MENSURABILIDADE DE FUNÇÕES
RIEMANN INTEGRÁVEIS EM ESPAÇOS
DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

Maria Ignez de Souza Vieira Diniz

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

Orientador: - PROF. DR. GALDINO CÉSAR DA ROCHA FILHO

São Paulo, fevereiro, 1984.

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Galdino Cesar da Rocha Filho
por sua orientação e valioso incentivo.

Aos professores Chaim Samuel Honig , Francisco
Miraglia Neto, Ofélia Tereza Alas e Alfredo Jorge Aragona
Vallejo pelo apoio e sugestões.

Aos amigos Ana Catarina Pontone Hellmeister,
Elói Medina Galego, Marina Pizzotti e Zara Issa Abud
pelo grande interesse e estímulo.

Aos meus queridos

Diniz

e

Raquel

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	I.
ABSTRACT	IV
CAPÍTULO 1 - PRELIMINARES	1
1.1. Integrabilidade Riemann e Darboux	2
1.2. Mensurabilidade em espaços de Banach	9
1.3. Propriedades de linearidade	12
1.4. Consequências dos teoremas de Pettis e Bochner	13
1.5. Operadores p-absolutamente somantes e operadores de Darboux	17
CAPÍTULO 2 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	
2.1. O problema	21
2.2. Alguns resultados e exemplos	23
CAPÍTULO 3 - ESPAÇOS DIÁDICOS	
3.1. Separabilidade em $C(D^m)$ e $L_p(D^m, \lambda)$	30
3.2. Riemann integrabilidade e mensurabilidade em $C(D^m)$ e em espaços diádicos	37

CAPÍTULO 4 - ESPAÇOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

4.1. Definições e exemplos	42
4.2. Espaços com celularidade maior ou igual a 2^{χ_0}	50
4.3. Espaços não pseudo-compactos	57
4.4. Espaços pseudo-compactos com celularidade menor que 2^{χ_0}	61
4.5. Retomada de alguns exemplos	66
4.6. Comentários sobre o caso: $C^*(X)$ contém $\ell_1(I)$	69
4.7. Consequências geométricas sobre $C(K)$ para K espaço diádico	72

CAPÍTULO 5 - ESPAÇOS DE MEDIDA 75

5.1. Espaços de medida e duais dos espaços $C(K)$ para K compacto	75
--	----

CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS FINAIS

6.1. Comentários sobre a hipótese do contínuo	81
6.2. Problemas	84

BIBLIOGRAFIA	88
------------------------	----

ÍNDICE REMISSIVO E SIMBÓLICO	91
--	----

INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em exibir espaços de Banach X (não separáveis), tais que:

(*) Toda função Riemann integrável de um intervalo $[a,b]$ em X é mensurável. ($R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$).

Como veremos, os espaços de Banach separáveis têm esta propriedade, assim, entre os espaços de Banach não separáveis, escolhemos para estudar os espaços de funções contínuas sobre espaços compactos não metrizáveis.

Poderemos observar no decorrer do trabalho, a dificuldade de encontrar espaços $C(K)$ para K compacto Hausdorff que satisfaçam (*). Admitindo a hipótese do contínuo, a única classe de compactos encontrada foi a dos espaços diádicos. Sendo que agora, sob esta hipótese, conjecturamos serem estes os espaços compactos tais que $C(K)$ tem a propriedade (*).

O estudo dos espaços $C(K)$ para K diádico só foi possível após os trabalhos de Pelczynski e Rocha Filho, quando da vinda do primeiro ao Brasil em 1980.

A importância do estudo dos espaços $C(K)$ na teoria de integração reside na interligação que estes resultados estabelecem com a geometria dos espaços de Banach $C(K)$ e

a topologia de K . Assim sendo, do fato de provarmos que para os espaços diádicos K vale a inclusão

$$R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K)),$$

segue que os espaços $C(K)$ passam a ter uma série de propriedades geométricas, todas de fácil demonstração, e algumas delas, supomos, desconhecidas até então.

Para citar algumas das consequências geométricas sobre $C(K)$ para K diádico vamos salientar que $C(K)$ não contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$, $c_0(I)$, $\ell_p(I)$, para $1 \leq p \leq \infty$ e I com cardinal maior ou igual ao do contínuo, bem como $C(K)$ não contém subespaço isomorfo a nenhum espaço de Hilbert com base hilbertiana de cardinal maior ou igual a do contínuo. Além disso, $C(K)$ não é um espaço injetivo nem tampouco um espaço dual.

Por outro lado, propriedades topológicas de K e propriedades geométricas de $C(K)$ permitem deduzir informações sobre as funções a valores em $C(K)$ Riemann integráveis serem ou não mensuráveis.

Outra preocupação que tivemos foi a de dar o maior número de exemplos significativos dentro da teoria.

No capítulo 5 nos deteremos para classificar os espaços de medida finita $L_p(T, \Sigma, \mu)$ com $1 \leq p < \infty$, tais que

$$R([a,b], L_p(T, \Sigma, \mu)) \subset M([a,b], L_p(T, \Sigma, \mu)).$$

Isto foi feito para salientar a facilidade que os espaços de medida apresentam em relação aos espaços de funções contínuas e para estudar os duais dos espaços $C(K)$ com K compacto.

Queremos ainda observar, que em alguns dos resultados deste trabalho é preciso impor a validade da hipótese do contínuo (CH) e que discutiremos no final da redação o que ocorre se negarmos a hipótese do contínuo.

Finalmente salientamos que o Prof. Dr. Francisco Miraglia nos sugeriu o estudo da classe dos espaços compactos de Eberlein.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study non-separable Banach spaces X such that each Riemann integrable function defined on a closed interval $[a,b]$ into X is measurable.

Directing our attention to spaces $C(K)$ of continuous functions defined on a non-metrizable compact space K , we obtain the following result: if K is a dyadic space, then $R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K))$, and from this we derive a list of geometric properties of $C(K)$.

We also develop some results about Riemann integrability and measurability in $C(K)$ derived from topological properties of the compact space K .

oOo

CAPÍTULO 1 - PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar as definições, notações e resultados que serão usados no decorrer deste trabalho.

Queremos observar que usaremos, de agora em diante, as notações usuais para os espaços de Banach clássicos, tais como $c_0(\mathbb{N})$, $\ell_p(\mathbb{N})$ para $1 \leq p \leq \infty$, $c_0(I)$, $\ell_p(I)$ para $1 \leq p \leq \infty$ e I um conjunto não enumerável de índices.

Por $C^*(T)$ denotaremos o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas definidas num espaço T completamente regular Hausdorff a valores no corpo $\mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, munido da norma $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$, $f \in C^*(T)$. No caso particular de T ser um espaço compacto $C^*(T)$ será denotado por $C(T)$.

Dado um espaço de medida positiva (T, Σ, λ) para $1 \leq p \leq \infty$, seja $L_p(T, \Sigma, \lambda)$ ou, simplesmente, $L_p(T, \lambda)$ o espaço de Banach das λ -classes de equivalência de funções f a valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munido da norma $\|f\|_p$.

O espaço dual de um espaço de Banach X será denotado por X^* . Dado um conjunto A denotaremos por χ_A a função característica de A e por $|A|$ o cardinal de A .

Em todo este trabalho os espaços topológicos considerados são Hausdorff.

As provas da maioria dos resultados deste capítulo estão nas referências e não serão feitas aqui, para não tornar a redação extensa demais.

1.1. - Integrabilidade Riemann e Darboux

Definição 1.1.1. - Dado um intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, uma divisão d deste intervalo é um subconjunto $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a,b]$, tal que $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b$. Denotamos por $\Delta d = \max\{(t_i - t_{i-1}) : i=1, 2, \dots, n\}$, $|d|=n$, e por $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as divisões de $[a,b]$.

Definição 1.1.2. - Uma função f de um intervalo $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X é integrável segundo Riemann

se existe em X o limite $\lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$ para $d \in \mathcal{D}$ e $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, 2, \dots, |d|$.

O valor deste limite é, por definição, a integral de Riemann de f em $[a,b]$ que será denotada por $\int_a^b f(t)dt$.

Denotaremos por $R([a,b], X)$ o espaço das funções Riemann integráveis de $[a,b]$ em X .

Definição 1.1.3. - Definimos uma subdivisão δ de um intervalo $[a,b]$ como um subconjunto $\{s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_n, t_n\}$ de $[a,b]$,

tal que $a \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n \leq b$.

Denotamos por Δ o conjunto de todas as subdivisões de $[a,b]$ e por $|\delta| = n$.

Definição 1.1.4. - Uma função f de um intervalo $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X é de variação fraca limitada

$$\text{se } \sup_{\delta \in \Delta} \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} [f(t_i) - f(s_i)] \right\| < \infty.$$

O valor deste supremo é a variação fraca de f em $[a,b]$ e será denotada por $W[f]$.

Denotaremos por $BW([a,b], X)$ o espaço das funções de variação fraca limitada de $[a,b]$ em X .

Proposição 1.1.5. - Se X é espaço de Banach, então são equivalentes:

- a) $f \in R([a,b], X)$
 b) (Critério de Cauchy) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se d_1 e d_2 em $\mathcal{D}$ tem $\Delta d_1 < \delta$ e $\Delta d_2 < \delta$, então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{j=1}^{|d_2|} f(y_j)(s_j - s_{j-1}) \right\| < \varepsilon$$

para toda escolha $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e $y_j \in [s_{j-1}, s_j]$
 $i=1, 2, \dots, |d_1|$ e $j=1, 2, \dots, |d_2|$.

- c) (Critério de Cauchy modificado) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para d_1 e d_2 em $\mathcal{D}$ com $d_2 \supset d_1$ e $\Delta d_1 < \delta$ tem-se

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_2|} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{|d_1|} f(y_i)(s_i - s_{i-1}) \right\| < \varepsilon.$$

para toda escolha $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e $y_j \in [s_{j-1}, s_j]$
 $i=1,2,\dots, |d_1|$ e $j=1,2,\dots, |d_2|$.

Prova: [H].

Proposição 1.1.6. - Se X é um espaço de Banach, então toda
 função Riemann integrável de $[a,b]$ em X é limitada.

Próva: [R].

Proposição 1.1.7. - Se X é um espaço de Banach, então
 $BW([a,b],X) \subset R([a,b],X)$.

Prova: [H].

Definição 1.1.8. - Para f função de um intervalo $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X , definimos a oscilação de f num subconjunto A de $[a,b]$, $A \neq \emptyset$ e A não unitário, como

$$\omega(A,f) = \sup \{ \|f(x) - f(y)\| : x, y \in A \}.$$

Definição 1.1.9. - Uma função f de um intervalo $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X , satisfaz a condição de Darboux

$$\text{se } \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} \omega([t_{i-1}, t_i], f)(t_i - t_{i-1}) = 0 \text{ para } d \in \mathcal{D}.$$

Denotaremos por $\mathcal{D}([a,b],X)$ o espaço das funções de $[a,b]$ em X que satisfazem a condição de Darboux.

Proposição 1.1.10. - Se X é espaço de Banach, então

$$a) \quad \mathcal{D}([a,b],X) \subset R([a,b],X).$$

b) Se X tem dimensão finita, $\mathcal{D}([a,b],X) = \mathcal{R}([a,b],X)$.

Prova: (a) Basta usar o critério de Cauchy modificado.

(b) [R].

Proposição 1.1.11. - (Caracterização das funções Darboux integráveis). Se X é um espaço de Banach e $f:[a,b] \rightarrow X$, são equivalentes:

a) $f \in \mathcal{D}([a,b],X)$.

b) f é limitada em $[a,b]$ e o conjunto das descontinuidades de f tem medida de Lebesgue nula em $[a,b]$.

Prova: [R].

Definição 1.1.12. - Uma função g de $[a,b]$ num espaço de Banach X é uma função em escada se existe a divisão de $[a,b]$ e existem $c_i \in X$, $i=1,2,\dots,|d|$, tais que $g(t)=c_i$, para $t \in]t_{i-1}, t_i[$, $i=1,2,\dots,|d|$.

Proposição 1.1.13. - Uma função f de um intervalo $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X diz-se regradada se f é limite uniforme de funções em escada em $[a,b]$.

Denotaremos por $G([a,b],X)$ o conjunto das funções regradadas de $[a,b]$ em X , e $G([a,b],\mathbb{K})=G([a,b])$.

Proposição 1.1.14. - Se X é um espaço de Banach e

$f:[a,b] \longrightarrow X$, são equivalentes:

- a) $f \in G([a,b],X)$;
- b) dado $\varepsilon > 0$, existe $d \in \mathcal{D}$, tal que $\omega([t_{i-1}, t_i[, f) < \varepsilon$,
 $i=1,2,\dots,|d|$;
- c) f tem limites laterais em todo ponto de $[a,b]$.

Prova: [H].

Observação 1.1.15. - Do item (c) desta proposição vem que toda função regrada de $[a,b]$ em X é limitada, e que $G([a,b],X)$ é um espaço de Banach com a norma $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$,
 $f \in G([a,b],X)$.

Corolário 1.1.16. - Se X é um espaço de Banach, então

$$G([a,b],X) \subset \mathcal{D}([a,b],X).$$

Prova: Da proposição segue imediatamente que toda função de $G([a,b],X)$ é limitada e tem no máximo uma quantidade enumerável de descontinuidades, daí por (1.1.11.) segue o que queremos provar.

Teorema 1.1.17. - Se X é um espaço de Banach são equivalentes:

- a) $BW([a,b],X) \subset G([a,b],X)$;
- b) X não contém subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$.

Prova: [R].

Observação 1.1.18. - Vamos introduzir agora um espaço compacto, que denotaremos $[a,b]_G$, que tem a propriedade de que: $C([a,b]_G, X)$ e $G([a,b], X)$ são isométricos, para cada espaço de Banach X .

Definição 1.1.19. - O espaço topológico $[a,b] \times \{-1,0,1\}$ munido da ordem lexicográfica e da topologia induzida por esta ordem é o espaço $[a,b]_G$. Isto é, em $[a,b]_G$, $(s,i) < (t,j)$ se $s < t$ ou $s = t$ e $i < j$.

Proposição 1.1.20. - São verdadeiras as seguintes afirmações:

1. As vizinhanças básicas dos pontos de $[a,b]_G$ são da seguinte forma:
 - a) Para os pontos $(s,1), ([s, s+\epsilon] \times \{1\}) \cup ([s, s+\epsilon] \times \{-1,0\})$, para $\epsilon > 0$.
 - b) Para os pontos $(t,-1), ([t-\epsilon, t] \times \{-1\}) \cup ([t-\epsilon, t] \times \{0,1\})$, para $\epsilon > 0$.
 - c) Os pontos da forma $(t,0)$ são isolados.
2. $[a,b]_G$ é compacto não metrizável.

Prova: Imediata.

Proposição 1.1.21. - Os espaços $C([a,b]_G, X)$ e $G([a,b], X)$ são isométricos, para todo espaço de Banach X .

Prova: A aplicação $T: G([a,b],X) \longrightarrow C([a,b]_G,X)$ que a $f \in G([a,b],X)$ associa $f_G \in C([a,b]_G,X)$ do seguinte modo: $f_G(t,-1)=f(t-)$, $f_G(t,0)=f(t)$ e $f_G(t,1)=f(t+)$, é uma isometria.

Definição 1.1.22. - Se X é um espaço de Banach, definimos $G^-([a,b],X) = \{f \in G([a,b],X) : f(t) = f(t-), \text{ se } t \in]a,b[\}$. É fácil ver que $G^-([a,b],X)$ é um subespaço fechado de $G([a,b],X)$. Denotaremos $G^-([a,b],\mathbb{K}) = G^-([a,b])$.

Observação 1.1.23. - De modo análogo ao que foi feito para $G([a,b],X)$, podemos considerar um novo espaço de funções contínuas sobre um espaço compacto relacionado a $G^-([a,b],X)$.

Vamos denotar por $[a,b]_{G^-}$ o espaço $[a,b] \times \{0,1\}$ com a topologia induzida pela ordem lexicográfica.

