EQUAÇÕES INTEGRAIS DE
VOLTERRA - STIELTJES E
EQUAÇÕES DO TIPO NEUTRO

Luiz Fichmann

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ANÁLISE
ORIENTADOR: PROF. DR. CHAIM SAMUEL HÖNIG

São Paulo, janeiro de 1984

À

Emília, Rosely, Milena,
Márcia, Simone e Clenilda

I N D I C E

INTRODUÇÃO	i
Capítulo I - A equação Integral Linear de Volterra-Stieltjes (K) com vínculo linear (F_α), a equação adjunta (K_α^*) e casos particulares	
1.	1
2.	2
3.	4
4.	7
5.	11
6.	14
ii)	16
7.	19

Capítulo II - Estudo da equação diferencial funcional linear do tipo neutro (N) através da equação (K) 22

1.	A equação (N) e seus dados. Os núcleos μ e η	22
2.	A relação entre (N) e (K). O núcleo ${}^{t_0}_0K$	32
3.	O estudo de ${}^{t_0}_0K$, ${}^{t_0}_0R$, ${}^{-}K$, ${}^{-}R$	35
4.	As fórmulas (R^*) e (R_*)	40
5.	A equação (K) com núcleo ${}^{t_0}_0K$, a fórmula (ρ) e o teorema de existência e unicidade de solução para (N)	44
6.	i) A equação adjunta (N^*_0) , a fórmula (ρ^*)	51
	ii) A relação entre (N^*_0) e (N^*) e o teorema da existência e unicidade de solução para (N^*)	54
7.	A resolubilidade normal para o sistema $(N)+(F_\alpha)$ e para (N^*_α)	63
8.	O exemplo $F_\alpha(x) = x_{t_0}$	70
9.	O exemplo $F_\alpha(x) = -Mx_{t_0} - Nx_{t_1}$	75

APÊNDICE

A -	Os núcleos μ e η dados em [Henry 1]	98
B -	Os operadores $T(t, t_0)$, $T_1(t, t_0)$, $T_2(t, t_0)$, $T(t, t_0)$ e $\kappa(t, t_0)$	109
C -	i) A relação entre (R^*) e $(N)_0$	113
	ii) A relação entre ${}^{-}(R_*)$ e (N^*)	115
D -	O operador $\tilde{T}(s, t)$	118

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
--------------------------------------	-----

Para fins de verificar a resolubilidade normal e a alternativa de Fredholm, tem-se estudado, para uma equação diferencial ou integral com vínculos lineares, o problema adjunto. Em geral tem sido difícil conseguir um bom sistema adjunto para uma dada equação com um dado vínculo.

Como no caso de certas equações diferenciais lineares com condições de fronteira, o sistema adjunto tem a "mesma cara" do sistema inicial (e temos mesmo muitas vezes sistemas auto-adjuntos); os pesquisadores têm procurado então isso em condições mais gerais. Por exemplo, os matemáticos tchecos (ver referências [T1], [T2], [T3] e [T4]) fizeram isso com a equação (L).

O Professor Chaim S. Hönl mostrou em [H6] que se uma equação diferencial linear com vínculos lineares é um sistema auto-adjunto clássico então as condições dos vínculos são condições de fronteira (lembrar que as equações diferenciais lineares são equações do tipo (L) na forma derivada). Isso mostra que, de maneira geral, a simetria esperada para o sistema adjunto não tem razão de ser.

Mais recentemente, o Prof. Chaim S. Hönl obteve o sistema adjunto para a equação integral linear de Volterra-Stieltjes (K) com vínculo (F_α) e condições para valer a resolubilidade

normal (ver [H1]). Ele mostrou que na verdade o sistema adjunto é uma equação adjunta e o que antes pareciam ser vínculos são na realidade restrições no espaço das soluções, restrições essas que aparecem naturalmente, de modo funcional-analítico, quando se considera a dualidade correta (ver capítulo I, §4).

Como é sabido, um grande número de equações são casos particulares da equação (K), como por exemplo a equação (V), a equação (L) (e portanto as equações diferenciais lineares), a equação linear com retardamento (D) e a equação linear do tipo neutro (N), da qual a equação com retardamento é um caso particular.

Neste trabalho estuda-se a equação (N) com vínculo linear (F_α) e o sistema adjunto, à luz da equação integral de Volterra-Stieltjes (K) e dos resultados obtidos em [H1].

No capítulo I dão-se algumas indicações dos resultados sobre a equação (K) ([H2], [H3], [H4]) e do sistema adjunto (K_α^*) para o sistema (K)+(F_α) ([H1]). Vê-se exemplos de vínculos particulares e em seguida verifica-se como fica a equação adjunta para os casos particulares de (K): (L) e (V), com o vínculo (F_α). Finalmente, mostra-se que a equação com retardamento é um caso particular da equação do tipo neutro, ficando válidos então para aquela equação todos os resultados do próximo capítulo.

No capítulo II estuda-se a equação (N). Nele define-se o núcleo t_0K que reduz a equação (N) a um caso particular de (K). A partir disso os resultados obtidos para a equação (K) são particularizados (fórmulas do resolvente, teorema de existência e unicidade de solução, fórmula de solução, a equação adjunta para a equação com vínculo (F_α) , teorema de existência e unicidade de solução para a equação adjunta, fórmula da solução e finalmente condições para a resolubilidade normal).

No começo do capítulo fixamos um parâmetro $r > 0$ usado na equação. Convém notar que podemos tomar $r = \infty$, desde que para as noções de semi-variação, e variação consideremos funções de domínio $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e uma partição finita de $[-\infty, t_1]$ e daí terão sentido os conjuntos $SV([-\infty, t_1], X)$, $SV_{-\infty}([-\infty, t_1], X)$, $BV([-\infty, t_1], X)$, etc. Devemos lembrar também que

$$G([-\infty, t_1], X) = \{f \in G([-\infty, t_1], X) \mid \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(-\infty) < \infty\}.$$

As outras noções usadas no texto, como integral interior, $\Gamma_{-\infty}$, etc. ficam óbvias e os resultados apresentados continuam válidos, com exceção de II-6.ii, de II-9, do contra-exemplo no final do apêndice A, do apêndice C-ii e do apêndice D. No caso da equação com retardamento, r é exatamente o retardamento (a derivada da função num instante t depende de como ela foi desde o instante $t-r$), se $r = \infty$ temos a equação com retardamento infinito.

Os resultados do Capítulo II generalizam os resultados de [Henry 1] até o teorema 5, os resultados de [Henry 2] e os de [Hale] Capítulo VI-seções 1,2,3,4 e o Teorema 5.1. da seção 5. Estas duas últimas referências tratam da equação com retardamento. As três referências citadas lidam com funções contínuas a valores em espaços euclidianos e usam a integral de Lebesgue-Stieltjes. O nosso contexto é o das funções regradas a valores em espaços de Banach e a integral usada é a integral interior.

No apêndice deste trabalho faz-se a relação entre os resultados destas referências com os resultados do nosso texto.

Agradeço ao Prof. Dr. Chaïm Samuel Hönl pela sugestão e enfoque do tema e pelo paciente e dedicado trabalho de orientação.

Agradeço também à Srta. Antonia Soares pela datilografia deste trabalho.

São Paulo, janeiro de 1984

Luiz Fichmann

CAPÍTULO I

A equação integral linear de Volterra-Stieltjes (K) com vínculo linear (F_α), a equação adjunta (K_α^*) e casos particulares.

1. Notações e preliminares

Para as noções de função regradada, de função simplesmente regradada, de semi-varição, de variação, de função de semi-varição limitada, de função de variação limitada, da integral interior, da integral interior simples e das correspondentes notações, ver [H3] §1, págs. 175, 176, 177.

Vamos definir, dados $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$ com $a \leq t_0 \leq b$, os conjuntos

$$\Gamma = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq s\}$$

$$\Gamma_a = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq s \leq t\}$$

$$\Gamma_a^b = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq s \leq t \leq b\}$$

$${}^{t_0}\Gamma_a^b = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq s \leq t_0 \text{ ou } t_0 \leq s \leq t \leq b\}$$

(${}^{t_0}\Gamma_a^b$ é o correspondente a Γ_{t_0} na notação de [H3])

No §2 de [H3] encontramos a definição do núcleo

$$K \in G_{\Delta}^{\sigma}.SV^u({}^{t_0}_{\Gamma_a^b}, L(X))$$

e suas propriedades. Para os núcleos usados neste trabalho nós teremos sempre $K(t,t) = 0$ e nesse caso nós escrevemos

$$K \in G_0^{\sigma}.SV^u({}^{t_0}_{\Gamma_a^b}, L(X))$$

Estamos colocando Δ quando terminamos uma demonstração.

2. A equação linear de Volterra-Stieltjes (K)

Para X espaço de Banach,

$f \in G([a,b], X)$, $t_0 \in [a,b]$, $p_0 \in X$ e $K \in G_0^{\sigma}.SV^u({}^{t_0}_{\Gamma_a^b}, L(X))$,

consideremos a equação

$$(K) \quad x(t) - p_0 + \int_{t_0}^t .d_s K(t,s)x(s) = f(t) - f(t_0)$$

para $a \leq t \leq b$.

Em [H3] prova-se entre outras coisas, o seguinte

Teorema 2.1.: - São equivalentes as seguintes propriedades:

(p-1) Para cada $p_0 \in X$ e $f \in G([a,b],X)$, a equação (K) tem uma única solução regrada e o operador

$$f \in G([a,b],X) \longrightarrow x_f \in G([a,b],X)$$

é causal, isto é, dado

$$t \in [t_0, b], \quad f|_{[t_0, t]} \equiv 0 \implies x_f|_{[t_0, t]} \equiv 0$$

e dado $t \in [a, t_0]$, $f|_{[t, t_0]} \equiv 0 \implies x_f|_{[t, t_0]} \equiv 0$ onde x_f é a solução de (K) para a dada f e para $p_0 = f(t_0)$

(p-2) O núcleo K admite um único resolvente

$$R \in G_I^{\sigma, SV^u}({}^{t_0}\Gamma_a^b, L(X))$$

Este resolvente satisfaz as equações:

$$(R^*): \quad R(t,s) - I_X + \int_s^{\sigma} d_{\tau} K(t,\tau) \circ R(\tau,s) = 0 \quad \text{para } (t,s) \in {}^{t_0}\Gamma_a^b$$

$$(R_*): \quad R(t,s) - K(t,s) - I_X + \int_s^{\sigma} d_{\tau} R(t,\tau) \circ K(\tau,s) = 0 \quad \text{para } (t,s) \in {}^{t_0}\Gamma_a^b$$

Em caso de valer uma dessas propriedades equivalentes, a solução única de (K) será dada por:

$$(\rho) \quad x(t) = f(t) + R(t, t_0)[p_0 - f(t_0)] - \int_{t_0}^t d_{\tau} R(t, \tau) f(\tau)$$

para $t \in [a, b]$

e ainda temos que, nesse caso, vale a propriedade

(p-3) $\forall t \in [t_0, b[$, o operador $I_X - K(t^+, t)$ é inversível e bicontínuo (ou seja, $[I_X - K(t^+, t)]^{-1} \in L(X)$) e $\forall t \in]a, t_0]$ o operador $I_X + K(t^-, t)$ é inversível e bicontínuo.

Posteriormente, em [H2] (ver também [H5] teorema 3.8), dá-se uma condição suficiente e a mais geral já encontrada, para que um núcleo K em $G_0^\sigma.SV^u(\Gamma_a^b, L(X))$ admita um único resolvente (aqui estamos considerando $t_0 = a$ mas caso t_0 seja diferente de a , basta raciocinar separadamente em cada intervalo: $[t_0, b]$ e $[a, t_0]$). É dessa condição que trata o

Teorema 2.2.: - Se $K \in G_0^\sigma.SV^u(\Gamma_a^b, L(X))$ satisfaz

- a) Para cada $c \in [a, b[$, $\exists \delta > 0 | \sup\{SV_{]c, t]}(K^{t^-}) | c < t \leq c + \delta\} < 1$ e
 - b) Para cada $d \in]a, b]$, $\exists \delta > 0 | \sup\{SV_{]d - \delta, t]}(K^{t^-}) | d - \delta < t \leq d\} < 1$
- então a propriedade (p-3) equivale à propriedade (p-2).

3. Equação adjunta, operador adjunto, resolubilidade normal e alternativa de Fredholm em espaços de Banach

Sejam E_1, E_2, F_1, F_2 espaços de Banach e

$$\begin{cases} B_1: F_1 \times E_1 \longrightarrow \mathbb{C} \\ B_2: F_2 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{C} \end{cases} \quad \text{formas bilineares}$$

Definição 3.1.: - Dado $u: E_1 \longrightarrow E_2$ linear, dizemos que $u^*: F_2 \longrightarrow F_1$ linear é uma adjunta de u em relação às formas B_1 e B_2 se

$$B_1(u^*y_2, x_1) = B_2(y_2, ux_1) \quad \forall y_2 \in F_2, \forall x_1 \in E_1$$

Definição 3.2.: - Dizemos que B_1 é separante à esquerda quando temos:

$$B_1(y, x) = 0 \quad \forall x \in E_1 \implies y = 0$$

É imediata a demonstração da

Proposição 3.3.: - Se B_1 é separante à esquerda, então se u^* existe, para um dado u , ela é única.

$$\text{Consideremos as equações } \begin{cases} (I) & ux = f & (f \text{ dado em } E_2) \\ (I)_0 & ux = 0 \\ (I^*) & u^*y = g & (g \text{ dado em } F_1) \\ (I^*)_0 & u^*y = 0 \end{cases}$$

(I^*) é a equação adjunta de (I)

Definição 3.4.: - Dizemos que vale a alternativa de Fredholm para essas equações se valer o seguinte:

Ou (I) tem solução para todo $f \in E_2$ e nesse caso vale o análogo para (I^*) ,

Ou $(I)_0$ tem solução não trivial e vale o mesmo para $(I)_0^*$ e nesse caso temos que $\dim \ker u = \dim \ker u^* < \infty$ e ainda temos:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} (I) \text{ tem solução para um dado } f \in E_2 \text{ se e somen-} \\ \text{te se } B_2(y, f) = 0 \quad \forall y \in F_2 \mid y \text{ é solução de} \\ (I)_0^* \text{ e} \end{array} \right.$$

$$(**) \quad \left\{ \begin{array}{l} (I^*) \text{ tem solução para um dado } g \in F_1 \text{ se e somen-} \\ \text{te se } B_1(g, z) = 0 \quad \forall z \in E_1 \mid z \text{ é solução de } (I)_0 \end{array} \right.$$

Definição 3.5.: - Dizemos que vale a Resolubilidade Normal para (I) quando valer $(*)$ dado na definição anterior e dize mos que vale a Resolubilidade Normal para (I^*) quando valer $(**)$.

Exemplo 3.6.: - Para $u = j - k$, onde $j \in L(E_1, E_2)$ tal que $j^{-1} \in L(E_2, E_1)$ e $k \in K(E_1, E_2)$ ou seja, k compacto, e ainda $k^* \in K(F_2, F_1)$ vale a alternativa de Fredholm

Isso advém do fato de valer a alternativa de Fredholm, conforme [H8]-III.10-D, no caso de $E_1 = E_2 = E$, $F_1 = F_2 = E'$,
 $B_1(p', p) = B_2(p', p) = \langle p', p \rangle \in \mathbb{C} \quad \forall p' \in E' \quad \forall p \in E$ e $u = \lambda I - k$
 (onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in K(E)$ com $k^* \in K(E')$)

4. A equação (K) com vínculo (F_α) , a equação adjunta do sistema.

Conservando os dados do §2 e dados ainda Y espaço de Banach, $c \in Y$ e $\alpha \in SV_{t_0}([a,b], L(X,Y))$ vamos considerar o sistema:

$$(K) \quad x(t) - x(t_0) + \int_{t_0}^t d_s K(t,s)x(s) = f(t) - f(t_0) \text{ para } a \leq t \leq b$$

$$(F_\alpha) \quad F_\alpha(x) = c$$

onde $F_\alpha(x) = \int_a^b d\alpha(t)x(t)$. (F_α) é chamado vínculo linear.

Observemos que na equação (K) do §2 tínhamos $x(t_0) = p_0$ determinado e agora, ao invés disso, temos a condição (F_α) .

O Teorema 1.12 de [H3] diz que são isométricos os espaços $L(G^-([a,b], X), Y)$ e $SV_{t_0}([a,b], L(X,Y))$, de modo que para cada operador

$$T \in L(G^-([a,b], X), Y) \exists ! \alpha \in SV_{t_0}([a,b], L(X,Y))$$

tal que

$$T(x) = F_\alpha(x) \quad \forall x \in G^-([a,b], X)$$

Seguindo esse Teorema, para $t \in [a, t_0]$ e $p \in X$ temos que

$$\alpha(t).p = T(-X]t, t_0]p)$$

e para $t \in [t_0, b]$ e $p \in X$, temos que

$$\alpha(t)p = T(X]t_0, t]p)$$

Em [H1] é deduzida de maneira funcional-analítica a equação adjunta do sistema $(K)+(F_\alpha)$ que é dada por:

$$(K_\alpha^*) \quad \left[y(s) + \int_s^b K(t,s)^* \cdot dy(t) - \int_{t_0}^b K(t,t_0)^* dy(t) - \right. \\ \left. - y(t_0-s) \int_a^b [K(t,s) - K(t,t_0)]^* \cdot dy(t) + \alpha(s)^* \cdot d = g(s) \right], \\ a \leq s \leq b$$

onde $y = \chi_{[0,\infty[}$, $d \in Y'$,

$$g, y \in BV_{t_0}^{a,b}([a,b], X') = \{h \in BV_{t_0}([a,b], X') \mid h(a) = h(b)\}$$

Mais precisamente queremos dizer:

Teorema 4.1.: - Sejam $E_1 = G([a,b], X)$, $E_2 = G_{t_0}([a,b], X) \times Y$

$$F_1 = BV_{t_0}([a,b], X') \quad \text{e} \quad F_2 = BV_{t_0}^{a,b}([a,b], X') \times Y'$$

e as dualidades (formas bilineares):

$$B_1: F_1 \times E_1 \longrightarrow \mathbb{C} \mid B_1(g, z) = \int_a^b dg(s)z(s) \quad p/(g, z) \in F_1 \times E_1$$

$$B_2: F_2 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{C} \mid B_2((y, d), (f, c)) = \int_a^b dy(s)f(s) + \langle d, c \rangle$$

$$(\text{com } (y, d) \in F_2 \quad \text{e} \quad (f, c) \in E_2)$$

Seja $K_\alpha \in L(E_1, E_2)$ tal que para $x \in E_1$ tenhamos

$$K_{\alpha}(x) = (x - x(t_0) + k_{t_0} x, F_{\alpha}(x)) \in E_2$$

(onde $k_{t_0} \in L(G([a,b], X))$ com

$$(k_{t_0} x)(t) = \int_{t_0}^t d_s K(t,s) x(s), \quad t \in [a,b]$$

Então, a aplicação linear $K_{\alpha}^*: F_2 \longrightarrow F_1$ dada por

$$[K_{\alpha}^*(y,d)](s) = y(s) + \int_s^b K(t,s)^* dy(t) - \int_{t_0}^b K(t,t_0)^* dy(t) - y(t_0 - s) \int_a^b [K(t,s) - K(t,t_0)]^* dy(t) + \alpha(s)^* d$$

(para $s \in [a,b]$, $(y,d) \in F_2$).

é a única adjunta de K_{α} .

Demonstração: - A unicidade vem do fato, conforme a proposição 3.3., de B_1 ser separante à esquerda (e isso por sua vez sai do teorema 1.12 de [H3] fazendo $Y=C$).

Para mostrar que K_{α}^* é adjunta de K_{α} temos que mostrar que

$$B_1(K_{\alpha}^*(y,d), x) = B_2((y,d), K_{\alpha}(x)) \quad \forall x \in E_1, \quad \forall (y,d) \in F_2$$

ou seja, que

$$\int_a^b d([K_{\alpha}^*(y,d)](s)) x(s) = \int_a^b dy(t) [x(t) - x(t_0) + (k_{t_0} x)(t)] + \langle d, F_{\alpha}(x) \rangle$$

que é verificado facilmente através de cálculos com as integrais (isso é mostrado no Teorema 2.2. de [H1]). Δ

Com a notação do §3, se tomamos $u=K_\alpha \in L(E_1, E_2)$ vemos que a equação (I) toma a forma do sistema $(K)+(F_\alpha)$ para (f,c) dado em E_2 e (I^*) fica a equação (K_α^*) para g dado em F_1 .

O teorema principal de [H1] é o seguinte:

Teorema 4.2.: - As seguintes propriedades são equivalentes:

- A) Para $(f,c) \in G([a,b],X) \times Y$, o sistema $(K)+(F_\alpha)$ tem uma solução x se e somente se para cada

$$(y,d) \in BV_{t_0}^{a,b}([a,b],X') \times Y'$$

que é uma solução de $(K_\alpha^*)_0$ (com $g=0$), nós temos:

$$\int_a^b \cdot dy(s) \cdot f(s) + \langle d, c \rangle = 0$$

- B) $J(t_0) \cdot X$ é um subespaço vetorial fechado de Y , onde

$$J(t_0) = \int_a^b \cdot d\alpha(t) \circ R(t, t_0) \in L(X, Y) \text{ (R é resolvente de K)}$$

- C) $J(t_0) \cdot Y'$ é um subespaço vetorial fechado de X'

- D) Para $g \in BV_{t_0}^{a,b}([a,b],X')$, a equação (K_α^*) tem uma solução $(y,d) \in BV_{t_0}^{a,b}([a,b],X') \times Y'$ se e somente se para

cada $z \in G([a,b],X)$ que é solução do sistema

$(K)_0 + (F_\alpha)_0$ (com $f=0$ e $c=0$), nós temos:

$$\int_a^b dg(s) \bar{z}(s) = 0$$

Vemos que A) e D) expressam exatamente a resolubilidade normal para $(K) + (F_\alpha)$ e (K_α^*) respectivamente, conforme a definição 3.5.

Observação 4.3: - Como fica claro no enunciado do teorema 4.2., estamos lidando com núcleos K que satisfazem a propriedade (p-2) (existência e unicidade do resolvente)

5. Exemplos de vínculos particulares $F_\alpha \in L(G^+([a,b],X),Y)$

1º) $F_\alpha(x) = Mx(a^+) + Nx(b^-)$ onde $M, N \in L(X,Y)$

Pelo Teorema 1.12 de [H3] temos que

$$\exists! \alpha \in SV_a([a,b], L(X,Y)) \mid F_\alpha(x) = \int_a^b d\alpha(t)x(t)$$

e para $t \in [a,b]$ e $p \in X$ temos que

$$\alpha(t)p = F_\alpha(x_{[a,t]}p). \quad \text{Assim chegamos a } \alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t=a \\ M & \text{para } a < t < b \\ M+N & \text{para } t=b \end{cases}$$

Para um sistema $(K) + (F_\alpha)$ com $t_0 = a$, obtemos a equação adjunta

$$(K_\alpha^*) \quad y(s) + \int_s^b K(t,s) dy(t) - \int_a^b K(t,a) dy(t) + \alpha(s) * d = g(s)$$

para $a \leq s \leq b$ onde $\alpha(a)^* = 0$, $\alpha(s)^* = M^*$ para $a < s < b$ e $\alpha(b)^* = M^* + N^*$

Convém observar que se (K) tem ponto fixo $t_0 \in [a,b]$ tomamos então $\bar{\alpha} = \alpha - \alpha(t_0) \in SV_{t_0}([a,b], L(X,Y))$ e teremos a equação adjunta $(K_{\bar{\alpha}}^*)$.

Podemos determinar ainda o operador $J(t_0) \in L(X,Y)$ dado no teorema 4.2. Para $p \in X$ temos:

$$J(t_0)p = \int_a^b d\alpha(t) \cdot R(t, t_0)p = M \cdot R(a^+, t_0)p + N \cdot R(b^-, t_0)p$$

ou seja

$$J(t_0) = M \circ R(a^+, t_0) + N \circ R(b^-, t_0)$$

29) $F_\alpha(x) = x(t_1^+)$ onde $t_1 \in [a, b[$ (neste caso $Y=X$)

Pelo mesmo raciocínio anterior temos que, se

$$t_1 < t_0 \leq b, \quad \alpha(t) = \begin{cases} -I_X & \text{para } a \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{para } t_1 < t \leq b \end{cases}$$

e então temos $\alpha(s)^* = \begin{cases} -I_X & \text{para } a \leq s \leq t_1 \\ 0 & \text{para } t_1 < s \leq b \end{cases}$

e se $a \leq t_0 \leq t_1$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } a \leq t \leq t_1 \\ I_X & \text{para } t_1 < t \leq b \end{cases} \quad \text{e então } \alpha(s)^* = \begin{cases} 0 & \text{para } a \leq s \leq t_1 \\ I_{X'} & \text{para } t_1 < s \leq b \end{cases}$$

Nesse caso, para

$$p \in X, \quad J(t_0)p = \int_a^b d\alpha(t) R(t, t_0)p = R(t_1^+, t_0)p$$

$$\text{assim } J(t_0) = R(t_1^+, t_0)$$

$$39) \quad F_\alpha(x) = x(t_1^+) - x(t_1^-) \quad \text{onde } t_1 \in]a, b[\quad (\text{Neste caso } Y=X)$$

Analogamente aos anteriores temos: se $t_0 \neq t_1$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq t_1 \\ -I_X & \text{para } t=t_1 \end{cases} \quad \text{e portanto } \alpha(s)^* = \begin{cases} 0 & \text{para } s \neq t_1 \\ -I_{X'} & \text{para } s=t_1 \end{cases}$$

$$\text{e se } t_0 = t_1, \quad \alpha(t) = \begin{cases} I_X & \text{para } t \neq t_1 \\ 0 & \text{para } t=t_1 \end{cases} \quad \text{e } \alpha(s)^* = \begin{cases} I_{X'} & \text{para } s \neq t_1 \\ 0 & \text{para } s=t_1 \end{cases}$$

$$\text{Nesse caso, para } p \in X, \quad J(t_0)p = \int_a^b d\alpha(t) R(t, t_0)p = R(t_1^+, t_0)p - R(t_1^-, t_0)p$$

$$\text{assim } J(t_0) = R(t_1^+, t_0) - R(t_1^-, t_0)$$

Para finalizar este parágrafo, convém notar que

$$F \in L(G([a,b],X),X) \text{ com } F(x) = x(t_0)$$

(que, para $p_0 \in X$, nos dá o vínculo $x(t_0)=p_0$), não se enquadra nos casos F_α pois $F \notin L(G^-([a,b],X),X)$.

