

onde $I_0(\frac{R}{\text{rad}R})$ é a envolvente injetiva de $\frac{R}{\text{rad}R}$ e $\text{rad}R$ é o radical do anel R .

D é uma dualidade. (isto é, é um funtor contravariante e existe $G: \text{mod}\Lambda^{\text{op}} \longrightarrow \text{mod}\Lambda$, funtor contravariante tal que $GD \cong \text{Id}_{\text{mod}\Lambda}$ e $DG \cong \text{Id}_{\text{mod}\Lambda^{\text{op}}}$). No nosso caso, o funtor quase inverso G é o $D_{\Lambda^{\text{op}}}$ e será denotado também por D .

05. Dizemos que $f: A \longrightarrow B$ se *fatora através de um projetivo* se existir P projetivo, $g: A \longrightarrow P$ e $h: P \longrightarrow B$ tais que $f=hg$. Denotamos por $P(A,B)$ o subgrupo de (A,B) formado pelos morfismos que se fatoram através de projetivos.

Vamos definir a categoria $\underline{\text{mod}}\Lambda$, a categoria dos Λ -módulos módulo projetivos. Os objetos de $\underline{\text{mod}}\Lambda$ são os mesmos de $\text{mod}\Lambda$ e os morfismos entre A e B , indicados por $(\underline{A}, \underline{B})$ ou $\underline{\text{Hom}}(A,B)$, são os morfismos de $\frac{(A,B)}{P(A,B)}$.

A categoria construída de maneira dual, dos Λ -módulos módulo injetivos, é denotado por $\overline{\text{mod}}\Lambda$.

06. Outra maneira, além de aplicarmos D , de se obter um módulo em $\text{mod}\Lambda^{\text{op}}$ a partir de um módulo em $\text{mod}\Lambda$ é por meio da seguinte construção (a 'transposta' de Auslander): Seja $M \in \text{mod}\Lambda$

e $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ uma apresentação projetiva minimal de M , isto é, P_0 é cobertura projetiva de M e P_1 é cobertura projetiva de $\ker g$. Aplicamos o funtor $\text{Hom}_\Lambda(_, \Lambda)$ à apresentação e obtemos:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M, \Lambda) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_\Lambda(P_0, \Lambda) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_\Lambda(P_1, \Lambda) \rightarrow \text{Coker } f^* \rightarrow 0.$$

Definimos $\text{Tr}M = \text{Coker } f^*$.

É fácil mostrar que Tr definido desta maneira é uma dualidade entre as categorias $\text{mod}\Lambda$ e $\text{mod}\Lambda^{\text{op}}$. Novamente vamos indicar a quase inversa de Tr por Tr .

07. A composta das dualidades D e Tr é uma equivalência $D\text{Tr}: \text{mod}\Lambda \rightarrow \overline{\text{mod}}\Lambda$. Observemos que a correspondência $D\text{Tr}$ está definida para todos os módulos sem somandos projetivos em $\text{mod}\Lambda$. Analogamente, $\text{Tr}D$ está definida para os módulos sem somandos injetivos de $\text{mod}\Lambda$.

08. Se A e B são Λ -módulos, seja $r(A, B) \subset (A, B)$ o subconjunto de (A, B) consistindo de todos os morfismos $f: A \rightarrow B$ tais que para cada $Z \in \text{ind}\Lambda$, toda composta $Z \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow Z$ não é um isomorfismo. $r(A, B)$ resulta ser um subgrupo de (A, B) e se rã chamado de *radical* de (A, B) .

A seguinte caracterização nos será mais útil que a definição:

Proposição: - Seja $A \in \text{ind}\Lambda$.

(a) Seja $f: B \longrightarrow A$ um morfismo. $f \in r(B,A)$ se e só se f não é um epimorfismo que cinde.

(b) Seja $g: A \longrightarrow C$ um morfismo. $f \in r(A,C)$ se e só se g não é um monomorfismo que cinde.

Seja $C \in \text{ind}\Lambda$. Um morfismo que não cinde $f: B \longrightarrow C$ é um morfismo quase cindido à direita se $(X,f): (X,B) \longrightarrow (X,C)$ tem imagem $r(X,C)$ para todo $X \in \text{mod}\Lambda$. Isto equivale a dizer que (ver diagrama) a cada $h: X \longrightarrow C$ que não é um epimorfismo que cinde, existe $g: X \longrightarrow B$ tal que $h = fog$.

Analogamente, define-se morfismo quase cindido à esquerda como sendo $f: C \longrightarrow B$ morfismo que não cinde tal que

$(f,X): (B,X) \longrightarrow (C,X)$ tem imagem $r(C,X)$ para todo $X \in \text{mod}\Lambda$.
 $g \longmapsto gof$

Um morfismo quase cindido à direita (resp. à esquerda) f é *minimal* se toda vez que $hof = f$ (resp. $foh = f$) para algum morfismo h , então h é um isomorfismo.

09. Dizemos que uma sequência exata

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ que não cinde em $\text{mod}\Lambda$ é uma sequência

de Auslander Reiten se as seguintes condições se verificam:

- (i) A e C são indecomponíveis
- (ii) O morfismo $g: B \longrightarrow C$ é um morfismo quase cindido à direita minimal.

(ou equivalentemente (ii') o morfismo $f: A \longrightarrow B$ é um morfismo quase cindido à esquerda minimal).

Frequentemente indicaremos a sequência de Auslander e Reiten por ARS. Temos o seguinte teorema de existência e unicidade:

Teorema - Seja Λ uma álgebra de Artin. Então:

- (a) Se $C \in \text{ind} \Lambda$ não é projetivo então existe uma única, a menos de isomorfismo, ARS

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Além disso, $A \cong \text{DTr} C$.

- (b) Se $A' \in \text{ind} \Lambda$ não é um injetivo então existe uma única, a menos de isomorfismo, ARS

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0.$$

Além disso, $C' \cong \text{Tr} D A'$.

0.10. - Dizemos que $f: A \longrightarrow B$ em $\text{mod} \Lambda$ é um morfismo irreduzível se ele não cinde, isto é, não é um epimorfismo que cinde nem um monomorfismo que cinde e toda vez que f se fatorar em $f' \circ f''$ com $f': C \longrightarrow B$ e $f'': A \longrightarrow C$ então ou f'' é um monomorfismo que cinde ou f' é um epimorfismo que cinde.

Seja $f: A \longrightarrow B$ um morfismo irredutível. Não é difícil de ver que f é um monomorfismo ou um epimorfismo. Basta olharmos para a seguinte decomposição de $f: A \xrightarrow{f''} \frac{A}{\ker f} \xrightarrow{\cong} \text{Im} f \xleftarrow{f'} B$.

0.11. Temos a seguinte caracterização dos morfismos irredutíveis.

Proposição: - Seja $A \in \text{ind} \Lambda$.

(a) São equivalentes para $f: A \longrightarrow C$:

- (1) f é um morfismo irredutível.
- (2) Existe $f': A \longrightarrow C'$ tal que o induzido

$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}} C \oplus C'$ é um morfismo quase cindido à esquerda minimal.

(b) São equivalentes para $g: B \longrightarrow A$:

- (1) g é um morfismo irredutível.
- (2) Existe $g': B' \longrightarrow A$ tal que o induzido $B \oplus B' \xrightarrow{(g, g')} A$ é um morfismo quase cindido à direita minimal.

Proposição: - Sejam P um projetivo e I um injetivo, indecomponíveis em $\text{mod} \Lambda$.

- (1) $h: X \longrightarrow P$ é irredutível se e só se h é isomorfo a $A \hookrightarrow P$ onde $A \mid \text{rad} P$.
- (2) $h: I \longrightarrow X$ é irredutível se e só se h é isomorfo a $I \twoheadrightarrow A$ com $A \mid \frac{I}{\text{soc} I}$.

0.12. Seja uma ARS

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(g_1, g_2)} C \longrightarrow 0.$$

Não é difícil de ver que se $g_1: B_1 \longrightarrow C$ é um monomorfismo (epimorfismo) então $f_2: A \longrightarrow B_2$ é um monomorfismo (epimorfismo).

De fato, se $g_1: B_1 \longrightarrow C$ é um monomorfismo então $\ell(B_1) < \ell(C)$ onde $\ell(\cdot)$ indica o comprimento do módulo.

Como a sequência acima é exata, segue que

$$\ell(A) + \ell(C) = \ell(B_1) + \ell(B_2).$$

Mas $\ell(C) - \ell(B_1) > 0$ então $\ell(B_2) - \ell(A) > 0$.

Sabemos que $f_2: A \longrightarrow B_2$ é irredutível e, pela desigualdade acima, não pode ser um epimorfismo. Então f_2 é um monomorfismo. A outra afirmação é análoga. $\square$

0.13. *Lema de Nakayama:* Seja Λ uma álgebra de Artin e A um Λ -módulo indecomponível. Se M e N são submódulos de A tais que $A = M+N$ com $M \subset rA$ então $A=N$.

0.14. Se F é um funtor aditivo de $\text{mod } \Lambda$ a $\underline{Ab}$, a categoria dos grupos abelianos, definimos $\ell(F) = \sum \ell(F(A))$ aonde a soma é feita sobre todos os Λ -módulos indecomponíveis não isomorfos A com $F(A) \neq 0$ e onde $\ell(F(A))$ indica o comprimento de $F(A)$ visto como $\text{End } A$ -módulo.

Proposição: - Sejam Λ uma álgebra de Artin e A um Λ -módulo indecomponível tal que $\ell((, A)) < \infty$. Se $(B, A) \neq 0$ para algum $B \in \text{ind} \Lambda$ então existe uma cadeia de morfismos irredutíveis de B para A .

Para uma demonstração deste resultado ver [AR3].

0.15. Proposição: - Seja Λ uma álgebra de Artin. Então Λ é indecomponível como anel se e só se todos os projetivos (resp. injetivos) estão ligados por morfismos irredutíveis.

Todos os resultados que dizem respeito às ARS's, morfismos irredutíveis e quase cindidos e que enunciamos acima podem ser encontrados nos artigos [AR1] e [AR2] de Auslander e Reiten.

Os outros resultados utilizados nesta dissertação e que não são provados são facilmente encontrados na literatura.

ooo

CAPÍTULO I

§1. Teorema de existência e unicidade para partições pré-projetivas

Podemos estender a definição de partição pré-projetiva dada no capítulo 0 a subcategorias $\mathcal{C} \subset \text{mod } \Lambda$ mais gerais.

Definição: - Uma *partição pré-projetiva* de uma subcategoria $\mathcal{C} \subset \text{mod } \Lambda$ é uma partição $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_\infty$ que cumpre:

$$(i) \quad \text{ind } \mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \underline{P}_i$$

$$(ii) \quad \underline{P}_i \cap \underline{P}_j = \emptyset \quad \text{se} \quad i \neq j$$

$$(iii) \quad \underline{P}_i \text{ é cobertura minimal finita de } \text{ind } \mathcal{C} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \underline{P}_j \\ \text{para todo } i < \infty.$$

Em [AS2], Auslander e Smalø exibem condições suficientes sobre $\mathcal{C}$ para a existência e unicidade de partição pré-projetiva de $\mathcal{C}$. Não faremos aqui o caso geral. Daremos apenas uma versão simplificada e original para o caso em que $\mathcal{C} = \text{mod } \Lambda$, que é o caso que nos interessa neste trabalho. Esta demonstração é importante pois contém certos elementos fundamentais à teoria.

Provaremos primeiramente a unicidade. Mas antes vamos introduzir algumas noções.

Se A e $B \in \text{mod } \Lambda$, definimos o *traço* de B em A como sendo o submódulo $\tau_B(A) \subset A$ gerado por todas as imagens homomorfas de B em A . Isto é, $\tau_B(A) = \langle \{ \text{Im } f / f \in (B, A) \} \rangle$.

Observemos que se A é noetheriano então existe um morfismo $f: nB \longrightarrow A$ tal que $\text{Im} f = \tau_B(A)$.

Lema I.1: - Sejam A e B em $\text{mod } \Lambda$ com A indecomponível. Suponha $f_i: A \longrightarrow A$, $i=1, \dots, n$ uma família finita de morfismos e $f_0: B \longrightarrow A$ um morfismo tal que o induzido $f: B \oplus nA \longrightarrow A$ seja um epimorfismo que não cinde. Então $\tau_B(A) = A$ e existe um epimorfismo $mB \longrightarrow A$ de m cópias de B sobre A .

Demonstração: - Se $f: B \oplus nA \longrightarrow A$ não cinde então para todo $i=0, \dots, n$, f_i não é um isomorfismo.

Como A é indecomponível, então $\text{End } A$ é local e portanto para todo $i=1, \dots, n$ $f_i: A \longrightarrow A$ está no radical de $\text{End } A$.

Mas f é um epimorfismo então $A = \sum_{i=1}^n f_i(A) + f_0(B)$.

