IVAN DE CAMARGO E OLIVEIRA

VARIEDADES INVARIANTES PARA PONTOS FIXOS HIPERBÓLICOS

Tese apresentada ao Instituto de
Matemática e Estatística da U. S. P.
para a obtenção do grau de Mestre

SÃO PAULO

1971

À Ismênia

P R E F A C I O

O presente trabalho tem por finalidade apresentar de forma acessível a demonstração dos Teoremas das Variedades Estável e Instável para um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo $f: E \rightarrow E$ (E espaço de Banach real ou complexo) e a correspondente versão para fluxos. A referência básica é [6] , onde os autores tratam o caso mais geral em que f é uma " aproximação " - na norma de Lipschitz - de um operador hiperbólico, e também o caso de conjuntos hiperbólicos, conceito que generaliza o de ponto fixo hiperbólico. Assim, a linguagem e as técnicas aqui empregadas prepararam o terreno para essa generalização.

A teoria das variedades estáveis e instáveis no caso de dimensão finita pode ser encontrada em [1] (apêndice), [3] (capítulo XIII) ou em [5] (capítulo IX). Em [6] , encontramos a generalização para espaços de Banach; o conceito de variedades estáveis e instáveis para esse caso é o seguinte: dada $f: E(r) \rightarrow E$ (E espaço de Banach, $E(r)$ = bola aberta com centro na origem e raio r), " variedade estável " para f é o conjunto

$$W^s = \left\{ x \in E(r) : f^n(x) \text{ está definido e } f^n(x) \in E(r), \right. \\ \left. \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

e " variedade instável " para f é o conjunto

$$W^u = \left\{ x \in E(r) : f^{-n}(x) \text{ está definido e } f^{-n}(x) \in E(r), \right. \\ \left. \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

É claro que $f(W^s) \subset W^s$ e $f(W^u) \subset W^u$. Os teoremas centrais dêste trabalho garantem que se f satisfaz a certas condições, existem W^s e W^u , que são variedades diferenciáveis da mesma classe de diferenciabilidade que f . W^u é obtida (localmente, isto é, em uma bola de raio $\tilde{r}$ eventualmente menor que r)

como gráfico de uma conveniente função, e por iteração de f obtém-se W^u em toda a bola $E(r)$. W^s é, a grosso modo, a variedade instável para f^{-1} .

A matéria foi distribuída em cinco secções; na secção 1, apresentamos alguns resultados básicos sobre funções lipschitzianas e funções diferenciáveis em espaços de Banach. Um importante teorema é o de número 1.8, que desempenhará um papel fundamental na secção 4. Os teoremas 1.10 e 1.12 são clássicos e também terão grande utilidade na demonstração de alguns resultados importantes das secções seguintes.

A existência da secção 2 se deve ao seguinte fato: na demonstração das proposições 4.4 e 4.7, não conseguimos prescindir da hipótese de que f fôsse uniformemente C^k , ao invés de ser simplesmente de classe C^k ($k=1$ em 4.4). Ocorre, porém, que Hirsch e Pugh não fazem em [6] essa hipótese, o que nos deixou relutantes em adotá-la, até que nos veio às mãos uma pré-impressão de [11], onde se demonstra o Teorema da Variedade Estável para Lipschitz - aproximações de operadores semi-hiperbólicos e onde se lê textualmente:

" para nossa demonstração, tivemos que supor não só que a função dada fôsse diferenciável, mas também que sua derivada fôsse (localmente) uniformemente contínua. Como uma versão detalhada do artigo de Hirsch e Pugh não apareceu ainda, não tenho certeza se essas técnicas exigem a hipótese de uniformidade ".

Isso nos animou a supor f uniformemente C^k , hipótese essa que localmente é automática em dimensão finita se f é de classe C^k . Foi então necessário incluir a secção 2, onde apresentamos alguns fatos a respeito de funções uniformemente C^k , utilizados na secção 4. Escrevemos a C.C.Pugh a respeito, e estamos aguardando resposta.

A secção 3 contém os primeiros informes a respeito de o peradores hiperbólicos e Lipschitz - perturbações, além de apresentar a transformação-gráfico Γ_f , que desempenha papel vital na secção 4. Na proposição 3.3 aparecem os candidatos - W_1 e W_2 - a variedades instável e estável para f .

A secção 4 encerra os principais teoremas. Por razões puramente estéticas, decompusemos o Teorema da Variedade Instável em diversos lemas e proposições, que reunidos nos dão o Teorema no caso em que $f(0) = 0$ (4.1, 4.2, 4.4, 4.7 e 4.9). O Teorema 4.10 trata do caso geral, que é obtido do anterior por via formal. O corolário 4.13 se refere à situação mais importante em que f é um difeomorfismo tendo um ponto fixo hiperbólico. O Teorema da Variedade Estável (4.14) é obtido aplicando o Teorema da Varieda de Instável a uma conveniente restrição de f^{-1} .

Finalmente, na secção 5 apresentamos alguns comentários e alternativas ao que foi feito nas secções anteriores, além de uma ou outra perspectiva de aplicação dos resultados apresentados.

Durante os meses de janeiro e fevereiro p.p., estivemos estagiando como bolsista no Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, na Guanabara, onde o contacto com os Professores Jacob Palis Jr. e Jorge Sotomayor nos foi de inestimável valia, pelo que lhes somos profundamente agradecidos. Também foram de grande utilidade as conversas que tivemos com o Professor Sheldon E. Newhouse, da Universidade de Berkeley, E.U.A., que atualmente se encontra no I.M.P.A.

Deixamos aqui um especial agradecimento ao nosso orientador, Professor Waldyr Muniz Oliva, cujo incentivo nos foi de vital importância em nosso trabalho.

Finalmente, uma palavra de reconhecimento aos professores e colegas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, que de uma forma ou de outra vêm tendo participação em nossa formação matemática.

São Paulo, abril de 1971.

Na elaboração deste trabalho contamos com o auxílio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

1. FUNÇÕES LIPSCHITZIANAS

1.1 DEFINIÇÃO: Sejam X e Y dois espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é lipschitziana se existe um número real α tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

Definimos a constante de Lipschitz de f como sendo o número

$$L(f) = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y), \right. \\ \left. \forall x, y \in X \right\}$$

ou, equivalentemente,

$$L(f) = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in X \text{ e } x \neq y \right\}$$

Se $L(f) < 1$, dizemos que f é uma contração.

1.2 DEFINIÇÃO: Seja X um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$. Um ponto $a \in X$ é um atrator para f se $f(a) = a$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a, \quad \forall x \in X.$$

É claro que nesse caso a é o único ponto fixo de f .

1.3 PROPOSIÇÃO: Seja X um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma contração. Então:

(a) existe um atrator a para f

(b) se $g : X \rightarrow X$ tem um ponto fixo b e se $d(f(b), g(b)) < \epsilon$ então $d(a, b) < \frac{\epsilon}{1 - L(f)}$.

Demonstração:

Para a parte (a), ver [8], página 78. A parte (b) é imediata.

1.4 PROPOSIÇÃO: Se X e Y são espaços vetoriais normados, então

$$\text{Lip}(X, Y) = \left\{ f : X \rightarrow Y \mid f \text{ é lipschitziana e } f(0) = 0 \right\}$$

é um espaço vetorial, e a aplicação

$$\begin{aligned} L : \text{Lip}(X, Y) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto L(f) \end{aligned}$$

é uma norma. Se Y é um espaço de Banach, o mesmo se dá com $\text{Lip}(X, Y)$.

Demonstração: a cargo do leitor.

Se X é um espaço normado e r um número real positivo, indicaremos por $X(r)$ a bola aberta de centro na origem e raio r . Usaremos a notação $M(X(r), Y)$ (Y normado) para indicar o espaço vetorial normado

$$\left\{ f : X(r) \rightarrow Y \mid f \text{ é lipschitziana e } f(0) = 0 \right\}$$

com a norma dada por

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{x \in X(r)} \|f(x)\| \leq r \cdot L(f). \end{aligned}$$

Se A é um subconjunto de Y contendo a origem, $M(X(r), A)$ indica o sub-espço métrico de $M(X(r), Y)$ constituído pelas funções que tomam valores em A ; assim,

$$M(X(r), A) = \left\{ f: X(r) \rightarrow A \mid f \text{ é lipschitziana e } f(0) = 0 \right\} \quad \text{e} \quad d(f, g) = \sup_{x \in X(r)} \|f(x) - g(x)\|,$$

$$\forall f, g \in M(X(r), A)$$

Nos espaços funcionais, "d" sempre indicará uma distância definida como acima.