Quando tomamos $F_\alpha(x) = x(t_0)$ para $x \in G^-([a,b],X)$, na verdade estamos tomando o vínculo $F_\alpha(x) = x(t_0^-)$.

6. Casos particulares de $(K)+(F_\alpha)$

i) A equação linear de Stieltjes (L) com vínculo (F_α)

Se tomamos $K(t,s) = A(s)-A(t)$ para $(t,s) \in {}^t_0 r_a^b$,

onde

$$A \in \text{SVG}^\sigma([a,b],L(X)) = \text{SV}([a,b],L(X)) \cap G^\sigma([a,b],L(X))$$

e ainda A satisfazendo as exigências para a existência e unicidade do resolvente de K (ver [H7] e [H3] §4-2), a equação (K) fica:

$$(L) \quad \underbrace{x(t)-x(t_0)} + \int_{t_0}^t .dA(s)x(s) = f(t)-f(t_0)$$

Caso A e f sejam primitivas de A' e f' , podemos derivar (L) e obter a equação diferencial linear:

$$(L') \quad \boxed{x'(t)+A'(t)x(t) = f'(t)}$$

Voltando ao caso geral, a equação adjunta para $(L)+(F_\alpha)$ fica então

$$y(s) + \int_s^b \cdot dy(t) \circ [A(s) - A(t)] - \int_{t_0}^b \cdot dy(t) \circ [A(t_0) - A(t)] + \alpha(s) * d = g(s)$$

para $t_0 \leq s \leq b$, e

$$y(s) - \int_a^s \cdot dy(t) \circ [A(s) - A(t)] + \int_a^{t_0} \cdot dy(t) \circ [A(t_0) - A(t)] + \alpha(s) * d = g(s).$$

para $a \leq s \leq t_0$

que simplificando fica:

$$(L_\alpha^*) = \begin{cases} y(s) \circ [I_X + A(s)] + y(a) \circ [A(s) - A(t_0)] + \int_{t_0}^s \cdot dy(t) \circ A(t) + \alpha(s) * d = g(s) \\ \text{para } a \leq s \leq t_0 \\ y(s) \circ [I_X - A(s)] + y(b) \circ [A(s) - A(t_0)] + \int_{t_0}^s \cdot dy(t) \circ A(t) + \alpha(s) * d = g(s) \\ \text{para } t_0 \leq s \leq b \end{cases}$$

Tomando $t_0 = a$ teremos $y(a) = y(b) = 0$ e assim temos

$$(L_\alpha^*-1) \quad y(s) \circ [I_X - A(s)] + \int_a^s \cdot dy(t) \circ A(t) + \alpha(s) * d = g(s),$$

$s \in [a, b]$

Supondo A contínua e usando a integração por partes, chegamos em

$$(L_\alpha^*-2) \quad y(s) - \int_a^s y(t) \circ dA(t) + \alpha(s) * d = g(s) \quad \text{para } s \in [a, b]$$

(vemos que $\int_a^b y(t) \circ dA(t) = \alpha(b) * d$)

Caso A, α e g sejam deriváveis, podemos derivar (L_{α}^{*-2}) e obter a equação:

$$(L_{\alpha}^{*-1}) \quad y'(s) - y(s) \circ A'(s) + \alpha'(s) * .d = g'(s)$$

para $s \in [a, b]$

ii) A equação integral linear de Volterra (V) com vínculo (F_{α})

Se tomarmos $K(t, s) = \int_t^s V(t, \sigma) d\sigma$ para $(t, s) \in {}^{t_0}\Gamma_a^b$

com $V: [a, b] \times [a, b] \longrightarrow L(X)$ satisfazendo as condições para que K esteja em $G_0^{\sigma} . SV^u({}^{t_0}\Gamma_a^b, L(X))$ e admita um único resolvente (em [H4] capítulo III, §1-B, exemplo B, aparecem condições suficientes usando-se a integral de Riemann ou de Bochner-Lebesgue; em [H3] §4 item 3 usa-se a integral de Bochner-Lebesgue); a equação (K) fica:

$$(V) \quad x(t) - x(t_0) + \int_{t_0}^t V(t, s) x(s) ds = f(t) - f(t_0)$$

A equação adjunta (K_{α}^*) para o sistema $(V) + (F_{\alpha})$ fica:

$$(V_{\alpha}^{*-1}) = \begin{cases} y(s) - \int_a^s .dy(t) \circ \int_t^s V(t, \sigma) d\sigma + \int_a^{t_0} .dy(t) \circ \int_t^{t_0} V(t, \sigma) d\sigma + \alpha(s) * .d = g(s) \\ \text{para } a \leq s \leq t_0 \\ y(s) + \int_s^b .dy(t) \circ \int_t^s V(t, \sigma) d\sigma - \int_{t_0}^b .dy(t) \circ \int_t^{t_0} V(t, \sigma) d\sigma + \alpha(s) * .d = g(s) \\ \text{para } t_0 \leq s \leq b \end{cases}$$

Vamos aplicar um teorema análogo ao de Fubini para essas integrais. Para isso V precisa satisfazer condições que o torne válido. Um exemplo disso está na

Proposição 6.1.: - Para $X = \mathbb{R}$ e $V: [a, b]^2 \rightarrow L(X) \simeq \mathbb{R}$ boreliana e limitada vale:

$$(6-1) \quad \int_a^s dy(t) \cdot \int_t^s V(t, \sigma) d\sigma = \int_a^s \left[\int_a^\sigma dy(t) \cdot V(t, \sigma) \right] d\sigma$$

$\forall s \in [a, b], \forall y \in BV([a, b])$, e

$$(6-2) \quad \int_s^b dy(t) \int_s^t V(t, \sigma) d\sigma = \int_s^b \left[\int_\sigma^b dy(t) \cdot V(t, \sigma) \right] d\sigma$$

$\forall s \in [a, b], \forall y \in BV([a, b])$.

Prova: - Seja $BV^\uparrow([a, b]) = \{y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid y \text{ é monotona não-decrescente}\}$

Para $y \in BV^\uparrow([a, b])$, chamemos de dy a respectiva medida de Lebesgue-Stieltjes gerada por y e chamemos de dm a medida de Lebesgue na reta.

Temos então que V é $dy \times dm$ -mensurável $\forall y \in BV^\uparrow([a, b])$ (aqui, $dy \times dm$ indica a medida produto) pois os conjuntos borelianos são $dy \times dm$ -mensuráveis $\forall y \in BV^\uparrow([a, b])$ porque assim o são os retângulos abertos do plano e um aberto do plano é uma reunião enumerável de retângulos abertos.

Como V é limitada, temos que V é $dy \times dm$ -integrável em $[a, b]^2$, $\forall y \in BV^\uparrow([a, b])$. Assim, para $s \in [a, b]$, podemos aplicar Fubini ao núcleo V no quadrado $[a, s]^2$ obtendo:

$$\int_{[a, s]^2} V dy \times dm = \int_a^s \left[\int_a^s V(t, \sigma) d\sigma \right] dy(t) = \int_a^s \left[\int_a^s V(t, \sigma) dy(t) \right] d\sigma$$

Ora, sabemos que dado $y \in BV([a,b])$, $\exists y_1, y_2 \in BV^+([a,b])$ | $y = y_1 - y_2$ e aplicando nosso resultado para y_1 e y_2 chegamos em:

$$(6-3) \quad \int_a^S dy(t) \int_a^S V(t, \sigma) d\sigma = \int_a^S \left[\int_a^S dy(t) \cdot V(t, \sigma) \right] d\sigma$$

Definindo agora

$$\tilde{V}: [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por } \begin{cases} \tilde{V}(t, \sigma) = V(t, \sigma) & \text{para } t \leq \sigma \\ \tilde{V}(t, \sigma) = 0 & \text{para } t > \sigma \end{cases}$$

vemos que $\tilde{V}$ é boreliano e limitado, logo podemos aplicar (6-3) a $\tilde{V}$ e obtemos então (6-1)

De maneira análoga obtemos (6-2)

Observação 6.2.: - Para $X = \mathbb{R}^n$ e $V: [a,b]^2 \longrightarrow L(X)$ boreliana e limitada, é claro que ainda valem (6-1) e (6-2). (aqui e evidentemente tomamos $y \in BV([a,b], (\mathbb{R}^n)')$)

Observação 6.3.: - Usando a integral de Bochner-Lebesgue não é difícil demonstrar que a proposição 6.1. ainda vale para qualquer espaço de Banach X . Neste caso porém ela não apresenta grande interesse pois em espaços de Banach de dimensão infinita as funções borelianas e mesmo as funções mensuráveis podem formar uma classe muito restrita. Basta lembrar que existem espaços de Banach X tais que as funções

$f: [a, b] \longrightarrow X$ que são integráveis no sentido de Riemann podem não ser mensuráveis, além disso, as funções α que aparecem no Teorema 1.12 de [H3] (citado no §4) podem também não ser mensuráveis.

Aplicando (6-1) e (6-2) em (V_{α}^*-1) obtemos:

$$(V_{\alpha}^*-2) \quad \begin{cases} y(s) - \int_a^s \left[\int_a^{\sigma} dy(t) \cdot V(t, \sigma) \right] d\sigma + \int_a^{t_0} \left[\int_a^{\sigma} dy(t) \cdot V(t, \sigma) \right] d\sigma + \alpha(s) * d = g(s) \\ \text{para } a \leq s \leq t_0 \\ y(s) - \int_s^b \left[\int_{\sigma}^b dy(t) \cdot V(t, \sigma) \right] d\sigma + \int_{t_0}^b \left[\int_{\sigma}^b dy(t) \cdot V(t, \sigma) \right] d\sigma + \alpha(s) * d = g(s) \\ \text{para } t_0 \leq s \leq b \end{cases}$$

Se mais, ainda, tivermos α e g diferenciáveis, derivando (V_{α}^*-2) em relação a s e fazendo $z(t) = y'(t)$, chegamos na seguinte equação adjunta de $(V) + (F_{\alpha})$

$$(V_{\alpha}^*-3) \quad \begin{cases} z(s) - \int_a^s z(t) \circ V(t, s) dt + \alpha'(s) * d = g'(s) & \text{para } a \leq s \leq t_0 \\ z(s) + \int_s^b z(t) \circ V(t, s) dt + \alpha'(s) * d = g'(s) & \text{para } t_0 \leq s \leq b \end{cases}$$

7. A equação diferencial funcional linear com retardamento

Seja X um espaço de Banach, $t_1 > t_0$ e $r > 0$ (o retardamento). Dado $x \in G([t_0 - r, t_1], X)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$

definimos $x_t \in G([-r, 0], X)$ por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$

para $\theta \in [-r, 0]$.

Uma equação diferencial linear com retardamento é uma equação da forma

$$(D) \quad x'(t) = B(t, x_t) + h(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

onde

$$x \in G([t_0 - r, t_1], X), \quad h \in L_1([t_0, t_1], X)$$

$$e \quad B: [t_0, t_1] \times G^-([-r, 0], X) \longrightarrow X$$

é tal que para $x \in G([t_0 - r, t_1], X)$, a função

$$t \in [t_0, t_1] \longrightarrow B(t, x_t) \in X$$

é integrável. Ainda temos que B é linear e contínua na segunda variável.

Pelo Teorema 1.12. de [H3], sabemos então, que

$$\exists \eta: [t_0, t_1] \times [-r, 0] \longrightarrow L(X)$$

$$\text{com } \eta^t = \eta(t, \cdot) \in SV_0([-r, 0], L(X)) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

e tal que

$$B(t, \emptyset) = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta), \emptyset(\theta) \quad \forall \emptyset \in G^-([-r, 0], X),$$

$$\forall t \in [t_0, t_1].$$

As equações (D) que estudamos são ainda tais que

$$\exists m \in L_1([t_0, t_1]) \text{ com } SV[\eta^t] \leq m(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Uma equação dessas é um caso particular da equação diferencial funcional linear do tipo neutro:

$$(N) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - A(t, x_t) - H(t)) = B(t, x_t)$$

Quando $A \equiv 0$ e H é a integral de $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, X)$ e portanto $H'(t) = h(t)$ quase sempre.

A equação (N) será estudada no próximo capítulo e então fazendo essas particularizações, temos que todos os resultados obtidos para a equação (N) são válidos para a equação (D).

Esses resultados, como já dissemos na introdução, generalizam os de [Henry 2] e [Hale] e nesse caso há um perfeito encaixe entre a teoria dessas referências e a nossa. O Teorema II-9.9, por exemplo, aplicado à equação (D) é o teorema principal de [Henry 2] estendido.

Dizer que $A \equiv 0$ equivale a dizer que $\mu \equiv 0$ (ver II-1 para a definição de μ).

No apêndice A, mostramos que para um núcleo μ que satisfaz as condições dadas em [Henry 1], se enquadrar nas nossas condições, é necessário e suficiente que ele seja regrado nas contra-diagonais. No caso da equação (D), como $\mu \equiv 0$, isso acontece.

CAPÍTULO II

Estudo da equação diferencial funcional linear do tipo neutro (N) através da equação (K)

1. A equação (N) e seus dados. Os núcleos μ e η .

Vamos considerar X um espaço de Banach e $r > 0$

Seja

$$G = G([-r, 0], X) \quad \text{e} \quad G^- = G^-([-r, 0], X)$$

Para $x \in G(\mathbb{R}, X)$ e $t \in \mathbb{R}$, definimos $x_t \in G$ por

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad \text{para} \quad -r \leq \theta \leq 0$$

Para $r = +\infty$ devemos tomar $x \in G([-\infty, \infty], X)$. Ver na introdução deste trabalho a definição deste conjunto e outros comentários a respeito do caso $r = +\infty$.

Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, vamos estudar a equação da forma:

$$\begin{array}{l} (N; H; t_0) \\ \text{ou} \\ (N-1) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x(t) - A(t, x_t) - \int_{t_0}^t B(\tau, x_\tau) d\tau - H(t) = \text{cte para } t \geq t_0 \end{array} \right.$$

no contexto das funções regradas, ou seja, $H \in G(\mathbb{R}, X)$ e procuramos soluções regradas.

(N-1) é a forma integral da equação do tipo neutro:

$$\begin{array}{l} (N,H) \\ \text{ou} \\ (N-2) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x(t)-A(t,x_t)-H(t)) = B(t,x_t) \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Para (N-1) ter sentido neste contexto, devemos ter

$$A, B: \mathbb{R} \times G^- \rightarrow X$$

tais que vale:

O_A - Para $x \in G(\mathbb{R}, X)$, $A(t, x_t)$ é regradada como função de t e

O_B - Para $x \in G(\mathbb{R}, X)$, $B(t, x_t)$ é localmente integrável como função de t .

Observação 1.1.: - B não precisa necessariamente estar definido em todo $\mathbb{R}$, na primeira variável, mas sim quase-sempre em $\mathbb{R}$.

Definição 1.2.: - Sejam $\tilde{A}, \tilde{B} \in G(\mathbb{R}, X) \rightarrow X^{\mathbb{R}}$ tais que, para $x \in G(\mathbb{R}, X)$, $[\tilde{A}(x)](t) = \tilde{A}_x(t) = A(t, x_t)$ e

$$[\tilde{B}(x)](t) = \tilde{B}_x(t) = B(t, x_t) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

As condições dadas acima para A e B equivalem a

$$\tilde{A}(G(\mathbb{R}, X)) \subset G(\mathbb{R}, X) \quad \text{e} \quad \tilde{B}(G(\mathbb{R}, X)) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R}, X).$$

Mais ainda, queremos A e B operadores lineares e contínuos na segunda variável.

Observação 1.3.: - Sempre que aplicamos um operador de G^- a uma função de G , estamos supondo o operador aplicado na classe de equivalência da função, isto é, no seu representante em G^- .

Vamos assumir, mais precisamente:

i) Hipóteses sobre A

1_A - Para cada $t \in \mathbb{R}$, $A^t \in L(G^-, X)$

(lembrar que $A^t(\emptyset) = A(t, \emptyset)$ para $\emptyset \in G^-$). Assim, pelo

Teorema 1.12 de [H3], para cada $t \in \mathbb{R}$,

$\exists ! \mu^t \in SV_0([-r, 0], L(X))$ tal que $A(t, \emptyset) = \int_{-r}^0 d\mu^t(\theta) \emptyset(\theta)$
 $\forall \emptyset \in G^-$

Vamos definir $\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow L(X)$ com

$$\mu(t, \theta) = \begin{cases} \mu^t(\theta) & \text{para } -r \leq \theta \leq 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{para } \theta \geq 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ \mu^t(-r) & \text{para } \theta \leq -r, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Desse modo, dado $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, para $t \in [t_0, t_1]$ e $x \in G([t_0 - r, t_1], X)$ temos:

$$A(t, x_t) = \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) x(t + \theta) = \int_{t-r}^t d_\tau \mu(t, \tau - t) x(\tau) = \int_{t_0-r}^{t_1} d_\tau \mu(t, \tau - t) x(\tau)$$

2_A - Em cada $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|A^t\| < \infty$

Proposição 1.4.: - Para cada $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ temos

$$\tilde{A} \in L(G^-([t_0-r, t_1], X), G([t_0, t_1], X))$$

($\tilde{A}$ como na definição 1.2. sô que neste caso tomamos

$$x \in G^-([t_0-r, t_1], X) \text{ e } t \in [t_0, t_1])$$

Prova: - Seja $x \in G^-([t_0-r, t_1], X)$, temos:

$$\|\tilde{A}(x)\| = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|\tilde{A}_x(t)\| = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|A(t, x_t)\| \leq \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|A^t\| \cdot \|x_t\| \leq (\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|A^t\|) \cdot \|x\|$$

Por 2_A então, temos que $\tilde{A}$ é contínua e a linearidade de $\tilde{A}$ segue de 1_A A

Vemos que, pelo Teorema 2.2. de [H3],

$$\exists! \mathcal{D}_0 \in G^\sigma \cdot SV_{t_0-r}^u([t_0, t_1] \times [t_0-r, t_1], L(X))$$

com

$$\tilde{A}_x(t) = \int_{t_0-r}^{t_1} d_\tau \mathcal{D}_0(t, \tau) x(\tau) \quad \forall x \in G^-([t_0-r, t_1], X)$$

e para $p \in X$, o mesmo teorema nos dá:

$$\mathcal{D}_0(t, s) \cdot p = [\tilde{A}(x_{[t_0-r, s]} p)](t)$$

e por 1_A : $\mathcal{D}_0(t,s).p = \int_{t_0-r}^{t_1} d_\tau \mu(t,\tau-t)[\chi_{[t_0-r,s]}p](\tau) = \mu(t,s-t)p - \mu(t,-r)p$

Assim

$$\mathcal{D}_0(t,s) = \mu(t,s-t) - \mu(t,-r)$$

Sejam

$$\mathcal{D}(t,s) = \mu(t,s-t) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_1(t,s) = \mu(t,-r) \quad \forall (t,s) \in [t_0,t_1] \times [t_0-r,t_1]$$

Proposição 1.5.: - $\mathcal{D}_1 \in G^\sigma.SV^u([t_0,t_1] \times [t_0-r,t_1], L(X))$

Prova: - $\mathcal{D}_1$ é constante na 2ª variável, logo satisfaz a propriedade (SV^u) . Seja, para $p \in X$, $x_p \in G^-([t_0-r,t_1], X)$ com

$$x_p(\tau) = p \quad (t_0-r < \tau \leq t_1)$$

Então

$$\tilde{A}_{x_p}(t) = \int_{t_0-r}^{t_1} d_\tau \mu(t,\tau-t)p = -\mu(t,-r)p$$

que é regrada em t , logo $\mathcal{D}_1$ satisfaz a propriedade (G^σ) Δ

Corolário 1.6.: - $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 \in G^\sigma.SV^u([t_0,t_1] \times [t_0-r,t_1], L(X))$

(isso nos mostra entre outras coisas que μ é simplesmente regrada nas contra-diagonais)

Proposição 1.7.: - Para cada $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ temos

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} SV[\mu^t] < \infty$$

Prova: - Para $t \in [t_0, t_1]$ temos

$$SV[\mu^t] = SV_{[-r, 0]}[\mu^t] = SV_{[t-r, t]}[\mathcal{D}^t] = SV_{[t_0-r, t_1]}[\mathcal{D}^t] < \infty \quad \Delta$$

ii) Hipóteses sobre B

1_B - Para cada $t \in \mathbb{R}$, $B^t \in L(G^-, X)$ (nos valores de t onde B não é definida, podemos colocar $B^t=0$).

Assim, pelo teorema 1.12 de [H3], para cada $t \in \mathbb{R}$,
 $\exists ! \eta^t \in SV_0([-r, 0], L(X))$ tal que $B(t, \emptyset) = \int_{-r}^0 \cdot d\eta^t(\theta) \emptyset(\theta) \quad \forall \emptyset \in G^-$

Definamos $\eta: \mathbb{R}^2 \longrightarrow L(X)$ com $\eta(t, \theta) = \begin{cases} \eta^t(\theta) & \text{para } -r \leq \theta \leq 0 \text{ e } t \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{para } \theta \geq 0 \text{ e } t \in \mathbb{R} \\ \eta^t(-r) & \text{para } \theta \leq -r \text{ e } t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Assim, dado $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, para $t \in [t_0, t_1]$ e $x \in G([t_0-r, t_1], X)$

temos:

$$B(t, x_t) = \int_{-r}^0 \cdot d_\theta \eta(t, \theta) x(t+\theta) = \int_{t-r}^t \cdot d_\tau \eta(t, \tau-t) x(\tau) = \int_{t_0-r}^{t_1} \cdot d_\tau \eta(t, \tau-t) x(\tau)$$

$$2_B - \exists m \in L_1^{loc}(\mathbb{R}) \mid SV[\eta^t] \leq m(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Proposição 1.8.: - $\forall p \in X, t_0, t \in \mathbb{R}$ com $t > t_0$ e $s \in [t_0 - r, t]$ temos:

$$\exists \int_{t_0}^t \eta(\tau, s - \tau) p d\tau$$

Prova: - Para $\tau \in [t_0, t]$ e $x \in G(\mathbb{R}, X)$ temos

$$\tilde{B}_x(\tau) = B(\tau, x_\tau) = \int_{t_0 - r}^t d_\sigma \eta(\tau, \sigma - \tau) x(\sigma)$$

e $\tilde{B}_x \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, X)$ conforme 0_B . Tomemos $x = \chi_{[s, t]}^p$ e então temos

$$\begin{aligned} \exists \int_{t_0}^t \tilde{B}_x(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0 - r}^t d_\sigma \eta(\tau, \sigma - \tau) \chi_{[s, t]}(\sigma) p \right] d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t \left[\int_s^t d_\sigma \eta(\tau, \sigma - \tau) p \right] d\tau = - \int_{t_0}^t \eta(\tau, s - \tau) p d\tau \quad \Delta \end{aligned}$$

Teorema 1.9.: - Para $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, seja

$${}^{t_0}K_\eta: [t_0, t_1] \times [t_0 - r, t_1] \longrightarrow L(X)$$

com

$${}^{t_0}K_\eta(t, s) = - \int_{t_0}^t \eta(\tau, s - \tau) d\tau$$

Então

$${}^{t_0}K_\eta \in C^\sigma.SV^\mu([t_0, t_1] \times [t_0 - r, t_1], L(X))$$

Demonstração: - Pela definição de ${}^t_0K_\eta$, vemos que ele é simplesmente contínuo em t . E temos para $t \in [t_0, t_1]$:

$$\begin{aligned}
 SV_{[t_0-r, t_1]}[{}^t_0K_\eta^t] &= SV_{[t_0-r, t]}[{}^t_0K_\eta^t] = \\
 &= \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} ({}^t_0K_\eta(t, s_i) - {}^t_0K_\eta(t, s_{i-1})) p_i \right\| \mid p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} = \\
 &= \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left(\int_{t_0}^t (\eta(\tau, s_i - \tau) - \eta(\tau, s_{i-1} - \tau)) p_i d\tau \right) \right\| \mid p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \int_{t_0}^t \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\eta(\tau, s_i - \tau) - \eta(\tau, s_{i-1} - \tau)] p_i \right\| d\tau \mid p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^{t_1} m(\tau) d\tau \quad (\text{por } 2_B)
 \end{aligned}$$

Assim

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} SV_{[t_0-r, t_1]}[{}^t_0K_\eta^t] \leq \int_{t_0}^{t_1} m(\tau) d\tau \quad \Delta$$

Teorema 1.10.: - Para o núcleo η vale a Fórmula de Bray, ou seja, para cada $[t_0, t] \subset \mathbb{R}$ temos:

$$\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0-r}^t d_s \eta(\tau, s-\tau) x(s) \right] d\tau = \int_{t_0-r}^t d_s \left[\int_{t_0}^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau \right] x(s) \quad ,$$

$$\forall x \in G([t_0-r, t]; X)$$

Demonstração: - Para $x \in G([t_0-r, t], X)$ sejam $\Phi_1(x)$ o primeiro membro da fórmula e $\Phi_2(x)$ o segundo membro. Vamos mostrar que $\Phi_1, \Phi_2 \in L(G([t_0-r, t], X), X)$. Do teorema anterior, $\int_{t_0}^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau$ é de semi-variação limitada em s , logo Φ_2 define um operador linear e contínuo para x que é regradada. Φ_1 está bem definida pois

$$\int_{t_0-r}^t \cdot d_s \eta(\tau, s-\tau) x(s) = B(\tau, x_\tau)$$

que por 0_B é localmente integrável. Φ_1 é claramente linear e temos:

$$\|\Phi_1(x)\| \leq \int_{t_0}^t \left\| \int_{t_0-r}^t \cdot d_s \eta(\tau, s-\tau) x(s) \right\| d\tau \leq \|x\| \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau,$$

logo, Φ_1 é contínua.