Neste caso a aplicação que a $f \in G^-([a,b],X)$ associa $f_{G^-} \in C([a,b]_{G^-},X)$ dada por $f_{G^-}(t,1)=f(t+)$ se $t \in [a,b[$, $f_{G^-}(b,1)=f(b)$ e $f_{G^-}(t,0)=f(t)$ se $t \in]a,b]$, $f_{G^-}(a,0)=f(a)$ é uma isometria entre $G^-([a,b],X)$ e $C([a,b]_{G^-},X)$.

Definição 1.1.24. - Se X é um espaço de Banach, definimos

$G_a^-([a,b],X) = \{f \in G^-([a,b],X) : f(a+) = f(a)\}$. Temos que

$G_a^-([a,b],X)$ é subespaço fechado de $G^-([a,b],X)$.

Denotaremos $G_a^-([a,b], \mathbb{K}) = G_a^-([a,b])$.

Proposição 1.1.25. - Se X é um espaço de Banach, $C([a,b]_{G^-}, X)$ contém subespaço isométrico a $G_a^-([a,b], X)$.

Prova: A mesma aplicação exposta em (1.1.23) restrita a $G_a^-([a,b], X)$ é uma isometria sobre a imagem em $C([a,b]_{G^-}, X)$.

1.2. Mensurabilidade em espaços de Banach

As definições que seguem serão dadas no intervalo $[a,b]$ com a medida de Lebesgue μ . Apesar de todo este parágrafo ter sentido para espaços de medidas mais gerais, decidimos nos limitar ao que usaremos neste trabalho.

No que segue μ é a medida de Lebesgue em $[a,b]$ e Σ a σ -álgebra dos subconjuntos μ -mensuráveis de $[a,b]$.

Definição 1.2.1. - Seja uma função de $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X , dizemos que f é simples se f assume apenas um número finito de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ em X e $f^{-1}(x_i) = \{s \in [a,b] : f(s) = x_i\} \in \Sigma$, $i=1, 2, \dots, n$.

Definição 1.2.2. - Se X é um espaço de Banach, uma função f de $[a,b]$ em X é mensurável (μ -mensurável) se existe sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples que convergem μ -quase sempre para f em $[a,b]$.

O espaço das funções mensuráveis de $[a,b]$ em X será denotado por $M([a,b],X)$.

Definição 1.2.3. - Uma função f de $[a,b]$ em um espaço de Banach X é fracamente mensurável se $x^* \circ f$ de $[a,b]$ em $\mathbb{K}$ é mensurável, para todo $x^* \in X^*$.

Definição 1.2.4. - Uma função f do intervalo $[a,b]$ em um espaço de Banach X tem imagem quase-separável se existe subconjunto de μ -medida nula B de $[a,b]$, tal que $f([a,b]-B)$ é separável em X .

Teorema 1.2.5. - (Pettis) Seja f uma função de $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X . Consideremos as propriedades que seguem:

- a) $f \in M([a,b],X)$.
- b) f é fracamente mensurável e tem imagem quase-separável.
- d) $\|f\|$ é mensurável.

Temos então que : $(a) \iff (b) \implies (c)$.

Prova: Para $(a) \iff (b)$ ver [DS] pg. 149 ou [Y] pg. 130.

Para $(a) \implies (c)$ ver [DS] pg. 106.

Definição 1.2.6. - Uma função simples f de $[a,b]$ em um espaço de Banach X é μ -integrável em $[a,b]$ se f é da forma

$$f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{B_i}$$

onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são elementos não nulos de X ,
 $B_1, B_2, \dots, B_n$ são elementos de Σ , disjuntos dois a dois e
 $\mu(B_i) < \infty$, $i=1, 2, \dots, n$. Neste caso, definimos a integral

$$\int_{[a,b]} f(s) d\mu(s) = \sum_{i=1}^n x_i \mu(B_i).$$

Definição 1.2.7. - Uma função f de $[a,b]$ em um espaço de Banach X é Bochner integrável (ou μ -integrável) se f é mensurável e se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções simples convergindo para f μ -quase sempre em $[a,b]$, vale

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \|f_n(s) - f_m(s)\| d\mu(s) = 0$$

A integral de Bochner de f é definida em termos de sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$\int_{[a,b]} f(s) d\mu(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n(s) d\mu(s).$$

Mostra-se que a definição acima independe da sequência de funções simples escolhida para aproximar f .

Denotaremos por $L_1([a,b], X)$ o espaço das funções Bochner integráveis de $[a,b]$ a valores em X .

Teorema 1.2.8. - (Bochner) Se f é uma função de $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X , são equivalentes:

- a) $f \in L_1([a,b], X)$;
- b) $f \in M([a,b], X)$ e $\|f\| \in L_1([a,b], \mathbb{R})$.

Prova: ver [DS] pg. 117.

1.3. Propriedades de linearidade

O comportamento dos conceitos definidos anteriormente é muito simples em relação à composição com uma aplicação linear contínua, mas de grande utilidade para o que segue.

Proposição 1.3.1. - Se f é uma função de $[a,b]$ a valores num espaço de Banach X e T é uma transformação linear contínua de X a valores num espaço de Banach Y , então:

- a) $f \in \mathcal{D}([a,b],X) \implies Tof \in \mathcal{D}([a,b],Y)$;
- b) $f \in \mathcal{R}([a,b],X) \implies Tof \in \mathcal{R}([a,b],Y)$;
- c) $f \in \mathcal{BW}([a,b],X) \implies Tof \in \mathcal{BW}([a,b],Y)$;
- d) $f \in \mathcal{G}([a,b],X) \implies Tof \in \mathcal{G}([a,b],Y)$;
- e) $f \in \mathcal{M}([a,b],X) \implies Tof \in \mathcal{M}([a,b],Y)$;
- f) $f \in L_1([a,b],X) \implies Tof \in L_1([a,b],Y)$;

Prova: a) É imediato de (1.1.11) e de T ser uma transformação linear contínua.

b) Se $f \in \mathcal{R}([a,b],X)$ segue imediatamente da definição de Riemann integrabilidade que $Tof \in \mathcal{R}([a,b],Y)$ e

$$\int_a^b (Tof)(t) dt = T \left(\int_a^b f(t) dt \right).$$

c) É suficiente observar que se $\delta \in \Delta$

$$\left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} [Tof(t_i) - Tof(s_i)] \right\| \leq \|T\| \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} [f(t_i) - f(s_i)] \right\|.$$

d) Se $f \in G([a,b],X)$ e T é contínua, Tof tem limites laterais em todos os pontos de $[a,b]$, i.e., $Tof \in G([a,b],X)$.

e) Se f é limite μ -q.s. de funções simples $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, as funções Tog_n são simples e convergem a Tof μ -q.s., uma vez que

$$\|Tog_n(s) - Tof(s)\| \leq \|T\| \|g_n(s) - f(s)\|,$$

f) Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de funções simples, f_n converge para f μ -q.s. em $[a,b]$, então Tof_n são funções simples e Tof_n converge para Tof μ -q.s. em $[a,b]$, além disso

$$\int_a^b \|Tof_n - Tof_m\| d\mu \leq \|T\| \int_a^b \|f_n - f_m\| d\mu.$$

Corolário 1.3.2. - Se f é função de $[a,b]$ num espaço de Banach X e T é isomorfismo linear contínuo de X a valores num espaço de Banach Y , então valem as implicações inversas das descritas de (a) a (f) na proposição anterior.

1.4. Consequências dos teoremas de Pettis e Bochner

A partir dos resultados dos parágrafos anteriores vamos relacionar, para particulares espaços de Banach, os conceitos de Riemann e Darboux integrabilidade com os de mensurabilidade e Bochner integrabilidade.

Proposição 1.4.1. - Se X é um espaço de Banach toda função f Riemann integrável de $[a,b]$ em X é fracamente mensurável.

Prova: Para todo $x^* \in X^*$, por (1.3.1.) item (b), $x^* \circ f$ é Riemann integrável a valores no corpo, logo mensurável.

Corolário 1.4.2. - Se $f \in \mathcal{D}([a,b],X)$ ou $f \in BW([a,b],X)$, então f é fracamente mensurável.

Prova: Segue de (1.1.7), (1.1.10) e da proposição anterior.

Proposição 1.4.3. - Se X é um espaço de Banach, então $\mathcal{D}([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.

Prova: Seja $f \in \mathcal{D}([a,b],X)$, por (1.1.11) se Df é o conjunto das descontinuidades de f temos que $\mu(Df)=0$.

Além disso, sendo f contínua em $([a,b]-Df)$, $f([a,b]-Df)$ é separável em X .

Assim sendo, de (1.4.2) decorre que f é fracamente mensurável.

Corolário 1.4.4. - Se X é um espaço de Banach, então $G([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.

Prova: Lembrar que $G([a,b],X) \subset \mathcal{D}([a,b],X)$, (1.1.16).

Corolário 1.4.5. - Se X é um espaço de Banach que não contém subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$, então $BW([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.

Prova: Lembrar que neste caso $BW([a,b],X) \subset G([a,b],X)$.
(1.1.17).

Proposição 1.4.6. - Se X é um espaço de Banach separável,
então $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.

Prova: Pela proposição (1.4.1), se $f \in R([a,b],X)$ então f é fracamente mensurável e sendo X separável, f tem imagem quase-separável. Daí, aplicando o teorema de Pettis (1.2.5), temos $f \in M([a,b],X)$.

Corolário 1.4.7. - Se X é um espaço de Banach separável, temos $BW([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.

Prova: Lembrar que $BW([a,b],X) \subset R([a,b],X)$. (1.1.7).

Corolário 1.4.8. - Se K é um espaço compacto metrizável
então $R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K))$.

Prova: Neste caso $C(K)$ é separável ([L] pg. 111).

Lema 1.4.9. - Se K é um espaço compacto, λ uma medida regular sobre K e $1 \leq p < \infty$, então $C(K) \subset L_p(K,\lambda)$ e, $C(K)$ é denso em $L_p(K,\lambda)$. Isto é, se $f \in L_p(K,\lambda)$ e $\epsilon > 0$, existe $\phi \in C(K)$ tal que $\|f - \phi\|_p < \epsilon$.

Prova: [DS] (pg. 298).

Corolário 1.4.10. - Nas condições do lema anterior se K é metrizável, então $R([a,b], L_p(K, \lambda)) \subset M([a,b], L_p(K, \lambda))$.

Prova: Como $C(K)$ é separável e denso em $L_p(K, \lambda)$, vem que $L_p(K, \lambda)$ é separável.

Proposição 1.4.11. - Se X é um espaço de Banach, são equivalentes:

- a) $R([a,b], X) \subset M([a,b], X)$;
- b) $R([a,b], X) \subset L_1([a,b], X)$.

Prova: Para provar (a) implica (b), pelo teorema de Bochner (1.2.8), basta verificar que se $f \in R([a,b], X)$, então $\|f\|$ é integrável. Para isso, devemos observar que f é limitada (1.1.6) e, como $f \in M([a,b], X)$ pelo teorema de Pettis (1.2.5), temos $\|f\|$ mensurável.

Finalmente, (b) implica (a) segue, imediatamente, da definição de função Bochner integrável.

Corolário 1.4.12. - Se X é espaço de Banach separável, então

$$R([a,b], X) \subset L_1([a,b], X).$$

Observação 1.4.13. - Observemos que se $f \in L_1([a,b],X)$ ou $f \in R([a,b],X)$, isto não implica em $\|f\| \in R([a,b],\mathbb{R})$. De fato, seja $X = \ell_2(\mathbb{N})$ e $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a base ortogonal usual de $\ell_2(\mathbb{N})$, definimos a função $f: [a,b] \rightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ dada por: se $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma enumeração dos racionais de $[a,b]$, $f(r_n) = e_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $f(t) = 0$ se $t \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}$.

É fácil ver que $f \in R([a,b], \ell_2(\mathbb{N}))$, uma vez que para $d \in D$

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \right\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^{|d|} 2 |t_i - t_{i-1}|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\Delta d} \cdot (b-a)^{1/2},$$

daí $\int_a^b f(t) dt = 0$. No entanto, $\|f\|$ é a função de Dirichlet em $[a,b]$ que não é Riemann integrável.

1.5. Operadores p-absolutamente somantes e operadores de Darboux

Nesta parte mostraremos a ligação entre a classe dos operadores p-absolutamente somantes e as funções integráveis no sentido Riemann e Darboux.

Não nos estenderemos no estudo dos operadores p-absolutamente somantes e nos restringiremos às informações contidas em [P].

Definição 1.5.1. - Seja $1 \leq p < \infty$ e $u: X \longrightarrow Y$ um operador linear entre espaços normados X e Y . O operador u se diz p -absolutamente somante se existe constante $c > 0$, tal que

$$\sum_{j=1}^n \|ux_j\|^p \leq c^p \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |x^*(x_j)|^p : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \quad (1)$$

para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_n$ em X e para $n \in \mathbb{N}$.

O ínfimo dos valores da constante C satisfazendo (1) para um dado operador u , é denotado por $\pi_p(u)$ e, é chamado de norma p -absolutamente somante de u .

O espaço dos operadores p -absolutamente somantes de X em Y é denotado por $\Pi_p(X, Y)$.

Proposição 1.5.2. - Dados K espaço compacto, λ uma medida de Borel positiva sobre K com $\lambda(K) < \infty$ e $p \in [1, \infty[$, seja $i_{p, \lambda}$ a injeção natural de $C(K)$ em $L_p(K, \lambda)$ que associa a cada $f \in C(K)$ sua classe de λ -equivalência em $L_p(K, \lambda)$, temos então que, $i_{p, \lambda} \in \Pi_p(C(K), L_p(K, \lambda))$ e $\pi_p(i_{p, \lambda}) = \lambda(K)^{1/p}$.

Prova: [Pi] Dadas quaisquer $f_1, f_2, \dots, f_n$ em $C(K)$, temos:

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |v(f_j)|^p : v \in C(K)^* \text{ e } \|v\| \leq 1 \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |f_j(s)|^p : s \in K \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{\lambda(K)} \int_K \left[\sum_{j=1}^n |f_j(s)|^p \right] d\lambda(s) = \frac{1}{\lambda(K)} \sum_{j=1}^n \left[\int_K |f_j(s)|^p d\lambda(s) \right] = \\ & = \frac{1}{\lambda(K)} \sum_{j=1}^n \|i_{p, \lambda}(f_j)\|_p^p, \text{ daí } \pi_p(i_{p, \lambda}) \leq \lambda(K)^{1/p}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $f(s)=1, \forall s \in K$, temos:

$$f \in C(K) \text{ e } \|i_{p,\lambda}(f)\|_p^p = \int_K |f(s)|^p d\lambda(s) = \lambda(K) = \\ = \lambda(K) \cdot \sup\{|v(f)|^p : v \in C(K)^* \text{ e } \|v\| \leq 1\}. \text{ Portanto} \\ \pi_p(i_{p,\lambda}) = \lambda(K)^{1/p}.$$

Definição 1.5.3. - Dizemos que um operador linear T entre espaços de Banach X e Y , $T: X \longrightarrow Y$, é um operador de Darboux se, para toda $f \in R([a,b],X)$, $Tof \in \mathcal{D}([a,b],Y)$.

O resultado que segue é devido a A. Pelczynski e G.C. Rocha Filho [PR].

Teorema 1.5.4. - Sejam X e Y espaços de Banach, para $1 \leq p < \infty$, todo operador $T \in \Pi_p(X,Y)$ é um operador de Darboux.

Uma vez que até o momento, a demonstração do Teorema (1.5.4) não foi publicada obtivemos dos autores a autorização para demonstrar aqui o caso $p=1$. Este caso é o suficiente para as aplicações do teorema que faremos no capítulo 3.

Prova para $p=1$: Seja $f \in R([a,b],X)$, pela condição de Cauchy (1.1.5), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $d \in \mathcal{D}$ e $\Delta d < \delta$ então $\|\sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x'_i)](t_i - t_{i-1})\| < \epsilon$ para quaisquer x_i e x'_i em $[t_{i-1}, t_i]$, $i=1,2,\dots,|d|$.

