SUPERFÍCIES MÍNIMAS NÃO-ORIENTÁVEIS NO $\mathbb{R}^n$

Maria Elisa Galvão Gomes de Oliveira

TESE APRESENTADA

ao

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

em

MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. CHI CHENG CHEN

São Paulo, junho de 1984

AGRADECIMENTOS

Ao prof Dr. *Chi Cheng Chen* por sua orientação dedicada e segura

Ao Prof. Dr. *Plínio A.Q. Simões* que nos iniciou no estudo das Variedades Mínimas

Ao Prof. Dr. *Carlos Edgard Harle* pelo incentivo e interesse com que tem acompanhado meu trabalho

Aos colegas do grupo de Geometria Diferencial, em especial às Professoras *Célia Contín Gões* e *Rosa Maria dos Santos Barreiro* por sua disposição em me ouvir e discutir problemas.

ÍNDICE

pág.

ABSTRACT

Introdução	i
CAPÍTULO 1 - SUPERFÍCIES MÍNIMAS ORIENTÁVEIS EM $\mathbb{R}^n$	1
1.1. Preliminares	1
1.2. A Aplicação de Gauss Generalizada e as hiperquádricas do espaço projetivo complexo	4
1.3. A Representação de Weierstrass	8
1.4. A curvatura total das superfícies mínimas completas	12
CAPÍTULO 2 - SUPERFÍCIES MÍNIMAS NÃO-ORIENTÁVEIS NO $\mathbb{R}^n$. .	18
2.1. O duplo recobrimento orientável	19
2.2. Classificação das Superfícies compactas	20
2.3. O Teorema de Representação para Superfícies Mínimas não-orientáveis	24
2.4. Superfícies Mínimas não-orientáveis completas	33
CAPÍTULO 3 - SUPERFÍCIES MÍNIMAS, NÃO-ORIENTÁVEIS, COMPLETAS COM CURVATURA TOTAL FINITA	43
3.1. Superfícies Mínimas não-orientáveis com curvatura total -4π	44
3.2. Superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$ com curva- tura total finita e gênero um	47
3.3. Imersões Mínimas do plano projetivo menos um ponto em $\mathbb{R}^4$	57
3.4. Superfícies mínimas não-orientáveis com gênero um, curvatura total finita em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$	62
3.5. Superfícies Mínimas não-orientáveis de gênero dois .	75
BIBLIOGRAFIA	80

ABSTRACT

In this work we made an investigation about non-orientable minimal surfaces in euclidean spaces, due to the recent discovery of a complete regular non-orientable minimal surface in R^3 by W. Meeks in 1981.

A general theory has been set up through the orientable double coverings and the orientable minimal surface theory. A representation theorem has been proposed. The Chern-Osserman's theorem, the Gackstatter's formula, and the Hoffman-Osserman's representation theorem for genus zero surfaces have been extended and developed to non-orientable cases.

Through this general set up, quite a few examples of complete regular non-orientable minimal surfaces have been constructed and some existence conditions have been proved. Further, genus one complete regular non-orientable minimal surfaces with higher total Gauss curvatures have also been studied in details.

Superfície de Henneberg

Fig. 1

Spivak, [18], pág. 407

Introdução

Dentre as superfícies mínimas clássicas, a superfície de Henneberg (1875,[8],[9]) destaca-se como a única superfície mínima completa dupla, ou seja, que recobre duplamente uma superfície não-orientável completa em $\mathbb{R}^3$. Foi obtida a partir do estudo da Representação de Weierstrass clássica para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ ([4], §226) e tem pontos singulares isolados. Em [18] temos uma descrição analítica e geométrica detalhada da superfície de Henneberg (fig. 1).

Desde então, a existência de superfícies mínimas não-orientáveis, regulares, completas, em $\mathbb{R}^3$, tem se colocado como um problema de interesse na teoria das superfícies mínimas, sendo um dos problemas apresentados por Nitsche, em 1965, em "On new results in the theory of minimal surfaces". ([15]).

Em 1981, Meeks ([14]) mostrou que existe uma única superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, não-orientável, regular, completa com curvatura total -6π .

O objetivo deste trabalho é estudar, em geral, as superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^n$ e, em especial, as superfícies mínimas não-orientáveis, completas, com curvatura total finita, discutindo as possibilidades para a curvatura total, as relações

entre a curvatura total, a topologia da superfície e a dimensão do espaço ambiente; muitos novos exemplos podem ser e foram construídos.

Inicialmente, apresentamos um resumo dos resultados da teoria das superfícies mínimas orientáveis de $\mathbb{R}^n$ que consideramos importantes para o desenvolvimento do trabalho. Enunciamos os teoremas fundamentais da teoria e os resultados mais recentes de Chern e Osserman ([2]), Osserman ([17]), Gackstatter ([6]) e Hoffman e Osserman ([10]).

No segundo capítulo estabelecemos uma teoria geral para as superfícies mínimas não-orientáveis através das superfícies mínimas duplas orientáveis.

Temos, em primeiro lugar, um teorema de representação para superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^n$, ou seja, estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que uma superfície orientável em $\mathbb{R}^n$ seja a superfície dupla associada a uma superfície mínima não-orientável de $\mathbb{R}^n$. A caracterização das superfícies duplas em termos de propriedades das funções da representação de Weierstrass clássica em $\mathbb{R}^3$ (Meeks, [14]), da representação das superfícies em $\mathbb{R}^4$ de Osserman ([17]) e da representação de Weierstrass generalizada de Hoffman e Osserman, será consequência imediata do teorema de representação das superfícies duplas. Podemos estudar ainda as curvas holomorfas e as superfícies

cies associadas.

O estudo do comportamento global da aplicação de Gauss generalizada da superfície dupla associada a uma superfície mínima não-orientável S , completa, dada por:

$$X: M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

M^2 : variedade bi-dimensional não-orientável, nos permite mostrar que a desigualdade de Chern-Osserman para a curvatura total $C(S)$ se mantém, isto é,

$$C(S) \leq 2\pi(\chi(M)-r), \quad C(S) = -2\pi m,$$

com $\chi(M)$: característica de Euler de M , r : número de fins de M . Temos ainda, como consequência do teorema de Gackstatter, a limitação para a dimensão de uma superfície mínima S , completa, não orientável, de gênero γ , curvatura total $-2\pi m$ e r fins:

$$\dim S \leq 2m - 2\gamma - r + 3$$

Para estudar as superfícies mínimas, não orientáveis, completas com curvatura total finita e gênero um a caracterização das superfícies duplas completas de gênero zero e curvatura total finita adaptada do teorema de Hoffman e Osserman, apresentada no final do segundo capítulo será, tecnicamente, muito importante sob o ponto de vista da discussão da existência e construção de exemplos.

O terceiro capítulo será dedicado ao estudo das superfícies mínimas não-orientáveis, completas, com curvatura total finita e gênero um ou dois, visando estabelecer condições de existência e exibir novos exemplos.

Podemos salientar os resultados:

- existência e unicidade a menos de semelhanças, de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$ não-orientáveis regulares completas, com curvatura total -4π ; tais superfícies estão sempre em $\mathbb{R}^4$.
- a curvatura total das superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$, com gênero um é da forma $c = -2\pi(2\ell+1)$, $\ell \geq 1$.
- existência de superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$, regulares, completas, com gênero um, um fim e curvatura total $-2\pi m$, m ímpar, $m \geq 3$, como generalização natural do exemplo de Meeks ([14]).
- existência de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$, não-orientáveis, regulares, completas, com curvatura total $-2\pi m$, m inteiro maior ou igual a dois, gênero um e um fim.
- existência de superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ não-orientável, completa, com gênero um, dois fins e curvatura total -10π ; não-existência de superfícies em $\mathbb{R}^3$ nessas condições e curvatura total -6π ; em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ verificamos que existem tais superfícies.

- estudo de superfícies mínimas não-orientáveis completas, com gênero um, um ou dois fins e curvatura -6π , em $\mathbb{R}^5$, ou -10π , em $\mathbb{R}^9$; verificação que a estimativa para a dimensão de S é ótima.
- condições de existência para superfícies mínimas não-orientáveis completas, com gênero dois e curvatura total finita.

oOo

CAPÍTULO 1

SUPERFÍCIES MÍNIMAS ORIENTÁVEIS EM $\mathbb{R}^n$

Inicialmente apresentaremos um resumo das técnicas básicas e principais resultados da teoria das superfícies mínimas orientáveis que poderão ser encontrados em [1] ou [16].

Ressaltamos que os resultados fundamentais da teoria das superfícies mínimas orientáveis, importantes sob o ponto de vista do desenvolvimento deste trabalho, estão contidos nos artigos de Chern-Osserman [2], F. Gackstatter [6] e Hoffman-Osserman [10].

1.1. Preliminares

Consideramos superfícies S do $\mathbb{R}^n$ definidas por aplicações

$$X: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

M : variedade diferenciável bi-dimensional; S será uma superfície regular se, localmente, S é uma superfície parametrizada regular, de forma que temos naturalmente definidos o plano tangente, o vetor curvatura média, a curvatura gaussiana, etc..

As propriedades globais de S são as propriedades globais de M , ou seja, S é compacta, conexa, simplesmente conexa,

orientável, se M o for. Uma orientação de S é uma orientação de M .

Temos, como resultados básicos:

Proposição 1.1.1: - Dada uma superfície regular S do $\mathbb{R}^n$, se $X = X(\xi, \eta)$ é uma parametrização local de S , $\zeta = \xi + i\eta$, $X = (x_1, \dots, x_n)$ e

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}, \quad k = 1, \dots, n$$

então:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \phi_k^2 \equiv E - G + 2iF, \quad E = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\rangle, \quad F = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\rangle,$$

$$G = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \eta}, \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\rangle, \quad \langle, \rangle \quad \text{produto interno em } \mathbb{R}^n$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n |\phi_k|^2 = E + G$$

$$(3) \quad \phi_k \text{ é analítica se e somente se } x_k \text{ é harmônica}$$

$$(4) \quad (\xi, \eta) \text{ são parâmetros isotérmicos se e somente se}$$

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2 \equiv 0 \quad (\text{ou seja, } E = G = \lambda^2, \quad F \equiv 0)$$

Se (ξ, η) são parâmetros isotérmicos temos ainda:

$$(5) \quad S \text{ é regular se e somente se } \sum_{k=1}^n |\phi_k|^2 \text{ nunca se anula; a métrica induzida é dada por}$$

$$ds^2 = \lambda^2(d\xi^2 + d\eta^2), \quad \lambda^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right|^2$$

$$(6) \quad \Delta X = 2\lambda^2 \vec{H}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n),$$

$\vec{H}$: vetor curvatura média de S

(7) A curvatura gaussiana de S é dada por:

$$K = - \frac{\Delta \log \lambda^2}{2\lambda^2}$$

Definição 1.1.2: - Uma superfície regular do $\mathbb{R}^n$ é **mínima** se o vetor curvatura média $\vec{H}$ é identicamente nulo.

Corolário 1.1.3: - S é uma superfície mínima se e somente se as funções coordenadas x_k , $1 \leq k \leq n$ são funções harmônicas dos parâmetros isotérmicos (isto é, $\Delta X = \vec{0}$).

Observamos que, do corolário, segue que uma superfície mínima regular S do $\mathbb{R}^n$ não pode ser compacta.

Temos finalmente:

Teorema 1.1.4: - Seja S uma superfície mínima, regular, conexa, orientável do $\mathbb{R}^n$ dada por $X: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Os parâmetros isotérmicos formam uma estrutura conforme para M e existem n 1-formas diferenciáveis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ globalmente definidas em M tais que

(1) localmente, $\alpha_k = \Phi_k(\zeta)d\zeta$, $\zeta = \xi + i\eta$ parâmetros iso-

$$\text{têrmicos, } \Phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}$$

(2) α_k é analítica para cada k

$$(3) x_k(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha_k, \quad p_0, p \in M.$$

Tais formas α_k são chamadas **formas de Weierstrass**.

1.2. - A Aplicação de Gauss Generalizada e as hiperquádricas do espaço projetivo complexo.

Podemos generalizar naturalmente a aplicação de Gauss clássica para superfícies em $\mathbb{R}^n$.

Denotamos $G_{2,n}$ a grassmanniana dos planos orientados em $\mathbb{R}^n$.

Dada uma superfície regular, orientada S , definida por $X: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, temos:

Definição 1.2.1: - A aplicação

$$G: M \longrightarrow G_{2,n}$$

definida por $G(p) = T_p S$ é chamada **aplicação de Gauss generalizada** de S .

Dada uma superfície S do $\mathbb{R}^3$ existe uma correspondência biunívoca entre os vetores normais unitários e os planos tangen-

tes a S , que relaciona as aplicações clássica e generalizada.

No caso em que S é uma superfície mínima do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ poderemos dar uma caracterização analítica para a aplicação de Gauss generalizada identificando a grassmanniana $G_{2,n}$ à quádriga Q_{n-2} do espaço projetivo complexo. Para definir Q_{n-2} lembremos:

Definição 1.2.2: - Denotamos $\mathbb{CP}^{n-1}$ o espaço quociente de $\mathbb{C}^n - \{0\}$ pela relação de equivalência $\sim$ dada por: $z \sim w$ se e somente se existe $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ tal que $z = cw$.

$\mathbb{CP}^{n-1}$ tem uma estrutura de variedade analítica e, com essa estrutura, é chamado **espaço projetivo complexo (n-1)-dimensional**.

Temos a aplicação quociente

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbb{C}^n - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1} \\ z &\longrightarrow [z] \end{aligned}$$

com $[z] = [(z_1, \dots, z_n)]$. Chamamos $z_1, \dots, z_n$ as **coordenadas homogêneas** de $[z]$.

Se $z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ chamemos V_z o subespaço do espaço tangente a $\mathbb{C}^n$ em z , $T_z(\mathbb{C}^n)$, núcleo de $\Pi_{*z}: T_z(\mathbb{C}^n) \longrightarrow T_{[z]}(\mathbb{CP}^{n-1})$.

Podemos mostrar:

Lema 1.2.3: - Com as notações anteriores, $T_z(\mathbb{C}^n) = H_z \oplus V_z$ com $H_z = \{\vec{v} \in T_z \mathbb{C}^n / (z, v) = 0\}$, $(\ , \)$ produto hermitiano em $\mathbb{C}^n$.

Além disso, π_* é um isomorfismo linear entre H_z e $T_{[z]}(\mathbb{CP}^{n-1})$.

Com o lema, podemos introduzir naturalmente uma estrutura hermitiana em $\mathbb{CP}^{n-1}$ exigindo que a restrição de $\pi_{*z} \tilde{a} H_z$, $|z|=1$, mantenha o produto hermitiano induzido sobre H_z pelo produto hermitiano $(\cdot, \cdot)$ de $T_z(\mathbb{C}^n)$.

Temos, portanto,

Definição 1.2.4: - A métrica riemanniana de $\mathbb{CP}^{n-1}$ induzida pelo produto hermitiano

$$\langle \pi_{*z}(\vec{v}), \pi_{*z}(\vec{w}) \rangle = 2(\vec{v}, \vec{w}) \quad , \quad z \in \mathbb{C}^n - \{0\},$$

$|z|=1$, $\vec{v}, \vec{w} \in H$ chama-se métrica de Fubini Study de $\mathbb{CP}^{n-1}$.

Podemos enunciar ainda:

Proposição 1.2.5: - Em termos de coordenadas homogêneas, temos a métrica de Fubini-Study dada por:

$$ds^2 = \frac{2|Z \wedge dZ|^2}{|Z|^4} = \frac{2}{|Z|^4} \sum_{i < j} |z_i dz_j - z_j dz_i|^2$$

Definição 1.2.6: - Chamamos a **hiperquádrica do espaço projetivo complexo** $\mathbb{CP}^{n-1}$ ao conjunto

$$Q_{n-2} = \{[z] \in \mathbb{CP}^{n-1} / \sum_{k=1}^n z_k^2 = 0, z = (z_1, \dots, z_n)\}$$

As hiperquádricas $Q_1 \subset \mathbb{CP}^2$ e $Q_2 \subset \mathbb{CP}^3$ tem as propriedades dadas por:

Proposição 1.2.7: - Existe uma correspondência biholomorfa entre a quádrica Q_1 e a esfera de Riemann, que é uma isometria se considerarmos sobre Q_1 a restrição da métrica de Fubini-Study de $\mathbb{CP}^2$ e sobre a esfera a métrica usual.

