J. C. FERNANDES DE OLIVEIRA

SÔBRE

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES
E FAMÍLIAS DE EQUAÇÕES LINEARES
ASSOCIADAS, COM RETARDAMENTO

Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo

1971

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	5
CAPÍTULO 0 - PRELIMINARES	7
CAPÍTULO 1 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM RETARDAMENTO ...	11
1.1) Introdução	11
1.2) Teorema de existência e unicidade com condição inicial.	12
1.3) Equações Diferenciais Lineares com retardamento	19
1.4) Representação das Equações Diferenciais com retardamen- to	21
CAPÍTULO 2 - SOBRE O MÉTODO DIRETO NAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO	29
2.1) Introdução	29
2.2) Condições suficientes para a estabilidade	32
2.3) Consideração de um exemplo	36
CAPÍTULO 3 - SOBRE FAMÍLIAS DE EQUAÇÕES LINEARES ASSOCIADAS	41
3.1) Introdução	41
3.2) Família de Equações Lineares com retardamento associada	42
3.3) Critério de Estabilidade usando famílias associadas - Uma aplicação	44
RESUMO	49
REFERÊNCIAS	51

INTRODUÇÃO

Nosso orientador propôs-nos um problema sobre os assuntos: equações diferenciais com retardamento e famílias de equações associadas. Este último assunto, como descrito em [7], a exemplo daquilo que se encontra em [2] para o caso de equações ordinárias.

O problema consistia em procurar um tratamento, com relação à estabilidade, de equações diferenciais com retardamento pelo uso de uma família de equações associada exclusivamente constituída de equações lineares, tentando, assim, uma analogia total com a teoria apresentada em [2].

Deveríamos, então, apresentar um conceito de família associada de equações lineares com retardamento, uma prova da existência de tais famílias e como usá-las no estudo da estabilidade, via método direto acrescido das considerações feitas em [7], sobre critérios de estabilidade, usando famílias de equações associadas.

O tratamento dessa última parte só pôde ser levado a efeito para uma certa classe de equações diferenciais com retardamento, que aparecem na maioria dos textos sobre o assunto. Nossa perspectiva inicial era encontrar formas quadráticas definidas no espaço das funções contínuas em um intervalo a valores em $\mathbb{R}^n$, cuja derivada (ver cap.2), ao longo das trajetórias de uma dada equação diferencial com retardamento, fôsse também uma forma quadrática, e, tentar então usar critérios de investigação quanto à positividade, definição, etc., de tais formas quadráticas, numa tentativa, assim, de adaptar inteiramente a referência [2] para o caso com retardamento, a partir de [7].

Vamos descrever sucintamente o conteúdo deste trabalho.

No Capítulo I, apresentamos uma definição satisfatória de equação diferencial linear com retardamento e uma representação geral de tais equações, com base em nossas adaptações do teorema de existência

e unicidade de solução de uma equação diferencial com retardamento sob condições iniciais prescritas e do teorema de representação de Riez, de funcionais lineares e contínuos de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, munido da norma da convergência uniforme.

No Capítulo II, apresentamos um critério para decidir sobre a estabilidade de equações diferenciais com retardamento de uma certa classe importante de equações lineares, pelo uso de um "teorema de Liapounov" do método direto no âmbito das equações com retardamento, como apresentado em [6], cuja adaptação às nossas hipóteses também é demonstrada.

No Capítulo III, apresentamos um conceito de família de equações lineares associada a uma dada equação diferencial com retardamento, sua representação geral e uma aplicação dos resultados adaptados de [6] e [7]. Esta aplicação trata com equações com retardamento, que podem ser consideradas como uma aproximação do caso geral de equações lineares com retardamento, e dá um critério de estabilidade.

Queremos consignar aqui os nossos agradecimentos ao Instituto Matemática e Estatística da U.S.P., em particular ao nosso orientador Prof. Dr. L.R.Borges Vieira, pela dedicação com que sempre acompanhou nossos estudos. Agradecemos ainda aos professores doutores Chaim S. Hönig e Nelson Onuchic pelos cursos e conversas relacionadas, bem como a C.L. Silva Dias, E.F. Gomide, C.B. de Lyra, L.H. Jacy Monteiro e D. Pisanelli. Por fim, ao B.N.D.E. e à CAPES-FORD, pelas bolsas que nos concederam, ao Sr. Toshiro Iqueda que datilografou este trabalho e a Equipe Vestibulares, que reproduziu as cópias.

São Paulo, dezembro de 1971.

J.C. Fernandes de Oliveira

Capítulo 0

PRELIMINARES

Queremos, nestas preliminares, fixar alguns conceitos, nomenclatura e notação pertinentes ao âmbito das equações diferenciais com retardamento. Baseamo-nos em [5] e [6] nesta escolha.

A letra h indicará um número real positivo e H , um número real estritamente positivo ou $+\infty$, ambos fixados arbitrariamente:

$$0 \leq h < +\infty$$

$$0 < H \leq +\infty$$

Para todo inteiro $n \geq 1$, denotaremos por C o espaço de Banach $\mathcal{B}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, das funções contínuas definidas em $[-h, 0]$ a valores em $\mathbb{R}^n$, munido da topologia dada pela norma da convergência uniforme; e denotaremos por C_H a bola aberta, deste espaço, de centro O e raio H , i.é.,

$$C_H = \{ \varphi \in C = \mathcal{B}([-h, 0], \mathbb{R}^n) : \|\varphi\| < H \}$$

sendo $\|\varphi\|$ o número $\sup \{ |\varphi(\theta)| : -h \leq \theta \leq 0 \}$ e

$$|\varphi(\theta)| = \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(\theta)|^2 \right)^{1/2}, \text{ onde } \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

são as componentes da função φ .

Notemos que $C_{+\infty} = C$ e que, no caso $h=0$, C e C_H (H finito) podem ser identificados, respectivamente, com $\mathbb{R}^n$ e sua bola aberta de centro $O \in \mathbb{R}^n$ e raio H . A bola fechada de centro O e raio $\Delta > 0$ será denotada por $\overline{C}_\Delta$.

Dado um número real $t_0 \in [0, +\infty[$ e uma função x definida em algum intervalo $[t_0 - h, t_0 + A[$, com $0 < A \leq +\infty$, a valores

em $\mathbb{R}^n$, o símbolo x_t denotará, para cada $t \in [t_0, t_0 + A[$ a função

$$x_t : [-h, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\theta \longmapsto x_t(\theta) = x(t + \theta).$$

Assim, para cada t satisfazendo $t_0 \leq t < t_0 + A$, x_t é o "passado" da função x entre os instantes $t-h$ e t .

É fácil verificar que se $x \in \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + A[, \mathbb{R}^n)$, então, $x_t \in C$ para todo t com $t_0 \leq t < t_0 + A$ e que a correspondência

$$t \in [t_0, t_0 + A[\longmapsto x_t \in C$$

é contínua.

A letra f indicará uma aplicação contínua qualquer do espaço produto $[0, \omega[\times C_H$ a valores em $\mathbb{R}^n$:

$$f : (t, \varphi) \in [0, +\infty[\times C_H \longmapsto f(t, \varphi) \in \mathbb{R}^n.$$

A equação diferencial (ou sistema de equações diferenciais)

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t_0 \leq t < t_0 + A$$

é denominada uma equação diferencial com retardamento (ou sistema de equações diferenciais com retardamento).

Notemos que é natural, então, procurar soluções x que estejam definidas em $[t_0 - h, t_0 + A[$ tais que x_{t_0} seja uma função prescrita $\varphi \in C_H$ e tais que $x_t \in C_H$ para todo t satisfazendo $t_0 \leq t < t_0 + A$ e que no intervalo $[t_0, t_0 + A[$ satisfaz a equação diferencial com retardamento dada.

Notemos ainda que, se existir solução, a função composta

$$t \longmapsto f(t, x_t)$$

será contínua e que, portanto, a equação pode ser escrita na forma

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x_\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t < t_0 + A.$$

Portanto, o problema que consiste na imposição da equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A,$$

sendo f uma aplicação de $[0, \infty[\times C_H$ em $\mathbb{R}^n$, e da imposição ainda da condição inicial

$$x_{t_0} = \psi$$

com $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_H$, fixados arbitrariamente, é equivalente ao de procurar os pontos fixos do operador T definido por

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \psi(t - t_0) & t_0 - h \leq t \leq t_0 \\ \psi(0) + \int_{t_0}^t f(\zeta, x_\zeta) d\zeta & t_0 \leq t \leq t_0 + A. \end{cases}$$

O operador T tomará valores em $\mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$ e estará definido em algum subespaço F do campo de valores.