Como $f_i(A) \subset (\text{rad } \text{End } A) \cdot A$ e $f_0(B) \subset \tau_B(A)$ segue que

$$A = (\text{rad } \text{End } A) \cdot A + \tau_B(A).$$

Se olharmos A como um $\text{End } A$ -módulo, segue pelo lema de Nakayama (ver 0.13) que $\tau_B(A) = A$. A segunda afirmação é consequência imediata deste fato pois A é noetheriano. $\square$

Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de $\text{ind } \Lambda$. Dizemos que $C \in \mathcal{C}$ é um *c-projetivo* se cada epimorfismo $f: X \longrightarrow C$ com $X \in \text{add } \mathcal{C}$ for um epimorfismo que cinde. Vamos denotar por ${}_{=0}P(\mathcal{C})$ a subcategoria de $\mathcal{C}$ dos *c-projetivos* indecomponíveis de $\mathcal{C}$.

Proposição I.2: - Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de $\text{ind } \Lambda$. Então uma cobertura A de $\mathcal{C}$ é minimal se e só se $A = {}_{=0}P(\mathcal{C})$.

Demonstração: - Vamos provar inicialmente que se A é cobertura de C , então A contém $\underset{=}{P}_0(C)$.

Seja $P \in \underset{=}{P}_0(C)$.

Como A é cobertura existe $f: A \longrightarrow P$ um epimorfismo, com $A \in \text{add}A$.

Por definição, P é um c-projetivo em C . Então f cinde e P é um somando indecomponível de A . Como $A \in \text{add}A$, $P \in A$.

Provamos que $\underset{=}{P}_0(C) \subset A$ se A é cobertura de C . Basta agora mostrarmos que se A é cobertura de C e $A \neq \underset{=}{P}_0(C)$ então A não é minimal. Suponha, então, que existe $A \in A$ e $A \notin \underset{=}{P}_0(C)$. $A \notin \underset{=}{P}_0(C)$ implica que existe $f: C \longrightarrow A$ epimorfismo, com $C \in C$ que não cinde.

Como A é cobertura então existe $g: X \longrightarrow C$ um epimorfismo com $X \in \text{add}A$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{f} & A \\ & & \circlearrowleft & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & h=f \circ g & & \end{array}$$

A composta $h = f \circ g: X \longrightarrow A$ é um epimorfismo que não cinde pois f não cinde.

Se $X = B \oplus nA$ com $A \nmid B$ temos, pelo lema anterior, que existe um epimorfismo $mB \longrightarrow A$. Mas $B \in \text{add}(A \setminus \{A\})$ então $A \setminus \{A\}$ é cobertura para A e portanto é cobertura para C . Então A não pode ser uma cobertura minimal e a proposição está provada. $\square$

Como consequência imediata desta proposição tiramos os seguintes fatos:

- (1) Unicidade de cobertura minimal.
- (2) Se existir uma cobertura finita, então existe cobertura minimal finita.

Para estabelecermos o teorema de existência e unicidade nos basta apenas garantir a existência de coberturas finitas.

Se Λ é de tipo finito, a partir da proposição acima fica fácil provar o teorema que aparece implícito nos trabalhos de Roiten e Gabriel ([Ro] e [Ga]).

Teorema: - Seja Λ de tipo finito. Então $\text{ind}\Lambda$ tem uma única partição pré-projetiva e uma única partição pré-injetiva.

Vamos supor até o final desta seção que Λ é de tipo infinito. Dizemos que a subcategoria $\mathcal{C} \subset \text{mod}\Lambda$ tem morfismos quase cindidos à esquerda (resp. à direita) se para todo $C \in \text{ind}\mathcal{C}$ existir um morfismo quase cindido à esquerda (resp. à direita) $f: C \longrightarrow D$ (resp. $f: D \longrightarrow C$) com $D \in \text{add}\mathcal{C}$. Observe que tal morfismo f pertence ao radical $r(C,D)$ (ver 0.8).

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são subcategorias de $\text{mod}\Lambda$, dizemos que $\mathcal{C}$ é covariantemente finito sobre $\mathcal{D}$ quando para qualquer $C \in \mathcal{C}$, existir um morfismo $f: C \longrightarrow D$ com $D \in \text{add}\mathcal{D}$ tal que

$$(f,X): (D,X) \longrightarrow (C,X)$$

$$g \longmapsto \text{gof} \quad \text{é sobrejetora para qualquer } X \in \text{add}\mathcal{D}.$$

Isto quer dizer que a cada $h: C \longrightarrow X$ existe $g: D \longrightarrow X$ tal que o diagrama abaixo comuta, isto é, $\text{gof} = h$.

Um exemplo trivial de $\mathcal{C}$ covariantemente finito sobre $\mathcal{D}$ ocorre quando $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, pois para cada $C \in \mathcal{C}$ basta considerarmos $f = \text{id}: C \longrightarrow C$ e, neste caso, $(\text{id}, X): (C, X) \longrightarrow (C, X)$ é claramente sobrejetora para todo $X \in \text{add } \mathcal{D}$.

Lema A: - Sejam $\mathcal{C} \supset \mathcal{D}$ subcategorias de $\text{mod } \Lambda$. Se $\mathcal{C}$ tem morfismos quase cindidos à esquerda e é covariantemente finito sobre $\mathcal{D}$, então $\mathcal{D}$ tem morfismos quase cindidos à esquerda.

Demonstração: - Seja D indecomponível em $\mathcal{D}$ e $f: D \longrightarrow C$ morfismo quase cindido à esquerda em $\mathcal{C}$, isto é, $C \in \text{add } \mathcal{C}$ e $(f, X): (C, X) \longrightarrow (D, X)$ tem imagem $r(D, X)$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

Mas $\mathcal{C}$ é covariantemente finito sobre $\mathcal{D}$ então existe $f_c: C \longrightarrow C_{\mathcal{D}}$, $C_{\mathcal{D}} \in \text{add } \mathcal{D}$ com $\text{Im}(f_c, X) = (C, X)$ para todo $X \in \mathcal{D}$. A composta $g = f_c \circ f: D \longrightarrow C_{\mathcal{D}}$ é tal que $\text{Im}(g, X) = r(D, X) \forall X \in \mathcal{D}$. Então $\mathcal{D}$ tem morfismos quase cindidos à esquerda. $\square$

Um comentário antes de fazermos o lema B. Como dissemos antes, Auslander e Smalø provaram a existência e unicidade da partição pré-projetiva para subcategorias $\mathcal{C}$ mais gerais de $\text{mod } \Lambda$. A principal diferença entre a demonstração de Auslander e Smalø e a nossa aqui exposta é o lema B. No caso geral, precisa-se provar o lema quando $\mathcal{D}$ é uma subcategoria de $\text{mod } \Lambda$ com outras condições e não apenas finita.

Para o caso em que $\mathcal{D}$ é finito nós conseguimos uma demonstração bem simples que faremos a seguir.

Lema B: - Seja $\mathcal{D} \subset \text{ind} \Lambda$ uma subcategoria finita. Então $\text{ind} \Lambda$ é covariantemente finito sobre $\mathcal{C} = \text{ind} \Lambda \setminus \mathcal{D}$.

Demonstração: - Provaremos por indução no número n de elementos de $\mathcal{D}$.

Se $n = 0$ nada há a demonstrar pois já sabemos que $\text{ind} \Lambda$ é covariantemente finito sobre $\text{ind} \Lambda = \text{ind} \Lambda \setminus \mathcal{D}$.

Vamos supor que se $\mathcal{D}' \subset \text{mod} \Lambda$ é tal que $|\mathcal{D}'| < n$ então $\text{ind} \Lambda$ é covariantemente finito sobre $\mathcal{C} = \text{ind} \Lambda \setminus \mathcal{D}'$ e seja $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\} \subset \text{ind} \Lambda$.

Queremos mostrar que $\text{ind} \Lambda$ é covariantemente finito sobre $\text{ind} \Lambda \setminus \mathcal{D} = \mathcal{C}$, isto é, se $D \in \text{ind} \Lambda$ então existe $C \in \mathcal{C}$ e $f: C \longrightarrow D$ tal que para todo $X \in \text{add} \mathcal{C}$ e todo morfismo $h: C \longrightarrow X$ existe um morfismo $g: D \longrightarrow X$ com $h = g \circ f$ (ver diagrama).

Seja então $D \in \text{ind} \Lambda$.

Se $D \in \mathcal{C}$ então é suficiente tomarmos $f = \text{id}$ e $C = D$.

Vamos supor $D \in \mathcal{D} (= \text{ind} \Lambda \setminus \mathcal{C})$ e, sem perda de generalidade, $D = D_n$.

Se $\mathcal{D}' = \{D_1, \dots, D_{n-1}\}$ então por hipótese de indução existe $g: D_n \longrightarrow M_{D_n}$ com $M_{D_n} \in \text{add}(\text{ind} \wedge \sim \mathcal{D}')$ e (g, X) é sobrejetora para todo $X \in \text{ind} \wedge \sim \mathcal{D}'$. Se $D_n \nmid M_{D_n}$ então $M_{D_n} \in \text{add}(\text{ind} \wedge \sim \mathcal{D})$ e $g: D_n \longrightarrow M_{D_n}$ é tal que (g, X) é sobrejetora para todo $X \in \text{add}(\text{ind} \wedge \sim \mathcal{D})$.

Vamos considerar $D_n \mid M_{D_n}$, isto é, $M_{D_n} = tD_n \oplus M'$. Sabemos, pelo lema anterior, que $\text{ind} \wedge \sim \mathcal{D}'$ tem morfismos quase cindidos à esquerda.

Seja $h: D_n \longrightarrow B$ morfismo quase cindido à esquerda. Podemos escolher h minimal. E, neste caso, D_n não é somando de B . Isto é, $B \in \text{add}(\text{ind} \wedge \sim \mathcal{D})$.

Vamos olhar a composta $f = (th, \text{id}_{M'}) \circ g$:

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{g} & tD_n \oplus M' & \xrightarrow{(th, \text{id}_{M'})} & tB \oplus M' \\
 & \searrow p & \downarrow (p'_1, \dots, p'_t, p') & \swarrow (p''_1, \dots, p''_t, p'') & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

Seja $p: D \longrightarrow X$ com $X \in \text{add}(\text{ind} \wedge \sim \mathcal{D})$. Então existe $(p'_1, \dots, p'_t, p')$ tal que $(p'_1, \dots, p'_t, p') \circ g = p$ (definição de g).

Mas h é um morfismo quase cindido à esquerda. Então, para cada $i=1, \dots, t$, existe $p''_i: B \longrightarrow X$ com $p'_i = p''_i \circ h$ pois $D_n \nmid X$.

Então (f, X) é sobrejetora para todo $X \in \text{add}(\text{ind} \wedge \sim \mathcal{D})$ e

$tB \oplus M' \in \text{add}(\text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D})$. Portanto, $\text{ind}\Lambda$ é covariantemente finito sobre $\text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D}$ para $\mathcal{D}$ finito. $\square$

Lema C: - Se $\text{ind}\Lambda$ é covariantemente finito sobre $\text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D}$ então $\text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D}$ tem cobertura finita.

Demonstração: - Por hipótese, para todo $M \in \text{ind}\Lambda$ existe $f: M \longrightarrow C$ com $C \in \text{add}(\text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D})$ e (f, X) é sobrejetora para todo $X \in \text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D}$.

Em particular, se $P_1, \dots, P_t$ são os projetivos indecomponíveis então existem $f_i: P_i \longrightarrow C_i$, $i=1, \dots, t$, com a propriedade acima.

Seja $A = \bigcup_{i=1}^t \text{ind } C_i$. A é finito e vamos mostrar que é uma cobertura para $\text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D}$. Sejam $X \in \text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D}$ e $g: P \longrightarrow X$ sua cobertura projetiva.

Como P é soma de projetivos indecomponíveis, existe $f: P \longrightarrow A$ com $A \in \text{add}A$.

Pelo diagrama, existe $h: A \longrightarrow X$ com $hf = g$. Como g é um epimorfismo então h também o será. E portanto, para todo $X \in \text{add}(\text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D})$ existe $A \longrightarrow X$ epimorfismo com $A \in \text{add}A$. Ou: A é cobertura finita para $\text{ind}\Lambda \setminus \mathcal{D}$ e o lema C está provado. $\square$

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de existência e unicidade de partição pré-projetiva. Na realidade, o que nos falta é apenas juntar as peças da demonstração, dadas pelos lemas A, B e C.

Teorema I.3: - Seja Λ uma álgebra de Artin. Então existe e é única a partição pré-projetiva de $\text{ind}\Lambda$.

Demonstração: - Se $\mathcal{P}_0$ é o conjunto dos projetivos indecomponíveis já sabemos que ele é a única cobertura minimal finita para $\text{ind}\Lambda$.