1.5 PROPOSIÇÃO: Se E_1 e E_2 são espaços de Banach, então

$$G = \left\{ g \in M(E_1(r), \overline{E_2(r)}) : L(g) \leq 1 \right\}$$

é um espaço métrico completo (onde $\overline{E_2(r)}$ é a bola fechada com centro na origem e raio r).

Demonstração: a cargo do leitor.

1.6 PROPOSIÇÃO: Supondo que todas as expressões abaixo tenham sentido, valem as seguintes propriedades:

- (a) $L(f \circ g) \leq L(f) \cdot L(g)$
- (b) $d(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2) \leq d(f_1, f_2) + L(f_2) \cdot d(g_1, g_2)$
- (c) $d(g^{-1}, h^{-1}) \leq L(g^{-1}) \cdot d(g, h)$

Demonstração:

A parte (a) é imediata.

Quanto a (b), temos:

$$\begin{aligned}
 d(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2) &\leq d(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_1) + d(f_2 \circ g_1, f_2 \circ g_2) \\
 &\leq d(f_1, f_2) + L(f_2) \cdot d(g_1, g_2).
 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando (b) demonstramos (c):

$$\begin{aligned}
 d(g^{-1}, h^{-1}) &= d(g^{-1} \circ h \circ h^{-1}, g^{-1} \circ g \circ h^{-1}) \leq \\
 &\leq L(g^{-1}) \cdot d(h \circ h^{-1}, g \circ h^{-1}) \leq \\
 &\leq L(g^{-1}) [d(h, g) + L(g) \cdot d(h^{-1}, h^{-1})] = \\
 &L(g^{-1}) \cdot d(g, h)
 \end{aligned}$$

* * *

1.7 LEMA: Seja (C_n) uma sequência de números reais não negativos tais que $C_n \rightarrow 0$ e seja ξ tal que $0 \leq \xi < 1$. Então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m C_i \xi^{m-i} = 0$$

Demonstração:

Seja $m \geq 2$. Para todo inteiro k , $0 < k < m$, temos:

$$\sum_{i=0}^m C_i \xi^{m-i} = \sum_{i=0}^k C_i \xi^{m-i} + \sum_{i=k+1}^m C_i \xi^{m-i} \leq$$

$$\left[\max_{0 \leq i \leq k} C_i \right] \sum_{i=0}^k \xi^{m-i} + \left[\max_{k < i \leq m} C_i \right] \sum_{i=k+1}^m \xi^{m-i} \leq$$

$$\left[\max_{0 \leq i \leq k} C_i \right] \frac{\xi^{m-k}}{1 - \xi} + \left[\max_{k < i \leq m} C_i \right] \frac{1}{1 - \xi}$$

Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $C_i \leq M, \forall i$

Então:

$$\sum_{i=0}^m C_i \xi^{m-i} \leq \frac{M}{1 - \xi} \cdot \xi^{m-k} + \frac{1}{1 - \xi} \cdot \left[\max_{k < i \leq m} C_i \right]$$

Tomando $k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, temos:

$$m \rightarrow \infty \iff k \rightarrow \infty \iff m-k \rightarrow \infty$$

e portanto

$$0 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m C_i \xi^{m-i} \leq \lim_{m-k \rightarrow \infty} \frac{M}{1 - \xi} \xi^{m-k} +$$

$$+ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \xi} \cdot \left[\max_{k < i \leq m} C_i \right] = 0$$

* * *

1.8 TEOREMA (da contração em fibras)

Sejam X e Y dois espaços métricos e $f : X \rightarrow X$ com

um atrator p . Seja $(g_x)_{x \in X}$ uma família de funções lipschitzianas $g_x : Y \rightarrow Y$ tais que

$$(1.I) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} L(g_{f^n(x)}) < 1, \quad \forall x \in X$$

e, para cada $y \in Y$, a função

$$\begin{aligned} u : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto g_x(y) \end{aligned}$$

seja contínua. Se g_p tem um ponto fixo q , então (p, q) é um atrator para a função

$$F : X \times Y \rightarrow X \times Y$$

definida por $F(x, y) = (f(x), g_x(y))$

Demonstração:

A condição (1.I) acarreta que, para cada $x \in X$, existe $r \in \mathbb{N}$, $r = r(x)$, tal que

$$n \geq r \implies L(g_{f^n(x)}) \leq \lambda < 1$$

onde
$$\lambda = \sup_{n \geq r} L(g_{f^n(x)})$$

Como p é atrator de f , basta demonstrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, y), q) = 0, \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

onde $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ é a projeção no segundo fator. Notemos ainda que

$$F^{n+1}(x, y) = (f^{n+1}(x), g_{f^n(x)} \circ g_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ g_{f(x)} \circ g_x(y))$$

Fixado um ponto $(x, y) \in X \times Y$, ponhamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r(x)$

$$\delta_n = d(g_{f^n(x)}(q), q).$$

Da hipótese de continuidade da função u , concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0. \text{ Então, para } n > r(x), \text{ temos:}$$

$$(1.II) \quad d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, y), q) \leq$$

$$\leq d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, y), \pi_2 \circ F^{n+1}(x, q)) +$$

$$+ d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, q), q).$$

Analisemos cada uma das parcelas do segundo membro:

$$d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, y), \pi_2 \circ F^{n+1}(x, q)) \leq$$

$$L(g_{f^n(x)}) \cdot d(\pi_2 \circ F^n(x, y), \pi_2 \circ F^n(x, q)) \leq$$

$$\dots \leq \prod_{i=r}^n L(g_{f^i(x)}) \cdot \alpha(x, y)$$

onde $\alpha(x, y) = d(\pi_2 \circ F^r(x, y), \pi_2 \circ F^r(x, q))$. Logo,

$$d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, y), \pi_2 \circ F^{n+1}(x, q)) \leq \lambda^{n-r+1} \cdot \alpha(x, y).$$

Quanto à segunda parcela,

$$d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, q), q) \leq$$

$$\leq d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, q), g_{f^n(x)}(q)) +$$

$$+ d(g_{f^n(x)}(q), q) \leq$$

$$L(g_{f^n(x)}) \cdot d(\pi_2 \circ F^n(x, q), q) + \delta_n \leq$$

$$\lambda \left[d(\pi_2 \circ F^n(x, q), g_{f^{n-1}(x)}(q)) + \delta_{n-1} \right] + \delta_n \leq$$

$$\leq \dots \leq \lambda^{n-r+1} \cdot \beta(x) + \sum_{j=r}^n \lambda^{n-j} \delta_j$$

onde $\beta(x) = d(\pi_2 \circ F^x(x, q), q)$.

De (1.II) podemos então concluir:

$$(1.III) \quad d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x, y), q) \leq \\ \leq [\alpha(x, y) + \beta(x)] \lambda^{n-r+1} + \sum_{j=r}^n \lambda^{n-j} \delta_j$$

Fazendo, no lema 1.7, $\xi = \lambda$, $c_n = \delta_{n+r}$, $i = j-r$ e $m = n-r$, vê-se claramente que o segundo membro de (1.III) tende a zero.

* * *

1.9 LEMA: Seja E um espaço normado, $U \subset E$ aberto e $f : U \rightarrow E$ uma função lipschitziana e diferenciável. Então, para todo $x \in U$, $\|Df(x)\| \leq L(f)$ e conseqüentemente, se U é convexo, temos pelo Teorema do Valor Médio que

$$L(f) = \sup_{x \in U} \|Df(x)\|$$

Demonstração:

É fácil ver que para todo $x \in U$ e $h \in E$, temos:

$$Df(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

Segue-se daí que

$$\begin{aligned}
\| D f(x) \| &= \sup_{\|h\| \leq 1} \| D f(x) \cdot h \| = \\
&= \sup_{\|h\| \leq 1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\| f(x + th) - f(x) \|}{|t|} \leq \\
&\sup_{\|h\| \leq 1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(f) \cdot |t| \cdot \|h\|}{|t|} = \\
&= \sup_{\|h\| \leq 1} L(f) \cdot \|h\| = L(f)
\end{aligned}$$

* * *

1.10 TEOREMA (da perturbação de um isomorfismo).

Seja E um espaço de Banach e $f : U \subset E \rightarrow E$, U aberto. Seja $T : E \rightarrow E$ um isomorfismo contínuo tal que $f - T$ seja lipschitziana, com $L(f - T) < \|T^{-1}\|^{-1}$. Então:

- (a) f é um homeomorfismo de U sobre um aberto de E .
- (b) $L(f^{-1}) \leq \left[\|T^{-1}\|^{-1} - L(f - T) \right]^{-1}$
- (c) Se f for diferenciável, então f é um difeomorfismo.