Proposição 1.2.8: - Existe uma correspondência biholomorfa entre a quádrica Q_2 e $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ que é uma isometria se temos sobre Q_2 a restrição da métrica de Fubini-Study de $\mathbb{CP}^3$ e sobre $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ a métrica produto das métricas de Fubini-Study.

A identificação entre a hiperquádrica Q_{n-2} e a Grassmanniana $G_{2,n}$ será importante no estudo das superfícies mínimas. Temos:

Proposição 1.2.9: - A aplicação $\psi: G_{2,n} \longrightarrow Q_{n-2}$ que associa a cada plano Π a classe $[(v_1 + i\omega_1, \dots, v_n + i\omega_n)]$ com $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ base ortogonal positiva de Π , $\|\vec{v}\| = \|\vec{\omega}\|$ é biunívoca.

Com essa identificação, podemos estudar a aplicação de Gauss generalizada como uma aplicação $G: M \longrightarrow Q_{n-2} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$, e consequentemente, temos a caracterização analítica ([10], teo.1.1), que segue do fato de, localmente, em coordenadas homogêneas,

$$G = [\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n], \quad \phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial n_k}{\partial \eta}$$

Teorema 1.2.10: - Seja $X: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície regular S . Então S é mínima se e somente se $G: M \longrightarrow Q_{n-2}$ é anti-holomorfa.

1.3. - A Representação de Weierstrass:

Do teorema 1.1.4 temos a representação de uma superfície mínima por suas formas de Weierstrass, $X = \operatorname{Re} \int \Phi d\zeta$.

Tal representação pode ser descrita mais concretamente dependendo da dimensão do espaço ambiente.

A representação de Weierstrass para as superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ foi descoberta por Enneper e Weierstrass e recentemente generalizada por Hoffmann e Osserman. Exemplos e propriedades geométricas de superfícies mínimas estão relacionados com as funções da Representação de Weierstrass e suas propriedades analíticas.

Para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, temos:

Teorema 1.3.1: - Seja $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável mínima, regular, $\zeta = \xi + i\eta$ parâmetros isotérmicos locais para M .

Temos então, em M , 1-formas holomorfas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ globalmente definidas tais que:

$$(a) \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \equiv 0$$

$$(b) \alpha_k = \Phi_k(\zeta) d\zeta, \quad \Phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Além disso, se S não está contida no plano (x_1, x_2) , ou seja, se $\alpha_1 \neq i\alpha_2$, chamando $f d\zeta = \alpha_1 - i\alpha_2$, $g = \frac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$, então:

(c) f é analítica, g é meromorfa em M ,

$$\Phi_1 = \frac{f}{2}(1-g^2), \quad \Phi_2 = \frac{if}{2}(1+g^2), \quad \Phi_3 = fg$$

(d) $ds^2 = \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2} \right]^2 |d\zeta|^2$ e a regularidade de S é equivalente a:

(1.2) $p \in M$ é um polo de ordem m de g se e somente se $p \in M$ for um zero de f de ordem $2m$

(e) Se $\vec{N}$ é o campo normal unitário de S ,

$$\vec{N} = \left(\frac{2 \operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right)$$

isto é, $N = \sigma^{-1} \circ g$, $\sigma: S^2(1) \rightarrow \mathbb{C}$ a projeção estereográfica da esfera $S^2(1)$ pelo "polo norte" sobre o plano $x_1 + ix_2$ pelo equador.

Reciprocamente, se $f d\zeta$ e g são definidas sobre uma superfície de Riemann M^2 satisfazendo (c), (d) e as 1-formas analíticas $\alpha_1 = \frac{f}{2}(1-g^2)d\zeta$, $\alpha_2 = \frac{if}{2}(1+g^2)d\zeta$, $\alpha_3 = fgd\zeta$ não tem períodos reais, então $X: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$x_k(P) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^P \alpha_k, \quad k = 1, 2, 3, \text{ define uma superfície mínima regular}$$

do $\mathbb{R}^3$.

Denominaremos **Representação de Weierstrass para superfícies mínimas** a representação:

$$(1.3) \quad X(P) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^P \frac{f}{2} ((1-g^2), i(1+g^2), 2g) d\zeta, \quad p_0, P \in M$$

Hoffmann e Osserman [10] generalizaram a representação de Weierstrass estudando a geometria das hiperquádricas Q_{n-2} .

Provaram o resultado:

Teorema 1.3.2: - Qualquer superfície mínima regular do $\mathbb{R}^n$ admite, a menos de rotações do $\mathbb{R}^n$, a seguinte representação:

$$(1.4) \quad X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \left(1 - \sum_{k=1}^{n-2} \zeta_k^2, i \left(1 + \sum_{k=1}^{n-2} \zeta_k^2 \right), 2\zeta_1, \dots, 2\zeta_{n-2} \right) \omega, \quad p_0, p \in M$$

onde $\omega = f dz$ é uma 1-forma analítica, $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}$ funções meromorfas que satisfazem a condição $v_p = \mu_p$, com v_p a ordem máxima dos polos de $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}$ e $\sum_{k=1}^{n-2} \zeta_k^2$ e μ_p a ordem de zero de f em p .

Reciprocamente, se $\omega = f dz$ é uma 1-forma holomorfa e $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}$ funções meromorfas nas condições acima, globalmente definidas em uma superfície de Riemann M , tais que as integrais (1.4) estejam bem definidas, então a aplicação $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma superfície mínima regular do $\mathbb{R}^n$.

A representação (1.4) é chamada **Representação de Weierstrass generalizada** para superfícies mínimas; para $n=3$ a representação generalizada coincide com a Representação de Weierstrass (1.3).

Para $n=4$ temos uma representação alternativa obtida a partir da equivalência biholomorfa e isométrica entre Q_2 e $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ (Proposição 1.2.8) estabelecida por Hoffman e Osserman. Neste caso, temos:

Teorema 1.3.3: - Uma superfície mínima em $\mathbb{R}^4$ admite, a menos de rotações, a representação:

$$(1.5) \quad X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p (1+g_1g_2, i(1-g_1g_2), g_1 - g_2, -i(g_1+g_2)w, p_0, p \in M,$$

onde $w=f dz$ é uma 1-forma analítica, g_1, g_2 são funções meromorfas tais que para todo ponto p , $\mu_p = \nu_p$, sendo μ_p : ordem de zero de f em p , ν_p a máxima ordem de polo de $g_1, g_2, g_1 \cdot g_2$ em p .

Reciprocamente, se $\omega=f dz$ é uma 1-forma holomorfa, g_1, g_2 funções meromorfas nas condições acima, definidas numa superfície de Riemann M , tais que (1.5) está bem definida, então $X: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por (1.5) é uma superfície mínima regular do $\mathbb{R}^4$.

Observamos que as funções g_1, g_2 do teorema 1.3.3 e ζ_1, ζ_2 dadas pelo teorema 1.3.2 são tais que $g_1 = \zeta_1 + i\zeta_2$, $g_2 = -\zeta_1 + i\zeta_2$.

Identificando $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ isometricamente a $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ com a métrica $ds^2 = \frac{|d\omega_1|^2}{2(1+|\omega_1|^2)^2} + \frac{|d\omega_2|^2}{2(1+|\omega_2|^2)^2}$, a equivalência bi-holomorfa e isométrica entre Q_2 e $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ dada na proposição 1.2.8 pode ser estudada como uma equivalência bi-holomorfa e isométrica $F: Q_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ (ou $S^2(1/\sqrt{2}) \times S^2(1/\sqrt{2})$), dada por:

$$(1.6) \quad F([z_1, z_2, z_3, z_4]) = \left(\frac{z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2}, \frac{-z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2} \right)$$

$$F^{-1}(\omega_1, \omega_2) = (1 + \omega_1\omega_2, i(1 - \omega_1\omega_2), \omega_1 - \omega_2, -i(\omega_1 + \omega_2))$$

Com essa identificação as funções g_1, g_2 são obtidas pela composição:

$$(1.7) \quad g_j = F_j \circ \bar{G}, \quad j=1,2$$

$F = (F_1, F_2)$, G : aplicação de Gauss generalizada.

1.4. - A curvatura total das superfícies mínimas completas.

Ao longo de todo este parágrafo, consideraremos superfícies $X: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sempre conexas e orientáveis.

Daremos um breve resumo dos resultados de Chern-Osserman e Gackstatter para superfícies mínimas completas com curvatura total finita.

Definição 1.4.1: - Chamamos **curvatura total de uma superfície mínima** S dada por $X: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o valor $C(S)$,

$$(1.8) \quad C(S) = \int_M K dA$$

Observamos que se S é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$ então $C(S) \leq 0$; diremos que S tem **curvatura total finita** se $C(S) > -\infty$.

A curvatura total de uma superfície mínima regular se relaciona com a área da imagem da aplicação de Gauss generalizada. Temos o resultado:

Teorema 1.4.2: - A curvatura total de um subconjunto D de uma superfície mínima S é o negativo da área de imagem $\tilde{D}$ de D pela

aplicação de Gauss generalizada, $\tilde{D} = G(D) \subset Q_{n-2}$, sendo a área em Q_{n-2} relativa à métrica de Fubini-Study de $\mathbb{CP}^{n-1}$.

Podemos passar às propriedades globais determinadas pela curvatura total.

Para enunciar os próximos resultados, temos:

Definição 1.4.3: - Uma superfície S do $\mathbb{R}^n$ é **completa** se o comprimento de qualquer curva diferenciável de S que não está contida em nenhum subconjunto compacto de S tem comprimento infinito.

Teorema 1.4.4: (Chern-Osserman) - Se a curvatura total de uma superfície mínima completa S for finita, então:

- (i) M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\bar{M}_\gamma$, de gênero γ , exceto um número finito de pontos $\{p_1, \dots, p_r\}$
- (ii) as 1-formas $\alpha_k = \phi_k(\zeta) d\zeta$ são analíticas ou têm um polo em cada ponto $p_j \in \bar{M} - M$
- (iii) a aplicação de Gauss $\bar{G} = [(\phi_1, \dots, \phi_n)]$ tem um polo em p_j de ordem $m_j \geq 2$, com m_j : máxima ordem de polo de $\phi_1, \dots, \phi_n$ em p_j .
- (iv) a aplicação de Gauss tem extensão analítica a $\bar{M}$ e sua imagem, contadas as multiplicidades, tem área $-C(S)$.

Proposição 1.4.5: - Seja S uma superfície mínima completa do $\mathbb{R}^n$. Então $C(S) = -2\pi m$ para algum $m=0,1,\dots$ e

(1.9) $C(S) \leq 2\pi(\chi-r)$ (Desigualdade de Chern-Osserman), com χ : característica de Euler de M e r : número de componentes da fronteira de M .

Se $C(S) \neq -\infty$ então:

(i) quando $n=3$, m é par, $\frac{m}{2} = \text{grau } g$, g : função da representação (1.3)

(ii) quando $n=4$, $m=n_1+n_2$, $n_j = \text{grau } g_j$, $j=1,2$, g_j : funções de (1.5)

(iii) em geral, com as notações do teorema anterior,

$$m - \sum_{j=1}^r m_j = 2\gamma - 2$$

(iv) se $n=3$, então $C(S) = 2\pi(\chi-r)$ se e somente se todos os fins têm polo de ordem 2, isto é, os fins são mergulhados.

Observamos que (i) e (ii) do teorema acima decorrem de $[\phi]: \bar{M} \rightarrow Q_1$ ou Q_2 ser um recobrimento de ramificações e das isometrias entre Q_1 e S^2 , Q_2 e $S^2(1/\sqrt{2}) \times S^2(1/\sqrt{2})$, respectivamente; (iv) se encontra em [11].

Ainda em relação às superfícies completas com curvatura total finita temos o resultado de Gackstatter sobre a dimensão de S .

Definição 1.4.6: - A **dimensão** de uma superfície S é a dimensão do menor subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ que contém $X(M)$, S será **reversa** em $\mathbb{R}^n$ se $\dim S = n$.

Gackstatter ([6]) mostrou que uma superfície mínima completa com curvatura total finita tem sua dimensão determinada pelas partes principais da Aplicação de Gauss generalizada nos pontos $p_1, \dots, p_r$, ou seja, nos fins de M .

Mais explicitamente, se, numa vizinhança de cada ponto $p_j \in M-M$,

$$\phi_{p_j}(\zeta) = \frac{A_{m_j}^j}{\zeta^{m_j}} + \dots + \frac{A_1^j}{\zeta} + \dots$$

com $m_j \geq 2$, $A_{v_j}^j \in \mathbb{C}^n$, $v_j = 1, \dots, m_j$, $1 \leq j \leq r$, $A_1^j \in \mathbb{R}^n$ e escrevendo $A_{v_j}^j = B_{v_j}^j + iC_{v_j}^j$, então a dimensão do subespaço gerado por

$E = \{B_{v_j}^j, C_{v_j}^j, A_1^j, 2 \leq v_j \leq m_j, j=1, \dots, r\}$ é no máximo

$$(1.11) \quad N = (r-1) + 2 \sum_{j=1}^r (m_j - 1),$$

lembrando que $\sum_j A_1^j = 0$

Gackstatter provou que

$$(1.12) \quad \dim S = \dim E \leq N$$

Teorema 1.4.7([6]): - Seja S uma superfície mínima completa, reversa em $\mathbb{R}^n$ com curvatura total finita $C(S) = -2\pi m$. Então

$$(1.13) \quad 2m \geq 4\gamma + r + n - 3$$

Corolário 1.4.8: - Nas condições do teorema,

$$(1.14) \quad 2m \geq n - 2$$

Do ponto de vista técnico de construção de exemplos de superfícies mínimas de gênero zero, o teorema de representação dado por Hoffman e Osserman ([10], cap. 5) será muito importante:

Teorema 1.4.9: - Seja M o plano complexo menos $r-1$ pontos $\{z_0, \dots, z_{r-2}\}$ e $X: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi(\zeta) d\zeta, \quad p_0, p \in M$$

Se o vetor complexo Φ é da forma

$$\Phi(\zeta) = F(\zeta) (p_1(\zeta), \dots, p_n(\zeta))$$

com $F(\zeta) = 1 / \prod_{k=0}^{r-2} (\zeta - z_k)^{v_k}$, p_j satisfazendo

- (i) cada p_j é um polinômio
- (ii) máximo grau dos p_j é m
- (iii) p_j não tem fator comum, $1 \leq j \leq n$
- (iv) $\sum_{j=1}^n p_j^2 \equiv 0$

v_k tais que $v_k \geq 2$, $\sum_{k=0}^{r-2} v_k \leq m+1$ e $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = 0$, para

toda curva fechada $\gamma \subset M$, então $X: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ define uma superfície mínima regular completa do $\mathbb{R}^n$ com gênero zero, conectivida-

de k e curvatura total $-2\pi m$.

Reciprocamente, dada uma superfície mínima regular completa S em $\mathbb{R}^n$ com gênero zero, conectividade r e curvatura total $-2\pi m$, existem pontos $\{z_0, \dots, z_{r-2}\}$ e funções $F, p_1, \dots, p_n$ satisfazendo às condições acima tais que $X = \operatorname{Re} \int \Phi$.

o0o

CAPÍTULO 2

SUPERFÍCIES MÍNIMAS NÃO-ORIENTÁVEIS DO $\mathbb{R}^n$

O estudo das superfícies mínimas não-orientáveis que desenvolveremos basear-se-á na caracterização das superfícies duplas orientadas associadas.

Daremos um teorema de representação para superfícies duplas em $\mathbb{R}^n$ que generaliza o resultado de Meeks para superfícies não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$ e tem consequências importantes para a caracterização das superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^n$.