Esta interpretação operacional de uma equação diferencial com retardamento visa a aplicação do teorema do ponto fixo de Banach, para demonstrar a existência e unicidade de solução com condições iniciais, sob hipóteses que apresentaremos no próximo capítulo, analogamente ao caso de equações diferenciais ordinárias.

Capítulo 1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM RETARDAMENTO

1.1) INTRODUÇÃO

Nêste capítulo vamos apresentar um teorema de existência e unicidade de solução de uma equação diferencial com retardamento, com condição inicial (secção 1.2), um conceito de equação diferencial linear com retardamento (secção 1.3), uma representação geral de tais equações (secção 1.4) e consideraremos um exemplo que desempenhará um papel importante nêste trabalho (secção 1.5).

Adaptamos o teorema de existência e unicidade a partir da forma que se encontra na referência [6], onde se exige que o segundo membro da equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

seja uma aplicação contínua e lipschitziana de $[0, +\infty[\times C_H$ em $\mathbb{R}^n$. Esta última imposição significa que existe uma constante L para a qual a relação

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

é verificada para quaisquer $t \geq 0$ e φ_1 e φ_2 em C_H .

A adaptação consistiu em substituir a hipótese lipschitziana pela hipótese, levemente menos restritiva, localmente lipschitziana, com a finalidade de não só incluir muitos casos antes excluídos, como é o exemplo de

$$\dot{x}(t) = t x(t-h) \quad \text{ou} \quad \dot{x}(t) = (h - \|x_t\|)^{\frac{1}{2}}$$

mas, principalmente, garantir que às equações diferenciais lineares com retardamento se aplique automaticamente o teorema de existência e unicidade.

1.2) TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE COM CONDIÇÃO INICIAL

Definição 1

Dizemos que a aplicação f de $[0, \omega[\times C_H$ em $\mathbb{R}^n$ é localmente lipschitziana no ponto (t_0, Ψ) do domínio de f se, e somente se, existirem um número real L e uma vizinhança Ω de (t_0, Ψ) , em $[0, \omega[\times C_H$ tais que

$$|f(\tau, \varphi_1) - f(\tau, \varphi_2)| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

quaisquer que sejam (τ, φ_1) e (τ, φ_2) em Ω .

Por exemplo, a aplicação f definida em $[0, \omega[\times C_H$ por

$$f(t, \varphi) = A(t) \cdot \varphi(-h),$$

sendo $A(t)$ uma matriz $n \times n$ cujas componentes são funções contínuas de $t \in [0, \omega[$, é localmente lipschitziana em qualquer ponto (t_0, Ψ) .

Teorema 1

Consideremos a equação

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

com f contínua e localmente lipschitziana em todo ponto de $[0, \omega[\times C_H$ a valores em $\mathbb{R}^n$. Então, fixados arbitrariamente $t_0 \geq 0$ e Ψ em C_H , existe uma função x definida em um intervalo

$$[t_0 - h, t_0 + A],$$

sendo $A > 0$, tal que x é solução da equação diferencial dada e tem valor inicial Ψ no instante t_0 , isto é, em todo ponto

$$t \in [t_0, t_0 + A],$$

x é derivável*, $x_t \in C_H$, e tem-se as relações

* Nas extremidades do intervalo $[t_0, t_0 + A]$, consideramos as derivadas laterais.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ x_{t_0} = \psi \end{cases}$$

Ainda mais, esta solução é determinada de modo único sobre o intervalo $[t_0 - h, t_0 + A]$.

Demonstração

A prova aplicará o teorema do ponto fixo de Banach ao operador T definido em alguma parte F de $\mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, para algum $A > 0$ por

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \psi(t - t_0) & t_0 - h \leq t \leq t_0 \\ \psi(0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x_\tau) d\tau & t_0 \leq t \leq t_0 + A \end{cases}$$

Vamos produzir um subespaço completo F , manejando A convenientemente, a fim de que $T(F) \subset F$ e que T seja uma contração em F . Seguirá, então, a existência de um, e apenas um,

$$x \in F \subset \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$$

tal que $x = Tx$

isto é,

$$\begin{cases} x_{t_0} = (Tx)_{t_0} = \psi \\ x(t) = (Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x_\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A \end{cases}$$

e portanto, que

$$\begin{cases} x_{t_0} = \psi \\ \dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A \end{cases}$$

o que finalizará a prova.

É óbvio que devemos exigir que $x_t = \psi$, para todo x em F . Começemos pensando em impor a desigualdade que define uma

contração. Devemos tomar x^* e $\tilde{x}$ em F e considerar a diferença $(Tx^* - T\tilde{x})(t)$. Temos

$$(Tx^* - T\tilde{x})(t) = 0 \quad \text{se} \quad t_0 - h \leq t_0 \leq t$$

$$(Tx^* - T\tilde{x})(t) = \int_{t_0}^t [f(\tau, x_\tau^*) - f(\tau, \tilde{x}_\tau)] d\tau \quad \text{se} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A.$$

Portanto, basta considerar o intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + A$ e, daí, nesse intervalo temos

$$(2) \quad |(Tx^* - T\tilde{x})(t)| \leq \int_{t_0}^{t_0+A} |f(\tau, x_\tau^*) - f(\tau, \tilde{x}_\tau)| d\tau.$$

Queremos neste instante usar a desigualdade

$$(3) \quad |f(\tau, x_\tau^*) - f(\tau, \tilde{x}_\tau)| \leq L \|x_\tau^* - \tilde{x}_\tau\|, \quad t_0 \leq \tau \leq t_0 + A.$$

Como f é localmente lipschitziana em (t_0, Ψ) , podemos resolver o problema inicial localmente pois existe uma constante $L > 0$ e uma vizinhança Ω de (t_0, Ψ) no espaço $[0, \omega] \times C_H$ tais que

$$|f(\tau, \varphi_1) - f(\tau, \varphi_2)| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

quaisquer que sejam (τ, φ_1) e (τ, φ_2) em Ω .

Podemos supor que Ω seja da forma

$$\Omega = ([t_0 - \delta, t_0 + \delta_1] \cap [0, \omega]) \times (\Psi + \overline{C_\Delta})$$

onde δ e Δ são números reais positivos e $\Psi + \overline{C_\Delta}$ indica o conjunto de todas as funções $\varphi \in C_H$ tais que $\|\varphi - \Psi\| \leq \Delta$.

Assim, se impusermos que (τ, x_τ^*) e $(\tau, \tilde{x}_\tau)$ pertençam a Ω , para todo $\tau \in [t_0, t_0 + A]$, teremos verificada a desigualdade

(3). Para isto basta 1º) tomar $A \leq \delta$, pois, assim $[t_0, t_0 + A]$ estaria contido $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, \omega]$ e, 2º) impor que $\tau \in [t_0, t_0 + A]$ e $x \in F$, quaisquer, impliquem $x_\tau \in \Psi + \overline{C_\Delta}$, i.é.,

$$\|x_{\tau} - \Psi\| = \max_{-h \leq \theta \leq 0} |x(\tau + \theta) - \Psi(\theta)| \leq \Delta.$$

Consideremos as expressões de $|x(\tau + \theta) - \Psi(\theta)|$:

$$|x(\tau + \theta) - \Psi(\theta)| = \begin{cases} |\Psi(\tau + \theta - t_0) - \Psi(\theta)| & \text{se } -h \leq \theta \leq t_0 - \tau \\ |x(\tau + \theta) - \Psi(\theta)| & \text{se } t_0 - \tau \leq \theta \leq 0. \end{cases}$$

Devido à continuidade uniforme de Ψ , o número

$$|\Psi(\tau + \theta - t_0) - \Psi(\theta)|$$

pode ser feito menor que $\Delta/2$ se tomarmos os pontos $\tau + \theta - t_0$ e θ suficientemente próximos, digamos, a menos de $\eta > 0$, isto é, se $\tau - t_0 < \eta$ para todo $\tau \in [t_0, t_0 + A]$, o que se verifica tomando $A < \eta$, teremos

$$|\Psi(\tau + \theta - t_0) - \Psi(\theta)| < \frac{\Delta}{2} \leq \Delta.$$

A outra expressão pode ser feita menor que Δ por uma limitação sobre o tamanho de F , impondo que

$$x \in F \Rightarrow \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + A} |x(t) - \Psi(0)| \leq \frac{\Delta}{2}.$$

De fato, neste caso

$$|x(\tau + \theta) - \Psi(\theta)| \leq |x(\tau + \theta) - \Psi(0)| + |\Psi(0) - \Psi(\theta)| \leq \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2}$$

isto é, $|x(\tau + \theta) - \Psi(\theta)| \leq \Delta$ para todo $\tau \in [t_0, t_0 + A]$, já que estamos considerando o intervalo $[t_0 - \tau, 0]$, onde vale

$$\tau + \theta \in [t_0, t_0 + A] \quad \text{e} \quad |\theta - 0| < \tau - t_0 \leq A \leq \eta.$$

Reunindo estes resultados, concluímos que $A > 0$ e F devem ser escolhidos de modo a que A seja menor ou igual a δ, η e, obviamente $\frac{h}{2}$, e F um subconjunto de $\mathcal{B}([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$ de elementos x tais que $x_{t_0} = \Psi$ e $\|x - \Psi(0)\| \leq \frac{\Delta}{2}$.