Vemos, por simples substituição, que Φ_1 e Φ_2 coincidem nas funções do tipo

$$x = x|_{t_0-r, c}|^p, \quad \text{com } p \in X \text{ e } c \in [t_0-r, t]$$

($|t_0-r, c|$ podendo ser aberto, fechado, etc.).

Como as combinações lineares finitas de funções dessas formam um conjunto denso em $G([t_0-r, t], X)$ concluimos então que $\Phi_1 = \Phi_2$. Δ

Observação 1.11: - Pelos teoremas 1.9 e 1.10 vemos que todos os núcleos $\eta: \mathbb{R}^2 \longrightarrow L(X)$ que satisfazem as condições dadas em 1_B , 2_B e a proposição 1.8, definem uma

$$B: \mathbb{R} \times G^- \longrightarrow X \quad (B(t, \emptyset) = \int_{-r}^0 d_{\emptyset} \eta(t, \emptyset) \emptyset(\emptyset) \quad \forall (t, \emptyset) \in \mathbb{R} \times G^-)$$

que satisfaz 0_B (ou seja, vamos ter $\tilde{B}(G(\mathbb{R}, X)) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R}, X)$)

2. A relação entre (N) e (K). O núcleo $t_0 K$

Do que já vimos em 1. temos:

$$(N-3) \quad x(t) - \int_{t_0-r}^t d_s \mu(t, s-t) x(s) - \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0-r}^t d_s \eta(\tau, s-\tau) x(s) \right] d\tau - H(t) = cte$$

para $t \geq t_0$

Fazendo $t=t_0$, tiramos que

$$cte = x(t_0) - \int_{t_0-r}^{t_0} d_s \mu(t_0, s-t_0) x(s) - H(t_0)$$

Usando a fórmula de Bray (teorema 1.10) e o valor da cte, chegamos a

$$(N-4) \quad x(t) - x(t_0) + \int_{t_0-r}^t d_s \left[- \int_{t_0}^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \mu(t, s-t) + \mu(t_0, s-t_0) \right] x(s) = \\ = H(t) - H(t_0)$$

Pela semelhança de (N-4) com a equação (K), somos motivados a fazer a seguinte

Definição 2.1.: - Para $t_0 \in \mathbb{R}$, seja

$$t_0 K(t, s) = t_0 K_\eta(t, s) + t_0 K_\mu(t, s)$$

para $t \geq t_0$ e $t_0-r \leq s \leq t$

onde ${}^{t_0}K_\eta(t,s) = - \int_{t_0}^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau$ e ${}^{t_0}K_\mu(t,s) = -\mu(t, s-t) + \mu(t_0, s-t_0)$

e para $t_0 - r \leq s \leq t \leq t_0$ colocamos

$${}^{t_0}K(t,s) = {}^{t_0}K_\eta(t,s) = {}^{t_0}K_\mu(t,s) = 0$$

Obtemos o núcleo ${}^{t_0}K: \Gamma_{t_0-r} \rightarrow L(X)$

Vemos que para $t_0 \leq s \leq t$:

$${}^{t_0}K(t,s) = - \int_s^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \mu(t, s-t)$$

Definição 2.2.: - Vamos definir também o núcleo ${}^{\sim}K: \Gamma \rightarrow L(X)$, que não depende de t_0 , por

$${}^{\sim}K(t,s) = - \int_s^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \mu(t, s-t) \quad \text{para } s \leq t$$

Vemos que ${}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0}} = {}^{\sim}K|_{\Gamma_{t_0}}$

Pelos colorário 1.6 e teorema 1.9, podemos concluir a

Proposição 2.3.: - Para cada $t_1 > t_0$ temos

$${}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}} \in G_0^\sigma \cdot SV^\mu(\Gamma_{t_0-r}^{t_1}, L(X))$$

e

$${}^{\sim}K|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}} \in G_0^\sigma \cdot SV^\mu(\Gamma_{t_0}^{t_1}, L(X))$$

Observação 2.4.: - De agora em diante, no texto, para simplificar a notação, não vamos mais colocar o símbolo σ antes da integral simples, ficando claro que sempre que integramos um operador estamos tomando a integral simples. Também para simplificação, quando não houver confusão (quando t_0 estiver fixado) vamos colocar ${}^{t_0}K = K$.

3. O estudo de ${}^{t_0}_0K$, ${}^{t_0}_0R$, ${}^{-K}$ e ${}^{-R}$

Para o núcleo da definição 2.1, vamos estudar a equação linear de Volterra-Stieltjes

$(K_N; f; t_0 - r)$ ou (K_N) :

$$x(t) - x(t_0 - r) + \int_{t_0 - r}^t d_s K(t, s) x(s) = f(t) - f(t_0 - r) \text{ para } t \geq t_0 - r$$

Já vimos (proposição 2.3) que para cada $t_1 > t_0$

$$K|_{\Gamma_{t_0 - r}^{t_1}} \in G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma_{t_0 - r}^{t_1}, L(X))$$

e queremos então que $K|_{\Gamma_{t_0 - r}^{t_1}}$ admita um único resolvente

$$R \in G_I^\sigma \cdot SV^u(\Gamma_{t_0 - r}^{t_1}, L(X)),$$

ou seja, que valha a propriedade (p-2) do teorema 12.1.

Por exemplo, se além do que já foi visto em 1., μ satisfaz a propriedade:

3_A - $\exists \gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $\gamma(\varepsilon) \downarrow 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$ tal que

$$SV_{[-\varepsilon, 0]}[\mu^t] \leq \gamma(\varepsilon) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

então ${}^{t_0}_0K|_{\Gamma_{t_0 - r}^{t_1}}$ admite um único resolvente $\forall t_0, t_1 \in \mathbb{R}$,

$t_1 > t_0$ (mostraremos isso no apêndice A)

Vamos supor, de maneira geral, μ e η apropriados para

que $\forall t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_1 > t_0$ tenhamos ${}^{t_0}_0K|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}}$ satisfaz (p-2)

Fixamos agora $t_0 \in \mathbb{R}$ e temos a

Proposição 3.1.: - Para $t_2 > t_1 > t_0$, se

$$R_i \in G_I^\sigma.SV^u(\Gamma_{t_0-r}^{t_i}, L(X))$$

é o resolvente de $K|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_i}}$ para $i=1,2$ então

$$R_2|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}} = R_1$$

Prova: - O resolvente de $K|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}}$ é a única solução de (R^*)

e (R_*) em $\Gamma_{t_0-r}^{t_1}$, mas R_1 e $R_2|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}}$ satisfazem (R^*) e (R_*) em $\Gamma_{t_0-r}^{t_1}$ logo a igualdade $\triangle$

Podemos então, dizer que $\exists! {}^{t_0}R: \Gamma_{t_0-r} \longrightarrow L(X)$ que satisfaz (R^*) e (R_*) em Γ_{t_0-r} para ${}^{t_0}K$ e ainda com

$${}^{t_0}R|_{\Gamma_{t_1}^{t_2}} \in G_I^\sigma.SV^u(\Gamma_{t_1}^{t_2}, L(X)) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

com $t_0-r \leq t_1 < t_2$.

${}^{t_0}R$ será o resolvente de ${}^{t_0}K$ em Γ_{t_0-r} e quando não houver confusão colocaremos ${}^{t_0}R = R$.

Para o nosso núcleo $\bar{K}$, da definição 2.2., vimos que para $t_1 > t_0$

$$\bar{K}|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}} \in G_0^\sigma.SV^u(\Gamma_{t_0}^{t_1}, L(X)).$$

Podemos afirmar também que $\bar{K}|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}}$ satisfaz (p-2) sendo

$$\bar{R} \in G_I^\sigma.SV^u(\Gamma_{t_0}^{t_1}, L(X))$$

seu resolvente, pois

$$\bar{K}|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}} = {}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}}$$

e portanto,

$$\bar{R} = {}^{t_0}R|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}}$$

Proposição 3.2.: - Dados $t_0' < t_1'$ e $t_0'' < t_1''$ tais que

$$\Gamma_{t_0'}^{t_1'} \cap \Gamma_{t_0''}^{t_1''} \neq \emptyset$$

Sejam $\bar{R}_1 \in G_I^\sigma.SV^u(\Gamma_{t_0'}^{t_1'}, L(X))$ e $\bar{R}_2 \in G_I^\sigma.SV^u(\Gamma_{t_0''}^{t_1''}, L(X))$ os

resolventes de $\bar{K}|_{\Gamma_{t_0'}^{t_1'}}$ e $\bar{K}|_{\Gamma_{t_0''}^{t_1''}}$ respectivamente. Então

$$\bar{R}_1|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}} = \bar{R}_2|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}} \quad \text{onde } t_0 = \max\{t_0', t_0''\}$$

e $t_1 = \min\{t_1', t_1''\}$ (vemos então que $\Gamma_{t_0}^{t_1} \cap \Gamma_{t_0''}^{t_1''} = \Gamma_{t_0}^{t_1}$)

Prova: - É imediata pois

$$\bar{R}_1|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}} \quad \text{e} \quad \bar{R}_2|_{\Gamma_{t_0}^{t_1}}$$

satisfazem (R^*) e (R_*) em $\Gamma_{t_0}^{t_1}$.

Δ

Logo podemos dizer que $\exists! \bar{R}: \Gamma \longrightarrow L(X)$ que será o resolvente de $\bar{K}$, satisfazendo (R^*) e (R_*) em Γ e tal que

$$\bar{R}|_{\Gamma_{t_1}^{t_2}} \in G_I^\sigma \cdot SV^u(\Gamma_{t_1}^{t_2}, L(X)) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

com $t_1 < t_2$

Ainda vemos que para $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, ${}^{t_0}R|_{\Gamma_{t_0}} = \bar{R}|_{\Gamma_{t_0}}$

$$\bar{K}(t, s) = - \int_s^t \eta(\tau, s - \tau) d\tau - \mu(t, s - t)$$

4. As fórmulas (R^*) e (R_*)

Fixado $t_0 \in \mathbb{R}$ temos:

Proposição 4.1.: - Para o núcleo K da definição 2.1., a fórmula (R^*) dada na propriedade (p-2) do Teorema I2.1 fica:

$$(4-1) \quad R(t,s) = I_X \quad \text{para } t_0 - r \leq s \leq t \leq t_0$$

$$(4-2) \quad R(t,s) - I_X - \int_{t_0}^t \left[\int_s^\sigma .d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ R(\tau, s) \right] d\sigma - \\ - \int_s^t .d_\tau [\mu(t, \tau - t) - \mu(t_0, \tau - t_0)] \circ R(\tau, s) = 0$$

para $t_0 - r \leq s \leq t_0 \leq t$

$$(4-3) \quad {}^-R(t,s) - I_X - \int_s^t \left[\int_s^\sigma .d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ {}^-R(\tau, s) \right] d\sigma - \\ - \int_s^t .d_\tau \mu(t, \tau - t) \circ {}^-R(\tau, s) = 0 \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t$$

Prova: - (4-1) vale pois para $t_0 - r \leq s \leq t \leq t_0$ temos $K(t,s)=0$

Para $t_0 - r \leq s \leq t_0 \leq t$, (R^*) fica:

$$R(t,s) - I_X - \int_s^{t_0} .d_\tau \left[\int_{t_0}^t \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma \right] \circ R(\tau, s) - \int_s^{t_0} .d_\tau \mu(t, \tau - t) \circ R(\tau, s) + \\ + \int_s^{t_0} .d_\tau \mu(t_0, \tau - t_0) \circ R(\tau, s) - \int_{t_0}^t .d_\tau \left[\int_\tau^t \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma \right] \circ R(\tau, s) - \int_{t_0}^t .d_\tau \mu(t, \tau - t) \circ R(\tau, s) = 0$$

Como $R(.,s)$ é simplesmente regradada, vale a fórmula de Bray (Teorema 1.10), ou seja:

$$\int_s^{t_0} \cdot d_\tau \left[\int_{t_0}^t \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma \right] \circ R(\tau, s) = \int_{t_0}^t \left[\int_s^{t_0} \cdot d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ R(\tau, s) \right] d\sigma$$

e vale também a fórmula de Dirichlet:

$$\int_{t_0}^t \cdot d_\tau \left[\int_\tau^t \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma \right] \circ R(\tau, s) = \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^\sigma \cdot d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ R(\tau, s) \right] d\sigma$$

pois essa fórmula vem da fórmula de Bray se considerarmos

$$\int_\tau^t \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma = \int_{t_0}^t \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ \chi_{[\tau, t]}(\sigma) d\sigma$$

Assim, (R^*) nesse caso fica:

$$\begin{aligned} R(t, s) - I_X - \int_{t_0}^t \left[\int_s^{t_0} \cdot d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ R(\tau, s) \right] d\sigma + \int_s^{t_0} \cdot d_\tau \mu(t_0, \tau - t_0) \circ R(\tau, s) - \\ - \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^\sigma \cdot d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ R(\tau, s) \right] d\sigma - \int_s^t \cdot d_\tau \mu(t, \tau - t) \circ R(\tau, s) = 0 \end{aligned}$$

e com isso chegamos em (4-2)

Para $t_0 \leq s \leq t$, lembramos que $R(t, s) = \bar{R}(t, s)$ e assim (R^*) fica:

$$\bar{R}(t, s) - I_X - \int_s^t \cdot d_\tau \left[\int_\tau^t \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma \right] \circ \bar{R}(\tau, s) - \int_s^t \cdot d_\tau \mu(t, \tau - t) \circ \bar{R}(\tau, s) = 0$$

e aplicando Dirichlet chegamos em (4-3)

Δ

Proposição 4.2.: - Para o núcleo K da definição 2.1., a fórmula (R_*) dada em (p-2) do teorema I-2.1. fica:

$$(4-4) \quad R(t,s) = I_X \quad \text{para } t_0 - r \leq s \leq t \leq t_0$$

$$(4-5) \quad R(t,s) - I_X + \int_{t_0}^t \bar{R}(t,\tau) \circ \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \\ - \int_{t_0}^t .d_{\tau} \bar{R}(t,\tau) \circ \mu(\tau, s-\tau) + \mu(t, s-t) - \bar{R}(t, t_0) \circ \mu(t_0, s-t_0) = 0$$

$$\text{para } t_0 - r \leq s \leq t_0 \leq t$$

$$(4-6) \quad \bar{R}(t,s) - I_X + \int_s^t \bar{R}(t,\tau) \circ \eta(\tau, s-\tau) d\tau + \\ + \mu(t, s-t) - \int_s^t .d_{\tau} \bar{R}(t,\tau) \circ \mu(\tau, s-\tau) = 0 \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t$$

Prova: - Como $K(t,s)=0$ para $t_0 - r \leq s \leq t \leq t_0$, vale (4-4)

Para $t_0 - r \leq s \leq t_0 \leq t$, (R_*) fica:

$$R(t,s) + \int_{t_0}^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau + \mu(t, s-t) - \mu(t_0, s-t_0) - I_X - \\ - \int_{t_0}^t .d_{\tau} \bar{R}(t,\tau) \circ \left[\int_{t_0}^{\tau} \eta(\sigma, s-\sigma) d\sigma \right] - \int_{t_0}^t .d_{\tau} \bar{R}(t,\tau) \circ \mu(\tau, s-\tau) + \\ + \int_{t_0}^t .d_{\tau} \bar{R}(t,\tau) \circ \mu(t_0, s-t_0) = 0$$

pois $K(\tau,s)=0$ para $s \leq \tau \leq t_0$ e $R(t,\tau) = \bar{R}(t,\tau)$

$$\text{para } t_0 \leq \tau \leq t$$

Usando a integração por partes vem (4-5)

Para $t_0 \leq s \leq t$ lembramos que $R(t,s) = {}^{\sim}R(t,s)$ e assim (R_*) fica:

$${}^{\sim}R(t,s) - I_X + \int_s^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau + \mu(t, s-t) - \int_s^t \cdot d_{\tau} {}^{\sim}R(t, \tau) \circ \int_s^{\tau} \eta(\sigma, s-\sigma) d\sigma -$$

$$- \int_s^t \cdot d_{\tau} {}^{\sim}R(t, \tau) \circ \mu(\tau, s-\tau) = 0$$

Integrando por partes obtemos (4-6)

△

5. A equação (K) com núcleo ${}^{t_0}_0K$, a fórmula (ρ) e o Teorema de Existência e Unicidade de solução para (N)

Para $t_0 \in \mathbb{R}$, seja $f \in G([t_0-r, \infty[, X)$. Consideremos:

$$\begin{array}{l} (K_N; f; t_0-r) \\ \text{ou} \\ (K_N) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x(t) - x(t_0-r) + \int_{t_0-r}^t \cdot d_s K(t, s) x(s) = f(t) - f(t_0-r) \\ \text{para } t \leq t_0-r \end{array} \right.$$

Dado $p_0 \in X$, para cada $t_1 \geq t_0$, pelo teorema I.2.1. podemos afirmar que $\exists ! x \in G([t_0-r, t_1], X)$ que satisfaz (K_N) em $[t_0-r, t_1]$ com $x(t_0-r) = p_0$ e x é dado por

$$\begin{aligned} (\rho-1) \quad x(t) &= f(t) + R(t, t_0-r)[p_0 - f(t_0-r)] - \int_{t_0-r}^t \cdot d_\tau R(t, \tau) f(\tau) \\ &\text{para } t_0-r \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

Por (4-1) vem

$$(\rho-2) \quad x(t) = f(t) + p_0 - f(t_0-r) \quad \text{para } t_0-r \leq t \leq t_0$$

Proposição 5.1.: - Dado $p_0 \in X$, $\exists ! x \in G([t_0-r, \infty[, X)$ que satisfaz (K_N) para $t \geq t_0-r$ com $x(t_0-r) = p_0$ e x é dado pela fórmula (ρ-1) para $\forall t \geq t_0-r$.

Prova: - A solução de (K_N) com valor inicial p_0 para $t \in [t_0-r, t_1]$ deve coincidir com a solução para $t \in [t_0-r, t_2]$ quando $t \in [t_0-r, t_1] \cap [t_0-r, t_2]$ conforme nos mostra (p-1) e por isso vale a proposição. Δ

Observação 5.2.: - Caso $p_0 = f(t_0-r)$, a fórmula (p-1) fica:

$$(p-3) \quad x(t) = f(t) - \int_{t_0-r}^t \cdot d_{\tau} R(t, \tau) f(\tau) \\ \text{para } t \geq t_0-r$$

e temos então

$$(p-4) \quad x(t) = f(t) \text{ para } t_0-r \leq t \leq t_0$$

Lema 5.3.: - Dados $\emptyset \in G$ e $h \in G([t_0, \infty[, X)$ podemos dizer que $\exists ! x \in G([t_0-r, \infty[, X)$ tal que $x_{t_0} = \emptyset$ e

$$x(t) + \int_{t_0-r}^t \cdot d_s K(t, s) x(s) = h(t) \quad \text{para } t > t_0$$

e x é dado por

$$(p-5) \quad x(t) = h(t) - \int_{t_0-r}^{t_0} \cdot d_{\tau} R(t, \tau) \emptyset(\tau - t_0) - \int_{t_0}^t \cdot d_{\tau} R(t, \tau) h(\tau); \\ t > t_0$$

Prova: - Seja $f \in G([t_0-r, \infty[, X)$ com $f_{t_0} = \emptyset$ e $f(t) = h(t)$ para $t > t_0$. Queremos então x que satisfaça (K_N) com

$$x(t_0-r) = \emptyset(-r) = f(t_0-r) .$$

Basta usar a proposição 5.1. e a fórmula (p-3) Δ

Definição 5.4.: - Dados $\emptyset \in G$ e $H \in G([t_0, \infty[, X)$ definimos

$$f_{\emptyset, H} \in G([t_0-r, \infty[, X) \text{ por } f_{\emptyset, H}(t) = \begin{cases} \emptyset(t-t_0) & \text{para } t_0-r \leq t \leq t_0 \\ H(t)-H(t_0)+\emptyset(o) & \text{para } t \geq t_0 \end{cases}$$

Essa função torna (K_N) equivalente a (N) conforme o

Lema 5.5.: - Para $x \in G([t_0-r, \infty[, X)$ temos:

x é solução de $(N; H; t_0)$ com $x_{t_0} = \emptyset \iff x$ é solução de

$$(K_N; f_{\emptyset, H}; t_0-r) \text{ com } x(t_0-r) = \emptyset(-r)$$

Prova: - Pela fórmula (N-4) obtida em 2. vemos que:

x é solução de $(K_N; f_{\emptyset, H}; t_0-r)$ com $x(t_0-r) = p_0 \implies x$ é solução

de $(N; H; t_0)$ com $x_{t_0} = \emptyset + p_0 - \emptyset(-r)$

e x é solução de $(N; H; t_0)$ com $x_{t_0} = \emptyset \implies x$ é solução de

$$(K_N; f_{\emptyset, H; t_0-r}) \text{ com } x(t_0-r) = \emptyset(-r)$$

△

Teorema 5.6.: - (Existência e unicidade de solução de $(N; H; t_0)$ com dado inicial em $[t_0-r, t_0]$).

Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, $\emptyset \in G$ e $H \in G([t_0, \infty[, X)$ temos que

$$\exists! x = x(t_0, \emptyset, H) \in G([t_0-r, \infty[, X)$$

tal que x é solução de $(N; H; t_0)$ em $[t_0, \infty[$ e $x_{t_0} = \emptyset$

Prova: - Sai direto dos lemas 5.3. e 5.5.

△

Teorema 5.7.: - A solução x de $(N; H; t_0)$ tal que $x_{t_0} = \emptyset$ é dada por

$$(5-1) \quad x(t) = \emptyset(t-t_0) \quad \text{para } t_0-r \leq t \leq t_0$$

$$(5-2) \quad x(t) = {}^{-}R(t, t_0)\emptyset(o) - \int_{t_0-r}^{t_0} \cdot d_{\tau} R(t, \tau)\emptyset(\tau-t_0) + \\ + H(t) - {}^{-}R(t, t_0)H(t_0) - \int_{t_0}^t \cdot d_{\tau} {}^{-}R(t, \tau)H(\tau) \quad \text{para } t \geq t_0$$

Podemos ainda escrever esta fórmula sô em função de $\bar{R}$ e então temos:

$$\begin{aligned}
 (5-3) \quad x(t) = & \bar{R}(t, t_0) [\emptyset(o) - \int_{-r}^0 \cdot d_{\emptyset} \mu(t_0, \emptyset) \emptyset(\emptyset)] + \\
 & + [H(t) - \bar{R}(t, t_0) H(t_0) - \int_{t_0}^t \cdot d_{\tau} \bar{R}(t, \tau) H(\tau)] + \\
 & + \int_{-r}^0 \cdot d_{\emptyset} \left[\int_{t_0}^t \bar{R}(t, \sigma) \eta(\sigma, t_0 + \emptyset - \sigma) d\sigma - \int_{t_0}^t \cdot d_{\sigma} \bar{R}(t, \sigma) \mu(\sigma, t_0 + \emptyset - \sigma) + \mu(t, t_0 + \emptyset - t) \right] \emptyset(\emptyset)
 \end{aligned}$$

para $t \geq t_0$

Prova: - (5-1) é ôbvio. Aplicando (p-3) para $t \geq t_0$ temos:

$$x(t) = f_{\emptyset, H}(t) - \int_{t_0 - r}^t \cdot d_{\tau} R(t, \tau) f_{\emptyset, H}(\tau)$$

e assim

$$x(t) = H(t) - H(t_0) + \emptyset(o) - \int_{t_0 - r}^{t_0} \cdot d_{\tau} R(t, \tau) \emptyset(\tau - t_0) - \int_{t_0}^t \cdot d_{\tau} \bar{R}(t, \tau) [H(\tau) - H(t_0) + \emptyset(o)]$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x(t) = & H(t) - H(t_0) + \emptyset(o) - \int_{t_0 - r}^{t_0} \cdot d_{\tau} R(t, \tau) \emptyset(\tau - t_0) - \int_{t_0}^t \cdot d_{\tau} \bar{R}(t, \tau) H(\tau) + \\
 & + H(t_0) - \bar{R}(t, t_0) H(t_0) - \emptyset(o) + \bar{R}(t, t_0) \emptyset(o)
 \end{aligned}$$

e com isso vem (5-2).

