SÔBRE O TEOREMA DE HARTMAN

Dissertação de mestrado

Elvia Mureb Sallum

I.M.E. da U.S.P. - abril 1971

INTRODUÇÃO

Seja $X: p \in M \rightarrow X(p) \in T_p M$ um campo de classe C^{r+1} definido numa variedade M de classe C^{r+1} .

O comportamento das trajetórias de X nas vizinhanças de um ponto p regular (isto é, $X(p) \neq 0$) é dado pelo teorema do fluxo tubular (as trajetórias são mais ou menos paralelas nas vizinhanças de p) de M. Peixoto. Esse teorema que vale para variedade de Banach está demonstrado para dimensão finita em [6]. Dêle conclui-se que dois campos X e Y com pontos regulares p e q respectivamente, são localmente equivalentes (isto é, existe um homeomorfismo de uma vizinhança de p sobre uma de q que transforma trajetórias de X sobre trajetórias de Y).

Nas vizinhanças de um ponto p crítico ($X(p) = 0$) a questão não é tão simples: é muito grande a variedade de comportamento das trajetórias (ver [6] - pag. 12-17).

Um campo X n -dimensional nas vizinhanças de um ponto crítico p se escreve $X = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n}$; p é dito hiperbólico se a matriz jacobiana em p $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \right)$ não tem autovalores no eixo imaginário. Hartman e Grobman demonstraram independentemente (de forma análítica)*, respondendo a uma pergunta de M. Peixoto, que nas vizinhanças de um ponto crítico hiperbólico as trajetórias do campo são "parecidas" com as trajetórias de sua parte linear. O campo e sua parte linear são localmente equivalentes nesse ponto crítico e o homeomorfismo conserva a parametrização. Uma demonstração geométrica devida a J. Palis está feita em "On Morse-Smale Dynamical Systems" de J. Palis (a aparecer). (* ver [1] e [9])

Um passo para a obtenção desse resultado foi dado pelo próprio Hartman para campo de classe C^2 em "A lemma in the

theory of structural stability of differential equations" Proc. Amer. Math. Soc. 11(1960)(610-620) onde fica claro que não se exige equivalência por difeomorfismo.

J. Palis generalizou o teorema de Hartman para espaços de Banach no seu artigo: "On the local Structure of Hyperbolic points in Banach Spaces", An. Acad. Bras. Cienc., 40(1968). Neste trabalho expomos esse artigo : a generalização para difeomorfismo e fluxos em espaços de Banach real ou complexo (cap. II-§1 e cap. III-A) e a estabilidade estrutural local para esses difeomorfismos no cap. II-§2 ("pequenas perturbações" de difeo. com ponto fixo hiperbólico são localmente equivalentes a ele). Além disso, como sugestão do prof. J. Sotomayer, aplicamos o teorema de Hartman para função normalmente hiperbólica que deixa invariante um toro . Deixamos para o apêndice dois fatos usuais para os que estudam sistemas dinâmicos e que precisaremos durante a exposição.

Os pre-requisitos sobre integração em espaços de Banach e sobre teoria espectral podem ser vistos em (3), (4) e (5)

Usamos as notas de seminário sobre o artigo [1] feitas por R.L. Andrade e H.B. Ribeiro no IMPA em 1970.

Ao prof. Waldyr Muniz de Oliva que sugeriu este trabalho, que me orientou fazendo numerosas sugestões e possibilitou minha estadia no IMPA no verão deste ano ,

ao prof. Jorge Sotomayer que acompanhou de perto o desenvolvimento deste trabalho colaborando com idéias valiosas ,
os meus agradecimentos .

Elvia Muniz Salgueiro

INDICE

INTRODUÇÃO

CAP. I - PONTOS FIXOS HIPERBÓLICOS

- §1. Complexificação de um espaço vetorial
- §2. Teorema da decomposição
- §3. Operadores hiperbólicos
- §4. Alguns exemplos de operadores hiperbólicos

CAP. II - TEOREMA DE HARTMAN

- §1. Estrutura local dos pontos fixos hiperbólicos
- §2. Estabilidade estrutural

CAP. III - APLICAÇÕES

A- Caso dos fluxos -

B- Caso de funções periódicas normalmente hiperbólicas

APENDICE

BIBLIOGRAFIA

CAPÍTULO I-PONTOS FIXOS HIPERBÓLICOS

A noção original de operador hiperbólico num espaço de Banach complexo é que seu espectro não intercepta o círculo unitário. Daremos outra definição que permite ao leitor chegar rapidamente aos resultados principais deste trabalho conhecendo pouca coisa sobre teoria espectral. Entretanto, usualmente se caracteriza operadores hiperbólicos olhando para seu espectro.

Estenderemos a noção de operador hiperbólico para espaço de Banach real pois são estudados sistemas dinâmicos em variedades sobre tais espaços.

§1. Complexificação de um espaço vetorial real

Seja E um espaço vetorial real.

Chamamos de E^+ o conjunto dos pares ordenados de elementos de E .

Definimos em E^+ uma adição: $(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$ e uma multiplicação por complexos: $(a+bi)(x, y) = (ax-by, bx+ay)$.

E^+ é um espaço vetorial com essas operações e é uma extensão de E no seguinte sentido: identificando $(x, 0) \in E^+$ com $x \in E$ e considerando E^+ como espaço vetorial real, E é subespaço de E^+ .

DEFINIÇÃO: E^+ é chamado o complexificado de E .

Identificamos (x, y) com $x+iy$. ~~Note-se que se E é espaço vetorial complexo, então, E^+ se identifica com E .~~

É fácil ver que se $(x_i)_{i \in I}$ é uma base de E , então, feitas as devidas identificações, (x_i) é base de E^+ .

ⓐ Seja $\| \cdot \|$ uma norma em E . Definimos em E^+ : $\| (x, y) \| = \sup \{ \| ax+by \| : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a^2 + b^2 = 1 \}$ uma norma: 1) $\| (x, y') \| > 0$;

$\|(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$; 2) $\|(a+bi)(x,y)\| = \sup_{\|u+iv\|=1} \|(au+bv)x + (a\beta - \alpha b)y\| = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sup_{\|u+iv\|=1} \|ux+vy\|$

e vê-se facilmente que 3) $\|(x,y)+(x',y')\| \leq \|(x,y)\| + \|(x',y')\|$. Ob-

serve-se que essa norma é uma extensão da norma de E pois

$\|(x,0)\| = \|x\|$. Com essa norma E^+ será espaço de Banach se E o for.

Seja $L \in L(E)$. Define-se $L^+ \in L(E^+)$ como $L^+(x,y) = (Lx, Ly)$.

A continuidade vem de $\|L^+(x,y)\| \leq \|L\| \|(x,y)\|$.

§2. Teorema da decomposição

Neste parágrafo E será espaço de Banach complexo.

Considere-se $P \in L(E)$ tal que $P^2 = P$ (projeção). Teremos

$E = E_1 \oplus E_2$ onde $E_1 = \{x: Px = x\}$ e $E_2 = \{x: Px = 0\}$. Seja $L \in L(E)$ conhe-

cer a estrutura de L será mais simples se $L(E_1) \subset E_1$, $L(E_2) \subset E_2$

pois basta conhecer L em espaços "menores". É imediato que se $PL =$

LP , então, $L(E_1) \subset E_1$ e $L(E_2) \subset E_2$. Procuraremos, então, projeções P que comutem com L.

DEFINIÇÃO: Seja $L \in L(E)$. Chama-se espectro de L o conjunto $\Lambda(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bigcap_{n=1}^{\infty} (L - \lambda I)^{-n} \neq \emptyset\}$

EXEMPLOS: 1) Se dimensão de E é finita, $\Lambda(L)$ é o conjunto dos autovalores de L ; 2) Se $L \in L(l_1(\mathbb{N}))$ é dado por

$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, então, $\Lambda(L) = \{0\}$. Observe-se que 0 não é autovalor de L.

Admitiremos sem demonstrar as (ver [4])

PROPOSIÇÕES: Seja $L \in L(E)$

1) $\Lambda(L)$ é compacto

2) Se $E \neq \{0\}$, então, $\Lambda(L) \neq \emptyset$

3) A função $R : \mathbb{C} - \Lambda(L) \rightarrow L(E)$ dada por $Rz = (L - zI)^{-1}$ é analítica

4) Se L é bijetora, então, $\Lambda(L^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \Lambda(L)\}$

DEFINIÇÃO: Seja $E \neq \{0\}$. Chama-se raio espectral de $L \in L(E)$ o número real positivo $r(L) = \sup\{\|\lambda\| : \lambda \in \Lambda(L)\}$, ou, equivalentemente, $r(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L^n\|^{1/n}$. (ver [4])

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO: Seja $L \in L(E)$ e $c: [0,1] \rightarrow C - \Lambda(L)$ uma curva contínua, fechada, simples e retificável. Seja $P = \frac{1}{2\pi i} \int_c R_z dz$. Então, 1) P é uma projeção ($P^2 = P$); 2) os subespaços fechados de E , $E_s = \{x \in E : Px = x\}$ e $E_u = \{x : Px = 0\}$ são invariantes por L e $E = E_s \oplus E_u$; 3) o espectro de $L|_{E_s}$ coincide com a parte σ de $\Lambda(L)$ contida no interior de c e o $\Lambda(L|_{E_u})$ coincide com a parte $\bar{\sigma}$ de $\Lambda(L)$ contida no exterior de c .

PROVA: Seja c' a fronteira de uma reunião finita de bolas abertas com centros em pontos de σ e raio $\frac{d}{2}$, onde $0 < d = d(\sigma, c)$, que recobre σ . Tem-se $\int_c R_z dz = \int_{c'} R_z dz$; $P^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_c \int_{c'} R_z R_{z'} dz dz' = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c'} \int_c \frac{R_z - R_{z'}}{z - z'} dz dz'$ pois $\frac{R_z - R_{z'}}{z - z'} = (L - zI) \cdot (L - z'I) = I$ desde que $(L - z'I)(L - zI) = (L - zI)(L - z'I)$;

$$P^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_c R_z dz \int_{c'} \frac{1}{z - z'} dz' = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c'} R_{z'} dz' \int_c \frac{1}{z - z'} dz.$$

Para toda $T \in L(E) \rightarrow C$ linear contínua tem-se

$$T\left(\int_{c'} \frac{1}{z - z'} dz'\right) = \int_{c'} \frac{T(I)}{z - z'} dz' = 0 \text{ para } z \text{ no exterior de } c', \text{ e,}$$

portanto, $\int_{c'} \frac{1}{z - z'} dz' = 0$ (consequência do teo. de Hahn-Banach).