Nestas condições podemos escrever, a partir de (2): para todo $t \in [t_0, t_0 + A]$,

$$|(Tx^* - T\tilde{x})(t)| \leq \int_{t_0}^{t_0+A} L \cdot \|x_{\tau}^* - \tilde{x}_{\tau}\| d\tau$$

Mas, para todo $\tau \in [t_0, t_0+A]$ temos

$$\|x_{\tau}^* - \tilde{x}_{\tau}\| = \max_{-h \leq \theta \leq 0} |x^*(\tau + \theta) - \tilde{x}(\tau + \theta)|$$

$$= \max_{\tau-h \leq t \leq \tau} |x^*(t) - \tilde{x}(t)|$$

$$\leq \max_{t_0-h \leq t \leq t_0+A} |x^*(t) - \tilde{x}(t)|$$

i.é.,

$$\|x_{\tau}^* - \tilde{x}_{\tau}\| \leq \|x^* - \tilde{x}\| \quad \text{e daí}$$

$$|(Tx^* - T\tilde{x})(t)| \leq AL \|x^* - \tilde{x}\|, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A,$$

i.é.,

$$\|Tx^* - T\tilde{x}\| \leq AL \|x^* - \tilde{x}\|.$$

É claro, portanto, que devemos exigir ainda que $A < \frac{1}{L}$.

Falta garantir que $T(F) \subset F$, isto é, que $Tx \in F$ se $x \in F$.

As únicas restrições são que $(Tx)_{t_0} = \psi$, que é verdadeira pela definição de T , e que

$$\|Tx - \psi(0)\| \leq \frac{\Delta}{2}.$$

Para isto, temos

$$|(Tx)(t) - \psi(0)| \leq \int_{t_0}^{t_0+A} |f(\tau, x_{\tau})| d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A.$$

Como f é contínua em (t_0, ψ) , f é limitada em uma vizinhança de (t_0, ψ) , digamos por um número $M > 0$. Esta vizinhança pode ser tomada igual a Ω , pois bastaria diminuir convenientemente os valores de δ e Δ (porém ainda mantendo o valor de L). Daí,

$$|f(\tau, \varphi)| \leq M \quad \text{em } \Omega,$$

e portanto para todo $\tau \in [t_0, t_0+A]$ vale

$$|f(\tau, x_{\tau})| \leq M$$

donde

$$\|Tx - \Psi(0)\| \leq MA$$

e para que seja

$$\|Tx - \Psi(0)\| \leq \frac{\Delta}{2}$$

basta exigir que $A \leq \frac{\Delta}{2M}$.

Demonstramos assim, que tomado $A > 0$ qualquer tal que

$$(4) \quad A \leq \left\{ \delta, \eta, \frac{h}{2}, \frac{\Delta}{2M} \right\} \quad \text{e} \quad A < \frac{1}{L}$$

e tomando F igual a

$$F = \left\{ x \in \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + A], R^n) : x_{t_0} = \Psi \text{ e } \|x - \Psi(0)\| \leq \frac{\Delta}{2} \right\},$$

a aplicação $T: F \rightarrow F$ é uma contração em F . É fácil ver que F é completo.

Isto encerra a demonstração do teorema.

A única solução de (1) que fica determinada de modo único a partir de uma escolha arbitrária de $t_0 \geq 0$, $\Psi \in C_H$ e $A > 0$ satisfazendo (4) será representada por $x(t; t_0, \Psi)$ ou $x(t_0, \Psi)$.

Na verdade, este também será o símbolo da solução maximal de (1) no ponto (t_0, Ψ) , que é o supremo do conjunto indutivo de todas as funções que resolvem (1) em algum intervalo do tipo $[t_0 - h, t_0 + A]$, ordenado por inclusão de funções.

O domínio da solução maximal terá que ser, então, do tipo $[t_0 - h, t_0 + A[$, $0 < A \leq +\infty$, pois se fôsse $[t_0 - h, t_0 + A]$, o problema de resolver a equação (1) nas condições iniciais

$$x_{t_0+A}(\theta) = x(t_0 + A - \theta) \quad \text{para} \quad -h \leq \theta \leq 0$$

produziria uma solução estritamente maior que a solução maximal.

Além disso, notemos que, se A fôr finito, a solução maximal não poderá ser limitada, pois se fôsse, existiria o limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + A} x(t; t_0, \Psi),$$

o que implicaria, novamente, na contradição da definição de solução maximal. Isto implica que soluções limitadas devem automaticamente estar definidas em $[t_0 - h, +\infty[$. No Capítulo II, lidaremos com equações onde a solução maximal $x(t; t_0, \Psi)$ está definida em $[t_0 - h, +\infty[$, para toda escolha de (t_0, Ψ) em $[0, \infty[\times C_{H_1}$, para algum H_1 , $0 < H_1 \leq H$.

Nêste caso, o problema de estudar a estabilidade de uma solução $\bar{x}(t; t_0; \Psi)$ da equação (1) pode ser reduzido ao estudo da solução trivial $x=0$ da equação transformada

$$(1') \quad \dot{x}(t) = g(t, x_t) \equiv f(t, \bar{x}_t + x_t) - f(t, \bar{x}_t).$$

Porisso, vamos nos limitar aos casos em que, para manter a notação, a aplicação f satisfaz as seguintes condições:

- I) $f(t, 0) = 0$, $\forall t \geq 0$, isto é, 0 é um ponto de equilíbrio da equação.
- II) f é contínua em $[0, \infty[\times C_H$.
- III) f é localmente lipschitziana em cada ponto de $[0, \infty[\times C_H$.

Nestas hipóteses, as equações $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ serão referidas como de classe $\mathcal{E}$ em $[0, \infty[\times C_H$.

Notemos que toda equação de classe $\mathcal{E}$ satisfaz às hipóteses do teorema 1.

Para detalhes relativos ao problema de extensão de soluções consultar a referência [5].

1.3) EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM RETARDAMENTO

Vamos definir agora o conceito de equação diferencial linear com retardamento. Nossa intenção é que toda equação linear seja de classe $\mathcal{E}$ em $[0, \infty[\times C$ e, portanto, que toda equação linear admita uma, e uma só, solução em cada ponto de $[0, \infty[\times C$.

Note que exigiremos $H = +\infty$.

Definição 2

A equação

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

é linear se, e somente se,

- (i) f é contínua em $[0, \infty[\times C$.
- (ii) fixado arbitrariamente t em $[0, \infty[$, a aplicação

$$\varphi \in C \longmapsto f(t, \varphi) \in \mathbb{R}^n$$

satisfaz a relação

$$f(t, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) = \alpha f(t, \varphi_1) + \beta f(t, \varphi_2)$$

quaisquer que sejam α e β escalares e φ_1 e φ_2 em C .

O resultado abaixo mostra que, de fato, toda equação linear é de classe $\mathcal{E}$ em $[0, \infty[\times C$. Notemos que tal propriedade é válida porque estaremos exigindo que se verifique apenas a lipschitzianeidade local de f em cada ponto de $[0, \infty[\times C$.

Proposição 1

Toda equação diferencial linear, com retardamento é de classe $\mathcal{E}$.

Demonstração

Consideremos a equação

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

com f satisfazendo as condições da definição 2. As condições (I) e (II) da definição da classe $\mathcal{E}$ estão automaticamente satisfeitas. Vamos verificar a condição III, isto é, que f é localmente lipschitziana em $[0, \omega[\times C$.

Tomemos (t, ψ) qualquer, com $t \geq 0$ e ψ em C . Como f é contínua em $(t, 0)$, então, (dado $\mathcal{E} = 1$) existem $\delta > 0$ e $\Delta > 0$ tais que a relação

$$(5) \quad |f(\tau, \varphi)| \leq 1$$

está verificada para todo ponto (τ, φ) em

$$\Omega = ([t - \delta, t + \delta] \cap [0, \omega[) \times (\psi + \overline{C_\Delta}).$$

Seja L uma constante positiva tal que $\frac{1}{L} \leq \Delta$. Afirmando que se tem

$$|f(\tau, \psi_1) - f(\tau, \psi_2)| \leq L \|\psi_1 - \psi_2\|$$

quaisquer que sejam (τ, ψ_1) e (τ, ψ_2) em Ω .