Assim, pelo teorema de Hahn-Banach, se $\Delta d < \delta$ $\sup\{|\sum_{i=1}^{|d|} [x^*(f(x_i) - f(x'_i))](t_i - t_{i-1})| : x^* \in X^* \text{ e } \|x^*\| \leq 1\} \leq \epsilon$

daí, se $\Delta d < \delta$, então

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{|d|} |x^* \circ f(x_i) - x^* \circ f(x_i^1)| (t_i - t_{i-1}) : x^* \in X^* \text{ e } \|x^*\| \leq 1 \right\} \leq 4\varepsilon$$

para quaisquer x_i e x_i^1 em $[t_{i-1}, t_i]$, $i=1, 2, \dots, |d|$.

Como T é 1-absolutamente somante, se $\Delta d < \delta$

$$\begin{aligned} \text{temos que} \quad & \sum_{i=1}^{|d|} \|T \circ f(x_i) - T \circ f(x_i^1)\| (t_i - t_{i-1}) \leq \\ & \leq \pi_1(T) \sup \left\{ \sum_{i=1}^{|d|} |x^* \circ f(x_i) - x^* \circ f(x_i^1)| (t_i - t_{i-1}) : x^* \in X^* \text{ e } \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ & \leq \pi_1(T) \cdot 4\varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{portanto,} \quad \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} \omega([t_{i-1}, t_i], T \circ f)(t_i - t_{i-1}) = 0 \quad \text{ou}$$

$T \circ f \in \mathcal{D}([a, b], X)$.

o0o

CAPÍTULO 2 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

2.1. - O Problema

O problema que nos foi proposto inicialmente é o seguinte:

"Caracterizar, em termos de suas propriedades geométricas, os espaços de Banach X tais que toda função integrável segundo Riemann de $[a,b]$ em X é mensurável".

Este problema pode ser encarado de outro modo se observarmos (1.4.11), ou seja a questão acima equivale a caracterizar os espaços de Banach X em que integrabilidade segundo Riemann implica em integrabilidade segundo Bochner.

Como vimos em (1.4.6) para os espaços de Banach separáveis X temos: $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$. Assim sendo a questão apenas subsiste para espaços de Banach não separáveis.

Novamente podemos reformular o problema inicial, pois, tendo em vista (1.4.1) e (1.2.5), provar que $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$ é o mesmo que verificar que toda $f \in R([a,b],X)$ tem imagem quase-separável em X .

Veremos nos exemplos que para a maioria dos espaços de Banach não separáveis a resposta é negativa, exceto para o espaço $\ell_1(\Gamma)$, com Γ conjunto qualquer, para o qual, Rocha Filho em [R] provou que

$$R([a,b],\ell_1(\Gamma)) = \mathcal{D}([a,b],\ell_1(\Gamma)) \text{ o que implica por (1.4.3) que } \\ R([a,b],\ell_1(\Gamma)) \subset M([a,b],\ell_1(\Gamma)).$$

Decidimos então considerar uma particular classe de espaços de Banach, os espaços de funções contínuas $C(K)$ com K espaço compacto não metrizável. Assim, procuramos espaços K tais que $R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K))$.

Só conseguimos tratar deste problema após os trabalhos de Pelczynski e Rocha Filho que utilizaram a teoria dos operadores absolutamente somantes nas teorias de integração (1.5.4).

Esta linha levou ao resultado principal desta tese (Capítulo 3), que foi a descoberta de uma classe de espaços compactos não metrizáveis K , em que integrabilidade segundo Riemann de f de $[a,b]$ em $C(K)$ implica em f mensurável, o que implica numa série de propriedades geométricas para $C(K)$.

Antes de tratar destes resultados, vamos exibir exemplos de classes de espaços de Banach X não separáveis em que temos $R([a,b],X) \not\subset M([a,b],X)$.

2.2. - Alguns resultados e exemplos

Proposição 2.2.1. - Se H é um espaço de Hilbert com base hilbertiana de cardinal maior ou igual a $2^{\aleph_0}$, então

$$R([a,b],H) \neq M([a,b],H).$$

Prova: Seja $\{e_t\}_{t \in [a,b]}$ uma família ortonormal de H , definimos então a seguinte função $f:[a,b] \rightarrow H$ por $f(t)=e_t$ para $t \in [a,b]$.

Temos que $f \in R([a,b],H)$ e $\int_a^b f(t)dt=0$, pois, para

para $d \in D$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{|d|} e_{x_i}(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{|d|} 2(t_i - t_{i-1})^2 \right]^{1/2} \leq \sqrt{2} \sqrt{\Delta d} \left[\sum_{i=1}^{|d|} (t_i - t_{i-1}) \right]^{1/2} = \sqrt{2} \sqrt{\Delta d} \cdot (b-a)^{1/2} \end{aligned}$$

que tende a zero, quando Δd tende a zero.

No entanto, $f \notin M([a,b],H)$ porque $\|f(t)-f(s)\| = \|e_t - e_s\| = \sqrt{2}$ para quaisquer $t, s \in [a,b]$, $t \neq s$, logo f não tem imagem quase-separável em H .

Proposição 2.2.2. - Se I é conjunto, com $|I| \geq 2^{\aleph_0}$, então

$$R([a,b],c_0(I)) \neq M([a,b],c_0(I)).$$

Prova: Se $\phi:[a,b] \rightarrow I$ é uma bijeção sobre a imagem, definimos $f:[a,b] \rightarrow c_0(I)$ por $f(t)=x_{\{\phi(t)\}}$, $t \in [a,b]$.

Temos que $f \in R([a,b], c_0(I))$, porque

$f \in BW([a,b], c_0(I))$, uma vez que para $\delta \in \Delta$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} [f(t_i) - f(s_i)] \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} [\chi_{\{\phi(t_i)\}} - \chi_{\{\phi(s_i)\}}] \right\| = \\ &= \sup_{x \in I} \left| \sum_{i=1}^{|\delta|} [\chi_{\{\phi(t_i)\}}(x) - \chi_{\{\phi(s_i)\}}(x)] \right| = 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, $f \notin M([a,b], c_0(I))$

pois $\|f(t) - f(s)\| = \|\chi_{\{\phi(t)\}} - \chi_{\{\phi(s)\}}\| = 1$ para todo par t, s em $[a,b]$ com $t \neq s$.

Proposição 2.2.4. - $R([a,b], G_0^-([0,1])) \not\subset M([a,b], G_0^-([0,1]))$.

Prova: Seja $\phi: [a,b] \rightarrow [0,1]$ uma bijeção crescente e $f: [a,b] \rightarrow G_0^-([0,1])$ dada por $f(t) = \chi_{[0, \phi(t)]}$, $t \in]a,b]$ e $f(a) = 0$.

A função $f \in R([a,b], G_0^-([0,1]))$ porque

$f \in BW([a,b], G_0^-([0,1]))$. De fato, se $\delta \in \Delta$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} [f(t_i) - f(s_i)] \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} \chi_{[0, \phi(t_i)]} - \chi_{[0, \phi(s_i)]} \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} \chi_{] \phi(s_i), \phi(t_i)]} \right\| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^{|\delta|} \chi_{] \phi(s_i), \phi(t_i)]}(x) \right| = 1 \end{aligned}$$

Além disso, $f \notin M([a,b], G_0^-([0,1]))$ pois

$\|f(t) - f(s)\| = \|\chi_{[0, \phi(t)]} - \chi_{[0, \phi(s)]}\| = 1$ para quaisquer s e t em $[a,b]$ com $t \neq s$, logo f não tem imagem quase-separável em $G_0^-([0,1])$.

A partir dos três exemplos das últimas proposições construiremos outros baseados nas proposições que seguem.

Proposição 2.2.5. - Seja X espaço de Banach que contém subespaço isomorfo a um espaço de Banach Y com $R([a,b],Y) \neq M([a,b],Y)$. Então $R([a,b],X) \neq M([a,b],X)$.

Prova: O resultado é consequência imediata das propriedades de linearidade (1.3.2), pois se $T: Y \rightarrow X$ é isomorfismo sobre a imagem, temos $f \in R([a,b],Y) \iff Tof \in R([a,b],X)$ e $f \in M([a,b],Y) \iff Tof \in M([a,b],X)$.

Corolário 2.2.6. - Seja X um espaço de Banach que contém subespaço isomorfo a algum dos seguintes espaços

- a) $G_0^-([0,1])$;
- b) $c_0(I)$ com $|I| \geq 2^{\aleph_0}$;
- c) espaço de Hilbert com base hilbertiana de cardinal maior ou igual a $2^{\aleph_0}$. Então $R([a,b],X) \neq M([a,b],X)$.

Novos exemplos seguem agora deste último resultado.

Proposição 2.2.7. - $R([a,b],L_\infty([0,1])) \neq M([a,b],L_\infty([0,1]))$.

Prova: Usando (2.2.6) basta observar que $L_\infty([0,1])$ contém subespaço isométrico a $G_0^-([0,1])$.

Para isso consideremos a aplicação identidade I de $G_0^-([0,1])$ em $L_\infty([0,1])$ que a cada $f \in G_0^-([0,1])$ associa a classe representada por f em $L_\infty([0,1])$.

Resta verificar que I é isometria. Sabemos

que $\|f\| \geq \sup_{x \in [0,1]} f(x)$. Para a desigualdade inversa, observemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $\|f\| - \frac{\varepsilon}{2} < |f(x_0)|$. Como f é contínua à esquerda em x_0 (no caso de $x_0=0$, f é contínua à direita) existe, uma vizinhança V à esquerda de x_0 (à direita de 0) tal que se $x \in V$, então $\|f\| - \varepsilon < |f(x)|$, daí $\sup_{x \in [0,1]} f(x) \geq \|f\| - \varepsilon$.

Logo, $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$ e I é isometria.

Corolário 2.2.8. - $R([a,b], \ell_\infty(\mathbb{N})) \cong M([a,b], \ell_\infty(\mathbb{N}))$.

Prova: Basta usar o fato de que $\ell_\infty(\mathbb{N})$ e $L_\infty([0,1])$ são isomorfos $[P]$.

Definição 2.2.9. - Um espaço de Banach X tem a propriedade da λ -extensão ($\lambda \geq 1$) se para todo espaço de Banach Y que contém subespaço isomorfo a X existe projeção linear contínua P de Y sobre X com $\|P\| \leq \lambda$.

Se um espaço de Banach X tem a propriedade da λ -extensão, X é denominado em P_λ espaço e todos os espaços de Banach que são P_λ espaços, para algum λ , são chamados espaços injetivos.

Para o estudo dos espaços P_λ sugerimos $[L]$ e $[LT]$.

Proposição 2.2.10. - Se X é um espaço de Banach injetivo de dimensão infinita, então X contém subespaço isomorfo a $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$.

Prova: [LT] pg. 105.

Corolário 2.2.11. - Se X é um espaço injetivo de dimensão infinita, então $R([a,b],X) \neq M([a,b],X)$.

Prova: Por (2.2.10), X contém subespaço isomorfo a $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$.

Definição 2.2.12. - Um espaço compacto K é extremamente desconexo se o fecho de cada aberto de K é aberto em K .

Exemplo: o compactificado de Stone-Cech de qualquer espaço topológico discreto, em particular $\beta\mathbb{N}$.

Proposição 2.2.13. - (Nachbin, Kelley, Goodner, Hasumi) Um espaço de Banach X é um P_1 espaço se, e somente se, X é isométrico a $C(K)$ para algum espaço compacto K extremamente desconexo.

Prova: [L] pg 92.

Corolário 2.2.14. - Se K é espaço compacto extremamente desconexo infinito, então $R([a,b],C(K)) \neq M([a,b],C(K))$.

Prova: Por (2.2.10) e (2.2.13), $C(K)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$.

Definição 2.2.15. - Se K é espaço compacto, dizemos que $C(K)$ é um dual se $C(K)$ é isométrico a X^* para algum espaço de Banach X .

Proposição 2.2.16. - (Grothendieck) Se K é espaço compacto e $C(K)$ é um dual, então K é extremamente desconexo.

Prova: Na verdade K é hiperstoniano, para a prova ver [L] pg.96.

Corolário 2.2.17. - Se K é um espaço compacto infinito com $C(K)$ dual, então $R([a,b],C(K)) \neq M([a,b],C(K))$.

Prova: Por (2.2.16) e (2.2.14), $C(K)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$, o que implica no que queríamos provar.

Observação 2.2.18. - É preciso lembrar que em $[a,b]$ com a medida de Lebesgue, todo subconjunto mensurável $[a,b]$ com cardinal menor que $2^{\aleph_0}$ tem medida zero (para a prova usar [L], T.2, pg 29).

Observação 2.2.19. - Se admitimos a hipótese do contínuo (que denotaremos CH) alguns dos resultados deste parágrafo podem ser reformulados do seguinte modo:

Proposição 2.2.1.* - (+CH) Se H é espaço de Hilbert não separável, então $R([a,b],H) \neq M([a,b],H)$.

Proposição 2.2.2.* - (+CH) Se I é conjunto não enumerável, então $R([a,b],c_0(I)) \neq M([a,b],c_0(I))$.

Corolário 2.2.6.* - (+CH) Se X é espaço de Banach que contém subespaço isomorfo a $c_0(I)$ com I não enumerável ou espaço de Hilbert H não separável, então $R([a,b],X) \neq M([a,b],X)$.

o0o

CAPÍTULO 3 - ESPAÇOS DIÁDICOS

Neste capítulo estão os resultados interessantes e que supomos inéditos dentro das teorias de Riemann integrabilidade e mensurabilidade. Vamos exhibir aqui exemplos de espaços compactos não metrizáveis em que

$$R([a,b],C(K)) \subsetneq M([a,b],C(K)).$$

Denotaremos por D^m o espaço produto do espaço discreto $D=\{0,1\}$, para m um cardinal qualquer.

Por simplicidade, denotaremos também por m o menor ordinal de cardinalidade m , assim

$$D^m = \{\xi = (\xi_a)_{a \in m} : \xi_a \in \{0,1\}\}.$$

Em D^m colocaremos a medida produto λ , quando em D consideramos a medida $1/2$ para cada ponto.

3.1. Separabilidade em $C(D^m)$ e $L_p(D^m, \lambda)$ para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 3.1.1. - Se E é subconjunto de $C(D^m)$ e E é separável em $L_p(D^m, \lambda)$ para algum p , $1 \leq p < \infty$ então E é separável em $C(D^m)$. Além disso, o subespaço fechado gerado por E é

isométrico a um subespaço de $C(D^q)$, para q subconjunto enumerável de m .

Observemos inicialmente, que o resultado é verdadeiro para $m \leq \chi_0$, pois temos $C(D^m)$ separável. Assim sendo, de agora em diante trataremos do caso $m > \chi_0$.

Para a prova do teorema precisamos de algumas definições e resultados.

Notação 3.1.2. - Seja B a base de abertos da topologia produto em D^m . Cada aberto B de B está associado a um elemento $\xi = (\xi_a)_{a \in m} \in D^m$ e a um subconjunto finito F de índices de m do seguinte modo $B = \{\eta = (\eta_a)_{a \in m} \in D^m : \eta_a = \xi_a, a \in F\}$. Assim sendo, adotaremos para os abertos de B a notação $B = B(\xi, F)$ explicitando o elemento ξ e o conjunto de índices F associados ao aberto B . Sendo que $B(\xi, \emptyset) = D^m$ para todo $\xi \in D^m$.

Observação 3.1.3. - Em D^m , B é base de abertos e fechados da topologia produto, o que implica que as funções características dos abertos básicos de B são contínuas em D^m .

Notação 3.1.4. - Designaremos por A a álgebra, sobre o corpo $\mathbb{K}$, gerada pelas funções características dos elementos de B em $C(D^m)$.

Proposição 3.1.5. - A álgebra A definida acima é o espaço das combinações lineares finitas de funções características de abertos de B .

Prova: Se B_1 e B_2 são abertos de B , temos que

$$\chi_{B_1} \cdot \chi_{B_2} = \chi_{B_1 \cap B_2} \text{ com } B_1 \cap B_2 \in B. \text{ Daí}$$

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \chi_{B_i} : B_i \in B, c_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}, i=1,2,\dots,n \right\}.$$

Proposição 3.1.6. - A medida produto λ em D^m é uma medida regular de Borel sobre D^m e tem as seguintes propriedades:

a) $\lambda(D^m) = 1$;

b) $\lambda(B(\xi, F)) = \frac{1}{2^{|F|}}$ para todo $B(\xi, F) \in B$.