Analisando a aplicação de Gauss generalizada da superfície dupla associada a uma superfície mínima não-orientável podemos verificar que a desigualdade de Chern-Osserman se mantém para superfícies não-orientáveis. Teremos também um resultado sobre a limitação da dimensão das superfícies mínimas não-orientáveis ou seja, uma versão do teorema de Gackstatter para superfícies mínimas não-orientáveis.

A estimativa da dimensão trará, como consequência, uma limitação superior para a curvatura total das superfícies mínimas não-orientáveis completas.

Finalmente, teremos a caracterização das superfícies mínimas não-orientáveis regulares, completas, de gênero um, r fins e curvatura total finita, obtida como a versão não-orientável do teorema de Hoffman e Osserman (Teorema 1.4.9).

2.1. O duplo recobrimento orientável

Os resultados básicos para o estudo das superfícies não-orientáveis que enunciamos a seguir encontram-se em [12].

Definição 2.1.1: - Um **duplo recobrimento orientável** é uma aplicação $\Pi: \tilde{M} \longrightarrow M$ satisfazendo às condições:

- (i) M é uma variedade conexa, $\tilde{M}$ variedade orientada e Π um difeomorfismo local.
- (ii) Para cada $p \in M$, $\Pi^{-1}(p)$ contém exatamente dois pontos.
- (iii) Se $\Pi(p_1) = \Pi(p_2)$ com $p_1 \neq p_2$, o isomorfismo linear $\Pi_{*p_2}^{-1} \circ \Pi_{*p_1}: T_{p_1}\tilde{M} \longrightarrow T_{p_2}\tilde{M}$ é negativo, isto é, não preserva a orientação.

Usualmente dizemos que $\tilde{M}$ é um duplo recobrimento de M .

Temos as propriedades:

Proposição 2.1.2: - Seja $\Pi: \tilde{M} \longrightarrow M$ um recobrimento duplo orientável; então $\tilde{M}$ é conexa se e somente se M é não-orientável.

Proposição 2.1.3: - Se $\Pi_1: \tilde{M}_1 \longrightarrow M$ e $\Pi_2: \tilde{M}_2 \longrightarrow M$ são recobrimentos duplos orientáveis da mesma variedade M , existe um difeomorfismo positivo $f: \tilde{M}_1 \longrightarrow \tilde{M}_2$ tal que $\Pi_2 \circ f = \Pi_1$.

Proposição 2.1.4: - Seja $\Pi: \tilde{M} \longrightarrow M$ um duplo recobrimento orientável de classe C^k . Existe uma única involução $\tilde{I}: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ (i.e., $\tilde{I} \circ \tilde{I} = \text{id}$, $\tilde{I}$ de classe C^k , negativa, sem pontos fixos, tal que $\Pi \circ \tilde{I} = \Pi$).

Além disso, existe um único difeomorfismo $f: \tilde{M}/\tilde{I} \longrightarrow M$ de classe C^k , tal que $\Pi = f \circ \tau$, $\tau: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}/\tilde{I}$ a aplicação quociente.

Finalmente, temos:

Proposição 2.1.5: - Toda variedade conexa de classe C^k admite um duplo recobrimento orientável de classe C^k .

Demonstração: - Podemos introduzir uma estrutura de variedade C^k sobre $\tilde{M} = \{(x, 0_x), x \in M, 0_x \text{ orientação sobre } T_x M\}$ de forma que a aplicação $\Pi: \tilde{M} \longrightarrow M$, $\Pi(x, 0_x) = x$ seja um duplo recobrimento orientado de M , além disso, $\Pi^{-1}(x) = \{(x, 0_x), (x, -0_x)\}$ para todo x de M .

2.2. Classificação das Superfícies Compactas

Uma superfície mínima completa, com curvatura total finita é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta, de gênero γ , exceto um número finito de pontos. Temos a classificação das superfícies compactas dada a seguir; os detalhes podem ser encontrados em [13]. As superfícies consideradas serão todas conexas.

Dadas duas superfícies compactas S_1 e S_2 , disjuntas, sua soma conexa $S_1 \# S_2$ é a superfície obtida identificando as fronteiras de $S_1 - D_1$, $S_2 - D_2$, D_1, D_2 discos fechados. Pode-se mostrar que o tipo topológico de $S_1 \# S_2$ independe da escolha dos discos D_1 e D_2 .

Com essa definição podemos enunciar o teorema de classificação:

Teorema 2.2.1: - Uma superfície compacta é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de toros, ou à soma conexa de planos projetivos.

Uma outra versão do teorema de classificação distingue as superfícies orientáveis e não orientáveis.

Teorema 2.2.2: - Uma superfície compacta, orientável, é homeomorfa à uma esfera ou à soma conexa de toros.

Uma superfície compacta, não-orientável, é homeomorfa a uma soma de um plano projetivo ou uma garrafa de Klein e uma superfície compacta, orientável.

A distinção entre as superfícies dos teoremas 2.2.1 e 2.2.2, do ponto de vista topológico, será feita, introduzindo-se um invariante topológico, a **característica de Euler**.

É bem conhecido que se M é uma superfície não-orientável e $\tilde{M}$ é o duplo recobrimento orientado de M , então

$$(2.1) \quad \chi(\tilde{M}) = 2 \cdot \chi(M)$$

Temos a propriedade: -

Proposição 2.2.3: - Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. A característica de Euler de $S_1 \# S_2$ é dada por

$$(2.2) \quad \chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

que nos conduz à tabela: -

<u>Superfície</u>	<u>Característica de Euler</u>
Esfera	2
Toro	0
Plano projetivo	1
Soma conexa de n toros	$2-2n$
Soma conexa de n planos projetivos	$2-n$
Soma de plano projetivo e n toros	$1-2n$
Soma de garrafa de Klein e n toros	$-2n$

Observamos que, para superfícies orientáveis, a característica de Euler é sempre par e, para superfícies não-orientáveis, pode ser par ou ímpar.

A característica de Euler é um invariante topológico no sentido do teorema:

Teorema 2.2.4: - Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas, S_1 e S_2 são homeomorfas se e somente se suas características de Euler são iguais e são ambas orientáveis ou não-orientáveis.

Para concluir, temos

Definição 2.2.5: - Dizemos que uma superfície tem gênero n se é a soma conexa de n toros ou n planos projetivos; diremos que a esfera tem gênero zero.

Denotando por γ o gênero de uma superfície M , temos a relação entre o gênero e a característica de Euler:

$$(2.3) \quad \gamma = \begin{cases} \frac{1}{2} (2 - \chi(M)) & \text{se } M \text{ é orientável} \\ 2 - \chi(M) & \text{se } M \text{ é não orientável} \end{cases}$$

Se M é uma superfície compacta com bordo, denotamos M^* a superfície obtida "colando" um disco a cada componente do bordo de M ; M^* será uma superfície compacta, sem bordo. Teremos:

$$\chi(M) = \chi(M^*) - k$$

com k : número de componentes do bordo

O gênero de M será o gênero de M^* ; temos a relação:-

$$(2.4) \quad \chi(M) = 2 - 2\gamma - k, \text{ no caso orientável}$$

$$(2.5) \quad \chi(M) = 2 - \gamma - k, \text{ no caso não orientável}$$

O plano projetivo real $\mathbb{RP}^2$ e a garrafa de Klein K são superfícies não-orientáveis que nos interessarão particularmente.

O plano projetivo real é uma superfície não-orientável de gênero um (característica de Euler um) cujo duplo recobrimento orientável é dado pela aplicação $\Pi: S^2(1) \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ e a involução $\tilde{I}: S^2(1) \longrightarrow S^2(1)$ é a aplicação antípoda.

A garrafa de Klein é uma superfície não-orientável de gênero 2 (característica de Euler zero) cujo duplo recobrimento orientável é dado pela aplicação $\Pi: T \longrightarrow K$, T toro bi-dimensional. Considerando a estrutura conforme no recobrimento universal do toro T dado pelo reticulado no plano complexo gerado por

$$\Omega = \{m\lambda_1 + n\lambda_2, m, n \in \mathbb{Z}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \text{ linearmente independentes sobre } \mathbb{R}\}$$

a involução $\tilde{I}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ será dada por

$$\tilde{I}(z) = \tilde{z} + \lambda_0, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2, \quad z = a\lambda_1 + b\lambda_2, a, b \in \mathbb{R}, \quad \tilde{z} = a\lambda_1 - b\lambda_2$$

2.3 O Teorema de Representação para Superfícies mínimas não-orientáveis

Para caracterizar as superfícies mínimas não-orientáveis passamos ao estudo das superfícies duplas associadas definidas a seguir.

Definição 2.3.1: - Dada uma superfície S em $\mathbb{R}^n$, não-orientável, conexa, definida por uma aplicação $X: M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, chamamos **superfície dupla** de S a superfície $\tilde{S}$ definida por $\tilde{X} = X \circ \Pi: \tilde{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $\Pi: \tilde{M}^2 \longrightarrow M^2$ o duplo recobrimento orientado de M^2 .

Em relação à estrutura conforme de $\tilde{M}^2$ a involução $\tilde{I}: \tilde{M}^2 \longrightarrow \tilde{M}^2$ (Proposição 2.1.4) será anti-holomorfa e o quociente $\tilde{M}^2/\tilde{I}$ é obtido pela relação de equivalência $p, q \in \tilde{M}$, $p \sim q$ se e somente se $\tilde{I}(p) = q$.

Podemos demonstrar: -

Teorema 2.3.2: - Se S é uma superfície mínima do $\mathbb{R}^n$, regular, não-orientável, conexa, então a superfície dupla $\tilde{S}$ será uma superfície mínima do $\mathbb{R}^n$ definida por $\tilde{X}: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$(2.7) \quad \tilde{X}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \tilde{\Phi}(\zeta) d\zeta, \quad p_0, p \in \tilde{M}$$

com $\alpha = \tilde{\Phi}(\zeta) d\zeta$ tal que $\tilde{I}^* \alpha = \bar{\alpha}$ (i.e., $\tilde{I}^* \alpha_k = \bar{\alpha}_k$, $1 \leq k \leq n$).

Reciprocamente, dada uma superfície mínima $\tilde{S}$ do $\mathbb{R}^n$ definida por (2.7) conexa, orientável, se existe uma involução $\tilde{I}: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ anti-holomorfa, sem pontos fixos tal que $\tilde{I}^* \alpha = \bar{\alpha}$, então $\tilde{S}$ é a superfície dupla de uma superfície mínima S do $\mathbb{R}^n$, regular, não-orientável.

Demonstração: - Pela proposição 2.1.5 as propriedades locais de $\tilde{S}$ (mínima, regular) são as propriedades locais de S .

A aplicação $\tilde{X}: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz:

$$\tilde{X}(\tilde{I}(p)) = (X \circ \Pi)(\tilde{I}(p)) = X(\Pi(\tilde{I}(p))) = X(\Pi(p)) = \tilde{X}(p),$$

para todo p em $\tilde{M}$.

Na forma integral, $\tilde{X}(\tilde{I}(p)) = \tilde{X}(p)$ equivale a

$$\operatorname{Re} \int_{p_0}^{\tilde{I}(p)} \alpha = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha, \quad p_0, p \in \tilde{M}$$

Podemos escrever:

$$\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha = \operatorname{Re} \left[\int_{p_0}^{\tilde{I}(p_0)} \alpha + \int_{\tilde{I}(p_0)}^{\tilde{I}(p)} \alpha \right] = \tilde{X}(\tilde{I}(p_0)) + \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \tilde{I}^* \alpha$$

Como $\tilde{X}(\tilde{I}(p_0)) = \tilde{X}(p_0) = 0$, então

$$\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \alpha = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \tilde{I}^* \alpha .$$

Como $\tilde{I}$ é anti-holomorfa

$$\tilde{I}^* \alpha_k = \tilde{I}^*(\tilde{\Phi}_k(\zeta) d\zeta) = \tilde{\Phi}_k(\tilde{I}(\zeta)) \cdot \partial \tilde{I} d\bar{\zeta} = f_k(\zeta) d\bar{\zeta}, \quad 1 \leq k \leq n ,$$

e podemos escrever:

$$\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \tilde{\Phi}_k(\zeta) d\zeta = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p f_k(\zeta) d\bar{\zeta} .$$

Localmente, se $\tilde{\Phi}_k(\zeta) = u_k + iv_k$, $f_k = r_k + is_k$, $d\zeta = d\xi + i d\eta$, teremos numa vizinhança de p_0 ,

$$\int_{p_0}^p u_k d\xi - v_k d\eta = \int_{p_0}^p r_k d\xi + s_k d\eta$$

e, daí, $u_k = r_k$, $s_k = -v_k$, ou seja, $f_k(\zeta) = \overline{\tilde{\Phi}_k(\zeta)}$. Portanto, $\tilde{I}^* \alpha_k = \bar{\alpha}_k$ nessa vizinhança, para todo k . Esse resultado local pode ser estendido a $\tilde{M}^2$ e teremos globalmente, $\tilde{I}^* \alpha = \bar{\alpha}$.

Para a recíproca, dada uma superfície mínima definida por

$$\tilde{X}(p) = \int_{p_0}^p \tilde{\Phi}(\zeta) d\zeta, \quad p_0, p \in \tilde{M}$$

e a involução anti-holomorfa $\tilde{I}$, decompondo

$$\tilde{X}(\tilde{I}(p)) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^{\tilde{I}(p)} \alpha = \operatorname{Re} \left[\int_{p_0}^{\tilde{I}(p_0)} \alpha + \int_{\tilde{I}(p_0)}^{\tilde{I}(p)} \alpha \right], \quad \alpha = \tilde{\Phi}(z) dz,$$

temos

$$\tilde{X}(\tilde{I}(p)) = \tilde{X}(\tilde{I}(p_0)) + \operatorname{Re} \int_{p_0}^{\tilde{I}(p)} \alpha = \tilde{X}(\tilde{I}(p_0)) + \tilde{X}(p), \quad \text{ou seja,}$$

$$(2.8) \quad \tilde{X}(\tilde{I}(p)) = X_0 + \tilde{X}(p), \quad \text{para todo } p \text{ em } \tilde{M}^2.$$

Tomando $p = \tilde{I}(q)$,

$$\tilde{X}(q) = \tilde{X}(\tilde{I}(\tilde{I}(q))) = X_0 + \tilde{X}(\tilde{I}(q)).$$

Novamente usando (2.8)

$$\tilde{X}(q) = 2X_0 + \tilde{X}(q); \text{ portanto, } X_0 = 0 \text{ e, de (2.8),}$$

$$\tilde{X}(\tilde{I}(p)) = \tilde{X}(p) \quad \text{para todo } p \text{ em } \tilde{M}.$$

Chamando M^2 o quociente $\tilde{M}/\sim$, $\sim$ relação de equivalência dada por $\tilde{I}$, podemos definir $X: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $X \circ \Pi = \tilde{X}$, M^2 não-orientável ($\tilde{I}$ anti-holomorfa) e $\Pi: \tilde{M}^2 \rightarrow M^2$ duplo recobrimento orientado.

Δ

É natural examinar as implicações da condição $\tilde{I}^* \alpha = \bar{\alpha}$ sobre as formas da representação de Weierstrass, da representação de Weierstrass generalizada, e das representações (1.4), (1.5).

Para $n=3$, temos o resultado de Meeks:

Corolário 2.3.3 (Meeks, [14]): - Se f e g são as funções da representação de Weierstrass (1.3) de uma superfície mínima $\tilde{S}$ orientável, conexa, do $\mathbb{R}^3$, então $\tilde{S}$ é a superfície dupla de uma superfície mínima não-orientável do $\mathbb{R}^3$ se e somente se

$$(2.9) \quad (i) \quad g(\tilde{I}(p)) = \frac{-1}{\overline{g(p)}}, \text{ para todo } p \text{ em } \tilde{M}^2$$

$$(2.10) \quad (ii) \quad \tilde{I}^*w = -\overline{g^2 w}, \quad w = fdz, \quad \tilde{I}: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M} \text{ involução anti-holomorfa.}$$

Demonstração: - (i) decorre de $\sigma \circ N = g$, σ : projeção estereográfica, $N: \tilde{M} \longrightarrow S^2(1)$ aplicação de Gauss clássica e da propriedade geométrica $N(\tilde{I}(p)) = -N(p)$.