Vamos supor agora que sabemos que existe a subpartição $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n-1}, \mathcal{D}$ com:

$$(1) \quad \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}_i \cup \mathcal{D} = \text{ind}\Lambda$$

$$(2) \quad \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \text{ e } \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_i = \emptyset \text{ } i=0, \dots, n-1.$$

$$(3) \quad \text{para } i \leq n-1, \mathcal{P}_i \text{ é cobertura minimal finita de } \bigcup_{j=i}^{n-1} \mathcal{P}_j \cup \mathcal{D}, \text{ que é única e vamos construir } \mathcal{P}_n.$$

$\bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}_i$ é finito então, pelo lema B, $\text{ind}\Lambda$ é covariantemente finito sobre $\text{ind}\Lambda \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}_i = \mathcal{D}$.

Pelo lema C, existe uma cobertura finita para $\mathcal{D}$ e aí sabemos que $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ é a única cobertura minimal finita de $\mathcal{D}$. Isto é, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_0(\mathcal{D})$. Um argumento simples de indução e chegamos ao nosso resultado. $\square$

Um módulo em $\text{mod } \Lambda$ será chamado de *pré-projetivo* se todo somando indecomponível dele estiver em $\bigcup_{i < \infty} P_i = P$.

Indicaremos por P^n a união $\bigcup_{i=0}^n P_i$.

Como havíamos comentado anteriormente, a teoria de partições pré-projetivas teve seu início no trabalho de Roiter ([Ro]) e no de Gabriel ([Ga]). Neste trabalho [Ro], Roiter nos dá uma demonstração da Conjectura de Brauer - Thrall I: Se Λ é de tipo infinito, então não existe limite superior no comprimento dos Λ -módulos indecomponíveis.

Como é de se esperar, a demonstração deste teorema fica muito simplificada se utilizarmos a noção de partição pré-projetiva. Para tanto, precisamos do seguinte lema devido a Harada-Sai ([HS]).

Lema 1.4: - Seja Λ um anel e $\{M_i\}_{i=1, \dots, m}$ uma coleção de módulos indecomponíveis de comprimento menor ou igual a m e sejam $f_i: M_i \longrightarrow M_{i+1}$ não isomorfismos entre estes módulos. Então existe um m' tal que $f_m \circ \dots \circ f_1 = 0$.

Proposição 1.5: - Seja $\mathcal{C}$ uma sub-categoria de $\text{mod } \Lambda$ tendo uma partição pré-projetiva. Se $\text{ind } \mathcal{C}$ é infinita, então não existe limite no comprimento dos módulos pré-projetivos em $\text{ind } \mathcal{C}$.

Demonstração: - Vamos considerar $P_0, \dots, P_\infty$ a partição pré-projetiva de $\mathcal{C}$.

Como para todo n , $\underline{P}_n$ é uma cobertura para $\bigcup_{i=n}^{\infty} \underline{P}_i$, conseguimos para todo $n < \infty$ uma cadeia de epimorfismos $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow P_n$ com $P_1 \in \text{add } \underline{P}_1$. Existe, então, para cada $n < \infty$ uma cadeia de morfismos irredutíveis $P'_0 \longrightarrow P'_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow P'_n$ com $P'_i \in \underline{P}_1$, $i=0, \dots, n$ e com composição não nula.

Se $i \neq j$ sabemos que $\underline{P}_i \cap \underline{P}_j = \emptyset$ e então os morfismos $P'_i \longrightarrow P'_{i+1}$ não são isomorfismos. Usando o lema de Harada-Sai o resultado estará provado. $\square$

Vamos olhar alguns exemplos que nos ilustrarão os conceitos desenvolvidos até aqui.

Exemplo 1.1: - Seja $\Lambda = \frac{\mathbb{Z}}{p^n \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{p^n}$ onde $\mathbb{Z}$ denota os inteiros, p um número primo e $n \geq 1$.

Não é difícil de ver que $\text{ind } \Lambda = \{\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^2}, \dots, \mathbb{Z}_{p^n}\}$ e que o único projetivo é $\mathbb{Z}_{p^n}$.

Temos, então, a seguinte partição pré-projetiva de $\text{ind } \Lambda$:

$$\underline{P}_0 = \{\mathbb{Z}_{p^n}\} ; \underline{P}_1 = \{\mathbb{Z}_{p^{n-1}}\}, \dots, \underline{P}_{n-1} = \{\mathbb{Z}_p\}.$$

Este exemplo é curioso: a partição pré-injetiva de Λ é a mesma que a pré-projetiva.

Exemplo 2: - Um exemplo mais elaborado é aquele cuja álgebra Λ é dada pelo quiver comutativo

Utilizando-se de técnicas não expostas aqui (ver [CLS]) chega-se ao grafo da figura 1. Neste grafo, chamado grafo de Auslander e Reiten, temos indicados os Λ -módulos indecomponíveis da álgebra em questão e os irredutíveis que aparecem entre eles.

Não é difícil, a partir do grafo, de se achar a partição pré-projetiva desta álgebra.

$$P_0 = \{P_1 = (1,1,1,1,1) ; P_2 = (0,1,0,1,1) ; P_3 = (0,0,1,1,1) ;$$

$$P_4 = (0,0,0,1,1) ; P_5 = (0,0,0,0,1)\}$$

$$P_1 = \{\Delta P_4 = (0,1,1,2,1) ; \Delta P_5 = (0,0,0,1,0) ;$$

$$\Delta^3 P_5 = (1,1,1,1,0)\}$$

$$P_2 = \{\Delta^3 P_4 = (1,1,1,0,0) ; \Delta P_2 = (0,0,1,1,0) ;$$

$$\Delta P_3 = (0,1,0,1,0) ; \Delta^2 P_5 = (0,1,1,1,1)\}$$

$$P_3 = \{\Delta^3 P_2 = (1,0,1,0,0) ; \Delta^3 P_3 = (1,1,0,0,0) ;$$

$$\Delta^2 P_4 = (0,1,1,1,0)\}$$

$$P_4 = \{\Delta^4 P_4 = (1,0,0,0,0) ; \Delta^2 P_2 = (0,1,0,0,0) ;$$

$$\Delta^2 P_3 = (0,0,1,0,0)\} .$$

O leitor não familiarizado com este tipo de notação ou com as técnicas envolvidas pode consultar [CLS].

Figura 1

Λ é a álgebra dada pelo quiver comutativo

P_i são os Λ -módulos projetivos indecomponíveis, I_i são os injetivos indecomponíveis e S_i os simples.

Δ denota $\text{Tr}D$.

§2. Caracterização dos módulos pré-projetivos e resultados sobre o submódulo A_0 de A .

Até o final deste capítulo I vamos estudar a partição pré-projetiva de uma álgebra de Artin arbitrária. Neste parágrafo daremos uma caracterização que nos permitirá decidir quando um módulo indecomponível é ou não um pré-projetivo.

Sejam A um Λ -módulo indecomponível e $\mathcal{C} \subset \text{mod } \Lambda$ uma subcategoria de $\text{mod } \Lambda$. Lembramos que o traço de $\mathcal{C}$ em A é o submódulo de A gerado por $\left\{ \sum_{f \in (B,A)} \text{Im } f \text{ com } B \in \mathcal{C} \right\}$ e é indicado por $\tau_{\mathcal{C}}(A)$.

Se $\mathcal{C} = \emptyset$, então, por definição, $\tau_{\mathcal{C}}(A) = 0$.

Teorema I.6: - Sejam Λ uma álgebra de Artin de tipo infinito com partição pré-projetiva $\underline{P}_0, \dots, \underline{P}_n, \dots, \underline{P}_{\infty}$ e A um Λ -módulo indecomponível. São equivalentes:

- (1) A é pré-projetivo
- (2) Existe um $n < \infty$ tal que se existir um epimorfismo que não cinde $B \longrightarrow A$, então B tem um somando em P^{n-1} .
- (3) Existe uma subcategoria finita $\mathcal{A} \subset \text{ind } \Lambda$ tal que se existir um epimorfismo que não cinde $B \longrightarrow A$, então B tem um somando em $\mathcal{A}$.
- (4) Existe um simples S e um morfismo não nulo $f: A \longrightarrow S$ tal que $\tau_B(A) \subset \ker f$ a menos de um número finito de módulos indecomponíveis B .

$$(5) \bigcap_{i < \infty} \tau_{\underline{P}_i}(A) \neq A$$

$$(6) \tau_{\underline{P}_{\infty}}(A) \neq A.$$

Demonstração: - $(1) \implies (2)$ Se A é pré-projetivo, então existe um $n < \infty$ tal que $A \in \underline{P}_n$.

Basta lembrarmos que A é um c-projetivo em $\text{ind} \bigwedge_{i=0}^{n-1} \underline{P}_i$ e isto equivale a dizer que se $B \longrightarrow A$ é um epimorfismo com $B \in \text{add}(\text{ind} \bigwedge_{i=0}^{n-1} \underline{P}_i)$ então é um epimorfismo que cinde.

Portanto, vale (2).

$(2) \implies (3)$ Basta tomar $A = \bigcup_{i=0}^{n-1} \underline{P}_i$

$(3) \implies (4)$ Sejam A como na hipótese,

$\mathcal{D} = A \cup \{A\}$, $C = \text{ind} \bigwedge \mathcal{D}$ e $A' = \tau_C(A)$.

Afirmção: A' é um submódulo próprio de A . De fato, se $A' = A$ então existe $B \longrightarrow A$ um epimorfismo que não cinde com $B \in \text{add} C$, o que contradiz a hipótese.

Consideremos, então, A'' submódulo maximal de A contendo A' .

Se $M \notin \mathcal{D}$ temos $\tau_M(A) \subset A' \subset A''$. Isto é, se $M \notin \mathcal{D}$ então $\tau_M(A) \subset \ker f$, onde $f: A \longrightarrow \frac{A}{A''} \cong S$ é a projeção natural. Como $\mathcal{D}$ é finito, vale (4).

$(4) \implies (5)$ Seja $f: A \longrightarrow S$ um morfismo não nulo com S simples e vamos supor que $\bigcap_{i < \infty} \tau_{\underline{P}_i}(A) = A$. Então, para todo $i < \infty$, $\tau_{\underline{P}_i}(A) \not\subset \ker f$. Portanto, para todo $i < \infty$, existe $B_i \in \underline{P}_i$ tal que $\tau_{B_i}(A) \not\subset \ker f$. Como, para $i \neq j$, $\underline{P}_i \cap \underline{P}_j = \emptyset$ segue que existem infinitos Λ -módulos indecomponíveis B tal que $\tau_B(A) \not\subset \ker f$, o que é uma contradição com a hipótese pois $f: A \longrightarrow S$, com $f \neq 0$ e S um simples, foi escolhido arbitrariamente.

(5) $\implies$ (6) É suficiente mostrarmos que

$$\tau_{\underline{P}_{\infty}}(A) \subset \bigcap_{i < \infty} \tau_{\underline{P}_i}(A).$$

Mas, se $f: B \longrightarrow A$ é um morfismo com $B \in \underline{P}_{\infty}$ então, para todo $i < \infty$, existe $g: \bigoplus_{j=1}^n C_j \longrightarrow B$ um epimorfismo com $C_j \in \underline{P}_i$ $\forall j = 1, \dots, n$.

Então $\tau_{\underline{P}_{\infty}}(A) \subset \tau_{\underline{P}_i}(A)$. Como isto vale para todo $i < \infty$, segue que $\tau_{\underline{P}_{\infty}}(A) \subset \bigcap_{i < \infty} \tau_{\underline{P}_i}(A)$.

(5) $\implies$ (1) É trivial.

E o teorema está demonstrado. $\square$

É fácil ver que $\tau_{\mathcal{C}}(\)$ é um subfuntor da identidade em $\text{mod } \Lambda$ para qualquer subcategoria $\mathcal{C}$. Então $\tau_{\mathcal{C}}(M \oplus M') = \tau_{\mathcal{C}}(M) \oplus \tau_{\mathcal{C}}(M')$. Temos, portanto, como consequência disto e do teorema acima o seguinte:

Corolário 1.7: - Seja M em $\text{mod } \Lambda$. São equivalentes:

(1) M tem um somando pré-projetivo

(2) $\bigcap_{i < \infty} \tau_{\underline{P}_i}(M) \neq M$

(3) $\tau_{\underline{P}_{\infty}}(M) \neq M$.

Como podemos observar, os submódulos $\bigcap_{i < \infty} \tau_{\underline{P}_i}(A)$ e $\tau_{\underline{P}_{\infty}}(A)$

de A desempenham um papel importante pois nos permitem saber se

um dado módulo indecomponível é ou não um pré-projetivo. Vamos nos deter, então, um pouco em seu estudo.

Na demonstração de $(5) \implies (6)$ do teorema acima, vimos que $\tau_p(A) \subset \bigcap_{i < \infty} \tau_{p_i}(A)$. Na realidade, estes dois submódulos são iguais, como nos mostra a proposição abaixo.