De fato, sendo óbvio o caso $\psi_1 = \psi_2$, suponhamos $\psi_1 \neq \psi_2$. Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned} |f(\tau, \psi_1) - f(\tau, \psi_2)| &= |f(\tau, \psi_1 - \psi_2)| \\ &= \left| f\left(\tau, \frac{\psi_1 - \psi_2}{L \|\psi_1 - \psi_2\|}\right) \right| \cdot L \|\psi_1 - \psi_2\| \\ &\leq L \|\psi_1 - \psi_2\|. \end{aligned}$$

Esta última passagem segue do fato que

$$\left\| \frac{\psi_1 - \psi_2}{L \|\psi_1 - \psi_2\|} \right\| = \frac{1}{L} \leq \Delta,$$

isto é,

$$\frac{\psi_1 - \psi_2}{L \|\psi_1 - \psi_2\|} \in \overline{C_\Delta}, \text{ aplicando a desigualdade (5).}$$

Isto demonstra a proposição.

1.4) REPRESENTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM RETARDAMENTO

Nesta secção vamos dar a expressão geral das equações diferenciais lineares com retardamento, o que conseguiremos com base em nossa adequação do teorema de representação de Riez.

Lembremos que uma função $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada se diz normalizada se $g(a) = 0$ e para todo $\theta \in [a, b]$, g é contínua à direita em θ . O conjunto de tais funções, denotado por $NBV([a, b], \mathbb{R})$, é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|g\| = V(g),$$

a variação total de g em $[a, b]$.

Este espaço de Banach é congruente ao dual (topológico) de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$; mais precisamente (teorema de Riez): a aplicação

$$T: g \in NBV([a, b], \mathbb{R}) \longmapsto Tg \in \mathcal{C}'([a, b], \mathbb{R})$$

é uma isometria sobrejetora, sendo Tg o funcional linear e contínuo de $\mathcal{C}'([a, b], \mathbb{R})$ definido por

$$(Tg)(\psi) = \int_a^b \psi(\theta) dg(\theta)$$

para todo ψ em $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Êstes resultados podem ser encontrados em [1].

Vamos generalizar alguns destes resultados ao caso que nos interessa.

Consideremos o espaço E das matrizes do tipo $m \times n$ cujas componentes são funções de variação limitada normalizadas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$.

Portanto, um elemento g de E pode ser escrito

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mn} \end{bmatrix}$$

com $g_{ij} \in \text{NBV}([a, b], \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Em E , vamos tomar a norma

$$\|g\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{V(g_{i1}) + \dots + V(g_{in})\}.$$

Com esta norma, E é um espaço de Banach.

Seja F o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ a valores em $\mathbb{R}^m$.

Portanto, um elemento de F é uma aplicação

$$f: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

linear e contínua. Estamos considerando em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana, em $\mathbb{R}^m$ a norma dada por

$$|x| = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|,$$

em $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ a norma da convergência uniforme e em F a norma habitual de aplicações lineares e contínuas entre espaços normados.

Usaremos a seguinte notação no teorema abaixo: dados $g \in E$ e uma função contínua Ψ definida em $[a, b]$, a valores em $\mathbb{R}^n$ de componentes $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, o símbolo

$$\int_a^b \Psi(\theta) dg(\theta)$$

representa o vetor numérico de $\mathbb{R}^n$ cuja i -ésima componente é dada por

$$\sum_{j=1}^n \int_a^b \psi_i(\theta) dg_{ij}(\theta)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Teorema 2

A aplicação

$$T: g \in E \longmapsto Tg \in F$$

onde

$$(Tg)(\Psi) = \int_a^b \Psi(\theta) dg(\theta)$$

para todo Ψ em $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$, é um isomorfismo topológico de E sobre F .

Demonstração

Devemos mostrar que T está bem definida, que T é linear e bicontínua.

É fácil ver que T é linear e que Tg , para todo $g \in E$, é uma aplicação linear e contínua de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^m$.

Além disso, dada $g \in E$, para todo $\varphi \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} |(Tg)(\varphi)| &= \left| \int_a^b \varphi(\theta) dg(\theta) \right| = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \int_a^b \varphi_1 dg_{ij} + \dots + \int_a^b \varphi_n dg_{in} \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \|\varphi_1\| v(g_{i1}) + \dots + \|\varphi_n\| v(g_{in}) \right\} \\ &\leq \left[\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ v(g_{i1}) + \dots + v(g_{in}) \right\} \right] \|\varphi\| = \|g\| \cdot \|\varphi\| \end{aligned}$$

e portanto,

$$\|Tg\| \leq \|g\|$$

o que prova que T é contínua.

Vamos mostrar agora que T é sobrejetora.

Seja I_j ($j=1, \dots, n$) a inversão de índice j de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ em $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$, isto é,

$$I_j(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha } j$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ e seja π_i ($i = 1, \dots, m$) a projeção de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\pi_i(x) = x_i,$$

$$\text{para todo } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Sabemos que I_j e π_i são lineares e contínuas.

Seja dada $f: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Queremos achar $g \in E$ tal que

$$Tg = f$$

Consideremos a aplicação

$$\pi_i \circ f \circ I_j: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n.$$

Ela é linear e contínua e, portanto, pelo teorema de Riez, existe uma única função $g_{ij} \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ tal que

$$(\pi_i \circ f \circ I_j)(\varphi) = \int_a^b \varphi(\theta) dg_{ij}(\theta)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ e tem-se

$$\|\pi_i \circ f \circ I_j\| = v(g_{ij}).$$

Com as funções g_{ij} , $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ construímos a matriz $g \in E$ e podemos afirmar que $Tg = f$.

De fato, se $\varphi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ temos

$$f(\varphi) = \begin{bmatrix} \pi_1 \circ f \circ I_1(\varphi_1) + \dots + \pi_1 \circ f \circ I_n(\varphi_n) \\ \vdots \\ \pi_m \circ f \circ I_1(\varphi_1) + \dots + \pi_m \circ f \circ I_n(\varphi_n) \end{bmatrix}$$

que é a mesma expressão que define

$$\int_a^b \varphi(\theta) d\mathbf{g}(\theta).$$

Portanto, T é sobrejetora.

Para finalizar a demonstração, vamos provar que

$$\|\mathbf{g}\| \leq n \cdot \|\mathbf{Tg}\|$$

para toda $\mathbf{g} \in E$. Daqui resultará que T é biunívoca e que a inversa de T é contínua.

Temos

$$\mathbf{Tg}(\varphi) = \begin{bmatrix} \pi_1 \circ (\mathbf{Tg}) \circ I_1(\varphi_1) + \dots + \pi_1 \circ (\mathbf{Tg}) \circ I_n(\varphi_n) \\ \vdots \\ \pi_m \circ (\mathbf{Tg}) \circ I_1(\varphi_1) + \dots + \pi_m \circ (\mathbf{Tg}) \circ I_n(\varphi_n) \end{bmatrix}$$

$$\text{com } \|\pi_i \circ (\mathbf{Tg}) \circ I_j\| = v(g_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

Portanto,

$$v(g_{ij}) \leq \|\pi_i\| \cdot \|\mathbf{Tg}\| \cdot \|I_j\| \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

Mas

$$\|\pi_i\| = \|I_j\| = 1 \quad \text{para todo } i \text{ e todo } j.$$

Dai

$$v(g_{ij}) \leq \|\mathbf{Tg}\|.$$

Logo

$$v(g_{11}) + \dots + v(g_{1n}) \leq n \|\mathbf{Tg}\|$$

e portanto

$$\|\mathbf{g}\| \leq n \|\mathbf{Tg}\|.$$

Em vista do teorema acima, temos a seguinte representação das equações diferenciais lineares com retardamento:

Proposição 1.2

Toda equação diferencial linear com retardamento

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

pode ser posta na forma

$$(8) \quad \dot{x}(t) = \int_{-h}^0 x_t(\theta) dg(\theta, t)$$

onde $g(\theta, t)$ é, para cada $t \in [0, \infty[$, uma matriz $n \times n$ cujas componentes são funções de variação limitada normalizadas. Além disso, a representação (8) é única.

A demonstração resulta imediatamente lembrando que se

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

é linear, então, fixado $t \in [0, \infty[$, a aplicação

$$\varphi \in \mathcal{C} \mapsto f(t, \varphi) \in \mathbb{R}^n$$

é linear e contínua.

1.5) UM EXEMPLO

Vamos considerar um exemplo de equação linear com retardamento. Este exemplo desempenhará um papel importante neste trabalho.

Consideremos uma sequência finita crescente de números positivos $h_1, h_2, \dots, h_m$, menores que h .