(ii) verifica-se facilmente usando (i) e

$$\tilde{I}^* \alpha_3 = \bar{\alpha}_3.$$

A recíproca é imediata. Δ

Em relação à representação das superfícies mínimas do $\mathbb{R}^4$ dada por f, g_1, g_2 do teorema 1.3.3 (1.5), temos: -

Corolário 2.3.4: - Seja $\tilde{S}$ uma superfície mínima do $\mathbb{R}^4$ regular, orientável, conexa, definida por $\tilde{X}: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$\tilde{X}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p (1+g_1g_2, i(1-g_1g_2), g_1-g_2, -i(g_1+g_2))fd\zeta, \quad p_0, p \in \tilde{M}^2$$

f, g_1, g_2 nas condições do teorema 1.3.3. $\tilde{S}$ é superfície dupla de uma superfície mínima regular, não-orientável do $\mathbb{R}^4$ se e so mente se

$$(i) \quad g_k(\tilde{I}(p)) = \frac{-1}{g_k(p)}, \quad k = 1, 2, p \in \tilde{M}$$

$$(ii) \quad \tilde{I}^*w = \overline{g_1 g_2 w}, \quad w = fdz, \quad$$

$\tilde{I}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ involução anti-holomorfa.

Demonstração: - Inicialmente observamos que a aplicação de Gauss generalizada de $\tilde{S}$, $G: \tilde{M}^2 \rightarrow Q_{n-2}$ satisfaz, pontualmente, em coordenadas homogêneas, a relação

$$(2.11) \quad \overline{[G(\tilde{I}(p))]} = [G(p)]$$

que pode ser reescrita:

$$(2.12) \quad [\tau \circ G \circ \tilde{I}] = [G]$$

com $\tau(z_1, \dots, z_n) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$.

Chamando $F = (F_1, F_2)$, $F: Q_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ a equivalência bi-holomorfa (1.6), temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M}^2 & \xrightarrow{\quad \bar{G} \quad} & Q_2 & \xrightarrow{\quad F \quad} & \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \\ \tilde{I} \downarrow & & \downarrow & \tau = \tau^{-1} & \\ \tilde{M}^2 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & Q_2 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Com alguns cálculos, podemos mostrar que

$$(2.13) \quad F_j \circ \tau = \frac{-1}{\overline{F_j}}, \quad j = 1, 2.$$

Como as funções $g_j = F_j \circ \overline{G}$, de (2.11) a (2.13) segue

(1)

Das relações $I^* \alpha_k = \bar{\alpha}_k$, $k = 1, 2$, temos (ii).

A recíproca é imediata.

△

Em termos das funções $f, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}$ da Representação de Weierstrass generalizada (1.4) temos: -

Corolário 2.3.5: - Uma superfície $\tilde{S}$ mínima do $\mathbb{R}^n$, regular, orientável, conexa, dada por

$$\tilde{X} = \text{Re} \int \frac{f}{2} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-2} \zeta_k^2, i \left(1 + \sum_{k=1}^{n-2} \zeta_k^2 \right), 2\zeta_1, \dots, 2\zeta_{n-2} \right)$$

nas condições do teorema 1.3.2, é a superfície dupla de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$ se e somente se:

$$(i) \quad \tilde{I}^*(\zeta_k w) = \overline{\zeta_k w}, \quad 1 \leq k \leq n-2, \quad w = fdz$$

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^{n-2} \zeta_k(\tilde{I}(p)) \cdot \overline{\zeta_k(p)} = -1, \quad \text{para todo } p \text{ em } \tilde{M},$$

com $\tilde{I}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ involução anti-holomorfa.

Demonstração: - Se $\tilde{S}$ é uma superfície dupla, de $\tilde{I}^* \alpha_{j+2} = \bar{\alpha}_{j+2}$, $1 \leq j \leq n-2$ temos (i); (ii) segue de $\tilde{I}^* \alpha_j = \bar{\alpha}_j$, $j=1,2$.

A recíproca é imediata.

△

Vale a pena observar que, da mesma forma que a condição $g(\tilde{I}(p)) = -1/\overline{g(p)}$ corresponde, geometricamente a $N(\tilde{I}(p)) = -N(p)$, as condições sobre g_1, g_2 do corolário 2.3.4 correspondem a $[G(\tilde{I}(p))] = [G(p)]$.

Ainda como consequências do Teorema de Representação podemos destacar:

Proposição 2.3.6: - Se uma superfície mínima $\tilde{S}$ do $\mathbb{R}^{2m}$ é uma curva holomorfa em relação a uma estrutura complexa ortogonal do $\mathbb{R}^{2m}$, então $\tilde{S}$ não pode ser a superfície dupla de uma superfície mínima não-orientável do $\mathbb{R}^{2m}$.

Demonstração: - $\tilde{S}$ é uma curva holomorfa em relação a uma estrutura complexa ortogonal do $\mathbb{R}^{2m}$ se $\tilde{S}$ é dada por $X = (x_1, x_2, \dots, x_{2m})$ tal que $(x_1 + ix_2, \dots, x_{2m-1} + ix_{2m})$ é holomorfa ([10], pág. 36).

Neste caso, a aplicação de Gauss generalizada é dada, em coordenadas homogêneas, por

$$[G(z)] = [\overline{\Phi(z)}] = [2\bar{\partial}X] = \left[\frac{\partial X}{\partial \xi} + i \frac{\partial X}{\partial \eta} \right], \text{ com}$$

$$\Phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \quad \text{e, pelas equações de Cauchy-Riemann,}$$

$$\Phi = (\Phi_1, -i\Phi_1, \Phi_3, -i\Phi_3, \dots, \Phi_{2m-1}, -i\Phi_{2m-1})$$

$\tilde{S}$ será uma superfície dupla se e somente se

$$\tilde{I}^*(\Phi d\zeta) = \overline{\Phi d\zeta}, \text{ que equivale a:}$$

$$\tilde{I}^*(\phi_{2j-1}d\zeta) = \overline{\phi_{2j-1}}d\bar{\zeta}, \quad 1 \leq j \leq m$$

e

$$\tilde{I}^*(i\phi_{2j-1}d\zeta) = -i\overline{\phi_{2j-1}}d\bar{\zeta}, \quad 1 \leq j \leq m$$

Teremos, portanto,

$$\phi_{2j-1}(\tilde{I}(\zeta)) \cdot \bar{\partial}\tilde{I} = \overline{\phi_{2j-1}}(\zeta)$$

e

$$\phi_{2j-1}(I(\zeta))\bar{\partial}I = -\overline{\phi_{2j-1}}(\zeta), \quad 1 \leq j \leq m, \text{ o que}$$

implica $\phi_j \equiv 0$; como os ϕ_j 's não podem ser todos identicamente nulos, temos a tese. A

Proposição 2.3.7: - As superfícies associadas de uma superfície mínima dupla não são superfícies mínimas duplas.

Demonstração: - Se a superfície dupla é dada por

$$Y: \tilde{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

as superfícies associadas são definidas por

$$Y_\alpha = Y \cos \alpha + \hat{Y} \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha < \pi$$

com $\hat{Y}$ a conjugada harmônica de Y , ou seja, $Y + i\hat{Y}$ é uma função analítica.

Usando as equações de Cauchy-Riemann de $Y + i\hat{Y}$, temos a aplicação de Gauss generalizada das superfícies associadas dada por

$$\Phi_\alpha = \Phi \cos \alpha - i \Phi \sin \alpha$$

pois se $Y = \operatorname{Re} \int \Phi$, $\hat{Y} = \operatorname{Im} \int \Phi = \operatorname{Re} \int (-i\Phi)$.

As superfícies Y_α serão superfícies duplas se e somente se

$$\tilde{I}^*(\Phi_\alpha d\zeta) = \overline{\Phi_\alpha d\zeta}$$

Usando o fato de $\tilde{I}^*(\Phi d\zeta) = \overline{\Phi d\zeta}$, temos:

$$\tilde{I}^*(\Phi_\alpha d\zeta) = (\cos \alpha - i \sin \alpha) \overline{\Phi d\zeta} = e^{-i\alpha} \overline{\Phi d\zeta}$$

e $\tilde{I}^*(\Phi_\alpha d\zeta) = \overline{\Phi_\alpha d\zeta}$ se e somente se $e^{2i\alpha} = 1$ ou seja, $\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Desta forma, temos a tese.

Δ

2.4. Superfícies Mínicas não orientáveis completas

O estudo do comportamento local da aplicação de Gauss generalizada nos fins de uma superfície dupla associada a uma superfície mínima não-orientável nos permitirá:

- estudar a desigualdade de Chern-Osserman para superfícies mínimas não-orientáveis
- dar uma estimativa da dimensão para as superfícies não-orientáveis
- caracterizar as superfícies duplas associadas a uma superfície não-orientável, regular, com curvatura total finita.

As superfícies serão todas conexas. Inicialmente, temos:

Proposição 2.4.1: - Se $\tilde{S}$ é uma superfície dupla, mínima, completa, com curvatura total finita definida por $\tilde{X}: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, então:

- (i) $\tilde{M}$ é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\bar{M}$ de gênero $\tilde{\gamma}$ exceto um número finito de pontos $\{p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r\}$ com $\tilde{I}(p_j) = q_j$, $1 \leq j \leq r$, $\tilde{I}(p_j)$: extensão de $\tilde{I}$ aos pontos p_j .
- (ii) Se m_{p_j} e m_{q_j} são as ordens de polo de ϕ em p_j e q_j , respectivamente, $m_{p_j} = m_{q_j}$

Se p e q são fins de $\tilde{M}$, $\tilde{I}(p) = q$, e localmente,

$$\phi_p(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{z^j} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad a_j, b_k \in \mathbb{C}^n$$

$$\phi_q(w) = \sum_{\ell=1}^m \frac{A_\ell}{w^\ell} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k w^k, \quad A_\ell, B_k \in \mathbb{C}^n$$

então

- (iii) os subespaços de $\mathbb{C}^n$ gerados por $\{a_1, \dots, a_m\}$ e $\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m\}$ coincidem
- (iv) $a_1, A_1 \in \mathbb{R}^n$, $a_1 = A_1$
- (v) Se a_1^j são os termos correspondentes a a_1 nos desenvolvimentos de ϕ_{p_j} , $1 \leq j \leq r$, então $\sum_{j=1}^r a_1^j = 0$

Demonstração: - Do teorema 1.4.4 teremos $\tilde{M}$ conformemente equivalente a uma superfície mínima compacta $\bar{M}$ de gênero γ , exceto um número finito de pontos.

Para simplificar a notação, seja $p \in \bar{M} - \tilde{M}$ um fim de $\tilde{M}$, $q = \tilde{I}(p)$

Seja $V \subset \mathbb{C}$ vizinhança da origem tal que Φ_p tem um polo de ordem m_p e, localmente,

$$\Phi_p(z) = 2 \cdot \frac{\partial X}{\partial z}, \quad z \in V$$

Se $W \subset \mathbb{C}$ é uma outra vizinhança da origem, $f: W \longrightarrow V$ uma aplicação antiholomorfa com derivada não nula, $f(0)=0$, $X \circ f$ será uma parametrização local de uma vizinhança de $q = \tilde{I}(p)$; a aplicação generalizada, em W , será dada por

$$\Phi_q(w) = 2 \frac{\partial X}{\partial w} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial w} (X(f(w)))$$

Pela regra da cadeia, chamando $z=f(w)$, derivando,

$$\Phi_q(w) = 2 \left[\frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial X}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial w} \right];$$

sendo f anti-holomorfa, $\frac{\partial f}{\partial w} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}$ e podemos escrever

$$\Phi_q(w) = 2 \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}, \quad \text{ou ainda:}$$

$$(2.14) \quad \Phi_q(w) = \overline{\Phi_p(f(w))} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}$$

Daí, se $z=f(0)=0$ é um polo de ordem m_p de ϕ_p , $w=0$ é um polo de mesma ordem de ϕ_q , pois $\bar{f}$ é homomorfa, com derivada não-nula.

Da mesma relação (2.14) temos (iii).

Para provar (iv) observamos que se γ é uma curva fechada de $\tilde{M}$ devemos ter $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi(\zeta) d\zeta = 0$.

Como $\int_{\gamma_p} \phi(\zeta) d\zeta = 2\pi i \cdot a_1$, $\int_{\gamma_q} \phi(\zeta) d\zeta = 2\pi i \cdot A_1$, γ_p, γ_q curvas fechadas

em torno de p e q , respectivamente, temos $\operatorname{Im} a_1 = \operatorname{Im} A_1 = 0$; além disso, se $\tilde{I}(\gamma_p) = -\gamma_q$, então $a_1 = A_1$.

A prova de (v) decorre do fato de podermos escolher curvas β_j, γ_j curvas em torno de $p_j, q_j = \tilde{I}(p_j)$, respectivamente, p_j, q_j fins de $\tilde{M}$ de forma que essas curvas são a fronteira orientada de uma variedade compacta $\bar{M}'$ obtida retirando de $\tilde{M}$ vizinhanças dos fins e $\tilde{I}(\beta_j) = -\gamma_j$, $1 \leq j \leq r$.

Daí:

$$\sum_{j=1}^r \left[\int_{\beta_j} \phi d\zeta + \int_{\gamma_j} \phi d\zeta \right] = \int_{\partial \bar{M}'} \phi d\zeta = \int_{\bar{M}'} d(\phi d\zeta) = 0$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^r \int_{\beta_j} \phi(\zeta) d\zeta = - \sum_{j=1}^r \int_{\gamma_j} \phi d\zeta = \sum_{j=1}^r \int_{\tilde{I}(\beta_j)} \phi d\zeta$$

Daí:

$$\sum_j 2\pi i \cdot a_1^j = \sum_{j=1}^r \int_{\beta_j} \tilde{I}^*(\phi d\zeta) = \sum_{j=1}^r \overline{\int_{\beta_j} \phi d\zeta}$$

ou

$$\sum_{j=1}^r 2\pi i a_1^j = - \sum_{j=1}^r 2\pi i \cdot a_1^j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^r a_1^j = 0.$$

Δ

Podemos definir a curvatura total de S

$$(2.15) \quad c(S) = \frac{1}{2} c(\tilde{S})$$

sendo $c(\tilde{S})$ a curvatura total da superfície dupla associada a S .

Teremos, desta forma,

Proposição 2.4.2: - A curvatura total de uma superfície mínima não-orientável S , completa em $\mathbb{R}^n$ é da forma $c = -2\pi m$, $m = 0, 1, \dots, \infty$.

Demonstração: - Pela proposição, a superfície dupla associada $\tilde{S}$ terá um número par de fins, $\tilde{r} = 2r$, sendo os fins relacionados por $\tilde{I}$ isto é, $q_j = \tilde{I}(p_j)$, ambos com a mesma ordem de polo m_j .

Da proposição 1.4.5, a curvatura total de $\tilde{S}$ é da forma $c(\tilde{S}) = -2\pi\tilde{m}$, com $\tilde{m}$ satisfazendo (1.10):

$$(2.16) \quad \tilde{m} - 2 \cdot \sum_{j=1}^r m_j = 2\tilde{\gamma} - 2$$

Daí, $\tilde{m}$ será par e $c = -2\pi\tilde{m}/2 = -2\pi m$.

Se a curvatura total é infinita, $\tilde{c} = c = \infty$.

Δ

Ainda como consequência da proposição inicial, podemos verificar que a desigualdade de Chern-Osserman para superfícies mínimas não-orientáveis é análoga à das superfícies mínimas orientáveis.