Para (5-3) usamos a fórmula (4-5), ou seja:

para $t_0 - r \leq \tau \leq t_0 \leq t$, nós temos:

$$R(t, \tau) = I_X - \int_{t_0}^{\tau} \bar{R}(t, \sigma) \alpha(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma + \int_{t_0}^t \cdot d_{\sigma} \bar{R}(t, \sigma) \alpha(\sigma, \tau - \sigma) - \mu(t, \tau - t) + \\ + \bar{R}(t, t_0) \alpha(t_0, \tau - t_0)$$

Substituindo em (5-2) obtemos (5-3)

Definição 5.8.: - Para $t \geq t_0$ definimos $T(t, t_0): G \longrightarrow G$ por

$T(t, t_0)\emptyset = x_t(t_0, \emptyset, 0) \quad \forall \emptyset \in G$ e $\kappa(t, t_0): G([t_0, t], X) \longrightarrow G$ por

$$\kappa(t, t_0)H = x_t(t_0, 0, H) \quad \forall H \in G([t_0, t], X)$$

Para $-r \leq \theta \leq 0$ temos, por (5-1) e (5-2):

$$(5-4) \quad [T(t, t_0)\emptyset](\theta) = x(t_0, \emptyset, 0)(t+\theta) = \begin{cases} \emptyset(t+\theta-t_0) & \text{se } t+\theta \leq t_0 \quad \text{e} \\ \bar{R}(t+\theta, t_0)\emptyset(0) - \\ - \int_{t_0-r}^{t_0} \cdot d_{\tau} \bar{R}(t+\theta, \tau)\emptyset(\tau-t_0); & \text{se } t+\theta \geq t_0 \end{cases}$$

$$(5-5) \quad [\kappa(t, t_0)H](\theta) = x(t_0, 0, H)(t+\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } t+\theta \leq t_0 \quad \text{e} \\ H(t+\theta) - \bar{R}(t+\theta, t_0)H(t_0) - \\ - \int_{t_0}^{t+\theta} \cdot d_{\tau} \bar{R}(t+\theta, \tau)H(\tau); & \text{se } t+\theta \geq t_0 \end{cases}$$

Dessas fórmulas vemos que $T(t_0, t_0) = I_G$ e $K(t_0, t_0) = 0$.

No apêndice B será mostrado que $T(t, t_0) \in L(G)$ e

$K(t, t_0) \in L(G([t_0, t], X), G)$. Ainda temos:

Proposição 5.9.: - Para $t \geq s \geq t_0$ vale:

$$(5-7) \quad x_t(t_0, \emptyset, H) = T(t, t_0)\emptyset + K(t, t_0)H$$

$$(5-8) \quad T(t, s) \circ T(s, t_0) = T(t, t_0)$$

$$(5-9) \quad T(t, s) \circ K(s, t_0) = K(t, t_0) - K(t, s)$$

Prova: - (5-7) será direto de (5-2), (5-4) e (5-5).

Para mostrar (5-8) temos: seja $\emptyset \in G$, então

$T(t, t_0)\emptyset = x_t(t_0, \emptyset, 0) = x_t(s, x_s(t_0, \emptyset, 0), 0)$ pelo Teorema 5.6. e

$$\begin{aligned} [T(t, s) \circ T(s, t_0)]\emptyset &= T(t, s)[x_s(t_0, \emptyset, 0)] = \\ &= x_t(s, x_s(t_0, \emptyset, 0), 0) \end{aligned}$$

Para mostrar (5-9) temos: seja $H \in G([t_0, t], X)$, então:

$$[T(t, s) \circ K(s, t_0)]H = T(t, s)[x_s(t_0, 0, H)] \text{ e } [K(t, t_0) - K(t, s)]H = x_t(t_0, 0, H) - K(t, s)H$$

mas $x_t(t_0, 0, H) = x_t(s, x_s(t_0, 0, H), H) = T(t, s)[x_s(t_0, 0, H)] + K(t, s)H$ (por (5-7))

assim

$$[K(t, t_0) - K(t, s)]H = T(t, s)[x_s(t_0, 0, H)]$$

e obtemos (5-9)

Δ

6. A equação adjunta de $(N)+(F_\alpha)$ i) A equação (N_0^*) , a fórmula (ϕ^*)

Em [H1] considera-se a equação (K) , que agora vamos supor no intervalo $[t_0-r, t_1]$ com ponto fixo t_0-r ; e um vínculo linear (F_α) (nesse caso $\alpha \in SV_{t_0-r}([t_0-r, t_1], L(X, Y))$) e deduz-se a equação adjunta (K_α^*) , (ver I-4)

Vamos fazer isso para o nosso núcleo ${}^{t_0}K$ para obter a equação (N_α^*) , adjunta de $(N)+(F_\alpha)$.

Primeiramente vamos estudar a adjunta (N_0^*) , ou seja, vamos tomar $\alpha \equiv 0$.

Proposição 6.1.: - Para $q \in BV([t_0-r, t_1], X')$, a adjunta de $(K)+(F_0)$ com núcleo ${}^{t_0}K$ que portanto será a adjunta de $(N)+(F_0)$ é a equação $(N_0^*; g)_{t_0}$ ou quando temos t_0 fixo:

$(N_0^*; g)$ ou simplesmente

$$(N_0^*) = \begin{cases} z(s) - z(t_1) o \int_s^{t_1} \eta(\tau, s - \tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} z(t) o \eta(t, s - t) dt - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) o \mu(t, s - t) + \\ \quad + [z(t_1) - z(t_0)] o \mu(t_0, s - t_0) = V + g(s) \quad \text{para } t_0 - r \leq s \leq t_0 \\ z(s) - z(t_1) o \int_s^{t_1} \eta(\tau, s - \tau) d\tau + \int_s^{t_1} z(t) o \eta(t, s - t) dt - \int_s^{t_1} dz(t) o \mu(t, s - t) = \\ \quad = V + g(s) \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_1 \end{cases}$$

onde V é constante e

$$V = \int_{t_0}^{t_1} z(t) \circ \eta(t, -r) dt - z(t_1) \circ \int_{t_0}^{t_1} \eta(t, -r) dt - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, -r) + \\ + [z(t_1) - z(t_0)] \circ \mu(t_0, -r)$$

Prova: (N_0^*) é (K_0^*) dado em I-4 com o núcleo ${}^{t_0}K$, assim temos:

$$(K_0^*): \quad z(s) + \int_s^{t_1} dz(t) \circ K(t, s) - \int_{t_0-r}^{t_1} dz(t) \circ K(t, t_0-r) = g(s) \text{ para } t_0-r \leq s \leq t_1$$

Vemos que

$$\int_{t_0-r}^{t_1} dz(t) \circ K(t, t_0-r) = - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \circ \int_{t_0}^t \eta(\tau, -r) d\tau - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, -r) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \circ \mu(t_0, -r)$$

usando integração por partes vemos que

$$\int_{t_0-r}^{t_1} dz(t) \circ K(t, t_0-r) = V$$

e portanto temos

$$(K_0^*) = \begin{cases} z(s) - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \circ \int_{t_0}^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, s-t) + \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \circ \mu(t_0, s-t_0) = \\ = V + g(s) & \text{para } t_0-r \leq s \leq t_0 \text{ e} \\ z(s) - \int_s^{t_1} dz(t) \circ \int_s^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \int_s^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, s-t) = V + g(s) & \text{para } t_0 \leq s \leq t_1 \end{cases}$$

Usando integração por partes mais uma vez, chegamos em
 (N_0^*) A

O Teorema 3.1 de [H1] afirma que para

$$g \in BV_{t_0-r}([t_0-r, t_1], X'), \exists! z \in BV([t_0-r, t_1], X')$$

que é solução de (N_0^*) e da equação vemos que

$$z(t_0-r) = g(t_0-r) = 0, \text{ assim } z \in BV_{t_0-r}([t_0-r, t_1], X')$$

Esse mesmo teorema nos dá a fórmula da solução:

$$(p^*-1) \quad z(s) = \int_{t_0-r}^{t_1} dg(\sigma) \circ R(\sigma, t_0-r) - \int_s^{t_1} dg(\sigma) \circ R(\sigma, s), \quad s \in [t_0-r, t_1]$$

Proposição 6.2.: - Para $g \in BV([t_0-r, t_1], X')$, $\exists! z \in BV([t_0-r, t_1], X')$ solução de (N_0^*) e z é dado por:

$$(6-1) \quad z(s) = g(s) + \int_{t_0}^{t_1} dg(\sigma) \circ [R(\sigma, t_0-r) - R(\sigma, s)] \quad \text{para } t_0-r \leq s \leq t_0 \quad \text{e}$$

$$(6-2) \quad z(s) = g(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} dg(\sigma) \circ R(\sigma, t_0-r) - \int_s^{t_1} dg(\sigma) \circ R(\sigma, s)}_{z(t_1)} \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_1$$

Prova: - Seja $\tilde{g} = g + k'$ com $k' \in X'$ uma constante (ou seja, $\tilde{g}(s) = g(s) + k'$). Basta olhar a equação (K_0^*) para ver que z é solução de $(N_0^*; g)$ se e somente se $z + k'$ é solução de $(N_0^*, \tilde{g})$. Com isso está provada a proposição e a solução será dada por

$$(p^*-2) \quad z(s) = \int_{t_0-r}^{t_1} dg(\sigma) \circ R(\sigma, t_0-r) + g(t_0-r) - \int_s^{t_1} dg(\sigma) \circ R(\sigma, s)$$

(6-1) e (6-2) saem de (p^*-2)

Δ

ii) A relação entre (N_0^*) e (N^*) e o teorema de existência e unicidade de solução para (N^*)

Vamos agora procurar soluções de (N_0^*) com $z(t_1) = p'$, com $p' \in X'$ fixado. Seja $p' \in X'$, $t_1 \in \mathbb{R}$ e $\tilde{g} \in BV^{loc}([-\infty, t_1], X')$. Para cada $t_0 < t_1$, consideremos a solução $\tilde{z}$ de $(N_0^*, \tilde{g})_{t_0}$ dada em (6-1) e (6-2) (estamos chamando $\tilde{g}|_{[t_0-r, t_1]}$ de $\tilde{g}$). Sabemos que para $\forall k' \in X'$, a solução de $(N_0^*, \tilde{g} + k')_{t_0}$ será $\tilde{z} + k'$. Vamos procurar $z = \tilde{z} + k'$, tal que $z(t_1) = p'$. Devemos ter, então, $k' = p' - \tilde{z}(t_1)$. Assim

$$z(s) = \tilde{z}(s) + p' - \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}(s) + p' - \tilde{g}(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} d\tilde{g}(\sigma) \circ R(\sigma, t_0-r)$$

sendo z solução de $(N_0^*, g)_{t_0}$ com g tal que

$$g(s) = \hat{g}(s) + p' - \hat{g}(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} d\hat{g}(\sigma) \circ R(\sigma, t_0 - r) \quad \text{para } s \in [t_0 - r, t_1].$$

Como $z(t_1) = p'$, a equação $(N_0^*, g)_{t_0}$, para $t_0 \leq s \leq t_1$, nesse caso fica:

$$\begin{aligned} z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, s-t) - p' \circ \int_s^{t_1} \eta(t, s-t) dt = V + \hat{g}(s) + p' - \hat{g}(t_0) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} d\hat{g}(\sigma) \circ R(\sigma, t_0 - r) \end{aligned}$$

Assim temos a equação

$$\begin{aligned} (N^*; \hat{g}; p') \quad z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, s-t) - \\ - p' \circ \int_s^{t_1} \eta(t, s-t) dt - \hat{g}(s) = \text{cte}_{t_0} \end{aligned}$$

Fazendo $s = t_1$ vemos que $\text{cte}_{t_0} = p' - \hat{g}(t_1) = \text{cte}$ (não depende de t_0).

Esta equação não depende do t_0 escolhido e a solução z , dada por (6-2) que nesse caso fica

$$(6-3) \quad z(s) = p' - \int_s^{t_1} d\hat{g}(\sigma) \circ R(\sigma, s)$$

também não depende do t_0 . Temos então, o seguinte:

Teorema 6.3.: - Para $p' \in X'$, $t_1 \in \mathbb{R}$ e $\hat{g} \in BV^{loc}([-\infty, t_1], X')$, a equação

$$(N^*; \hat{g}; p') \quad z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ n(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) - \\ - p' \circ [I_X + \int_s^{t_1} n(t, s-t) dt] = \hat{g}(s) - \hat{g}(t_1)$$

tem uma única solução $z \in BV^{loc}([-\infty, t_1], X')$ que é dada por (6-3) para $s \leq t_1$.

Demonstração: - Essa z dada em (6-3) é solução de $(N^*; \hat{g}; p')$ pois para cada $t_0 < t_1$, essa z é solução de $(N^*_0; g)_{t_0}$ com

$$g = \hat{g} + [p' - \hat{g}(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} .d\hat{g}(\sigma) \circ R(\sigma, t_0 - r)]$$

e $(N^*_0; g)_{t_0}$ é a própria $(N^*; \hat{g}; p')$ para $t_0 \leq s \leq t_1$. Como t_0 é arbitrário segue que z é solução de $(N^*; \hat{g}; p')$ em $[-\infty, t_1]$.

Para provar a unicidade, suponhamos z_1 e z_2 soluções de $(N^*; \hat{g}; p')$.

Então $z = z_1 - z_2$ é solução de $(N^*; 0; 0)$ para $s \leq t_1$.

Para um dado $t_0 < t_1$, consideremos a equação $(\bar{K}^*_0)$ adjunta da equação (K) com núcleo $\bar{K}$ em $[t_0, t_1]$ com ponto fixo t_0 . Dado $g \in BV[t_0, t_1], X')$ temos:

$$(\bar{K}^*_0): \quad z(s) + \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \bar{K}(t, s) - \int_{t_0}^{t_1} .dz(t) \circ \bar{K}(t, t_0) = g(s) \text{ para } t_0 \leq s \leq t_1$$

ou seja

$$\begin{aligned} z(s) - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \int_s^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} .dz(t) \circ \int_{t_0}^t \eta(\tau, t_0-\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, t_0-t) = g(s) \end{aligned}$$

$$\text{para } t_0 \leq s \leq t_1$$

Usando integração por partes, chegamos a:

$$\begin{aligned} (-K_0^*) \quad z(s) - z(t_1) \circ \int_s^{t_1} \eta(\tau, s-\tau) d\tau + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) + \\ + z(t_1) \circ \int_{t_0}^{t_1} \eta(\tau, t_0-\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_1} z(t) \circ \eta(t, t_0-t) dt + \int_{t_0}^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, t_0-t) = g(s) \end{aligned}$$

Pelo teorema 3.1 de [H1], para cada $g \in BV([t_0, t_1], X')$;

$\exists ! z \in BV([t_0, t_1], X')$ que é solução de $(-K_0^*)$. Verificamos facilmente que se z é solução de $(N^*; 0; 0)$ então $z|_{[t_0, t_1]}$ é a solução de $(-K_0^*)$ para $g \equiv z(t_0)$ (constante)

Isso pois $z(t_1) = 0$ e

$$\begin{aligned} \underbrace{z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t)}_0 - \\ - \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} z(t) \circ \eta(t, t_0-t) dt + \int_{t_0}^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, t_0-t)}_{z(t_0)} = z(t_0) \end{aligned}$$

A solução para $(\bar{K}_0^*)$ é dada por:

$$(\rho^*-3): \quad z(s) = \int_{t_0}^{t_1} dg(\sigma) o^-R(\sigma, t_0) + g(t_0) - \int_s^{t_1} dg(\sigma) o^-R(\sigma, s)$$

que é a fórmula (ρ^*) do teorema 3.1 de [H1] acrescida da constante $g(t_0)$. Para $g \equiv z(t_0)$ concluímos então que

$$z(s) = g(t_0) = z(t_0) \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_1$$

Como $z(t_1)=0$ e t_0 é arbitrário, concluímos que $(N^*;0;0)$ são tem a solução nula e isso prova a unicidade do teorema. Δ

Consideremos agora a equação (N^*) que é dada em [Henry 1] como a adjunta de (N) .

$$(N^*): \quad z(s) + \int_s^\infty z(t) o\eta(t, s-t) dt - \int_s^\infty dz(t) o\mu(t, s-t) = cte$$

Seja $B_0 = BV_0([-r, 0], X')$. Do teorema 6.3. tiramos o seguinte:

Corolário 6.4.: - (existência e unicidade de solução da equação (N^*))

Dado $t_2 \in \mathbb{R}$ e $\phi \in B_0$, então $\exists ! z \in BV^{loc}(\mathbb{R}, X')$ solução de (N^*) para $s \leq t_2 - r$ com $z_{t_2} = \phi$ e $z|_{[t_2, \infty[} \equiv 0$

Prova: - Para um $z \mid z_{t_2} = \phi$ e $z \mid [t_2, \infty[\equiv 0$, a equação (N*) fica:

$$z(s) + \int_s^{t_2} z(t) \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_2} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) = cte$$

para $s \leq t_2 - r$, ou seja

$$\begin{aligned} z(s) + \int_s^{t_2-r} .z(t) \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_2-r} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) = cte - \int_{t_2-r}^{t_2} \phi(t-t_2) \eta(t, s-t) dt + \\ + \int_{t_2-r}^{t_2} .d\phi(t-t_2) \circ \mu(t, s-t) \end{aligned}$$

Essa equação é exatamente $(N^*; \hat{g}; p')$ para $t_1 = t_2 - r$; $p' = \phi(-r)$

e para $s \leq t_1$:

$$\hat{g}(s) = - \int_{t_2-r}^{t_2} \phi(t-t_2) \eta(t, s-t) dt + \int_{t_2-r}^{t_2} .d\phi(t-t_2) \circ \mu(t, s-t) - \phi(-r) \circ \int_s^{t_2-r} \eta(t, s-t) dt$$

(para achar o valor da cte em (N*) basta fazer $s = t_2 - r$).

Então, estendendo a solução de $(N^*; \hat{g}; p')$ de modo que $z_{t_2} = \phi$ e $z \mid [t_2, \infty[\equiv 0$, teremos a solução única de (N*) que por (6-3) será:

$$(6-4) \quad z(s) = \phi(-r) - \int_s^{t_2-r} .d\hat{g}(\sigma) \circ R(\sigma, s) \quad \text{para } s \leq t_2 - r$$

O que falta então agora, é mostrar que o nosso $\hat{g}$ está em $BV^{loc}([-\infty, t_2 - r], X')$. Verifica-se facilmente (ver [H4], I-4) que

a variação e a semi-variação de funções que tomam valores em $X' = L(X, \mathbb{C})$ coincidem. Então temos, para $t_0 < t_2 - r$

$$\begin{aligned}
 V[t_0, t_2 - r][\tilde{g}] &= SV[t_0, t_2 - r][\tilde{g}] = \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} (\tilde{g}(s_i) - \tilde{g}(s_{i-1})) \cdot p_i \right\| \text{ com } p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left(\int_{t_2-r}^{t_2} \phi(t-t_2) o[\eta(t, s_i-t) - \eta(t, s_{i-1}-t)] dt \right) p_i \right\| \text{ com } p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &+ \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left(\phi(-r) o \int_{s_i}^{t_2-r} \eta(t, s_i-t) dt - \phi(-r) o \int_{s_{i-1}}^{t_2-r} \eta(t, s_{i-1}-t) dt \right) p_i \right\| \text{ com } p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &+ \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \int_{t_2-r}^{t_2} d\phi(t-t_2) o[\mu(t, s_i-t) - \mu(t, s_{i-1}-t)] p_i \right\| \text{ com } p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \int_{t_2-r}^{t_2} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \phi(t-t_2) o[\eta(t, s_i-t) - \eta(t, s_{i-1}-t)] p_i \right\| dt \text{ com } p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &+ \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \phi(-r) \right\| \cdot \int_{t_0}^{t_2-r} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} (\eta(t, s_i-t) - \eta(t, s_{i-1}-t)) p_i \right\| dt \text{ com } p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &+ \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ V[\phi] \cdot \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\mu(t, s_i-t) - \mu(t, s_{i-1}-t)] p_i \right\| \text{ com } p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \int_{t_2-r}^{t_2} \|\phi\|_{\infty} m(t) dt + \|\phi\|_{\infty} \int_{t_0}^{t_2-r} m(t) dt + V[\phi] \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} SV[\mu^t] \\
 &\leq \|\phi\|_{\infty} \int_{t_0}^{t_2} m(t) dt + V[\phi] \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} SV[\mu^t] < \infty
 \end{aligned}$$

Observação: - Consideramos aqui

$$\|\phi\|_{\infty} = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\| < \infty \quad \text{pois } B_0 \in G([-r; 0], X') \quad \Delta$$

Dado $t_1 \in \mathbb{R}$ e tomando $p'=0$, vamos considerar, a seguir, a correspondência biunívoca $z \longleftrightarrow \hat{g}$ em $BV_{t_1}([t_1-r, t_1], X')$ (que induz a correspondência $\phi = z_{t_1} \longleftrightarrow \rho = \hat{g}_{t_1}$ em B_0) através da equação $(N^*; \hat{g}; 0)$ conforme o teorema 6.3., ou seja, dado $\phi \in B_0$, tomamos $\rho \in B_0$ | para $\theta \in [-r, 0]$ temos:

$$\rho(\theta) = \phi(\theta) + \underbrace{\int_{t_1+\theta}^{t_1} \phi(t-t_1) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_{t_1+\theta}^{t_1} d_t \phi(t-t_1) \circ \mu(t, s-t)}_{[\Omega(t_1) \cdot \phi](\theta)}$$

Assim $\rho = [I + \Omega(t_1)] \cdot \phi$ onde

Definição 6.5.: - Para $t_1 \in \mathbb{R}$, como acabamos de ver, definimos o operador $\Omega(t_1): B_0 \longrightarrow B_0$ por

$$[\Omega(t_1)\phi](\theta) = \int_{\theta}^0 \phi(\tau) \circ \eta(t_1+\tau, \theta-\tau) d\tau - \int_{\theta}^0 d\phi(\tau) \circ \mu(t_1+\tau, \theta-\tau) \quad \forall \phi \in B_0; -r \leq \theta \leq 0.$$

Por um raciocínio análogo ao do corolário 6.4., vemos que

$\Omega(t_1)$ está bem definido e no apêndice D mostramos que

$\Omega(t_1) \in L(B_0)$. Este operador será usado no teorema 9.9. para comparar os presentes resultados com os de [Henry 1].

Proposição 6.6.: - Para $t_1 \in \mathbb{R}$, $I + \Omega(t_1): B_0 \longrightarrow B_0$ é inversível e $(I + \Omega(t_1))^{-1} \in L(B_0)$ e ainda temos, para $\rho \in B_0$ e $-r \leq \theta \leq 0$

$$(6-5) \quad ([I+\Omega(t_1)]^{-1}\rho)(\theta) = - \int_{\theta+t_1}^{t_1} d_\sigma \rho(\sigma-t_1) o^-R(\sigma, \theta+t_1) = - \int_{\theta}^0 d\rho(\tau) o^-R(\tau+t_1, \theta+t_1)$$

Prova: - Fica evidente que $I+\Omega(t_1)$ é biunívoca de B_0 sobre B_0 a partir do teorema 6.3. e do que dissemos acima. Pelo teorema da Aplicação Aberta vem que $(I+\Omega(t_1))^{-1} \in L(B_0)$. Finalmente, a fórmula (6-5) sai de (6-3) tomando $\hat{g}$ tal que $\hat{g}_{t_1} = \rho$ e $\phi = z_{t_1}$ onde z é a solução de $(N^*; \hat{g}; 0)$ em $[t_1-r, t_1]$. Δ

7. A resolubilidade normal para o sistema $(N)+(F_\alpha)$ e para (N_α^*)

Para $\alpha \in SV_{t_0-r}([t_0-r, t_1], L(X, Y))$, vamos estudar (N_α^*) , a equação adjunta de $(N)+(F_\alpha)$. Lembrar que dado

$$(H, c) \in G([t_0, t_1], X) \times Y$$

dizemos que $x \in G([t_0-r, t_1], X)$ satisfaz $(N)+(F_\alpha)$ se x é solução de (N) para

$$t \in [t_0, t_1] \quad \text{e} \quad \int_{t_0-r}^{t_1} d\alpha(t)x(t) = c$$

Dado $g \in BV([t_0-r, t_1], X')$, consideremos:

$$(N_\alpha^*): \quad z(s) + \int_s^{t_1} dz(t) \circ K(t, s) - \int_{t_0-r}^{t_1} dz(t) \circ K(t, t_0-r) + \alpha(s) * \psi = g(s)$$

para $t_0-r \leq s \leq t_1$, (que é (K_α^*) considerando o núcleo ${}^{t_0}K$ e a equação no intervalo $[t_0-r, t_1]$ com ponto fixo t_0-r).

Cada solução de (N_α^*) é um par

$$(z, \psi) \in BV([t_0-r, t_1], X') \times Y'.$$

Seja $(N_{\alpha}^*)_0$ a equação homogênea ($g \equiv 0$). Vemos que

$$(N_{\alpha}^*)_0 = (N_0^*; \bar{g}) \quad \text{com} \quad \bar{g}(s) = -\alpha(s) * \psi$$

Assim, pela proposição 6.1, a equação $(N_{\alpha}^*)_0$ fica:

$$(N_{\alpha}^{*-1})_0 \left\{ \begin{array}{l} z(s) + \int_{t_0}^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - z(t_1) \circ \int_{t_0}^{t_1} \eta(t, s-t) dt - \int_{t_0}^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) + \\ \quad + [z(t_1) - z(t_0)] \circ \mu(t_0, s-t_0) = V-\alpha(s) * \psi \quad \text{para } t_0 - r \leq s \leq t_0 \\ \\ z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - z(t_1) \circ \int_s^{t_1} \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) = \\ \quad = V-\alpha(s) * \psi \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_1 \end{array} \right.$$

Para $\psi \in Y'$ dado, temos uma única solução (z, ψ) de $(N_{\alpha}^*)_0$, com

$$z \in BV([t_0 - r, t_1], X')$$

conforme a proposição 6.2., que será dado por:

$$(7-1) \quad z(s) = -\alpha(s) * \psi - \int_{t_0}^{t_1} .d(\alpha(\sigma) * \psi) \circ [R(\sigma, t_0 - r) - R(\sigma, s)] \quad p/ \quad t_0 - r \leq s \leq t_0$$

$$(7-2) \quad \begin{aligned} z(s) = & -\alpha(t_0) * \psi - \int_{t_0}^{t_1} .d(\alpha(\sigma) * \psi) \circ R(\sigma, t_0 - r) + \\ & + \int_s^{t_1} .d(\alpha(\sigma) * \psi) \circ R(\sigma, s) \quad p/ \quad t_0 \leq s \leq t_1 \end{aligned}$$

e nesse caso, $z(t_0 - r) = -\alpha(t_0 - r) * \psi = 0$.