Sejam $A(t), A_1(t), \dots, A_m(t)$ matrizes quadradas de ordem n , cujas componentes são funções contínuas da variável $t \in [0, \infty[$.

A equação

$$(9) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{r=1}^m A_r(t) \cdot x(t-h_r)$$

é uma equação diferencial linear com retardamento *.

De fato, a equação pode ser escrita na forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

onde f é definida por

$$f(t, \varphi) = A(t) \varphi(0) + \sum_{r=1}^m A_r(t) \varphi(-h_r)$$

e é fácil comprovar que f é contínua em $[0, \infty[\times C$ e que, para $t \geq 0$ fixado arbitrariamente, f é linear na segunda componente.

Colocando a equação (9) na forma

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 x_t(\theta) d_{\theta} g(\theta, t)$$

descrita na proposição 1.2, obtemos

$$g(\theta, t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -h \leq \theta < -h_m \\ A_m(t) & \text{para } -h_m \leq \theta < -h_{m-1} \\ A_m(t) + A_{m-1}(t) & \text{para } -h_{m-1} \leq \theta < -h_{m-2} \\ \vdots & \\ A_m(t) + \dots + A_1(t) & \text{para } -h_1 \leq \theta < 0 \\ A_m(t) + \dots + A_1(t) + A(t) & \text{para } \theta = 0. \end{cases}$$

Neste caso, para cada $t \geq 0$ fixado arbitrariamente, as funções $g_{ij}(\theta, t)$ são funções do tipo escada.

Nota

Na proposição 1.2, a dependência das funções componentes da matriz g , com relação a t , não é necessariamente contínua como mos-

* Esta é a expressão geral das equações diferenciais funcionais do tipo diferença.

tra o exemplo da equação diferencial linear com retardamento

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

que se obtém tomando f definida por

$$f(t, \varphi) = \begin{cases} \varphi(-\frac{1}{h}) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{h} \\ \varphi(-\frac{1}{t}) & \text{se } t \geq \frac{1}{h} \end{cases} \quad (*)$$

De fato, neste caso, obtemos a matriz $g(\theta, t) = (g_{ij}(\theta, t))$ dada

por

$$g_{ij}(\theta, t) = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

$$g_{ii}(\theta, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -h \leq \theta < -\frac{1}{h} \\ 0 & \text{se } -\frac{1}{h} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{h}$$

$$g_{ii}(\theta, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -h \leq \theta < -\frac{1}{t} \\ 0 & \text{se } -\frac{1}{t} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad \text{para } t \geq \frac{1}{h}.$$

Consideremos θ fixado, igual a $-\frac{1}{h}$. Então, a função $g_{ii}(-\frac{1}{h}, t)$, $t \in [0, +\infty[$, é descontínua no ponto $t = \frac{1}{h}$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Neste mesmo exemplo

$$V(g(\cdot, t) - g(\cdot, \frac{1}{h})) = 1 \quad \text{se } t \neq \frac{1}{h}$$

e, portanto, também não é verdade que

$$t_n \rightarrow t \Rightarrow g(\cdot, t_n) \xrightarrow{E} g(\cdot, t).$$

(*) Estamos considerando aqui $h > 1$.

Capítulo 2

SÔBRE O MÉTODO DIRETO NAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO

2.1) INTRODUÇÃO

Aqui, apresentamos uma adaptação de um teorema que dá condições suficientes para a estabilidade uniforme e estabilidade assintótica uniforme e uma aplicação a uma certa classe de equações diferenciais lineares com retardamento, classe esta das equações diferenciais diferença, mencionada em vários textos sobre equações com retardamento.

Não apresentaremos senão as idéias técnicas sobre a estabilidade e sobre o método direto de Liapounov adaptado ao caso de equações diferenciais com retardamento. Em vários textos encontram-se exposições mais detalhadas, por exemplo, [5] e [6].

O problema da estabilidade pode sempre ser reduzido à análise correspondente à solução idênticamente nula, conforme já indicamos no capítulo 1; por isso, nossas equações serão

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

de classe $\mathcal{E}$ em $[0, \infty[\times C_H$ e tais que existe $H_1 \in [0, H[$, tal que o problema que consiste na imposição da equação (1) e da condição inicial $x_{t_0} = \Psi$, tem uma única solução $x(t; t_0, \Psi)$ definida em $[t_0 + \infty[$, quaisquer que sejam $t_0 \geq 0$ e $\Psi \in C_{H_1}$.

Vamos apresentar as definições necessárias.

Definição 1

A solução $x = 0$ de (1), ou a equação (1), se diz

(i.1) estável em $t_0 \geq 0$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, tal que as relações $t \geq t_0$, $\psi \in C_{H_1}$ e $\|\psi\| \leq \delta$ implicam $\|x_t(t_0, \psi)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$, isto é,

$$(2) \quad \lim_{\psi \rightarrow 0, \psi \in C_{H_1}} x_t(t_0, \psi) = 0$$

uniformemente com relação a t variável em $[t_0, +\infty[$.

(i.2) estável se fôr estável em todo ponto $t_0 \geq 0$.

(i.3) uniformemente estável se fôr estável e se o limite (2) fôr também uniforme com relação a t_0 , isto é, $\delta = \delta(\varepsilon)$ independente de t_0 .

(ii.1) assintoticamente estável em $t_0 \geq 0$ se fôr estável em t_0 e se existe $H_0 = H_0(t_0) > 0$ tal que $H_0 \leq H_1$ e

$$(3) \quad \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \geq 0}} x_{t_0+k}(t_0, \psi) = 0 \text{ se } t_0 \geq 0 \text{ e } \psi \in C_{H_0}.$$

Isto significa que, dados $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_{H_0}$ quaisquer, e tomado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe um número real $T = T(\varepsilon, H_0) \geq 0$ tal que

$$k \geq T(\varepsilon; H_0) \Rightarrow \|x_{t_0+k}(t_0, \psi)\| \leq \varepsilon$$

(ii.2) assintoticamente estável se fôr assintoticamente estável em todo ponto $t_0 \geq 0$.

(ii.3) uniformemente assintoticamente estável se fôr uniformemente estável e se o limite (3) ocorrer uniformemente com relação a (t_0, ψ) variável em $[0, \infty[\times C_{H_0}$, com $H_0 > 0$ agora independente de t_0 .

O método direto de Liapounov pode ser adaptado ao caso de equações com retardamento pela consideração de certos funcionais contínuos

$$(4) \quad V: [0, \infty[\times C_H \longrightarrow \mathbb{R}$$

denominados funcionais de Liapounov.

Analogamente ao caso de equações ordinárias, o método usa um conceito de derivada de V com relação à equação (1), definida, no ponto (t_0, Ψ) de $[0, \infty[\times C_H$, por

$$(5) \quad \dot{V}(t_0, \Psi) = \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{V(t_0 + k, x_{t_0+k}(t_0, \Psi)) - V(t_0, \Psi)}{k}$$

A referência [7] apresenta uma exposição esclarecedora de inconvenientes dessa definição, que, à primeira vista, exige que se conheça a solução $x(t; t_0, \Psi)$ para se calcular $\dot{V}(t_0, \Psi)$.

Alí e na referência [3], foram conseguidas definições de derivada de $\dot{V}$ com relação à equação 1 que resolvem o problema, definições estas que não usam o conhecimento a priori da solução, nem sequer em seu enunciado. Além disso, tais definições conduzem ao mesmo resultado do que (5) no caso em que V é localmente lipschitziana.

Entretanto, em certos casos, a definição (5) funciona, isto é, a necessidade de conhecer a solução $x(t; t_0, \Psi)$ para calcular $\dot{V}(t_0, \Psi)$ é aparente, como se passará com os casos que estudaremos. Por isso, vamos nos limitar à expressão (5).

Observemos que se a função $t \mapsto V(t, x_t(t_0, \Psi))$ for derivável à direita em t_0 , então, $\dot{V}(t_0, \Psi)$ é um número real e

$$\dot{V}(t_0, \Psi) = \frac{d}{dt} V(t, x_t(t_0, \Psi)) \Big|_{t_0}.$$

Passemos ao teorema que é a parte central do Método Direto de Liapounov para a pesquisa da estabilidade no âmbito das equações diferenciais com retardamento.

2.2) CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A ESTABILIDADE

O teorema abaixo apresenta uma condição suficiente para se garantir a estabilidade uniforme e a estabilidade assintótica uniforme da solução trivial $x = 0$ da equação

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

na hipótese de que seja de classe $\mathcal{C}$ em $[0, \infty[\times C_H$.

Apresentamos a demonstração com a finalidade de adaptar o conhecido teorema às hipóteses, levemente menos restritivas, que assumimos e ao nosso propósito.