Prova: [S] (20.6.3. pg 362) ou [DS] (pg 205)

Proposição 3.1.7. - A álgebra A é densa em $C(D^m)$ e é densa em $L_p(D^m, \lambda)$ para $1 \leq p < \infty$.

Prova: Pelo teorema de Stone-Weierstrass ([S] pg 116), como A separa os pontos de D^m , contém as constantes e, no caso complexo é auto adjunta, segue que A é densa em $C(D^m)$.

Por outro lado, $C(D^m)$ é denso em $L_p(D^m, \lambda)$ (1.4.9) e como A é densa em $C(D^m)$ temos que A é densa em $L_p(D^m, \lambda)$.

Observação 3.1.8. - Para a prova da densidade de A em $C(D^m)$ é desnecessário o emprego do teorema de Stone-Weierstrass. Basta usar que toda $f \in C(D^m)$ é uniformemente contínua e que D^m é um grupo topológico.

No entanto, como o objetivo desta seção é montar um esquema de demonstração que possa eventualmente servir a outros espaços $C(K)$, preferimos demonstrar (3.1.7) com argumentos gerais que não dependem da estrutura de D^m .

Definição 3.1.9. - Para cada subconjunto Q de m , definimos a aplicação $\sigma_Q: D^m \longrightarrow D^m$ dada por: $\sigma_Q(\xi_a)_{a \in m} = (\eta_a)_{a \in m}$ onde para cada $a \in m$

$$\eta_a = \begin{cases} \xi_a & \text{se } a \in Q \\ 1 - \xi_a & \text{se } a \notin Q \end{cases}$$

Proposição 3.1.10. - Se Q é subconjunto de m , a aplicação σ_Q definida acima tem as seguintes propriedades:

- σ_Q é um homeomorfismo de D^m e $\sigma_Q \circ \sigma_Q = 1_{D^m}$.
- Se $B \subset D^m$ e B é λ -mensurável, então $\sigma_Q(B)$ é λ -mensurável e $\lambda(B) = \lambda(\sigma_Q(B))$.
- Se $f \in L_p(D^m, \lambda)$ para $1 \leq p < \infty$, então $f \circ \sigma_Q \in L_p(D^m, \lambda)$ e $\|f\|_p = \|f \circ \sigma_Q\|_p$.
- Se $f \in C(D^m)$, então $f \circ \sigma_Q \in C(D^m)$ e $\|f\| = \|f \circ \sigma_Q\|$.

Prova: Os itens (a) e (d) são imediatos. O item (b) segue do fato de σ_Q manter a medida dos abertos básicos de B e do fato de λ ser regular. A parte (c) é consequência de (b) e do fato de $f \in L_p(D^m, \lambda)$.

Definição 3.1.11. - Dizemos que uma função f definida no espaço produto D^m depende das coordenadas de um subconjunto $\mathbb{N}$ de m se, quaisquer que sejam $\xi = (\xi_a)_{a \in m}$ e $\eta = (\eta_a)_{a \in m}$ em D^m , com $\xi_a = \eta_a$ para $a \in \mathbb{N}$, então $f(\xi) = f(\eta)$.

Proposição 3.1.12. - Seja $f \in C(D^m)$ limite em $L_p(D^m, \lambda)$ de uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções da álgebra A .

Se $y_n = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^n \chi_{B(\xi_i^n, F_i^n)}$, $c_i^n \in \mathbb{K}$ e $B(\xi_i^n, F_i^n) \in \mathcal{B}$ com $k_n \in \mathbb{N}$, para

cada n e, se $\mathbb{N} = \bigcup_{\substack{k_n \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i \leq k_n}} F_i^n$, então f depende das coordenadas do

conjunto $\mathbb{N}$.

Prova: Sejam ξ e η em D^m , tais que $\xi_a = \eta_a$, $a \in \mathbb{N}$. Consideremos o conjunto $\mathbb{Q} = \{a \in m: \xi_a = \eta_a\}$, logo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Definimos a aplicação $P: L_p(D^m, \lambda) \longrightarrow L_p(D^m, \lambda)$ por $Pf = \frac{f + f \circ \sigma_Q}{2}$ para $f \in L_p(D^m, \lambda)$.

Por (3.1.10) itens (a) e (c) a aplicação P está bem definida e é uma projeção. Além disso P é contínua pois, se $f \in L_p(D^m, \lambda)$ temos por (3.1.10) (c) que

$$\|Pf\|_p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p + \|f \circ \sigma_Q\|_p) = \|f\|_p$$

Observemos agora que para cada n , $P y_n = y_n$, porque, como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ temos que $y_n \circ \sigma_{\mathbb{Q}} = y_n$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - y_n\|_p = 0$ segue que $Pf = \lim_{L_p, n \rightarrow \infty} P y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = f$, isto é, $Pf = f$, mas por hipótese $f \in C(D^m)$ e por (3.1.10, (d)) $Pf \in C(D^m)$, assim $Pf = f$.

A partir disto $0 = f - Pf = \frac{f - f \circ \sigma_{\mathbb{Q}}}{2}$ daí $f = f \circ \sigma_{\mathbb{Q}}$. Logo, $f(\xi) = f \circ \sigma_{\mathbb{Q}}(\xi) = f(\sigma_{\mathbb{Q}}(\xi)) = f(\eta)$, como queríamos demonstrar.

Observação 3.1.13. - O resultado anterior pode ser inadvertidamente confundido com o seguinte resultado bem conhecido de S. Mazur (1952):

Toda função de $C(D^m)$ depende de uma quantidade enumerável de coordenadas. (ver [EP] ou [C] ou [E]). A força da proposição (3.1.12) está em exibir as coordenadas de que f depende através da aproximação de f na norma $\| \cdot \|_p$ por funções da álgebra A .

Finalmente, estamos em condições de provar o teorema (3.1.1.).

Prova do Teorema (3.1.1.) Se E é subconjunto de $C(D^m)$ separável em $L_p(D^m, \lambda)$, seja H o fecho na norma de $C(D^m)$ do espaço vetorial gerado por E sobre o corpo $\mathbb{K}$, que denotaremos $\text{span } E$.

Como $\text{span } E \subset H \subset \overline{\text{span } E}^{L_p}$, temos que H é separável em $L_p(D^m, \lambda)$.

Seja $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um subconjunto enumerável e denso em H . Por (3.1.7), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(\psi_{n,j})_{j \in \mathbb{N}}$ de funções da álgebra A , tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\psi_{n,j} - \phi_n\|_p = 0$.

Se $G = \{\psi_{n,j} : n \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$, temos que

$$H \subset \overline{G}^{L_p}$$

Assim, toda $f \in H$ é limite em $L_p(D^m, \lambda)$ de uma sequência de elementos de G .

Como cada $\psi_{n,j} \in G$ é da forma

$$\psi_{n,j} = \sum_{i=1}^{K_j^n} c_i^{n,j} \chi_{B(\xi_i^{n,j}, F_i^{n,j})} \text{ com } c_i^{n,j} \in \mathbb{K} \text{ e } B(\xi_i^{n,j}, F_i^{n,j}) \in \mathcal{B}, \text{ se}$$

tomamos $q = \bigcup_{\substack{i \leq i \leq K_j^n \\ n, j \in \mathbb{N}}} F_i^{n,j}$, temos que, q é enumerável e, por

(3.1.12) toda função $f \in H$ depende das coordenadas do conjunto q .

Consideremos agora, o espaço $C(D^q)$ que é separável e, a seguinte aplicação: $j: H \longrightarrow C(D^q)$ dada por

$$jf(\xi_a)_{a \in q} = f(\tilde{\xi}_a)_{a \in m} \quad \text{onde } \tilde{\xi}_a = \begin{cases} \xi_a & \text{se } a \in q, \\ 0 & \text{se } a \notin q \end{cases}$$

Vamos mostrar que j é uma isometria sobre a imagem, o que nos leva a concluir que H é separável em $C(D^m)$ e, conseqüentemente, como desejávamos provar, E é separável em $C(D^m)$.

Portanto, resta-nos verificar que:

- a) $j(f) \in C(D^q)$ para $f \in H$. De fato, dado $\epsilon > 0$
- $$|jf(\xi_a)_{a \in q} - jf(\eta_a)_{a \in q}| = |f(\xi_a)_{a \in m} - f(\eta_a)_{a \in m}| < \epsilon$$
- se $\tilde{\eta} \in B(\tilde{\xi}, F) \iff \eta \in B(\xi, F \cap q)$
- b) É imediato que j é linear
- c) j é isometria sobre a imagem, pois, para $f \in H$
- $$\|jf\| = \sup_{\xi \in D^q} |jf(\xi_a)_{a \in q}| = \sup_{\xi \in D^m} |f(\xi)| \leq \|f\|.$$

Por outro lado, dado $\delta > 0$, existe $\xi \in D^m$, tal que $\|f\| - \delta < |f(\xi)|$, como f depende das coordenadas de q , te-

mos $f(\xi) = f(\xi^*)$, onde $\xi^* = (\xi_a^*)_{a \in m}$, $\xi_a^* = \begin{cases} \xi_a & \text{se } a \in q. \\ 0 & \text{se } a \notin q. \end{cases}$ Então

$\|f\| - \delta < |f(\xi^*)| = |jf(\xi_a)_{a \in q}| \leq \|jf\|$, portanto, $\|f\| = \|jf\|$ para toda $f \in H$. O que termina a prova de que j é uma isometria e conclui a prova do teorema (3.1.1).

3.2. Riemann integrabilidade e mensurabilidade em $C(D^m)$ e em espaços diádicos.

O objetivo desta secção é provar o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. - Toda função Riemann integrável em $[a,b]$ a valores em $C(D^m)$ é mensurável. Isto é, para qualquer cardinal m , $R([a,b], C(D^m)) \subset M([a,b], C(D^m))$.

Prova: Como já vimos em (2.1), provar que $R([a,b], C(D^m)) \subset M([a,b], C(D^m))$ equivale a mostrar que toda função $f \in R([a,b], C(D^m))$ tem imagem quase-separável em $C(D^m)$.

Assim sendo o teorema é verdadeiro para $m \leq \chi_0$ quando temos $C(D^m)$ separável. No caso $m > \chi_0$ consideremos a inclusão canônica $i_{1,\lambda}$ de $C(D^m)$ em $L_1(D^m, \lambda)$.

Por (1.5.2), $i_{1,\lambda}$ é 1-absolutamente somante e por (1.5.4), $i_{1,\lambda} \circ f \in D([a,b], L_1(D^m, \lambda))$.

Agora, se aplicarmos (1.1.11), temos que o conjunto B das descontinuidades de $i_{1,\lambda} \circ f$ tem medida nula em $[a,b]$, daí, $i_{1,\lambda} \circ f([a,b]-B)$ é separável em $L_1(D^m, \lambda)$, pois $i_{1,\lambda} \circ f$ é contínua em $[a,b]-B$ e $[a,b]-B$ é separável.

Concluimos, então, que $f([a,b]-B)$ é separável em $L_1(D^m, \lambda)$, mas $f([a,b]-B) \subset C(D^m)$, usando o teorema (3.1.1), vem que $f([a,b]-B)$ é separável em $C(D^m)$ e como B tem medida nula, segue que f tem imagem quase-separável em $C(D^m)$, como queríamos provar.

Para generalizar o teorema anterior vamos introduzir uma classe de compactos chamados diádicos, que incluem D^m como caso particular.

Definição 3.2.2. - Um espaço topológico K é diádico se existe aplicação $F: D^m \longrightarrow K$ contínua e sobrejetora, para algum cardinal m .

Por resultados de [K] pag 36, temos os seguintes exemplos de espaços diádicos:

- a) M^m com M espaço métrico compacto e m cardinal qualquer. Em particular, $[a,b]^m$, D^m .
- b) Todo grupo topológico compacto.
- c) Todo subconjunto G_δ e fechado de um espaço diádico.

Lema 3.2.3. - Se K é um espaço diádico, então toda família de abertos não vazios disjuntos dois a dois de K é no máximo enumerável. (Isto é, K satisfaz a condição conhecida como countable chain condition (ccc)).

Prova: Ver [K] pg 37 e 38.

Observação 3.2.4. - O Lema (3.2.3) nos dá condições de existir espaços compactos não diádicos. Alguns desses exemplos são: $[a,b]_G$; todo segmento de ordinais $[0,\alpha]$ de cardinalidade não enumerável.

Lema 3.2.5. - Se K é espaço diádico então $C(K)$ é isométrico a um subespaço de $C(D^m)$, onde m é o menor cardinal associado a K .

Prova: Se $F: D^m \longrightarrow K$ é contínua e sobre a aplicação de $C(K)$ em $C(D^m)$ que a cada $f \in C(K)$ associa $f \circ F \in C(D^m)$ é uma isometria.

Proposição 3.2.6. - Se K é espaço diádico, então

$$R([a,b], C(K)) \subset M([a,b], C(K)).$$

Prova: É imediata, a partir do teorema (3.2.1), do lema anterior e de (2.2.5).

Deixamos para mais tarde as consequências geométricas que estes resultados trazem aos espaços $C(K)$ para K diádico.

Observação 3.2.7. - Para completar este capítulo é interessante notar que, com uma prova análoga à feita em (3.2.1) obtemos o seguinte resultado:

"Se existe alguma medida λ de Borel regular positiva sobre um compacto K , com $\lambda(U) > 0$ para todo U aberto de K , tal que todo subconjunto E de $C(K)$ separável em $L_p(K, \lambda)$ ($1 \leq p < \infty$) é separável em $C(K)$, então

$$R([a,b], C(K)) \subset M([a,b], C(K))".$$

No entanto, o único exemplo de que dispomos até o momento é $K = D^m$.

Por outro lado é simples, exibir exemplo de espaço compacto K que não satisfaz as hipóteses do resultado citado acima.

Para isso consideremos $K = \beta\mathbb{N}$ com a medida λ ,
 dada por $\lambda(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$ se $n \in \mathbb{N}$, e $\lambda(U) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cap U} \lambda(\{n\})$ para U aberto

de $\beta\mathbb{N}$. É fácil ver que λ é de Borel regular e positiva quando estendida à Σ -álgebra dos borelianos de $\beta\mathbb{N}$. Além disto, se considerarmos $E = C(K) = \ell_\infty(\mathbb{N})$, E é não separável em $C(K)$, no entanto $L_1(\beta\mathbb{N}, \lambda)$ é separável, pois o conjunto

$\{ \sum_{n \in F} r_n \chi_{\{n\}} : F \subset \mathbb{N}, F \text{ finito}, r_n \in \mathbb{Q} \}$ é denso em $L_1(\beta\mathbb{N}, \lambda)$.

oOo

CAPÍTULO 4 - ESPAÇOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

Neste capítulo faremos um pouco de teoria geral nos espaços de funções contínuas.

No que segue, T é um espaço completamente regular e $C^*(T)$ é o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas de T a valores no corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) munido da norma $\|f\| = \sup_{x \in T} |f(x)|$, para $f \in C^*(T)$.

Com vistas ao estudo da mensurabilidade ou não das funções Riemann integráveis f de $[a,b]$ em $C^*(T)$ dividiremos os espaços $C^*(T)$ em três classes.

Nas duas primeiras classes temos como resultado que $R([a,b], C^*(T)) \neq M([a,b], C^*(T))$, e na terceira o que conseguimos são exemplos em que vale e outros em que não vale a inclusão de $R([a,b], C^*(T))$ em $M([a,b], C^*(T))$.

Antes de distinguirmos as três classes são necessárias algumas definições.