Proposição I.8: - Seja $M \in \text{mod } \Lambda$. Se $M_0 = \bigcap_{i < \infty} \tau_{p_i}(M)$, então:

- (1) M_0 é o único submódulo minimal de M tal que $\tau_B(M) \subset M_0$ para todos menos um número finito de módulos em $\text{mod } \Lambda$.
- (2) $M_0 = \tau_{p_\infty}(M)$.
- (3) M_0 é o único submódulo de M maximal com respeito a propriedade de não conter somando diretos pré-projetivos.
- (4) Se $A \in \text{mod } \Lambda$ e se $f: A \longrightarrow M$ é tal que $\text{Im } f \not\subset M_0$ então A tem somando pré-projetivo.

Demonstração: - (1) O conjunto de submódulos M' de M tais que $\tau_B(M) \subset M'$ para todos menos um número finito de indecomponíveis B é fechado para intersecção. Então existe um único M' minimal com esta propriedade.

Seja $N_i = \tau_{p_i}(M)$. $N_0 \supset N_1 \supset \dots$ é uma cadeia descendente, portanto estacionária a partir de um $k < \infty$ pois M é artiano. Então $\tau_B(M) \subset N_k = M_0$ para todo $B \in \bigcup_{i=k}^{\infty} p_i$. Portanto, $M_0 \supset M'$.

Se esta inclusão for própria, $\tau_{P_i}(M) \subset M'$ para todo $k < i < \infty$. E isto quer dizer que existem infinitos B tais que $\tau_B(M) \subset M'$, o que é uma contradição. Segue que $M_0 = M'$.

(2) Observemos que $\bigcap_{i < \infty} \tau_{P_i}(M_0) = \bigcap_{i < \infty} \tau_{P_i}(M) = M_0$. Então, pelo corolário I.7., M_0 não contém qualquer somando pré-projetivo. E, portanto, $M_0 \supset \tau_{P_\infty}(M)$.

A inclusão $M_0 \subset \tau_{P_\infty}(M)$ foi feita na implicação

(5) $\implies$ (6) do teorema I.6. Portanto $M_0 = \tau_{P_\infty}(M)$.

(3) É claro que existe um único maximal com esta propriedade. E que este submódulo é M_0 segue de (2).

(4) Sejam $A \in \text{mod } \Lambda$ e $f: A \longrightarrow M$ com $\text{Im } f \not\subset M_0$. Por (3), $\text{Im } f$ tem um somando pré-projetivo, digamos em P_n . Então A tem que ter também um somando em $P^n = \bigcup_{i=0}^n P_i$. E a proposição está provada. $\square$

Agora que sabemos que $\bigcap_{i < \infty} \tau_{P_i}(A)$ e $\tau_{P_\infty}(A)$ são iguais para cada módulo A , vamos denotá-los por A_0 .

Vamos olhar um pouco para o caso particular em que $A_0 = 0$ para algum A pré-projetivo.

Seja F um funtor aditivo de $\text{mod } \Lambda$ a $\underline{\text{Ab}}$. Lembramos que $\ell(F) = \sum \ell(F(A))$ onde a soma é feita sobre os Λ -módulos indecomponíveis não isomorfos (ver 0.14). Em particular, se F é um quociente de um funtor representável, então $\ell(F) < \infty$ se, e só se, $F(A) \neq 0$ para apenas um número finito de indecomponíveis A .

Proposição I.9: - Seja A um pré-projetivo em $\text{mod } \Lambda$. São equivalentes:

- (1) $A_0 = 0$.
- (2) $\text{Hom}(B, A) \neq 0$ para apenas um número finito de indecomponíveis B .
- (3) $\ell((\ , A)) < \infty$.
- (4) Todos os submódulos de A são pré-projetivos.

Demonstração: - As demonstrações são fáceis e serão deixadas aos leitores.

É claro que existem resultados análogos a estes e que nos permitem distinguir um módulo pré-injetivo. Enviamos o leitor mais interessado a [AS2] onde se encontram tais resultados.

§3. Um critério para tipo de representação finito

Neste parágrafo vamos estabelecer critérios, em termos das partições pré-projetiva e pré-injetiva, que nos permitem garantir quando uma determinada álgebra $\tilde{A}$ é de tipo finito.

Seja Λ uma álgebra de Artin com partições pré-projetiva e pré-injetiva $\underline{P}_0, \dots, \underline{P}_n, \dots, \underline{P}_\infty$ e $\underline{I}_0, \dots, \underline{I}_m, \dots, \underline{I}_\infty$ respectivamente. O que podemos afirmar sobre $\underline{P}_\infty$, $\underline{I}_\infty$ ou $\underline{P}_\infty \cap \underline{I}_\infty$ em termos de cardinalidade? Poderíamos ter, em princípio, os seguintes casos:

1. Λ é de tipo finito e, portanto, $\underline{P}_\infty$, $\underline{I}_\infty$ e $\underline{P}_\infty \cap \underline{I}_\infty$ são todos vazios.
2. Λ é de tipo infinito e
 - (a) $\underline{P}_\infty = \emptyset$
 - (b) $\underline{I}_\infty = \emptyset$
 - (c) $\underline{P}_\infty \cap \underline{I}_\infty = \emptyset$
 - (d) $\underline{P}_\infty \cap \underline{I}_\infty$ é não vazio

Observemos que $\underline{P}_\infty$ (resp. $\underline{I}_\infty$) não pode ser diferente do vazio e finito.

Auslander e Smalø provaram em [AS1] que 2(a) e 2(b) não podem acontecer e esta demonstração repetimos abaixo. Uma pergunta levantada por C.M. Ringel (ver [AS1]) e que ainda não foi respondida é se o caso 2(c) é realmente possível.

O teorema abaixo encontra-se em [AS1] com as equivalências de (1), (3), (4) e (5) (respec. (1), (3'), (4') e (5')). A condição (2) (resp. (2')) foi por nós incluída.

Teorema I.10: - Para uma álgebra de Artin Λ são equivalentes:

- (1) Λ é de tipo finito
- (2) Todos os simples são pré-injetivos
- (2') Todos os simples são pré-projetivos.
- (3) Todos os indecomponíveis são pré-injetivos
- (3') Todos os indecomponíveis são pré-projetivos.
- (4) Todos os pré-projetivos são pré-injetivos
- (4') Todos os pré-injetivos são pré-projetivos
- (5) Todos os pré-projetivos com topo simples são pré-injetivos
- (5') Todos os pré-injetivos com socle simples são pré-projetivos.

Demonstração: - Iremos mostrar apenas o ciclo

$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (1)$. O outro ciclo segue por dualidade.

As implicações $(1) \implies (2)$, $(3) \implies (4)$ e $(4) \implies (5)$ são imediatas. Falta-nos $(2) \implies (3)$ e $(5) \implies (1)$.

$(2) \implies (3)$ - Na realidade, vamos provar mais do que está enunciado. Provaremos o seguinte lema:

Lema I.11: - Seja Λ uma álgebra de Artin com partição pré-injetiva $I_0, \dots, I_\infty$. Se existir um $n < \infty$ tal que todos os simples estão em $I^n = \bigcup_{j=0}^n I_j$, então $\text{ind} \Lambda = I^n$.

Demonstração do lema: - Seja $A \in \text{ind} \Lambda$. Quero mostrar que $A \in I^n$.

Vamos considerar um S simples contido em A e vamos supor que $S \in I_m$. Por hipótese temos que $m \leq n$.

Olhemos para a inclusão natural $\iota: S \rightarrow A$. Se ι é um monomorfismo que cinde, então $S \cong A$ pois A é indecomponível e, portanto, $A \in I_m \subset I^n$.

Se ι é um monomorfismo que não cinde, então, pela definição de partição pré-injetiva, segue que $A \in I^{m-1}$ e, portanto, $A \in I^n$. Então $\text{ind} \Lambda = I^n$ e o lema está provado. $\square$

Voltando ao teorema: se vale a condição (2) então, como o número de Λ -módulos simples é finito, segue que existe um $n < \infty$ tal que todos os simples estão em I^n . E neste caso, pelo lema, vale (3).

Para demonstrarmos que (5) $\implies$ (1) iremos construir em Λ uma cadeia de ideais que, de certa forma, é uma visualização em Λ da partição pré-injetiva. Se $M \in \text{mod} \Lambda$, definimos o anulador de M como sendo o ideal $\text{ann} M = \bigcap_{f: \Lambda \rightarrow M} \ker f$. Se $\mathcal{C}$ é uma subcategoria de $\text{mod} \Lambda$ então $\text{ann} \mathcal{C} = \bigcap_{M \in \mathcal{C}} \text{ann} M$.

Obs. 1: - $\underline{\mathcal{C}} = \text{ann} \mathcal{C} \subset \Lambda$ é o mínimo ideal tal que o módulo $\frac{\Lambda}{\underline{\mathcal{C}}}$ pode ser incluído em uma soma direta de cópias de módulos de $\mathcal{C}$.

Para provarmos este fato, observamos inicialmente que, como Λ é artinianiano, então a intersecção $\bigcap_{M \in \mathcal{C}} \text{ann} M$ pode ser obtida com um conjunto finito, isto é, $\underline{c} = \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$, $f_i: \Lambda \longrightarrow M_i$, $M_i \in \mathcal{C}$. Com isto e se indicarmos por f a função $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, segue

$$\bar{f}: \frac{\Lambda}{\underline{c}} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

que

é a inclusão natural.

$$a + \underline{c} \longmapsto f(a)$$

Para provarmos que $\text{ann} \mathcal{C}$ é o mínimo, vamos considerar λ outro ideal com esta condição. Isto é, existe $f'_i: \Lambda \longrightarrow M'_i$, $M'_i \in \mathcal{C}$, $i=1, \dots, n'$ com $\bar{f}': \frac{\Lambda}{\lambda} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n'} M'_i$ monomorfismo onde

$$f' = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_{n'} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{n'} \ker f'_i \subset \lambda. \quad \text{Mas} \quad \underline{c} = \bigcap_{\alpha} \ker f_{\alpha} \subset \bigcap_{i=1}^{n'} \ker f'_i \subset \lambda.$$

De onde obtemos o que queríamos: $\underline{c} \subset \lambda$.

Notação: $\underline{a}_i = \text{ann } I_i$.

Observe que $\underline{a}_0 = \text{ann } I_0 = 0$. Basta lembrar que Λ pode ser incluído em um injetivo (= uma soma direta de injetivos indecomponíveis).

Obs. 2: - $\underline{a}_i \subset \underline{a}_{i+1}$.

É suficiente mostrarmos que $\frac{\Lambda}{\underline{a}_{i+1}}$ pode ser incluído em uma soma de cópias de módulos de I_i .

Sabemos que isto ocorre para módulos de I_{i+1} . Mas cada módulo de I_{i+1} , por sua vez, está incluído em uma soma de cópias de módulos de I_i . Portanto o resultado segue.

Obs. 3: - $\underline{a}_n \neq \underline{a}_{n+1}$ se e sô se $\underline{I}_n$ contém um somando de $\frac{\Lambda}{\underline{a}_n}$.

($\implies$) Vamos supor que $\underline{a}_n \neq \underline{a}_{n+1}$. Por um lado, isto significa que $\frac{\Lambda}{\underline{a}_n}$ pode ser incluída em uma soma de cópias de módulos em $\underline{I}_n$ (e, portanto, não tem somandos indecomponíveis em $\bigcup_{i < n} \underline{I}_i$). E, por outro lado, $\frac{\Lambda}{\underline{a}_n}$ não pode ser incluída numa soma de cópias de módulos de $\underline{I}_{n+1}$ (quer dizer: tem um somando em $\bigcup_{i < n} \underline{I}_i$).

Destes dois resultados, segue que $\frac{\Lambda}{\underline{a}_n}$ tem um somando em $\underline{I}_n$.

($\impliedby$) Se $\frac{\Lambda}{\underline{a}_n}$ tem um somando em $\underline{I}_n$, então $\frac{\Lambda}{\underline{a}_n}$ não pode ser incluída numa soma de cópias de módulos de $\underline{I}_{n+1}$. E, portanto, $\underline{a}_{n+1} \neq \underline{a}_n$.

Obs. 4: - Decorre da obs. 3 que $\underline{a}_i = 0$ para todo i se, e sô se, nenhum projetivo indecomponível é prê-injetivo.

Obs. 5: - $\underline{a}_n = \text{ann } \bigcup_{i=n}^{\infty} \underline{I}_i$.

Se $\alpha \in \text{ann } \underline{I}_n$ e $\alpha \notin \text{ann } \bigcup_{i=n}^{\infty} \underline{I}_i$, então existe

$f: \Lambda \longrightarrow N \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \underline{I}_i$ e $\alpha \notin \ker f$.

Como $\underline{I}_n$ é cocobertura para $\text{ind } \Lambda \setminus \bigcup_{i < n} \underline{I}_i$, então existe

$g: N \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m M_j$, $M_j \in \underline{I}_n$ e g é um monomorfismo. Então, existe

$g_j: N \longrightarrow M_j$ com $g_j \circ f: \Lambda \longrightarrow M_j$ e $g_j \circ f(\alpha) \neq 0$, o que é um absurdo.