Temos também que $\int_c \frac{1}{z - z'} dz = 2\pi i I$ para z' no interior de c . Logo,

$P^2 = P$. Como $P \in L(E)$, E_s e E_u são fechados. Além disso, todo $x \in E$ se escreve $x = (x - Px) + Px$ onde $x - Px \in E_u$, $Px \in E_s$ e $E_s \cap E_u = \{0\}$;

logo $E = E_s \oplus E_u$. Colocaremos em E_s e E_u a norma induzida da de E e

em $E_s \oplus E_u$ a norma da soma. A identidade $I: E, \| \cdot \| + \| \cdot \| \rightarrow E, \| \cdot \|$

é contínua porque $\|x\| = \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ e o teorema da aplicação

aberta garante a continuidade da inversa; ou seja, a soma direta

é topológica. Como para todo $z \in C - \Lambda(L)$, $LRz = RzL$ segue que P comuta com L e que E_s e E_u são L -invariantes. Com pouco trabalho vê-se que $\Lambda(L) = \Lambda(L/E_s) \cup \Lambda(L/E_u)$. Mostraremos que $\Lambda(L/E_s)$ está contido no interior de c e que $\Lambda(L/E_u)$ está no exterior de c ; com isso ficará mostrado 3). Seja ζ do exterior de c :

$$(L - \zeta I) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{Rz}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{Rz}{z - \zeta} dz \cdot (L - \zeta I) = \frac{1}{2\pi i} \int_c Rz dz = -P$$

pois $(L - \zeta I)Rz = (L - \zeta I)Rz + (\zeta - \zeta)Rz = I + (\zeta - \zeta)Rz$. Logo $(L - \zeta I)/E_s$ é bijetora e $\Lambda(L/E_s)$ está contido no interior de c . Análogamente mostra-se que para todo ζ do interior de c , $(L - \zeta I)/E_u$ é bijetora e, portanto, $\Lambda(L/E_u)$ está contido no exterior de c .

Observe-se que se $\Lambda(L)$ está contido no interior de c , $\Lambda(L/E_u) = \emptyset$, $E_u = \{0\}$ e, portanto, $P = I$. Se $\Lambda(L)$ está contido no exterior de c , $\Lambda(L/E_s) = \emptyset$, $E_s = \{0\}$ e, portanto, $P = 0$.

§3) Operador hiperbólico

DEFINIÇÃO: Seja $E, \|\cdot\|$ um espaço de Banach real ou complexo. Um operador inversível $L \in L(E)$ é dito HIPERBÓLICO se existirem subespaços E_s e E_u de E , L -invariantes e uma norma $\|\cdot\|_2$ em E equivalente a norma $\|\cdot\|$ tais que $E = E_s \oplus E_u$, $\|L/E_s\|_2 < 1$ e $\|L^{-1}/E_u\|_2 < 1$.

Seja $E, \|\cdot\|$ um espaço de Banach complexo.

PROPOSIÇÃO I-3-1: Seja $L \in L(E)$ inversível

- 1) Se L é hiperbólico, então, $\Lambda(L) \cap S^1 = \emptyset$.
- 2) Se $\Lambda(L) \cap S^1 = \emptyset$, então, existe uma norma $\|\cdot\|_2$ equivalente à norma $\|\cdot\|$ tal que, se E_s e E_u são dados pelo teorema da decom-

posição tomando-se a curva c como S^1 , tem-se $\|L/E_S\|_2 < 1$ e $\|L^{-1}/E_u\|_2 < 1$.

PROVA: 1) Tem-se $r(L_S) < \|L_S\|_2 < 1$ e $r(L_u^{-1}) < \|L_u^{-1}\|_2 < 1$ (e, portanto, $r(L_u) > 1$). Disso e da igualdade:

$$\Lambda(L) = \Lambda(L_S) \cup \Lambda(L_u) \text{ tem-se o resultado. } (*)$$

Para demonstrar 2) considere-se E_S e E_u dados pelo teorema da decomposição tomando a curva c como S^1 e os dois lemas seguintes:

Lema 1: Para $0 < a < 1$ conveniente $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \|L_S^n\| < \infty$ (1)

Prova: Considere-se a tal que $r(L_S) < a < 1$; existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|L_S^p\| \frac{1}{p} < a$ e, então, $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-np} \|L_S^{pn}\| < \infty$. Seja $M = \max \{ a^{-k} \|L_S^k\|, k=0,1,\dots,p-1 \}$. Cada termo da série (1) é da forma: $t = a^{-np-k} \|L_S^{np+k}\|$. Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \|L_S^n\| < \sum_{n=0}^{\infty} pMa^{-pn} \|L_S^{pn}\| < \infty$.

Lema 2: Para $0 < b < 1$ conveniente, $\sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} \|L_u^{-n}\| < \infty$

Prova: Considere-se b tal que $r(L_u^{-1}) < b < 1$; existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\|L_u^{-q}\| \frac{1}{q} < b$. A série $\sum_{n=0}^{\infty} b^{-qn} \|L_u^{-qn}\|$ converge e o resultado segue análogamente ao lema 1.

Considere-se em E_S : $\|v\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \|L_S^n(v)\|$. Temos $\|v\| \leq \|v\|_2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \|L_S^n\| \right) \|v\|$ e $\|L_S(v)\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \|L_S^{n+1}(v)\| \leq a \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \|L_S^n(v)\|$. Logo $\|\cdot\|_2$ é equivalente a $\|\cdot\|$ e $\|L_S\|_2 \leq a < 1$. Em E_u defino $\|u\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} \|L_u^{-n}(u)\|$ e tem-se $\|\cdot\|_2$ equivalente a $\|\cdot\|$ e $\|L_u^{-1}\|_2 \leq b < 1$. Se $x \in E$, x se escreve de uma única forma como soma de $u \in E_u$ e $v \in E_S$. Defino $\|x\|_2 = \|u+v\|_2 = \|u\|_2 + \|v\|_2$. A identidade $I: E, \|\cdot\|_2 \rightarrow E, \|\cdot\|$ é contínua (pois $\|u+v\|_2 = \|u\|_2 + \|v\|_2 \geq \|u\| + \|v\| \geq \|u+v\|$), o teorema da aplicação aberta garante a continuidade da inversa e temos a equivalência das normas em E .

Observe-se que se L é hiperbólico os subespaços E_S e E_u

(*) Notação: $L_S = L|_{E_S}$, $L_u = L|_{E_u}$

podem ser considerados como na parte 2) da proposição. Agora veremos que essa é a única maneira :

PROPOSIÇÃO I-3-2: Seja $L \in L(E)$ hiperbólico e E_s, E_u obtidos na proposição anterior. Se existirem subespaços E_1, E_2 L -invariantes e uma norma $\| \cdot \|_1$ equivalente a $\| \cdot \|$ tais que $E = E_1 \oplus E_2$, $\|L_1\|_1 < 1$ e $\|L_2^{-1}\|_1 < 1$, então, $E_1 = E_s$ e $E_2 = E_u$.

PROVA: Como $\bigwedge \{L_1\}$ está contido no interior de S^1 e a restrição da projeção $P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} (L - zI)^{-1} dz$ ao subespaço E_1 é a projeção de E_1 , o teorema da decomposição garante que para $x \in E_1$ tem-se $P(x) = x$. Como $E_s = \{x \in E : P(x) = x\}$ segue que $E_1 \subset E_s$. Analogamente, mostra-se que $E_2 \subset E_u$ e segue que $E_1 = E_s$ e $E_2 = E_u$.

Já vimos que, para espaço de Banach complexo, ser hiperbólico é equivalente a ter o espectro disjunto do círculo unitário. Veremos a seguir que isso se repete para espaço de Banach real definindo espectro de maneira óbvia.

Seja $E, \| \cdot \|$ um espaço de Banach real ou complexo.

PROPOSIÇÃO I-3-3: Se $L \in L(E)$, então, L é hiperbólico se e só se L^+ é hiperbólico.

PROVA: É claro que L é inversível se e só se L^+ é inversível.

Seja $E = E_s \oplus E_u$ dada pela definição de L hiperbólico. Consideramos E_s^+ e E_u^+ , é fácil de ver que $E^+ = E_s^+ \oplus E_u^+$, que L^+ deixa E_s^+ e E_u^+ invariantes e que $\|L_s^+\|_2 \leq \|L_s\|_2 < 1$, $\|(L_u^+)^{-1}\|_2 \leq \|L_u^{-1}\|_2 < 1$.

Seja $E^+ = (E^+)_s \oplus (E^+)_u$ e $\| \cdot \|_2$ em E^+ dados pela definição de L^+ hiperbólico. O conjunto :

$E_s = \left\{ (x_s, 0) / \exists y_s \in E_s^+ : (x_s, y_s) \in (E^+)_s \right\}$ está contido em $(E^+)_s$.

pois $(E^+)_{\mathbb{R}} = \{x \in E^+ : Px = x\}$ com $P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} (L^+ - zI^+)^{-1} dz$
e $\Pi: (E^+)_{\mathbb{R}} \oplus (E^+)_{\mathbb{U}} \longrightarrow (E^+)_{\mathbb{R}} \oplus (E^+)_{\mathbb{U}}$ dado por $\Pi(x,y) = (x,0)$
é tal que

$$\Pi(L^+ - zI^+) = (L^+ - zI^+)\Pi \text{ e, então, } \Pi P = P\Pi.$$

Analogamente, $E_{\mathbb{U}} = \{(x_{\mathbb{U}}, 0) \in E^+ / \exists y_{\mathbb{U}} \in \{E^+\}_{\mathbb{U}}, (x_{\mathbb{U}}, y_{\mathbb{U}}) \in (E^+)_{\mathbb{U}}\}$
está contido em $(E^+)_{\mathbb{U}}$. Os subespaços $E_{\mathbb{R}}, E_{\mathbb{U}}$ identificados
com subespaços de E são invariantes por L , $E = E_{\mathbb{R}} \oplus E_{\mathbb{U}}$ e, colo-
cando em E a norma $\|\cdot\|_2$ induzida da norma $\|\cdot\|_2$ de E^+ , tem-se
 $\|L/E_{\mathbb{R}}\|_2 < 1$ e $\|L^{-1}/E_{\mathbb{U}}\|_2 < 1$.

DEFINIÇÃO : Seja $L \in L(E)$. Chama-se espectro de L o con-
junto espectro de L^+ . Indicaremos $\Lambda(L)$.

Observe-se que se E é complexo, então, a definição é a
mesma.

Das proposições I-3-1 e I-3-3 segue a :

PROPOSIÇÃO I-3-4 : Se E é real ou complexo e $L \in L(E)$ é in-
versível, então, L é hiperbólico se e só se $\Lambda(L) \cap S^1 = \emptyset$

§4. Alguns exemplos de operadores hiperbólicos

1) Seja a equação diferencial dada por $\dot{x} = Tx$ onde
 $T \in L(\mathbb{R}^n)$ e $T_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T_t(x)$ é o valor da solução
que no instante 0 passa por x , no instante t . Sabe-se que
 $T_t(x) = e^{tT}(x)$ e $\Lambda(e^{tT}) = \{e^{\lambda t} : \lambda \in \Lambda(T)\}$ (ver apêndice). Se
 $\Lambda(T)$ não corta o eixo imaginário, então, para $t \neq 0$, $\Lambda(e^{tT})$
não corta S^1 e T_t é hiperbólico.