O operador " $J(t_0)$ " que aparece no teorema I-4.2, traduzido para o nosso contexto (a equação (K) no intervalo $[t_0-r, t_1]$ com ponto fixo t_0-r) fica:

$$(7-3) \quad J(t_0-r) = \int_{t_0-r}^{t_1} \cdot d\alpha(t) \circ R(t, t_0-r) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \cdot d\alpha(t) \circ R(t, t_0-r) \in L(X, Y)$$

Temos também o seu adjunto:

$$(7-4) \quad \begin{aligned} J(t_0-r)^* &= \int_{t_0-r}^{t_1} \cdot R(t, t_0-r)^* \circ d\alpha(t)^* = \\ &= \alpha(t_0)^* + \int_{t_0}^{t_1} \cdot R(t, t_0-r)^* \circ d\alpha(t)^* \in L(Y', X') \end{aligned}$$

Considerando o conjunto

$$\begin{aligned} [J(t_0-r)X]^0 &= \{\psi \in Y' \mid \langle \psi, J(t_0-r)p \rangle = 0 \quad \forall p \in X\} \\ &= \{\psi \in Y' \mid \langle J(t_0-r)^*\psi, p \rangle = 0 \quad \forall p \in X\} \\ &= \{\psi \in Y' \mid J(t_0-r)^*\psi = 0\} \\ &= \text{Ker}[J(t_0-r)^*] \subset Y' \end{aligned}$$

Temos a

Proposição 7.1.: - Para um par $(z, \psi) \in BV([t_0-r, t_1], X') \times Y'$ solução de $(N_\alpha^*)_0$ temos

$$z(t_1) = 0 \iff \psi \in [J(t_0-r)X]^0$$

Prova: - De (ρ^*-1) vem que

$$z(t_1) = - \int_{t_0-r}^{t_1} d(\alpha(\sigma)^* \psi) \circ R(\sigma, t_0-r) = - \int_{t_0-r}^{t_1} [d\alpha(\sigma) \circ R(\sigma, t_0-r)]^* \cdot \psi = -J(t_0-r)^* \psi$$

assim

$$z(t_1) = 0 \iff \psi \in \text{Ker}[J(t_0-r)^*] = [J(t_0-r)X]^0 \quad \triangle$$

Caso $\psi \in [J(t_0-r)X]^0$ temos então:

$$(N_{\alpha}^*-2)_0 \left\{ \begin{array}{l} z(s) + \int_{t_0}^{t_1} z(t) \circ n(t, s-t) dt - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, s-t) - z(t_0) \circ \mu(t_0, s-t_0) = \\ \\ = V-\alpha(s)^* \psi \quad \text{para } t_0-r \leq s \leq t_0 \\ \\ z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ n(t, s-t) dt - \int_s^t dz(t) \circ \mu(t, s-t) = V-\alpha(s)^* \psi \quad \text{p/ } t_0 \leq s \leq t_1 \end{array} \right.$$

E as fórmulas (7-1), (7-2), nesse caso, $(z(t_1)=0)$ ficam:

$$(7-5) \quad z(s) = \alpha(t_0)^* \psi - \alpha(s)^* \psi + \int_{t_0}^{t_1} d(\alpha(\sigma)^* \psi) \circ R(\sigma, s) \quad \text{para } t_0-r \leq s \leq t_0$$

$$(7-6) \quad z(s) = \int_s^{t_1} d(\alpha(\sigma)^* \psi) \circ R(\sigma, s) \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_1$$

Definição 7.2.: - Para $s \in [t_0-r, t_1]$, definimos

$$j(s) = \int_s^{t_1} d\alpha(t) \circ R(t, s) \in L(X, Y) \quad (\text{vemos que } j(t_0-r) = J(t_0-r))$$

Proposição 7.3.: - Para $\psi \in [J(t_0-r)X]^0$ a solução (z, ψ) de $(N_\alpha^*)_0$ é dada por $z(s) = j(s) * \psi$, $s \in [t_0-r, t_1]$

Prova: - Como $z(t_1) = 0$, (ρ^*-1) nos dá

$$z(s) = \int_s^{t_1} d(\alpha(\sigma) * \psi) \circ R(\sigma, s) = \int_s^{t_1} [d\alpha(\sigma) \circ R(\sigma, s)] * \psi = j(s) * \psi \quad \Delta$$

Lema 7.4.: - Para $x \in G([t_0-r, t_1], X)$ e $p \in X$ temos:

i) x é solução de $(N; H; t_0) + (F_\alpha) \iff \exists \emptyset \in G \mid x$ é solução de $(K_N; f_{\emptyset, H}; t_0-r) + (F_\alpha)$

ii) x é solução de $(N; 0; t_0) + (F_\alpha)$ com $x_{t_0} \equiv p \iff x$ é solução de

$$(K_N; 0; t_0-r) + (F_\alpha) \text{ com } x(t_0-r) = p$$

Prova: - É imediata a partir do lema 5.5. \Delta

Com este lema, podemos traduzir então o teorema principal de [H1] (o teorema I-4.2. enunciado aqui) para o sistema $(N) + (F_\alpha)$ e a equação (N_α^*) . Com isso teremos condições necessárias e suficientes para valer a resolubilidade normal para $(N) + (F_\alpha)$ e para (N_α^*) respectivamente. De maneira mais precisa:

Teorema 7.5.: - São equivalentes:

(A-1) Para $(H, c) \in G([t_0, t_1]; X) \times Y$ temos que $(N) + (F_\alpha)$ tem solução, se e somente se

$$\exists \emptyset \in G \mid \forall (z, \psi) \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X') \times Y' \text{ solução de } (N_\alpha^*)_0$$

nós temos:

$$\int_{t_0-r}^{t_1} .dz(t) f_{\emptyset, H}(t) = - \langle \psi, c \rangle$$

(A-2) Para $(H, c) \in G([t_0, t_1]; X) \times Y$ temos que $(N) + (F_\alpha)$ tem solução, se e somente se

$$\exists \emptyset \in G \mid \forall (z, \psi) \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X') \times Y' \text{ solução de } (N_\alpha^*)_0$$

(ou seja, $\psi \in [J(t_0-r)X]^0$ e $z(s) = j(s) * \psi$) nós temos:

$$\int_{t_0-r}^{t_0} .dz(t) \emptyset(t-t_0) - z(t_0) \emptyset(o) + z(t_0) H(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} .dz(t) H(t) = - \langle \psi, c \rangle$$

(A-3) Para $(H, c) \in G([t_0, t_1], X) \times Y$ temos que $(N) + (F_\alpha)$ tem solução se e somente se $\exists \emptyset \in G \mid \forall \psi \in [J(t_0-r)X]^0$ temos:

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0-r}^{t_0} .d(\alpha(t) * \psi) \emptyset(t-t_0) + \int_{t_0-r}^{t_0} .d_t \left[\int_{t_0}^{t_1} .d(\alpha(\sigma) * \psi) \circ R(\sigma, t) \right] \emptyset(t-t_0) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} .d(\alpha(\sigma) * \psi) \circ \bar{R}(\sigma, t_0) [H(t_0) - \emptyset(o)] + \int_{t_0}^{t_1} .d_t \left[\int_t^{t_1} .d(\alpha(\sigma) * \psi) \circ \bar{R}(\sigma, t) \right] H(t) = - \langle \psi, c \rangle \end{aligned}$$

- (B) $J(t_0-r).X$ é um subespaço vetorial fechado de Y
- (C) $J(t_0-r)*.Y'$ é um subespaço vetorial fechado de X'
- (D') Para $g \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X')$ temos que a equação
 (N_α^*) tem solução
 $(z, \psi) \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X') \times Y'$

se e somente se $\forall x \in G([t_0-r, t_1], X)$

solução de $(N)_0 + (F_\alpha)_0$ ($H = \text{cte}$ e $c = 0$)

nós temos

$$\int_{t_0-r}^{t_1} dg(s)x(s) = 0$$

Cabe sô observar que a fórmula que aparece em (A-3) vem de (7-1) e (7-2) substituídos na fórmula de (A-2).

8. O exemplo $F_\alpha(x) = x_{t_0}$

Vamos considerar o caso $F_\alpha(x) = x_{t_0}$ para

$$x \in G^-([t_0-r, t_1], X)$$

e quando tomamos

$$x \in G([t_0-r, t_1], X)$$

fazemos

$$F_\alpha(x) = F_\alpha(x^-) = x_{t_0}^-$$

(onde $x^- \in G^-([t_0-r, t_1], X)$ é o representante de x na sua classe de equivalência). Para simplificar a notação vamos sempre escrever $F_\alpha(x) = x_{t_0}$. Vemos que $Y = G^-$.

Vamos achar

$$\alpha \in SV_{t_0-r}([t_0-r, t_1], L(X, G^-)) \mid F_\alpha(x) = x_{t_0} = \int_{t_0-r}^{t_1} d\alpha(t) \cdot x(t)$$

Proposição 8.1.: - Para $p \in X$ temos:

$$\alpha(s) \cdot p = \begin{cases} x_{[-r, s-t_0]} p \in G^- & \text{para } t_0-r \leq s \leq t_0 \\ x_{[-r, 0]} p \in G^- & \text{para } t_0 \leq s \leq t_1 \end{cases}$$

Prova: - É imediato, sabendo que

$$\alpha(s)p = F_{\alpha}(X]_{t_0-r, s}]p) \text{ para } t_0-r \leq s \leq t_1$$

e isso advém da isometria canônica dada no teorema, 1.12 de [H3] (já citada em I-4) Δ

Podemos afirmar que $Y' = (G^-)' = B_0 = BV_0([-r, 0], X')$ (pelo teorema 1.12 de [H3] junto com a observação I-4-C de [H4]) e para $\emptyset \in G^-$ e $\phi \in B_0$ temos:

$$\langle \phi, \emptyset \rangle = \int_{-r}^0 d\phi(\theta) \emptyset(\theta)$$

Proposição 8.2.: - Para $\phi \in B_0$ temos

$$\alpha(s)*\phi = \begin{cases} \phi(s-t_0) - \phi(-r) \in X' & \text{para } t_0-r \leq s \leq t_0 \\ -\phi(-r) \in X' & \text{para } t_0 \leq s \leq t_1 \end{cases}$$

Prova: - $\langle \alpha(s)*\phi, p \rangle = \langle \phi, \alpha(s)p \rangle \quad \forall p \in X, t_0-r \leq s \leq t_1$, assim:
para $t_0-r \leq s \leq t_0$

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s)*\phi, p \rangle &= \langle \phi, X]_{-r, s-t_0}]p \rangle = \int_{-r}^0 d\phi(\theta) X]_{-r, s-t_0}](\theta)p = \\ &= \phi(s-t_0)p - \phi(-r)p \end{aligned}$$

para $t_0 \leq s \leq t_1$

$$\langle \alpha(s) * \phi, p \rangle = \langle \phi, \chi_{]-r, 0]} p \rangle = \int_{-r}^0 d\phi(\theta) p = \phi(0)p - \phi(-r)p = -\phi(-r)p \quad \Delta$$

Então, para cada $\phi \in Y' = B_0$, a única $z \in BV(t_0 - r, t_1], X'$ tal que (z, ϕ) é solução de $(N_\alpha^*)_0$, dada em (7-1) e (7-2), nesse caso será:

$$(8-1) \quad z(s) = -\alpha(s) * \phi = -\phi(s - t_0) + \phi(-r) \quad \text{para } t_0 - r \leq s \leq t_0$$

$$(8-2) \quad z(s) = -\alpha(t_0) * \phi = +\phi(-r) \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_1$$

Definição 8.3.: - Para $p \in X$, seja $\emptyset_p = \chi_{]-r, 0]} p \in G^-$.

Definimos

$$\mathcal{G}^- = \{\emptyset_p \in G^- \mid p \in X\}$$

Lema 8.4.: - $[\mathcal{G}^-]^0 = B_{00} = \{\phi \in B_0 \mid \phi(-r) = 0\}$

(lembrar que dado W espaço de Banach e $A \subset W$ um subespaço, temos $A^0 = \{w' \in W' \mid \langle w', a \rangle = 0 \quad \forall a \in A\}$)

Prova: - $B_{00} = [J(t_0 - r)X]^0$ pois conforme a proposição 7.1 temos:

$$\phi \in [J(t_0 - r)X]^0 \iff z(t_1) = \phi(-r) = 0$$

(para z dado em (8-1), (8-2))

Vamos mostrar que $J(t_0-r)X = \hat{G}^-$. Para $p \in X$ temos:

$$\begin{aligned} J(t_0-r)p &= \int_{t_0-r}^{t_1} d\alpha(t) \circ R(t, t_0-r)p = \int_{t_0-r}^{t_0} d\alpha(t)p = \alpha(t_0)p = \\ &= X_{]-r,0]}p = \emptyset_p \quad \Delta \end{aligned}$$

Caso procuremos soluções $(z, \phi) \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X') \times Y'$

de $(N_\alpha^*)_0$ teremos então

$$(8-3) \quad z(s) = -\phi(s-t_0) \quad \text{para } t_0-r \leq s \leq t_0, \text{ ou seja}$$

$$z_{t_0} = -\phi$$

$$(8-4) \quad z(s) = 0 \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_1$$

Vamos confirmar, através do teorema 7.5, um resultado já conhecido:

Proposição 8.5.: - $(N)+(F)$; onde para $c \in G^-, (F)$ é o vínculo $x_{t_0}=c$; tem sempre solução em $G([t_0-r, t_1], X)$.

Prova: - Como $J(t_0-r) = \hat{G}^-$ é um subespaço fechado de $Y=G^-$ temos que vale (A-2) do teorema 7.5., que nesse caso fica:

Para $(H, c) \in G([t_0, t_1], X) \times G^-$ temos: $(N)+(F)$ tem solução se e somente se

$$\exists \emptyset \in G \mid \forall (z, \phi) \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X') \times B_0$$

solução de $(N_\alpha^*)_0$ temos

$$\int_{t_0-r}^{t_0} .dz(t)\emptyset(t-t_0) - z(t_0)\emptyset(0) + z(t_0)H(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} .dz(t)H(t) =$$

$$= -\langle \phi, c \rangle$$

ou seja, se e somente se $\exists \emptyset \in G \mid \forall \phi \in B_{00}$ temos

$$- \int_{t_0-r}^{t_0} .d_t \phi(t-t_0)\emptyset(t-t_0) = -\langle \phi, c \rangle$$

Ora, se tomamos $\emptyset = c \in G^-$ vemos que de fato

$$- \int_{t_0-r}^{t_0} .d_t \phi(t-t_0)\emptyset(t-t_0) = -\langle \phi, \emptyset \rangle = -\langle \phi, c \rangle$$

Δ

9. O exemplo $F_{\alpha}(x) = -Mx_{t_0} - Nx_{t_1}$

Vamos supor agora $t_0 \leq t_1 - r$. Tomemos $M, N \in L(G^-, Y)$

Vamos considerar $(N) + (F_{\alpha})$ com $F_{\alpha}(x) = -Mx_{t_0} - Nx_{t_1}$ para

$x \in G^-([t_0 - r, t_1], X)$ ou $F_{\alpha}(x) = -Mx_{t_0}^- - Nx_{t_1}^-$ para

$x \in G([t_0 - r, t_1], X)$

(ver começo de 8.)

Proposição 9.1.: - Para $\psi \in Y'$

$$\alpha(s)^* \cdot \psi = \begin{cases} (M^* \psi)(-r) - (M^* \psi)(s - t_0) & \text{para } t_0 - r \leq s \leq t_0 \\ (M^* \psi)(-r) & \text{para } t_0 \leq s \leq t_1 - r \\ (M^* \psi)(-r) + (N^* \psi)(-r) - (N^* \psi)(s - t_1) & \text{para } t_1 - r \leq s \leq t_1 \end{cases}$$

Prova: $\forall p \in X, s \in [t_0 - r, t_1]$ temos

$$\langle \alpha(s)^* \psi, p \rangle = \langle \psi, \alpha(s)p \rangle = \langle \psi, F_{\alpha}(x)_{[t_0 - r, s]} p \rangle \quad (t \text{ 1.12 [H3]})$$

Para $t_0 - r \leq s \leq t_0$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s)^* \psi, p \rangle &= \langle \psi, -M(x)_{[-r, s - t_0]} p \rangle = - \langle M^* \psi, x_{[-r, s - t_0]} p \rangle = \\ &= - \int_{-r}^0 d[(M^* \psi)(\theta)] x_{[-r, s - t_0]}(\theta) p = [(M^* \psi)(-r) - (M^* \psi)(s - t_0)] p \end{aligned}$$

Para $t_0 \leq s \leq t_1 - r$:

$$\langle \alpha(s) * \psi, p \rangle = \langle \psi, -M(\chi_{[-r, 0]} p) \rangle = - \int_{-r}^0 d[(M^* \psi)(\theta)] p = (M^* \psi)(-r) p$$

Para $t_1 - r \leq s \leq t_1$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s) * \psi; p \rangle &= \langle \psi, -M(\chi_{[-r, 0]} p) - N(\chi_{[-r, s-t_1]} p) \rangle = \\ &= (M^* \psi)(-r) p - \langle N^* \psi, \chi_{[-r, s-t_1]} p \rangle = [(M^* \psi)(-r) + (N^* \psi)(-r) - (N^* \psi)(s-t_1)] p \quad \Delta \end{aligned}$$

Substituindo em $(N^*_{\alpha})_0$ e vendo que:

para $s = t_0$ temos:

$$\begin{aligned} \ell &= z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} z(t) \alpha(t, t_0 - t) dt - \int_{t_0}^{t_1} . dz(t) \alpha(t, t_0 - t) - z(t_1) \alpha(t_1, t_0 - t) = \\ &= V - (M^* \psi)(-r) \end{aligned}$$

para $s = t_1$ temos:

$$z(t_1) = V - [(M^* \psi)(-r) + (N^* \psi)(-r)]$$

Temos:

Para $\psi \in [J(t_0-r)X]^0$ ($z(t_1)=0$) temos:

$$(N^*_\alpha-4)_0 \left\{ \begin{array}{l} z(s) + \int_{t_0}^{t_1} z(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \alpha(t, s-t) - z(t_0) \alpha(t_0, s-t_0) = \\ = (M^*\psi)(s-t_0) + \ell ; \quad t_0-r \leq s \leq t_0 \\ z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} dz(t) \alpha(t, s-t) = \ell , \quad t_0 \leq s \leq t_1-r \\ z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} dz(t) \alpha(t, s-t) = (N^*\psi)(s-t_1) ; \\ t_0-r \leq s \leq t_1 \end{array} \right.$$

e nesse caso, a solução $(z, \psi) \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X') \times Y'$ será tal que:

$$(9-4) \quad z(s) = (M^*\psi)(s-t_0) - \int_{t_1-r}^{t_1} d_\sigma[(N^*\psi)(\sigma-t_1)] oR(\sigma, s) \quad p/ \quad t_0-r \leq s \leq t_0$$

$$(9-5) \quad z(s) = - \int_{t_1-r}^{t_1} d_\sigma[(N^*\psi)(\sigma-t_1)] o^-R(\sigma, s) \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t_1-r$$

$$(9-6) \quad z(s) = - \int_s^{t_1} d_\sigma[(N^*\psi)(\sigma-t_1)] o^-R(\sigma, s) \quad \text{para } t_1-r \leq s \leq t_1$$

Proposição 9.2.: - Seja $\Phi = M + N \circ T(t_1, t_0) \in L(\mathcal{G}^-, Y)$

($T(t_1, t_0)$ dado na definição 5.8., ver também a observação 1.3.).

Então $J(t_0-r)X = \Phi \mathcal{G}^-$ ($\mathcal{G}^-$ dado na definição 8.3.)

Prova: - Para $p \in X$, seja x solução de $(K; 0; t_0 - r)$ com $x(t_0 - r) = p$. Por (9-1) temos que $x(t) = R(t, t_0 - r)p$, logo temos que $x_{t_0} = \emptyset_p = X_{[-r, 0]}p$. Então x é solução de $(N)_0$ com $x_{t_0} = \emptyset_p$, e

$$\begin{aligned} J(t_0 - r)p &= \int_{t_0 - r}^{t_1} \cdot d\alpha(t) R(t, t_0 - r)p = \int_{t_0 - r}^{t_1} \cdot d\alpha(t) x(t) = -Mx_{t_0} - Nx_{t_1} = \\ &= -(M + N\alpha(t_1, t_0))x_{t_0} = -\Phi \emptyset_p \end{aligned} \quad \Delta$$

Proposição 9.3.: - Para $\psi \in Y'$, temos

$$J(t_0 - r)*\psi = -(M*\psi)(-r) + \int_{t_1 - r}^{t_1} \cdot d_\sigma [(N*\psi)(\sigma - t_1)] \circ R(\sigma, t_0 - r)$$

Prova: - Sai direto de (7-4) e da proposição 9.1. \Delta

Seja $(z, \psi) \in BV_{t_0 - r}^{t_0 - r, t_1}([t_0 - r, t_1], X') \times Y'$ solução de $(N_\alpha^*)_0$, ou seja, $\psi \in [\Phi G^-]^0$ e $z(s) = j(s)*\psi$ (conforme as proposições 7.1 e 7.3). Vamos precisar dos seguintes resultados:

Lema 9.4.: - $\forall \emptyset \in G^-$ temos $\langle z_{t_0}^0, \emptyset \rangle = \langle \psi, \Phi \emptyset \rangle$, ou seja,

$$\Phi*\psi = z_{t_0}^0 \in B_{00} = \{\phi \in B_0 \mid \phi(-r) = 0\}$$

(observar que dado $g \in BV([t_0 - r, t_1], X')$, para $t \in [t_0, t_1]$ temos

$$g_t^0 \in B_0 \quad \text{com} \quad g_t^0(\theta) = g(t + \theta) \quad \text{para} \quad -r \leq \theta < 0)$$

Prova: - Para $\emptyset \in G^-$, seja x solução de $(N)_0$ com $x_{t_0} = \emptyset$.

Então
$$F_\alpha(x) = -Mx_{t_0} - Nx_{t_1} = -\Phi\emptyset$$

Assim, x é solução de $(K; f_{\emptyset,0}; t_0-r) + (F_\alpha)'$ onde $(F_\alpha)'$ é tal que $F_\alpha(x) = -\Phi\emptyset$.

Usando o corolário 2.3. de [H1] podemos dizer que

$$\int_{t_0-r}^{t_1} .dz(t) f_{\emptyset,0}(t) = \langle \psi, \Phi\emptyset \rangle$$

e portanto

$$\int_{t_0-r}^{t_0} .dz(t) \emptyset(t-t_0) - z(t_0) \emptyset(0) = \langle \psi, \Phi\emptyset \rangle$$

mas esse 1º membro é exatamente $\langle z_{t_0}^0, \emptyset \rangle$

Δ

Lema 9.5.: - Para $H \in G([t_0, t_1], X)$ temos

$$z(t_0)H(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} .dz(t)H(t) = \langle \psi, N\kappa(t_1, t_0)H \rangle$$

($\kappa(t_1, t_0)$ dado na definição 5.8; ver também a observação 1.3.)

Prova: - Para $\emptyset \in G^-$, seja x solução de $(N; H; t_0)$ com $x_{t_0} = \emptyset$.

Então

$$F_\alpha(x) = -Mx_{t_0} - Nx_{t_1} = -M\emptyset - N\emptyset T(t_1, t_0) - N\kappa(t_1, t_0)H = -\Phi\emptyset - N\kappa(t_1, t_0)H$$

Assim, x é solução de

$$(K; f_{\emptyset, H; t_0}) + (F_\alpha)'' \quad \text{onde } (F_\alpha)'' \text{ é } F_\alpha(x) = -\Phi\emptyset - N\kappa(t_1, t_0)H.$$

Então, pelo corolário 2.3. de [H1] temos

$$\begin{aligned} \int_{t_0-r}^{t_1} dz(t) f_{\emptyset, H}(t) &= \langle \psi, \Phi\emptyset \rangle + \langle \psi, N\kappa(t_1, t_0)H \rangle \\ \therefore \int_{t_0-r}^{t_0} dz(t) \emptyset(t-t_0) - z(t_0)\emptyset(0) + z(t_0)H(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} dz(t)H(t) &= \\ &= \langle \psi, \Phi\emptyset \rangle + \langle \psi, N\kappa(t_1, t_0)H \rangle \end{aligned}$$

Como

$$\int_{t_0-r}^{t_0} dz(t) \emptyset(t-t_0) - z(t_0)\emptyset(0) = \langle z_{t_0}^0, \emptyset \rangle,$$

do lema 9.4. sai o que queremos. △

Definição 9.6.: - Seja $\tilde{B}_{00} = \Phi^*[(\Phi\tilde{G}^-)^0] \subset B_0$

Do lema 9.4. vemos que $\tilde{B}_{00} \subset B_{00} \subset B_0$

$$\text{Lema 9.7.:} - \begin{cases} 1) & \tilde{G}^- = {}^0B_{00} \\ 2) & \Phi\tilde{G}^- \subset \Phi({}^0\tilde{B}_{00}) \subset {}^0[(\Phi\tilde{G}^-)^0] \\ 3) & {}^0[(\Phi\tilde{G}^-)^0] \cap \Phi\tilde{G}^- = \Phi({}^0\tilde{B}_{00}) \end{cases}$$

(lembrar que dado W espaço de Banach e B subespaço de W' temos

$${}^0B = \{\omega \in W \mid \langle b, \omega \rangle = 0, \forall b \in B\}.$$

Prova: - Do lema 8.4. temos $(\hat{G}^-)^0 = B_{00}$ e como $\hat{G}^-$ é fechado em G^- temos $\hat{G}^- = {}^0[(\hat{G}^-)^0]$ (ver proposição II-8-11 de [H8]), assim vale 1).