Teorema 2.4.3: - Seja S uma superfície mínima do $\mathbb{R}^n$ dada por $X: M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, não orientável, completa, com r fins, então

$$(2.17) \quad c(S) \leq 2\pi(\chi(M) - r) ,$$

$\chi(M)$: característica de Euler de M ,

Demonstração: - A curvatura total da superfície dupla $\tilde{S}$ associada a S satisfaz (proposição 1.4.5)

$$c(\tilde{S}) \leq 2\pi(\chi(\tilde{M}) - \tilde{r}) ,$$

Pelo lema, $\tilde{r} = 2r$; como $\chi(\tilde{M}) = 2.\chi(M)$ e $c(\tilde{S})=2.c(S)$,

temos:

$$c(S) \leq 2\pi(\chi(M) - r) .$$

Δ

Com os resultados da proposição, podemos dar a versão não-orientável do resultado de Gackstatter (teorema (1.4.7)), salientando que

$$(2.18) \quad \dim S = \dim \tilde{S} .$$

Teorema 2.4.4: - A dimensão de uma superfície S , mínima do $\mathbb{R}^n$, não-orientável, regular, completa, com curvatura total $c=-2\pi m$ satisfaz

$$(2.19) \quad \dim S \leq 2m - 2\gamma - r + 3$$

com γ : gênero de S , r : número de fins de S .

Demonstração: - Pelo teorema de Gackstatter a dimensão da superfície dupla $\tilde{S}$ será a dimensão do subespaço gerado por:

$$\{a_1^j, A_1^j, \operatorname{Re} a_{v_j}^j, \operatorname{Im} a_{v_j}^j, \operatorname{Re} A_{v_j}^j, \operatorname{Im} A_{v_j}^j, 2 \leq v_j \leq m_j, 1 \leq j \leq r\}$$

Com as condições da proposição sobre $a_{v_j}^j, A_{v_j}^j$, teremos

$$\dim S \leq (r - 1) + 2 \sum_{j=1}^r (m_j - 1)$$

ou seja,

$$(2.20) \quad \dim S \leq 2 \sum_{j=1}^r m_j - r - 1$$

Por outro lado, temos, de (2.16):

$$(2.21) \quad m - \sum_{j=1}^r m_j = \tilde{\gamma} - 1$$

De (2.4) e (2.5) temos:

$$\chi(\tilde{M}) = 2 - 2\tilde{\gamma} - 2r$$

$$\chi(M) = 2 - \gamma - r$$

Sendo $\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M)$, segue que

$$(2.22) \quad \tilde{\gamma} = \gamma - 1$$

Daí, temos a fórmula correspondente a (1.10) para superfícies não-orientáveis.

$$(2.23) \quad m - \sum_{j=1}^r m_j = \gamma - 2$$

Substituindo em (2.20) temos $\dim S \leq 2m - 2\gamma - r + 3$

Δ

Como consequência do teorema acima temos, imediatamente, o resultado:

Proposição 2.4.5: - A curvatura total de uma superfície mínima não orientável, regular, completa do $\mathbb{R}^n$ é limitada superiormente por -4π .

Demonstração: - Sendo a dimensão de S maior ou igual a três, temos, pelo teorema anterior:

$$2m - 2\gamma - r + 3 \geq 3$$

ou seja,

$$2m \geq 2\gamma + r$$

Como $r \geq 1$, $\gamma \geq 1$, então $2m \geq 3$ ou seja, $2m \geq 4$ e $c = -2\pi m \leq -4\pi$.

Δ

Com essa limitação para a curvatura total, nosso interesse volta-se para o estudo das superfícies mínimas não-orientáveis no $\mathbb{R}^n$ completas, com curvatura total finita.

Para superfícies com gênero um, temos, do teorema 1.4.9, a caracterização:

Teorema 2.4.6: - Seja $\tilde{M}$ o plano complexo menos $2r-1$ pontos

$$\{0, z_1, \dots, z_{r-1}, \frac{-1}{\bar{z}_1}, \dots, \frac{-1}{\bar{z}_{r-1}}\} \quad \text{e} \quad \tilde{X}: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definida por}$$

$$\tilde{X}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi(z) dz, \quad p_0, p \in \tilde{M}$$

Se o vetor complexo Φ é da forma

$$\Phi(\zeta) = F(\zeta)(p_1(\zeta), \dots, p_n(\zeta))$$

com

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{v_0} \prod_{k=1}^{r-1} (\zeta - z_k)^{v_k} (\zeta + \frac{1}{\bar{z}_k})^{v_k}}$$

$p_j(\zeta)$ satisfazendo

(i) cada p_j é um polinômio

(ii) máximo grau dos p_j é $2m$

(iii) os polinômios p_j não têm fator comum

(iv) $\sum_{j=1}^n p_j^2(\zeta) \equiv 0$

(v) $(-1)^{m+1} \bar{\zeta}^{2m} p_j(-1/\bar{\zeta}) = \overline{p_j(\zeta)}$, $1 \leq j \leq n$,

v_k tais que $\sum_{k=0}^{r-1} v_k = m+1$, $v_k \geq 2$, $0 \leq k \leq r-1$ e

$R_e \int_{\gamma} \Phi = 0$ para toda curva γ fechada em $\tilde{M}$, então

$\tilde{X}: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ define uma superfície dupla associada a uma superfície mínima não-orientável em $\mathbb{R}^n$, regular, completa, com curvatura total finita $-2\pi m$, gênero um e r fins. Além disso, toda superfície dupla associada a uma superfície mínima não-orientável nessas condições tem a representação acima.

Demonstração: - A superfície dupla associada a uma superfície não-orientável de gênero um e r fins será uma superfície orientável, de gênero zero (2.22), com $2r$ fins relacionados por $\tilde{I}$. Pelo teorema 1.4.9, teremos $\tilde{M} = \mathbb{C} - \{0, z_1, \dots, z_{r-1}, \frac{-1}{\bar{z}_1}, \dots, \frac{-1}{\bar{z}_{r-1}}\}$ pois $\tilde{I}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{I}(z) = \frac{-1}{\bar{z}}$ será a involução sobre o plano, e

$$\Phi = F(p_1, \dots, p_n)$$

p_j satisfazendo (i) a (iv):

A aplicação $\tilde{X}: \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ define uma superfície dupla se e somente se (teorema 2.3.2)

$$(2.24) \quad \tilde{I}^*(\Phi_j(\zeta)d\zeta) = \overline{\Phi_j(\zeta)d\zeta}$$

Temos ainda de (2.23)

$$(2.25) \quad \sum_{k=0}^{r-1} v_k = m+1$$

Com alguns cálculos, de (2.24) e (2.25), teremos (v).

△

O resultado acima será muito importante para a discussão da existência e construção de exemplos de superfícies mínimas do $\mathbb{R}^n$, não-orientáveis, regulares, completas, com gênero um e r fins.

CAPÍTULO 3

SUPERFÍCIES MÍNIMAS, NÃO-ORIENTÁVEIS, COMPLETAS COM CURVATURA TOTAL FINITA

Este capítulo será dedicado ao estudo das superfícies mínimas não-orientáveis, completas, com curvatura total finita, com especial ênfase para as superfícies não-orientáveis com gênero um.

Inicialmente damos a caracterização das superfícies não-orientáveis cuja curvatura total é -4π , ou seja, aquelas cuja curvatura total é exatamente o limite superior admissível. (proposição 2.4.5).

O Teorema de representação de Hoffmann e Osserman (teorema 1.4.9 ou 2.4.6) e um lema algébrico sobre funções racionais g satisfazendo a condição de não-orientabilidade $g(\tilde{I}(p)) = -1/\overline{g(p)}$ nos permitirão destacar as curvaturas totais admissíveis para superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$. Esses mesmos resultados nos possibilitarão o desenvolvimento de um processo construtivo para superfícies mínimas não-orientáveis com gênero um e curvatura total finita.

Ao longo de todo o capítulo estaremos considerando superfícies conexas, completas.

3.1. Superfícies Mínicas não-orientáveis com curvatura total -4π .

Podemos descrever detalhadamente as superfícies não-orientáveis com curvatura total -4π .

Nessa descrição está contido o resultado de Meeks ([14]) sobre o limite superior para a curvatura total das superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.1.1 - Se S é uma superfície mínima não-orientável regular, completa, conexa, com curvatura total -4π então S é uma imersão mínima do plano projetivo menos um ponto, reversa em $\mathbb{R}^4$; quaisquer duas superfícies nessas condições são semelhantes.

Demonstração: - Da desigualdade de Chern-Osserman para superfícies não-orientáveis (2.17),

$$c(S) \leq 2\pi(\chi(M) - r)$$

e de (2.5), $\chi(M) = 2 - \gamma - r$; temos:

$$-4\pi \leq 2\pi(2 - \gamma - 2r)$$

Daí, $\gamma + 2r \leq 4$ e temos as possibilidades:

$$(I) \quad \gamma = 1, r=1$$

$$(II) \quad \gamma = 2, r=1.$$

Em cada caso, temos a dimensão de S (teorema 2.4.3) limitada por

$$(i) \quad \dim S \leq 4$$

$$(ii) \quad \dim S \leq 2$$

e fica, portanto, excluída a possibilidade (ii).

Sendo $\gamma=1$, $r=1$, a ordem de polo no fim será, por (2.23),
 $m_1 = m - \gamma + 2 = 3$.

As superfícies duplas associadas terão gênero zero e dois fins; pelo teorema 2.4.6 são dadas por

$$\tilde{X}: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{X} = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi(\zeta) d\zeta,$$

com as funções $\Phi_j(\zeta) = p_j(\zeta)/\zeta^3$, $p_j(\zeta)$ polinômios satisfazendo

$$(i) \quad \text{máximo grau dos } p_j(\zeta) \text{ é igual a } 4.$$

$$(ii) \quad \sum_{j=1}^n p_j^2(\zeta) \equiv 0$$

$$(iii) \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi_j(\zeta) d\zeta = 0 \quad \text{para toda curva } \gamma \text{ fechada em } \mathbb{C} - \{0\}$$

$$(iv) \quad \tilde{I}^*(\Phi_j d\zeta) = \overline{\Phi_j(\zeta) d\zeta}, \quad \text{sendo que (iv) equivale a}$$

$$(3.1) \quad -\zeta^4 p_j(-1/\bar{\zeta}) = \overline{p_j(\zeta)}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

pois $\tilde{I}(\zeta) = -1/\bar{\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Escrevendo $p_j(\zeta) = a_j \zeta^4 + b_j \zeta^3 + c_j \zeta^2 + d_j \zeta + e_j$, de
 (3.1) seguem as relações:

$$(3.2) \quad \begin{cases} a_j = -\bar{e}_j \\ b_j = \bar{d}_j \\ c_j = -\bar{c}_j \iff \operatorname{Re} c_j = 0 \end{cases}$$

De (iii), temos $\operatorname{Re}\{2\pi i \cdot c_j\} = 0$ para todo j , ou seja, $\operatorname{Im} c_j = 0$. Portanto, $c_j = 0$ para todo j ; de (3.2) segue:

$$p_j(\zeta) = a_j \zeta^4 + b_j \zeta^3 + \bar{b}_j \zeta - \bar{a}_j$$

Os polinômios $p_j(\zeta)$ satisfazem a condição (ii) se e somente se

$$(3.3) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j^2 = \sum_{j=1}^n b_j^2 = 0 \\ \sum_j a_j b_j = \sum_j a_j \bar{b}_j = 0 \\ \sum_j |a_j|^2 = \sum_j |b_j|^2. \end{cases}$$

Chamando $A_1 = (\operatorname{Re} a_1, \dots, \operatorname{Re} a_n)$, $A_2 = (\operatorname{Im} a_1, \dots, \operatorname{Im} a_n)$, $B_1 = (\operatorname{Re} b_1, \dots, \operatorname{Re} b_n)$, $B_2 = (\operatorname{Im} b_1, \dots, \operatorname{Im} b_n)$, em termos de A_1, A_2, B_1, B_2 , vetores em $\mathbb{R}^n$, as condições de (3.3) equivalem a A_1, A_2, B_1, B_2 ortogonais e de mesmo comprimento; escolhendo

$$A = A_1 + i A_2 = (1, i, 0, 0)$$

$$B = B_1 + i B_2 = (0, 0, 1, i)$$

$$D = \bar{B} = (0, 0, 1, -i)$$

$$E = -\bar{A} = (-1, i, 0, 0)$$

temos uma superfície nas condições do teorema.

Além disso, duas imersões $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ obtidas a partir de polinômios $p_j(\zeta) = a_j \zeta^4 + b_j \zeta^3 + \bar{b}_j \zeta - \bar{a}_j$ e $q_j(\zeta) = a'_j \zeta^4 + b'_j \zeta^3 + \bar{b}'_j \zeta - \bar{a}'_j$, respectivamente, são tais que

$\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$, $\{A'_1, A'_2, B'_1, B'_2\}$ serão conjuntos de vetores ortogonais e de mesmo comprimento em $\mathbb{R}^n$.

Existe uma matriz ortogonal real tal que

$$A'_j = \frac{\mu}{\lambda} M \cdot A_j, \quad j = 1, 2$$

$$B'_j = \frac{\mu}{\lambda} M \cdot B_j, \quad j = 1, 2, \quad \mu = \|A'_j\|, \quad \lambda = \|A_j\|$$

Daí: $Y = \frac{\mu}{\lambda} MX + X_0$

△

Imediatamente, temos o resultado de Meeks ([14]):

Corolário 3.1.2 - A curvatura total das superfícies mínimas não-orientáveis, regulares, completas, em $\mathbb{R}^3$ é limitada superiormente por -6π .

3.2 Superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e gênero um

O corolário acima nos dá uma limitação superior para a curvatura total das superfícies mínimas não-orientáveis no $\mathbb{R}^3$.

Para superfícies mínimas não-orientáveis S no $\mathbb{R}^3$ dadas por $X: M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com curvatura total finita, temos, da proposição 1.4.8 que a curvatura total

$$(3.4) \quad C(S) = -2\pi \text{ grau } g$$

sendo $g: \tilde{M}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ a função da Representação de Weierstrass (1.4) da superfície dupla $\tilde{S}$ associada a S .

Em relação à função g da Representação de Weierstrass temos:

Lema 3.2.1 - A função g da Representação de Weierstrass de uma superfície mínima S em $\mathbb{R}^3$, orientável, regular, completa, com curvatura total finita, gênero zero e conectividade r é racional.

Demonstração: - Pelo teorema 1.4.9, a superfície será dada por

$$X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi, \quad p \in \mathbb{C} - \{z_0, \dots, z_{r-2}\},$$

com as funções Φ_j , $j=1,2,3$ funções racionais. Sendo a função g dada por $\Phi_3/(\Phi_1 - i\Phi_2)$, então g será racional.

△

A próxima proposição será muito importante para a descrição de exemplos de superfícies mínimas não-orientáveis de gênero um.

Proposição 3.2.2 - Se g é uma função racional complexa e satisfaz $g(-1/\bar{z}) = -1/\overline{g(z)}$, então, o grau de g é ímpar, e

$$(3.5) \quad g(z) = c \cdot z^\alpha \cdot \frac{\prod_{j=1}^n (z - a_j)}{\prod_{j=1}^n (z + \frac{1}{\bar{a}_j})}, \quad \text{com } |c| \prod_{j=1}^n |a_j| = 1$$

Demonstração: - Sendo g uma função racional, ela se fatora

$$g(z) = c \cdot z^\alpha \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - a_j)}{\prod_{k=1}^n (z - b_k)}, \quad a_j \neq b_k \text{ para todo } j, k, a_j, b_k \neq 0$$

de forma que as raízes múltiplas aparecem com a multiplicidade.

A relação $g(-1/\bar{z}) = -1/\overline{g(z)}$ equivale a:

$$(3.6) \quad (-1)^{\alpha+m+n} |c|^2 \bar{z}^{n-m} \prod_{j=1}^m (a_j \bar{z}+1)(\bar{z}-\bar{a}_j) = -\prod_{k=1}^n (b_k \bar{z}+1)(\bar{z}-\bar{b}_k)$$

Se $m \neq n$, teremos $z=0$ raiz de um dos membros e não do outro; daí, $m=n$ e (3.6) fica:

$$(3.7) \quad (-1)^{\alpha} |c|^2 \prod_{j=1}^m (a_j \bar{z}+1)(\bar{z}-\bar{a}_j) = -\prod_{k=1}^m (b_k \bar{z}+1)(\bar{z}-\bar{b}_k)$$

$z=b_k$ é raiz do segundo membro; como $b_k \neq a_j$ para todo j,k , então $a_j \cdot \bar{b}_k+1 = 0$ para algum j , ou seja, $a_j = -1/\bar{b}_k$ para algum j .