2) Seja M^n uma variedade C^∞ , compacta, sem bordo. Os difeomorfismos de Anosov em M nos fornecem exemplos de operadores hiperbólicos, pois $f:M \rightarrow M$, difeomorfismo de classe C^1 , é de Anosov se e só se $f^* \in L(X^0(M))$ é hiperbólico onde $X^0(M)$ é o espaço de Banach dos campos contínuos de M e

$$f^*(v)(p) = df_{f^{-1}(p)} v(f^{-1}(p))$$

(Ver trabalho de A. Verjovsky - Semin. S. Dinâmica, I-IMPAN).

Daremos agora um exemplo de difeomorfismo de Anosov dos mais simples:

3) O difeomorfismo induzido no toro T^2 por uma aplicação linear f dada por uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de coeficientes inteiros, de determinante $\neq 1$ e hiperbólica. f terá um ponto fixo p correspondente a origem de R^2 que é ponto fixo hiperbólico.

CAPÍTULO II - O TEOREMA DE HARTMAN

No que segue E será um espaço de Banach real ou complexo.

§1. Estrutura local dos pontos fixos hiperbólicos

Consideremos um difeomorfismo f definido num aberto Ω de E com valores em E . O conjunto $\{f^n(x) \in E : n \in \mathbb{Z} \text{ e } f^{n-1}(x) \in \Omega\}$ é chamado órbita de x determinada por f . Neste parágrafo veremos que, para um difeomorfismo f de classe C^1 com um ponto fixo hiperbólico ($f(a) = a$ e $f'(a)$ hiperbólico), as órbitas determinadas por f são topologicamente equivalentes às órbitas determinadas por $f'(a)$ numa vizinhança de a . O significado dessa equivalência ficará claro no contexto.

$C_b^0(E, F)$ indicará o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas do espaço de Banach E no espaço de Banach F , com a norma do sup. Sendo $E = F$, indicaremos $C_b^0(E)$.

Dado $L \in L(E)$ hiperbólico, consideraremos em E uma norma $\|\cdot\|_2$ que indicaremos por $\|\cdot\|$. Tem-se, facilmente, a soma topológica $C_b^0(E) = C_b^0(E, E_s) \oplus C_b^0(E, E_u)$. Usaremos em $C_b^0(E)$ a norma da soma.

PROPOSIÇÃO II-1 : A aplicação $\mathcal{L} \in L(C_b^0(E))$ dada por $\mathcal{L}v = Lv - vg$, onde $L \in L(E)$ é hiperbólico e g é um homeomorfismo de E sobre E , é inversível e $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq M$ onde M não depende do homeomorfismo g .

PROVA : É fácil verificar que $\mathcal{L} \in L(C_b^0(E))$.

Consideremos $T, S, R \in L(C_b^0(E))$ dadas por :

$$Tv = L^{-1}v$$

$$Sv = vg^{-1}$$

$$Rv = Lvg^{-1}$$

que são inversíveis com inversas :

$$T^{-1}v = Lv$$

$$S^{-1}v = vg$$

$$R^{-1}v = L^{-1}vg$$

Tem-se que :

$$TL - I = -R^{-1}$$

$$SL + I = R$$

Chamaremos de $T_u, \mathcal{L}_u, S_u, R_u, I_u$ e $T_s, \mathcal{L}_s, S_s, R_s, I_s$ as restrições de $T, \mathcal{L}, S, R, I$ a $C_b^0(E, E_u)$ e a $C_b^0(E, E_s)$ respectivamente. Como E_s e E_u são L -invariantes segue que

$C_b^0(E, E_s)$ e $C_b^0(E, E_u)$ são $\mathcal{L}$ -invariantes e que

$$(1) \begin{cases} T_u \mathcal{L}_u - I_u = -R_u^{-1} \\ S_s \mathcal{L}_s + I_s = R_s \end{cases}$$

Como $T_u \mathcal{L}_u \in L(C_b^0(E, E_u))$, $S_s \mathcal{L}_s \in L(C_b^0(E, E_s))$ e

$$\|T_u \mathcal{L}_u - I_u\| = \|R_u^{-1}\| \leq \|L_u^{-1}\| \leq a < 1,$$

$$\|S_s \mathcal{L}_s + I_s\| = \|R_s\| \leq \|L_s\| \leq a < 1 \quad \text{onde } a = \max\{\|L_s\|, \|L_u^{-1}\|\}$$

segue que $T_u \mathcal{L}_u$ e $S_s \mathcal{L}_s$ são inversíveis (ver [4], pag 315)

e, portanto, $\mathcal{L}_u$ e $\mathcal{L}_s$ também são inversíveis. Cada $w \in C_b^0(E)$

se escreve de maneira única como soma de $u \in C_b^0(E, E_u)$ e

$v \in C_b^0(E, E_s)$; então, $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}_s(v) + \mathcal{L}_u(u)$. Vê-se, então, que

$\mathcal{L}$ é inversível e $\mathcal{L}^{-1}(u + v) = \mathcal{L}_s^{-1}(v) + \mathcal{L}_u^{-1}(u)$. De (1) tem-se

$$T_u = \mathcal{L}_u^{-1} - R_u^{-1} \mathcal{L}_u^{-1} \text{ e } 1 \geq \|T_u\| \geq \|\mathcal{L}_u^{-1}\| - \|R_u^{-1} \mathcal{L}_u^{-1}\| \geq \|\mathcal{L}_u^{-1}\| - \|R_u^{-1}\| \|\mathcal{L}_u^{-1}\| \geq \|\mathcal{L}_u^{-1}\| - a \|\mathcal{L}_u^{-1}\| = \|\mathcal{L}_u^{-1}\| (1-a), \text{ isto é, } \|\mathcal{L}_u^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}.$$

$$\text{De mesma forma, } S_s = R_s \mathcal{L}_s^{-1} - \mathcal{L}_s^{-1} \text{ e } 1 \geq \|R_s \mathcal{L}_s^{-1} - \mathcal{L}_s^{-1}\| \geq \|\mathcal{L}_s^{-1}\| - \|R_s \mathcal{L}_s^{-1}\| \geq$$

$\|L_s^{-1}\| - \|R_s\|L_s^{-1}\| > \|L_s^{-1}\| (1-a) + \|L_s^{-1}\| < \frac{1}{1-a}$. Como,

$$\|L(u+v)\| = \|L_s(v) + L_u(u)\| < \frac{1}{1-a} (\|u\| + \|v\|) = \frac{1}{1-a} \|u+v\|,$$

tem-se $\|L\| < \frac{1}{1-a}$. Note-se que a não depende do homeomorfismo g .

COROLÁRIO II-1-1 : Se $L \in L(E)$ é hiperbólico e se $\phi \in C_b^0(E)$ tem constante de Lipschitz suficientemente pequena, então, as equações :

a) $vL - Lv = \phi(I+v)$

b) $Lv - v(L+\phi) = \phi$

c) $Lv - v(L+\phi) = \phi - \phi(I+v)$, têm solução única em $C_b^0(E)$.

PROVA : Seja $\{ \}$ tal que $\{M < 1$ (M da propos.) tal que $L+\phi$ seja homeo. de E sobre E para toda ϕ com constante de Lipschitz $< \{$ (ver demonstração de teor. da perturbação de um isomorfismo [7]) O único ponto fixo da contração $\mathcal{L}: C_b^0(E) \rightarrow C_b^0(E)$ dada por $u(v) = \mathcal{L}^{-1}(\phi(I+v))$ onde $\mathcal{L}v = Lv - vL$ é a solução de a). A única solução de b) é $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ onde $\mathcal{L}v = Lv - v(L+\phi)$; $u(v) = \mathcal{L}^{-1}(\phi - \phi(I+v))$ é uma contração e seu único ponto fixo é a solução de c).

Seja $\mathcal{F} = \{f: E \rightarrow E, \text{ contínuas}, \|f-I\| = \sup_{x \in E} \|f(x) - x\| < \infty$. Note-se que $f \in \mathcal{F}$ se e só se existe $v \in C_b^0(E)$ tal que $f = I+v$.

COROLÁRIO II-1-2: Nas hipóteses de corol. anterior as equações a) $yL = (L+\phi)y$

b) $Ly = y(L+\phi)$

c) $y(L+\phi) = (L+\phi)y$, têm solução única em $\mathcal{F}$. Observe-se que a solução de c) é I .

PROVA : Colocando $y = I+v$ essas equações se reduzem às do corolário anterior.

COROLÁRIO II-1-3 : As equações a) e b) do corolário anterior têm como solução homeomorfismos h e k , e além disso, $h=k^{-1}$.

PROVA : Temos

$$k h L = k(L + \phi)h = L k h \quad e$$

$$h L k = h k(L + \phi) = h k(L + \phi) .$$

Pela parte c) do corolário anterior, $h k = k h = I$.

Resumindo o que acabamos de ver :

PROPOSIÇÃO II-2 : Se $L \in L(E)$ é hiperbólico, então, existe $\delta > 0$ tal que para cada $\phi \in C_b^0(E)$ com constante de Lipschitz $\leq \delta$ existe um único homeomorfismo h de E sobre E tal que

$$\|h - I\| < \infty \quad e \quad h L = (L + \phi)h .$$

PROPOSIÇÃO II-3 : Seja $V(0) \subset E$ uma vizinhança da origem. Se $\phi: V(0) \rightarrow E$ tem constante de Lipschitz $\leq \xi$, então, existe uma vizinhança da origem $U(0) \subset V(0)$ e uma $\bar{\phi}: E \xrightarrow{\text{limitada}} E$ tais que $\bar{\phi}|_{U(0)} = \phi|_{U(0)}$ e $\bar{\phi}$ tem constante de Lipschitz $\leq \xi k$, onde k não depende de ϕ .

PROVA : 1º caso : $\phi(0) = 0$

Considere-se uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, $\alpha(t) = 1$ se $|t| < \frac{1}{2}$ e $\alpha(t) = 0$ se $|t| > 1$. Seja

$M = \sup \{ |\alpha'(t)| : t \in \mathbb{R} \}$. Seja $B(0, r)$ uma bola aberta de raio $r > 0$ tal que $\bar{B}(0, r) \subset V(0)$. Definimos $\bar{\phi}: E \rightarrow E$ como

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \phi(x) & \text{se } x \in V(0) \\ 0 & \text{se } x \notin V(0) \end{cases}$$

Ou seja, colocando $\phi(x) = 0$ se $x \notin V(0)$, definimos

$$\bar{\phi}(x) = \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \phi(x). \text{ Temos } \|\bar{\phi}(x) - \bar{\phi}(y)\| \leq$$

$$\leq \left\| \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \phi(x) - \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \phi(y) \right\| + \left\| \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \phi(y) - \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right) \phi(y) \right\| \leq$$

$$\leq \left| \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \right| \|\phi(x) - \phi(y)\| + \left| \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) - \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right) \right| \|\phi(y)\|$$

Se $x, y \in \bar{B}(0, r)$, $\|\bar{\phi}(x) - \bar{\phi}(y)\| = 0$. Se $x \notin \bar{B}(0, r)$ e

$$y \in \bar{B}(0, r), \|\bar{\phi}(x) - \bar{\phi}(y)\| \leq \left| \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) - \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right) \right| \|\phi(y)\| \leq$$

$$\leq \frac{M}{r} \|x-y\| \varepsilon \|y\| \leq M \varepsilon \|x-y\| \leq (M+1) \varepsilon \|x-y\|. \text{ Se } x, y \in \bar{B}(0, r),$$

$$\|\bar{\phi}(x) - \bar{\phi}(y)\| \leq \varepsilon \|x-y\| + \frac{M}{r} \|x-y\| \varepsilon \|y\| \leq \varepsilon \|x-y\| + M \varepsilon \|x-y\| =$$

$= \varepsilon (1+M) \|x-y\|$. As outras condições são imediatamente verificadas.