Temos $\hat{G}^- = {}^0B_{00} \subset {}^0\tilde{B}_{00}$ (pois $\tilde{B}_{00} \subset B_{00}$) assim $\Phi\hat{G}^- \subset \Phi({}^0\tilde{B}_{00})$

e dado $\emptyset \in {}^0\tilde{B}_{00}$, para $\forall \psi \in [\Phi\hat{G}^-]^0$, temos

$$0 = \underbrace{\langle \Phi*\psi, \emptyset \rangle}_{\in \tilde{B}_{00}} = \langle \psi, \Phi\emptyset \rangle \quad \text{logo} \quad \Phi\emptyset \in {}^0[(\Phi\hat{G}^-)^0] \quad (\text{logo vale 2})$$

Agora seja $c \in {}^0[(\Phi\hat{G}^-)^0] \cap \Phi\hat{G}^-$ então $c = \Phi\emptyset$ para alguma $\emptyset \in \hat{G}^-$

e $\langle \psi, c \rangle = 0 \quad \forall \psi \in (\Phi\hat{G}^-)^0$, ou seja, $0 = \langle \psi, c \rangle = \langle \psi, \Phi\emptyset \rangle = \langle \Phi*\psi, \emptyset \rangle$, logo $\emptyset \in {}^0\tilde{B}_{00} \quad \therefore c \in \Phi({}^0\tilde{B}_{00})$. Isto dá uma inclusão de 3) e a outra inclusão sai obviamente de 2). △

O Teorema 7.5. traduzido para esse caso fica:

Teorema 9.8.: - Para $x \in G^-([t_0-r, t_1], X)$ seja $F_\alpha(x) = -Mx_{t_0} - Nx_{t_1}$.

São equivalentes:

(A'-1) Para $(H, c) \in G([t_0, t_1], X) \times Y$ temos que $(N) + (F_\alpha)$ tem solução, se e somente se

$\exists \emptyset \in G \mid \forall (z, \psi) \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X') \times Y'$ solução de $(N_\alpha^*)_0$ (ou seja, $\forall \psi \in (\Phi \hat{G}^-)^0$ e $z(s) = j(s) * \psi$ p/s $\in [t_0-r, t_1]$)

Temos:

$$\int_{t_0-r}^{t_0} dz(t) \emptyset(t-t_0) - z(t_0) \emptyset(0) + z(t_0) H(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dz(t) H(t) = -\langle \psi, c \rangle$$

(A'-2) Para $(H, c) \in G([t_0, t_1], X) \times Y$ temos que $(N) + (F_\alpha)$ tem solução, se e somente se

$\exists \emptyset \in G \mid \forall \psi \in (\Phi \hat{G}^-)^0$ temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{-r}^0 .d[(M^*\psi)(\theta)]\emptyset(\theta) - \int_{t_0-r}^{t_0} .d_t \left[\int_{t_1-r}^{t_1} .d_\sigma [(N^*\psi)(\sigma-t_1)] oR(\sigma,t) \right] \emptyset(t-t_0) + \\
& + \int_{t_1-r}^{t_1} .d_\sigma [(N^*\psi)(\sigma-t_1)] o^-R(\sigma,t_0) .[\emptyset(o)-H(t_0)] - \\
& - \int_{t_0}^{t_1-r} .d_t \left[\int_{t_1-r}^{t_1} .d_\sigma [(N^*\psi)(\sigma-t_1)] o^-R(\sigma,t) \right] H(t) - \\
& - \int_{t_1-r}^{t_1} .d_t \left[\int_t^{t_1} .d_\sigma [(N^*\psi)(\sigma-t_1)] o^-R(\sigma,t) \right] H(t) = -\langle \psi, c \rangle
\end{aligned}$$

(A'-3) Para $(H, c) \in G([t_0, t_1], X) \times Y$ temos que $(N)+(F_\alpha)$ tem solução, se e somente se

$$\exists \emptyset \in G \mid \forall \psi \in (\Phi \tilde{G}^-)^0 \text{ temos}$$

$$\langle \psi, \Phi \emptyset \rangle + \langle \psi, N\kappa(t_1, t_0)H \rangle = -\langle \psi, c \rangle$$

(A'-4) Para $(H, c) \in G([t_0, t_1], X) \times Y$ temos que $(N)+(F_\alpha)$ tem solução, se e somente se

$$\exists \emptyset \in G \mid c + N\kappa(t_1, t_0)H + \Phi \emptyset \in {}^0[(\Phi \tilde{G}^-)^0]$$

(B) $J(t_0-r)X = \Phi \tilde{G}^-$ é um subespaço vetorial fechado em Y

E cada propriedade dessas equivale a (C) e também a (D') dados no Teorema 7.5.

Convém observar que em (A'-2) usamos (9-4), (9-5) e (9-6) em (A'-1). Em (A'-3) usamos o lema 9.4 e o lema 9.5 em (A'-1).

Através desse teorema, vamos agora generalizar o teorema 5 de [Henry 1] e o teorema 5.1. de [Henry 2]. Para $\gamma \in Y$, consideremos o vínculo $Mx_{t_0} + Nx_{t_1} = \gamma$, ou seja, $F_\alpha(x) = -\gamma$. Temos o

Teorema 9.9.: - Uma condição necessária para $(N; H; t_0) + (F_\alpha)$, onde (F_α) é o vínculo $F_\alpha(x) = -Mx_{t_0} - Nx_{t_1}$; ter solução

$x \in G^-([t_0-r, t_1], X)$ é que para todo $(z, \psi) \in BV([t_0-r, t_1], X') \times Y'$ que satisfaz:

$$(N^*)' \begin{cases} z(s) + \int_s^\infty z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^\infty dz(t) \circ \mu(t, s-t) = \text{cte para } t_0 \leq s < t_1-r \\ z(s) + \int_s^\infty z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^\infty dz(t) \circ \mu(t, s-t) = \\ = \text{cte} - z(t_1) \circ [\mu(t_1^-, -r^+) - \mu(t_1^-, -r)] \text{ quando } s = t_1-r \end{cases}$$

e as condições de fronteira

$$\begin{cases} (m^*) [(I + \Omega(t_0))z_{t_0}^0](\theta) + z(t_0) \circ [\mu(t_0, \theta) - \mu(t_0^-, \theta^+)] = \\ \quad -(M^*\psi)(\theta) ; \theta \in [-r, 0] \\ (n^*) z_{t_1}^0 = (I + \Omega(t_1))^{-1}(N^*\psi) \end{cases}$$

Devemos ter
$$z(t_1)H(t_1^-) - z(t_0)H(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} dz(t)H(t) = -\langle \psi, \gamma \rangle$$

(quando H é contínua, a condição fica
$$-\int_{t_0}^{t_1} z(t)dH(t) = -\langle \psi, \gamma \rangle$$
)

(lembrar que $\mu(t^-, \theta^+) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(t-\epsilon, \theta+\epsilon)$ para $t \in \mathbb{R}$ e $-r \leq \theta \leq 0$

e que estamos supondo em $(N^*)'$ que $z \equiv 0$ em $]t_1, \infty[$ e para o operador $\Omega(t)$, ver definição 6.5. e proposição 6.6.)

Para X reflexivo, se $\text{Im}(M+N\Omega(t, t_0))$ é um subespaço fechado de Y então essa condição é suficiente para $(N)+(F_\alpha)$ ter solução regrada.

Demonstração: - 1º) Para $z \in BV([t_0-r, t_1], X')$ definamos

$z_0 \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X')$ assim:

$$z_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{para } t_0-r \leq s < t_0 \\ z(s) & \text{para } t_0 \leq s < t_1 \\ 0 & \text{para } s=t_1 \end{cases}$$

i) Vamos mostrar que se $(z, \psi) \in BV([t_0-r, t_1], X') \times Y'$ satisfaz $(N^*)'$, (m^*) e (n^*) , então (z_0, ψ) satisfaz $(N_\alpha^*)_0$.

Seja (z, ψ) como acima. Como $z_{t_1}^0 = z_{0t_1}$, de (n^*) vem que

$(I + \Omega(t_1))z_{0t_1} = N^*\psi$ assim, para $t_1-r \leq s \leq t_1$ temos

$$z_0(s) + \int_s^{t_1} z_1(t) \Omega(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} . dz_0(t) \Omega(t, s-t) = (N^*\psi)(s-t_1),$$

ou seja, (z_0, ψ) satisfaz $(N_\alpha^*)_0$ em $[t_1-r, t_1]$.

Para $t_0 - r \leq s \leq t_1 - r$ temos que

$$\int_s^\infty .dz(t) \circ \mu(t, s-t) = \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) - z(t_1) \circ \mu(t_1^+, s-t_1^+)$$

$$\text{mas } \mu(t_1^+, s-t_1^+) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu(t_1 + \varepsilon, s - (t_1 + \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (t_1 + \varepsilon, -r) = \mu(t_1^+, -r)$$

(pois $s - t_1 - \varepsilon < -r$). Assim, para $t_0 - r \leq s < t_1 - r$ temos

$$z(s) + \int_s^\infty .z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^\infty .dz(t) \circ \mu(t, s-t) = \text{cte, por } (N^*)'$$

$$\therefore z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) = \text{cte} - z(t_1) \circ \mu(t_1^+, -r) = \overline{\text{cte}}$$

$$\begin{aligned} \therefore z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) + z(t_1) \circ \mu(t_1^-, -r) &= \overline{\text{cte}} + \\ &+ z(t_1) \circ \mu(t_1^-, -r) = \overline{\overline{\text{cte}}} \end{aligned}$$

e para $s = t_1 - r$, $(N^*)'$ nos dá

$$\begin{aligned} z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) + z(t_1) \circ \mu(t_1^+, -r) &= \text{cte} + \\ &+ z(t_1) \circ [\mu(t_1^-, -r) - \mu(t_1^-, -r^+)] \end{aligned}$$

$$\therefore z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) + z(t_1) \circ \mu(t_1^-, -r^+) = \overline{\overline{\text{cte}}}$$

$\therefore$ para $t_0 - r \leq s \leq t_1 - r$ temos

$$z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} .dz(t) \circ \mu(t, s-t) + z(t_1) \circ \mu(t_1^-, s-t_1^-) = \overline{\overline{\text{cte}}}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(pois para } s < t_1 - r, \mu(t_1^-, s - t_1^-) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(t_1 - \epsilon, s - t_1 + \epsilon) = \\
 & = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(t_1 - \epsilon, -r) = \mu(t_1^-, -r); \text{ j\aa para } s = t_1 - r, \mu(t_1^-, s - t_1^-) = \\
 & = \mu(t_1^-, t_1 - r - t_1^-) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(t_1 - \epsilon, -r + \epsilon) = \mu(t_1^-, -r^+))
 \end{aligned}$$

Assim, para $t_0 \leq s \leq t_1 - r$ temos

$$\begin{aligned}
 & z_0(s) + \int_s^{t_1} dz_0(t) \circ \eta(t, s - t) dt - \int_s^{t_1} dz_0(t) \circ \mu(t, s - t) = \overline{\text{cte}} \\
 & \text{(pois } \int_s^{t_1} dz_0(t) \circ \mu(t, s - t) = \int_s^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, s - t) - z(t_1) \circ \mu(t_1^-, s - t_1^-))
 \end{aligned}$$

e fazendo $s = t_0$ vemos que $\overline{\text{cte}} = \ell$. Logo (z_0, ψ) satisfaz $(N_\alpha^*)_0$ em $[t_0, t_1 - r]$.

Para $t_0 - r \leq s < t_0$ temos

$$z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \circ \eta(t, s - t) dt - \int_s^{t_1} dz(t) \circ \mu(t, s - t) + z(t_1) \circ \mu(t_1^-, s - t_1^-) = \ell$$

$$\text{e por } (m^*): \quad z(s) + \int_s^{t_0} z(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_s^{t_0} dz(t) \alpha(t, s-t) + \\ + z(t_0) \alpha(t_0, s-t_0) = -(M^* \psi)(s-t_0).$$

$$(\text{isso pois } \int_{\theta}^0 dz_{t_0}^0(\tau) \alpha(t_0 + \tau, \theta - \tau) = \int_s^{t_0} dz(t) \alpha(t, s-t) -$$

$- z(t_0) \alpha(t_0, s-t_0)$ para $s = t_0 + \theta$). Assim, subtraindo uma igualdade da outra temos:

$$\int_{t_0}^{t_1} z(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \alpha(t, s-t) + z(t_1) \alpha(t_1, s-t_1) - z(t_0) \alpha(t_0, s-t_0) = \\ = (M^* \psi)(s-t_0) + \underbrace{\hspace{10em}}$$

e assim temos:

$$z_0(s) + \int_{t_0}^{t_1} z_0(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_{t_0}^{t_1} dz_0(t) \alpha(t, s-t) - z_0(t_0) \alpha(t_0, s-t_0) = (M^* \psi)(s-t_0) + \underbrace{\hspace{10em}}$$

que é $(N_{\alpha}^*)_0$ para $[t_0 - r, t_0[$. Assim (z_0, ψ) satisfaz $(N_{\alpha}^*)_0$ em $[t_0 - r, t_1]$

ii) Podemos mostrar agora que a condição é necessária.

Suponhamos que $(N; H; t_0) + (F_{\alpha})$ tenha uma solução $x \in G^-([t_0 - r, t_1], X)$.

Então x será solução de $(K; f_{x_{t_0}, H}; t_0 - r) + (F_{\alpha})$ (Lema 5.5.).

Seja $(z, \psi) \in BV([t_0 - r, t_1], X') \times Y'$ solução de $(N^*)'$, (m^*) e (n^*) .

Então (z_0, ψ) é solução de $(N_{\alpha}^*)_0$ e usando o corolário 2.3. de

[H1] temos:

$$\int_{t_0-r}^{t_1} dz_0(t) f_{x_{t_0}, H(t)} = \langle \psi, \gamma \rangle$$

$$\therefore \underbrace{\int_{t_0-r}^{t_0} dz_0(t)x(t) - z_0(t_0)x(t_0) + z_0(t_0)H(t_0)}_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} dz_0(t)H(t)}_{\text{Assim } z(t_0)H(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} dz(t)H(t) - z(t_1)H(t_1) = \langle \psi, \gamma \rangle} = \langle \psi, \gamma \rangle$$

29) i) Vamos mostrar que, para $\tilde{\psi} \in Y'$, temos:

$\exists \tilde{z} \in BV([t_0-r, t_1], X') \mid (\tilde{z}, \tilde{\psi}) \text{ é solução de } (N^*), (m^*) \text{ e } (n^*) \iff \tilde{\psi} \in [\Phi G^-]^0$

Temos:

($\implies$) Seja uma $\tilde{z}$ dessas. Então

$$(\tilde{z}_0, \tilde{\psi}) \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X') \times Y'$$

é solução de $(N_\alpha^*)_0$, logo, pelo lema 9.4. temos:

$$\forall \emptyset \in G^-, \langle \tilde{\psi}, \Phi \emptyset \rangle = \langle \tilde{z}_{t_0}^0, \emptyset \rangle = 0$$

(pois $\tilde{z}_{t_0}^0 \equiv 0$) logo $\tilde{\psi} \in [\Phi G^-]^0$.

($\impliedby$) Suponhamos $\tilde{\psi} \in [\Phi G^-]^0 \subset [\Phi \tilde{G}^-]^0 = [J(t_0-r)X]^0$.

Logo

$\exists z \in BV_{t_0-r}^{t_0-r, t_1}([t_0-r, t_1], X')$ tal que $(z, \tilde{\psi})$ satisfaz $(N_\alpha^*)_0$. Assim $\forall \emptyset \in G^-$

temos $\langle z_{t_0}^0, \emptyset \rangle = \langle \tilde{\psi}, \Phi \emptyset \rangle = 0$ ($\tilde{\psi} \in [\Phi G^-]^0$) logo $z_{t_0}^0 \equiv 0$. Vemos

que $z_{t_1} = z_{t_1}^0 = (I + \Omega(t_1))^{-1} (N^* \tilde{\psi})$ pois $(N_\alpha^*)_0$ é (n^*) em $[t_1-r, t_1]$.

Considerando $z \equiv 0$ em $]t_1, \infty[$, vemos que z satisfaz (N^*) para $t_0 \leq s \leq t_1 - r$ pois de $(N^*)_{\alpha_0}$ temos:

$$z(s) + \int_s^{t_1} z(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} dz(t) \alpha(t, s-t) = z(s) + \int_s^{\infty} z(t) \alpha(t, s-t) dt - \\ - \int_s^{\infty} dz(t) \alpha(t, s-t) = \ell.$$

Assim, pelo corolário 6.4., existe uma única extensão de $\tilde{z} = z|_{[t_0, t_1]}$ para $t_0 - r \leq t < t_0$ tal que $\tilde{z} \in BV([t_0 - r, t_1], X')$

e satisfaça (N^*) para $t_0 - r \leq s \leq t_1 - r$. Logo $(\tilde{z}, \tilde{\psi})$ satisfaz $(N^*)'$ e (n^*) (como $\tilde{z}(t_1) = 0$, nesse caso. $(N^*)' = (N^*)$)

Para mostrar que $(\tilde{z}, \tilde{\psi})$ satisfaz (m^*) temos, para $t_0 - r \leq s < t_0$:

Por (N^*)

$$\tilde{z}(s) + \int_s^{t_1} \tilde{z}(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_s^{t_1} d\tilde{z}(t) \alpha(t, s-t) = \ell$$

Por $(N^*)_{\alpha_0}$

$$\cancel{z(s)} + \int_{t_0}^{t_1} z(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_{t_0}^{t_1} dz(t) \alpha(t, s-t) - z(t_0) \alpha(t_0, s-t_0) = \\ = (M^*\psi)(s-t_0) + \ell$$

Logo

$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde{z}(t) \alpha(t, s-t) dt - \int_{t_0}^{t_1} d\tilde{z}(t) \alpha(t, s-t) - \tilde{z}(t_0) \alpha(t_0, s-t_0) = (M^*\psi)(s-t_0) + \ell$$

subtraindo uma da outra vem (m^*) .

ii) Podemos mostrar agora, para X reflexivo, que a condição é suficiente quando $\text{Im}(M+N\sigma T(t_1, t_0)) = \Phi G^-$ é fechada em Y

Vamos mostrar que

a) Quando a condição dada no teorema vale, temos que

$$\exists \emptyset \in G^- \mid \Phi \emptyset = \gamma - N\kappa(t_1, t_0)H$$

b) ΦG^- é fechado em $Y \implies \Phi \bar{G}^-$ é fechado em Y

Pela propriedade b), se $\Phi \bar{G}^-$ é fechado em Y , então vale (B) do teorema 9.8. e portanto vale (A'-4). De (A'-4) e da propriedade a) concluimos que quando valer a condição dada no teorema, então $(N)+(F_\alpha)$ terá solução regrada.

a) Dado $\tilde{\psi} \in [\Phi G^-]^0$, como já vimos,

$$\exists \tilde{z} \in BV([t_0-r, t_0], X') \mid (\tilde{z}, \tilde{\psi})$$

é solução de $(N^*)'$, (m^*) e (n^*) . Então $(\tilde{z}_0, \tilde{\psi})$ satisfaz $(N_\alpha^*)_0$ e pelo lema 9.5. temos:

$$\tilde{z}_0(t_0)H(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} d\tilde{z}_0(t)H(t) = \langle \tilde{\psi}, N\kappa(t_1, t_0)H \rangle$$

Como

$$\int_{t_0}^{t_1} d\tilde{z}_0(t)H(t) = \int_{t_0}^{t_1} d\tilde{z}(t)H(t) - \tilde{z}(t_1)H(t_1^-)$$

temos

$$\tilde{z}(t_0)H(t_0) - \tilde{z}(t_1)H(t_1^-) + \int_{t_0}^{t_1} d\tilde{z}(t)H(t) = \langle \tilde{\psi}, N\kappa(t_1, t_0)H \rangle$$

E pela condição do teorema:

$$\tilde{z}(t_0)H(t_0) - \tilde{z}(t_1)H(t_1^-) + \int_{t_0}^{t_1} d\tilde{z}(t)H(t) = \langle \tilde{\psi}, \gamma \rangle$$

Assim

$$\langle \tilde{\psi}, \gamma - N\kappa(t_1, t_0)H \rangle = 0 \quad \forall \tilde{\psi} \in [\Phi G^-]^0$$

Logo

$\gamma - N\kappa(t_1, t_0)H \in {}^0[(\Phi G^-)^0] = \Phi G^-$ (ΦG^- é fechado, ver proposição II-8-11 de [H8])

Logo

$$\exists \emptyset \in G^- \mid \Phi \emptyset = \gamma - N\kappa(t_1, t_0)H$$

b) Sendo ΦG^- fechado em Y temos que ${}^0[(\Phi G^-)^0] \cap \Phi G^-$ que que pelo lema 9.7 é $\Phi({}^0\tilde{B}_{00})$ é fechado em Y . Como

$$\Phi \tilde{G}^- \subset \Phi({}^0\tilde{B}_{00}) \subset {}^0[(\Phi G^-)^0] \quad (\text{lema 9.7})$$

concluimos que $\Phi({}^0\tilde{B}_{00}) = {}^0[(\Phi \tilde{G}^-)^0]$. Daí vemos que

$$\Phi \tilde{G}^- \text{ é fechado em } Y \iff \Phi \tilde{G}^- = \Phi({}^0\tilde{B}_{00})$$

(ver proposição II-8.11 de [H8].)

Vamos mostrar que $\Phi \tilde{G}^- = \Phi({}^0\tilde{B}_{00})$ para encerrar o teorema. Temos:

$$\text{Para } \emptyset \in G^-, \Phi \emptyset = (M + N\sigma(t_1, t_0))\emptyset = Mx_{t_0} + Nx_{t_1} = - \int_{t_0-r}^{t_1} d\alpha(t)x(t),$$

onde x é a solução de $(N)_0$ com $x_{t_0} = \emptyset$ e portanto x é solução

de $(K; f_{\emptyset, 0; t_0-r} + (F_\alpha)')$ onde $(F_\alpha)'$ é $F_\alpha(x) = -\Phi \emptyset$. Aplicando (5-1) e (5-2) temos:

$$\begin{aligned} \Phi\varnothing = & - \int_{t_0-r}^{t_1} .d\alpha(t)x(t) = - \int_{t_0-r}^{t_0} .d\alpha(t)\varnothing(t-t_0) - \int_{t_0}^{t_1} .d\alpha(t)^{-}R(t,t_0)\varnothing(o) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} .d\alpha(t) \cdot \int_{t_0-r}^{t_0} d_{\sigma}R(t,\sigma)\varnothing(\sigma-t_0) \end{aligned}$$

Aplicando Bray (ver [H4], teorema II-1.1.) chegamos a

$$\Phi\varnothing = - \int_{t_0}^{t_1} .d\alpha(t)^{-}R(t,t_0)\varnothing(o) + \int_{t_0-r}^{t_0} .d_{\sigma}[-\alpha(\sigma) + \int_{t_0}^{t_1} d\alpha(t)oR(t,\sigma)]\varnothing(\sigma-t_0)$$

$$\Phi\varnothing = - \int_{t_0}^{t_1} .d\alpha(t)^{-}R(t,t_0)\varnothing(o) + \int_{t_0-r}^{t_0} .d_{\sigma} \left[\int_{\sigma}^{t_1} .d\alpha(t)oR(t,\sigma) \right] \varnothing(\sigma-t_0)$$

$$\left(\text{pois } \int_{\sigma}^{t_0} .d\alpha(t)oR(t,\sigma) = \alpha(t_0) - \alpha(\sigma) \right)$$

$$\therefore (9-7) \quad \Phi\varnothing = -j(t_0)\varnothing(o) + \int_{t_0-r}^{t_0} .dj(\sigma)\varnothing(\sigma-t_0) \quad (j(\sigma) \text{ dado na definição 7.2})$$

Agora, para $\psi \in Y'$, por (ρ^*-1) com $g(\sigma) = -\alpha(\sigma)*\psi$, tomando o par (z,ψ) solução de $(N_{\alpha}^*)_0$ temos:

$$\forall p \in X, \langle z(s), p \rangle = \langle z(t_1), p \rangle + \int_s^{t_1} .d[\alpha(\sigma)*\psi]oR(\sigma,s), p \rangle = \langle z(t_1), p \rangle + \langle \psi, j(s)p \rangle$$

$$\therefore \langle z(t_0); \varnothing(o) \rangle = \langle z(t_1), \varnothing(o) \rangle + \langle \psi, j(t_0)\varnothing(o) \rangle$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \langle \psi, \int_{t_0-r}^{t_0} dj(\sigma) \vartheta(\sigma-t_0) \rangle &= \int_{t_0-r}^{t_0} dz(\sigma) \vartheta(\sigma-t_0) \quad (\text{pois } \langle z(\sigma)-z(t_1), \vartheta(\sigma-t_0) \rangle = \\ &= \langle \psi, j(\sigma) \vartheta(\sigma-t_0) \rangle) \end{aligned}$$

Assim por (9-7)

$$\langle \psi, \Phi \vartheta \rangle = -\langle \psi, j(t_0) \vartheta(o) \rangle + \langle \psi, \int_{t_0-r}^{t_0} dj(\sigma) \vartheta(\sigma-t_0) \rangle$$

e do que vimos acima

$$\begin{aligned} (9-8): \quad \langle \psi, \Phi \vartheta \rangle &= \langle z(t_1), \vartheta(o) \rangle - \langle z(t_0), \vartheta(o) \rangle + \int_{t_0-r}^{t_0} dz(\sigma) \vartheta(\sigma-t_0) = \\ &= \langle z(t_1), \vartheta(o) \rangle + \langle z_{t_0}^o, \vartheta \rangle \end{aligned}$$

Consideremos em Y' a seguinte relação de equivalência

$$\psi_1 \equiv \psi_2 \iff \psi_1 - \psi_2 \in [\Phi \tilde{G}^-]^0$$

ou seja, $\psi_1 \equiv \psi_2 \iff z(t_1)_1 = z(t_1)_2$ (pois $z(t_1)_i = -J(t_0-r)^* \psi_i$ e

$$[\Phi \tilde{G}^-]^0 = [J(t_0-r)X]^0 = \text{Ker}[J(t_0-r)^*])$$

Assim $Y' / \equiv \approx J(t_0-r)^* Y' \subset X'$. Fixemos agora $\vartheta \in \tilde{\sigma}_{B_{00}}$.