Consideremos um funcional contínuo qualquer

$$(4) \quad v: [0, \infty[\times C_H \longrightarrow \mathbb{R};$$

sejam u, v e w funções quaisquer contínuas e crescentes, definidas em $[0, H[$ a valores reais, tais que

$$\begin{aligned} u(0) &= v(0) = w(0) & e \\ u(s) &> 0 \text{ e } v(s) > 0 & \text{ se } s > 0. \end{aligned}$$

Teorema 1

Se mediante uma escolha apropriada dos elementos arbitrárias, tivermos verificadas as seguintes relações para todo (t, φ) em $[0, \infty[\times C_H$:

$$(6) \quad u(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|)$$

$$(7) \quad \dot{v}(t, \varphi) \leq -w(|\varphi(0)|)$$

então existe $H_0 > 0$ tal que a solução $x(t; t_0, \varphi)$ da equação (1), determinada pela condição inicial $x_{t_0} = \varphi$ está definida em $[t_0, +\infty[$, quaisquer que sejam $t_0 \geq 0$ e $\varphi \in C_{H_0}$ e a solução $x = 0$ é uniformemente estável. Se, ainda mais, w for estritamente crescente, então, a estabilidade é assintótica uniforme.

Nota

Um funcional V satisfazendo (4), (6) e (7) é denominado um funcional de Liapounov, para a equação (1).

Demonstração

Tomemos um número real positivo H_1 , menor que H , e seja $H_0 > 0$ um número qualquer satisfazendo a desigualdade

$$(8) \quad v(H_0) \leq u(H_1).$$

Fixemos arbitrariamente $t_0 \geq 0$ e Ψ em $\overline{C_{H_0}}$ e consideremos a solução maximal $x(t; \Psi)$ da equação (1) que satisfaz $x_{t_0} = \Psi$.

Vamos provar que esta solução está definida em $[t_0 - h, +\infty[$. Para isto, basta provar que ela é limitada no seu intervalo de definição.

A hipótese (7) permite concluir que a função $V(t, x_t(t_0, \Psi))$ é decrescente* com t variando no intervalo maximal de $x(t_0, \Psi)$ em consequência de

$$\dot{V}(t, x_t(t_0, \Psi)) \leq -w(|x(t; t_0, \Psi)|) \leq 0.$$

Dai, usando as relações $t \geq t_0$ e as desigualdades (6), podemos escrever - lembrar que $x_{t_0}(t_0, \Psi) = \Psi$ -:

$$u(|x_t(t_0, \Psi)(0)|) \leq V(t, x_t(t_0, \Psi)) \leq V(t_0, \Psi) \leq v(\|\Psi\|).$$

Usando o fato $\|\Psi\| \leq H_0$ e v crescente; em seguida, a desigualdade (8), tiramos

$$v(\|\Psi\|) \leq v(H_0) \leq u(H_1).$$

(*) [8], pag. 354

Daí, e levando em conta que u é crescente

$$u(|x(t; t_0, \psi)|) \leq u(H_1)$$

$$|x(t; t_0, \psi)| \leq H_1$$

para todo t no domínio de $x(t_0; \psi)$, isto é, $x(t_0; \psi)$ é limitada no seu domínio e, daí, $[t_0 - h, +\infty[$ é o seu domínio.

Assim, toda solução que nasce em algum ponto ψ em $\overline{C_{H_0}}$ no instante $t_0 \geq 0$ qualquer está definida em $[t_0 - h, +\infty[$.

Vamos provar que $x=0$ é uniformemente estável. Seja $t_0 \geq 0$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ um número real positivo menor que H_0 e ε tal que

$$(9) \quad v(\delta) \leq u(\varepsilon).$$

Note que δ independe de t_0 .

Como para todo $\psi \in \overline{C_\delta}$ e para todo $t \geq t_0$:

$$u(|x(t; t_0, \psi)|) \leq v(t, x_t(t_0, \psi)) \leq v(t_0, \psi) \leq v(\|\psi\|) \leq v(\delta)$$

usando a relação (9) e o fato de u ser crescente:

$$(10) \quad |x(t; t_0, \psi)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0.$$

Isto demonstra a estabilidade uniforme de $x=0$.

Vamos assumir agora que w é estritamente crescente e provar que a estabilidade é assintótica.

Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$T = T(\varepsilon) = \frac{v(H_0)}{\psi(\varepsilon)}$$

sendo δ como determinado acima.

Afirmamos que no intervalo $[t_0, t_0 + T]$ existe um ponto t_1 tal que

$$(12) \quad \|x_{t_1}(t_0, \psi)\| < \delta$$

Daqui seguirá que a solução de (1), que no instante inicial t_1 tem valor inicial $x_{t_1}(t_0, \psi)$, de acordo com (9) e (10), satisfaz a relação

$$\|x_t(t_1, x_{t_1}(t_0, \psi))\| \leq \varepsilon \quad \text{para } t \geq t_1$$

ou, em vista da unicidade,

$$\|x_t(t_0, \psi)\| \leq \varepsilon \quad \text{para } t \geq t_1$$

e, com maior razão

$$\|x_t(t_0, \psi)\| \leq \varepsilon \quad \text{para } t \geq t_0 + T$$

o que demonstrará a estabilidade assintótica uniforme da solução $x=0$.

Vamos, então, provar (12). Se, por absurdo, tivéssemos, para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\|x_t(t_0, \psi)\| \geq \delta$$

então, como w é estritamente crescente

$$w(|x(t; t_0, \psi)|) \geq w(\delta)$$

e, portanto,

$$\dot{V}(t, x_t(t_0, \psi)) \leq -w(\delta)$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Daí, como (ver [8], página 361).

$$V(t, x_t(t_0, \psi)) - V(t_0, \psi) \leq \int_{t_0}^t w(\zeta, x_\zeta(t_0, \psi)) d\zeta$$

teremos

$$V(t; x_t(t_0, \psi)) - V(t_0, \psi) \leq -w(\delta) \cdot (t - t_0)$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Em particular, para $t = t_0 + T$ viria,

$$V(t_0 + T, x_{t_0+T}(t_0, \psi)) \leq V(t_0, \psi) - w(\delta) \cdot T$$

o que conduz a um absurdo pois, usando (11),

$$V(t_0, \psi) - w(\delta), \quad T < 0$$

e, por hipótese, V só assume valores não negativos.

Isto termina a demonstração do teorema.

2.3) CONSIDERAÇÃO DE UM EXEMPLO

Vamos apresentar aqui um projeto de análise da estabilidade da solução $x=0$ da equação

$$(13) \quad \dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + \sum_{r=1}^m A_r(t) \cdot x(t-h_r),$$

onde $A(t)$, $A_1(t)$, ..., $A_m(t)$ são matrizes quadradas de ordem n cujas componentes são funções contínuas de t , variável em $[0, +\infty[$, como na secção 1.5.

Consideremos o funcional $V(t, \varphi)$ dado por

$$(14) \quad \varphi^*(0) \cdot B(t) \cdot \varphi(0) + \sum_{r=1}^m \int_{-h_r}^0 \varphi^*(\theta) \cdot M_r \cdot \varphi(\theta) d\theta$$

- o símbolo M^* indica a transposta de uma matriz M - onde $B(t)$ é qualquer matriz quadrada simétrica de ordem n cujas componentes são funções de classe $\mathcal{C}^1$ de $t \in [0, \infty[$ e M_r ($r=1, \dots, m$) é uma matriz $n \times n$ constante qualquer.

Nosso propósito é verificar se, mediante escolhas apropriadas de $B(t)$ e M_r ($r=1, \dots, m$), o funcional (14) pode ser feito um funcional de Liapounov para a equação (13). Para isto, vamos calcular a derivada de (14) com relação à equação (13), definida por

$$V(t_0, \Psi) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{V(t_0 + k, x_{t_0+k}(t_0, \Psi)) - V(t_0, \Psi)}{k}$$

para todo $(t_0, \Psi) \in [0, +\infty[\times C_H$. No nosso caso, $H = +\infty$.