2º caso : $\phi(0) = a \neq 0$.

Basta considerar $\psi(x) = \phi(x) - a$.

COROLÁRIO II-3-1 : Seja $\phi : V(0) \rightarrow E$ de classe C^1 tal que $\phi'(0) = 0$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança $U(0) \subset V(0)$ tal que $\phi|_{U(0)}$ pode ser prolongada a E , a extensão sendo limitada com constante de Lipschitz $\leq \varepsilon$.

PROVA : A continuidade da derivada garante a existência de $B(0, \rho(\varepsilon))$ onde $\|\phi'(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{k}$ (k da proposição). Pelo teorema do valor médio, em $B(0, \rho)$, ϕ tem constante de Lipschitz $\leq \frac{\varepsilon}{k}$.

Agora basta aplicar a proposição.

Observe-se que se $\phi'(0) \neq 0$, não vale esse corolário. Por exemplo tome $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = x$.

COROLÁRIO II-3-2 : Seja $L \in L(E)$. Dado $\xi > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $A \in B(L, \delta) \subset L(E)$ existe uma vizinhança $U(0) \subset E$ e $\bar{\phi} : E \rightarrow E$ limitada, com constante de Lipschitz $\leq \xi$ e $(L + \bar{\phi})/U(0) = A/U(0)$.

PROVA : Basta tomar $\xi = \frac{\xi}{k}$ (k da proposição) e aplicar a proposição à $\bar{\phi} = A - L$.

TEOREMA II -1 : Seja $f: V(0) \subset E \rightarrow E$ um difeomorfismo de classe C^1 tal que 0 é um ponto fixo hiperbólico e seja $L=f'(0)$. Então, existe um homeomorfismo $h:E \rightarrow E$ e uma vizinhança de 0 $U(0) \subset V(0)$ onde $hf = Lh$.

PROVA : Numa vizinhança de $0 \in E$, que posso supor $V(0)$, f se escreve como $f(x) = L(x) + \bar{\phi}(x)$ onde $\bar{\phi}$ está nas condições do corolário II-3-1. Então, existe $U(0) \subset V(0)$ e $\bar{\phi}:E \rightarrow E$ extensão limitada de $\bar{\phi}/U(0)$ com constante de Lipschitz $\leq \rho$ (ρ da proposição II-2). A proposição II-2 fornece um homeomorfismo $h:E \rightarrow E$, $h = I + v$ com $v \in C_D^0(E)$ tal que $h(L + \bar{\phi}) = Lh$. Temos, portanto, $hf = Lh$ em $U(0)$.

Podemos enunciar o teorema colocando a como ponto fixo hiperbólico de f . Basta considerar $g = T^{-1}fT$, onde $T(x) = x + a$, que está nas condições do teorema. Se $k:E \rightarrow E$ é o homeomorfismo tal que $kg = g'(0)k$ numa $U(0)$, tomando $h = kT^{-1}$ temos $hf = f'(a)h$ em $a + U(0)$ pois $f'(a) = g'(0)$.

Quando estudarmos o caso dos fluxos, ficará claro, nos contra-exemplos, que $f'(0)$ tem que ser hiperbólico e que essa estabilidade é só local.

§2. Estabilidade estrutural

Consideraremos o espaço de Banach $C_b^1(V(0), E)$ das funções de classe C^1 , limitadas de $V(0) \subset E$ em E com derivada limitada com a norma $\|f\| = \sup \left\{ \max \left\{ \|f(x)\|, \|f'(x)\| \right\} : x \in V(0) \right\}$

TEOREMA II-2 : Seja f nas condições do teorema II-1 tal que $f \in C_b^1(V(0), E)$. Existe uma vizinhança de f , $N_1(f)$, $N_1(f) \subset C_b^1(V(0), E)$ tal que para cada $g \in N_1(f)$, existe um homeomorfismo $h: E \rightarrow E$ tal que $gh = hf$ em alguma vizinhança de $0 \in E$.

Para a demonstração precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 1 : Seja f nas condições do teorema. Existem uma vizinhança $N(f) \subset C_b^1(V(0), E)$ de f , uma vizinhança $U(0)$ de $0 \in E$ e uma função contínua $\gamma: N(f) \rightarrow U(0)$ tal que $\gamma(g)$ é o único ponto fixo de g , em $U(0)$.

Prova: Seja $\Psi: C_b^1(V(0), E) \times V(0) \rightarrow E$ dada por $\Psi(g, x) = \gamma(g)(x) - x$. Tem-se $D_1 \Psi(g, x_0)(h) = h(x_0)$ e $D_2 \Psi(g, x_0) = g'(x_0) - I$, que são aplicações contínuas de $C_b^1(V(0), E)$ em E e de $V(0)$ em E respectivamente. Logo Ψ é de classe C^1 num aberto de $C_b^1(V, E) \times E$. Além disso $\Psi(f, 0) = 0$ e $D_2 \Psi(f, 0) = f'(0) - I$ é inversível (desde que $f'(0)$ é hiperbólico). O teorema da função implícita garante o resultado.

Lema 2 : O conjunto dos operadores hiperbólicos de $L(E)$ é aberto em $L(E)$.

Prova : O conjunto dos elementos inversíveis de $L(E)$ é aberto em $L(E)$ (ver [4] pag 317). Basta mostrar que o conjunto dos elementos de $L(E)$ cujo espectro intercepta o círculo unitário S^1 é fechado. Seja $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $L(E)$ tais que $\bigcap (L_n) \cap S^1 \neq \emptyset$ e que convergem para $L \in L(E)$; Para ca

da $n \in \mathbb{N}$, considere-se $u_n \in S^1$ tal que não existe $(L_n - u_n I)^{-1}$.

Como S^1 é compacto, existe uma subsequência (u_{n_k}) que converge para u para $L - uI$. Pela primeira observação feita nesta prova, segue que não existe $(L - uI)^{-1}$ e $\Lambda(L) \cap S^1 \neq \emptyset$.

Esses dois lemas garantem a existência de uma vizinhança de f , $N_1(f)$, e uma vizinhança U_1 de $0 \in E$ tais que toda $g \in N_1(f)$ possui um único ponto fixo em U_1 que é hiperbólico. Isso ficará mais claro na demonstração do teorema.

Lema 3: Se $L \in L(E)$ é hiperbólico, então, existe $\rho > 0$ tal que para cada $A \in B(L, \rho) \subset L(E)$ existe um homeomorfismo $h: E \rightarrow E$ tal que $hA = Lh$ numa vizinhança de $0 \in E$.

Prova: A constante de Lipschitz de $\phi = A - L$ é $\leq \rho$. Pela proposição II-3 obtemos $\tilde{\phi} \in C_b^0(E)$ com constante de Lipschitz $\leq \rho k$. Para $\rho > 0$ conveniente existe um homeomorfismo $h: E \rightarrow E$ tal que $h(L + \tilde{\phi}) = Lh$ (propos. II-2) e, localmente, $hA = Lh$.

PROVA DO TEOREMA II-2 :

Sejam $0 < \beta < \rho$ (ρ do lema 3) tal que $B(L, \beta)$ esteja contida no conjunto dos operadores hiperbólicos e

$$U_1 = \left\{ x \in U : \|f'(x) - L\| < \frac{\beta}{2} \right\} \text{ onde } U \text{ é dada pelo lema 1.}$$

Considere-se a vizinhança de f dada por

$N_1(f) = N(f) \cap \gamma^{-1}(U_1) \cap B(f, \frac{\beta}{2})$ onde $N(f)$ e γ são dados no lema 1. Se $g \in N_1(f)$, g é um difeomorfismo de classe C^1 num aberto contido em U contendo um ponto fixo a de g e $g'(a)$ é hiperbólico ($\|g'(a) - L\| \leq \|g'(a) - f'(a)\| + \|f'(a) - L\| < \beta$). Pela observação feita no teorema II-1 segue a existência de um homeomorfismo $\psi: E \rightarrow E$ tal que $\psi T^{-1}g = g'(a)\psi T^{-1}$ numa vizinhança de a . Existem, ainda, homeomorfismos $k, h: E \rightarrow E$ tais que

⊗ para $u \in S^1$. Tem-se que $L_{n_k} - u_{n_k} I$ converge

$g'(a)k = kl$ e $fl = ll$ numa vizinhança de $0 \in E$. Logo

$$\varphi_T^{-1}g = klk^{-1}\varphi_T^{-1} = kl^{-1}flk^{-1}\varphi_T^{-1}, \text{ ou seja,}$$

$$lk^{-1}\varphi_T^{-1}g = flk^{-1}\varphi_T^{-1} \text{ numa vizinhança de } 0 \in E.$$

CAPÍTULO III - APLICAÇÕES

A - CASO DOS FLUXOS -

Seja $X : V(0) \subset E \rightarrow E$ um campo para o qual se tenha existência e unicidade de soluções e continuidade para as condições iniciais. Para cada par $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ tal que se tenha $\varphi(t, x_0)$ (valor da solução, que no instante $t = 0$ passa em x_0 , no instante t) existe uma vizinhança de x_0 , $V_t(x_0)$, tal que para todo $x \in V_t(x_0)$ tem-se $\varphi(t, x)$. A função $X_t : V_t(x_0) \rightarrow E$ dada por $X_t(x) = \varphi(t, x)$ é chamada fluxo induzido por X no instante t . Observamos que se x_0 é ponto crítico do campo X (isto é, $X(x_0) = 0$) temos fluxo para todo $t \in \mathbb{R}$. Para um campo $X : E \rightarrow E$ cujas soluções estejam definidas em toda a reta temos $X_t : E \rightarrow E$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A proposição que segue nos dá exemplos de campos cujos fluxos estão definidos em todo espaço E e para todo $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSIÇÃO III-1 : Se $X : E \rightarrow E$ tem constante de Lipschitz k , então, as soluções estão definidas em toda a reta.