Podemos, da mesma forma, mostrar que se $z=b_j$ é uma raiz do segundo membro com multiplicidade m_j , então $z=-1/\bar{b}_j$ é raiz do primeiro membro com a mesma multiplicidade, de forma que (3.7) se reescreve:

$$(-1)^{\alpha} |c|^2 \prod_{j=1}^m \left(\frac{-1}{\bar{b}_j} \bar{z}+1\right) \left(\bar{z} + \frac{1}{b_j}\right) = -\prod_{j=1}^m (b_j \bar{z}+1)(\bar{z}-\bar{b}_j)$$

Daí:

$$\frac{(-1)^{\alpha+m} |c|^2}{\prod_{j=1}^m |b_j|^2} = -1 \quad \text{ou} \quad (-1)^{\alpha+m} |c|^2 \prod_{j=1}^m |a_j|^2 = -1$$

e temos a tese.

Δ

Da proposição e do lema, segue:

Proposição 3.2.3 - A curvatura total de uma superfície mínima S em $\mathbb{R}^3$, não-orientável, regular, completa, com gênero um é da forma $c = -2\pi m$, m ímpar, $m \geq 3$.

Demonstração: - Se $\tilde{S}$ é a superfície dupla associada a S , $\tilde{S}$ satisfaz às condições do lema 3.2.1, logo, a função g de sua Representação de Weierstrass é racional.

Por outro lado, pelo corolário 2.3.3, g satisfaz $g(-1/\bar{z}) = -1/\overline{g(z)}$; daí, pela proposição anterior, o grau de g é ímpar.

De (3.4) temos $c = -2\pi \cdot \text{grau } g = -2\pi m$, m ímpar.

Como $c \leq -6\pi$ (corolário 3.1.2), $m \geq 3$.

△

Meeks ([14]) provou que existe uma única superfície não-orientável, regular, completa, com gênero um e curvatura total finita -6π em $\mathbb{R}^3$. A superfície de Meeks é uma imersão mínima do plano projetivo menos um ponto em $\mathbb{R}^3$.

Sob esse ponto de vista, podemos generalizar o resultado de Meeks com o teorema:

Teorema 3.2.4 - Para todo m ímpar e maior ou igual a três, existe uma superfície mínima S do $\mathbb{R}^3$, não-orientável, regular, completa, de gênero um, um fim e curvatura total finita $-2\pi m$.

Demonstração: - Uma superfície S nas condições do teorema será dada por uma imersão $X: M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com M^2 conformemente equivalente ao plano projetivo menos um ponto, sendo, portanto, duplamente recoberta pela esfera menos dois pontos, com $\tilde{I}(p) = -p$, ou pelo plano estendido $\hat{\mathbb{C}} - \{0, \infty\} = \mathbb{C} - \{0\}$, $\tilde{I}(z) = -1/\bar{z}$.

Podemos, desta forma, construir a superfície dupla $\tilde{S}$ associada a S , dada por uma aplicação $\tilde{X}: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Se f e g são as funções da Representação de Weierstrass de $\tilde{S}$, devem satisfazer às condições do corolário 2.3.3; a curvatura total sendo $-2\pi m$, temos ainda, por (3.4), grau $g = m$.

Com alguns cálculos, podemos verificar que

$$(3.8) \quad f(z) = \frac{i(z+1)^2}{z^{m+1}} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{z^{m-1}(z-1)}{z+1}$$

satisfazem às condições do corolário 2.3.3, ou seja,

$$g(-1/\bar{z}) = -1/\overline{g(z)}$$

$$\text{e} \quad \tilde{I}^*w = -\overline{g^2 w} \quad , \quad w = fdz \quad , \quad \tilde{I}(z) = -1/\bar{z} \quad .$$

Portanto, pelo corolário, teremos

$$(3.9) \quad \tilde{X}(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{f(\zeta)}{2} ((1-g^2(\zeta)), i(1+g^2(\zeta)), 2g(\zeta)) d\zeta \quad ,$$

$$z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

uma superfície mínima dupla $\tilde{S}$, desde que $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = 0$ para toda curva γ fechada em $\mathbb{C} - \{0\}$.

Com f e g de (3.8), teremos

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{\zeta^{m-1}} + \frac{2}{\zeta^m} + \frac{1}{\zeta^{m+1}} - \zeta^{m-1} + 2\zeta^{m-2} - \zeta^{m-3} \right]$$

$$\Phi_2(\zeta) = \frac{-i}{2} \left[\frac{1}{\zeta^{m-1}} + \frac{2}{\zeta^m} + \frac{1}{\zeta^{m+1}} + \zeta^{m-1} - 2\zeta^{m-2} + \zeta^{m-3} \right]$$

$$\Phi_3(\zeta) = i \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)$$

e verificamos que $\int_{\gamma} \Phi = 0$ para toda curva γ em $\mathbb{C} - \{0\}$.

Além disso, f e g satisfazem a condição de regularidade (teorema 1.3.1(d)) e a métrica

$$ds^2 = \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2} \right]^2 |d\zeta|^2 \quad \text{é completa.}$$

Com mais alguns cálculos, podemos observar que a imersão será dada por $\tilde{X}(z) = (X_1(z), X_2(z), X_3(z)) + X_0$, com

$$(3.10) \begin{cases} X_1(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2} \left[\frac{-1}{m-2} \left(z^{m-2} + \frac{1}{z^{m-2}} \right) + \frac{2}{m-1} \left(z^{m-1} - \frac{1}{z^{m-1}} \right) - \frac{1}{m} \left(z^m + \frac{1}{z^m} \right) \right] \right\} \\ X_2(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-2} \left(z^{m-2} - \frac{1}{z^{m-2}} \right) - \frac{2}{m-1} \left(z^{m-1} + \frac{1}{z^{m-1}} \right) + \frac{1}{m} \left(z^m - \frac{1}{z^m} \right) \right] \right\} \\ X_3(z) = \operatorname{Re} \left\{ i \left(z + \frac{1}{z} \right) \right\} \end{cases}$$

e $X_0 = (0, \frac{-2}{m-1}, 0)$ se escolho $z_0=1$ em (3.9)

△

Observações:

1. Quando $m=3$ a superfície do teorema 3.2.4 é exatamente o exemplo de Meeks ([14]).
2. A imagem da circunferência $|z|=1$, $z=e^{i\theta}$, pelas fórmulas (3.10), será:

$$\begin{cases} X_1(\theta) = \frac{-2}{m-1} \sin(m-1)\theta \\ X_2(\theta) = \frac{2}{m-1} \cos(m-1)\theta - \frac{2}{m-1} \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

Temos, portanto, uma circunferência no plano $(X_1, X_2, 0)$, com centro $(0, \frac{-2}{m-1}, 0)$ e raio $\frac{2}{m-1}$ percorrida $(m-1)$ vezes se variamos θ , $0 \leq \theta < 2\pi$.

3. Podemos verificar ainda que a normal à superfície ao longo da circunferência, ou seja $N \Big|_{|z|=1} = (\sigma^{-1} \circ g) \Big|_{|z|=1} = (N_1, N_2, N_3) \Big|_{|z|=1}$ tem sua terceira componente

$$N_3 \Big|_{|z|=1} = \frac{1-|g|^2}{1+|g|^2} \Big|_{|z|=1} = \operatorname{Re} z \Big|_{|z|=1} ;$$

portanto, para cada uma das $(m-1)$ voltas temos um vetor normal diferente.

Geometricamente, podemos dizer que temos uma faixa de Möbius infinita com $(m-1)/2$ voltas em torno da circunferência com raio $\frac{2}{m-1}$.

Prosseguindo no estudo das superfícies mínimas não-orientáveis com gênero um, observamos que, se $c = -6\pi$, de (2.17) e (2.5), temos

$$-6\pi \leq 2\pi(\chi(M) - r)$$

ou

$$-6\pi \leq 2\pi(2 - \gamma - 2r)$$

Daí $\gamma + 2r \leq 5$ e as possibilidades, se $\gamma=1$, são

$$(i) \quad \gamma = 1, r = 1$$

$$(ii) \quad \gamma = 1, r = 2$$

Meeks provou que, em $\mathbb{R}^3$, a superfície do teorema 3.2.3 com $m=3$ é a única superfície mínima não-orientável em $\mathbb{R}^3$, regular, completa, com curvatura total -6π .

Posteriormente, daremos uma prova alternativa de que o caso (ii) não pode ocorrer em $\mathbb{R}^3$.

Com essas observações, verificamos que, para superfícies mínimas não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$, regulares, completas, com gênero um e dois fins temos a curvatura total $c < -6\pi$; ou seja, temos:

Proposição 3.2.5 - A curvatura total de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, não-orientável, regular, completa, com gênero um e dois fins é limitada superiormente por -10π .

Novamente estudando as possibilidades para as funções f, g da Representação de Weierstrass para a superfície dupla, podemos provar:

Teorema 3.2.6 - Existe uma superfície mínima S em $\mathbb{R}^3$, não-orientável, regular, completa, com gênero um, dois fins e curvatura total -10π .

Demonstração: - Vamos mostrar que existe uma superfície dupla, $\tilde{S}$, com gênero zero, quatro fins e curvatura total -20π .

A superfície dupla será dada por uma imersão $\tilde{X}: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{M}^2$ superfície conformemente equivalente a esfera menos quatro pontos, ou ainda, a $\mathbb{C} - \{0, \infty, 1, -1\}$, $\tilde{I}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\tilde{I}(z) = -1/\bar{z}$.

Exibiremos a imersão $\tilde{X}: \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$ escolhendo convenientemente as funções f, g da Representação de Weierstrass.

Sejam:

$$(3.11) \quad \begin{cases} g(z) = \frac{\alpha \bar{b}^2 z^3 (z^2 - b^2)}{(\bar{b}^2 z^2 - 1)} \\ f(z) = \frac{a(\bar{b}^2 z^2 - 1)^2}{z^2 (z-1)^4 (z+1)^4} \end{cases}$$

As condições (i) e (ii) do corolário 2.3.3 para que f e g sejam funções da Representação de Weierstrass de uma superfície dupla equivalem, respectivamente a (3.12) e (3.13):

$$(3.12) \quad |\alpha|, |b|^2 = 1$$

$$(3.13) \quad a = -\bar{a}\bar{\alpha}^2 b^4 \stackrel{(3.12)}{\iff} a\alpha\bar{b}^2 = -\bar{a}\bar{\alpha}b^2$$

Além disso, a métrica será completa e f e g satisfarão a condição de regularidade do teorema 1.3.1.

Mostremos que α, a, b podem ser escolhidos de forma que

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \frac{f}{2}(1-g^2, i(1-g^2), 2g) = \vec{0}$$

para toda curva γ fechada em $\mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$.

Sendo f e g dadas por (3.11), as integrais a serem examinadas são da forma

$$\int_{\gamma} \frac{P_j(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 (\zeta-1)^4 (\zeta+1)^4}, \quad j=1,2,3, \quad \gamma: \text{ curva fechada em } \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}.$$

Pela fórmula integral de Cauchy,

$$(3.14) \quad \int_{\gamma_0} \frac{P_j(\zeta) d\zeta}{\zeta^2(\zeta-1)^4(\zeta+1)^4} = 2\pi i P_j'(0), \quad \gamma_0: \text{curva fechada em torno de } z=0.$$

$$(3.15) \quad \int_{\gamma_1} \frac{P_j(\zeta) d\zeta}{\zeta^2(\zeta-1)^4(\zeta+1)^4} = \frac{2\pi i}{3!} \frac{1}{16} [P_j'''(1) - 12P_j''(1) + 57P_j'(1) - 105P_j(1)],$$

γ_1 : curva fechada em torno de $z=1$.

Com alguns cálculos, verificamos que:

$$(3.16) \quad \begin{cases} p_1(z) = a[(\bar{b}^2 z^2 - 1)^2 - \alpha^2 \bar{b}^4 z^6 (z^2 - b^2)^2] \\ p_2(z) = ia[(\bar{b}^2 z^2 - 1)^2 + \alpha^2 \bar{b}^4 z^6 (z^2 - b^2)^2] \\ p_3(z) = a\alpha \bar{b}^2 z^3 (z^2 - b^2)(\bar{b}^2 z^2 - 1) \end{cases}$$

ou ainda:

$$(3.17) \quad \begin{cases} p_1(z) = \bar{a}z^{10} - 2\bar{a}b^2 z^8 + \bar{a}b^4 z^6 + a\bar{b}^4 z^4 + 2a\bar{b}^2 z^2 + a \\ p_2(z) = i[-\bar{a}z^{10} + 2\bar{a}b^2 z^8 - \bar{a}b^4 z^6 + a\bar{b}^4 z^4 - 2a\bar{b}^2 z^2 + a] \\ p_3(z) = a\alpha \bar{b}^2 (\bar{b}^2 z^7 - (1 + |b|^4)z^5 + b^2 z^3) \end{cases}$$

Os polinômios p_1, p_2, p_3 de (3.17) são tais que

$$\int_{\gamma_0} \frac{P_j(\zeta) d\zeta}{\zeta^2(\zeta-1)^4(\zeta+1)^4} = 0 \text{ para toda curva fechada em torno de } z=0.$$

Chamando

$$R_j = P_j'''(1) - 12P_j''(1) + 57P_j'(1) - 105P_j(1), \quad j=1,2,3, \text{ podemos calcular:}$$

$$R_1 = -105(a - \bar{a}) + 30(a\bar{b}^2 - \bar{a}b^2) + 3(a\bar{b}^4 - \bar{a}b^4)$$

$$R_2 = i[-105(a + \bar{a}) + 30(a\bar{b}^2 + \bar{a}b^2) + 3(a\bar{b}^4 + \bar{a}b^4)]$$

$$R_3 = 0$$

Daí, $\operatorname{Re}\left[\frac{2\pi i}{3!16} \cdot R_j\right] = 0$ para $j=1,2$ se e somente se R_1 e R_2 se anulam simultaneamente, o que equivale a

$$-105a + 30a\bar{b}^2 + 3a\bar{b}^4 = 0$$

ou ainda

$$b^4 + 10b^2 - 35 = 0$$

As possibilidades de raízes são

$$b^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{240}}{2} = -5 \pm 2\sqrt{15}$$

Para cada raiz b , tomando $\alpha = \frac{1}{\bar{b}^2}$, $a=i$, teremos

(3.12) e (3.13) verificadas e a superfície dupla $\tilde{X}: C-\{0,1,-1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bem definida, mínima regular, completa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total -20π , pois $\tilde{c} = -4\pi \cdot \text{grau } g$ e $\text{grau } g=5$.

△

A descrição geométrica da superfície $\tilde{S}$ do teorema 3.2.6 é dificultada pela complexidade das funções $\frac{P_j(z)}{z^2(z-1)^4(z+1)^4}$.

Analisando a função g , podemos observar que as normais nos fins correspondentes ao zero e infinito são ortogonais às normais nos fins correspondentes a 1 e -1.

3.3 Imersões mínimas do plano projetivo menos um ponto em $\mathbb{R}^4$

Da mesma forma que no parágrafo anterior, estudaremos as superfícies duplas associadas às superfícies não-orientáveis; em particular, se a superfície não-orientável é dada por uma imer

são mínima do plano projetivo menos um ponto no $\mathbb{R}^4$, a superfície dupla será dada por uma imersão $\tilde{X}: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\tilde{I}: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ $\tilde{I}(z) = -1/\bar{z}$, $z=0$, $z=\infty$ os fins correspondentes por $\tilde{I}$.

Nessas condições temos:

Lema 3.3.1 - Se g_1, g_2 são as funções da representação (1.2) de uma superfície mínima do $\mathbb{R}^4$, regular, completa, orientável, com gênero zero, curvatura total finita e conectividade r , então g_1 e g_2 são racionais.

Demonstração: - Se a superfície em $\mathbb{R}^4$ é definida por $X = \operatorname{Re} \int \phi d\zeta$, as funções g_1, g_2 são dadas, por (1.7),

$$g_1 = \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\phi_1 - i\phi_2}, \quad g_2 = \frac{-\phi_3 + i\phi_4}{\phi_1 - i\phi_2}$$

Por outro lado, pelo teorema 1.4.9, as funções ϕ_j são da forma $\phi_j(z) = \frac{P_j(z)}{z^v}$, $P_j(z)$ polinômios. Portanto, g_1 e g_2 são racionais.