Então, todos menos um número finito de indecomponíveis em $\text{mod } \Lambda$ são anulados por $\underline{a}_n$, $n < \infty$. Isto é, passando de Λ a $\frac{\Lambda}{\underline{a}_n}$ nós perdemos apenas um número finito de indecomponíveis, todos pré-injetivos.

Vamos, agora, terminar a prova do Teorema I.10.

(5) $\implies$ (1) Precisamos mostrar que, se (5) é satisfeita, então a cadeia ascendente $\underline{a}_0 \subset \underline{a}_1 \subset \dots$ de ideais não se torna estável antes de termos alcançado o anel todo.

Vamos supor que $\underline{a}_n = \underline{a}_i \ \forall n > i$ mas $\underline{a}_i \neq \Lambda$. O conjunto finito $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, consistindo de somandos indecomponíveis não isomorfos de $\frac{\Lambda}{\underline{a}_i}$, é claramente uma cobertura finita para

$$\text{ind } \Lambda \setminus \bigcup_{j < i} I_j.$$

Como $\bigcup_{j=i+1}^{\infty} I_j = I_i$ e $\bigcup_{j=0}^{\infty} I_j = I_i$ apenas diferem em um conjunto finito de elementos, todo módulo que é pré-projetivo sobre $\frac{\Lambda}{\underline{a}_i}$ é pré-projetivo sobre Λ pois $\frac{\Lambda}{\underline{a}_i}$ é ele mesmo soma de pré-projetivos sobre Λ que em adição tem topo simples.

Por hipótese, $\frac{\Lambda}{\underline{a}_i}$ tem algum pré-injetivo como somando. Como $\frac{\Lambda}{\underline{a}_i}$ pode ser incluído em uma soma direta de cópias de módulos em I_i , os somandos pré-injetivos de $\frac{\Lambda}{\underline{a}_i}$ têm de aparecer em algum I_n , $n \geq i$. Isto é, $\underline{a}_n \neq \underline{a}_{n+1}$ para algum $n \geq i$.

Contradição; e o teorema I.10 está provado. $\square$

Agora que estabelecemos este critério, vamos olhar um pouco para as álgebras de tipo finito. Quando isto acontece, definimos $p(\Lambda)$ (resp. $i(\Lambda)$) como sendo o maior n natural tal que P_n (resp. I_n) é não vazio.

É fácil ver que se $A \in P_{p(\Lambda)}$ ou $A \in I_{i(\Lambda)}$, então A é simples. Na realidade, nós conseguimos provar uma espécie de recíproca deste fato.

Proposição I.12: - Seja Λ uma álgebra de Artin com partição pré-projetiva $P_0, \dots, P_\infty$. Então em P_n só temos Λ -módulos simples $\iff \Lambda$ é de tipo finito e $n=p(\Lambda)$.

Demonstração: - ($\implies$) Vamos supor que P_n só tem módulos simples e que $P_{n+1} \neq \emptyset$.

Seja $M \in P_{n+1}$.

Como P_n é cobertura de $\text{ind } \Lambda \setminus P^n$, então existe $\omega: \bigoplus_{i=1}^m S_i \longrightarrow M$ um epimorfismo com S_i simples em P_n , $i=1, \dots, m$.

A existência deste epimorfismo ω implica que M é isomorfo a uma soma de simples que estão em P_n . Mas como M é indecomponível, então é isomorfo a um simples de P_n , o que não é possível. Então $P_{n+1} = \emptyset$ e $n=p(\Lambda)$.

($\impliedby$) Seja $A \in P_{p(\Lambda)}$ e vamos supor A não simples. Então existe $\pi: A \longrightarrow S$ um epimorfismo com S simples. Como A é indecomponível, π não cinde e, portanto, $S \in P^{p(\Lambda)}$, o que é uma contradição. $\square$

Pouco se sabe sobre os números $p(\Lambda)$ e $i(\Lambda)$ quando Λ é uma álgebra de Artin arbitrária. Quando Λ é de tipo finito, procura-se uma relação entre $p(\Lambda)$ (resp. $i(\Lambda)$) e alguma propriedade intrínseca a Λ , por exemplo, o comprimento de Λ ou de Λ^{op} .

Auslander e Smalø questionaram em [AS1] se, no caso em que Λ é de tipo finito, é verdade que $\underline{P}_n = \emptyset$ se, e só se, $\underline{I}_n = \emptyset$. Isto, no entanto, não é verdade pois, como nos mostra Rohnes em [Rh], se Λ é dada pelo quiver comutativo

então $p(\Lambda) = 5$ e $i(\Lambda) = 6$ (ver exemplo 2 em I,1). Por outro lado, Riedtmann em [Ri] exhibe uma álgebra auto-injetiva em que $p(\Lambda) = 8$ e $i(\Lambda) = 9$. Portanto, em geral, $p(\Lambda) \neq i(\Lambda)$.

No entanto sabemos que, em certos casos particulares, vale a igualdade. Se Λ é uma álgebra de Artin hereditária de tipo finito, Zacharia em [Za] nos mostra este fato utilizando o Teorema de Todorov (ver Cap II) e, a partir deste fato, segue que se Λ é estavelmente equivalente a uma hereditária, então também vale a igualdade. Zacharia prova, também em [Za], que, quando Λ é hereditária, $p(\Lambda)+1$ é igual ao máximo dos comprimentos dos Λ -módulos indecomponíveis. Por fim, Rohnes em [Rh] prova que, no caso em que Λ é uma extensão trivial de uma álgebra hereditária, então também vale a igualdade entre $p(\Lambda)$ e $i(\Lambda)$.

CAPÍTULO II

Neste segundo capítulo vamos explorar um pouco o submódulo distinguido Λ_0 de um Λ -módulo A (ver §2 capítulo I). Queremos, em particular, olhar para as álgebras Λ que, vistas como Λ -módulo, têm o submódulo Λ_0 igual a zero.

Dizer que $\Lambda_0 = 0$ é equivalente a dizer que $P_0 = 0$ para todo P projetivo o que, por sua vez, é equivalente a garantir que todo submódulo de um projetivo é pré-projetivo (ver capítulo I, proposição I.9). Nosso interesse neste tipo de álgebras é que estas generalizam, de certa forma, as hereditárias. Como sabemos, as álgebras hereditárias têm como característica o fato de um submódulo de projetivo ser também um projetivo.

O parágrafo 1 é dedicado a alguns resultados gerais que nos ajudarão no estudo deste tipo de álgebras. No parágrafo 2 estabelecemos condições que serão equivalentes a $\Lambda_0 = 0$ e algumas propriedades. Finalmente, no parágrafo 3 olharemos um pouco para as álgebras hereditárias e, em particular, o teorema de Todorov.

O material aqui contido está, em parte, nos artigos [AS1], [AS2] e [Td] e é completado por nossa contribuição.

§ 1. Alguns resultados

Inicialmente, provaremos a seguinte proposição que nos será muito útil nos próximos resultados.

Proposição II.1 : - Seja Λ uma álgebra de Artin e A um Λ -módulo indecomponível.

(a) Se A é pré-projetivo não projetivo, então existe uma cadeia de irredutíveis $P \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow A$ onde $P \in \underline{P}_0$ e M_i é pré-projetivo para todo $i=1, \dots, n$.

(b) Se A é pré-injetivo não injetivo, então existe uma cadeia de irredutíveis $A \longrightarrow N_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow N_m \longrightarrow I$ onde $I \in \underline{I}_0$ e N_j é pré-injetivo para todo $j=1, \dots, m$.

Demonstração: - (a) Se $A \in \underline{P}_k$, $0 < k < \infty$, podemos considerar a
ARS $0 \longrightarrow D\text{Tr}A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$.

Como g é um epimorfismo que não cinde então C tem um somando em P^{k-1} . Isto é, existe $C' \in P^{k-1}$ e $C' \longrightarrow A$ um morfismo irredutível.

Um simples argumento de indução e o resultado está provado.

(b) Análogo ao item (a). $\square$

Seja Λ uma álgebra de Artin e A um Λ -módulo pré-projetivo. Nosso próximo objetivo será caracterizarmos os somandos de $A_0 = \tau_{\underline{P}_\infty}(A)$ quando este é distinto de zero.

Proposição II.2: - Sejam Λ uma álgebra de Artin de tipo infinito e $B \in \underline{P}_\infty$.

(a) Se $B \longrightarrow M$ é um morfismo quase cindido à esquerda minimal e B é somando de A_0 para algum A pré-projetivo então M tem um somando pré-projetivo.

(b) Se $B \longrightarrow M$ é um morfismo irredutível e $A \in \underline{P}_n$, $n < \infty$, é somando de M então B é somando de A_0 .

Demonstração: (a) Se $A \in \underline{P}_n$ e $B \in \underline{P}_\infty$ é somando de A_0 então a composta $B \xrightarrow{1} A_0 \xrightarrow{1'} A$, onde 1 e $1'$ são as inclusões naturais, é um monomorfismo que não cinde.

Portanto, $1 \circ 1'$ se fatora através de $B \longrightarrow M$ conforme a figura

Se $\text{Im} f \subset A_0$ então $B \longrightarrow M$ seria um monomorfismo que cinde pois $B \longrightarrow A_0$ o é. O que não é possível.

Então $\text{Im} f \not\subset A_0$ e, pela proposição 1.8, M contém um somando pré-projetivo.

(b) Vamos supor que $f: B \longrightarrow M$ é um morfismo irredutível com $B \in \underline{P}_\infty$ e que M tenha um somando pré-projetivo $A \in \underline{P}_n$. Podemos escrever $M = M' \oplus A$.

Se fizermos a composta $B \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} A$, onde π é a projeção natural, teremos que $\pi \circ f(B) \subset A_0$, pois $B \in \underline{P}_\infty$.

Podemos então fazer a seguinte fatoração de f :

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{f} & M \\
 g \searrow & \circlearrowleft & \nearrow g' \\
 & M' \oplus A_0 &
 \end{array}$$

$$\text{com } g: B \longrightarrow M' \oplus A_0$$

$$b \longmapsto f(b)$$

e $g': M' \oplus A_0 \longrightarrow M$ é a inclusão natural.

Como f é irredutível e g' não é um epimorfismo que cinde pois $A_0 \not\subseteq A$, então g será um monomorfismo que cinde. Isto é, $B \mid M' \oplus A_0$.

Mas como $B \nmid M'$, pois senão $B \mid M$, então $B \mid A_0$. E a proposição está demonstrada. $\square$

Auslander e Smalø provaram em [AS2] a seguinte proposição:

Proposição: (8.5 página 108): - Seja A um pré-projetivo indecomponível e seja B um indecomponível com um morfismo irredutível $A \longrightarrow B$. Então ou B ou $D\text{Tr}B$ é pré-projetivo. Mais ainda, se $A \in \underline{P}_n$ e B não for pré-projetivo, então $D\text{Tr}B \in \underline{P}_j$ para algum $j \leq n-1$.

Modificando convenientemente a demonstração deste resultado podemos generalizá-lo como segue:

Proposição II.3: - Seja $A \in \underline{P}_n$ e $B \in \underline{P}_m$ com $A \longrightarrow B$ um morfismo irredutível. Se $n+1 < m \leq \infty$ então $D\text{Tr}B \in \underline{P}^{n-1}$,

Para esta demonstração precisaremos do lema:

Lema II.4: - Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata e $h: D \longrightarrow C$ um epimorfismo que se levanta através de g . En-

tão o morfismo induzido $A \oplus D \longrightarrow B$ é um epimorfismo.

Demonstração do lema: - Vamos supor que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ é uma sequência exata e $h: D \longrightarrow C$ é um epimorfismo que se levanta através de $g: B \longrightarrow C$, isto é, existe $\bar{h}: D \longrightarrow B$ tal que $g\bar{h} = h$. Olhemos $f + \bar{h}: A \oplus D \longrightarrow B$ e consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 A \oplus D & \xrightarrow{f+\bar{h}} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 & & \downarrow \pi & \nearrow \bar{g} & \\
 & & B & & \\
 & & \text{Im } f & &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{\textcircled{C}} \\ \bar{g} \cong \end{array}$$

$\pi: B \longrightarrow \frac{B}{\text{Im } f}$ é a projeção natural e $\bar{g}$ é a induzida por este π .

Observemos que $\text{Im } f \subset \text{Im}(f+\bar{h}) \subset B$. Se $\text{Im}(f+\bar{h}) \neq B$ então

$$\begin{aligned}
 \bar{g}\left(\frac{\text{Im}(f+\bar{h})}{\text{Im } f}\right) &\neq C. \text{ Por outro lado, } \bar{g}\left(\frac{\text{Im}(f+\bar{h})}{\text{Im } f}\right) = \bar{g} \circ \pi \circ (f+\bar{h})(A \oplus D) = \\
 &= g \circ (f+\bar{h})(A \oplus D) = (g \circ f + g \circ \bar{h})(A \oplus D) = g \circ \bar{h}(A \oplus D) = h(A \oplus D) = C
 \end{aligned}$$

E, portanto, $f + \bar{h}$ tem de ser um epimorfismo. $\square$

Demonstração da proposição: - Como $B \notin p^{n+1}$ então existe $h: F \longrightarrow B$ um epimorfismo que não cinde com $F \in \text{add}(\text{ind } \Lambda \setminus p^n)$.