PROVA: Dado $x_0 \in E$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, basta mostrar que a solução que no instante t_0 passa em x_0 está definida em qualquer intervalo $[a, b]$ contendo t_0 . Seja $A : C([a, b], E) \rightarrow C([a, b], E)$ dada por

$$A(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(y(s)) ds$$

Tem-se :

$$\|A(x)(t) - A(y)(t)\| \leq k \left| \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \right| \leq k \|x - y\| |t - t_0|$$

$$\begin{aligned}
\|A^2(x)(t) - A^2(x)(t)\| &\leq k \left| \int_{t_0}^t \|A(y)(s) - A(x)(s)\| ds \right| \leq \\
&\leq k^2 \left| \int_{t_0}^t \left| \int_{t_0}^s \|x(u) - y(u)\| du \right| ds \right| \leq \\
&\leq k^2 \|x-y\| \left| \int_{t_0}^t \left| \int_{t_0}^s du \right| ds \right| \leq \\
&\leq k^2 \|x-y\| \frac{|t-t_0|^2}{2!}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|A^n(y)(t) - A^n(x)(t)\| \leq k^n \|x-y\| \frac{|t-t_0|^n}{n!} \leq k^n \|x-y\| \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $\frac{(k(b-a))^n}{n!} \rightarrow 0$. Logo, dado $0 < c < 1$, existe

n_0 tal que $\frac{(k(b-a))^{n_0}}{n_0!} \leq c$. Tem-se :

$$\|A^{n_0}(y)(t) - A^{n_0}(x)(t)\| \leq c \|x-y\| \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Então, A^{n_0} é uma contração e existe $x \in C([a, b], E)$ tal que $A(x) = x$, x sendo a solução que em t_0 passa por x_0 definida em $[a, b]$.

DEFINIÇÃO : Seja $Y: V(0) \subset E \rightarrow E$ um campo de classe C^1 tal que $Y(0) = 0$ e $L = Y'(0)$. Diz-se que 0 é ponto crítico hiperbólico de Y se L_1 é um operador hiperbólico.

Para $L \in L(E)$ a série $e^{tL} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n$ é convergente,

$$L_t(x) = e^{tL}(x) \text{ e } \Lambda(e^L) = \{e^\lambda : \lambda \in \Lambda(L)\} \text{ (ver apêndice).}$$

Fica claro que se para algum t_0, L_{t_0} é hiperbólico, então, para todo $t \neq 0$, L_t é hiperbólico (observar que

$$\Lambda(I) = \{1\} \text{ e que } \Lambda(tL) = \{\lambda t : \lambda \in \Lambda(L)\} \text{).}$$

Notamos que num espaço de dimensão finita dizer que 0 é

ponto crítico hiperbólico de um campo Y é equivalente a dizer que sua parte linear $L = Y'(0)$ não tem nenhum auto valor no eixo imaginário.

PROPOSIÇÃO III-2 : Se $X: V(0) \subset E \rightarrow E$ é um campo de classe C^1 tal que $X(0) = 0$, então, para cada $t \in \mathbb{R}$, $X'_t(0) = L_t$ onde L_t é o fluxo induzido por $L = X'(0)$.

PROVA : Para cada $t \in \mathbb{R}$, X_t está definida numa vizinhança $U(0) \subset V(0)$ e se escreve

$$X_t(x) = x + \int_0^t X(X_s(x)) ds$$

Tem-se

$$X'_t(0) = I + \int_0^t X'(X_s(0)) X'_s(0) ds$$

$$X'_t(0) = I + \int_0^t L X'_s(0) ds$$

Para cada $x \in E$, a função $\psi(t, x) = X'_t(0)(x)$ é tal que

$$\psi(0, x) = x, \quad \frac{d}{dt} \psi(t, x) = L(X'_t(0))(x) = L(\psi(t, x)) \quad \text{e o re-}$$

sultado segue da unicidade de solução.

LEMA DE GRONWALD : Se $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, não negativa, $A \in \mathbb{R}$ e $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que para todo $t \in [a, b]$, então, $f(t) \leq A + \int_a^t \beta(s) f(s) ds$,
então, $f(t) \leq A \cdot e^{\int_a^t \beta(s) ds}$ para $t \in [a, b]$.

PROVA : Considere-se a sequência de elementos de $C([a, b], E)$
 $\alpha_0 = f, \quad \alpha_n = A + \int_a^t \beta(s) \alpha_{n-1}(s) ds.$

$$\begin{aligned} \text{Como } \|\alpha_n - \alpha_{n-1}\| &= \sup \left\{ \|\alpha_n(t) - \alpha_{n-1}(t)\| : t \in [a, b] \right\} \leq \\ &< \frac{(b-a)^{n-1} M^{n-1}}{(n-1)!} \|\alpha_1 - \alpha_0\| \quad \text{onde} \end{aligned}$$

$M = \sup \{ |\beta(s)| : s \in [a, b] \}$, segue que a série $\sum_1^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n-1})$ converge e a sequência (α_n) converge para $\alpha \in C([a, b], E)$, sendo $\alpha(t) = A + \int_a^t \beta(s) \alpha(s) ds$. Como α é solução de $\dot{y} = \beta(t)y$, segue que $\alpha(t) = A \cdot e^{\int_a^t \beta(s) ds}$. Tem-se $\alpha_0 \leq \alpha_1$ (por hipótese) e, por indução, $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$. Logo $\alpha_0 \leq \alpha$.

PROPOSIÇÃO III-3: Seja um campo $Y: V(0) \subset E \rightarrow E$ de classe C^1 tal que $Y(0) = 0$, $Y'(0) = L$ e $\xi > 0$. Existe um campo $X: E \rightarrow E$ tal que :

- a) $X = Y$ numa bola $B(0, \frac{\xi}{2})$ e $X = L$ fora de $B(0, r)$
- b) X tem constante de Lipschitz $k > 0$
- c) existe uma vizinhança da origem $U(0) \subset V(0)$ tal que o fluxo induzido por X é igual ao fluxo induzido por Y para todo $t \in [-2, 2]$

d) Seja $\phi_t = X_t - L_t$ onde L_t é o fluxo induzido por L . Existe $M > 0$ tal que para todo $t \in [-2, 2]$,

$$\|\phi_t\| = \sup \{ \|\phi_t(x)\| : x \in E \} \leq M$$

e, ainda, ϕ_t tem constante de Lipschitz $\leq \xi$ para $|t| \leq 2$.

PROVA : Seja $\phi \in C_b^0(E)$ com constante de Lipschitz $\leq \xi_1$ tal que $\phi = Y - L$ numa $B(0, \frac{\xi}{2}) \subset V(0)$ e $\phi = 0$ fora da $B(0, r)$ (obtida pelo corolário II-3-1). Seja $X = \phi + L$. Valem a) e b). A continuidade para as condições iniciais e a compacidade de $[-2, 2]$ nos fornece uma vizinhança da origem $U(0) \subset B(0, \frac{\xi}{2})$ tal que para todo $x \in U(0)$ e $t \in [-2, 2]$, $Y_t(x) \in B(0, \frac{\xi}{2})$. Como $X = Y$ em $B(0, \frac{\xi}{2})$ da unicidade das soluções segue que $X_t = Y_t$ em $U(0)$ para todo $t \in [-2, 2]$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $X_t, L_t : E \rightarrow E$ os fluxos induzidos por X e L respectivamente (proposição III-1). Sendo $\phi_t = X_t - L_t$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\phi_t(x) - \phi_t(y)) &= \frac{d}{dt} (X_t(x) - X_t(y) - L_t(x) + L_t(y)) = \\
&= X(X_t(x)) - X(X_t(y)) - L(L_t(x)) + L(L_t(y)) = \\
&= X(X_t(x)) - L(X_t(x)) - X(X_t(y)) + L(X_t(y)) + \\
&\quad + L(X_t(x)) - L(L_t(x)) + L(L_t(y)) - L(X_t(y)) = \\
&= \phi(X_t(x)) - \phi(X_t(y)) + L(\phi_t(x) - \phi_t(y)) .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\phi_t(x) - \phi_t(y) &= \int_0^t \{ \phi(X_s(x)) - \phi(X_s(y)) \} ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds \\
(i) \quad \|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| &\leq \xi_1 \left| \int_0^t \|X_s(x) - X_s(y)\| ds \right| + 1 \left| \int_0^t \|\phi_s(x) - \phi_s(y)\| ds \right| \text{ onde}
\end{aligned}$$

$1 = \|L\|$. Observamos que :

$$\begin{aligned}
\|X_s(x) - X_s(y)\| &= \left\| x + \int_0^s X(X_u(x)) du - y - \int_0^s X(X_u(y)) du \right\| \leq \\
&\leq \|x-y\| + \left| \int_0^s \|X(X_u(x)) - X(X_u(y))\| du \right| \leq \\
&\leq \|x-y\| + k \left| \int_0^s \|X_u(x) - X_u(y)\| du \right|
\end{aligned}$$

Aplicamos o lema de Gronwald para $f(s) = \|X_s(x) - X_s(y)\|$, $s \geq 0$ e temos:

$$\|X_s(x) - X_s(y)\| \leq \|x-y\| e^{\int_0^s k du} \leq \|x-y\| e^{2ks} .$$

Considerando agora o campo $(-X)$ e aplicando o lema de Gronwald para a função $g(t) = \|(-X)_t(x) - (-X)_t(y)\|$, $t \geq 0$ temos: $\|X_s(x) - X_s(y)\| \leq \|x-y\| e^{2ks}$ para $-2 \leq s \leq 0$.

A desigualdade (1) fica :

$$\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| \leq \xi_1 \cdot e^{2k} \|x-y\| \left| \int_0^t ds \right| + 1 \left| \int_0^t \|\phi_s(x) - \phi_s(y)\| ds \right|$$

ou seja ,

$$\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| \leq 2\xi_1 e^{2k} + 1 \left| \int_0^t \|\phi_s(x) - \phi_s(y)\| ds \right| \text{ para } |t| \leq 2.$$

Aplicando Gronwald novamente , temos :

- (2) $\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| \leq 2\xi_1 e^{2k+21} \|x-y\|$ para $t \in [-2, 2]$. Tomando a constante de Lipschitz de ϕ convenientemente, para todo $t \in [-2, 2]$, ϕ_t é ξ -lipschitziana. Como $X = Y$ em $U(0)$, $\phi_t(0) = 0$ e, então, $\|\phi_t(x)\| \leq \xi \cdot \rho$ para todo $x \in B(0, \rho)$ e $t \in [-2, 2]$. Suponhamos que $\rho > r$ e $x \notin B(0, \rho)$; se para todo $t \in [-2, 2]$, $X_t(x) \notin B(0, \rho)$, então, $\phi_t(x) = 0$ (pois $X = L$ fora de $B(0, \rho)$); se existir $t \in [-2, 2]$ tal que $X_t(x) \in B(0, \rho)$, consideramos t_0 o menor real de $[-2, 2]$ tal que $X_{t_0}(x)$ esteja na fronteira de $B(0, \rho)$; como $\phi_t(x) = X_{t-t_0}(X_{t_0}(x)) - L_{t-t_0}(L_{t_0}(x)) = \phi_{t-t_0}(X_{t_0}(x))$ e podemos obter uma desigualdade análoga à (2) para $|t| \leq 4$, segue que para $t \in [-2, 2]$, ϕ_t é limitada fora de $B(0, \rho)$. Segue então, d).