Demonstração:

- (a) Em [8], página 80, é feita uma demonstração que se adapta perfeitamente para espaços de Banach em geral.
- (b) $\forall x, y \in U$, temos:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|Tx - Ty + (f - T)(x) - (f - T)(y)\| \geq$$

$$\|Tx - Ty\| - \|(f - T)(x) - (f - T)(y)\| \geq \\ \left[\|T^{-1}\|^{-1} - L(f - T) \right] \|x - y\|$$

Pondo $f(x) = a$ e $f(y) = b$, segue-se que, $\forall a, b \in f(U)$

$$\|f^{-1}(a) - f^{-1}(b)\| \leq \left[\|T^{-1}\|^{-1} - L(f - T) \right]^{-1} \|a - b\|$$

$$\text{donde } L(f^{-1}) \leq \left[\|T^{-1}\|^{-1} - L(f - T) \right]^{-1}$$

(c) Para todo $x \in U$, temos:

$$D(f - T)(x) = Df(x) - T$$

Então, pelo lema anterior, segue-se que

$$L(Df(x) - T) = \|Df(x) - T\| = \|D(f - T)(x)\| \leq$$

$$\leq L(f - T) < \|T^{-1}\|^{-1}$$

e portanto, pela parte (a), $Df(x)$ é um isomorfismo, o que prova que f é difeomorfismo (Teorema da Função Inversa).

* * *

A demonstração da parte (a) do teorema anterior nos fornece um dado importante, que enunciamos na seguinte

1.11 PROPOSIÇÃO Nas condições do teorema 1.10, se a bola fechada $\bar{A}$ de centro $a \in E$ e raio r estiver contida em U , então a bola aberta de centro $b = f(a)$ e raio

$$\left[\|T^{-1}\|^{-1} - L(f - T) \right] r \quad \text{está contida em} \quad f(U).$$

1.12 TEOREMA. Seja A um aberto de um espaço de Banach E e (f_n) uma sequência de funções diferenciáveis definidas em A , com valores num espaço de Banach F . Suponhamos que: (i) existe um ponto $a \in A$ tal que a sequência $(f_n(a))$ converge em F ; (ii) Para todo ponto $x \in A$, existe uma bola $B(x)$ de centro x , contida em A , tal que a sequência (Df_n) converge uniformemente em $B(x)$.

Então, para cada $x \in A$, a sequência (f_n) converge uniformemente em $B(x)$; além disso, se para cada $y \in A$ pusermos

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \quad \text{e} \quad g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} Df_n(y), \quad \text{então}$$

$$g(y) = Df(y), \quad \forall y \in A.$$

Demonstração: ver [4], capítulo VIII, § 6.

1.13 LEMA. Seja E um espaço de Banach, V uma vizinhança da origem e $f : V \rightarrow E$ uma função de classe C^1 tal que

$f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $U \subset V$ da origem tal que f/U tem constante de Lipschitz menor que ϵ .

Demonstração: ver [9], Lema 2.

2. FUNÇÕES UNIFORMEMENTE C^k

Obs:- No que segue, sendo E e F espaços normados, $E \times F$ sempre indicará o espaço-produto com a norma

$$\| (x, y) \| = \max \left\{ \| x \|, \| y \| \right\}$$

2.1 DEFINIÇÃO. Sejam E e F espaços normados e $U \subset E$ um aberto. Uma função $f : U \rightarrow F$ é uniformemente C^k (escrevemos $f \in UC^k$) se, e somente se, $f \in C^k$ e $f, Df, D^2f, \dots, D^k f$ são uniformemente contínuas.

2.2 PROPOSIÇÃO. Sejam E e F dois espaços normados e $U \subset E$ limitado e convexo. Se $h : U \rightarrow F$ é uniformemente contínua, então h é limitada.

Demonstração:

Seja $D = \text{diam } U$ e fixemos um ponto $a \in U$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que

$$\| u - v \| < \delta \implies \| h(u) - h(v) \| < \varepsilon$$

Podemos então, para todo $x \in U$, tomar sobre o segmento $[x, a] \subset U$ um número finito de pontos $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = a$, não superior a $Q = \left\lfloor \frac{D}{\delta} \right\rfloor + 1$, tais que

$$\| x_i - x_{i-1} \| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donde $\| h(x_i) - h(x_{i-1}) \| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

Então:

$$\|h(x) - h(a)\| = \left\| \sum_{i=1}^n [h(x_i) - h(x_{i-1})] \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|h(x_i) - h(x_{i-1})\| < n \cdot \xi \leq 0 \cdot \xi$$

e portanto

$$\|h(x)\| < \|h(a)\| + 0 \cdot \xi, \quad \forall x \in U$$

* * *

2.3 COROLARIO. Se E e F são espaços normados e $U \subset E$ é um aberto convexo e limitado, então $f : U \rightarrow F$ é uniformemente C^k se, e somente se, $D^k f$ for uniformemente contínua.

Demonstração:

Pela desigualdade do valor médio, temos, $\forall x, y \in U$:

$$\|D^{k-1} f(x) - D^{k-1} f(y)\| \leq \sup_{u \in [x, y]} \|D^k f(u)\| \cdot \|x - y\|$$

Supondo então $D^k f$ uniformemente contínua, temos pela proposição 2.2 que existe $M > 0$ tal que $\|D^k f(u)\| \leq M$ $\forall u \in U$; daí,

$$\|D^{k-1} f(x) - D^{k-1} f(y)\| \leq M \|x - y\|, \quad \forall x, y \in U$$

e portanto $D^{k-1} f$ é uniformemente contínua. Repetindo o argumen

to, provamos que $D^{k-2} f, \dots, D f$ e f são uniformemente contínuas.

A recíproca está implícita na definição 2.1

* * *

2.4 PROPOSIÇÃO. Sejam $E, F_1, F_2, \dots, F_n$ e H espaços normados e

$$\rho : F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n \longrightarrow H$$

uma aplicação n -linear contínua. Indicaremos

$$\rho(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$$

Sejam $U \subset E$ um aberto convexo e limitado e

$$\alpha_i : U \longrightarrow F_i \quad (i=1, \dots, n)$$

n funções uniformemente contínuas.

Definamos

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n : U \longrightarrow H$$

por
$$\alpha(x) = \rho(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) =$$

$$\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x)$$

Então: α é uma função uniformemente contínua.

Demonstração:

Se $x, y \in U$, temos:

$$\begin{aligned}
& \| \alpha(x) - \alpha(y) \| = \| \alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) - \alpha_1(y) \alpha_2(y) \dots \\
& \dots \alpha_n(y) \| \leq \\
& \leq \| \alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) - \alpha_1(y) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) \| + \\
& + \| \alpha_1(y) \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) - \alpha_1(y) \alpha_2(y) \alpha_3(x) \dots \alpha_n(x) \| + \\
& + \dots + \| \alpha_1(y) \alpha_2(y) \dots \alpha_{n-1}(y) \alpha_n(x) - \alpha_1(y) \alpha_2(y) \dots \alpha_n(y) \| = \\
& = \| [\alpha_1(x) - \alpha_1(y)] \alpha_2(x) \dots \alpha_n(x) \| + \\
& + \| \alpha_1(y) [\alpha_2(x) - \alpha_2(y)] \alpha_3(x) \dots \alpha_n(x) \| + \dots + \\
& + \| \alpha_1(y) \alpha_2(y) \dots \alpha_{n-1}(y) [\alpha_n(x) - \alpha_n(y)] \| \leq \\
& \leq \| \rho \| \cdot \| \alpha_1(x) - \alpha_1(y) \| \cdot \| \alpha_2(x) \| \dots \| \alpha_n(x) \| + \\
& + \| \rho \| \cdot \| \alpha_1(y) \| \cdot \| \alpha_2(x) - \alpha_2(y) \| \cdot \| \alpha_3(x) \| \dots \\
& \dots \| \alpha_n(x) \| + \\
& + \dots + \| \rho \| \cdot \| \alpha_1(y) \| \cdot \| \alpha_2(y) \| \dots \| \alpha_n(x) - \alpha_n(y) \|
\end{aligned}$$

Mas, por 2.2, existe $M > 0$ tal que

$\|\alpha_i(z)\| \leq M, \forall z \in U \ (i = 1, \dots, n)$. Por outro lado as α_i sendo uniformemente contínuas, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|\alpha_i(x) - \alpha_i(y)\| < \frac{\epsilon}{n \|\varphi\| M^{n-1}}$$

$(i = 1, \dots, n)$ (se $\varphi = 0$, α é a aplicação nula e a proposição vale trivialmente).