Em relação à curvatura total, para superfícies mínimas no $\mathbb{R}^4$, observamos que a superfície dupla tem curvatura total dada por

$$c(\tilde{S}) = -2\pi(\operatorname{grau} g_1 + \operatorname{grau} g_2)$$

com g_1, g_2 satisfazendo $g_j(-1/\bar{z}) = -1/\overline{g_j(z)}$, $j=1,2$.

Pela proposição 3.2.2, grau g_1 e grau g_2 são ambos ímpares, e

$$c(S) = \frac{1}{2} c(\tilde{S}) = 2\pi m, m \text{ inteiro, } m \text{ maior ou igual a dois.}$$

Em geral, para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura total finita, gênero um e um fim, temos:

Teorema 3.3.3 - Para qualquer valor de m inteiro, maior ou igual a 2, existe uma superfície mínima S em $\mathbb{R}^4$, não-orientável, regular, completa, com gênero um, um fim e curvatura total $-2\pi m$.

Demonstração: - A superfície dupla $\tilde{S}$ associada a S terá gênero zero, dois fins e curvatura total $-4\pi m = -2\pi \tilde{m}$, $\tilde{m}=2m$. Para a construção de imersões lembramos que $\tilde{m} \geq 4$ e podemos escrever:

$$\tilde{m} = 2m = k_1 + k_2, k_1, k_2 \text{ ímpares distintos, } k_1, k_2 \geq 1,$$

de forma que $k_j = \text{grau } g_j$, $j=1,2$.

As funções:

$$(3.18) \quad \begin{cases} f(z) = z^{m-1} \\ g_1(z) = \frac{\varepsilon_1}{z^{k_1}} \\ g_2(z) = \frac{\varepsilon_2}{z^{k_2}} \end{cases}$$

são as funções da representação (1.5) de uma superfície dupla em $\mathbb{R}^4$ se e somente se

$$(3.19) \quad \begin{cases} |\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1 \\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = (-1)^{m-1} \end{cases}$$

condições essas equivalentes a (i) e (ii) do corolário 2.3.4; observamos também que a superfície obtida a partir de f, g_1, g_2 é regular e completa.

Para verificar que $\int_{\gamma} \phi(\zeta) d\zeta = 0$ para toda curva γ fechada em $\mathbb{C} - \{0\}$, calculamos:

$$\phi_1(z) = f(1+g_1g_2) = z^{m-1} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{z^{m+1}}$$

$$\phi_2(z) = if(1-g_1g_2) = i(z^{m-1} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{z^{m+1}})$$

$$\phi_3(z) = f(g_1-g_2) = \frac{\varepsilon_1 z^{k_2} - \varepsilon_2 z^{k_1}}{z^{m+1}}$$

$$\phi_4(z) = -if(g_1+g_2) = \frac{-i(\varepsilon_1 z^{k_2} + \varepsilon_2 z^{k_1})}{z^{m+1}}$$

Imediatamente temos que $\int_{\gamma} \phi_j = 0$, $j=1,2$, γ curva fechada em $\mathbb{C} - \{0\}$. Para analisar $\int_{\gamma} \phi_j$, $j=3,4$, observamos que k_1 e k_2 podem ser reescritos:

$$k_1 = m-n$$

$$k_2 = m+n, \quad n \geq 1.$$

e $(m+1)-k_1 = n+1 \geq 2$, $k_2-m-1 = n-1 \geq 0$. Daí, $\int_Y \phi_j = 0, j = 3, 4$.

Daí: $\tilde{X} = \text{Re} \int_{z_0}^z \phi$ é uma superfície no $\mathbb{R}^4$ nas condições do teorema.

A

3.4 Superfícies mínimas não-orientáveis com gênero um, curvatura total finita em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$.

O teorema 2.4.4 dá a limitação para a dimensão de uma superfície mínima não-orientável:

$$\dim S \leq 2m - 2\gamma - r + 3 \leq 2m$$

com γ gênero de S , r : número de fins, e $c = -2\pi m$ a curvatura total.

Podemos mostrar que essa estimativa é a melhor possível.

Temos, para $\gamma=1$, $r=1$:

Teorema 3.4.1 - Para todo m inteiro maior ou igual a 2, existe uma imersão mínima do plano projetivo menos um ponto em $\mathbb{R}^{2m}$, reversa, regular, completa e com curvatura total $-2\pi m$.

Demonstração: - A superfície dupla associada a uma imersão de $\mathbb{RP}^2 - \{p\}$ em $\mathbb{R}^n$, pelo teorema 2.4.6 será definida por

$$\tilde{X}: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{X} = \text{Re} \int_{z_0}^z \Phi$$

com $\Phi_j(z) = \frac{P_j(z)}{z^{m+1}}$, e os polinômios $P_j(z)$ satisfazendo:

$$(i) \quad \text{máximo grau dos } P_j(z) \text{ é } 2m$$

$$(ii) \quad \sum_j P_j^2(z) \equiv 0$$

$$(iii) \quad \text{Re} \int_{\gamma} \Phi_j(z) dz = 0 \text{ para toda curva fechada } \gamma \text{ em } \mathbb{C} - \{0\}.$$

$$(iv) \quad \tilde{I}^*(\Phi_j(z) dz) = \overline{\Phi_j(z) dz}, \text{ equivalente a:}$$

$$(3.21) \quad (-1)^{m+1} \bar{z}^{2m} P_j(-1/\bar{z}) = \overline{P_j(z)}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Escrevendo

$$P_j(z) = a_0^j + a_1^j z + \dots + a_{2m-1}^j z^{2m-1} + a_{2m}^j z^{2m}, \text{ temos de (3.21)}$$

$$(3.22) \quad (-1)^{m+1} (a_0^j \bar{z}^{2m} - a_1^j \bar{z}^{2m-1} + \dots + a_{2m}^j) = (\bar{a}_{2m}^j \bar{z}^{2m} + \bar{a}_{2m-1}^j \bar{z}^{2m-1} + \dots + \bar{a}_0^j)$$

que resulta nas relações entre os coeficientes:

(a) $(m+1)$ par

ou

(b) $(m+1)$ ímpar

$$a_0^j = \bar{a}_{2m}^j$$

$$a_1^j = -\bar{a}_{2m-1}^j$$

$$\vdots$$

$$a_{m-1}^j = \bar{a}_{m+1}^j$$

$$a_m^j = -\bar{a}_m^j$$

$$a_0^j = -\bar{a}_{2m}^j$$

$$a_1^j = \bar{a}_{2m-1}^j$$

$$\vdots$$

$$a_{m-1}^j = \overline{a_{m+1}^j}$$

$$a_m^j = -\overline{a_m^j}$$

De (iii) temos $\operatorname{Re}\{2\pi i a_m^j\} = 0$ ou seja, $\operatorname{Im} a_m^j = 0$; da última condição de (a) ou (b) temos $a_m^j = 0$, $1 \leq j \leq n$.

Para determinar as soluções, precisamos escolher os vetores complexos

$$A_k = (a_k^1, \dots, a_k^n) \in \mathbb{C}^n, \quad 0 \leq k \leq m-1$$

satisfazendo às relações entre os coeficientes de (ii).

Podemos verificar que se m é par, em $\mathbb{C}^{2m}$ temos soluções da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = (1, i, 0, \dots, 0) \\ A_2 = (0, 0, 1, i, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ A_{m-1} = (0, 0, \dots, 1, i) \end{array} \right.$$

que satisfazem (ii)

Se m é ímpar, em $\mathbb{C}^{2m}$ temos as soluções

$$\begin{cases} A_0 = (1, i, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ A_{m-2} = (0, \dots, \sqrt{2}, i\sqrt{2}, 0, 0) \\ A_{m-1} = (0, \dots, 0, 1, i) \end{cases}$$

Δ

Se $\gamma=1$, $r=2$, teremos de (2.19), $\dim S \leq 2m-1$; se $m=3$, temos:

Teorema 3.4.2 - Não existe superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ não-orientável, regular, completa, de gênero um, dois fins e curvatura total -6π ; nessas condições, existem exemplos em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$.

Demonstração: - Pelo teorema 2.4.6, podemos estudar as superfícies duplas associadas com domínio $\mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$ dadas por

$$\tilde{X}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi(\zeta) d\zeta, \quad p_0, p \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$$

com as funções

$$\Phi_j(\zeta) = \frac{P_j(\zeta)}{\zeta^2(\zeta-1)^2(\zeta+1)^2}$$

pois, de (2.23), temos: $m_1 = m_2 = 2$.

Tomando

$$P_j(\zeta) = a_j \zeta^6 + b_j \zeta^5 + c_j \zeta^4 + d_j \zeta^3 + e_j \zeta^2 + f_j \zeta + g_j,$$

a condição $(-1)^4 \bar{\zeta}^6 P_j(-1/\bar{\zeta}) = \overline{P_j(\zeta)}$ equivale a

$$(3.23) \quad \begin{cases} a_j = \bar{g}_j \\ b_j = \bar{f}_j \\ c_j = \bar{e}_j \\ d_j = -\bar{d}_j \end{cases} \iff \text{Red}_j = 0$$

De $\sum_j p_j^2 \equiv 0$ e de (3.23), teremos:

$$(3.24) \quad \begin{cases} \sum_j a_j^2 = 0 \\ \sum_j a_j b_j = 0 \\ \sum_j b_j^2 + 2a_j c_j = 0 \\ \sum_j a_j d_j + b_j c_j = 0 \\ \sum_j c_j^2 + 2b_j d_j + 2a_j \bar{c}_j = 0 \\ \sum_j (-a_j \bar{b}_j + b_j \bar{c}_j + c_j d_j) = 0 \\ \sum_j -|d_j|^2 + 2|a_j|^2 - 2|b_j|^2 + 2|c_j|^2 = 0 \end{cases}$$

Para estudar a condição $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_j(z) dz = 0$ para toda curva fechada em $\mathbb{C} - \{0, 1, \infty\}$, analisemos separadamente

(i) $\int_{\gamma_0} \phi_j(z) dz$, γ_0 : curva fechada em torno de $z=0$; pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma_0} \phi_j(z) dz = 2\pi i P_j'(0) = -2\pi i b_j.$$

Daí:

(3.25) $\operatorname{Re} \int_{\gamma_0} \phi_j(z) dz = 0$ se e somente se $b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$.

(ii) $\int_{\gamma_1} \phi_j(z) dz$, γ_1 : curva fechada em torno de $z=1$; temos

$$\int_{\gamma_1} \phi_j(z) dz = \frac{2\pi i}{4} (P_j'(1) - 3P_j(1)) = \frac{\pi i}{2} [3(a_j - \bar{a}_j) + 4b_j + (c_j - \bar{c}_j)]$$

Usando 3.25, teremos:

$\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \phi_j(z) dz = 0$ se e somente se $(c_j - \bar{c}_j) = -3(a_j - \bar{a}_j)$, $1 \leq j \leq n$.

Decompondo nas partes real e imaginária, de (3.23),

(3.25), (3.26) temos:

$$(3.27) \quad \begin{cases} A = (a_1, \dots, a_n) = A_1 + iA_2 \\ B = (b_1, \dots, b_n) = B_1 + iB_2 = B_1 \\ C = (c_1, \dots, c_n) = C_1 + iC_2 = C_1 - 3iA_2 \\ D = (d_1, \dots, d_n) = D_1 + iD_2 = iD_2 \end{cases}$$

As relações de (3.24), usando (3.27) se reescrevem:

$$\begin{aligned}
 (3.28) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & |A_1| = |A_2| \quad , \quad \langle A_1, A_2 \rangle = 0 \\
 & \langle B_1, A_1 \rangle = 0 \quad , \quad \langle B_1, A_2 \rangle = 0 \\
 & |B_1|^2 = 2[-3|A_2|^2 - \langle A_1, C_1 \rangle] \\
 & \langle C_1, A_2 \rangle = 0 \\
 & \langle A_2, D_2 \rangle = \langle B_1, C_1 \rangle \\
 & \langle A_1, D_2 \rangle = 0 \\
 & |C_1|^2 - 9|A_2|^2 = -2\langle A_1, C_1 \rangle + 6|A_2|^2 \\
 & \langle C_1, C_2 \rangle = -\langle B_1, D_2 \rangle = 0 \\
 & \langle B_1, C_1 \rangle = -3\langle A_2, D_2 \rangle \\
 & \langle C_1, D_2 \rangle = 0 \\
 & 2[2|A_1|^2 + |C_1|^2 + 9|A_2|^2] = |D_2|^2 + 2|B_1|^2
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Comparando, em (3.28),

$$|B_1|^2 = -6|A_2|^2 - 2\langle A_1, C_1 \rangle$$

$$|C_1|^2 = 15|A_2|^2 - 2\langle A_1, C_1 \rangle$$

teremos

$$(3.29) \quad |C_1|^2 = |B_1|^2 + 21|A_2|^2$$

De: $\langle A_2, D_2 \rangle = \langle B_1, C_1 \rangle = -3\langle A_2, D_2 \rangle$, teremos

$$(3.30) \quad \langle A_2, D_2 \rangle = \langle B_1, C_1 \rangle = 0$$

Substituindo (3.29) na última relação de (3.28)

$$22|A_2|^2 + 42|A_2|^2 + 2|B_1|^2 = |D_2|^2 + 2|B_1|^2 ; \text{ daí:}$$

$$(3.31) \quad |D_2|^2 = 64|A_2|^2, \text{ e } D_2 \neq \vec{0}$$

Resumindo, temos, de (3.28) a (3.31):

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} |A_1| = |A_2|, \quad \langle A_1, A_2 \rangle = 0 \\ \langle B_1, A_1 \rangle = \langle B_1, A_2 \rangle = 0 \\ |B_1|^2 = -6|A_1|^2 - 2\langle A_1, C_1 \rangle \\ \langle C_1, A_2 \rangle = \langle C_1, B_1 \rangle = \langle C_1, D_2 \rangle = 0 \\ |C_1|^2 = |B_1|^2 + 21|A_2|^2 \\ \langle D_2, A_1 \rangle = \langle D_2, A_2 \rangle = \langle D_2, B_1 \rangle = 0 \\ |D_2| = 8|A_2| \end{array} \right.$$

Os vetores B_1 e D_2 são ortogonais ao subespaço gerado por $\{A_1, A_2\}$; se procuramos soluções em $\mathbb{R}^3$, $B_1 = \lambda D_2$ ($D_2 \neq 0$) e a condição $\langle B_1, D_2 \rangle = 0$ nos dará $B_1 = 0$.

Substituindo em equações de (3.32), teremos:

$$\begin{aligned} \langle C_1, A_1 \rangle &= -3|A_2|^2 \\ \langle C_1, A_2 \rangle &= \langle C_1, D_2 \rangle = 0 \\ |C_1|^2 &= 21|A_2|^2 \end{aligned}$$

Daí: $C_1 = \alpha \cdot A_1$, $\langle C_1, A_1 \rangle = \alpha \cdot |A_1|^2$, logo, $\alpha = -3$, o que é incompatível com a relação $|C_1|^2 = 21|A_2|^2$; daí não existem exemplos em $\mathbb{R}^3$.

Em $\mathbb{R}^4$ temos a solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (1, 0, 0, 0) \\ A_2 = (0, 1, 0, 0) \\ C_1 = (-3, 0, 0, 2\sqrt{3}) \\ C_2 = (0, -3, 0, 0) \\ D_2 = (0, 0, 8, 0) \\ B = \vec{0}. \end{array} \right.$$

que conduz a um exemplo nas condições do teorema.

Em $\mathbb{C}^5$, temos a solução de (3.24):

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (1, i, 0, 0, 0) \\ B = (0, 0, \sqrt{2}, 0, 0) \\ C = (-4, -3i, 0, 0, \sqrt{7}) \\ D = (0, 0, 0, 8i, 0) \end{array} \right.$$

que conduzem a solução em $\mathbb{R}^5$.