Como foi anunciado no prefácio, o teorema seguinte mostrará que nas vizinhanças de um ponto crítico hiperbólico de um campo Y de classe C^1 tal que $Y(0) = 0$, trajetórias de Y são equivalentes às de $L = Y'(0)$, isto é, existe um homeomorfismo $h: E \rightarrow E$ que transforma trajetórias de Y em trajetórias de L preservando o tempo ($Y_t = h^{-1} L_t h$)

TEOREMA III : Seja $Y:V(O) \subset E \rightarrow E$ um campo de classe C^1 tal que O é ponto crítico hiperbólico. Existe um homeomorfismo de E sobre $E: E \rightarrow E$ tal que numa vizinhança de O contida em $V(O)$ tem-se $hY_t = L_t h$ para todo $t \in [-2, 2]$.

PROVA : Consideramos o campo $X: E \rightarrow E$ obtido na proposição III-3. Posso supor que em $U(O)$, X_1 seja difeomorfismo de classe C^1 . Além disso, $DX_1(O) = DX_1(O) = L_1$ é hiperbólico. Seja h o homeomorfismo tal que $hX_1 = L_1 h$ numa vizinhança de O , obtido pelo teorema II-1. Definimos $H: E \rightarrow E$ dada por

$$H(x) = \int_0^1 L_{-t} hX_t(x) dt.$$

Observe-se a continuidade da função $t \in (0, 1] \rightarrow L_{-t} hX_t(x)$ para a existência da integral

Para cada $x \in E$, $\sup \{ \|L_{-t}(x)\| : |t| \leq 1 \} < \infty$ (pois a função $t \rightarrow L_{-t}(x)$ é contínua); como L_{-t} é linear, o teorema da limitação uniforme (ver (4)) garante que $\sup \{ \|L_{-t}\| : |t| \leq 1 \} \leq M_1 < \infty$. Além disso como $(t, x) \in R \times E \rightarrow hX_t(x) \in E$ é uma função contínua nas duas variáveis e $[0, 1]$ é compacto, dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança de x_0 , $V(x_0)$, tal que para todo $x \in V(x_0)$ e todo $t \in [0, 1]$, $\|hX_t(x) - hX_t(x_0)\| < \varepsilon$. Logo, de

$$\|H(x) - H(x_0)\| \leq M \int_0^1 \|hX_t(x) - hX_t(x_0)\| dt \leq M\varepsilon$$

segue a continuidade de H .

Vamos ver que H está a distância finita da identidade :

$$\begin{aligned} \|H(x) - x\| &\leq \int_0^1 \|L_{-t} hX_t(x) - x\| dt = \\ &= \int_0^1 \|L_{-t} hX_t(x) - L_{-t} L_t(x)\| dt \leq M_1 \int_0^1 \|hX_t(x) - L_t(x)\| dt \end{aligned}$$

Então :

$$\|H(x) - x\| \leq M_1 \int_0^1 \left\{ \|hX_t(x) - X_t(x)\| + \|X_t(x) - L_t(x)\| \right\} dt.$$

Como $\|h - I\| \leq N < \infty$ (ver proposição II-2) e para todo $t \in [-2, 2]$, $\|\phi_t\| \leq M$ (ver proposição III-3) segue que :
para todo $x \in E$, $\|H(x) - x\| \leq M_1 \cdot N + M < \infty$.

Seja $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} L_{-s} H X_s(x) &= L_{-s} \int_0^1 L_{-t} h X_t(X_s(x)) dt = \\ &= \int_0^1 L_{-s} (L_{-t} h X_t(X_s(x))) dt = \\ &= \int_0^1 L_{-(s+t)} h X_{t+s}(x) dt \end{aligned}$$

Fazendo $s + t = u + 1$:

$$\begin{aligned} L_{-s} H X_s(x) &= \int_{s-1}^s L_{-(u+1)} h X_{u+1}(x) du = \\ &= \int_{s-1}^0 L_{-(u+1)} h X_{u+1}(x) du + \int_0^s L_{-(u+1)} h X_{u+1}(x) du \end{aligned}$$

Fazendo $u+1 = v$ na primeira parcela :

$$L_{-s} H X_s(x) = \int_s^1 L_{-v} h X_v(x) dv + \int_0^s L_{-u} (L_{-1} h X_1) X_u(x) du$$

Numa vizinhança $U_1(0) \subset U(0)$ tem-se $L_{-1} h X_1 = h$.

Para $x \in \bigcap_{u=0}^1 X_u^{-1}(U_1(0))$ temos :

$$\begin{aligned} L_{-s} H X_s(x) &= \int_s^1 L_{-v} h X_v(x) dv + \int_0^s L_{-u} h X_u(x) du = \\ &= \int_0^1 L_{-v} h X_v(x) dv = H(x) \end{aligned}$$

O teorema de continuidade para as condições iniciais e a compacidade de $[0,1]$ garantem a existência de uma vizinhança de $0 \in E$ $U_2(0)$ contida em $\bigcap_{u=0}^1 X_u^{-1}(U_4(0))$.

Para $s \in [-1,0]$, análogamente, se conclui que numa vizinhança que posso supor ser $U_2(0)$, $L_{-s}HX_s = H$.

Seja $1 \leq s \leq 2$:

$L_{-s}HX_s = L_{-(s-1)}L_{-1}HX_{s-1} = L_{-(s-1)}HX_{s-1} = H$ numa vizinhança de 0 , $U_3(0) \subset \bigcap_{u=-1}^1 X_u^{-1}(U_2(0))$. Para s tal que $-2 \leq s \leq -1$ temos

$$L_{-s}HX_s = L_{-(s+1)}(L_1HX_{-1})X_{s+1}$$

$$L_{-s}HX_s = L_{-(s+1)}(L_1HX_{-1})X_{s+1} = L_{-(s+1)}HX_{s+1} = H \text{ em } U_3(0).$$

Escolhemos ϵ da proposição III-3 como o $\delta > 0$ da proposição II-2. Como $H \in \mathcal{F}$ e $HX_1 = H(L_1 + \phi_1) = L_1H$ segue, pelo corolário II-1-2, que $H = h$.

OBSERVAÇÕES :

1) Se um ponto crítico de um campo não for hiperbólico não teremos necessariamente a equivalência local das trajetórias vista no teorema acima. Assim, consideramos o campo dado pelo operador linear, em R^2 , $L(x,y) = (-y, x)$. Seu espectro é dado pelo conjunto $\{1, -i\}$ e suas trajetórias são círculos centrados na origem. Vamos perturbar esse campo por uma função $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ tal que
$$\frac{(\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))}{\|(x,y)\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|(x,y)\| \rightarrow 0$$

de tal forma que não tenhamos o teorema para o campo :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \phi_1(x,y) \\ \dot{y} = x + \phi_2(x,y) \end{cases}$$

Seja $(\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)) = (x^3, 0)$. O campo $\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 \\ \dot{y} = x \end{cases}$ na forma

polar, fica : $\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r} (x\dot{x} + y\dot{y}) \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r^2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \end{cases}$

e $\dot{r} = -\frac{x^4}{r}$ é sempre < 0 exceto no eixo y . Vê-se sem muito trabalho que esse campo não pode ter trajetórias fechadas e, então, que não há equivalência local entre as trajetórias de $f = L + \phi$ e as de L .

2) Consideraremos dois campos em $\mathbb{R}^2$:

$X(x,y) = (y, y-x)$ e $Y(x,y) = (-y, x)$. As trajetórias do primeiro são espirais e as de Y são círculos de centro na origem [20]

Vamos construir um campo f de classe C_1^1 tal que $f = X$ em $B(0, \frac{1}{2})$ e $f = Y$ fora de $B(0, \frac{5}{2})$. As trajetórias de f na bola $B(0, \frac{1}{2})$ coincidem com as de $f'(0) = X$ e fora de $B(0, \frac{5}{2})$ são círculos ; portanto, não existe um homeomorfismo h tal que $hX_t = f_t h$ para x fora de $B(0, \frac{5}{2})$. Consideremos uma função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, $\alpha(t) = 1$ para $t \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{2}, \infty)$ e $\alpha(t) = 0$ para $t \in [1, 2]$.

Definimos : $f(x,y) = \begin{cases} \alpha(\| (x,y) \|) \cdot X(x,y) & \text{se } (x,y) \in B(0, \frac{3}{2}) \\ \alpha(\| (x,y) \|) \cdot Y(x,y) & \text{se } (x,y) \notin B(0, \frac{3}{2}) \end{cases}$

B- CASO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS NORMALMENTE HIPERBÓLICAS

Nesta parte aplicaremos o teorema de Hartman para mostrar que certas funções que deixam invariante um toro são equivalentes às suas "pequenas" perturbações que também deixam invariante o toro. O que faremos é um caso particular do estudado por Pugh e Shub, no artigo "Linearization of normally hyperbolic diffeomorphisms and flows" (a aparecer), para difeomorfismo de classe C^1 numa variedade, que deixa invariante uma subvariedade compacta; e, contrariamente, ao que acontece no caso geral, não requer nenhuma técnica especial.

Sejam E^+, E^-, X espaços euclidianos

$f: X = \mathbb{R}^n \rightarrow X$ um homeomorfismo tal que $\theta - \theta' \in \mathbb{Z}^n$ se e só se $f(\theta) - f(\theta') \in \mathbb{Z}^n$ (por exemplo as aplicações lineares dadas por matriz de coeficientes inteiros e determinante ± 1)

$E = E^+ \times E^- \times X$ com a norma euclidiana

$F: E \rightarrow E$ uma função contínua tal que $F(x, y, \theta) = (L_+(x, \theta), L_-(y, \theta), f(\theta))$ onde para cada $\theta \in X$, $L_+: E \rightarrow E^+$ e $L_-: E \rightarrow E^-$ são lineares e bijetoras em x e y respectivamente; para todo $x \in E^+$, $\|L_+(x, \theta)\| \leq b\|x\|$ e $\|L_+^{-1}(x)\| \leq a\|x\|$ e para todo $y \in E^-$, $\|L_-(y, \theta)\| \leq a\|y\|$ e $\|L_-^{-1}(y)\| \leq c\|y\|$ onde $a < 1$ e se $\theta - \theta' \in \mathbb{Z}^n$, então, $L_+(x, \theta) = L_+(x, \theta')$ e $L_-(y, \theta) = L_-(y, \theta')$

DEFINIÇÃO : Uma função F nas condições acima será chamada de periódica normalmente hiperbólica.

Observamos que essa função F pode ser vista como uma função que deixa o toro T^n invariante.

TEOREMA: Seja $F: E \rightarrow E$ uma função periódica normalmente hiperbólica nas notações acima. Existe $\varepsilon > 0$ tal que se $F': E \rightarrow E$ é dada por $F'(x, y, \theta) = (L_+(x, \theta) + \Delta_+(x, y, \theta), L_-(y, \theta) + \Delta_-(x, y, \theta), f(\theta))$ onde $\Delta_+, \Delta_-: E \rightarrow E^+(E^*)$ são contínuas limitadas, para cada $\theta \in X$ fixado têm constante de Lipschitz $\leq \varepsilon$ e tais que $\Delta_+(0, 0, \theta) = 0 \in E^+$, $\Delta_-(0, 0, \theta) = 0 \in E^-$, então, existe um homeomorfismo $h: E \rightarrow E$ tal que $F'h = hF$.