4.1. Definições e exemplos

Definição 4.1.1. - Dado um espaço topológico Y , definimos a celularidade de Y como o cardinal dado pelo supremo dos

cardinais das coleções de abertos não vazios dois a dois disjuntos de Y , desde que este cardinal seja maior ou igual a χ_0 . Isto é, denotando por τ a topologia de Y e por $c(Y)$ sua celularidade

$$c(Y) = \chi_0 \cdot \sup\{|G| : G \subset \tau \text{ e } G \text{ disjunta}\}.$$

No caso de $c(Y) = \chi_0$, isto é, se toda família de abertos não vazios de Y , disjuntos dois a dois, é no máximo enumerável, diz-se que Y satisfaz a condição ccc (countable chain condition) ou, simplesmente, diz-se que Y é ccc.

Para exemplos, ver (4.1.3).

Definição 4.1.2. - Um espaço topológico Y é pseudo-compacto se toda função contínua a valores reais definida em Y é limitada.

Para exemplos e contra-exemplos ver (4.1.3).

Voltando ao problema inicial na classe dos espaços T completamente regulares, distinguiremos as três seguintes famílias de espaços:

1. T tem celularidade maior ou igual a 2^{χ_0} , i.é, $c(T) \geq 2^{\chi_0}$.
2. T não é pseudo-compacto.
3. T é pseudo-compacto e $c(T) < 2^{\chi_0}$.

Para dar uma visão mais clara do que segue vamos resumir os resultados obtidos no caso de $C^*(T)$.

$$\begin{array}{l}
 \text{T espaço} \\
 \text{completa} \\
 \text{mente re} \\
 \text{gular.}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 1. \quad c(T) \geq 2^{\chi_0} \implies R([a,b], C^*(T)) \neq M([a,b], C^*(T)) \\
 2. \quad T \text{ não é pseudo-compacto} \implies R([a,b], C^*(T)) \neq M([a,b], C^*(T)) \\
 3. \quad \text{Para } T \text{ pseudo-compacto e } c(T) < 2^{\chi_0} \text{ o problema} \\
 \quad \text{está em aberto.}
 \end{array} \right.$$

Se admitirmos (CH) a condição em (1.), $c(T) \geq 2^{\chi_0}$ é equivalente a dizer que T não satisfaz $c(T) = \chi_0$ ou T não satisfaz ccc. Assim sendo, o quadro acima toma a seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
 \text{T comple} \\
 \text{tamente} \\
 \text{regular} \\
 + \text{ (CH)}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 1. \quad T \text{ não é ccc} \implies R([a,b], C^*(T)) \neq M([a,b], C^*(T)) \\
 2. \quad T \text{ não é pseudo-compacto} \implies R([a,b], C^*(T)) \neq M([a,b], C^*(T)) \\
 3. \quad \text{Para } T \text{ pseudo-compacto e ccc o problema está} \\
 \quad \text{em aberto.}
 \end{array} \right.$$

Antes de detalhar o estudo de cada um dos casos (1.), (2.), (3.) daremos exemplos de classe de espaços relacionados a estes itens.

4.1.3. Exemplos de espaços T completamente regulares com $c(T) \geq 2^{\chi_0}$.

1º exemplo Seja T o segmento de ordinais $[0, \alpha[$ ou $[0, \alpha]$ com $|T| \geq 2^{\chi_0}$, munido da topologia da ordem. Temos que $c(T) = |T|$, uma vez que cada ponto $\gamma+1$ é isolado em T , para $\gamma \in T$, e $|\{\gamma+1: \gamma \in T\}| = |T|$.

2º exemplo Um espaço compacto K é disperso se não contém subconjuntos perfeitos.

Para detalhes sobre estes espaços ver [L] pg 30 ou [S] pg 147.

Vamos mostrar que, todo compacto disperso K não separável não é ccc. Este fato mais (CH) implicam em $c(K) \geq 2^{\aleph_0}$.

Para provar que K é não ccc vamos construir uma família $\{x_i\}_{i < \omega_1}$ de K , com ω_1 o primeiro ordinal não enumerável, de tal modo que para cada $i < \omega_1$, x_i é ponto isolado de K e $x_i \notin \overline{\{x_k : k < i\}}$.

De posse deste fato, temos $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, logo $\{\{x_i\} : i < \omega_1\}$ é coleção não enumerável de abertos de K , disjuntos dois a dois o que implica em K não ser ccc.

A construção da família $\{x_i\}_{i < \omega_1}$ será feita por indução transfinita. Seja x_0 ponto isolado de K e, se por hipótese, temos x_j ponto isolado de K , tal que $x_j \notin \overline{\{x_k : k < j\}}$ para todo $j < i$, vamos construir x_i .

Inicialmente, observemos que $\overline{\{x_j : j < i\}} \neq K$, pois K é não separável e $\{x_j : j < i\}$ é enumerável.

Seja $\Omega_i = K - \overline{\{x_j : j < i\}}$ aberto não vazio de K . Como K é disperso, existe $x_i \in \Omega_i$, x_i isolado em Ω_i , logo x_i é i-

solado em K e $x_i \notin \overline{\{x_j: j < i\}}$.

Observemos que o 1º exemplo é caso particular deste 2º exemplo, i.é, todo segmento de ordinais é disperso. De fato, se F é fechado de $[0, \alpha]$, o primeiro elemento de F é ponto isolado de F , logo $[0, \alpha]$ não contém subconjunto perfeito.

3º exemplo Vamos exhibir aqui uma forma simples de construir espaços compactos de celularidade 2^{X_0} a partir de espaços completamente regulares de celularidade 2^{X_0} .

Se X é espaço topológico, um espaço compacto Hausdorff Y é uma compactificação de X se existe $c: X \longrightarrow Y$ homeomorfismo sobre a imagem, tal que $c(X)$ é denso em Y . Denotaremos $Y=cX$.

Se X é um espaço completamente regular e cX é uma compactificação de X , então é fácil ver que $c(cX)=c(X)$.

Queremos observar que neste exemplo estão incluídos os compactificados de Stone-Cech e de Alexandroff. E, que como exemplo concreto basta considerar qualquer compactificado de um espaço discreto com cardinal maior ou igual a 2^{X_0} .

4º exemplo Se T é a reta longa ou a reta longa estendida, T

é um espaço com celularidade χ_1 . Assim sendo, admitindo (CH), temos dois exemplos de espaços completamente regulares com $c(T) = 2^{\chi_0}$ não dispersos, pois contêm cópias do perfeito $[0,1]$ e, além disso são conexos.

5º exemplo Seja $T = [a,b]_G$ o espaço compacto descrito em (1.1.19), $c(T) = 2^{\chi_0}$, pois os pontos de $[a,b] \times \{0\}$ são isolados.. Em T todo ponto tem um sistema enumerável de vizinhanças.

6º exemplo Um espaço compacto K é um compacto de Eberlein se K é homeomorfo a um compacto fraco de um espaço de Banach.

Como exemplos, temos que todo compacto métrico é um compacto de Eberlein, bem como a bola fechada de um espaço reflexivo é um compacto de Eberlein.

Por outro lado verifica-se que todo compacto de Eberlein é homeomorfo a um compacto fraco de $c_0(I)$, para algum I (ver [Li]).

Sobre essa categoria de compactos vale a pena salientar dois resultados importantes:

Inicialmente que um compacto de Eberlein K é ccc se, e somente se, K é separável, ou equivalentemente se K é metrizável (ver [Ro]). Logo se admitirmos (CH), temos $c(K) \geq 2^{\chi_0}$ se, e somente se K é não metrizável.

O segundo fato interessante é que os únicos espaços compactos de Eberlein que são diádicos são os metriza-
veis. (ver [Li]). Daí o fato dessas duas categorias de com-
pactos os de Eberlein e os diádicos representarem papel impor-
tante na teoria dos espaços de Banach $C(K)$ não separáveis.

4.1.4. Exemplos de espaços T completamente regulares não pseudo-compactos.

7º exemplo Todo espaço métrico T não compacto (em particular
todo espaço normado diferente do espaço $\{0\}$). Se T é separá-
vel, temos T satisfaz ccc.

8º exemplo Se T é a reta de Sorgenfrey temos que T é separá-
vel, logo satisfaz ccc e é totalmente desconexa.

4.1.5. Exemplos de espaços T completamente regulares pseudo-compactos com $c(T) < 2^{\aleph_0}$.

9º exemplo Pelo que foi feito no 3º exemplo, temos que para
todo espaço X completamente regular e ccc, qualquer compacti-
ficado cX de X é compacto e ccc.

Assim sendo, como exemplos de espaços não metrizáveis temos: $\beta\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{Q}$, $\beta\mathbb{R}$ e $[0,1]^{2^{\aleph_0}} = \beta\Sigma$ (onde Σ será descrito em 4.4 exemplo B1)

10º exemplo Se K é um espaço diádico como foi definido em (3.3.2), K é ccc.

Como exemplos de espaços diádicos não metrizáveis temos: $\{0,1\}^m$ ou M^m com M espaço métrico compacto e $m > \aleph_0$.

Sabemos ainda que K diádico é metrizável se, e somente se, K é imagem contínua de $\{0,1\}^{\aleph_0}$.

11º exemplo Seja $K = [a,b]_{G^-}$ como em (1.1.23). Sabemos que K é compacto totalmente ordenado, separável e não metrizável.

Para mostrar que K é não metrizável basta mostrar que os intervalos da forma $[(a,1), (b,j)[$ são abertos não vazios de K para todo $a \in [0,1[$ e todo $(b,j) \in K$, $(b,j) > (a,1)$, daí podemos concluir que K não pode ter base enumerável de abertos.

O espaço $[a,b]_{G^-}$ é caso particular na classe dos espaços compactos totalmente ordenados, separáveis, não metrizáveis.

12º exemplo Seja K espaço compacto disperso, não metrizável e separável. Para exemplo concreto ver (4.5) adiante ou [S]

pg 150(G).

Observação 4.1.6. - Vários dos exemplos serão retomados adiante quando da discussão do problema da mensurabilidade de funções Riemann integráveis de $[a,b]$ em $C^*(T)$ ou $C(K)$ conforme o caso.

4.2. Espaços com celularidade maior ou igual a 2^{χ_0} .

Nesta seção provaremos o seguinte resultado:

Proposição 4.2.1. - Se T é espaço completamente regular e $c(T) \geq 2^{\chi_0}$, então $R([a,b], C^*(T)) \neq M([a,b], C^*(T))$.

Esta proposição é um corolário imediato das afirmações que seguem.

Lema 4.2.2. - Seja X espaço topológico e $A = \{A_i\}_{i \in I}$ uma família de abertos não vazios de X com $|I| \geq \chi_0$, tal que todo ponto $p \in \bigcup_{i \in I} A_i$ pertence a no máximo uma quantidade finita n_0 (fixa) de abertos de A . Vale então que $c(X) \geq |I|$.

Prova: Se $n_0 = 1$, temos que os abertos de A são disjuntos e $c(X) \geq |I|$.

Se $n_0=2$, seja

$A_1 = \{A_i \in A : A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } A_j \in A, j \neq i\}$. Se $|A_1| = |I|$ temos que $c(X) \geq |I|$, caso contrário, se $|A_1| < |I|$ então $\exists I_1, I_1 \subset I$ com $|I_1| < |I|$, tal que $A_1 = \{A_i\}_{i \in I_1}$.

Para cada $i \in I - I_1$, existe $i_1 \in I - I_1$ tal que $A_i \cap A_{i_1} \neq \emptyset$, além disso, $A_i \cap A_{i_1} \cap A_j = \emptyset$ para todo $j \in I, j \neq i$ e $j \neq i_1$. Daí, a família de abertos não vazios, $A_2 = \{A_i \cap A_{i_1}\}_{i \in I - I_1}$ é disjunta, e $|I - I_1| = |I|$, o que implica em $c(X) \geq |I|$.

A prova no caso geral onde n_0 é um natural qualquer se inicia como no caso $n_0=2$, selecionando-se os elementos disjuntos de A . Com as notações acima, definimos para cada $k, 1 \leq k \leq n_0$ a família de abertos não vazios.

$A_k = \{A_i \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} : i \in I - I_{k-1} \text{ e } A_i \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_j = \emptyset \text{ para todo } j \in I, j \neq i \text{ e } j \neq i_r, r=1,2,\dots,k-1\}$.

Se para algum $k, |A_k| = |I|$ temos $c(X) \geq |I|$.

Se para todo $k, 1 \leq k < n_0, |A_k| < |I|$ a partir de A_{n_0-1} vamos construir A_{n_0} .

Para cada $i \in I - I_{n_0-2}$ existe $i_{n_0-1} \in I$ tal que $A_i \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n_0-2}} \cap A_{i_{n_0-1}} \neq \emptyset$. Seja então

$A_{n_0} = \{A_i \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n_0-2}} \cap A_{i_{n_0-1}} : i \in I - I_{n_0-2}\}$, esta família

de abertos não vazios de X é disjunta pela hipótese. Logo, como $|I - I_{n_0-2}| = |I|$ vem que $c(X) \geq |I|$.

Proposição 4.2.3. - Se T é espaço completamente regular e I é um conjunto com $|I| \geq \aleph_0$ são equivalentes:

- a) $c(T) \geq |I|$;
- b) $C^*(T)$ contém subespaço isomorfo a $c_0(I)$.

Prova: Inicialmente, se existe $\{A_i\}_{i \in I}$ família de abertos de T , não vazios, disjuntos dois a dois, consideremos para cada $i \in I$, um elemento $a_i \in A_i$ e a função contínua $f_i: T \rightarrow \mathbb{R}$ de tal modo que $f_i(a_i) = 1$ e $f_i(x) = 0$ se $x \notin A_i$.

Seja $F: c_0(I) \rightarrow C^*(T)$ a extensão linear a $c_0(I)$ dada por $F(e_i) = f_i$, $i \in I$, onde $e_i = \chi_{\{i\}} \in c_0(I)$.

F é uma isometria, pois se $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in c_0(I)$ temos $\|F(x)\| = \left\| \sum_{i \in I} \alpha_i f_i \right\| = \sup_{i \in I} |\alpha_i| = \|x\|$.

Reciprocamente, se existe isomorfismo $F: c_0(I) \rightarrow C^*(T)$, denotemos $F(e_i) = f_i$, $i \in I$.

Como F tem inversa contínua existe $\delta > 0$, tal que $\|f_i\| > \delta$ para todo $i \in I$.

Sejam então, os abertos $A_i = \{x \in T: |f_i(x)| > \frac{\delta}{2}\}$ com $i \in I$.

Temos que se $p \in \bigcup_{i \in I} A_i$ então p pertence a no máximo uma quantidade finita n_0 de abertos da família $\{A_i\}_{i \in I}$ onde $n_0 = \max\{n: n \frac{\delta}{2} \leq \|F\|\}$.

De fato se p pertencesse a $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ abertos da família com $m > n_0$, considerando $\alpha_j = \text{sgn}(f_{i_j}(p))$, $j=1, 2, \dots, m$ e $\alpha_j = 0$ se j é diferente de $i_1, i_2, \dots, i_m$, teríamos

$$\|F(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i)\| = \|\sum_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j}\| \geq |\sum_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j}(p)| = \sum_{j=1}^m |f_{i_j}(p)| > m \frac{\delta}{2} > \|F\|$$

o que é absurdo, pois $\|\sum_{i \in I} \alpha_i e_i\| = 1$.

Usando o lema segue que $c(T) \geq |I|$.

Observação 4.2.4. - Se T é espaço completamente regular infinito é fácil ver que $c(T) \geq \chi_0$. Daí, segue imediatamente que $C^*(T)$ contém subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$.

No caso de $c(T) = \chi_0$, ou seja, se $C^*(T)$ contém como subespaço $c_0(\mathbb{N})$, não obtemos nenhuma informação em relação à questão em (2.1).

Proposição 4.2.5. - Sejam T espaço completamente regular e I conjunto com $|I| \geq \chi_0$. Se $C^*(T)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_p(I)$ para $1 < p < \infty$, então $c(T) \geq |I|$.

Prova: A demonstração é muito semelhante à da proposição anterior, assim, se $F: \ell_p(I) \longrightarrow C^*(T)$ é isomorfismo, denotemos $F(e_i) = f_i$ para $i \in I$.