Devido à forma particular do funcional V , a derivada $\dot{V}(t_0, \Psi)$ poderá ser obtida como

$$\dot{V}(t_0, \Psi) = \frac{d}{dt} V(t, x_t(t_0, \Psi)) \Big|_{t_0}$$

para todo (t_0, Ψ) em $[0, \infty[\times C$, pois a expressão do lado direito neste caso existe e é um número real (ver [8], pag. 354). De fato,

$$V(t, x_t) = (x^* \cdot B \cdot x)(t) + \sum_{r=1}^m \int_{-h_r}^0 x^*(t+\theta) \cdot M_r \cdot x(t+\theta) d\theta.$$

$$= (x^* \cdot B \cdot x)(t) + \sum_{r=1}^m \int_{t-h_r}^t x^*(s) \cdot M_r \cdot x(s) ds,$$

donde se vê que $V(t, x_t)$ é derivável em todo ponto $t_0 \geq 0$; além disso, o valor

$$\frac{dV(t, x_t)}{dt} (t)$$

é dado por

$$\frac{d}{dt} (x^* \cdot B \cdot x)(t) + \sum_{r=1}^m [(x^* \cdot M_r \cdot x)(t) - (x^* \cdot M_r \cdot x)(t - h_r)].$$

Desde que

$$\frac{d}{dt} (x^* \cdot B \cdot x)(t) = ([\dot{x}]^* \cdot B \cdot x + x^* \cdot B \cdot \dot{x} + x^* \cdot B \cdot [\dot{x}]^*)(t)$$

e levando em conta que $\dot{x}$ é dado por (13), obtemos, como valor de $\dot{V}(t, x_t)$ a seguinte expressão:

$$x_t^*(0) \cdot C(t) \cdot x_t(0) + \sum_{r=1}^m x_t^*(-h_r) \cdot A_r^* \cdot B \cdot x_t(0) \\ + \sum_{r=1}^m x_t^*(0) \cdot B \cdot A_r \cdot x_t(-h_r) + \sum_{r=1}^m x_t^*(-h_r) \cdot (-M_r) \cdot x_t(-h_r).$$

$$\text{onde } C = A^* \cdot B + \dot{B} + B \cdot A + \sum_{r=1}^m M_r.$$

Portanto, no ponto (t_0, Ψ) teremos $\hat{V}(t_0, \Psi)$ dado por

$$(15) \quad \Psi^*(0) \cdot C(t) \cdot \Psi(0) + \sum_{r=1}^m \Psi^*(-h_r) \cdot A_r^* \cdot B \cdot \Psi(0) \\ + \sum_{r=1}^m \Psi^*(0) \cdot B A_r \cdot \Psi(-h_r) + \sum_{r=1}^m \Psi^*(-h_r) \cdot (-M_r) \cdot \Psi(-h_r).$$

Vamos interpretar $\hat{V}(t_0, \Psi)$ como uma forma quadrática em $R^{n(m+1)}$, nas componentes de

$$\Psi(-h_m), \dots, \Psi(-h_1), \Psi(0)$$

cuja matriz em relação à base canônica de $n(m+1)$ é

$$(16) \quad D(t_0) = \begin{bmatrix} -M_m & & & & A_m^* B \\ & -M_{m-1} & & & A_{m-1}^* B \\ & & \ddots & & \vdots \\ \bigcirc & & & -M_1 & A_1^* B \\ -BA_m & BA_{m-1} & \dots & BA_1 & C \end{bmatrix}$$

Foi esta interpretação que nos levou à escolha do funcional

(14).

Vamos agora estabelecer condições suficientes para a estabilidade da equação (13), impondo certas escolhas sobre os elementos arbitrários B e M_r , $r = 1, \dots, m$.

Se pudermos escolher $B(t)$ e M_r , $r=1, \dots, m$, de tal modo que estejam verificadas as condições (6) e (7) do teorema da seção anterior, para o nosso exemplo, teremos garantida a estabilidade uniforme (simples) e assintótica. A condição (6) consiste em se verificarem as duas desigualdades

$$V(t_0, \Psi) \leq v(\|\Psi\|)$$

com v crescente tal que $v(0) = 0$ e

$$V(t_0, \Psi) \geq u(|\Psi(0)|)$$

com u estritamente crescente tal que $u(0) = 0$, para quaisquer $t_0 \geq 0$ e $\Psi \in C_H$.

A primeira desigualdade estará certamente verificada se tomarmos $B(t)$ limitada em $t \in [0, \infty[$, enquanto que, para a segunda, basta escolher $B(t)$ positiva definida.

Agora, a condição (7) exige que

$$\dot{V}(t_0, \Psi) \leq 0$$

o que equivale, de acordo com a interpretação de (15) como forma quadrática, a exigir que a matriz $D(t_0)$, seja semi-definida negativa para cada $t_0 \in [0, \infty[$.

Podemos, portanto, estabelecer a seguinte proposição:

Proposição 2

Se, relativamente à equação (13), for possível escolher uma matriz simétrica $B(t)$ cujas componentes são de classe $\mathcal{C}^1$ em $[0, \infty[$ e matrizes constantes M_r , $r=1, \dots, m$, tais que:

- (i) $B(t)$, para cada $t \geq 0$, é definida positiva e limitada,
- (ii) a matriz quadrada (16) é semidefinida negativa, então a solução $x = 0$ de (13) é uniformemente estável.

Se, ainda, $D(t)$ puder ser feita negativa definida, então a estabilidade uniforme será assintótica.

Demonstração

Levando em conta as observações feitas anteriormente, basta provar que existe $w: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, estritamente crescente com $w(0) = 0$, tal que

$$\dot{V}(t_0, \Psi) \leq w(|\Psi(0)|),$$

para o caso em que $D(t_0)$ é uma matriz negativa definida.

Mas, neste caso, existe $\lambda > 0$ independente de t_0 tal que $V(t_0, \Psi)$ é menor ou igual a

$$-\lambda \cdot |(\Psi_1(-h_m), \dots, \Psi_n(0))^*|^2$$

que é menor ou igual a $-\lambda |\Psi(0)|^2$.

Assim, basta tomar $w(s) = \lambda s^2$, $s \in [0, \infty[$, o que encerra a demonstração.

Observemos que, o que é importante para fins operacionais, para analisar se a matriz D é definida ou semidefinida negativa temos critérios práticos, que podem ser encontrados em textos de Teoria de Matrizes, por exemplo, [9].

Capítulo 3

SÔBRE FAMÍLIAS DE EQUAÇÕES LINEARES ASSOCIADAS

3.1). INTRODUÇÃO

Na referência [2], foi definido o conceito de família de equações diferenciais ordinárias associada a uma dada equação diferencial, mostrada a existência de tais famílias e foram criados métodos para a pesquisa sobre estabilidade da equação dada, usando a estabilidade de cada equação da família, sob certas hipóteses. Foi ainda apreciada a vantagem de que todas as equações de uma tal família fôssem lineares.

Em [7], já temos o conceito de família de equações diferenciais com retardamento associada a uma dada equação com retardamento e alguns teoremas análogos àqueles de [2].

Procurando seguir nestas linhas, vamos mostrar que sempre existem tais famílias; e mais, podemos garantir que, pelo menos uma delas, é constituída exclusivamente de equações diferenciais lineares com retardamento. Isto faremos na secção 3.2.

A seguir, faremos uma aplicação do método direto usando famílias associadas na investigação sobre a estabilidade de uma classe de equações não lineares; nos moldes dos resultados do capítulo anterior.

3.2) FAMÍLIA DE EQUAÇÕES LINEARES COM RETARDAMENTO ASSOCIADA

Definição 1

Seja dada a equação

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

de classe $\mathcal{E}$ em $[0, \infty[\times C_H$ e seja

$$(2) \quad \dot{x}(t) = u(t, x_t; \zeta), \quad \zeta \in C_H$$

uma família de equações com retardamento, parametrizada por $\zeta \in C_H$, tal que (notação de [7]):

(FA1) para cada $\zeta \in C_H$, a equação da família é de classe $\mathcal{E}$ em $[0, \infty[\times C_H$.

(FA2) (condição de associação)

$$u(t, \zeta; \zeta) = f(t, \zeta)$$

para todo $t \geq 0$ e ζ em C_H .

De um modo geral, e levando em conta os resultados da secção 1.4, podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1

Dada uma equação diferencial com retardamento

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

de classe $\mathcal{E}$ em $[0, \infty[\times C_H$, existem famílias de equações lineares associadas à equação (1).

Demonstração

Se a família de equações

$$(2) \quad \dot{x}(t) = u(t, x_t; \zeta), \quad \zeta \in C_H$$

fôr constituída exclusivamente de equações lineares, então, para cada $\zeta \in C_H$, é possível determinar uma matriz $g = (g_{ij})$ de ordem n , cujas componentes são funções dependentes do parâmetro ζ e das variáveis θ em $[-h, 0]$ e t em $[0, \infty[$, sendo funções de variação limitada normalizadas em relação a θ , tal que a família (2) pode ser escrita equivalentemente na forma

$$(3) \quad \dot{x}(t) = \int_{-h}^0 x_t(\theta) d_{\theta} g(\theta, t; \zeta), \quad \zeta \in C_H.$$

Se quisermos que (2) satisfaça a condição de associação, basta impor que a matriz g satisfaça ainda

$$\int_{-h}^0 \zeta(\theta) d_{\theta} g(\theta, t; \zeta) = f(t, \zeta)$$

para todo $\zeta \in C_H$, i.é.,

$$(4) \quad \int_{-h}^0 \zeta_1(\theta) d_{\theta} g_{i1} + \dots + \int_{-h}^0 \zeta_n(\theta) d_{\theta} g_{in} = f_i(t, \zeta)$$

para $i=1, \dots, n$ e $\zeta \in C_H$.