Como B não é projetivo existe a ARS:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & D\text{Tr } B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow \text{\textcircled{C}} & \nearrow h & \\
 & & & & F & &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \exists \bar{h} \end{array}$$

h é um epimorfismo que não cinde, então existe $\bar{h}: F \longrightarrow C$ tal que $g \circ \bar{h} = h$.

O lema acima nos garante que $DTrB \oplus F \longrightarrow C$ é um epimorfismo.

A composta $DTrB \oplus F \longrightarrow C \xrightarrow{\pi} A$, onde $\pi: C \longrightarrow A$ é a projeção natural, é um epimorfismo que não cinde pois A não é um somando de $DTrB \oplus F$. Mas $A \in \underline{P}_n$; então $DTrB \oplus F$ tem um somando em P^{n-1} . Como todo somando de F pertence a $\text{ind} \Lambda \setminus P^n$ então $DTrB \in P^{n-1}$ e a proposição está demonstrada. $\square$

Estamos em condições de dar a caracterização dos somandos de A_0 para A pré-projetivo com $A_0 \neq 0$.

Teorema II.5: - Sejam $B \in \underline{P}_{\infty} \setminus \underline{I}_0$ e $0 \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow TrDB \longrightarrow 0$ sua ARS. São equivalentes:

- (1) B é somando de A_0 para algum A pré-projetivo.
- (2) M tem um somando pré-projetivo.
- (3) Existe C um pré-projetivo e um morfismo irreduzível $C \longrightarrow TrDB$.
- (4) $TrDB$ é pré-projetivo.

Demonstração: - (1) $\iff$ (2) decorre da proposição II.2

(2) $\iff$ (3) trivial

(3) $\implies$ (4) decorre da proposição II.3

(4) $\implies$ (3)

$M \longrightarrow TrDB$ é um morfismo quase cindido à direita com $TrDB \notin \underline{P}_0$ e, portanto, é um epimorfismo que não cinde.

Se $\text{TrDB} \in \underline{P}_n$ então existe $C|M$ com $C \in P^{n-1}$. Portanto existe $C \longrightarrow \text{TrDB}$ irredutível com C um Λ -módulo pré-projetivo. $\square$

Dentre os módulos pré-projetivos, podemos distinguir alguns que nos serão muito úteis.

Definição: - Dizemos que um módulo $A \in \text{ind}\Lambda$ é *fortemente pré-projetivo* quando $A_0 \subset rA$ onde rA é o radical do módulo A .

Obviamente que se A é fortemente pré-projetivo então ele é pré-projetivo. Os projetivos e, mais geralmente, os módulos pré-projetivos com topo simples são exemplos triviais de módulos fortemente pré-projetivos.

Por outro lado, existem álgebras aonde temos módulos pré-projetivos que não são fortemente pré-projetivos. Este é o caso da álgebra de grupo $\Lambda = kA_5$ onde k é um corpo algebricamente fechado de característica 2 e A_5 é o grupo alternado de cinco elementos. A prova deste resultado se encontra em Alperin [Al].

O que iremos mostrar é que se em $\text{mod}\Lambda$ todos os pré-projetivos forem fortemente pré-projetivos então Λ satisfaz a *propriedade das aplicações irredutíveis para módulos pré-projetivos*, isto é, dado $f: A \longrightarrow B$ um morfismo irredutível com A pré-projetivo e $B \in \text{ind}\Lambda$, então B é pré-projetivo.

Proposição II.6: - Seja A não projetivo em $\text{ind}\Lambda$. Se o termo do meio da ARS $0 \longrightarrow D\text{Tr}A \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ é fortemente pré-projetivo, então A é fortemente pré-projetivo.

Demonstração: - Seja $A \in \text{ind} \Lambda \setminus \underline{P}_0$ e consideremos a ARS

$0 \longrightarrow \text{DTr} A \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$. Vamos supor que B é fortemente pré-projetivo.

1. Existe um $n \geq 0$ tal que $A \notin \bigcup_{n < i < \infty} \underline{P}_i$,

2. Pela definição de ARS, se $h: C \longrightarrow A$ com $C \in \text{ind} \Lambda$ não é um isomorfismo então existe $h': C \longrightarrow B$ tal que $fh' = h$,

De 1. e 2. segue que

$$\tau_{\underline{P}_i}(A) \subset f(\tau_{\underline{P}_i}(B)), \text{ para todo } i \text{ com } n < i < \infty$$

ou $A_0 \subset f(\bigcap_{i < \infty} \tau_{\underline{P}_i}(B)) \subset f(rB) \subset rA$ pois B é fortemente pré-projetivo. Portanto, $A_0 \subset rA$ e A é fortemente pré-projetivo. $\square$

Teorema II.7: - Seja Λ uma álgebra de Artin. Se todos os módulos pré-projetivos em $\text{mod} \Lambda$ são fortemente pré-projetivos então Λ satisfaz a propriedade das aplicações irredutíveis para módulos pré-projetivos.

Demonstração: Vamos supor, por absurdo, que existe $A \in \underline{P}$ e $f: A \longrightarrow B$ aplicação irredutível com $B \in \underline{P}_\infty$.

Seja n o menor natural tal que existe $A \in \underline{P}_n$ e $B \in \underline{P}_\infty$ com $f: A \longrightarrow B$ irredutível.

Pela proposição II.3, $\text{DTr} B \in \underline{P}_j$, $j < n$. Pela minimalidade de n , o termo do meio A' da ARS:

$0 \longrightarrow D\text{Tr}B \longrightarrow A' \longrightarrow B \longrightarrow 0$ é pré-projetivo.

Segue da hipótese que A' é fortemente pré-projetivo. Então, pela proposição anterior, B é fortemente pré-projetivo o que é uma contradição. E o teorema está demonstrado. $\square$

Temos, como consequência do Teorema acima o seguinte fato:

Corolário II.8: - Seja Λ álgebra de Artin onde todos os módulos pré-projetivos são fortemente pré-projetivos. Então $\text{Tr}DB$ é pré-projetivo para todo B pré-projetivo não injetivo.

Demonstração: - Sejam B um pré-projetivo não injetivo e $0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \text{Tr}DB \longrightarrow 0$ a sua ARS. Sabemos, então, que existe $C' \in \text{ind}\Lambda$ e morfismos irredutíveis $B \longrightarrow C' \longrightarrow \text{Tr}DB$. Pelo teorema segue que C' e $\text{Tr}DB$ são pré-projetivos como queríamos. $\square$

Observemos que, na demonstração do corolário acima, utilizamos apenas o fato de Λ satisfazer a propriedade das aplicações irredutíveis para módulos pré-projetivos. Na realidade é possível mostrar que são equivalentes: (a) Propriedade das aplicações irredutíveis para módulos pré-projetivos e (b) $\text{Tr}DB$ é pré-projetivo para todo B pré-projetivo não injetivo. A implicação (b) $\implies$ (a) pode ser encontrada em [AS2].

§2. Álgebras de Artin Λ com $\Lambda_0 = 0$

Vamos agora considerar Λ uma álgebra de Artin com $\Lambda_0 = 0$ o que é equivalente, como já vimos, a dizer que todo submódulo de um projetivo é um pré-projetivo. Vamos estabelecer outras condições nos Λ -módulos que sejam equivalentes a estas e que nos permitam operar melhor com tais álgebras.

Observemos que as álgebras de Artin hereditárias e as de tipo finito cumprem trivialmente a condição de ter $\Lambda_0 = 0$.

O próximo teorema diz respeito à caracterização mencionada acima.

Teorema II.9: - Seja Λ uma álgebra de Artin. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $\Lambda_0 = 0$
- (2) $\Lambda_0 = 0$ para todo Λ -módulo pré-projetivo A .
- (3) Se A é um pré-projetivo indecomponível não projetivo então $D\text{Tr}A$ também é pré-projetivo.
- (4) Se $B \longrightarrow A$ é irredutível com $B \in \text{ind}\Lambda$ e A é um pré-projetivo indecomponível então B é um pré-projetivo.
- (5) Se $B \longrightarrow A$ é um monomorfismo irredutível com $B \in \text{ind}\Lambda$ e A é um pré-projetivo indecomponível, então B é pré-projetivo.

Demonstração: - Mostraremos as implicações $(1) \iff (2) \iff (3)$

(2) $\implies$ (1) Trivial.

(3) $\implies$ (2) Se existe $A \in P$ com $A_0 \neq 0$, então sabemos, pela proposição II.5, que existe $B \in \underline{P}_\infty$, $B|A_0$ e $B = \text{Tr}DB'$ com B' um pré-projetivo indecomponível, o que é uma contradição com (3).

(4) $\implies$ (3) Seja A um pré-projetivo indecomponível não projetivo e seja a sua ARS:

$$0 \longrightarrow \text{DTr}A \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Então existem irreduzíveis $\text{DTr}A \longrightarrow M' \longrightarrow A$ com $M' \in \text{ind}\Lambda$. Por (4) segue que $\text{DTr}A$ é pré-projetivo.

(5) $\implies$ (4) Basta observar que todo irreduzível ou é um monomorfismo ou um epimorfismo e se $B \longrightarrow A$ é um epimorfismo com $A \in \underline{P}_n$ e $B \in \text{ind}\Lambda$, então $B \in \underline{P}^{n-1}$.

(2) $\implies$ (5) Seja $B \longrightarrow A$ um monomorfismo irreduzível e A um pré-projetivo indecomponível. Então B é isomorfo a um submódulo de A . Mas, por hipótese, todo submódulo de A é um pré-projetivo. Então B é pré-projetivo.

Falta-nos, apenas, a implicação (1) $\implies$ (2). Para tanto precisamos do seguinte lema:

Lema II.10: - Seja $0 \longrightarrow \text{DTr}C \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ uma sequência exata com $\ell(P(\ , C))$ e $\ell((\ , \text{DTr}C))$ finitos. Então $\ell((\ , C))$ e $\ell((\ , B))$ são finitos também.

Demonstração do lema: - Sabemos que $DTr: \underline{\text{mod}} \Lambda \longrightarrow \overline{\text{mod}} \Lambda$ é uma equivalência (ver 0.7). Então temos que

$$DTr: \underline{\text{Hom}}(X, C) \cong \overline{\text{Hom}}(DTr X, DTr C) \text{ para todo } X \in \text{ind} \Lambda.$$

Como $\ell((\quad, DTr C)) < \infty$ então $\ell(\overline{\text{Hom}}(\quad, DTr C))$ e $\ell(\underline{\text{Hom}}(\quad, C))$ são finitos.

Mas $0 \longrightarrow P(\quad, C) \longrightarrow (\quad, C) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\quad, C) \longrightarrow 0$ é exata. Então $\ell((\quad, C)) < \infty$ pois $\ell(P(\quad, C))$ e $\ell(\underline{\text{Hom}}(\quad, C))$ são finitos.

Finalmente, a sequência exata

$$0 \longrightarrow (\quad, DTr C) \longrightarrow (\quad, B) \longrightarrow (\quad, C)$$

nos dá que $\ell((\quad, B)) < \infty$. $\square$

(1) $\implies$ (2) Vamos provar por indução em n que se $A \in \underline{P}_n$ então $A_0 = 0$.

Se $n=0$, a hipótese já nos garante o resultado. Vamos supor que $B_0 = 0$ para todo $B \in \underline{P}_k$, com $k < n$, e provar que se $A \in \underline{P}_n$ então $A_0 = 0$.

Seja $A \in \underline{P}_n$ e $0 \longrightarrow DTr A \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ a sua ARS.

Sabemos que existe $B' | B$, $B' \in \underline{P}^{n-1}$ pois $A \in \underline{P}_n$. Por hipótese de indução, $B'_0 = 0$.

Por outro lado, temos $f: DTr A \longrightarrow B'$ um morfismo irreduzível.

Se f é um monomorfismo, então $DTr A \subset B'$ e $\therefore (DTr A)_0 = 0$.

Se f é um epimorfismo, então $DTr A \in \underline{P}^{n-1}$ e $\therefore (DTr A)_0 = 0$.

Então, nos dois casos, $\ell((\ , D\text{Tr}A)) < \infty$ (Prop I.9). Por outro lado, se $\Lambda_0 = 0$ então $\ell(P(\ , M)) < \infty$ para todo $M \in \text{mod}\Lambda$.

De fato, dado $M \in \text{mod}\Lambda$ só pode existir um número finito de funções $f: N \longrightarrow M$ que se fatoram através de um projetivo, pois só existe um número finito de funções não nulas $N \longrightarrow P$ com P projetivo ($\ell((\ , P)) < \infty$ para todo P projetivo).

Estamos agora nas condições do lema. Então $\ell((\ , A)) < \infty$ ou $\Lambda_0 = 0$, como queríamos. E o teorema está demonstrado. $\square$

Se $\Lambda_0 = 0$, então, em particular, todo módulo pré-projetivo é fortemente pré-projetivo e, neste caso, valem o teorema II.7 e o corolário II.8.