Conclusão:

$$\|x-y\| < \delta \implies \|\alpha(x) - \alpha(y)\| < n \|\varphi\| M^{n-1} \cdot \frac{\epsilon}{n \|\varphi\| M^{n-1}} = \epsilon$$

* * *

2.5 NOTAÇÕES. Sejam E, F espaços normados e $L^k(E, F)$ o espaço normado das aplicações k -lineares contínuas de E em F . Se $A \in L^k(E, F)$ e $h, h_1, \dots, h_k \in E$, indicamos por $A h_1 h_2 \dots h_k$ o valor de A no ponto $(h_1, h_2, \dots, h_k)$ e por $A h^k$ o valor de A no ponto $(h, h, \dots, h)$.

Sejam agora $F_1, F_2, \dots, F_q$ e G espaços normados,

$$B \in L^q(F_1, \dots, F_q; G), \quad A_j \in L^{i_j}(E, F_j)$$

$(j = 1, 2, \dots, q)$ e $k = i_1 + \dots + i_q$. A função

$B A_1 A_2 \dots, A_q \in L^k(E, G,)$ é definida por

$$B A_1 A_2 \dots A_q h_1 h_2 \dots h_k = B (A_1 h_1 \dots h_{i_1}) (A_2 h_{i_1+1} \dots h_{i_1+i_2}) \\ \dots (A_q h_{i_1 + \dots + i_{q-1}+1} \dots h_k) \quad \text{para } h_1, h_2, \dots, h_k \in E.$$

O leitor demonstrará facilmente a

2.6 PROPOSIÇÃO. A aplicação

$$\mathcal{J} : L^q(F_1, \dots, F_q; G) \times L^{i_1}(E, F_1) \times \dots \times L^{i_q}(E, F_q) \longrightarrow L^k(E, G)$$

definida por

$$\mathcal{J} (B, A_1, A_2, \dots, A_q) = B A_1 A_2 \dots A_q$$

é $q + 1$ -linear e contínua.

2.7 PROPOSIÇÃO. Sejam E, F e G espaços normados, $U \subset E$ e $V \subset F$ abertos, $g : U \rightarrow V$, $f : V \rightarrow G$ funções de classe C^r . Então, $f \circ g$ é de classe C^r e para $k = 0, 1, \dots, r$ e $x \in U$, tem-se

$$D^k (f \circ g) (x) =$$

$$= \sum_{1 \leq q \leq k} \sum \mathcal{J}_k (i_1, \dots, i_q) D^{qf}(g(x)) D^{i_1} g(x) \dots D^{i_q} g(x)$$

onde a segunda somatória se estende sobre todas as q -uplas de

números inteiros positivos $(i_1, \dots, i_q)$ tais que
 $i_1 + \dots + i_q = k$ e $\zeta_k(i_1, \dots, i_q)$ é o número inteiro definido por recorrência do seguinte modo : $\zeta_1(1) = 1$ e se já estiver definido $\zeta_q(i_1, \dots, i_j)$ para tôdas as j -uplas de inteiros positivos $(i_1, \dots, i_j)$ com $i_1 + \dots + i_j = q$, para $1 \leq q \leq k$, então

$$\zeta_{k+1}(k+1) = 1$$

$$\text{e } \zeta_{k+1}(i_1, \dots, i_j, k - q + 1) = \binom{k}{q} \zeta_q(i_1, \dots, i_j)$$

Demonstração : ver [2] , página 3.

2.8 PROPOSIÇÃO. Sejam E, F , e G espaços normados, $U \subset E$ aberto, convexo e limitado, $V \subset F$ aberto e sejam $f : V \rightarrow G$, $g : U \rightarrow V$. Se f e g são funções uniformemente C^r , então $f \circ g$ é uniformemente C^r . Esse resultado se generaliza trivialmente para n funções uniformemente C^r .

Demonstração :

Para cada $x \in U$, façamos em 2.5,

$B = D^q f \circ g(x)$, $F_1 = F_2 = \dots = F_q = F$, $A_j = D^{i_j} g(x)$. Na proposição 2.4, ponhamos $F_1 = L^q(F, G)$, $F_2 = L^{i_1}(E, F)$, $\dots$, $F_{q+1} = L^{i_q}(E, F)$

$H = L^k(E, G)$, $\int$ como na proposição 2.6 e ainda

$$\alpha_1 = D^q f \circ g, \alpha_2 = D^{i_1} g, \dots, \alpha_{q+1} = D^{i_q} g.$$

Por hipótese, para $1 \leq k \leq r$, as funções α_i são tôdas uniformemen

te contínuas. Daí, pela proposição 2.4, temos que a função

$$\alpha : U \longrightarrow L^k(E, G)$$

tal que

$$\alpha(x) = D^q f(g(x)) D^{i_1} g(x) \dots D^{i_q} g(x)$$

é uniformemente contínua, e portanto $\mathcal{G}_k(i_1, \dots, i_q) \alpha$ é também uniformemente contínua. Concluimos que a função

$$D^k(f \circ g) : U \longrightarrow L^k(E, G)$$

é uniformemente contínua para todo k tal que $1 \leq k \leq r$, uma vez que é soma de funções uniformemente contínuas de U em $L^k(E, G)$. O caso $r = 0$ pode ser demonstrado diretamente com facilidade.

* * *

2.9 NOTAÇÕES. Sejam E e F dois espaços normados. Se $U \subset E$ é um aberto convexo, indicaremos por $C^k(U, F)$ o espaço vetorial das funções $f : U \rightarrow F$, de classe C^k , tais que

$$\|g\|_k = \sup_{u \in U} \max \left\{ \|f(u)\|, \|Df(u)\|, \dots, \|D^k f(u)\| \right\} < \infty$$

É rotina verificar que $\|\cdot\|_k$ é uma norma sobre esse espaço e que se F é um espaço de Banach, o mesmo se dá com $C^k(U, F)$.

2.10 TEOREMA .. Seja

$$v : C^k(U, F) \times U \longrightarrow F$$

a "função valoração", definida por

$$v(f, x) = f(x)$$

Então : v é de classe C^k , e para $p = 1, 2, \dots, k$, temos:

$$D^p v(f, x)(g_1, y_1) \dots (g_p, y_p) =$$

$$= D^p f(x) y_1 \dots y_p + \sum_{i=1}^p D^{p-1} g_i(x) y_1 \dots \hat{y}_i \dots y_p$$

com $g_i, f \in C^k(U, F)$ e $x, y_i \in U$ ($i=1, \dots, p$)

Demonstração : ver [2], página 25, teorema 10.3.

2.11 PROPOSIÇÃO. A função valoração

$$\begin{aligned} v : L(E, F) \times E &\longrightarrow F \\ (f, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

é uniformemente C^∞ .

Demonstração :

Basta notar que v é uma aplicação bilinear contínua, uma vez que

$$\|v(f, x)\| = \|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

* * *

2.12 PROPOSIÇÃO. Sejam E e F espaços normados, $U \subset E$ um aberto convexo e $f : U \rightarrow F$ uma função uniformemente C^1 . Para todos $a, x \in U$ tais que $x + a \in U$, seja

$$r(x, a) = f(x+a) - f(x) - Df(x) \cdot a.$$

Então, $\frac{r(x,a)}{\|a\|} \rightarrow 0$ com a , uniformemente em x , isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|a\| < \delta \Rightarrow \frac{\|r(x,a)\|}{\|a\|} < \varepsilon, \quad \forall x \in U$$

Demonstração:

Para cada $x \in U$, consideremos a função $g_x : U \rightarrow F$ definida por

$$g_x(t) = f(t) - Df(x)t, \quad \forall t \in U$$

É claro que

$$Dg_x(t) = Df(t) - Df(x), \quad \forall t \in U$$

e portanto $g_x \in UC^1$. Pela desigualdade do valor médio, temos :

$$\|g_x(x+a) - g_x(x)\| \leq \|a\| \sup_{t \in [x, x+a]} \|Dg_x(t)\|$$

$$\text{ou } \|f(x+a) - Df(x)(x+a) - f(x) + Df(x)x\| \leq$$

$$\leq \|a\| \sup_{t \in [x, x+a]} \|Df(t) - Df(x)\|$$

ou ainda

$$\|f(x+a) - f(x) - Df(x)a\| \leq \|a\| \sup_{t \in [x, x+a]} \|Df(t) - Df(x)\|$$

donde

$$\frac{\|r(x,a)\|}{\|a\|} \leq \sup_{t \in [x, x+a]} \|Df(t) - Df(x)\|$$

Da continuidade uniforme de Df , temos :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\|t - x\| < \delta \Rightarrow \|Df(t) - Df(x)\| < \varepsilon \quad \forall t, x \in U$$