Vamos definir $T \in (J(t_0-r)^* Y')'$ por $T(J(t_0-r)^* \psi) = -\langle z_{t_0}^o, \vartheta \rangle$

(z dado por (9-1), (9-2), (9-3)).

T está bem definida pois se tomamos $\psi_1, \psi_2 \in Y'$ com

$$J(t_0 - r) * \psi_1 = J(t_0 - r) * \psi_2$$

então $\psi_1 \equiv \psi_2$ e então

$$\psi_1 - \psi_2 \in [\Phi \tilde{G}^-]^0 \text{ logo } z_{t_{01}}^0 - z_{t_{02}}^0 = \Phi^*(\psi_1 - \psi_2) \in \tilde{B}_{00}$$

e então $\langle z_{t_{01}}^0 - z_{t_{02}}^0, \emptyset \rangle = 0$ (pois $\emptyset \in {}^0\tilde{B}_{00}$), ou seja

$$\langle z_{t_{01}}^0, \emptyset \rangle = \langle z_{t_{02}}^0, \emptyset \rangle.$$

T é claramente linear e contínuo. Por Hahn-Banach,

$$T: J(t_0 - r) * Y' \longrightarrow \mathbb{C}$$

pode ser estendido para $\tilde{T}: X' \longrightarrow \mathbb{C}$, ou seja, $\tilde{T} \in X''$.

Sendo X reflexivo, temos:

$$\exists \tilde{p} \in X \mid \tilde{p} \approx \tilde{T}, \text{ ou seja } \langle p', \tilde{p} \rangle = \tilde{T}(p') \quad \forall p' \in X'.$$

Assim, para $\psi \in Y'$ temos

$$\langle J(t_0 - r) * \psi, \tilde{p} \rangle = -\langle z_{t_0}^0, \emptyset \rangle$$

e por (9-8) temos:

$$\langle J(t_0-r)^* \psi, \tilde{p} \rangle = -\langle \psi, \Phi \emptyset \rangle + \langle z(t_1), \emptyset(o) \rangle = -\langle \psi, \Phi \emptyset \rangle - \langle J(t_0-r)^* \psi, \emptyset(o) \rangle$$

Seja $p = -\tilde{p} - \emptyset(o)$. Temos $\langle \psi, \Phi \emptyset \rangle = \langle \psi, J(t_0-r)p \rangle \quad \forall \psi \in Y'$

Logo

$$\Phi \emptyset = J(t_0-r)p = \Phi(-\emptyset_p) \in \Phi \widehat{G}^-.$$

Assim $\Phi({}^0\widetilde{B}_{00}) \subset \Phi \widehat{G}^-$ e pelo lema 9.7. temos

$$\Phi \widehat{G}^- = \Phi({}^0\widetilde{B}_{00}),$$

ou seja $\Phi \widehat{G}^-$ é fechado em Y .

△

Observação 9.10.: - Se $\mu(t, s-t) = \mathcal{D}(t, s)$ for contínua à esquerda em t então teremos $(N^*)' = (N^*)$ e (m^*) fica:

$$z_{t_0}^0 = -(I + \Omega(t_0))^{-1} (M^* \psi)$$

como é dado no teorema 5 de [Henry1]. Isso pois, nesse caso,

$$\mu(t_0^-, \theta^+) = \mu(t_0, \theta) \quad \text{e} \quad \mu(t_1^-, -r^+) = \mu(t_1^-, -r) = \mu(t_1, -r)$$

No caso da equação com retardamento, $\mu \equiv 0$ satisfaz esse requisito e então temos $(N^*)' = (N^*)$, (m^*) e (η^*) como no teorema 5.1. de [Henry 2].

APÊNDICE

A - μ e η dados em [Henry 1]

Em II-1 consideramos a equação

$$(N): \quad \frac{d}{dt}(x(t) - A(t, x_t) - H(t)) = B(t, x_t)$$

com A, B tais que

$$\exists \mu, \eta: \mathbb{R}^2 \longrightarrow L(x) \text{ com } A(t, \emptyset) = \int_{-r}^0 \cdot d_{\theta} \mu(t, \theta) \emptyset(\theta) \text{ e}$$

$$B(t, \emptyset) = \int_{-r}^0 \cdot d_{\theta} \eta(t, \theta) \emptyset(\theta) \text{ para } t \in \mathbb{R}, \emptyset \in G^- \text{ e ainda}$$

μ satisfazendo as condições $0_A, 1_A$ e 2_A

η satisfazendo as condições $0_B, 1_B$ e 2_B

Lema 1.: - Valem os seguintes resultados:

$$\text{para } \mu \quad \left\{ \begin{array}{l} 1_A \text{ e } 2_A \iff 1_A \text{ e proposição II.1.7. (sai do teorema} \\ 1.12 \text{ de [H3])} \\ 0_A, 1_A \text{ e } 2_A \iff 1_A, 2_A \text{ e o corolário II.1.6 (ver} \\ \text{proposição 6 mais adiante)} \end{array} \right.$$

$$\text{para } \eta \quad \left\{ \begin{array}{l} 0_B, 1_B \text{ e } 2_B \iff 1_B, 2_B \text{ e a proposição II.1.8. (ver} \\ \text{observação II.1.11)} \end{array} \right.$$

Com isso em II-2., definimos o núcleo ${}^{t_0}K$ (para $t_0 \in \mathbb{R}$ fixado) em função de η e μ e vimos que dado $t_1 > t_0$ temos

$${}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}} \in G_0^\sigma \cdot SV^\mu(\Gamma_{t_0-r}^{t_1}, L(x))$$

Em II-3. admitimos η e μ satisfazendo condições extras apropriadas para a existência do resolvente de

$${}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}}, \text{ para cada } t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_1 > t_0$$

Como exemplo dessas condições extras, vamos mostrar a

Proposição 2.: - Se valem $0_A, 1_A, 2_A, 0_B, 1_B, 2_B$, então uma condição suficiente para que

$$K = {}^{t_0}K|_{\Gamma_{t_0-r}^{t_1}}$$

admita um único resolvente

$$R \in G_I^\sigma \cdot SV^\mu(\Gamma_{t_0-r}^{t_1}, L(x)) \quad \bar{e}:$$

$$3_A - \exists \gamma: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ com } \gamma(\varepsilon) \neq 0 \text{ quando } \varepsilon \neq 0 \mid SV_{[-\varepsilon, 0]}^{\mu^t} \leq \gamma(\varepsilon)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

Prova: - Vamos usar o teorema I-2.2. (teorema 3.1. de [H2])

Primeiramente vamos mostrar que vale:

a') Para cada $c \in [t_0 - r, t_1[$, $\exists \delta > 0 \mid \sup\{SV_{]c,t]}[K^t] \mid c < t \leq c + \delta\} < 1$ e

b') Para cada $d \in]t_0 - r, t_1]$, $\exists \delta > 0 \mid \sup\{SV_{]d-\delta,t]}[K^t] \mid d - \delta < t \leq d\} < 1$

Para $t_0 - r \leq c < t_0$; (a') é óbvio, (basta tomar $\delta > 0 \mid c + \delta < t_0$ e aí $K^t \equiv 0$ para $c < t \leq c + \delta$)

Para $t_0 \leq c < t_1$, tomando $\delta > 0$ com $c + \delta < t_1$ temos que, para $c < t \leq c + \delta$ e $c < s \leq t$:

$$K(t,s) = -K(t,s) = -\int_s^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \mu(t, s-t) = -\int_c^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau - \mu(t, s-t).$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 SV_{[c,t]}[K^t] &= \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [K(t, s_i) - K(t, s_{i-1})] p_i \right\| \text{ com } p_i \in X \mid \|p_i\| \leq 1 \right\} = \\
 &= \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[- \int_c^t [\eta(\tau, s_i - \tau) - \eta(\tau, s_{i-1} - \tau)] d\tau - [\mu(t, s_i - t) - \mu(t, s_{i-1} - t)] \right] p_i \right\| \text{ com } \right. \\
 &\quad \left. p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \int_c^t \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\eta(\tau, s_i - \tau) - \eta(\tau, s_{i-1} - \tau)] p_i \right\| d\tau + \left\| \sum_{i=1}^{|d|} (\mu(t, s_i - t) - \mu(t, s_{i-1} - t)) p_i \right\| \right. \\
 &\quad \left. \text{com } p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \int_c^t m(\tau) d\tau + SV_{[c-t, 0]}[\mu^t] \leq \int_c^{c+\delta} m(\tau) d\tau + SV_{[-\delta, 0]}[\mu^t]
 \end{aligned}$$

Podemos então tomar

$$\delta > 0 \mid \int_c^{c+\delta} m(\tau) d\tau < \frac{1}{2} \text{ e } SV_{[-\delta, 0]}[\mu^t] < \frac{1}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(esta última por 3_A)

Analogamente, para (b'), para $t_0 - r < d \leq t_0$ é óbvio (basta tomar $\delta > 0 \mid d - \delta > t_0 - r$ e aí $K^t \equiv 0$ para $d - \delta < t \leq d$).

Para $t_0 < d \leq t_1$, tomando $\delta > 0$ com $d - \delta \geq t_0$ vem que para $d - \delta < t \leq d$ e $d - \delta < s \leq t$:

$$K(t, s) = -K(t, s) = \int_{d-\delta}^t \eta(\tau, s - \tau) d\tau - \mu(t, s - t).$$

Assim concluímos então que:

$$SV_{[d-\delta, t]}[K^t] \leq \int_{d-\delta}^d m(\tau) d\tau + SV_{[-\delta, 0]}[\mu^t]$$

e podemos tomar $\delta > 0$ para que $SV_{[d-\delta, t]}[K^t] < 1$. Vale então a') e b') e é evidente que $a') \implies a)$ e $b') \implies b)$ onde a) e b) são dados no teorema I-2.2.. Assim, por esse mesmo teorema, temos a seguinte equivalência;

K admite um único resolvente $\iff \forall t \in [t_0 - r, t_1[$, o operador $I_X - K(t^+, t)$ é inversível (e bicontínuo). Ora, no nosso caso $K(t^+, t) = 0$ pois para cada $p \in X$:

$$K(t^+, t)p = \lim_{\epsilon \downarrow 0} K(t+\epsilon, t)p$$

para $t_0 - r \leq t < t_0$ temos $K(t+\epsilon, t) = 0$ (para ϵ pequeno) e para $t_0 \leq t$,

$$K(t^+, t)p = \underbrace{-\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_t^{t+\epsilon} \eta(\tau, t-\tau)p d\tau}_0 - \underbrace{\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(t, -\epsilon)p}_0 = 0$$

($\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(t, -\epsilon)p = 0$ pois $|\mu(t, -\epsilon)p| \leq \|p\| |\mu(t, -\epsilon)| \leq \|p\| \cdot \|\mu(t, -\epsilon) - \mu(t, 0)\|$

$$\leq \|p\| SV_{[-\epsilon, 0]}[\mu^t] \leq \|p\| \gamma(\epsilon) \rightarrow 0$$

Então se vale 3_A , temos que K admite um único resolvente. Δ

Com isso podemos analisar as condições dadas para η e μ no artigo [Henry1].

Lá estuda-se (N) no contexto das funções contínuas com valores em espaços euclidianos ($X = E^n, H \in C(\mathbb{R}, X)$ e procura-se soluções contínuas), usa-se a integral de Lebesgue e Lebesgue-Stieltjes.

O núcleo η de 1° é mensurável, satisfaz $1_B, 2_B$, é contínuo à esquerda na 2° variável e portanto satisfaz a:

Proposição 3.: - O η dado em [Henry 1] é tal que $\forall s, t, t_0 \in \mathbb{R}$, $t > t_0$ temos:

$$\exists \int_{t_0}^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau$$

Prova: - η é mensurável e para $\tau, \rho \in \mathbb{R}$ e $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ seja $\eta_{ij}(\tau, \rho)$ a componente da i -ésima linha e j -ésima coluna de $\eta(\tau, \rho)$.

Temos:

$$|\eta_{ij}(\tau, \rho)| \leq \|\eta(\tau, \rho)\| = \|\eta(\tau, \rho) - \eta(\tau, 0)\| \leq SV[\eta^\tau] \leq m(\tau)$$

E para uma região mensurável limitada E de $\mathbb{R}^2$ ($E \subset [a, b] \times [c, d]$)

$$\int_E m \leq \int_a^b \int_c^d m(\tau) d\tau d\rho = (d-c) \int_a^b m(\tau) d\tau < \infty$$

Assim, pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ,

$$\int_E \eta_{ij} < \infty \quad \text{e} \quad \therefore \exists \int_E \eta$$

Assim η é integrável em qualquer retângulo de $\mathbb{R}^2$. Tomemos o retângulo da figura:

Por Fubini, existe a integral de η em quase qualquer segmento paralelo à aresta maior. Usando a continuidade à esquerda de η na segunda variável, formamos uma sequência de funções de τ (onde cada uma é η restrito a uma aresta), integráveis que convergem pontualmente para η restrito à aresta de cima. E como todos são majorados pelo m , de novo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que existe a integral de η na aresta de cima, ou seja,

$$\int_{t_0}^t \eta(\tau, s-\tau) d\tau \quad \Delta$$

Um η assim, dentro do nosso contexto, satisfaria a proposição II-1.8 e então (Lema 1) satisfaria o que é exigido para η em II-1.

O μ dado em [Henry 1] é Borel mensurável, contínuo à esquerda na segunda variável, satisfaz 1_A , 2_A (pois satisfaz a proposição II-1.7.), 3_A e é tal que

$$A(t, \emptyset) = \int_{-r}^0 d_{\emptyset} \mu(t, \theta) \emptyset(\theta)$$

é contínua em t para cada $\emptyset \in C([-r, 0], X)$ fixa.

Proposição 4.: - para o μ dado em [Henry 1] temos

$$\tilde{A}(C(\mathbb{R}, X)) \subset C(\mathbb{R}, X)$$

($\tilde{A}$ dado na definição II-1.2.).

Prova: - Seja $x \in C(\mathbb{R}, X)$ e $t' \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta > 0 \mid |t - t'| < \delta \implies |A(t, x_t) - A(t', x_{t'})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad e$$

$$\|x_t - x_{t'}\| < \frac{\varepsilon}{2SV^u[\mu]}$$

(para x contínua, a função $t \longrightarrow x_t$ é contínua e em [Henry 1] temos

$$\sup_{\mathbb{R}} SV[\mu^t] = SV^u[\mu] < \infty)$$

Daí

$$\begin{aligned} |\tilde{A}_x(t) - \tilde{A}_x(t')| &\leq \left| \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) x(t+\theta) - \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t', \theta) x(t'+\theta) \right| + \\ &+ \left| \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) x(t'+\theta) - \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t', \theta) x(t'+\theta) \right| = \\ &= \left| \int_{-r}^0 d_\theta \mu(t, \theta) [x_t - x_{t'}](\theta) \right| + |A(t, x_t) - A(t', x_{t'})| \leq \\ &\leq \|x_t - x_{t'}\| SV^u[\mu] + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \Delta \end{aligned}$$

Proposição 5.: - para cada $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ temos:

$$\tilde{A} \in L(C([t_0 - r, t_1], X), C([t_0, t_1], X))$$

Prova: - $\tilde{A}$ é obviamente linear e para $x \in C([t_0 - r, t_1], X)$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}(x)\| &= \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|\tilde{A}_x(t)\| = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|A(t, x_t)\| = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\| \int_{-r}^0 d\mu^t(\theta) x(t+\theta) \right\| \leq \\ &\quad \left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} SV[\mu^t] \right) \cdot \|x\| \quad \Delta \end{aligned}$$

Isso não é suficiente para termos $\tilde{A}(G(\mathbb{R}, X)) \subset G(\mathbb{R}, X)$ como é exigido em II-1 (propriedade 0_A), conforme exemplo que veremos adiante. A próxima proposição nos mostra uma condição necessária e suficiente para $\tilde{A}$ levar regrada em regrada.

Proposição 6.: - Para μ satisfazendo 1_A e 2_A temos, dado dado $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$:

$$\tilde{A} \in L(G^-([t_0-r, t_1], X), G([t_0, t_1], X)) \iff \mu \text{ é simplesmente regrada na contra-diagonal.}$$

Prova: - ($\implies$) Nesse caso vale 0_A e em II-1 vimos que 0_A , 1_A e $2_A \implies$ corolário II-1.6.

($\impliedby$) Fica evidente a partir do Teorema 2.2. de [H3] △

Assim, se a μ dada em [Henry 1] é ainda simplesmente regrada na contra-diagonal, nós estamos nas condições do nosso contexto.

A proposição 2 nos garante que nesse caso o nosso K vai admitir o resolvente único.

Vamos ver agora um exemplo de μ que satisfaz as condições dadas em [Henry 1] mas não é simplesmente regrada na contra-

-diagonal (e assim, pela proposição 6, não satisfaz o que é exigido em II-1)

Exemplo 7: - Para $X=\mathbb{R}$ seja

$$\mu(t,s) = \begin{cases} \chi_{\left[\frac{r}{4} \sin \frac{1}{t} - \frac{r}{2}, |t| + \frac{r}{4} \sin \frac{1}{t} - \frac{r}{2}\right]}(s) & ; -r \leq s \leq \frac{-r}{8}, t \neq 0 \\ 0 & ; t=0 \text{ ou } s > \frac{-r}{8} \text{ ou } s < -r \end{cases}$$

Verifica-se facilmente que este μ satisfaz 1_A , 2_A (satisfaz a proposição II-1.7 pois $V[\mu^t] = 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ e $V[\mu^0] = 0$) e 3_A . Vemos também que μ é contínua à esquerda na 2ª variável e μ é Borel-Mensurável.

μ satisfaz também as condições dadas no exercício 46 da página 517 de [D-S], que, segundo o exercício, são necessárias e suficientes para que, para cada $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tenhamos

$T \in L(C([-r,0],\mathbb{R}), C([a,b],\mathbb{R}))$ onde para $\emptyset \in C([-r,0],\mathbb{R})$,

$$T(\emptyset) = A_\emptyset, \text{ ou seja,}$$

para $t \in [a, b]$, $T(\emptyset)(t) = A_{\emptyset}(t) = A(t, \emptyset) = \int_{-r}^0 d_{\emptyset} \mu(t, \emptyset) \emptyset(\emptyset)$

(as condições do exercício são:

para $t \in [a, b]$, $\mu^t \in BV_0([-r, 0], \mathbb{R})$ com $\sup_{a \leq t \leq b} V_{[-r, 0]}[\mu^t] = M < \infty$

e no caso $M=2$ e ainda $\mu(t, 0)$ e $\int_{-r}^c \mu(t, \emptyset) d\emptyset$ são contínuas em t para cada $c \in [-r, 0]$, o que é facilmente verificável).

Como $[a, b]$ é arbitrário, vemos que para $\emptyset \in C([-r, 0], \mathbb{R})$ temos $A_{\emptyset}$ é contínua ($A(t, \emptyset)$ é contínua em t). Assim esse μ satisfaz as condições de [Henry 1].

Agora vemos que numa vizinhança do ponto $(0, \frac{-r}{2})$, caminhando para esse ponto em qualquer direção, exceto a vertical, obtemos sempre valores 0 e 1 de μ ; logo não existe nenhum limite direcional de μ nesse ponto (exceto na direção vertical).

Em particular

$$\nexists \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(\epsilon, \frac{-r}{2} - \epsilon), \text{ e para } p \in \mathbb{R} \text{ com } p \neq 1 \nexists \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(\epsilon, \frac{-r}{2} - \epsilon) \cdot p$$

logo μ não é simplesmente regradada na contra-diagonal.

ooo

B - Os operadores $T(t, t_0)$, $T_1(t, t_0)$, $T_2(t, t_0)$, $T(t, t_0)$ e $\kappa(t, t_0)$

Como vimos na proposição II-5.1., dado

$$f \in G([t_0-r, \infty[, X); \quad \exists! x \in G([t_0-r, \infty[, X)$$

que satisfaz $(K_N; f; t_0-r)$ para $t \geq t_0-r$ com $x(t_0-r) = f(t_0-r)$.

Nesse caso teremos $x_{t_0} = f_{t_0}$ conforme a fórmula (p-4) de II-5.

Chamemos essa solução de $x(t_0, f_{t_0}, [f]_{t_0, \infty[})$

Definição 1.: - Para $t_0, t \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0$, definamos

$$T(t, t_0): G([t_0-r, t], X) \longrightarrow G$$

por $T(t, t_0)f = x_t(t_0, f_{t_0}, [\tilde{f}])$ onde $\tilde{f} = f_{[t_0, t]}$

(estamos sô considerando a solução em $[t_0-r, t]$, já que

$$f \in G([t_0-r, t], X))$$

Por (p-3) de II-5. temos:

$$(1) [T(t, t_0)f](\theta) = x(t_0, f_{t_0}, [\tilde{f}])(t+\theta) = f(t+\theta) - \int_{t_0-r}^{t+\theta} d_{\tau} R(t+\theta, \tau) f(\tau); \quad -r \leq \theta \leq 0$$

Proposição 2.: - $T(t, t_0) \in L(G([t_0-r, t], X), G)$

Prova: - A linearidade sai de (1) e temos:

$$\begin{aligned} \|T(t, t_0)f\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \left\| f(t+\theta) - \int_{t_0-r}^{t+\theta} d_{\tau} R(t+\theta, \tau) f(\tau) \right\| \leq \|f\| + \\ + \left(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} SV_{[t_0-r, t+\theta]} [R^{t+\theta}] \right) \|f\| \quad \Delta \end{aligned}$$

Definição 3.: - Seja $G_1 = \{f \in G([t_0-r, t], X) \mid f|_{[t_0, t]} \equiv 0\}$

logo $G_1 \cong G$

Seja $T_1(t, t_0) = T(t, t_0)|_{G_1} \in L(G_1, G) \cong L(G)$

Assim, para

$$\emptyset \in G, \quad T_1(t, t_0)\emptyset = x_t(t_0, \emptyset, [0])$$

Definição 4.: - Seja $G_2 = \{f \in G([t_0-r, t], X) \mid f_{t_0} \equiv 0\}$

logo $G_2 \cong G_0([t_0, t], X)$

Seja $T_2(t, t_0) = T(t, t_0)|_{G_2} \in L(G_2, G) \cong L(G_0([t_0, t], X), G)$

Assim, para

$$h \in G_0([t_0, t], X), \quad T_2(t, t_0)h = x_t(t_0, 0, [h])$$

Para $-r \leq \theta \leq 0$ temos, por (p-3):

$$(2) \quad [T_1(t, t_0)\varnothing](\theta) = x(t_0, \varnothing, [0])(t+\theta) = \begin{cases} \varnothing(t+\theta-t_0) & \text{se } t+\theta \leq t_0 \\ -\int_{t_0-r}^{t_0} d_\tau R(t+\theta, \tau) \varnothing(\tau-t_0) & \\ \text{se } t+\theta > t_0 \end{cases}$$

$$(3) \quad [T_2(t, t_0)h](\theta) = x(t_0, 0, [h])(t+\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } t+\theta \leq t_0 \\ h(t+\theta) - \int_{t_0}^{t+\theta} d_\tau R(t+\theta, \tau) h(\tau) & \\ \text{se } t+\theta > t_0 \end{cases}$$

$$(4) \quad x(t_0, \varnothing, [h])(t+\theta) = \begin{cases} \varnothing(t+\theta-t_0) & \text{se } t+\theta \leq t_0 \\ h(t+\theta) - \int_{t_0-r}^{t_0} d_\tau R(t+\theta, \tau) \varnothing(\tau-t_0) - \int_{t_0}^{t+\theta} d_\tau R(t+\theta, \tau) h(\tau) & \\ \text{se } t+\theta > t_0 \end{cases}$$

Assim, para $t_0, t \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0$, podemos afirmar que:

$$(5) \quad x_t(t_0, \varnothing, [h]) = T_1(t, t_0)\varnothing + T_2(t, t_0)h|_{]t_0, t]}$$

onde x é a única solução regradada de $(K_N; f; t_0-r)$ com

$f_{t_0} = \varnothing$ e $f|_{]t_0, \infty[} = h$ em $[t_0-r, \infty[$ com $x(t_0-r) = \varnothing(-r)$.

Das fórmulas anteriores vemos também que $T_1(t_0, t_0) = I_G$ e

$$T_2(t_0, t_0) = 0.$$

Pelo Teorema II-5.6., dado $t_0 \in \mathbb{R}$, $\emptyset \in G$ e $H \in G([t_0, \infty[, X)$ temos que

$$\exists! x = x(t_0, \emptyset, H) \in G([t_0 - r, \infty[, X)$$

que é solução de $(N: H; t_0)$ em $[t_0, \infty[$ e $x_{t_0} = \emptyset$.