PROVA: Seja

$$\mathcal{E} = \left\{ \sigma: X \rightarrow E : \sigma(\theta) = (\sigma_+(\theta), \sigma_-(\theta), \theta) \text{ com } \sigma_+(\theta) = \sigma'_+(\theta') \text{ e } \sigma_-(\theta) = \sigma'_-(\theta') \text{ quando } \theta - \theta' \in Z_n^n \text{ e } \sup_{\theta \in X} \|(\sigma_+(\theta), \sigma_-(\theta))\| < \infty \right\}$$

Definimos em $\mathcal{E}$:

$$(\sigma + \sigma')(\theta) = (\sigma_+(\theta) + \sigma'_+(\theta), \sigma_-(\theta) + \sigma'_-(\theta), \theta)$$

$(\alpha \sigma)(\theta) = (\alpha \sigma_+(\theta), \alpha \sigma_-(\theta), \theta)$. É evidente que $\sigma + \sigma'$ e $\alpha \sigma \in \mathcal{E}$. Verifica-se com pouco trabalho que $\mathcal{E}$ é um espaço de Banach com a norma $\|\sigma\| = \sup \{ \|(\sigma_+(\theta), \sigma_-(\theta))\| : \theta \in X \}$

Definimos a função $F^b: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ por

$F^b(\sigma)(\theta) = F(\sigma(f^{-1}(\theta)))$. Vamos mostrar que $F^b(\sigma) \in \mathcal{E}$. Tem-se

$$F^b(\sigma)(f(\theta)) = F(\sigma(\theta)) = (L_+(\sigma_+(\theta), \theta), L_-(\sigma_-(\theta), \theta), f(\theta)),$$

$$\sup \{ \|(L_+(\sigma_+(\theta), \theta), L_-(\sigma_-(\theta), \theta))\| : \theta \in X \} \leq b \|\sigma\|$$

$b > 1 > a$). A continuidade de F^b segue de:

$$\|F^b(\sigma) - F^b(\sigma')\| = \sup_{\theta \in X} \|(L_+(\sigma_+(\theta) - \sigma'_+(\theta), \theta), L_-(\sigma_-(\theta) - \sigma'_-(\theta), \theta), 0)\| \leq b \|\sigma - \sigma'\|$$

F^b é linear: $F^b(\sigma + \sigma')(f(\theta)) = F(\sigma + \sigma'(\theta)) = (L_+(\sigma_+(\theta) + \sigma'_+(\theta), \theta), L_-(\sigma_-(\theta) + \sigma'_-(\theta), \theta), f(\theta)) = (L_+(\sigma_+(\theta), \theta) + L_+(\sigma'_+(\theta), \theta), L_-(\sigma_-(\theta), \theta) + L_-(\sigma'_-(\theta), \theta), f(\theta)) = [F^b(\sigma) + F^b(\sigma')] f(\theta)$. Também é fácil ver $F^b(\alpha \sigma) = \alpha F^b(\sigma)$.

F^b é injetora pois L_+ e L_- são injetoras em x e y respectivamente.

F^b é sobrejetora: resulta da sobrejetividade de L_+ e L_- e das hipóteses sobre as normas de L_+, L_+^{-1}, L_- e L_-^{-1} .

F^b é hiperbólica : $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ onde

$$\mathcal{E}^+ = \{ \sigma \in \mathcal{E} : \sigma(\theta) = (\sigma_+(\theta), \theta, \theta) \text{ para todo } \theta \in X \}$$

$$\mathcal{E}^- = \{ \sigma \in \mathcal{E} : \sigma(\theta) = (0, \sigma_-(\theta), \theta) \text{ para todo } \theta \in X \}$$

que são F^b invariantes. Seja $\sigma \in \mathcal{E}^-$,

$$\begin{aligned} \|F^b(\sigma)\| &= \sup \{ \| (L_+(0, \theta), L_-(\sigma_-(\theta), \theta)) \| : \theta \in X \} = \\ &= \sup \{ \| (L_-(\sigma_-(\theta), \theta)) \| : \theta \in X \} \leq a \|\sigma\|. \end{aligned}$$

Seja $\sigma \in \mathcal{E}^+$,

$$\|(F^b)^{-1}(\sigma)\| = \sup \{ \| (L_+^{-1}(\sigma_+(\theta), \theta), L_-^{-1}(0, \theta)) \| : \theta \in X \} \leq a \|\sigma\|$$

Consideramos a função $F^{1,b}(\sigma)(\theta) = F^1(\sigma(F^{-1}(\cdot)))$ É fácil ver que $F^{1,b}(\sigma) \in \mathcal{E}$ lembrando as hipóteses sobre Δ_+ e Δ_- .

A função $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $\phi(\sigma) = F^{1,b}(\sigma) - F^b(\sigma)$ é lipschitziana : $\|\phi(\sigma) - \phi(\sigma')\| = \sup_{\theta \in X} \|\phi(\sigma)(\theta) - \phi(\sigma')(\theta)\| =$
 $= \sup \{ \| (\Delta_+(\sigma_+(\theta), \sigma_-(\theta), \theta) - \Delta_+(\sigma'_+(\theta), \sigma'_-(\theta), \theta),$
 $\Delta_-(\sigma_+(\theta), \sigma_-(\theta), \theta) - \Delta_-(\sigma'_+(\theta), \sigma'_-(\theta), \theta)) \| : \theta \in X \} \leq$
 $\leq \sup \{ \sqrt{\|\sigma_+(\theta) - \sigma'_+(\theta)\|^2 + \|\sigma_-(\theta) - \sigma'_-(\theta)\|^2} : \theta \in X \} =$
 $= \varepsilon \|\sigma - \sigma'\|$. Além disso, ϕ é limitada pois Δ_+ e Δ_- são limitadas e se $\sigma(\theta) = (0, 0, \theta)$ então $\phi(\sigma)(\theta) = (0, 0, \theta)$. A proposição II-2 garante a existência de um homeomorfismo $H : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $H = I + v$ com $v \in C_b^0(\mathcal{E})$ tal que $HF^{1,b} = F^bH$. (para ε conveniente).

Definimos para $z = (x, y, \theta) \in E$ a função :

$$i_\theta z(\theta') = \begin{cases} (x, y, \theta') & \text{se } \theta' - \theta \in \mathbb{Z}^n \\ (0, 0, \theta') & \text{se } \theta' - \theta \notin \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

É fácil ver que $i_\theta z \in \mathcal{E}$.

Consideraremos $C_b^*(\mathcal{E}) = \{ v \in C_b^0(\mathcal{E}) / v(i_\theta(\frac{z}{z'})) =$
 $= i_\theta(\frac{z}{z'})(\theta') \text{, se } \theta' - \theta \in \mathbb{Z}^n \text{ então } v(i_\theta, z) = i_\theta, z' \text{ e}$
 $v(\sigma)(\theta) = v(i_\theta, \sigma(\theta))(\theta) \}$ que é fechado em $C_b^0(\mathcal{E})$.

Mostraremos que $H = I + v$ com $v \in C_b^*(\mathcal{E})$:

$$\otimes \sigma \in \mathcal{E}$$

1º. Se $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ é um homeomorfismo, então, $\mathcal{L} \in L(C_b^0(\mathcal{E}))$ dada por $\mathcal{L}v = F^b v - v g$ é inversível e $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq M$ onde M não depende de g (ver proposição II-1)

2º. Vejamos como se escreve $\mathcal{L}^{-1}$. Seja $\mathcal{L}v = F^b(v - (F^b)^{-1}vg)$ e $Rv = (F^b)^{-1}vg$ que é um operador hiperbólico (ver proposição II-1) e $\|R_+\| = \|R/C_b^0(\mathcal{E}, \mathcal{E}_+)\| \leq a < 1$,
 $\|R_-^{-1}\| = \|R^{-1}/C_b^0(\mathcal{E}, \mathcal{E}_-)\| \leq a < 1$.

Representando R em forma matricial : $\begin{pmatrix} R_+ & 0 \\ 0 & R_- \end{pmatrix}$

$$I - R = \begin{pmatrix} I - R_+ & 0 \\ 0 & I - R_- \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} (I - R_+)^{-1} & 0 \\ 0 & (I - R_-)^{-1} \end{pmatrix}$$

Como $\|R_+\| < 1$, $I - R_+ = \sum_0^\infty R_+^n$ (ver [4]) e como $\|R_-^{-1}\| < 1$, $(I - R_-)^{-1} = ((R_-^{-1} - I)R_-)^{-1} = R_-^{-1}(R_-^{-1} - I)^{-1} = R_-^{-1}(-\sum_0^\infty R_-^{-n})$ temos que :

$$(I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} \sum_0^\infty R_+^n & 0 \\ 0 & -\sum_0^\infty R_-^{-n-1} \end{pmatrix}$$

3º. para $\mathcal{E}$ conveniente as seguintes equações :

a) $F^b v - v F^b = -\phi(I + v)$

b) $F^b v - v(F^b + \phi) = \phi$

c) $F^b v - v(F^b + \phi) = \phi - \phi(I + v)$ têm solução única em $C_b^*(\mathcal{E})$.

Considere-se $u(v) = \mathcal{L}^{-1}(-\phi(I + v))$ onde $\mathcal{L}v = F^b v - v F^b$. A partir da observação acima sobre $\mathcal{L}^{-1}$ segue que se $v \in C_b^*(\mathcal{E})$ então, $u(v) \in C_b^*(\mathcal{E})$. Para $\mathcal{E} > 0$ conveniente segue que u é contração de $C_b^*(\mathcal{E})$ em $C_b^*(\mathcal{E})$ e a solução de a) é o único ponto fixo de u . A única solução de b) é $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ e a de c) é $\mathcal{L}^{-1}(\phi - \phi(I + v))$ onde $\mathcal{L}v = F^b v - v(F^b + \phi)$ ($\mathcal{E}$ conveniente) Observe-se que $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$, $\mathcal{L}^{-1}(\phi - \phi(I + v)) \in C_b^*(\mathcal{E})$ a partir de 2º).

4ª. Como nos corolários II-1-1 e II-1-2, as equações

$$a) yF^b = (F^b + \phi)y$$

$$b) F^b y = y(F^b + \phi)$$

$$c) y(F^b + \phi) = (F^b + \phi)y$$

têm solução única em $\mathcal{F} = \{ I + v : v \in C_b^*(\mathcal{E}) \}$ e as soluções h e k de a) e b) são homeomorfismos ($h = k^{-1}$) para $\mathcal{E}$ conveniente.

Concluimos que, realmente, $H = I + v$ é tal que $v \in C_b^*(\mathcal{E})$

Definiremos uma função $h: E \rightarrow E$ induzida de H , como Hirsch e Pugh fazem na construção da variedade estável para conjuntos hiperbólicos [8], que será o homeomorfismo que conjugua F e F' ($hF' = Fh$).

Seja, então, $h(x, y, \theta) = H(i_\theta(x, y, \theta))(\theta)$.