O próximo teorema resume o que de principal sabemos até agora sobre as álgebras de Artin Λ com $\Lambda_0 = 0$.

Teorema II.11. - Seja Λ uma álgebra de Artin,

(a) São equivalentes:

- (1) $\Lambda_0 = 0$
- (2) $\Lambda_0 = 0$ para todo A pré-projetivo
- (3) A é pré-projetivo indecomponível não projetivo se, e só se, $D\text{Tr}A$ é pré-projetivo indecomponível não injetivo.
- (4) Se $A \longrightarrow B$ é irreduzível com A e B indecomponíveis, então A é pré-projetivo se, e só se, B é pré-projetivo.

- (5) Se $A \longrightarrow B$ é um monomorfismo irredutível com A e B indecomponíveis, então A é pré-projetivo se, e só se, B é pré-projetivo.

(b) Se $\Lambda_0 = 0$ e $A \in \text{ind} \Lambda$, então são equivalentes:

- (1) A é pré-projetivo.
- (2) $A_0 = 0$.
- (3) todo submódulo de A é pré-projetivo.
- (4) $\ell((\ , A)) < \infty$.
- (5) existe uma cadeia de irredutíveis entre pré-projetivos $P \longrightarrow \dots \longrightarrow A$ com P projetivo.

Muitas vezes é conveniente não nos restringirmos apenas ao estudo da partição pré-projetiva e considerarmos, isto sim, a interação entre as partições pré-projetiva e pré-injetiva. Um bom exemplo disto é o Teorema I.10.

No caso em que $\Lambda_0 = 0$ nós conseguimos um interessante critério que já sabíamos valer para as álgebras de Artin hereditárias.

Proposição II.12: - Seja Λ uma álgebra de Artin, indecomponível como anel, com $\Lambda_0 = 0$ e de tipo infinito. Então não existe nenhum módulo que seja pré-projetivo e pré-injetivo.

Demonstração: - Vamos indicar por P a união $\bigcup_{j < \infty} P_j$ e por J a união $\bigcup_{j < \infty} I_j$ e vamos supor que existe $A \in P \cap J$.

1. Se B é um pré-injetivo, então existe uma cadeia de irredutíveis $B \longrightarrow \dots \longrightarrow I$, com I injetivo (ver proposição II.1.(b)).
2. Como $\Lambda_0 = 0$ então todo módulo ligado a um pré-projetivo por uma aplicação irredutível é um pré-projetivo.
3. Λ indecomponível, por sua vez, implica que todos os injetivos estão ligados por irredutíveis (ver 0.15).

Se $A \in P \cap J$ então por (1) e (2) existe um injetivo que é pré-projetivo.

Por (2) e (3) segue que todos os injetivos são pré-projetivos. Finalmente por (1) e (2) e esta última observação segue que todo pré-injetivo é pré-projetivo.

Pelo Teorema I,10, isto implica que Λ é de tipo finito, o que é uma contradição. $\square$

Esta proposição nos dá um critério para se saber quando uma álgebra de Artin Λ de tipo infinito tem chances ou não de ser do tipo $\Lambda_0 = 0$. Para exemplificar, usaremos este critério em dois tipos de álgebras.

1. Seja Λ indecomponível e estavelmente equivalente a uma álgebra de Artin hereditária. Então, se $\Lambda_0 = 0$ e Λ não é hereditária, Λ é de tipo finito.

Uma álgebra de Artin Λ é estavelmente equivalente a uma álgebra hereditária se suas categorias módulo projetivo forem equivalentes. Prova-se que Λ é equivalente a uma álgebra hereditária se, e só se, (a) Se A é submódulo de um projetivo, então A é ou um projetivo ou um simples e (b) se A é um submódulo não projetivo de um projetivo, então existe um epimorfismo $f: I \longrightarrow A$ com I injetivo (ver [AR]).

Vamos supor que Λ é estavelmente equivalente a uma álgebra hereditária com $\Lambda_0 = 0$ mas não hereditária. Então, existe P projetivo e S simples não projetivo, submódulo de P . Como $\Lambda_0 = 0$, então S é pré-projetivo. Digamos que $S \in \underline{P}_n$. Mas, pela caracterização acima, segue que existe $f: I \longrightarrow S$ um epimorfismo com I injetivo. $S \in \underline{P}_n$ e f epimorfismo implica que $I \in P^n$. E então $P \cap J \neq \emptyset$. Portanto, Λ é de tipo finito.

2. Se Λ é auto-injetiva indecomponível e $\Lambda_0 = 0$, então Λ é de tipo finito.

Lembramos que Λ é autoinjetiva se Λ , vista como Λ -módulo, é injetivo. Então $\underline{P}_0 \cap \underline{I}_0 \neq \emptyset$ e, portanto, Λ é de tipo finito.

Uma outra consequência da proposição II.12 diz respeito aos módulos simples que podem aparecer como fatores de composição nas diferentes classes $\underline{P}_n$. Para tanto, precisamos do seguinte lema devido a Zacharia (ver [Za]).

Lema II.13: - Seja Λ uma álgebra de Artin arbitrária e S um Λ -módulo simples. Se existir uma classe pré-projetiva $\underline{P}_i (i < \infty)$ com

a propriedade que nenhum módulo em $\underline{P}_i$ tenha S como fator de composição, então a envolvente injetiva de S é pré-projetiva e está em um $\underline{P}_j$ para algum $j < i$.

Demonstração: - Devido a nossa hipótese, $I(S)$ a envolvente injetiva de S não pode ser um quociente de uma soma finita de módulos em $\underline{P}_i$. Então, ela precisa estar em um $\underline{P}_j$, com $j < i$. $\square$

Proposição II.14: - Seja Λ uma álgebra de Artin de tipo infinito e com $\Lambda_0 = 0$. Então, para todo S simples e todo $n \geq 0$, existe um módulo $A \in \underline{P}_n$ tal que S é fator de composição de A .

Demonstração: - Se existir um simples S e um $n \geq 0$ tal que nenhum módulo em $\underline{P}_n$ tenha S como fator de composição, então, pelo lema, $I(S) \in \underline{P}_j$, $j < n$. Isto implica que $P \cap J \neq \emptyset$ e, pela proposição II.12, segue que Λ é de tipo finito, o que é uma contradição. $\square$

§3. Álgebra de Artin hereditária e o Teorema de Todorov

Se Λ é uma álgebra de Artin arbitrária pouco se sabe sobre os módulos que estão em uma classe $\underline{P}_n$ para um n qualquer. Temos apenas descrições para o caso em que $n=0$ ou $n=1$.

Proposição II.15: - Seja Λ uma álgebra de Artin e $A \in \text{ind} \Lambda$.

(a) $A \in \underline{P}_0$ se, e só se, A é projetivo indecomponível

(b) $A \in \underline{P}_1$ se, e só se, $A = \text{Tr} DB$ aonde $B \in \text{ind} \Lambda$ e $B|_P$ para algum P projetivo.

(c) Se $A \in \underline{P}_n$, $n > 0$, então existe $B \in \underline{P}^{n-1}$ e um morfismo irreduzível $f: B \rightarrow A$.

Demonstração: - Os resultados (a) e (c) já são bastante conhecidos.

(b) ($\implies$) Vamos supor $A \in \underline{P}_1$.

Seja $0 \rightarrow D\text{Tr}A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$ sua ARS. Como g é um epimorfismo que não cinde, então C tem um somando projetivo indecomponível P .

Temos, então, $D\text{Tr}A \rightarrow P$ morfismo irreduzível e, neste caso, $D\text{Tr}A|_rP$.

Então $A = \text{Tr}D(D\text{Tr}A)$ e $D\text{Tr}A|_rP$.

A implicação está demonstrada

($\impliedby$) Vamos supor agora que $B|_rP$ para algum projetivo indecomponível P e $B \in \text{ind}\Lambda$. Então B não pode ser injetivo. Seja a ARS:

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{f} P \oplus C \xrightarrow{g} \text{Tr}DB \rightarrow 0.$$

Quero mostrar que $\text{Tr}DB \in \underline{P}_1$.

Vamos supor que $\text{Tr}DB \notin \underline{P}_1$. Isto é, $\text{Tr}DB \in \text{ind}\Lambda \setminus (\underline{P}_0 \cup \underline{P}_1)$. Então, existe um epimorfismo que não cinde $h: D \rightarrow \text{Tr}DB$ com $D \in \text{add}(\text{ind}\Lambda \setminus \underline{P}_0)$.

Por definição de ARS, h se levanta a um morfismo $\bar{h}: D \rightarrow P \oplus C$. Pelo lema II.4, o morfismo induzido $f + \bar{h}: B \oplus D \rightarrow P \oplus C$ é um epimorfismo e, portanto, $\pi \circ (f + \bar{h}): B \oplus D \rightarrow P$ é um epimorfismo, onde $\pi: P \oplus C \rightarrow P$ é a

projeção natural. P é projetivo e, portanto, $\pi_0(f + \bar{h})$ cinde. Neste caso, teremos $P|D$ o que não é possível, pois $D \in \text{add}(\text{ind} \Lambda \setminus \underline{P}_0)$ e o resultado está demonstrado. $\square$

A recíproca do item (c) da proposição acima não é válida em geral. Temos, porém, um caso em que existe uma boa descrição dos módulos em $\underline{P}_n$. É o caso em que Λ é uma álgebra de Artin hereditária e esta descrição é devida a Todorov (ver [Td]).

Teorema (Todorov) II.16: - Seja Λ uma álgebra de Artin hereditária. Então $Y \in \underline{P}_n$, $n \geq 0$ se, e só se:

- (a) Para todo $f: X \longrightarrow Y$ morfismo irredutível com $X \in \text{ind} \Lambda$, então $X \in \underline{P}_{n-1} \cup \underline{P}_n$ ($\underline{P}_{-1} = \emptyset$ por convenção).
- (b) Se $n \geq 1$ temos existe $X \in \underline{P}_{n-1}$ e um morfismo irredutível.

Demonstração: - ($\implies$)

(a) Faremos a demonstração por indução em n . Se $n=0$ o resultado vale trivialmente pois Λ é hereditária.

Vamos supor verdadeiro para todo $j < n$ e seja $A_n \in \underline{P}_n$ com $X \longrightarrow A_n$ irredutível e $X \in \text{ind} \Lambda$. Queremos mostrar que $X \in \underline{P}_n \cup \underline{P}_{n-1}$. Seja a ARS

$$0 \longrightarrow \text{DTr} A \longrightarrow X \oplus B'_{n-2} \oplus B \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$$

onde os somandos de B'_{n-2} estão em $\underline{P}^{n-2} = \bigcup_{k \leq n-2} \underline{P}_k$ e B não tem somandos em $\underline{P}^{n-2}$.

Como $\underline{P}_n$ é cobertura para $\text{ind} \Lambda \setminus \bigcup_{j < n} \underline{P}_j$, então existe um epimorfismo $f: Y \longrightarrow A_n$, $Y \in \text{add} \underline{P}_n$. A definição de ARS nos garante que f se fatora através de g , isto é, existe $f': Y \longrightarrow X \oplus B'_{n-2} \oplus B$ com $gf' = f$.

Afirmção: - Se $X \in \underline{P}^{n-1}$, então $(Y, X) = 0$ se $Y \in \underline{P}_n$.

Demonstração da Afirmção: - Sem perda de generalidade podemos supor que $X \in \underline{P}_{n-1}$ e supor, por absurdo, que existe $f: Y \longrightarrow X$, f não nula.

Por outro lado, podemos assumir X não projetivo e, então, seja a ARS:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{DTr} X & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow \text{ } \oplus & \nearrow f & \\
 & & & & Y & &
 \end{array}$$

Pela hipótese de indução, os somandos de Z estão em $\underline{P}_{n-1} \cup \underline{P}_{n-2}$. f se fatora através de um somando indecomponível Z' de Z , isto é, existe $f': Y \longrightarrow Z'$ com $gf' = f$. Se $Z' \in \underline{P}_{n-1}$ então o irredutível $Z' \longrightarrow X$ é um monomorfismo.

Como $f': Y \longrightarrow Z'$ não é um isomorfismo, então podemos repetir o processo. Como não pode haver uma cadeia infinita de monomorfismos em um $\underline{P}_k$, então vai existir um morfismo de $Y \in \underline{P}_n$, $n > 0$, a um projetivo. Contradição com o fato de Λ ser hereditária. E a Afirmção está demonstrada.

Voltemos à demonstração do Teorema:

1º caso - Vamos supor que $X \in \underline{P}_t$, $t < n-1$. Com esta suposição, vale o resultado acima, isto é, $(Y, X) = (Y, B'_{n-2}) = 0$ e, portanto, f se fatora através de B .