Ora, definindo $g_{ij}(\theta, t; \zeta)$ como sendo a função nula se ζ é a função nula e nos demais casos por

$$(5) \quad g_{ij}(\theta, t; \zeta) = \begin{cases} 0 & , \quad -h \leq \theta \leq c_{\zeta} \\ \frac{\zeta_j(c_{\zeta})}{\|\zeta\|^2} \cdot f_i(t, \zeta), & c_{\zeta} \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

para todo $t \geq 0$, onde c_{ζ} é um ponto qualquer de $[-h, 0]$ onde se tem

$$|\zeta(c_{\zeta})| = \|\zeta\|$$

teremos verificada a relação (4), pois,

$$\int_{-h}^0 \xi_j(\theta) dg_{ij}(\theta, t; \xi) = \frac{|\xi_j(c_\xi)|^2}{\|\xi\|^2} \cdot f_i(t, \xi).$$

A condição (FAL) é trivial, pois $f(t, \xi)$ é de classe $\mathcal{E}$, isto encerra a demonstração.

3.3) CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE USANDO FAMÍLIAS ASSOCIADAS - UMA APLICAÇÃO

Vamos considerar o exemplo que segue.

Seja $A(t, \Psi)$, $A_1(t, \Psi)$, ..., $A_m(t, \Psi)$ $(m+1)$ matrizes de ordem, cujas componentes são aplicações contínuas de $[0, \infty[\times C_H$ em R . Seja $(h_1, \dots, h_m, h)$ uma sequência estritamente crescente de números reais com $h_1 > 0$.

Consideremos a equação

$$(6) \quad \dot{x}(t) = A(t, x_t) \cdot x(t) + \sum_{r=1}^m A_r(t, x_t) \cdot x(t - h_r)$$

que é de classe $\mathcal{E}$ em $[0, \infty[\times C_H$.

Aqui, $f(t, \Psi)$ tem o valor

$$A(t, \Psi) \cdot \Psi(0) + \sum_{r=1}^m A_r(t, \Psi) \cdot \Psi(-h_r)$$

de onde se percebe que

$$(7) \quad \dot{x}(t) = A(t, \xi) \cdot x_t(0) + \sum_{r=1}^m A_r(t, \xi) \cdot x_t(-h_r), \quad \xi \in C_H$$

é uma família de equações lineares com retardamento associada à equação (6), o que é fácil comprovar.

Vamos estabelecer uma condição suficiente para a estabilidade de (6), usando a família associada (7), sob as hipóteses abaixo descritas. Este processo tem analogia com aqueles apresentados em [2], para o caso de equações ordinárias e estendido em [7], para as equações com retardamento.

Consideremos o funcional $V(t, \Psi)$ dado, como na seção 2.3, por

$$(8) \quad \Psi^*(0) \cdot B(t) \cdot \Psi(0) + \sum_{r=1}^m \int_{-h_r}^0 \Psi^*(\theta) \cdot M_r \cdot \Psi(\theta) d\theta.$$

A matriz $B(t)$ é simétrica de ordem n de componentes de classe $\mathcal{C}^1$ em $[0, \infty[$ e M_r ($r=1, \dots, m$) é uma matriz constante.

De um modo análogo ao que fizemos lá, obtemos a seguinte expressão para o valor da derivada de V , ao longo das trajetórias da equação da família (7), correspondente ao valor ζ do parâmetro, calculada no ponto (t, Ψ) :

$$(9) \quad \dot{V}(t_0, \Psi; \zeta) = \Psi^*(0) \cdot C \cdot \Psi(0) + \sum_{r=1}^m \Psi^*(-h_r) \cdot B \cdot A_r \cdot \Psi(0) + \\ \sum_{r=1}^m \Psi^*(0) \cdot A_r^* \cdot B \cdot \Psi(-h_r) + \sum_{r=1}^m \Psi^*(-h_r) \cdot [-M_r] \cdot \Psi(-h_r)$$

para todo $t \geq 0$, $\Psi \in \zeta$ em C_H , onde

$$C = BA + A^*B + \dot{B} + \sum_{r=1}^m M_r.$$

Interpretaremos (9) como uma forma quadrática, parametrizada por $\zeta \in C_H$, nas variáveis que são as componentes de

$$\Psi(-h_m), \dots, \Psi(-h_1), \Psi(0)$$

cujas matrizes são

$$(10) \quad D(t, \xi) = \begin{bmatrix} -M_m & & & A_m^* B \\ & -M_{m-1} & & A_{m-1}^* B \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & -M_1 & A_1^* B \\ BA_m & BA_{m-1} & \dots & BA_1 & C \end{bmatrix}$$

onde simplificamos a notação de, por exemplo, $B(t) \cdot A_m(t, \xi)$ para $B \cdot A_m$.

É importante notar e é fácil verificar que

$$(11) \quad \dot{V}(t_0, \psi; \psi) = \dot{V}(t_0, \psi).$$

Podemos, então, demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 2

Se, relativamente a equação (6) e à família associada (7), pudermos achar V do tipo descrito em (8) tal que

- (i) a matriz $B(t)$, para cada $t \geq 0$, é definida positiva e limitada e as matrizes constantes M_r ($r = 1, \dots, n$) são positivas definidas;
- (ii) $D(t; \xi)$, como dada em (10), é, para todo $\xi \in C_H$ e $t \geq 0$, semi-definida (resp., definida) negativa, então, a solução $x = 0$ de (6) é uniformemente estável (resp. assintoticamente estável).

Demonstração

A condição (6) do teorema 2.1 é facilmente verificada.

Para (7), temos:

$$\dot{V}(t, \varphi, \psi) \leq -w(|\psi(0)|)$$

para todo $t \geq 0$ e ψ em C_H e daí, como

$$\dot{V}(t, \Psi; \Psi) = \dot{V}(t, \Psi)$$

tiramos a condição (7):

$$\dot{V}(t, \Psi) \leq -w(|\Psi(0)|)$$

com w crescente (resp., estritamente crescente) o que termina a demonstração.

Como uma nota final, observamos que em [7] se encontra demonstrado que, em geral, se V é localmente lipschitziano, então, as derivadas de V , relativamente a uma equação dada e às equações de uma família associada, satisfazem a relação (11), o que aqui constatamos diretamente.

A. [illegible] (b) (7) - [illegible]

Page 100

(b) (7) - [illegible]

Page 100 - [illegible]

(b) (7) - [illegible]

Page 100 - [illegible]

(b) (7) - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

RESUMO

Neste trabalho é dada uma definição satisfatória de equação diferencial linear com retardamento, sua representação geral, usando a integral de Stieltjes, mostrada a existência de famílias de equações lineares com retardamento associadas e estabelecido um procedimento para a investigação sobre estabilidade de uma classe de equações não lineares com retardamento, pelo uso do método direto e uma família associada de equações lineares com retardamento, num primeiro passo para estender [2], ao âmbito das equações com retardamento, nas linhas de [7].

A. [illegible] (b) (7) - [illegible]

Page 100

(b) (7) - [illegible]

Page 100 - [illegible]

(b) (7) - [illegible]

Page 100 - [illegible]

(b) (7) - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

Page 100 - [illegible]

REFERÊNCIAS

- [1] Bachman, G. e Narici L. - Functional Analysis - Academic Press International Edition, 1966.
- [2] Borges Vieira, L.R. - Theory of associated systems for study of the stability in the large - Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, vol. 14, 1962.
- [3] Driver, R.D. - A delay-differential system - Archive for Rational Mechanics and Analysis - Vol. 10, nº 5, 1962.
- [4] Frechet, M. - Sur les fonctionelles bilinéaires - Transactions of the American Mathematical Society, vol. 16, nº 3, July 1915.
- [5] Hale, J.K. - Functional Differential Equations of Retarded type - Publicação do 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1969.
- [6] Onuchic, N. - Equações Diferenciais Funcionais - Publicação do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro da Universidade de São Paulo, 1965.
- [7] Yoshioka, T. - Sobre Equações Diferenciais Funcionais e Sistemas Associados - Publicação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970.
- [8] Titchmarsh, E.C. - The Theory of Functions, Oxford University Press, 1939.
- [9] Gantmacher, F.R. - Application of the Theory of Matrices, Wiley, 1959.