Observamos que h conserva a última coordenada: $h(x, y, \theta) = (h_+(x, y, \theta), h_-(x, y, \theta), \theta)$.

1ª. $hF' = Fh$ pois :

Para $z = (x, y, \theta)$, $Fh(z) = F(H(i_\theta z))(\theta) = F^b(H(i_\theta z))(f(\theta))$,
 $hF'(z) = H(i_{f(\theta)} F'(z))(f(\theta))$. Como $F^b H = H F'^b$ e $F'^b(i_\theta z) = i_{f(\theta)} F'(z)$ segue $Fh(z) = H(F'^b(i_\theta z))(f(\theta)) = H(i_{f(\theta)} F'(z))(f(\theta)) = hF'(z)$.

2ª. h é sobrejetora :

Observar que para todo $z' \in E$, $z' = i_\theta z'(\theta)$ e $i_\theta z' = H(i_\theta z)$ pois $H^{-1} \in \mathcal{F}$.

3ª. h é injetora :

Se $z = (x, y, \theta)$ e $z' = (x', y', \theta')$ com $\theta' \neq \theta$, então, é imediato que $h(z) \neq h(z')$.

Se $z = (x, y, \theta) \neq z' = (x', y', \theta)$, então, $i_\theta z \neq i_\theta z'$,
 $H(i_\theta z) = i_\theta z_1 \neq H(i_\theta z') = i_\theta z_2$ e $h(z) = z_1 \neq h(z') = z_2$.

4ª. se $\theta = \theta' \in \mathbb{Z}^n$, então, $h_+(x, y, \theta) = h_+(x, y, \theta')$ e
 $h_-(x, y, \theta) = h_-(x, y, \theta')$ pois $H = I + v$ onde $v(i_\theta z) = i_\theta z_1$ e

$$e \ v(i_{\theta} z) = i_{\theta} z_1 .$$

5º. h é contínua :

Usaremos essencialmente a continuidade de H e a propriedade $H(\sigma)(\theta) = H(i_{\theta} \sigma(\theta))(\theta)$. Seja $z_n = (x_n, y_n, \theta_n) \longrightarrow z = (x, y, \theta)$.

Consideramos as secções por z_n e z paralelas a X , ou seja ,

$$\sigma_n(\theta) = (x_n, y_n, \theta) \text{ e } \sigma(\theta) = (x, y, \theta), \quad \sigma_n \longrightarrow \sigma .$$

A continuidade de H garante que $H(\sigma_n) \longrightarrow H(\sigma)$. Se existir

$\xi > 0$ tal que nenhuma $h(z_n) = H(\sigma_n)(\theta_n)$ pertença a $B(z, \xi) \subset$

E , então, não teríamos $H(\sigma_n) \longrightarrow H(\sigma)$.

Analogamente vê-se que $h^{-1}(z) = H^{-1}(i_{\theta} z)(\theta)$ é contínua .

Na verdade o que fizemos foi obter H diretamente do teorema de Hartman e definir h a partir de H ; para mostrar a injetividade de h e a sobrejetividade de h precisamos verificar uma propriedade de H : $H(i_{\theta} z) = i_{\theta} z'$ o que foi obtido restringindo o espaço $C_b^0(\mathbb{C})$ e lembrando a unicidade da H ; Para a continuidade de h precisamos de uma outra propriedade de H : $H(\sigma)(\theta) = H(i_{\theta} \sigma(\theta))(\theta)$ e para isso restringimos um pouco mais $C_b^0(\mathbb{C})$ e consideramos a unicidade da tal H .

APÊNDICE

Iª PARTE :

Seja E um espaço de Banach complexo.

Dado $T \in L(E)$, chamaremos de $\mathcal{J}(T)$ o conjunto de tôdas as funções definidas e deriváveis em algum domínio de $\mathbb{C}$ contendo $\Lambda(T)$.

Seja $u \in \mathcal{J}(T)$ e $u(T) \in L(E)$ dada por

$$u(T) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D} u(z) R_z dz \quad \text{onde } D \text{ é a fronteira do domí}$$

nio $D \supset \Lambda(T)$ onde u é derivável.

PROPRIEDADES:

1) Se $u, v \in \mathcal{J}(T)$, então, $u(T) \cdot v(T) = v(T) \cdot u(T) = uv(T)$.

2) Se $u, v \in \mathcal{J}(T)$, então, $(u+v)(T) = u(T) + v(T)$

3) Se $u(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ onde $a_i \in \mathbb{C}$, então,

$$u(T) = \sum_{i=0}^n a_i T^i.$$

PROVA : Posso supor que $\overline{D'} \subset D$ onde $u(T) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D} u(z) R_z dz$
e $v(T) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D'} v(z') R_{z'} dz'$.

$$\begin{aligned} \text{Temos : } u(T) \cdot v(T) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta D} u(z) R_z dz \int_{\delta D'} v(z') R_{z'} dz' = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta D} \int_{\delta D'} u(z) v(z') R_z R_{z'} dz dz' = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta D} \int_{\delta D'} \frac{u(z) v(z') (R_z - R_{z'})}{z - z'} dz dz' = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left\{ \int_{\delta D} \int_{\delta D'} \frac{u(z) v(z') R_z}{z - z'} dz dz' - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\delta D} \int_{\delta D'} \frac{u(z) v(z') R_{z'}}{z - z'} dz dz' \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta D} \int_{\delta D'} \frac{u(z)Rz}{z-z'} dz' dz = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta D} \int_{\delta D'} \frac{v(z')u(z')Rz'dz'}{z-z'} = v \cdot u(T)$$

$$= - \frac{2\pi i}{(2\pi i)^2} \int_{\delta D'} v(z')u(z')Rz'dz' = v \cdot u(T)$$

2) resulta da aditividade da integral.

3) suponhamos que $u(z) = a \in \mathbb{C}$:

$$u(T) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D} aRzdz = a \left(- \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D} Rzdz \right) = aI \quad \text{pois}$$

$$P = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D} Rzdz = I \quad \text{quando } \Lambda(T) \subset D \quad (\text{ver teo. da decomposi-})$$

ção -cap. I-§2º)

Seja $\bar{u}(z) = z^n$; como $T^n - z^n I = (T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + z^{n-1})(T - zI)$ segue que

$$T^n Rz = z^n Rz + T^{n-1} + zT^{n-2} + \dots + z^{n-1} \quad e$$

$$z^n Rz = T^n Rz - (T^{n-1} + zT^{n-2} + \dots + z^{n-1})$$

Então ,

$$T^n \int_{\delta D} Rzdz = \int_{\delta D} T^n Rzdz = \int_{\delta D} z^n Rzdz = (2\pi i)u(T) \quad e$$

$$u(T) = T^n \cdot I = T^n .$$

TEOREMA : Se $u \in \mathcal{F}(T)$ então , $\Lambda(u(T)) = u(\Lambda(T))$ onde $u(\Lambda(T)) = \{u(\lambda) : \lambda \in \Lambda(T)\}$.

PROVA : Seja $\alpha \in \Lambda(T)$ e a função $v \in \mathcal{F}(T)$ dada por $v(z) = \frac{u(z)-u(\alpha)}{z-\alpha}$ se $z \neq \alpha$ e $v(\alpha) = u'(\alpha)$. Temos

$(T - \alpha I)v(T) = u(T) - u(\alpha)I$ e, portanto, se $u(T) - u(\alpha)I$ fôsse inversível $v(T)(u(T) - u(\alpha)I)^{-1}$ seria inversa de $T - \alpha I$ (pela propriedade 1)).

Seja $\alpha \in \Lambda(u(T))$. Suponhamos que $\alpha \notin u(\Lambda(T))$ e a função $v(z) = \frac{1}{u(z)-\alpha}$ está bem definida e é derivável em algum do-

mínio contendo $\Lambda(T)$ (pois $\Lambda(T)$ é compacto). Como

$$(u(z) - \alpha)v(z) = v(z)(u(z) - \alpha) \text{ segue}$$

$$(u(T) - \alpha I)v(T) = v(T)(u(T) - \alpha I) = I$$

$$\text{COROLÁRIO : } \Lambda(e^T) = \{ e^\lambda : \lambda \in \Lambda(T) \}$$

PROVA : Sejam as funções $u_n \in \mathcal{F}(T)$ dadas por

$$u_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \text{ que convergem uniformemente a } u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

em qualquer bola $B(0, r)$.

Como

$$\|u_n(T) - u(T)\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\delta B} \{u_n(z) - u(z)\} R_z dz \right\| \leq \varepsilon_{k,1} \text{ (onde } l \text{ é o comprimento de } \delta B) \text{ segue que}$$

$$u_n(T) = \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \longrightarrow u(T). \text{ Logo } u(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \text{ e segue}$$

imediatamente o resultado em vista da própria teorema.

Seja E espaço de Banach real e $L \in L(E)$.

É fácil de ver que $e^{L+} = (e^L)^{+}$. Logo vale o mesmo resultado anterior : $\Lambda(e^L) = \{ e^\lambda : \lambda \in \Lambda(L) \}$.

2ª Parte :

Seja $L \in L(E)$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n$

é convergente (mais ainda, é absolutamente convergente pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|tL\|^n}{n!} = e^{\|tL\|}.$$

Denota-se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n L^n}{n!}$ por e^{tL} .

Para cada $x \in E$, a série $e^{tL}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n(x)$ é convergente e :

PROPOSIÇÃO : $L_t(x) = e^{tL}(x)$ (isto é, a solução de $\dot{x} = Lx$, que no instante 0 passa por x é dada por $e^{tL}(x)$).

PROVA : A sequência $s_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} L^k(x)$ converge

uniformemente para $e^{tL}(x) = s(t)$ em cada intervalo $[a, b]$.

Logo, a sequência $s'_n(t) = L(s_{n-1}(t))$ converge uniformemente para $L(s(t))$ em $[a, b]$ e $s'(t) = L(s(t))$. Como $s(0) = x$ e $s'(t) = L(s(t))$ segue que $L_t(x) = s(t) = e^{tL}(x)$.

BIBLIOGRAFIA:

- [1] Palis, J.-On the Local Structure of Hyperbolic Points in Banach Spaces, An. Acad. Bras. Cienc., 40, (1968)
- [2] Hartman, P.-Ordinary Differential Equations, Wiley, New York, (1964)
- [3] Riesz, F e B. Nagy-Functional Analysis, Ungar, New York (1955)
- [4] Bachman, G e Narici, L.-Functional Analysis, Academic Press, New York, 1966
- [5] Lorch, E.R.-Spectral Analysis, Oxford U. Press, New York (1962)
- [6] Peixoto, M.-Teoria Geométrica das equações diferenciais, 7º Colóquio Bras. Mat. (1969)
- [7] Lima, E.L.-Análise geométrica, 7º Col. Bras. Mat. (1969)
- [8] Hirsh, M., Pugh, C; -Stable Manifolds and Hyperbolic Sets, a aparecer em Proc. of the A.M.S.
- [9] Grobman, D.-Topological Classification of the Neighborhood of a singular point in n -dim. space, Math. Sb(Ns), 56, (98) (1962)