Como F tem inversa contínua existe $\delta > 0$ tal que $\|f_i\| > \delta$ para todo $i \in I$. Sejam, então, os abertos não vazios $A_i = \{x \in T: |f_i(x)| > \frac{\delta}{2}\}$, $i \in I$.

Temos que todo $p \in \bigcup_{i \in I} A_i$ pertence a no máximo uma quantidade finita $n_0 = \max\{n: \frac{\delta}{2} n^{1-\frac{1}{p}} < \|F\|\}$ de abertos da família $\{A_i\}_{i \in I}$.

De fato, se p pertence a $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ abertos da família $\{A_i\}_{i \in I}$, escolhendo $\alpha_j = \text{sgn}(f_{i_j}(p))$, $j=1, 2, \dots, m$ e $\alpha_j = 0$ se j diferente de $i_1, i_2, \dots, i_m$, temos

$$\|F(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i)\| \geq |\sum_{j=1}^m \alpha_j f_{i_j}(p)| = \sum_{j=1}^m |f_{i_j}(p)| > m \frac{\delta}{2} \quad \text{mas}$$

$\|F(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i)\| \leq \|F\| \cdot \|\sum_{i \in I} \alpha_i e_i\|_p = \|F\| \cdot \sqrt[p]{m}$, assim $m \frac{\delta}{2} < \|F\| \sqrt[p]{m}$, daí

$$\frac{\delta}{2} m^{1-\frac{1}{p}} < \|F\|, \text{ o que implica em } m \leq n_0.$$

A partir do lema vem que $c(T) \geq |I|$.

Observações 4.2.6.

1. Não vale a recíproca desta última proposição, pois se K é espaço compacto disperso (por exemplo, o segmento de ordinais $[1, \alpha]$ com α de cardinalidade maior ou igual a χ_0), por [L] pg 113, temos que todo subespaço de $C(K)$ de dimensão infinita contém $c_0(\mathbb{N})$. Portanto $C(K)$ não contém $\ell_p(I)$ para $1 < p < \infty$, pois $\ell_p(I)$ é reflexivo e $c_0(\mathbb{N})$ não o é.

2. No caso de $C^*(T)$ conter subespaço isomorfo a $\ell_\infty(I)$ com $|I| > \chi_0$ temos que $C^*(T)$ contém $c_0(I)$ e recaímos na proposição (4.2.3).

Neste caso também não vale a recíproca. De fato se considerarmos K espaço compacto disperso como em (1) acima, $C(K)$ não contém $\ell_\infty(I)$, pois se assim fosse $C(K)$ conteria $\ell_\infty(\mathbb{N})$ e seria universal para espaços separáveis o que contraria a hipótese de K ser disperso.

3. O caso $\ell_1(I)$, com $|I| \geq \chi_0$ será estudado em separado no final deste capítulo em (4.6) para não interrompermos a linha de idéias já colocada, mas vamos adiantar que valem os seguintes resultados:

- a) $C^*(T)$ conter subespaço isomorfo a $\ell_1(I)$ não implica em $c(T) \geq |I|$.
- b) $C^*(T)$ conter subespaço isomorfo a $\ell_1(I)$ com $|I| \geq 2^{\chi_0}$, não implica em $R([a,b], C^*(T)) \subset M([a,b], C^*(T))$ nem tampouco em $R([a,b], C^*(T)) \not\subset M([a,b], C^*(T))$.

Proposição 4.2.7. - Se M é espaço métrico são equivalentes:

- a) M é não separável;
- b) $C^*(M)$ contém subespaço isométrico a $c_0(I)$ para I não enumerável.

Prova: Basta observar que para M métrico vale, M separável se, e somente se, M é ccc; e usar o resultado em (4.2.3)

Estamos agora em condições de provar (4.2.1) como corolário da proposição (4.2.3).

Prova da proposição (4.2.1) Se T é completamente regular, com $c(T) \geq 2^{\aleph_0}$, vem que $C^*(T)$ contém subespaço isométrico a $c_0(I)$ com $|I| \geq 2^{\aleph_0}$.

Como por (2.2.2), $R([a,b], c_0(I)) \neq M([a,b], c_0(I))$, segue o que queríamos provar.

Corolário 4.2.8. - Se T é espaço completamente regular, com $c(T) \geq 2^{\aleph_0}$, então se βT é o compactificado de Stone-Cech de T , temos $R([a,b], C(\beta T)) \neq M([a,b], C(\beta T))$.

Prova: Como $C^*(T)$ é isométrico a $C(\beta T)$ o resultado é imediato.

Corolário 4.2.9.(+CH) Se K é espaço compacto disperso não separável, então $R([a,b], C(K)) \neq M([a,b], C(K))$.

Prova: Basta lembrar que neste caso $c(K) \geq 2^{\aleph_0}$ (ver (4.1.3) 2º exemplo).

Finalmente como último corolário temos o resultado seguinte para compactos de Eberlein, que foi obtido em conjunto com Francisco Miraglia e Galdino Cesar da Rocha Filho.

Corolário 4.2.10. - (+CH) Se K é um compacto de Eberlein, então $R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K))$ se, e somente se, K é metrizável.

Prova: É imediata pelo que foi exposto no 6º exemplo em (4.1.3), ou seja K compacto Eberlein é metrizável se, e somente se, K é ccc.

4.3. Espaços não pseudo compactos.

O resultado principal deste parágrafo é o seguinte:

Proposição 4.3.1. - Se T é espaço completamente regular, não pseudo-compacto, então $R([a,b],C^*(T)) \not\subset M([a,b],C^*(T))$.

Para prová-lo precisamos das seguintes proposições:

Proposição 4.3.2. - Se T é espaço completamente regular, são equivalentes:

- a) T não é pseudo-compacto;
- b) Existe família $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de abertos não vazios de T dois a dois disjuntos, localmente finita.

Prova: Inicialmente, admitindo (a), existe $f: T \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e ilimitada e podemos supor f ilimitada superiormente. Assim sendo, existe sequência $\{f(a_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ estritamente crescente com $\lim_{i \rightarrow +\infty} f(a_i) = +\infty$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ contruiremos intervalos dois a dois disjuntos da forma $]f(a_i) - \delta_i, f(a_i) + \delta_i[$ com $\delta_i > 0$.

É fácil ver que a família dos abertos $A_i = f^{-1}(]f(a_i) - \delta_i, f(a_i) + \delta_i[)$ satisfaz (b).

Reciprocamente, admitindo (b) para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $a_i \in A_i$ e $f_i: T \longrightarrow [0,1]$ contínua, tal que $f_i(a_i) = 1$ e $f_i(x) = 0$ se $x \notin A_i$.

A função $f: T \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i f_i(x)$, $x \in T$, é contínua em T e ilimitada, logo T é não pseudo-compacto.

Proposição 4.3.3. - Se T é espaço completamente regular, não pseudo-compacto, então $C^*(T)$ contém subespaço isométrico a $\ell_{\infty}(\mathbb{N})$.

Prova: Seja $F: \ell_\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow C^*(T)$ dada por $F((\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j$, onde $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ e f_j são as funções definidas na proposição anterior, $j \in \mathbb{N}$.

É imediato que F está bem definida e é linear. Por outro lado, se $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ temos:

$$\begin{aligned} \|F((\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}})\| &= \sup_{x \in T} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j(x) \right| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{x \in A_i} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j(x) \right| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_i f_i(a_i)| = \\ &= \|(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}\|. \end{aligned}$$

Como corolário deste último resultado temos a proposição (4.3.1).

Prova da Proposição 4.3.1. Se T é completamente regular, não pseudo-compacto por (4.3.3), $C^*(T)$ contém subespaço isométrico a $\ell_\infty(\mathbb{N})$, mas por (2.2.8) $R([a,b], \ell_\infty(\mathbb{N})) \not\subset M([a,b], \ell_\infty(\mathbb{N}))$, daí segue o que queríamos provar.

Corolário 4.3.4. - Se T é espaço completamente regular, não pseudo-compacto e βT é compactificado de Stone-Cech de T , então $R([a,b], C(\beta T)) \not\subset M([a,b], C(\beta T))$.

Prova: Observar que $C(\beta T)$ e $C^*(T)$ são isométricos.

Observação 4.3.5. - Este último resultado e o corolário

(4.2.8) do parágrafo anterior são resultados distintos. De fato, se Ω é o primeiro ordinal de cardinalidade $2^{\aleph_0}$, $\beta([0, \Omega]) = [0, \Omega]$ e $c([0, \Omega]) = 2^{\aleph_0}$, no entanto $C([0, \Omega])$ não contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ como já foi observado em (4.2.6.(2)).

Por outro lado, $\beta\mathbb{N}$ é ccc e $C(\beta\mathbb{N}) = \ell_\infty(\mathbb{N})$.

Corolário 4.3.6. - Se M é espaço métrico são equivalentes:

- a) M não é compacto;
- b) M não é pseudo-compacto;
- c) $R([a, b], C^*(M)) \not\subset M([a, b], C^*(M))$.

Prova: É imediato que (a) implica (b). Da proposição 4.3.1 vem que (b) implica (c).

Agora, se vale (c) temos que $C^*(M)$ é não separável, mas M é métrico, logo M não pode ser compacto.

Corolário 4.3.7. - Se M é espaço métrico não separável, então

$$R([a, b], C^*(M)) \not\subset M([a, b], C^*(M)).$$

Prova: Se M é espaço métrico não separável, então M não é compacto, daí por (4.3.6) segue o que queríamos provar.

Observação 4.3.8. - A recíproca de (4.3.7) é falsa, para isso basta escolher $M = \mathbb{N}$ o conjunto dos naturais com a métrica discreta, e lembrar que neste caso $C^*(M) = C^*(\mathbb{N})$ isométrico a $C(\beta\mathbb{N}) = \ell_\infty(\mathbb{N})$ (ver (2.2.8)).

4.4. Espaços pseudo-compactos com celularidade menor que $2^{\aleph_0}$.

Queremos lembrar que para espaços T completamente regulares e pseudo-compactos temos $C^*(T) = C(T)$, e como foi observado no início deste capítulo mesmo para T ccc não temos resposta sobre a inclusão ou não das funções Riemann integráveis nas funções mensuráveis de $[a, b]$ em $C(T)$.

Daremos exemplos em que $R([a, b], C(T))$ está contido em $M([a, b], C(T))$ e outros em que a inclusão é falsa, em duas classes de espaços:

- A) T é compacto;
- B) T não é compacto.

Exemplo (A1) Seja $T = K$, K espaço diádico. Por (3.3.4), temos $R([a, b], C(K)) \subset M([a, b], C(K))$ e por (3.2.3), temos que K é ccc.

Exemplo (A2) Seja $T = \beta\mathbb{N}$, T é compacto e ccc e, por (2.2.8) temos $R([a,b], \ell_\infty(\mathbb{N})) \neq M([a,b], \ell_\infty(\mathbb{N}))$.

Exemplo (B1) Designaremos por c o cardinal do contínuo 2^{x_0} . No espaço produto $[0,1]^c$ definimos o subespaço Σ dos elementos de $[0,1]^c$ que possuem no máximo uma quantidade enumerável de coordenadas não nulas.

Proposição 4.4.1 - O espaço Σ definido acima tem as seguintes propriedades:

- a) Σ é denso em $[0,1]^c$ e Σ não é compacto.
- b) Σ é sequencialmente compacto.
- c) Σ é pseudo-compacto.
- d) Σ é ccc.

Prova: Para provar (a), é fácil ver que $\bar{\Sigma} = [0,1]^c$, mas como $\Sigma \neq [0,1]^c$, segue que Σ não é compacto.

Para (b), seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de elementos de Σ . Se para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (x_t^n)_{t \in [0,1]}$ seja $T_n = \{t \in [0,1] : x_t^n = 0\}$.

Como T_n é enumerável, o conjunto $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ é enumerável

$$\text{e } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \subset \prod_{t \in T} [0,1] \times \prod_{[0,1]-T} \{0\} = Y$$

Sendo Y compacto, existe subsequência de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que denotaremos por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, convergente para $x \in Y$.

Se $\tilde{x} \in [0,1]^C$ é o elemento correspondente a x , temos que $\tilde{x} \in \Sigma$, pois $\tilde{x}_t = x_t = 0$ se $t \in [0,1] - T$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$, uma vez que, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_t^n = x_t$ para todo $t \in [0,1]$.

Usando, agora, um resultado geral que afirma que todo espaço enumeravelmente compacto é pseudo-compacto ([E] pg 149), temos que Σ é pseudo-compacto.

Finalmente, como $[0,1]^C$ é espaço diádico temos que $[0,1]^C$ é ccc, mas Σ é denso em $[0,1]^C$, logo Σ é ccc.

Proposição 4.4.2. - O espaço Σ é completamente regular (de fato Σ é normal) e seu compactificado de Stone-Cech é $[0,1]^C$.

Prova: O espaço Σ é completamente regular porque é subespaço de $[0,1]^C$ que é completamente regular. Para a prova de que $\beta\Sigma = [0,1]^C$ ver [C].

Proposição 4.4.3. - Para o espaço Σ vale o seguinte

$$R([a,b], C(\Sigma)) \subset M([a,b], C(\Sigma)).$$

Prova: Como $[0,1]^C$ é um espaço diádico, por (3.3.4) vem que $R([a,b], C([0,1]^C)) \subset M([a,b], C([0,1]^C))$.

Usando a proposição anterior temos que, $C(\beta\Sigma) = C([0,1]^C)$, mas $C(\Sigma)$ e $C(\beta\Sigma)$ são isométricos, o que prova o resultado.

Exemplo (B2) Seja K espaço compacto extremamente desconexo e infinito.

Por exemplo $\beta\mathbb{N}$, βD onde D é espaço discreto infinito, βX com X espaço extremamente desconexo completamente regular infinito ([E] pg 256).

Antes de definir o espaço T pseudo-compacto não compacto, ccc que satisfaz $R([a,b],C(T)) \neq M([a,b],C(T))$, precisamos de alguns resultados sobre K .

Proposição 4.4.4. - Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência do espaço K definido acima, que converge para x_0 em K , então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_n = x_0$, para todo $n \geq n_0$.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ seja infinito. Então existe subsequência de elementos distintos da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que denotaremos deste mesmo modo por comodidade.

Como num espaço Hausdorff um compacto e um ponto não pertencente ao compacto são separados por abertos disjuntos, usando que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0 , existem abertos A_n , $n \in \mathbb{N}$, disjuntos dois a dois, tais que $x_n \in A_n$.

$$\text{Sejam } B_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{2n-1} \text{ e } B_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{2n}.$$

Temos que $x_0 \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$.

Por outro lado como K é extremamente desconexo $\overline{B_1}$ é aberto e $B_1 \subset K - B_2$. Dai vem que $\overline{B_1} \subset K - B_2$, logo $B_2 \subset K - \overline{B_1}$, mas $K - \overline{B_1}$ é fechado, logo $\overline{B_2} \subset K - \overline{B_1}$ e $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = \emptyset$ o que é absurdo, pois $x_0 \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$.

Proposição 4.4.5. - Se K é o espaço descrito acima e $y_0 \in K$, o espaço $T = K - \{y_0\}$ é pseudo-compacto.

Prova: Por absurdo, se existe $f: T \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua e ilimitada, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de T , tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$.

O conjunto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um subconjunto infinito de K , mas K é compacto, logo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem ponto de acumulação $x \in K$.

Seja A o conjunto dos pontos de acumulação de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em K . Se existe $x \in A$, $x \neq y_0$ temos um absurdo, pois f é contínua em x . Logo $A = \{y_0\}$, daí a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para y_0 em K , pelo lema $x_n = y_0$ para todo $n \geq n_0$, logo $x_n \notin T$ para $n \geq n_0$ o que é absurdo.

Proposição 4.4.6. - Nas condições anteriores T é completamente regular.

Prova: Imediata.

Proposição 4.4.7. - Se K é espaço compacto extremamente desconexo infinito, e y_0 é o ponto de acumulação de K , seja $T = K - \{y_0\}$. Então

- a) $C(T)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$.
- b) $R([a, b], C(T)) \neq M([a, b], C(T))$.

Prova: Basta mostrar que vale (a), pois pela proposição (2.2.8) (a) implica (b).