Δ

Já mostramos que existe uma superfície mínima não-orientável em $\mathbb{R}^3$ com gênero um, dois fins e curvatura total -10π . Neste caso, teremos $\dim S \leq 9$. Com a mesma técnica do teorema anterior, podemos verificar:

Teorema 3.4.3 - Existe uma imersão mínima completa do plano projetivo menos dois pontos em $\mathbb{R}^9$ com curvatura total -10π .

Demonstração: - Temos, neste caso, para as ordens de polo nos fins, da relação (2.23),

$$5 - (m_1 + m_2) = -1$$

ou seja, $m_1 + m_2 = 6$.

Escolhendo para a superfície dupla, $m_1 = m_2 = 3$, teremos, pelo teorema 2.4.6, a superfície dupla dada por

$$\tilde{X}(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi, \quad p_0, p \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}, \text{ com}$$

$$\Phi_j(\zeta) = \frac{P_j(\zeta)}{\zeta^3(\zeta-1)^3(\zeta+1)^3}$$

com $P_j(\zeta)$ satisfazendo (i) a (v) do teorema 2.4.6.

Em especial, (v): $\bar{\zeta}^{10} P_j(-1/\bar{\zeta}) = \overline{P_j(\zeta)}$, se escrevermos:

$$P_j(\zeta) = a_0^j + a_1^j \zeta + \dots + a_{10}^j \zeta^{10}, \text{ equivale a:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^j = \bar{a}_{10}^j \\ a_1^j = -\bar{a}_9^j \\ a_2^j = \bar{a}_8^j \\ a_3^j = -\bar{a}_7^j \\ a_4^j = \bar{a}_6^j \\ a_5^j = -\bar{a}_5^j \iff \operatorname{Re} a_5^j = 0 \end{array} \right.$$

Reescrevendo:

$$a_{10}^j = a_j, \quad a_9^j = b_j, \quad a_8^j = c_j, \quad a_7^j = d_j, \quad a_6^j = e_j, \quad a_5^j = f_j$$

os polinômios ficam:

$$P_j(z) = a_j z^{10} + b_j z^9 + c_j z^8 + d_j z^7 + e_j z^6 + f_j z^5 + \bar{e}_j z^4 - \bar{d}_j z^3 + \bar{c}_j z^2 - \bar{b}_j z + \bar{a}_j$$

Calculando:

$$(3.33) \quad \int_{\gamma_0} \Phi_j(z) dz = \frac{-2\pi i}{2} [P_j''(0) + 6P_j(0)], \quad \gamma_0 \text{ uma curva fechada em torno de } z=0$$

$$(3.34) \quad \int_{\gamma_1} \Phi_j(z) dz = \frac{2\pi i}{2} \cdot \frac{1}{8} [P_j''(1) - 9P_j'(1) + 24P_j(1)]$$

Em termos dos coeficientes de $P_j(z)$, (3.33) e (3.34) ficam:

$$(3.35) \quad \int_{\gamma_0} \Phi_j(z) dz = -2\pi i [3\bar{a}_j + \bar{c}_j]$$

$$(3.36) \quad \int_{\gamma_1} \Phi_j(z) dz = \frac{\pi i}{8} [24(a_j + \bar{a}_j) + 15(b_j - \bar{b}_j) + 8(c_j + \bar{c}_j) + 3(d_j - \bar{d}_j) - f_j]$$

Teremos, portanto:

$$(3.37) \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma_0} \Phi_j(z) dz = 0 \quad \text{se e somente se } (c_j + \bar{c}_j) = -3(a_j + \bar{a}_j) \quad \text{e}$$

$$(3.38) \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \Phi_j(z) dz = 0 \quad \text{se e somente se } f_j = 15(b_j - \bar{b}_j) + 3(d_j - \bar{d}_j)$$

Em termos das partes real e imaginária, como no teorema anterior, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = A_1 + iA_2 \\ B = B_1 + iB_2 \\ C = C_1 - 3iA_2 \\ D = D_1 + iD_2 \\ E = E_1 + iE_2 \\ F_1 = i(30B_2 + 6D_2) \end{array} \right.$$

Escrevendo:

$$A_1 = (\alpha, 0, \dots, 0)$$

$$A_2 = (0, \alpha, \dots, 0)$$

$$B_1 = (0, 0, \beta_1, 0, \dots, 0)$$

$$B_2 = (0, 0, 0, \beta_2, \dots, 0)$$

$$C_1 = (0, 0, 0, 0, \gamma, 0, \dots, 0)$$

$$D_1 = (0, 0, 0, 0, 0, \delta_1, 0, 0, 0)$$

$$D_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \delta_2, 0, 0)$$

$$E_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \mu_1, 0)$$

$$E_2 = (0, 0, \dots, 0, \mu_2)$$

deveremos escolher $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2, \mu_1, \mu_2$, de forma que satisfaçam as condições decorrentes de $\sum_j P_j^2(\zeta) \equiv 0$, que são:

$$(1) \sum_j a_j^2 = 0$$

$$(2) \sum_j a_j b_j = 0$$

$$(3) \sum_j (b_j^2 + 2a_j c_j) = 0$$

$$(4) \sum_j (a_j d_j + b_j c_j) = 0$$

$$(5) \sum_j (c_j^2 + 2a_j e_j + 2b_j d_j) = 0$$

$$(6) \sum_j (a_j f_j + b_j e_j + c_j d_j) = 0$$

$$(7) \sum_j (d_j^2 + 2a_j \bar{e}_j + 2b_j f_j + 2c_j e_j) = 0$$

$$(8) \sum_j (-a_j \bar{d}_j + b_j \bar{e}_j + c_j f_j + d_j e_j) = 0$$

$$(9) \sum_j (e_j^2 + 2a_j \bar{c}_j - 2b_j \bar{d}_j + 2c_j \bar{e}_j + 2d_j f_j) = 0$$

$$(10) \sum_j (-a_j \bar{b}_j + b_j \bar{c}_j - c_j \bar{d}_j + d_j \bar{e}_j - e_j f_j) = 0$$

$$(11) \sum_j (2|a_j|^2 - 2|b_j|^2 + 2|c_j|^2 - 2|d_j|^2 + 2|e_j|^2 - |f_j|^2) = 0$$

Teremos, então:

$$A = (\alpha, i\alpha, 0, \dots, 0)$$

$$B = (0, 0, \beta_1, i\beta_2, 0, \dots, 0)$$

satisfazem (1) e (2).

$$(3.39) \quad (3) \text{ equivale a } 6\alpha^2 = \beta_2^2 - \beta_1^2$$

$$C = (0, -3i\alpha, 0, 0, \gamma, 0, \dots, 0) \text{ e } D = (0, 0, 0, 0, 0, \delta_1, i\delta_2, 0, 0)$$

satisfazem (4).

$$(3.40) \quad (5) \text{ equivale a } \gamma^2 = 9\alpha^2$$

$$F = (0, 0, 0, 30i\beta_2, 0, 6i\delta_2, 0, 0), E = (0, \dots, \mu_1, i\mu_2)$$

satisfazem (6).

$$(3.41) \quad (7) \text{ equivale a } \delta_1^2 = \delta_2^2 + 60\beta_2^2$$

(8) e (10) se verificam.

$$(3.42) \quad (9) \text{ equivale a } \mu_1^2 = \mu_2^2 + 6\alpha^2 + 12\delta_2^2$$

$$(3.43) \quad (11) \text{ equivale a } 11\alpha^2 + \gamma^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 = \beta_1^2 + 451\beta_2^2 + \delta_1^2 + 19\delta_2^2.$$

Substituindo (3.40), (3.41), (3.42) em (3.43), teremos

$$(3.44) \quad \mu_2^2 = 4\delta_2^2 + 256\beta_1^2 + 1520\alpha^2$$

Escolhendo $\alpha=1$, $\beta_1=\sqrt{10}$, $\delta_2=2$, teremos $\mu_2=2^7$, $\beta_2=4$, $\gamma=3$, $\delta_1=\sqrt{964}$, $\mu_1=\sqrt{5050}$, que nos dão uma solução em $\mathbb{R}^9$.

A

3.5. Superfícies mínimas não-orientáveis de gênero dois.

Como nos parágrafos anteriores, nosso objetivo será estabelecer limitações para a curvatura total e condições de existência para superfícies mínimas não-orientáveis com gênero dois.

Dada uma superfície mínima não-orientável em $\mathbb{R}^n$ com gênero dois, definida por $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, passaremos à superfície dupla associada, de gênero um,

$$\tilde{X}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Se as superfícies são completas, com curvatura total finita, $\tilde{M}$ será conformemente equivalente ao toro T^2 exceto um número par de pontos.

Considerando a estrutura conforme no recobrimento universal do toro T^2 dado pelo reticulado no plano complexo gerado por

$$\Omega = \{m\lambda_1 + n\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \text{ linearmente independentes s}/\mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}\},$$

a involução $\tilde{I}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ será dada por

$$\tilde{I}(z) = \bar{z} + \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2, \quad \bar{z} = a\lambda_1 - b\lambda_2, \quad z = a\lambda_1 + b\lambda_2.$$

As funções $f, g, g_1, g_2, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}$ das representações (1.3), (1.4), (1.5) definidas sobre o recobrimento universal serão duplamente periódicas no plano complexo, com períodos (λ_1, λ_2) , isto é, satisfarão:

$$f(z + m\lambda_1 + n\lambda_2) = f(z), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z},$$

sendo portanto, funções elípticas no reticulado determinado por Ω .

Utilizaremos alguns resultados elementares da teoria das funções elípticas que poderão ser encontrados em [5], [7].

Inicialmente temos:

Proposição 3.4.1 - A curvatura total de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$, não-orientável, regular, completa, de gênero dois é limitada superiormente por -6π .

Demonstração: - Do teorema 2.4.4, temos:

$$\dim S \leq 2m - 2\gamma - r + 3$$

Se $\gamma=2$, então $\dim S \geq 3$ se e somente se

$$2m - r - 1 \geq 3$$

como $r \geq 1$, então $2m \geq 5$, logo, $m \geq 3$.

Δ

As superfícies duplas associadas a superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ são tais que as funções g, g_1, g_2 das representações (1.3), (2.5) satisfazem $g(\tilde{I}(z)) = -1/\overline{g(z)}$.

Em relação a essas funções, temos:

Proposição 3.5.2 - Se $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é elíptica com períodos (λ_1, λ_2) , tal que $g(\tilde{I}(z)) = \frac{-1}{g(z)}$, então, grau g é par.

Demonstração: - Sendo g uma função elíptica, g tem zeros e polos tais que se $a_1, \dots, a_k$ são zeros de g com multiplicidades $n_1, \dots, n_k$, respectivamente, e $b_1, \dots, b_\ell$ são polos de g com multiplicidades $m_1, \dots, m_\ell$, respectivamente, então: ([5], Teo. 1.5)

$$(3.45) \quad \sum_{j=1}^k n_j = \sum_{s=1}^{\ell} m_s$$

$$(3.46) \quad \sum_{j=1}^k n_j a_j \equiv \sum_{s=1}^{\ell} m_s b_s \pmod{\Omega}$$

Além disso, da condição $g(\tilde{I}(z)) = -1/\overline{g(z)}$, temos que se $p \in \mathbb{C}$ é um polo de g , $\tilde{I}(p)$ é um zero de g com a mesma multiplicidade; daí, $k=\ell$ e $n_j=m_j$, $1 \leq j \leq k$.

Daí, temos:

$$(3.47) \quad \sum_{j=1}^k m_j = \sum_{j=1}^k n_j = \text{grau } g$$

Por outro lado, os zeros e polos se relacionam por $\tilde{I}$, ou seja

$$(3.48) \quad a_j = \tilde{b}_j + \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2, \quad 1 \leq j \leq k$$

Substituindo (3.48) em (3.46),

$$\sum_{j=1}^k m_j (\tilde{b}_j + \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2) \equiv \sum_{j=1}^k m_j b_j \pmod{\Omega}$$

ou seja, se $b_j = \alpha_j \lambda_1 + \beta_j \lambda_2$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^k m_j \left(\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 \right) \equiv \sum_{j=1}^k 2m_j \beta_j \lambda_2$$

Daí, $\left(\sum_{j=1}^k m_j \right) \frac{\lambda_1}{2} = m \cdot \lambda_1$, e conseqüentemente $\sum_{j=1}^k m_j = \text{grau } g \text{ é par}$;

além disso, $2\lambda_2 \sum_{j=1}^k m_j \beta_j \equiv 0 \pmod{\Omega}$

Δ

Como consequência imediata temos:

Proposição 3.5.3 - A curvatura total de uma superfície S mínima em $\mathbb{R}^3$, não-orientável, regular, completa de gênero dois é da forma $-4\pi \cdot k$, k inteiro, maior ou igual a 2.

Demonstração: - Segue imediatamente de $c = -2\pi \cdot \text{grau } g$, grau g par, maior ou igual a 4 ($c \leq -6\pi$)

Δ

ou ainda:

Proposição 3.5.4 - Não existe superfície mínima S em $\mathbb{R}^3$ não-orientável, regular, completa, de gênero dois, com curvatura total -6π .

Demonstração: - Segue imediatamente da proposição 3.5.3.

Δ

Salientamos que, com este último resultado, temos estudadas, sob o ponto de vista de existência, as superfícies mínimas não-orientáveis, regulares, completas em $\mathbb{R}^n$ com curvatura total -6π , a menos da possibilidade $\gamma=2$, $r=1$, $n=4$.

o0o

BIBLIOGRAFIA

- [1] Chen, C.C., Simões, P.A.Q. - Superfícies mínimas do $\mathbb{R}^n$ - Escola de Geometria Diferencial, 1980.
- [2] Chern, S., Osserman, R. - Complete Minimal Surfaces in Euclidean n-space - J. d'Analyse Math. 19(1967), 15-34.
- [3] Costa, C.J. - Imersões Mínimas Completas em $\mathbb{R}^3$ de Gênero um e Curvatura total Finita - Tese de Doutorado, IMPA, 1982.
- [4] Darboux, G. - Leçons sur la théorie générale des surfaces - Première partie, Gauthier - Villars, 1941.
- [5] Duval, P. - Elliptic functions and elliptic curves - London Math. Society Lecture Note Series, 9 (1973).
- [6] Gackstatter, F. - Über die Dimension einer minimal - fläche und zur Ungleichung von St Cohn-Vossen. Arch. Rat. Mech. Anal. 61(1976), 141-152.
- [7] Halphen, G.H. - Traité des fonctions Elliptiques et leurs applications - Première partie, Gauthier-Villars, 1886.

- [8] Henneberg, L. - Über solche minimalfläche, welche eine vorgeschriebene ebene curve sur geodätischen line haben, - Doctoral Dissertation, Eidgenössisches Polythechikum, Zurich, 1875.
- [9] Henneberg, L. - Über diejenige minimalfläche, welche die Neil'sche Paralee zur ebenen geodätischen line hat - Vierteljschr Natuforsch, Ges. Zürich, 21(1876), 66-70.
- [10] Hoffman, D.A., Osserman, R. - The Geometry of the generalized Gauss map. - Memoirs of the AMS, Vol. 28, n° 36, November, 1980.
- [11] Jorge, L.P., Meeks III, W.H. - The topology of complete minimal surfaces of finite total curvature - Topology Vol. 22, n° 2, 203-221, 1983.
- [12] Lima, E.L. - Grupo fundamental e Espaços de Recobrimento - 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1977.
- [13] Massey, W.S. - Algebraic Topology: an introduction - Harbrace College Mathematics series, 1967.
- [14] Meeks III, W.H. - The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than -8π , Duke Math. Journal, 48, 3 (1981), 523-535.

- [15] Nitsche, J.C.C. - On new results in the theory of minimal surfaces - Bull. Amer. Math. Soc., 71(1965), 195-270.
- [16] Osserman, R. - A survey of minimal surfaces - Von Nostrand
- [17] Osserman, R. - Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n - Ann. of math, 80(1964) 340-364.
- [18] Spivak, M. - A Comprehensive introduction to Differential Geometry, Vol. 3, Perich Inc, 1975.