Então

$$\|a\| < \delta \Rightarrow \|t - x\| < \delta, \quad \forall t \in [x, x+a], \quad \forall x \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|Df(t) - Df(x)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [x, x+a], \quad \forall x \in U$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [x, x+a]} \|Df(t) - Df(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in U$$

$$\Rightarrow \frac{\|r(x,a)\|}{\|a\|} < \varepsilon, \quad \forall x \in U$$

* * *

2.13 PROPOSIÇÃO. Sejam E e F espaços normados e $f : E(r) \rightarrow F$ uma função diferenciável. Definimos

$$f^* : (E \times E)(r) \rightarrow F \times F \quad \text{por} \quad f^*(x,y) = (f(x), Df(x)y)$$

$$\text{Então : } f^* \in UC^{k-1} \iff f \in UC^k, \quad k \geq 1.$$

Demonstração :

Ponhamos $f^* = (g, h)$, isto é, sejam g e h as componentes de f^* no espaço produto $F \times F$; então: $g : (E \times E)(r) \longrightarrow F$ e $h : (E \times E)(r) \longrightarrow F$ são tais que $g(x, y) = f(x)$ e $h(x, y) = Df(x)y$.

Suponhamos em primeiro lugar que $f \in UC^k$, $k \geq 1$, e provemos que $f^* \in UC^{k-1}$. É suficiente demonstrar que g e h são uniformemente C^{k-1} , uma vez que

$$D^p f^* = (D^p g, D^p h), \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ora, é claro que $g = f \circ \pi_1$, onde π_1 é a primeira projeção. Como $f \in UC^k$ e $\pi_1 \in UC^\infty$, segue de 2.8 que g é uniformemente C^k . Quanto a h , temos:

$$\begin{array}{ccc} (E \times E)(r) & \xrightarrow{(Df \circ \pi_1, \pi_2)} & L(E, F) \times E \\ & \searrow h & \downarrow v \\ & & F \end{array}$$

Então, $h \in UC^{k-1}$, pois $v \in UC^\infty$ (proposição 2.11),

$$Df \in UC^{k-1} \quad \text{e} \quad \pi_i \in UC^\infty \quad (i=1, 2)$$

Demonstremos a recíproca por indução sobre p . Para $p = 0$, temos da hipótese:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \max \{ \|x - x'\|, \|y - y'\| \} < \delta$$

$$\Rightarrow \max \left\{ \|f(x) - f(x')\|, \|Df(x)y - Df(x')y'\| \right\} < r\xi$$

Então, para todo $y \in E(r)$:

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|(x, y) - (x', y)\| < \delta \Rightarrow \|Df(x)y - Df(x')y\| < r\xi$$

$$\Rightarrow \| [Df(x) - Df(x')] y \| < r\xi$$

Concluimos que

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \sup_{y \in E(r)} \| [Df(x) - Df(x')] y \| < r\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot \|Df(x) - Df(x')\| < r\xi \Rightarrow \|Df(x) - Df(x')\| < \xi$$

Suponhamos agora válida a recíproca para $p-1 \geq 0$ e - que $f^* \in UCP$. Então, h é uniformemente CP . Para aliviar a notação, poremos $Df = u$. Mostremos que u é diferenciável, provando que

$$Du(x)(a)y = Dh(x,y)(a,0), \quad \forall x, y \in E(r), \quad \forall a \in E$$

Indiquemos então por L_x a aplicação linear $E \rightarrow L(E, F)$ tal que $L_x(a)y = Dh(x,y)(a,0)$, $\forall a, y \in E$, $\|y\| < r$

Então: para $x, a \in E(r)$ tais que $x + a \in E(r)$, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{r} \sup_{\|y\| < r} \| u(x+a)y - u(x)y - L_x(a)y \| = \\
& = \frac{2}{r} \sup_{\|y\| < r} \| h(x+a,y) - h(x,y) - Dh(x,y)(a,o) \| \quad \text{donde} \\
& \frac{\|r(x,a)\|}{\|a\|} \leq \frac{2}{r} \sup_{\|y\| < r} \left\{ \frac{1}{\|a\|} \| h(x+a,y) - h(x,y) - Dh(x,y)(a,o) \| \right\}
\end{aligned}$$

Como $h \in C^1$, podemos, graças à proposição 2.12, afirmar que a expressão entre chaves converge para zero com $\| (a, o) \| = \|a\|$, uniformemente em (x, y) , e que portanto $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\|a\| < \delta \implies \frac{\|r(x,a)\|}{\|a\|} < \epsilon$.

Isso nos mostra que $Du(x) = L_x$, ou seja,

$Du(x)(a)y = Dh(x,y)(a,o)$. Lembrando a identificação canônica de $L(E, L(E,F))$ com $L^2(E,F)$ e a simetria da derivada

$Du(x) = D^2f(x)$, podemos escrever

$Du(x)(y)a = Dh(x,y)(a,o)$; $\forall x, y \in E(r)$, $\forall a \in E$ ou

$Du(x)y = Dh(x,y) \circ j$, $\forall x, y \in E(r)$, onde

$j: E \longrightarrow E \times E$ é a inclusão $j(a) = (a, o) \quad \forall a \in E$.

Definamos agora $\theta: L(E \times E, F) \longrightarrow L(E, F)$ por $\theta(u) = u \circ j$. É claro que θ é linear e contínua, e que portanto $\theta \in UC^\infty$. Além disso, para $x, y \in E(r)$, tem-se - $u^*(x, y) = (u(x), Du(x)y) = (u \circ \pi_1(x, y), \theta \circ Dh(x, y))$

Isso mostra que $u^* = (u \circ \pi_1, \theta \circ Dh)$ e que portanto, pela proposição 2.8, $u^* \in UC^{p-1}$, uma vez que $Dh \in UC^{p-1}$; $\theta, \pi_1 \in UC^\infty$ e $u \in UC^{p-1}$ (pois

$f^* \in U C^p \implies f^* \in U C^{p-1}$ e pela hipótese de indução isso a
carreta $f \in U C^p$, donde $Df \in U C^{p-1}$. Agora, pela hipó-
tese de indução, temos $u = Df \in U C^p$, e portanto $f \in U C^{p+1}$.

* * *

2.14 PROPOSIÇÃO. Com as notações da proposição ante-
rior, se $f^* \in C^1$, temos:

$$D(f^*) = (\theta_1 \circ Df \circ \tilde{\pi}_1, \theta_2 \circ Df \circ \tilde{\pi}_1 + \theta_1 \circ v \circ (D^2f \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2))$$

onde $\theta_i : L(E, F) \longrightarrow L(E \times E, F)$ é definida por

$$\theta_i(u) = u \circ \tilde{\pi}_i, \quad \tilde{\pi}_i \text{ sendo a projeção de } E \times E \text{ sobre o } i\text{-ési-} \\ \text{mo fator } (i = 1, 2).$$

Demonstração:

$$\text{Como } f^* = (f \circ \tilde{\pi}_1, v \circ (Df \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)), \text{ temos:}$$

$$D(f^*)(x, y) = (Df(x) \circ \tilde{\pi}_1, Dv(Df(x), y) \circ (D^2f(x) \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2))$$

Aplicando então o teorema 2.10, obtemos, para $a, b \in E$:

$$D(f^*)(x, y)(a, b) = (Df(x)a, Dv(Df(x), y)(D^2f(x)a, b)) = \\ = (Df(x)a, Df(x)b + D^2f(x)a.y) = (Df(x)a, Df(x)b + D^2f(x)ya).$$

$$\text{Logo, } D(f^*)(x, y) = (Df(x) \circ \tilde{\pi}_1, Df(x) \circ \tilde{\pi}_2 + D^2f(x)y \circ \tilde{\pi}_1) \\ \text{donde}$$

$$D(f^*) = (\theta_1 \circ Df \circ \tilde{\pi}_1, \theta_2 \circ Df \circ \tilde{\pi}_1 + \theta_1 \circ v \circ (D^2f \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2))$$