Observemos então que, por (2.2.10) e (2.2.13), $C(K)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$, isto é, existe isomorfismo sobre a imagem $F: \ell_\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow C(K)$. A partir disto, definimos $\tilde{F}: \ell_\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow C(T)$ por $\tilde{F}(z) = F(z)|_T$ para $z \in \ell_\infty(\mathbb{N})$.

É imediato que $\tilde{F}$ está bem definida e é linear. Quanto ao fato de $\tilde{F}$ ser isomorfismo, isso vem de $\|\tilde{F}(z)\| = \|F(z)|_T\| = \sup_{x \in T} |F(z)x| = \sup_{x \in K} |F(z)x| = \|F(z)\|$, pois y_0 é ponto de acumulação de K .

4.5. Retomada de alguns exemplos

Neste parágrafo vamos abordar dois dos exemplos citados anteriormente em (4.1.5) na classe dos espaços completamente regulares pseudo-compactos e ccc: são eles os 119 e 129 exemplos.

Não sabemos até agora o que ocorre nos casos:

11º exemplo: K compacto totalmente ordenado não metrizável e separável.

12º exemplo: K compacto disperso não metrizável e separável.

Mas temos respostas em casos particulares, o que nos leva a conjecturar que em ambos os casos

$$R([a,b],C(K)) \neq M([a,b],C(K)).$$

Vamos passar agora a detalhar os exemplos acima.

(4.5.1) Seja $K=[a,b]_{G_-}$ como foi descrito em (1.1.23).

Como vimos em (1.1.25), $C(K)$ contém subespaço isométrico a $G_a^+([a,b])$, logo $R([a,b],C(K)) \neq M([a,b],C(K))$.

(4.5.2) Denotaremos por $D^{\mathbb{N}}$ o conjunto das sequências de zeros e uns e por B o conjunto dos números diádicos do intervalo $[0,1]$, isto é $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ onde $B_n = \{\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}\}$, $n \geq 1$.

Seja $X = D^{\mathbb{N}} \cup B$ com a seguinte topologia: os pontos de B são isolados, a base de vizinhança de um elemento $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ ($a_i = 0$ ou $a_i = 1$) consiste dos conjuntos

$U_n = \{a, b_n, b_{n+1}, \dots\}$ onde $b_n = \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \in B_{n+1}$ para $n \geq 1$.

Se denotarmos por K o compactificado de Alexandroff do espaço X , K é um compacto disperso não metrizável e separável, pois B é denso em K .

Vamos construir uma função $f \in R([0,1], C(K))$ e $f \notin M([0,1], C(K))$, do seguinte modo:

A cada $t \in [0,1]$ seja $a_t \in D^{\mathbb{N}}$ o elemento correspondente à expansão diádica de t (sem a repetição de infinitos algarismos 1).

Definimos $f: [0,1] \longrightarrow C(K)$ por $f(t) = x_{U_1}(a_t)$, $t \in [0,1[$ e $f(1) = 0$, sendo $U_1(a_t) = \{a_t, \frac{a_1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{1}{8}, \dots, \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \dots\}$ onde $a_t = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in D^{\mathbb{N}}$, $a_i = 0$ ou $a_i = 1$ como foi definido anteriormente.

A função f é obviamente não mensurável, pois se $t \neq s$, t e s em $[0,1[$ vem que $\|f(t) - f(s)\| = \|x_{U_1}(a_t) - x_{U_1}(a_s)\| = 1$, pois $x_{U_1}(a_t)(a_t) = 1$ e $x_{U_1}(a_s)(a_t) = 0$.

Agora, com alguns cálculos verifica-se que f é Riemann integrável sendo que $\int_0^1 f(t) dt = g \in C(K)$ dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x)=0 \quad \text{se } x \notin B \text{ ou } x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \\ g(x)=\frac{2}{2^k} \quad \text{se } x = \frac{m}{2^k} \in B \text{ onde } x \text{ est\aa na forma irredut\i\vel e} \\ \quad x \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}. \end{array} \right.$$

4.6. Coment\arios sobre o caso: $C^*(T)$ cont\em $\ell_1(I)$.

Como f\oi mencionado nas observa\c\es do par\agrafo (4.2), vamos abordar aqui o que acontec\e no caso de $C^*(T)$ conter subespa\co isomorfo a $\ell_1(I)$, para I n\ao enumer\avel.

Seja ent\ao K a bola unit\aria fechada do dual de $\ell_1(I)$, que \e $\ell_\infty(I)$, com a w^* -topologia, i.e, a topologia induzida por $\ell_1(I)$ em $\ell_\infty(I)$.

Temos os seguintes resultados:

Proposi\c\o 4.6.1. - Com as defini\c\es acima:

- a) K \e compacto com a w^* -topologia;
- b) $C(K)$ cont\em $\ell_1(I)$ como subespa\co, isometricamente.

Prova: Ver [DS] pg. 424. (Teorema 2 e corol\ario 4).

Proposi\c\o 4.6.2. - A bola unit\aria e fechada K de $\ell_\infty(I)$ com a w^* -topologia \e homeomorfa a $[-1, 1]^I$.

Prova: Consideremos a aplicação identidade id de K em $[-1,1]^I$, quando confundimos a família $(a_i)_{i \in I} \in K$ com a I -upla em $[-1,1]^I$.

É imediato, que id é bijetora, resta mostrar então que id é contínua, uma vez que estamos entre espaços compactos.

Para isso, basta mostrar que id composta com qualquer das projeções p_j de $[-1,1]^I$ em $[-1,1]$, $j \in I$ é contínua. De fato, para cada $a = (a_i)_{i \in I} \in K$, seja $(a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, vizinhança de $(p_j \circ \text{id})(a) = a_j$ em $[-1,1]$. Tomando $\{e_j\}_{j \in I}$ a base usual de $\ell_1(I)$, temos que $a(e_j) = a_j$, $j \in I$.

Consideremos a seguinte vizinhança de a em $\ell_\infty(I)$ na w^* -topologia

$$B = \{x^* \in \ell_\infty(I) : |x^*(e_j) - a(e_j)| < \varepsilon\} = \{x^* \in \ell_\infty(I) : |x_j^* - a_j| < \varepsilon\} \text{ e,}$$

como $B \cap K = \{x^* \in \ell_\infty(I) : \|x^*\| \leq 1 \text{ e } |x_j^* - a_j| < \varepsilon\}$, temos que

$$(p_j \circ \text{id})(B \cap K) = (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon), \text{ o que prova a continuidade de } \text{id}.$$

As duas proposições anteriores justificam a observação feita em (4.2.6) item (3), ou seja, se $K = [-1,1]^I$, para I não enumerável, temos:

1. $C(K)$ contém subespaço isométrico a $\ell_1(I)$, e,
2. K é espaço diádico, logo $c(K) = \chi_0$ e
 $R([a,b], C(K)) \subset M([a,b], C(K))$.

Dai segue que, se $C^*(T)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_1(I)$ não implica em $c(T) \geq |I|$ nem mesmo em $R([a,b],C^*(T)) \neq M([a,b],C^*(T))$, como acontecia no caso de $C^*(T)$ conter subespaço isomorfo a $c_0(I)$ ou $\ell_p(I)$, com $1 < p \leq \infty$, para $|I| \geq 2^{X_0}$.

Por outro lado, se tomarmos o espaço compacto T obtido pela união disjunta de K e da bola unitária fechada de $\ell_2(I)$ com a ω^* -topologia, temos que $C(T)$ contém subespaço isométrico a $\ell_1(I)$ e subespaço isométrico a $\ell_2(I)$ daí, pela proposição (2.2.6) $R([a,b],C(T)) \neq M([a,b],C(T))$.

O que nos leva a concluir que o fato de $C^*(T)$ conter subespaço isomorfo a $\ell_1(I)$ não nos dá nenhuma informação em relação à inclusão de $R([a,b],C^*(T))$ em $M([a,b],C^*(T))$.

Uma outra questão interessante é sugerida pelos seguintes resultados que se encontram em [LM] e [PS].

Proposição 4.6.3. - Se K é espaço compacto, são equivalentes:

- a) $C(K)$ é universal para espaços separáveis.
- b) K é não disperso.
- c) $C(K)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.

Colocamos então a pergunta, se K é espaço compacto e $C(K)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_1(I)$, com $|I| > X_0$, temos $C(K)$ universal para espaços de densidade igual ao card

nal de I ? Isto é, $C(K)$ contém como subespaço isomorfo, todo espaço que possui conjunto denso com a potência de I ? A resposta é negativa para $|I| > \chi_0$.

De fato, se tomarmos K a bola unitária fechada de $\ell_\infty(I)$ com a w^* -topologia, temos $C(K)$ contém como subespaço isométrico $\ell_1(I)$ e como K é ccc temos que $C(K)$ não contém como subespaço isomorfo $\ell_p(I)$ para $1 < p \leq \infty$.

Assim sendo a proposição acima, importante dentro da teoria de espaços separáveis, deixa de valer quando aumentamos o cardinal da densidade dos espaços.

4.7. Consequências geométricas sobre $C(K)$ para K espaço diádico.

Tendo em mente os resultados dos parágrafos (2.2), (4.2), (4.3) e o fato de que se K é espaço diádico, então $R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K))$, temos uma série de corolários que nos dão informações sobre a estrutura geométrica de $C(K)$ e, todos eles de demonstração imediata.

Queremos observar ainda, que todas as proposições que seguem são verdadeiras para qualquer espaço compacto K ccc, tal que $R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K))$.

Proposição 4.7.1. - Se K é espaço diádico, então $C(K)$ não contém subespaço isomorfo a qualquer um dos espaços:

$G_a^-[a,b]$ ou $C(S)$ com S compacto extremamente desconexo infinito. Assim sendo, $C(K)$ não contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$, $L_\infty([0,1])$ ou $G([a,b])$.

Prova: Segue de (2.2.14) e (2.2.6).

Proposição 4.7.2. - Se K é espaço diádico, então $C(K)$ não contém subespaço isomorfo a $c_0(I)$ ou a $\ell_p(I)$ para $1 < p \leq \infty$, com I não enumerável.

Prova: Segue de (4.2.3) e (4.2.5) e do fato de K ser ccc.

Corolário 4.7.3. - Se K é espaço diádico, então $C(K)$ não contém subespaço isomorfo a qualquer espaço de Hilbert não separável.

Prova: Se H é espaço de Hilbert não separável, H é isométrico a $\ell_2(I)$ para I não enumerável, basta agora usar a proposição anterior e o resultado em (4.2.5).

Proposição 4.7.4. - Se K é um espaço diádico infinito, então $C(K)$ não é um espaço injetivo.

Prova: Segue de (2.2.10).

Proposição 4.7.5. - Se K é um espaço diádico infinito, então $C(K)$ não é um espaço dual.

Prova: Segue de (2.2.17).

o0o

CAPÍTULO 5 - ESPAÇOS DE MEDIDA

5.1. Espaços de medida e duais dos espaços $C(K)$ para K compacto

Para os espaços de medida a classificação dos $L_p(T, \Sigma, \mu)$, tais que as funções Riemann integráveis de $[a, b]$ em $L_p(T, \Sigma, \mu)$ são mensuráveis, está terminada.

Admitindo (CH) e usando a representação dos espaços $L_p(T, \Sigma, \mu)$ através de somas de espaços da forma $\ell_p(I)$ e $L_p([0, 1]^m)$ com $m \geq \chi_0$, a classificação dos espaços $L_p(T, \Sigma, \mu)$ onde μ é uma medida finita segue imediatamente dos resultados deste trabalho. Já para os espaços de medida infinita a classificação foi concluída, durante a redação deste trabalho, por Francisco Miraglia e Galdino Cesar da Rocha Filho.

A partir desta classificação temos o estudo dos duais dos espaços $C(K)$ para K compacto, como consequência imediata.

Definição 5.1.1. - Dada uma família qualquer de espaços de Banach $\{X_i\}_{i \in A}$, para $1 \leq p < \infty$, definimos a p -soma de tais espaços como o espaço de Banach

$[\oplus_{i \in A} X_i]_p = \{(x_i)_{i \in A} : \sum_{i \in A} \|x_i\|^p < \infty\}$, munido da norma

$$\|(x_i)_{i \in A}\|_p = \left[\sum_{i \in A} \|x_i\|^p \right]^{1/p}.$$

Teorema 5.1.2. - Se (T, Σ, μ) é um espaço de medida finita, para $1 \leq p < \infty$ temos:

1. Se μ é puramente não-atômica, então existe um conjunto enumerável $\{m_\beta : \beta < \alpha\}$ de cardinais distintos ($m_\beta \geq \chi_0$) tais que $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é isométrico a $[\oplus_{\beta < \alpha} L_p([0, 1]^{m_\beta})]_p$.
2. Se μ é puramente atômica, então $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é isométrico a $\ell_p(I)$ com $|I| \leq \chi_0$.
3. Se μ tem átomos, mas não é puramente atômica, então $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é isométrico a $(\ell_p(I) \oplus [\oplus_{\beta < \alpha} L_p([0, 1]^{m_\beta})]_p)_p$ para algum conjunto de índices I , com $|I| \leq \chi_0$ e alguma família enumerável $\{m_\beta\}_{\beta < \alpha}$ de cardinais distintos com $m_\beta \geq \chi_0$.

Prova: [L] pg 127.

Teorema 5.1.3. - Seja $m \geq \chi_0$. Então $L_p([0, 1]^m)$, para $1 \leq p < \infty$, contém subespaço isomorfo a $\ell_2(I)$ com $|I| = m$.

Prova: [L] pg 128.

Proposição 5.1.4. (+CH) Se (T, Σ, μ) é um espaço de medida finita, para $1 \leq p < \infty$, usando as notações em (5.1.2) temos:
 $R([a, b], L_p(T, \Sigma, \mu)) \subset M([a, b], L_p(T, \Sigma, \mu))$ se, e somente se $m_\beta = \chi_0$ para $\beta < \alpha$; ou equivalentemente $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é separável.

Prova: No caso de μ ser não puramente atômica, se algum $m_\beta > \chi_0$, usando (5.1.2) e (5.1.3), temos que $L_p(T, \Sigma, \mu)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_2(\Gamma)$ com $|\Gamma| = m_\beta$. Mas $\ell_2(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert não separável, e aplicando (2.2.6) vem que $R([a, b], L_p(T, \Sigma, \mu)) \neq M([a, b], L_p(T, \Sigma, \mu))$.

No caso de μ ser puramente atômica, $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é isométrico a $\ell_p(I)$, com $|I| \leq \chi_0$, que é separável.

Reciprocamente, se todo $m_\beta = \chi_0$ temos que $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é separável, daí a inclusão é verdadeira.

Teorema 5.1.5. - (Bohnenblust, Nakano) Se (T, Σ, μ) é um espaço de medida, então para $1 \leq p < \infty$, $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é isométrico a $(\ell_p(I) \oplus (\oplus_{\alpha \in A} L_p([0, 1]^{m_\alpha}))_p)_p$ para algum conjunto de índices I e alguma família $\{m_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de cardinais $m_\alpha \geq \chi_0$.

Prova: [L] pg 136.

Vamos dividir o estudo para os casos $p=1$ e $1 < p < \infty$.

Proposição 5.1.6. (+CH). Se (T, Σ, μ) é um espaço de medida e $1 < p < \infty$, então com as notações em (5.1.5) temos que $R([a, b], L_p(T, \Sigma, \mu)) \subset M([a, b], L_p(T, \Sigma, \mu))$ se, e somente se

$|I| \leq \chi_0$, $|A| \leq \chi_0$ e $m_\alpha = \chi_0$, para $\alpha \in A$, ou equivalentemente $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é separável.

Prova: Como vimos de (5.1.3) se algum $m_\alpha > \chi_0$ a inclusão é falsa. Se $|I| > \chi_0$, $L_p(T, \Sigma, \mu)$ contém $\ell_p(I)$ o que implica, novamente, que a inclusão é falsa, ver (4.2.1) e (4.2.5).