Então o irredutível $B \rightarrow A_n$ é um epimorfismo. Sabemos, por 0.12, que $DTrA \rightarrow X$ é também um epimorfismo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & Y & & \\
 & & & & \downarrow f & & \\
 & & X & \searrow & & & \\
 & & \oplus & & & & \\
 0 & \longrightarrow & DTrA & \longrightarrow & B'_{n-2} & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & \oplus & & & & \\
 & & B & & & &
 \end{array}$$

Mas $X \in \underline{P}_t$ e, por indução, $DTrA \in \underline{P}_{t-1}$.

Por outro lado, como $B \rightarrow A_n$ é um epimorfismo, então B tem um somando $B' \in \underline{P}_{n-1}$ pois todos os somandos de B estão em $\text{ind} \Lambda \setminus P^{n-2}$. Decorre, então, que existe $DTrA \rightarrow B'$ um irredutível o que é uma contradição pois $t-1 < n-2$. Provamos:

(*) Se $X \in \underline{P}_t$, então $t \geq n-1$.

2º caso - Vamos supor que $X \in \underline{P}_t$, $t > n$. Olhemos para a ARS

$$0 \longrightarrow DTrA \longrightarrow X \oplus B'_{n-2} \oplus B \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$$

Por (*) $B'_{n-2} = 0$ e por (c) da proposição II.15 segue que B tem um somando $B_{n-1} \in \underline{P}_{n-1}$. Temos um irredutível $DTrA \rightarrow B_{n-1}$. Portanto, por indução, $DTrA \in \underline{P}_{n-2} \cup \underline{P}_{n-1}$. Digamos que $DTrA \in \underline{P}_s$.

Seja a ARS

$$0 \longrightarrow \text{DTr}X \longrightarrow D \oplus \text{DTr}A \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Existe $h: Z \longrightarrow X$ um epimorfismo com $Z \in \text{add}(\underline{P}_n)$. Podemos decompor $D = D'_{n-1} \oplus D'$ onde D'_{n-1} contém todos os somandos de D que estão em $\underline{P}^{n-1}$, e são estes e D' é o seu complemento. Novamente pela Afirmação segue que

$$(Z, D'_{n-1}) = (Z, \text{DTr}A) = 0.$$

Então h se fatora através de D' e $D' \longrightarrow X$ é um epimorfismo. Portanto, existe $D_{j_1} \mid D'$ com $D_{j_1} \in \underline{P}_{j_1}$ e $j_1 < t$. E como $\text{DTr}X \longrightarrow \text{DTr}A$ é um epimorfismo (ver 0,12), segue que $\text{DTr}X \in \underline{P}_{s-1}$ pois $s < n$. Se $j_1 = n$ então, como existe $\text{DTr}X \longrightarrow D_{j_1}$, segue que $s-1 \geq n-1$, o que é uma contradição com $s < n-1$. Portanto $n < j_1 < t$. Repetimos o procedimento com D_{j_1} e conseguimos D_{j_2} com $n < j_2 < j_1 < t$. Se continuarmos o processo indefinidamente, conseguiremos uma cadeia infinita estritamente decrescente de números naturais, o que não é possível. Então, se $A \in \underline{P}_n$ e $X \longrightarrow A_n$ é irreduzível, $X \in \underline{P}_{n-1} \cup \underline{P}_n$.

(b) É claro a partir de (a) e do item (c) da proposição II.15.

($\Leftarrow$) Esta implicação é direta e fica a cargo do leitor. $\square$

Corolário II.17: - Seja Λ uma álgebra de Artin hereditária e $X \in \underline{P}_n$. A menor cadeia de irreduzíveis $X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_j = X$ com X projetivo tem comprimento $j=n$.

Corolário II.18: - Seja Λ uma álgebra de Artin hereditária e $X \in \underline{P}_n$. Então $\text{DTr}X \subseteq \underline{P}_{n-1} \cup \underline{P}_{n-2}$.

Corolário II.19: - Seja Λ uma álgebra de Artin hereditária. Então não existem pré-projetivos que sejam DTr-periódicos.

Sob certos aspectos, o teorema de Todorov é o melhor algoritmo que podemos encontrar para distinguirmos se um módulo pertence ou não a uma classe $\underline{P}_n$. Poderíamos perguntar se existe alguma outra álgebra, que não as hereditárias onde este algoritmo valha. Na realidade isto não ocorre e nós conseguimos obter uma demonstração para este fato.

$$X \in \underline{P}_n \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Seja } \Lambda \text{ uma álgebra de Artin com a propriedade (T):} \\ \text{(a) Se } Y \longrightarrow X \text{ é irredutível com } Y \in \text{ind} \Lambda \\ \text{então } Y \in \underline{P}_{n-1} \cup \underline{P}_n. \\ \text{(b) Se } n \geq 1 \text{ então existe } Y \in \underline{P}_{n-1} \text{ e um irredutível} \\ Y \longrightarrow X. \end{array} \right.$$

Observação 1: - Valendo (T) então se $X \in \underline{P}_n$ e $X \longrightarrow Y$ é irredutível, então $Y \in \underline{P}_{n+1} \cup \underline{P}_n$.

Observação 2: - Se Λ satisfaz (T), então $\Lambda_0 = 0$. Basta observar que se Λ satisfaz (T) e se $A \longrightarrow B$ é irredutível com A e B indecomponíveis, então $A \in \underline{P}$ se, e só se, $B \in \underline{P}$.

Proposição II.20: - Seja Λ uma álgebra de Artin que satisfaz (T). Então Λ é hereditária.

Demonstração: - Pela observação 2 acima podemos considerar Λ com $\Lambda_0 = 0$.

Vamos supor, por absurdo, que Λ não é hereditária. Então existe $P \in \underline{P}_0$ e $M \subset P$, M não projetivo.

Como $\Lambda_0 = 0$, então M é pré-projetivo. $M \in \underline{P}_n$, $n > 0$.

Pelo resultado 0.14, como $M \hookrightarrow P$ não é um isomorfismo e $(\ , P)$ é de comprimento finito ($\Lambda_0 = 0$) segue que existe uma cadeia de irredutíveis de M a P .

Mas $M \in \underline{P}_n$, $n > 0$ e, pela observação 1, P deveria pertencer a $\underline{P}_m$, $m \geq n > 0$.

O que é uma contradição, visto que P é projetivo. $\square$

Para terminarmos esta dissertação, daremos dois exemplos de álgebras de Artin hereditárias. Da mesma maneira que fizemos no exemplo 2 do capítulo I vamos construir estas álgebras a partir de quivers. Exibiremos duas álgebras dadas por duas orientações distintas de um mesmo grafo.

É um fato conhecido, em teoria de representações, que a álgebra dada por um grafo do tipo E_6 : $\text{---} \text{---} \overset{!}{\text{---}} \text{---} \text{---}$ é hereditária e de tipo finito.

Exemplo 3: - Seja Λ dada pelo quiver E_6 com a orientação

Λ é hereditária e de tipo finito. A figura 2 abaixo nos mostra o grafo de Auslander e Reiten desta álgebra.

Figura 2

Obs.: - Como no exemplo 2 do capítulo I, Δ denota TrD , P_i os projetivos indecomponíveis e I_i os injetivos indecomponíveis.

Utilizando-se dos resultados discutidos no decorrer da dissertação e, em particular, o teorema de Todorov, chegamos à seguinte partição pré-projetiva de Λ (o número que aparece após o módulo indica o seu comprimento):

$$P_0 = \{P_1(3), P_2(2), P_3(1), P_4(2), P_5(3), P_6(2)\}$$

$$P_1 = \{\Delta P_3(5), \Delta P_2(6), \Delta P_4(6)\}$$

$$P_2 = \{\Delta P_1(3), \Delta P_5(3), \Delta P_6(3), \Delta^2 P_3(10)\}$$

$$P_3 = \{\Delta^2 P_2(7), \Delta^2 P_4(7), \Delta^2 P_6(7)\}$$

$$P_4 = \{\Delta^2 P_1(4), \Delta^2 P_5(4), \Delta^3 P_3(11)\}$$

$$P_5 = \{\Delta^3 P_2(8), \Delta^3 P_4(8), \Delta^3 P_6(4)\}$$

$$P_6 = \{\Delta^3 P_1(4), \Delta^3 P_5(4), \Delta^4 P_3(9)\}$$

$$P_7 = \{\Delta^4 P_2(5), \Delta^4 P_4(5), \Delta^4 P_6(5)\}$$

$$\underline{P}_8 = \{\Delta^4 P_1(1) \quad , \quad \Delta^4 P_5(1) \quad , \quad \Delta^5 P_3(6)\}$$

$$\underline{P}_9 = \{\Delta^5 P_2(2) \quad , \quad \Delta^5 P_4(2) \quad , \quad \Delta^5 P_6(1)\}$$

$$\underline{P}_{10} = \{\Delta^5 P_1(1) \quad , \quad \Delta^5 P_5(1)\}$$

Exemplo 4: - Vamos, agora, considerar Λ' a álgebra dada pelo quiver E_6 com a orientação

Λ' também é hereditária e de tipo finito com grafo de Auslander e Reiten dada na figura 3 abaixo

Figura 3

A sua partição pré-projetiva será:

$$P_0 = \{ P_1(1), P_2(2), P_3(3), P_4(4), P_5(5), P_6(4) \}$$

$$P_1 = \{ \Delta P_1(1), \Delta P_2(2), \Delta P_3(7), \Delta P_4(8) \}$$

$$P_2 = \{ \Delta P_5(3), \Delta P_6(3), \Delta^2 P_1(1), \Delta^2 P_2(6), \Delta^2 P_3(10) \}$$

$$P_3 = \{ \Delta^2 P_4(5), \Delta^2 P_6(7), \Delta^3 P_1(5), \Delta^3 P_2(9) \}$$

$$P_4 = \{ \Delta^2 P_5(2), \Delta^3 P_3(11), \Delta^4 P_1(4) \}$$

$$P_5 = \{ \Delta^3 P_4(8), \Delta^3 P_6(4), \Delta^4 P_2(6) \}$$

$$P_6 = \{ \Delta^3 P_5(6), \Delta^4 P_3(7), \Delta^5 P_1(2) \}$$

$$P_7 = \{ \Delta^4 P_4(5), \Delta^4 P_6(3), \Delta^5 P_2(3) \}$$

$$P_8 = \{ \Delta^5 P_3(4), \Delta^6 P_1(1) \}$$

$$P_9 = \{ \Delta^5 P_6(1), \Delta^6 P_2(2) \}$$

$$P_{10} = \{ \Delta^7 P_1(1) \}$$

REFERENCIAS

- [AL] J.L. Alperin, A preprojective module which is not strongly preprojective, Comm. Algebra 9,2 (1981) 131-136.
- [AR] M. Auslander & I. Reiten, Stable equivalence of Artin algebras, Springer Lec. N. Math 353 (1972) 8-71.
- [AR1] _____, Representation theory of Artin algebras III. Almost split sequences, Comm. Algebra 3 (1975) 239-294.
- [AR2] _____, Representation theory of Artin algebras IV. Invariants given by almost split sequences, Comm. Algebra 5(1977) 443-518.
- [AR3] _____, Representation theory of Artin algebras VI. A functorial approach to almost split sequences, Comm. Algebra 6 (1978) 257-300.
- [AS1] M. Auslander & S. Smalø, Preprojective modules: An introduction and some application, in "Representation Theory II", Springer Lec. N. Math 832 (1980) 48-73.
- [AS2] _____, Preprojective modules over Artin algebras, J. Algebra 66 (1980) 61-122.

- [CLS] C. Cibils, F. Larrión & L. Salmerón, Métodos diagramáticos en teoría de representaciones, Monografías del Instituto de Matemáticas 11 (1982) UCLA México.
- [DR] V. Dlab & C.M. Ringel, The representation of tame hereditary Artin algebra, in "Representation Theory of Algebras", Lec. N. Pure and Applied Math., 37, Dekker (1978).
- [Ga] P. Gabriel, Indecomposable Representation II, Symposia Mathematica, vol. XI, 88-104 (1973).
- [HS] H. Harada & Y. Sai, On categories of indecomposable modules, I. Osaka J. Math. 7 (1970) 323-344.
- [Pl] M. I. Platzeck, Representation theory of algebras stably equivalent to an hereditary Artin algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 238 (1978) 89-128.
- [Rh] B. Rohnes, Preprojective partitions for trivial extensions of hereditary algebras, Comm. Algebra 11,9 (1983) 949-972.
- [Ri] C. Riedtmann, Preprojective partitions for selfinjective algebras, J. Algebra 76 (1982) 532-539.

- [Ro] A. V. Roiter, Unboundness of the dimension of the indecomposable representation of an algebra which has infinitely many indecomposable representations, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 32 (1968) 1275-1282.
- [Td] G. Todorov, A note on Preprojective partitions over hereditary Artin algebras, Proc. Am. Math. Soc. 85,4 (1982) 523-528.
- [Za] D. Zacharia, The preprojective partition for hereditary Artin algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 274, 1 (1982) 327-343.

Durante a elaboração desta dissertação o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq e da FAPESP (processo 82/1906-3)