* * *

3 . OPERADORES HIPERBÓLICOS

3.1 DEFINIÇÃO . Seja E um espaço de Banach . Um operador linear $T : E \rightarrow E$ é hiperbólico se T é um isomorfismo (topológico) e se seu espectro (após complexificação) não contém elementos de módulo 1 . Demonstra-se em [9] que se T é um operador hiperbólico, então existe uma única decomposição - dita canônica - $E = E_1 \oplus E_2$ em soma direta topológica com E_1 e E_2 invariantes por T , tal que o espectro de $T_1 = T|_{E_1}$ só contém pontos exteriores e o espectro de $T_2 = T|_{E_2}$ só contém pontos interiores à bola unitária do plano complexo (ver também [10]) . Além disso, podemos tomar normas em E_1 e E_2 , tais que a norma produto em E seja equivalente à norma original, e tais que

$\|T_2\| < 1$ e $\|T_1^{-1}\| < 1$ (ver [7]) . No que segue, suporemos sempre E com a decomposição canônica, E_1 e E_2 com essas normas, e E com a norma produto

$\|(x, y)\| = \max \{ \|x\|, \|y\| \}$. Observe-se que em relação a essa norma as projeções $\pi_1 : E \rightarrow E_1$ e $\pi_2 : E \rightarrow E_2$ têm norma 1 e que se $x = (x_1, x_2) \in E$ então

$$\pi_i \circ T(x) = T_i(x_i) \quad (i = 1, 2) .$$

Ao número $\zeta = \max \{ \|T_2\|, \|T_1^{-1}\| \} < 1$ damos o nome de assimetria de T . Até o fim desta seção, E indicará um espaço de Banach, $T : E \rightarrow E$ um operador hiperbólico com assimetria ζ , e $f : E(r) \rightarrow E$ uma função tal que

$L(f-T) < \varepsilon < \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$. Indicaremos ainda por f_1 e f_2 -

as componentes de f segundo a decomposição canônica de E , isto é, $f_i = \tilde{\pi}_i \circ f$ ($i = 1, 2$) e $f = (f_1, f_2)$. Veremos que nessas condições, se f for inversível, seu comportamento será bastante semelhante ao de T , isto é, existirão subconjuntos W_1 e W_2 invariantes por f e tais que $f|_{W_1}$ é uma expansão, enquanto que $f|_{W_2}$ é uma contração. Notemos que, de $\varepsilon < \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, segue-se que $\varepsilon < \zeta^{-1}$, $\zeta^{-1} - \varepsilon > 1$, $\varepsilon + \zeta < 1$ e $\frac{\zeta + \varepsilon}{1 - \zeta\varepsilon} < 1$.

3.2 LEMA. (a) f_2 é uma contração, com $L(f_2) \leq \zeta + \varepsilon$.

(b) Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são dois pontos de $E(r)$ e se $\|x_1 - y_1\| \geq \|x_2 - y_2\|$, então

$$\|f_1(x) - f_1(y)\| \geq (\zeta^{-1} - \varepsilon) \|x_1 - y_1\| \geq (\zeta + \varepsilon) \|x_1 - y_1\| \geq \|f_2(x) - f_2(y)\|$$

(c) Com as mesmas notações do item (b), se

$$\|x_1 - y_1\| \leq \|x_2 - y_2\|, \text{ então } \|f_2(x) - f_2(y)\| < (\zeta + \varepsilon) \|x_2 - y_2\|.$$

Demonstração :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \|f_2(x) - f_2(y)\| &= \|\tilde{\pi}_2 \circ f(x) - \tilde{\pi}_2 \circ f(y)\| = \\ &= \|\tilde{\pi}_2 [(f-T)(x) - (f-T)(y)] + \tilde{\pi}_2 \circ T(x-y)\| \leq \\ &\leq L(f-T) \|x-y\| + \|T_2(x_2-y_2)\| < \varepsilon \|x-y\| + \|T_2\| \|x_2-y_2\| \\ &\leq (\varepsilon + \|T_2\|) \|x-y\| \leq (\varepsilon + \zeta) \|x-y\|. \end{aligned}$$

(b) Lembrando que $\|x_1 - y_1\| \geq \|x_2 - y_2\| \implies \|x_1 - y_1\| = \|x - y\|$ temos:

$$\begin{aligned} \|f_1(x) - f_1(y)\| &= \|\tilde{T}_1 \circ f(x) - \tilde{T}_1 \circ f(y)\| = \\ &= \|\tilde{T}_1[(f-T)(x) - (f-T)(y)] + \tilde{T}_1 \circ T(x-y)\| \geq \\ &\geq \|\tilde{T}_1 \circ T(x-y)\| - \|\tilde{T}_1[(f-T)(x) - (f-T)(y)]\| \geq \\ &\geq \|T_1(x_1 - y_1)\| - \|(f-T)(x) - (f-T)(y)\| \geq \\ &\geq \|T_1^{-1}\|^{-1} \cdot \|x_1 - y_1\| - L(f-T)\|x-y\| > (\zeta^{-1} - \varepsilon) \|x_1 - y_1\| \end{aligned}$$

A segunda desigualdade é consequência de
 $\varepsilon + \zeta < 1 < \zeta^{-1} - \varepsilon$.

Finalmente, de (a) segue-se que

$$\|f_2(x) - f_2(y)\| < (\zeta + \varepsilon) \|x - y\| = (\zeta + \varepsilon) \|x_1 - y_1\|, \quad \text{o}$$

que termina a demonstração de (b).

(c) Segue trivialmente de (a).

* * *

NOTAÇÃO. Se f é inversível, poremos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n(E(r)) = \{x \in E(r) : f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots, f^{-n}(x) \text{ estão definidos e pertencem a } E(r)\}.$$

$$f^{-n}(E(r)) = \{x \in E(r) : f(x), f^2(x), \dots, f^n(x) \text{ estão definidos e pertencem a } E(r)\}.$$

Poremos ainda :

$$W_1 = \bigcap_{n \geq 0} f^n(E(r)) \quad \text{e} \quad W_2 = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(E(r)).$$

3.3 PROPOSIÇÃO. W_1 é o gráfico de uma função

$U_1 \rightarrow E_2(r)$ e W_2 é o gráfico de uma função $U_2 \rightarrow E_1(r)$, onde U_1 e U_2 são subconjuntos de $E_1(r)$ e $E_2(r)$, respectivamente (supondo, é claro, f inversível, o que ocorre por exemplo se $\xi < \|T^{-1}\|^{-1}$; ver teorema 1.10).

Demonstração .

Em primeiro lugar, consideremos o caso de W_2 . É suficiente mostrar que se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são dois pontos de W_2 , com $x_2 = y_2$, então $x_1 = y_1$. Ora,

$x, y \in W_2 \implies f^n(x), f^n(y) \in E(r), \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando então a parte (b) do lema 3.2, temos:

$$\begin{aligned} 2r &> \|f^n(x) - f^n(y)\| \geq \|\tilde{\Pi}_1 \circ f^n(x) - \tilde{\Pi}_1 \circ f^n(y)\| = \\ &= \|f_1(f^{n-1}(x)) - f_1(f^{n-1}(y))\| \geq (\zeta^{-1} - \xi) \|f_1^{n-1}(x) - f_1^{n-1}(y)\| \geq \\ &\geq \dots \geq (\zeta^{-1} - \xi)^n \|x_1 - y_1\|. \text{ Logo, } \|x_1 - y_1\| < \frac{2r}{(\zeta^{-1} - \xi)^n} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois $\zeta^{-1} - \xi > 1$. Concluimos que $x_1 = y_1$.