Finalmente, se $|A| > \chi_0$, mostra-se que $L_p(T, \Sigma, \mu)$ contém subespaço isométrico a $\ell_p(A)$, pela aplicação que a cada $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha e_\alpha$ de $\ell_p(A)$ associa $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f_\alpha$ em $(\oplus \sum_{\alpha \in A} L_p([0,1]^{m_\alpha}))_p$ onde e_α é o vetor que possui 1 na α -ésima coordenada e zero nas demais e f_α é a função constante igual a 1 na α -ésima coordenada e a função nula nas demais.

Reciprocamente, se $|I| \leq \chi_0$, $|A| \leq \chi_0$ e todos os $m_\alpha = \chi_0$, para $\alpha \in A$, temos que $L_p(T, \Sigma, \mu)$ é separável, o que termina a demonstração.

Para o caso $p=1$ usaremos os seguintes teoremas:

Teorema 5.1.7. - Se I é família de índices qualquer, então

$$R([a,b], \ell_1(I)) = \mathcal{D}([a,b], \ell_1(I)).$$

Prova: [R]

Corolário 5.1.8. - Se I é um conjunto qualquer, então

$$R([a,b], \ell_1(I)) \subset M([a,b], \ell_1(I)).$$

Prova: Basta usar (1.4.3) e (5.1.7).

Teorema 5.1.9. - Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de espaços de Banach, com $R([a,b], X_\alpha) \subset M([a,b], X_\alpha)$ para cada $\alpha \in A$, então $R([a,b], [\oplus_{\alpha \in A} X_\alpha]_1) \subset M([a,b], [\oplus_{\alpha \in A} X_\alpha]_1)$.

Prova: Este teorema será brevemente publicado e é devido a G.C. Rocha Filho e F. Miraglia.

Corolário 5.1.10 (+CH) Se (T, Σ, μ) é um espaço de medida, então, com as notações em (5.1.5) temos que $R([a,b], L_1(T, \Sigma, \mu)) \subset M([a,b], L_1(T, \Sigma, \mu))$ se, e somente se, todo $m_\alpha = \chi_0$ para $\alpha \in A$.

Prova: Usando a representação de $L_1(T, \Sigma, \mu)$ em (5.1.5) se $m_\alpha > \chi_0$ para algum α por (5.1.3), $L_1(T, \Sigma, \mu)$ contém espaço de Hilbert não separável, logo $R([a,b], L_1(T, \Sigma, \mu)) \not\subset M([a,b], L_1(T, \Sigma, \mu))$.

Para verificar a recíproca, se $m_\alpha = \chi_0$ para todo α então $L_p([0,1]^{m_\alpha})$ é separável, logo todas as parcelas que aparecem na representação de $L_1(T, \Sigma, \mu)$ tem a propriedade de função Riemann ser mensurável, assim sendo, pelo teorema anterior vem que $R([a,b], L_1(T, \Sigma, \mu)) \subset M([a,b], L_1(T, \Sigma, \mu))$.

Teorema 5.1.11. - Se K é espaço compacto, então $C(K)^*$ é isométrico a um $L_1(T, \Sigma, \mu)$ para algum espaço de medida (T, Σ, μ) .

Prova: [L] pg 175 e 247.

Corolário 5.1.12. (+CH) Se K é espaço compacto com as condições em (5.1.5) temos que $R([a,b],C(K)^*) \subset M([a,b],C(K)^*)$ se, e somente se, todo $m_\alpha = \chi_0$ para $\alpha \in A$.

Definição 5.1.13. - Um espaço compacto K é separável em medida se para cada medida de Borel regular μ sobre K , $L_1(K,\mu,\mathbb{R})$ é separável.

Corolário 5.1.14. - (+CH) Se K é espaço compacto, então $R([a,b],C(K)^*) \subset M([a,b],C(K)^*)$, se, e somente se, K é separável em medida.

Prova: Será publicada em breve por Francisco Miraglia e Galdino César da Rocha Filho.

CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS FINAIS

6.1. Comentários sobre a hipótese do contínuo (CH).

Como pudemos observar no desenvolver deste trabalho, quando tratamos dos espaços de Banach X , $c_0(I)$ ou $\ell_p(I)$ para $1 < p < \infty$, se $|I| \geq 2^{\chi_0}$, temos que

$$R([a,b],X) \neq M([a,b],X).$$

Assim, se admitirmos (CH) e X é $c_0(I)$ ou $\ell_p(I)$ com $1 < p < \infty$ temos:

- a) Se I é enumerável, X é separável e $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.
- b) Se I é não enumerável, $c(X) \geq 2^{\chi_0}$ e $R([a,b],X) \neq M([a,b],X)$.

Colocamos então a questão de como se comportam estes espaços X se negarmos (CH).

Durante o estudo dos espaços de medida, Galdino C. da Rocha Filho e Francisco Miraglia verificaram que para os espaços X citados acima com $c(X) > \chi_0$ a questão $R([a,b],X) \neq M([a,b],X)$ é indecidível em ZFC (Zermelo-Fraenkel - Axioma da Escolha).

Isto no seguinte sentido, se colocarmos $\neg$ CH e assumirmos o axioma de Martin (MA) para os espaços X , citados acima, com $\chi_0 < |I| < 2^{\chi_0}$, temos $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$,

sendo que, tanto (CH) com (MA+ $\neg$ CH) são consistentes com ZFC.

De fato, com ($\neg$ CH) temos os seguintes resultados:

Lema 6.1.1. - (MA+ $\neg$ CH) Se k é cardinal infinito, $k < 2^{\chi_0}$, então a união de k subconjuntos de $\mathbb{R}$ com medida de Lebesgue nula tem medida nula.

Prova: Ver [Kn] pg 51.

Proposição 6.1.2. - (MA+ $\neg$ CH) Se k é cardinal, $k < 2^{\chi_0}$ e X é $c_0(k)$ ou $\ell_p(k)$ com $1 < p < \infty$, então $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.

Prova: Se $k \leq \chi_0$ nada temos a fazer pois os espaços em questão são separáveis.

Se $\chi_0 < k < 2^{\chi_0}$, denotemos por p_j , $j \in k$, a função que a cada elemento de X associa sua j -ésima coordenada.

Dada $f \in R([a,b],X)$ seja $f_j = p_j \circ f$, $j \in k$.

Consideremos $\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b f_j(t)dt)_{j \in k} \in X$, como elemento de X , $\int_a^b f(t)dt$ só possui uma quantidade enumerável de coordenadas não nulas.

Para cada $r \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ denotaremos por E_r a subfamília de índices de k correspondentes às coordenadas não nu

$$\text{Ias de } \int_a^r f(t)dt = \left(\int_a^r f_j(t)dt \right)_{j \in k}.$$

Se $E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [a,b]} E_r$, E é enumerável e para todo $x \in [a,b]$, $\int_a^x f_j(t)dt = 0$ se $j \notin E$. De fato, se $j \notin E$,

$$\int_a^x f_j(t)dt = \lim_{\substack{r \rightarrow x \\ r \in \mathbb{Q}}} \int_a^r f_j(t)dt = 0.$$

Usando este mesmo argumento vem que para quaisquer x e y em $[a,b]$, se $j \notin E$ então $\int_x^y f_j(t)dt = 0$. Daí, $f_j = 0$ μ -qs, para todo $j \notin E$.

Logo, para cada $j \notin E$ existe subconjunto mensurável A_j de $[a,b]$ com $\mu(A_j) = 0$ tal que $f_j([a,b] - A_j) = \{0\}$.

Seja $A = \bigcup_{j \in E} A_j$, pelo lema (6.1.1.) temos que $\mu(A) = 0$ e $f([a,b] - A)$ é um subconjunto de X cujos elementos só diferem de zero nas coordenadas de índice em E . Portanto, f tem imagem quase-separável o que equivale a dizer que $f \in M([a,b], X)$.

Estes fatos não afetam a teoria geral sobre espaços de funções contínuas no que diz respeito a espaços completamente regulares T com $c(T) \geq 2^{X_0}$ ou para T não pseudo-compacto.

Já para os espaços T com celularidade $X_0 < c(T) < 2^{X_0}$ temos novamente a indecidibilidade do problema

(em relação a ZFC).

No entanto as questões não resolvidas no caso $C^*(T)$ se colocam mesmo quando $c(T) = \aleph_0$.

Além disso, todos os resultados que se referem a espaços diádicos e a espaços que contêm subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ são absolutas, pois independem de (CH) ou (¬CH).

6.2. Problemas

Sem mencionarmos os problemas que a negação de (CH) provocam nesta teoria, vamos apresentar uma série de questões que consideramos relevantes para a continuação da classificação dos espaços $C(K)$ com relação à propriedade $R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K))$.

Questão 1: Encontrar outros exemplos de espaços compactos não metrizáveis, além dos diádicos, tais que $R([a,b],C(K)) \subset M([a,b],C(K))$.

Questão 2: Caracterizar os espaços topológicos completamente regulares T , tais que βT é diádico.

É sabido que se βT é diádico, então T é pseudo-compacto (ver [EP]). No entanto, pelo que sabemos até o momento a questão colocada acima está em aberto (ver [He]).

Questão 3: Caracterizar os espaços compactos K tais que $C(K)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

Esta questão está em aberto (ver [Ha]). Neste artigo de Haydon fica provado que uma condição necessária para que $C(K)$ contenha subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ é que K contenha um subconjunto homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. Daí, Haydon observa que esta condição é não suficiente uma vez que $\{0,1\}^{2^{X_0}}$ é diádico contém $\beta\mathbb{N}$ homeomorficamente e, $C(\{0,1\}^{2^{X_0}})$ não contém $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

É interessante observar que a prova de que $C(\{0,1\}^{2^{X_0}})$ não contém $\ell_\infty(\mathbb{N})$ baseia-se num trabalho de Hagler (ver [Hg]) e é bastante elaborada, no entanto este resultado segue imediatamente dos teoremas aqui expostos (3.3.4 e 2.2.8).

Questão 4: Decidir se $R([a,b],C(K)) \neq M([a,b],C(K))$ no caso de K ser espaço compacto disperso não metrizável separável.

Questão 5: Existe espaço reflexivo não separável X tal que $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$?

Este problema é sugerido pelo fato de não existir espaço uniformemente convexo não separável com esta propriedade.

Questão 6: Existe espaço de Schur não separável X tal que $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$?

Os espaços de Banach de Schur são, por definição, aqueles em que a convergência fraca de sequências coincide com a convergência na norma. Como exemplo de espaço de Schur temos $\ell_1(\Gamma)$, para qualquer conjunto infinito Γ , e para eles vale a inclusão acima.

Questão 7: Classificar os espaços de Banach X (não separáveis) tais que $R([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.

Este é o problema inicial colocado em (2.1) e que tentamos atacar na classe dos espaços $C(K)$.

Questão 8: Classificar os espaços de Banach X (não separáveis) tais que $BW([a,b],X) \subset M([a,b],X)$.

Esta questão está interligada com a questão anterior uma vez que $BW([a,b],X) \subset R([a,b],X)$ para todo espaço de Banach X .

No entanto este problema difere substancialmente do anterior, uma vez que para todo espaço de Banach X (não separável) que não contém subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$ temos $BW([a,b],X) \subset M([a,b],X)$ (ver (1.1.17)). Em particular todo espaço de Hilbert satisfaz a inclusão precedente.

Além disso, para espaços duais X , temos $BW([a,b],X) \subset M([a,b],X)$ se, e somente se, X não contém subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$.

o0o

BIBLIOGRAFIA

- [C] CORSON, H.H., Normality in subsets of product spaces, Amer. Jour. of Math. 81 (1959), 785-796.
- [DS] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J.T., Linear operators, Part I, Interscience, New York, 1958.
- [E] ENGELKING, R., Outline of General Topology. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.
- [EP] ENGELKING, R., PELCZYNSKI, A., Remarks on dyadic spaces Coll. Math., XI (1963) 1, 55 - 63.
- [Ha] HAYDON, R., A non-reflexive Grothendieck space that does not contain ℓ_∞ . Israel Jour Math, 40 n° 1 (1981), 65-73.
- [He] HELMER, D., On spaces admitting openly dyadic compactifications. Fund. Math., 110 (1980), 213-220.
- [Hg] HAGLER, J., On the structure of S and $C(S)$ for S dyadic. Trans. Amer. Math. Soc., 214 (1975), 415-428.
- [H] HÖNIG, C.S., The abstract Riemann-Stieltjes integral and its applications to linear differential equations with generalized boundary conditions. São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1973. (Notas do IME-USP).

- [H1] HÖNIG, C.S., Fredholm Stieltjs integral equations, I. IV Escuela Latinoamericana de Matemática, Análisis y sus Aplicaciones. Altas, Lima, 1979, p. 126-160.
- [HS] HEWITT, E., STROMBERG, K., Real and Abstract Analysis. Springer Verlag, 1965.
- [Kn] KUNEN, K., Set Theory. An introduction to independence proofs. Studies in Logic and Foundations of Mathematics vol. 102. J. Barwise/D. Kaplan/H.J. Keisler/P. Suppes/A.S. Troelstra (Editors).
- [K] KURATOWSKI, K., Topology Vol. II. Academic Press Inc., 1961.
- [L] LACEY, H.E., The isometric theory of classical Banach spaces. Springer Verlag, 1974.
- [LM] LACEY, H.E., MORRIS, P.D., On universal spaces of the type $C(X)$. Proc. Amer. Math. Soc., 19 (1966), 350-353.
- [Li] LINDENSTRAUSS, J., Weakly compact sets - their topological properties and the Banach spaces they generate. Symposium on infinite-dimensional topology (Louisiana State Univ., Baton Rouge. La., 1967) 235-273. Ann. of Math. Studies, n° 69, Princeton. Univ. Press, Princeton, N.J., 1972.
- [LT] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L., Classical Banach spaces I, sequences spaces. Springer Verlag, 1977.

- [M] MAZUR, S., On continuous mappings on cartesian products. Fund Math, 39 (1952), 229-238.
- [O] OSTASZEWSKI, A. J., A characterization of compact separable ordered spaces. J. London Math. Soc. (2), 7 (1974), 758-760.
- [P] PELCZYNSKI, A., On the isomorphism of the spaces m and M . Bull. Acad. Pol. Sci. 6 (1958), 695-696.
- [PR] PELCZYNSKI, A., ROCHA FILHO, G.C., Operadores de Darboux. Seminário Brasileiro de Análise. SBM, 1980.
- [PS] PELCZYNSKI, A., SEMADENI, Z., Spaces of continuous functions (III). Studia Math. 18 (1959), 211-222.
- [Pi] PIETSCH, A., Absolute p -summierende Abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 28 (1967), 333-353.
- [R] ROCHA FILHO, G.C., Integral de Riemann vetorial e geometria de espaços de Banach. Tese de doutorado. IME-USP, 1979.
- [Ro] ROSENTHAL, H., On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures. Acta Math. 124 (1970), 205-248.
- [S] SEMADENI, Z., Banach spaces of continuous functions, Vol. I. Warszawa, 1971.

ÍNDICE REMISSIVO E SIMBÓLICO

Axioma de Martin	82	$G([a,b],X)$	5
$[a,b]_G$	7	$G^-([a,b],X)$	8
$[a,b]_{G^-}$	8	$G_a^-([a,b],X)$	8
$BW([a,b],X)$	3	Imagem quase-separável	10
ccc (countable chain condition)	43	Integral de	
Celularidade	42	Riemann	2
Condição de Darboux	4	Bochner	11
Critério de Cauchy	3		
Divisão	2	$L_1([a,b],X)$	11
$D([a,b],X)$	4		
D^m	30	$M([a,b],X)$	10
Espaço de Banach		Operadores	
dual	28	de Darboux	19
injetivo (P_λ)	26	p-somantes	18
Espaço Topológico		Oscilação de uma função	4
diádico	39		
pseudo-compacto	43	$\Pi_p(X,Y)$	18
Σ	62		
Função		$R([a,b],X)$	2
Bochner integrável	11		
escada	5	Subdivisão	2
fracamente mensurável	10		
mensurável	9	Teorema	
regrada	5	de Bochner	11
Riemann integrável	2	de Pettis	10
simples	9		
de variação fraca limitada	3		