Do lema II-5.5. concluímos que

$$x(t_0, \emptyset, H) = x(t_0, \emptyset, [\tilde{f}_{\emptyset, H}])$$

onde

$$\tilde{f}_{\emptyset, H} = f_{\emptyset, H}|_{[t_0, \infty[} = H - (H(t_0) - \emptyset(o))$$

(ver definição II-5.4.)

Podemos então relacionar os operadores $T(t, t_0)$ e $\kappa(t, t_0)$ da definição II-5.8. com os operadores $T_1(t, t_0)$ e $T_2(t, t_0)$. Temos

$$\begin{aligned} T(t, t_0)\emptyset &= x_t(t_0, \emptyset, 0) = x_t(t_0, \emptyset, [\tilde{f}_{\emptyset, 0}]) = x_t(t_0, \emptyset, [0]) + x_t(t_0, 0, [\tilde{f}_{\emptyset, 0}]) = \\ &= T_1(t, t_0)\emptyset + T_2(t, t_0)\tilde{f}_{\emptyset, 0} = (T_1(t, t_0) + T_2(t, t_0) \circ \Lambda_0)\emptyset \end{aligned}$$

onde

$$\Lambda_0 \in L(G, G([t_0, t], X)) \text{ com } \Lambda_0(\emptyset) = \tilde{f}_{\emptyset, 0} \equiv \emptyset(o)$$

$$\text{e } \kappa(t, t_0)H = x_t(t_0, 0, H) = x_t(t_0, 0, [\tilde{f}_{\emptyset, H}]) = T_2(t, t_0)\tilde{f}_{\emptyset, H} = (T_2(t, t_0) \circ \Lambda)H$$

onde

$$\Lambda \in L(G([t_0, t], X), G_0([t_0, t], X)) \text{ com } \Lambda(H) = \tilde{f}_{0, H} = H - H(t_0)$$

Com isso, acabamos de provar a

Proposição 5.: - $T(t, t_0) \in L(G)$ e $\kappa(t, t_0) \in L(G([t_0, t], X), G)$

C - Mais relações entre os resultados de [Hale], [Henry 2] [Henry 1] e os nossos.

i) A relação entre $\bar{R}^*$ e $(N)_0$

Seja $\chi_0 \in G([-r, 0], L(X))$ com $\chi_0(\theta) = 0$ para $\theta \in [-r, 0[$ e $\chi_0(0) = I_X$.

É fácil verificar que, dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $p \in X$, a única solução $x \in G([t_0 - r, \infty[, X)$ de $(N; t_0)_0$, (a equação $(N; H; t_0)$ homogênea, ou seja, quando $H = \text{cte}$) para $t \geq t_0$ com $x_{t_0} = \chi_0 p$ (está claro que $\chi_0 p(\theta) = \chi_0(\theta) \cdot p$ para $\theta \in [-r, 0]$) é dada por

$$x(t) = \bar{R}(t, t_0)p \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Para verificar isso basta fazer $H = \text{cte}$ e $\emptyset = \chi_0 p$ em (5-2).

Definição 1.: - Seja $U(t, s) = \bar{R}(t, s)$ em Γ e $U(t, s) = 0$ em $\mathbb{R}^2 - \Gamma$.

Acabamos de provar a:

Proposição 2.: - Para $p \in X$, $s, t \in \mathbb{R}$, $x(t) = U(t, s)p$ é a solução de $(N; s)_0$ para $t \geq s$ com $x_s = \chi_0 p$.

Outro modo de ver isso é considerar (4-3) ou seja:

$$\bar{R}^*(R^*) \quad \bar{R}(t, s) - \int_s^t d_\tau \mu(t, \tau - t) \circ \bar{R}(\tau, s) = I_X + \int_s^t \left[\int_s^\sigma d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ \bar{R}(\tau, s) \right] d\sigma$$

assim temos

$$U(t, s) - \int_{t-r}^t d_\tau \mu(t, \tau - t) \circ U(\tau, s) = I_X + \int_s^t \left[\int_{\sigma-r}^\sigma d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) \circ U(\tau, s) \right] d\sigma$$

(isso pois se $t-r \leq s$ temos $U(\tau, s)=0$ para $t-r \leq \tau < s$ e se $s \leq t-r$ temos $\mu(t, \tau-t)=cte$ para $s \leq \tau \leq t-r$; do mesmo modo se $\sigma-r \leq s$ temos $U(\tau, s)=0$ para $\sigma-r \leq \tau < s$ e se $s \leq \sigma-r$ temos $\eta(\sigma, \tau-\sigma)=cte$ para $s \leq \tau \leq \sigma-r$). Para $p \in X$ obtemos

$$U(t, s)p - \int_{t-r}^t d_{\tau} \mu(t, \tau-t) U(\tau, s)p = p + \int_s^t \left[\int_{\sigma-r}^{\sigma} d_{\tau} \eta(\sigma, \tau-\sigma) U(\tau, s)p \right] d\sigma$$

Definição 3.: - Para $t \in \mathbb{R}$ e $\emptyset \in G$ seja

$$D(t, \emptyset) = \emptyset(0) - \int_{-r}^0 d_{\theta} \mu(t, \theta) \emptyset(\theta)$$

Temos

$$D(t, U_t(\cdot, s)p) = U(t, s)p - \int_{t-r}^t d_{\tau} \mu(t, \tau-t) U(\tau, s)p$$

e

$$D(s, U_s(\cdot, s)p) = U(s, s)p - \int_{s-r}^s d_{\tau} \mu(s, \tau-s) U(\tau, s)p = p$$

(aqui fica claro que $(U_t(\cdot, s)p)(\theta) = U(t+\theta, s)p$)

Assim a equação $\bar{\cdot}(R^*)$ aplicada a $p \in X$ fica

$$D(t, U_t(\cdot, s)p) = D(s, U_s(\cdot, s)p) + \int_s^t \left[\int_{-r}^0 d_{\theta} \eta(\sigma, \theta) U(\sigma+\theta, s)p \right] d\sigma$$

que é a equação $(N; s)_0$ com $x(t) = U(t, s)p$ para $t \geq s$.

Da proposição 2 vem que $T(t, s)\chi_0 p = U_t(\cdot, s)p$ ($t \geq s$)

Quando H é contínua, por valer a integração por partes, podemos escrever que, por (5-5)

$$(\kappa(t,s)H)(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } t+\theta \leq s \\ -H(t+\theta) - \bar{R}(t+\theta,s)H(s) - \int_s^{t+\theta} d_\tau \bar{R}(t+\theta,\tau)H(\tau) = \\ = \int_s^{t+\theta} \bar{R}(t+\theta,\tau)dH(\tau) & \text{se } t+\theta \geq s \end{cases}$$

ou seja, vale

$$(1) \quad (\kappa(t,s)H)(\theta) = \int_s^{t+\theta} U(t+\theta,\tau)dH(\tau) = \int_s^t U(t+\theta,\tau)dH(\tau) \text{ para } -r \leq \theta \leq 0$$

E temos então a Fórmula de Variação das Constantes:

$$(2) \quad x_t(s, \emptyset, H) = T(t,s)\emptyset + \kappa(t,s)H = T(t,s)\emptyset + \int_s^t T(t,\tau) \cdot \chi_0 dH(\tau)$$

$$(T(t,\tau) \cdot \chi_0 = U_t(\cdot, s) \in G([-r, 0], L(X)) \text{ e } \kappa(t,s)H = \int_s^t U_t(\cdot, \tau)dH(\tau))$$

ii) A relação entre $\bar{R}_*$ e (N^*)

Para $p' \in X'$, compondo p' com (4-6) (ou $\bar{R}_*$) obtemos para $s \leq t$

$$(3) \quad p'o\bar{R}(t,s) - p' + \int_s^t p'o\bar{R}(t,\tau) \circ n(\tau, s-\tau) d\tau + p'o\mu(t, s-t) - \\ - \int_s^t d_\tau (p'o\bar{R}(t,\tau)) \circ \mu(\tau, s-\tau) = 0$$

Vemos que (3) é (N^*) com $z(s) = p'o\bar{R}(t,s)$ para $s \leq t$ e $z(s) = 0$ para $s > t$. Isso pois o (N^*) dado em [Henry 1] é

$$z(s) + \int_s^\infty z(\tau) \alpha(\tau, s-\tau) d\tau - \int_s^\infty dz(\tau) \alpha(\tau, s-\tau) = cte$$

e se $z(s)=0$ para $s > t$ a equação fica

$$z(s) + \int_s^t z(\tau) \alpha(\tau, s-\tau) d\tau - \int_s^t dz(\tau) \alpha(\tau, s-\tau) + z(t) \alpha(t, s-t) = cte$$

pois a integral nesse caso é a integral de Lebesgue-Stieltjes.

Definição 4.: - Seja $Y(s,t) = \bar{R}(t,s)$ em Γ e $Y(s,t)=0$ para $(t,s) \in \mathbb{R}^2 - \Gamma$ ou seja, $Y(s,t) = U(t,s)$ em $\mathbb{R}^2$

Considerando (N^*) : $z(s) + \int_s^t z(\tau) \alpha(\tau, s-\tau) d\tau - \int_s^t dz(\tau) \alpha(\tau, s-\tau) +$
 $+ z(t) \alpha(t, s-t) = cte, \quad s \leq t$

Acabamos de provar a:

Proposição 5.: - $z(s) = p' \circ Y(s,t)$ é a solução de (N^*) para $s \leq t$ com $z_{t+r} = p' \cdot \chi_{-r} \in B_0$ (onde $p' \cdot \chi_{-r}(\theta) = 0$ para $\theta \in]-r, 0]$ e $p' \cdot \chi_{-r}(-r) = p'$) e $z|_{[t+r, \infty[} \equiv 0$.

Podemos ver isso também do seguinte modo: (N^*) com $z_{t+r} = p' \cdot \chi_{-r}$ e $z|_{[t+r, \infty[} \equiv 0$ é também a equação $(N^*; \hat{g}; p')$ do Teorema II-6.3. com

$$\hat{g}(s) = p' \circ \int_s^t \eta(\sigma, s-\sigma) d\sigma - p' \circ \mu(t, s-t) \text{ para } s \leq t$$

Assim, pela fórmula (6-3), a solução será:

$$z(s) = p' - \int_s^t .d_\tau [-p' o \int_\tau^t \eta(\sigma, \tau - \sigma) d\sigma] o^-R(\tau, s) - \int_s^t .d_\tau [-p' o \mu(t, \tau - t)] o^-R(\tau, s)$$

Por Dirichlet

$$z(s) = p' + p' o \int_s^t \left[\int_s^\sigma .d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) o^-R(\tau, s) \right] d\sigma + p' o \int_s^t .d_\tau \mu(t, \tau - t) o^-R(\tau, s)$$

$$\therefore z(s) = p' o [I_x + \int_s^t \left[\int_s^\sigma .d_\tau \eta(\sigma, \tau - \sigma) o^-R(\tau, s) \right] d\sigma + \int_s^t .d_\tau \mu(t, \tau - t) o^-R(\tau, s)]$$

aplicando (4-3) ($\bar{\cdot}(R^*)$) sai que $z(s) = p' o^-R(t, s)$ para $s \leq t$ e como para $s > t$, $z(s) = 0$ temos que $z(s) = p' o Y(s, t)$.

Observação 6.: - O $Y(t, s)$ que aparece em [Henry 1] é exatamente o nosso $U(t, s)$ (ou $Y(s, t)$). Assim, temos que a fórmula (5) do teorema 1 de [Henry 1] é exatamente (5-3) e a fórmula (6) daquele mesmo teorema é (4-6) (ou $\bar{\cdot}(R_*)$ que como vimos é (N^*)).

Essa nomenclatura que usamos aqui ($U(t, s) = Y(s, t)$) vem de [Hale] e de [Henry 2].

oOo

$D =$ o operador $\tilde{T}(s,t)$

Vamos nesse item definir $\tilde{T}(s,t)$ (ver [Henry.1], [Henry 2], [Hale]) no nosso contexto.

Definição 1.: - Para $s \leq t$ definimos $\tilde{T}(s,t): B_0 \longrightarrow B_0$ tal que para $\phi \in B_0$ $\tilde{T}(s,t)\phi = z_s^0(t,\phi) \in B_0$ (lembrar que para $-r \leq \theta < 0$ temos $z_s^0(t,\phi)(\theta) = z(t,\phi)(s+\theta)$ e que $z_s^0(t,\phi)(0) = 0$) onde $z(t,\phi)$ é a solução de (N^*) para $s \leq t-r$ com $z_t(t,\phi) = \phi$ e $z(t,\phi)|_{[t,\infty[} \equiv 0$ (ver corolário II-6.4.)

Para $\sigma \leq t-r$, $-r \leq \theta < 0$ temos, por (6-4):

$$(\tilde{T}(s,t)\phi)(\theta) = z(t,\phi)(s+\theta) = \phi(-r) - \int_{s+\theta}^{t-r} d\tilde{g}(\sigma) o^- R(\sigma, s+\theta) \quad (\tilde{g} \text{ dado no corolário II-6.4.})$$

$$\begin{aligned} &= \phi(-r) - \int_{s+\theta}^{t-r} d_\sigma [\phi(-r) o \int_\sigma^{t-r} \eta(\tau, \sigma-\tau) d\tau] o^- R(\sigma, s+\theta) + \\ &+ \int_{s+\theta}^{t-r} d_\sigma \left[\int_{t-r}^t \phi(\tau-t) o \eta(\tau, \sigma-\tau) d\tau \right] o^- R(\sigma, s+\theta) - \\ &- \int_{s+\theta}^{t-r} d_\sigma \left[\int_{t-r}^t d_\tau \phi(\tau-t) o \mu(\tau, \sigma-\tau) \right] o^- R(\sigma, s+\theta) \end{aligned}$$

Assim temos (1):

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s,t)\phi)(\theta) = & \phi(-r) o \left[\bar{R}(t-r, s+\theta) - \int_{s+\theta}^{t-r} \cdot d_{\tau} \mu(t-r, \tau-t+r) o \bar{R}(\tau, s+\theta) \right] + \\ & + \int_{s+\theta}^{t-r} \cdot d_{\sigma} \left[\int_{t-r}^t \phi(\tau-t) o \eta(\tau, \sigma-\tau) d\tau \right] o \bar{R}(\sigma, s+\theta) - \\ & - \int_{s+\theta}^{t-r} \cdot d_{\sigma} \left[\int_{t-r}^t d_{\tau} \phi(\tau-t) o \mu(\tau, \sigma-\tau) \right] o \bar{R}(\sigma, s+\theta) \end{aligned}$$

(nessa última igualdade foi usado Dirichlet e também a fórmula (4-3))

$$\text{Para } t-r < s \leq t \quad [\tilde{T}(s,t)\phi](\theta) = \begin{cases} \phi(\theta+s-t) & \text{quando } t-r-s \leq \theta < 0 \\ \text{é dado como em (1)} & \text{quando } -r \leq \theta \leq t-r-s \end{cases}$$

Proposição 2.: - Para $s \leq t$ temos $\tilde{T}(s,t) \in L(B_0)$

Prova: - Vemos das fórmulas acima que $\tilde{T}(s,t)$ é linear. Vamos mostrar que é limitado:

1º) Para $s \leq t-r$

$$\|\tilde{T}(s,t)\phi\|_{B_0} = V_{[-r,0]}(\tilde{T}(s,t)\phi) = SV_{[-r,0]}(\tilde{T}(s,t)\phi)$$

(ver [H4], I-4-c)

Assim:

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{T}(s,t)\phi\|_{B_0} \leq \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \phi(-r) [\bar{R}(t-r, s+\theta_i) - \bar{R}(t-r, s+\theta_{i-1})] p_i \right\| \right. \\
& \quad \left. \text{com } p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\} + \\
& \quad + \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \phi(-r) \left[\int_{s+\theta_i}^{t-r} d_\tau \mu(t-r, \tau-t+r) o \bar{R}(\tau, s+\theta_i) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_{s+\theta_{i-1}}^{t-r} d_\tau \mu(t-r, \tau-t+r) o \bar{R}(\tau, s+\theta_{i-1}) \right] p_i \right\|, p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\} + \\
& \quad + \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[\int_{s+\theta_i}^{t-r} d_\sigma \left(\int_{t-r}^t \phi(\tau-t) o \eta(\tau, \sigma-\tau) d\tau \right) o \bar{R}(\sigma, s+\theta_i) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_{s+\theta_{i-1}}^{t-r} d_\sigma \left(\int_{t-r}^t \phi(\tau-t) o \eta(\tau, \sigma-\tau) d\tau \right) o \bar{R}(\sigma, s+\theta_{i-1}) \right] p_i \right\|, p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\} + \\
& \quad + \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[\int_{s+\theta_i}^{t-r} d_\sigma \left(\int_{t-r}^t d_\tau \phi(\tau-t) o \mu(\tau, \sigma-\tau) \right) o \bar{R}(\sigma, s+\theta_i) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_{s+\theta_{i-1}}^{t-r} d_\sigma \left(\int_{t-r}^t d_\tau \phi(\tau-t) o \mu(\tau, \sigma-\tau) \right) o \bar{R}(\sigma, s+\theta_{i-1}) \right] p_i \right\|, p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\} \leq \\
& \leq \|\phi(-r)\|_{SV_{[s-r, t-r]}} [\bar{R}^{t-r}] + \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \|\phi(-r)\|_{SV_{[t-r, t-r]}} \sup_{s-r \leq \tau \leq t-r} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\bar{R}(\tau, s+\theta_i) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \bar{R}(\tau, s+\theta_{i-1})] p_i \right\|, p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\} + \\
& \quad + \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \int_{s-r}^{t-r} d_\sigma \left[\int_{t-r}^t \phi(\tau-t) o \eta(\tau, \sigma-\tau) d\tau \right] o \sum_{i=1}^{|d|} [\bar{R}(\sigma, s+\theta_i) - \bar{R}(\sigma, s+\theta_{i-1})] p_i \right\| \right. \\
& \quad \left. \text{com } p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\} \\
& \quad + \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \int_{s-r}^{t-r} d_\sigma \left[\int_{t-r}^t d_\tau \phi(\tau-t) o \mu(\tau, \sigma-\tau) \right] o \sum_{i=1}^{|d|} [\bar{R}(\sigma, s+\theta_i) - \bar{R}(\sigma, s+\theta_{i-1})] p_i \right\| \right. \\
& \quad \left. \text{com } p_i \in X, \|p_i\| \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

(as integrais $\int_{s+\theta_i}^{t-r}$ e $\int_{s+\theta_{i-1}}^{t-r}$ foram extendidas para $\int_{s-r}^{t-r}$

supondo $R(\sigma, \xi) = 0$ em $\mathbb{R}^2 - \Gamma$). Assim

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(s, t)\phi\|_{B_0} &\leq \|\phi\|_{\infty} SV_{[s-r, t-r]}[-R^{t-r}] + \|\phi\|_{\infty} SV_{[\mu^{t-r}]} \sup_{s-r \leq \tau \leq t-r} SV_{[s-r, \tau]}[-R^{\tau}] + \\ &+ SV_{[s-r, t-r]}[h] \sup_{s-r \leq \tau \leq t-r} SV_{[s-r, \tau]}[-R^{\tau}] + \\ &+ SV_{[s-r, t-r]}[\bar{h}] \sup_{s-r \leq \tau \leq t-r} SV_{[s-r, \tau]}[-R^{\tau}] \end{aligned}$$

onde $h(\sigma) = \int_{t-r}^t \phi(\tau-t) \circ \eta(\tau, \sigma-\tau) d\tau$

e $\bar{h}(\sigma) = \int_{t-r}^t d_{\tau} \phi(\tau-t) \circ \mu(\tau, \sigma-\tau)$

Seja $M_{s,t} = \sup_{s-r \leq \tau \leq t-r} SV_{[s-r, \tau]}[-R^{\tau}]$

Assim

$$\|\tilde{T}(s, t)\|_{B_0} \leq (\|\phi\|_{\infty} + \|\phi\|_{\infty} SV_{[\mu^{t-r}]} + SV_{[s-r, t-r]}[h] + SV_{[s-r, t-r]}[\bar{h}]) \cdot M_{s,t}$$

Agora

$$SV_{[s-r, t-r]}[h] = \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[\int_{t-r}^t \phi(\tau-t) \circ [\eta(\tau, \sigma_i - \tau) - \eta(\tau, \sigma_{i-1} - \tau)] d\tau \right] p_i \right\| ; \right.$$

$$p_i \in X \text{ e } \|p_i\| \leq 1 \} \leq$$

$$\leq \|\phi\|_{\infty} \int_{t-r}^t SV[\eta^{\tau}] d\tau \leq \|\phi\|_{\infty} \int_{t-r}^t m(\tau) d\tau$$

$$e \quad SV_{[s-r, t-r]}[\bar{h}] = \sup_{d \in \mathcal{D}} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[\int_{t-r}^t \cdot d_{\tau} \phi(\tau-t) o(\mu(\tau, \sigma_i - \tau) - \mu(\tau, \sigma_{i-1} - \tau)) \right] p_i \right\| \right\} ;$$

$$p_i \in X \quad e \quad \|p_i\| \leq 1 \} \leq$$

$$\leq V_{[-r, 0]}[\phi] \cdot \sup_{t-r \leq \tau \leq t} SV[\mu^{\tau}]$$

E como $\|\phi(\theta)\| = \|\phi(\theta) - \phi(0)\| \leq V_{[-r, 0]}[\phi] = \|\phi\|_{B_0} \quad \forall \theta \in [-r, 0]$ temos:

$$\|\phi\|_{\infty} \leq \|\phi\|_{B_0} \quad e \quad assim:$$

$$\|\tilde{T}(s, t)\phi\|_{B_0} \leq \|\phi\|_{B_0} (1 + SV[\mu^{t-r}] + \int_{t-r}^t m(\tau) d\tau + \sup_{t-r \leq \tau \leq t} SV[\mu^{\tau}]) \cdot M_{s, t}$$

2º) Para $t-r \leq s \leq t$ temos:

$$\|\tilde{T}(s, t)\phi\|_{B_0} = V_{[-r, 0]}(\tilde{T}(s, t)\phi) \leq V_{[-r, t-r-s]}(\tilde{T}(s, t)\phi) + V_{[t-r-s, 0]}(\tilde{T}(s, t)\phi)$$

$$\leq V_{[-r, 0]}(\tilde{T}(t-r, t)\phi) + V_{[-r, 0]}[\phi] = \|\tilde{T}(t-r, t)\phi\|_{B_0} + \|\phi\|_{B_0} \leq$$

$$\leq \|\phi\|_{B_0} (2 + SV[\mu^{t-r}] + \int_{t-r}^t m(\tau) d\tau + \sup_{t-r \leq \tau \leq t} SV[\mu^{\tau}]) M_{t-r, t}$$

e com isso demonstramos a proposição

Δ

Usando esse mesmo processo de majorações podemos mostrar que é limitado o operador $\Omega(s): B_0 \rightarrow B_0$ dado na definição II-6.5. Como ele é obviamente linear, concluimos então a

Proposição 3.: - Para $s \in \mathbb{R}$, $\Omega(s) \in L(B_0)$

Bibliografia usada

- [H1] C.S. Hönl - "The Adjoint Equation of a Linear Volterra-Stieltjes - Integral Equation with a Linear Constraint" Springer, Lectures Notes in Mathematics, 957(1982) p. 110-125
- [H2] C.S. Hönl - "The Resolvent of a Linear Volterra-Stieltjes Integral Equation" - Atas do 11º Seminário Brasileiro de Análise (1980). 361-381. Sociedade Brasileira de Matemática
- [H3] C.S. Hönl - "Volterra-Stieltjes - Integral-Equations" Proceedings of the São Carlos Conference, 1979, Springer Lectures Notes in Mathematics, 799, p. 173-216
- [H4] C.S. Hönl - "Volterra-Stieltjes Integral Equation" Amsterdam, North-Holland, Publ. Comp., 1975
- [H5] C.S. Hönl - "Equations Integrales Generalisees et Applications" - Exp. nº 5, 50 pp. Publ. Math. Orsay 83, 1, Univ. Paris XI, Orsay, 1983, 45

- [H6] C.S. Hönig - "Equações diferenciais lineares com condições laterais" - Atas da 3ª quinzena de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais - (1970) p. 213-226. Soc. Bras. de Matemática - Coleção Atas, Volume 2
- [H7] C.S. Hönig - "The Resolvent of a Linear Stieltjes-Integral Equation" - 12º Seminário Brasileiro de Análise (1980) 301-344. Sociedade Brasileira de Matemática
- [H8] C.S. Hönig - "Análise Funcional e Aplicações" 2 volumes Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970
- [Hale] J. Hale - "Theory of Functional Differential Equations" Springer-Verlag, 1977
- [Henry 1] D. Henry - "Adjoint Theory and Boundary Value Problems for Neutral Linear Functional Differential Equations"
- [Henry 2] D. Henry - "The Adjoint of a Linear Functional Differential Equation and Boundary Value Problems" J. Diff. Eq. 9 (1971) p. 55-66
- [D-S] Dunford-Schwartz - "Linear Operators" Vol. I New York, Interscience, 1958

- [T1] Turdy M., Vejvoda O. - "Existence of solution to a linear integro-boundary-differential equation with additional conditions" (1971) Ann. Mat. Appl. Pura 89 p. 169-216
- [T2] Turdy M., Vejvoda O. - "General boundary value problems for an integro-differential system and its adjoint" Cas. pest. mat. 97(1972) 399-419 and 98(1973) 26-42
- [T3] Turdy M., Vejvoda O. - "Boundary value problems for generalized linear differential equations and their adjoints". Czechoslovak Math. J. 23(98)(1973) 183-217
- [T4] Schwabick S., Turdy M. - "Boundary value problems for generalized linear differential equations" Czech. Math. J. 29(104)(1979) 451-477