Mostremos agora que se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são dois pontos de W_1 com $x_1 = y_1$, então $x_2 = y_2$. Dado $n > 0$, ponhamos $x' = f^{-n}(x)$ e $y' = f^{-n}(y)$. De $x, y \in W_1$ segue-se que $x', y' \in E(r)$. Temos aqui dois casos a considerar:

[A] Existe $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < n$, tal que

$$\|f_1^j(x') - f_1^j(y')\| \geq \|f_2^j(x') - f_2^j(y')\|$$

$$[B] \quad \|f_1^j(x') - f_1^j(y')\| < \|f_2^j(x') - f_2^j(y')\|, \\ \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Caso [A] : Pelo lema 3.2, parte (b), temos:

$$\|f_1 \circ f^j(x') - f_1 \circ f^j(y')\| \geq \|f_2 \circ f^j(x') - f_2 \circ f^j(y')\| \\ \text{ou } \|f_1^{j+1}(x') - f_1^{j+1}(y')\| \geq \|f_2^{j+1}(x') - f_2^{j+1}(y')\|. \text{ Aplicando sucessivamente o lema, chegamos a}$$

$$\|f_1^n(x') - f_1^n(y')\| \geq \|f_2^n(x') - f_2^n(y')\| \quad \text{ou seja} \\ \|x_1 - y_1\| \geq \|x_2 - y_2\| \quad \text{donde } x_2 = y_2.$$

Caso [B] : Pela parte (c) do lema 3.2, temos agora

$$\|x_2 - y_2\| = \|f_2^n(x') - f_2^n(y')\| = \|f_2 \circ f^{n-1}(x') - f_2 \circ f^{n-1}(y')\| < \\ < (\zeta + \varepsilon) \|f_2^{n-1}(x') - f_2^{n-1}(y')\| < \dots < (\zeta + \varepsilon)^n \|x_2' - y_2'\| < \\ < 2r (\zeta + \varepsilon)^n \rightarrow 0 \quad \text{pois } \zeta + \varepsilon < 1$$

Conclusão : $x_2 = y_2$

* * *

Lembremos que $G = \{g \in (E_1(r), E_2(r)) : L(g) \leq 1\}$ é um espaço métrico completo com a distância dada por

$$d(g, g') = \sup_{x \in E_1(r)} \|g(x) - g'(x)\|$$

Para toda função $g \in G$, poremos :

$$\psi_f(g) = f_1 \circ (1, g) \quad \text{e} \quad \varphi_f(g) = f_2 \circ (1, g) \quad \text{onde}$$

$1 : E_1(r) \rightarrow E_1(r)$ é a aplicação idêntica. Então :

$$\psi_f(g) : E_1(r) \longrightarrow E_1 \quad \text{e} \quad \varphi_f(g) : E_1(r) \longrightarrow E_2 .$$

3.4 PROPOSIÇÃO . (a) $\psi_f(g)$ é um homeomorfismo de $E_1(r)$ sobre um aberto de E_1 e $\psi_f(g)^{-1}$ é uma contração .

(b) Se $f(0) = 0$, então $E_1(r) \subset \psi_f(g)(E_1(r))$ e portanto $\psi_f(g)^{-1} : E_1(r) \longrightarrow E_1(r)$ está bem definida.

(c) $\varphi_f(g)$ é uma contração.

Demonstração .

(a) Se $x, y \in E_1(r)$, temos :

$$\begin{aligned} & \| (\psi_f(g) - T_1)(x) - (\psi_f(g) - T_1)(y) \| = \\ & = \| \tilde{\pi}_1 \circ f(x, g(x)) - \tilde{\pi}_1 \circ T(x, g(x)) - \tilde{\pi}_1 \circ f(y, g(y)) + \tilde{\pi}_1 \circ T(y, g(y)) \| \\ & = \| \tilde{\pi}_1 [(f-T)(x, g(x)) - (f-T)(y, g(y))] \| \leq \end{aligned}$$

$$\leq L(f-T) \| (x-y, g(x)-g(y)) \| = L(f-T) \cdot \| x-y \| \quad (\text{pois}$$

$L(g) \leq 1 \implies \| x-y \| \geq \| g(x) - g(y) \|$) . Então, $\psi_f(g) - T_1$ é lipschitziana e $L(\psi_f(g) - T_1) \leq L(f-T) < \xi < \zeta^{-1} \leq \| T_1^{-1} \|^{-1}$.

Pelo teorema 1.10, concluímos que $\psi_f(g)$ é um homeomorfismo de $E_1(r)$ sobre um aberto de E_1 . Além disso, temos

$$L(\psi_f(g)^{-1}) \leq [\| T_1^{-1} \|^{-1} - L(\psi_f(g) - T_1)]^{-1} \leq (\zeta^{-1} - \xi)^{-1} < 1$$

(b) Se $f(0) = 0$, temos $\psi_f(g)(0) = 0$, e como $\psi_f(g)$ satis

faz às condições do teorema 1.10, segue-se de 1.11 que

$E_1(r) \subset \psi_f(g)(E_1(r))$: basta tomar $\tilde{r}$ tal que

$\tilde{r} < r < (\mathcal{Z}^{-1} - \xi) \tilde{r}$ e teremos (por 1.11)

$$E_1(r) \subset E_1((\mathcal{Z}^{-1} - \xi) \tilde{r}) \subset E_1([\|T_1^{-1}\|^{-1} - L(\psi_f(g) - T_1)] \tilde{r}) \subset \psi_f(g)(E_1(r)).$$

(c) Sendo f_2 uma contração (lema 3.2) e $(1, g)$ uma isometria, segue-se pela proposição 1.6 que $L(\psi_f(g)) \leq L(f_2) \cdot L(1, g) < 1$

* * *

3.5 DEFINIÇÃO . Suponhamos que $f(0) = 0$. A transformação - gráfico associada a f é a aplicação $\Gamma_f : G \rightarrow G$ definida por $\Gamma_f(g) = f_2 \circ (1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1} / E_1(r)$ ou seja, $\Gamma_f(g) = \psi_f(g) \circ \psi_f(g)^{-1} / E_1(r)$. A proposição anterior assegura que o segundo membro faz sentido e que realmente $\Gamma_f(g) \in G$, $\forall g \in G$. Mais ainda, $L(\Gamma_f(g)) < 1$, $\forall g \in G$. O termo "transformação - gráfico" se justifica pela

3.6 PROPOSIÇÃO . $h = \Gamma_f(g)$ se, e somente se, $f(\text{graf } g) \cap E(r) = \text{graf } h$.

Demonstração .

Suponhamos que $h = \Gamma_f(g)$. Então, se $(x, y) \in \text{graf } h \subset E(r)$, temos $y = h(x)$, isto é

$$y = f_2 \circ (1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x)$$

$$\text{Mas } x \in E_1(r) \implies u = [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x) \in E_1(r) \quad (\text{ver 3.4})$$

Logo, $y = f_2(u, g(u))$ e $x = f_1(u, g(u))$, donde

$$(x, y) = (f_1(u, g(u)), f_2(u, g(u))) = f(u, g(u)) \in f(\text{graf } g)$$

e portanto $\text{graf } h \subset f(\text{graf } g) \cap E(r)$.

Por outro lado, se $(x, y) \in f(\text{graf } g) \cap E(r)$, temos

$(x, y) = f(v, g(v))$, com $v \in E_1(r)$, e portanto

$$x = f_1(v, g(v)) = f_1 \circ (1, g)(v)$$

$$y = f_2(v, g(v)) = f_2 \circ (1, g)(v)$$

Segue-se que

$$v = [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x)$$

e portanto

$$y = f_2 \circ (1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x) = h(x)$$

Conclusão: $(x, y) \in \text{graf } h$.

Então: $f(\text{graf } g) \cap E(r) \subset \text{graf } h$.

Reciprocamente, se $f(\text{graf } g) \cap E(r) = \text{graf } h$, então, para todo $x \in E_1(r)$,

pondo $y = [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x)$, temos:

$$\Gamma_f(g)(x) = f_2 \circ (1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x) = f_2(y, g(y))$$

Logo, $(x, \Gamma_f(g)(x)) = (f_1 \circ (1, g)(y), f_2(y, g(y))) =$

$$= f(y, g(y)) \in f(\text{graf } g)$$

Também $(x, \Gamma_f(g)(x)) \in E(r)$, pois $L(\Gamma_f(g)) < 1$ e

$\|x\| < r$. Então, $(x, \Gamma_f(g)(x)) \in f(\text{graf } g) \cap E(r) = \text{graf } h$.

o que prova que

$$h(x) = \Gamma_f(g)(x).$$

* * *

3.7 OBSERVAÇÃO. Tomando $f = T / E(r)$, teremos

$$\Gamma_T(g) = T_2 \circ g \circ T_1^{-1} / E_1(r), \quad \forall g \in G.$$

De fato, basta notar que $\widetilde{\Pi}_1 \circ T \circ (1, g) = T_1$ e

$$\widetilde{\Pi}_2 \circ T \circ (1, g) = T_2 \circ g \quad (\text{atente-se para o fato de que as componentes})$$

de f são $\widetilde{\Pi}_1 \circ T/E(r)$ e $\widetilde{\Pi}_2 \circ T/E(r)$, e não T_1 e T_2 !)

3.8 PROPOSIÇÃO. A transformação-gráfico Γ_f é uma contração de G , e como G é completo, existe um atrator g_f para Γ_f , que é por sua vez uma contração.

Demonstração :

Para quaisquer $g_1, g_2, \in G$, temos pela proposição 1.6:

$$\begin{aligned} d(\Gamma_f(g_1), \Gamma_f(g_2)) &= d(\varphi_f(g_1) \circ \psi_f(g_1)^{-1}, \varphi_f(g_2) \circ \psi_f(g_2)^{-1}) \leq \\ &\leq d(\varphi_f(g_1), \varphi_f(g_2)) + L(\varphi_f(g_2)) \cdot d(\psi_f(g_1)^{-1}, \psi_f(g_2)^{-1}) \leq \\ &\leq d(\varphi_f(g_1), \varphi_f(g_2)) + L(\varphi_f(g_2)) \cdot L(\psi_f(g_1)^{-1}) \cdot d(\psi_f(g_1), \psi_f(g_2)) \leq \\ &\leq d(\varphi_f(g_1), \varphi_f(g_2)) + (\zeta + \varepsilon) \cdot (\zeta^{-1} - \varepsilon)^{-1} \cdot d(\psi_f(g_1), \psi_f(g_2)) \end{aligned}$$

$$\text{Mas: } \forall x \in E_1(r),$$

$$\| \varphi_f(g_1)(x) - \varphi_f(g_2)(x) \| = \| f_2(x, g_1(x)) - f_2(x, g_2(x)) \| \leq$$

$$\leq \| \widetilde{\Pi}_2 [(f-T)(x, g_1(x)) - (f-T)(x, g_2(x))] \| + \| \widetilde{\Pi}_2 \circ T(0, g_1(x) - g_2(x)) \|$$

$$\leq L(f-T) \| g_1(x) - g_2(x) \| + \| T_2 \| \cdot \| g_1(x) - g_2(x) \| \leq$$

$$< (\varepsilon + \zeta) \|g_1(x) - g_2(x)\|$$

$$\text{Daí, } d(\varphi_f(g_1), \varphi_f(g_2)) = \sup_{x \in E_1(r)} \|\varphi_f(g_1)(x) - \varphi_f(g_2)(x)\| <$$

$$< (\zeta + \varepsilon) \sup_{x \in E_1(r)} \|g_1(x) - g_2(x)\| = (\zeta + \varepsilon) \cdot d(g_1, g_2)$$

Por outro lado, $\forall x \in E_1(r)$:

$$\|\psi_f(g_1)(x) - \psi_f(g_2)(x)\| \leq$$

$$\leq \|\tilde{\eta}_1 [(f - T)(x, g_1(x)) - (f - T)(x, g_2(x))] \| +$$

$$+ \|\tilde{\eta}_1 \circ T(0, g_1(x) - g_2(x))\| <$$

$$\leq L(f - T) \|g_1(x) - g_2(x)\| + \|T_1(0)\| < \varepsilon \|g_1(x) - g_2(x)\|$$

$$\text{Daí, } d(\psi_f(g_1), \psi_f(g_2)) = \sup_{x \in E_1(r)} \|\psi_f(g_1)(x) - \psi_f(g_2)(x)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sup_{x \in E_1(r)} \|g_1(x) - g_2(x)\| = \varepsilon \cdot d(g_1, g_2)$$

(Mostramos que $\varphi_f : G \longrightarrow M(E_1(r), E_2)$ e

$\psi_f : G \longrightarrow M(E_1(r), E_1)$ são contrações).

Voltando à desigualdade inicial, temos :

$$\begin{aligned}
 d(\Gamma_f(g_1), \Gamma_f(g_2)) &\leq d(\Psi_f(g_1), \Psi_f(g_2)) + \\
 &+ (\overline{c} + \varepsilon)(\overline{c}^{-1} - \varepsilon)^{-1} \cdot d(\Psi_f(g_1), \Psi_f(g_2)) \\
 &\leq \left[(\overline{c} + \varepsilon) + (\overline{c} + \varepsilon) \cdot (\overline{c}^{-1} - \varepsilon)^{-1} \cdot \varepsilon \right] d(g_1, g_2) = \\
 &= \frac{\overline{c} + \varepsilon}{1 - \overline{c}\varepsilon} \cdot d(g_1, g_2)
 \end{aligned}$$

Logo, Γ_f é uma contração. Finalmente, o atrator g_f de Γ_f é por sua vez uma contração, pois

$$\Gamma_f(g_f) = g_f \implies L(g_f) < 1 \quad (\text{v. 3.5})$$

* * *

4 . OS TEOREMAS DAS VARIEDADES

INSTÁVEL E ESTÁVEL

4.1 LEMA. Seja E um espaço de Banach, $T : E \longrightarrow E$ um operador hiperbólico com assimetria ζ , e $f : E(r) \longrightarrow E$ uma função tal que

$$L(f - T) < \varepsilon < \min \left\{ \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \quad \|T^{-1}\|^{-1} \right\}$$

e $f(0) = 0$. Então, existe uma (única) função $g_f : E_1(r) \longrightarrow E_2(r)$ cujo gráfico é W_1 e tal que $L(g_f) < 1$ (as notações são as mesmas que as da secção 3).

Demonstração :

Seja g_f o atrator da transformação-gráfico $\Gamma_f : G \longrightarrow G$ (v. proposição 3.8). Como $g_f : E_1(r) \longrightarrow \overline{E_2(r)}$ e $L(g_f) < 1$ temos $g_f : E_1(r) \longrightarrow E_2(r)$. Mostremos que $\text{graf } g_f = W_1$, é suficiente mostrar que $\text{graf } g_f \subset W_1$, pois de 3.3 sabemos que W_1 é gráfico de uma função $U_1 \longrightarrow E_2(r)$, $U_1 \subset E_1(r)$. Em outras palavras, devemos provar que $\text{graf } g_f \subset f^n(E(r))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Procederemos por indução : se $n = 0$, não há o que fazer, uma vez que $f^0(E(r)) = E(r)$. Suponhamos que $\text{graf } g_f \subset f^{n-1}(E(r))$, para $n \geq 1$. Então : se $x \in \text{graf } g_f = f(\text{graf } g_f) \cap E(r)$ (proposição 3.6), temos $x = f(y)$, com $y \in \text{graf } g_f \subset f^{n-1}(E(r))$. Logo, $f^{-k}(y) \in E(r)$, para $k = 1, \dots, n-1$, donde $f^{-k}(f^{-1}(x)) \in E(r)$

para $1 \leq k \leq n-1$, e portanto $f^{-j}(x) \in E(r)$, para $j = 2, \dots, n$.
 Como $f^{-1}(x) = y \in E(r)$, temos $f^{-j}(x) \in E(r)$ para $1 \leq j \leq n$, o
 que garante que $x \in f^n(E(r))$.

Conclusão : $\text{graf } g_f \subset f^n(E(r))$.

* * *

4.2 LEMA. Nas condições do lema anterior, a aplicação
 $f^{-1}/W_1 : W_1 \rightarrow W_1$ está bem definida e é uma contração.

Demonstração :

De $f(\text{graf } g_f) \cap E(r) = \text{graf } g_f$ segue-se que $f(W_1) \supset W_1$,
 o que dá sentido a $f^{-1}/W_1 \rightarrow W_1$.

De fato : se $x \in W_1$, então $x \in f^n(E(r))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$f^{-j}(x)$ existe e pertence a $E(r)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Seja então
 $y = f^{-1}(x)$. É claro que $y \in W_1$, pois

$f^{-j}(y) = f^{-j-1}(x) \in E(r)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Logo, $x = f(y) \in f(W_1)$. Mostre

mos agora que $f^{-1}/W_1 : W_1 \rightarrow W_1$ é uma contração. Inicialmente,
 é fácil ver que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 W_1 & \xrightarrow{f} & f(W_1) \supset W_1 \\
 \pi_1 \downarrow & \psi_{f(g_f)} & \downarrow \pi_1 \\
 E_1(r) & \xrightarrow{\quad} & E_1
 \end{array}$$

é comutativo. Segue-se daí que, para $a \in E_1(r)$,

$$(f^{-1})_1 (a, g_f(a)) = \psi_f (g_f)^{-1}(a).$$

Além disso, $L(g_f) < 1$ acarreta que $\tilde{\pi}_1$ é uma isometria de W_1 sobre $E_1(r)$, e portanto, se $u = (a, g_f(a))$, $v = (b, g_f(b)) \in W_1$, temos :

$$\begin{aligned} \| f^{-1}(u) - f^{-1}(v) \| &= \| f_1^{-1} (a, g_f(a)) - f_1^{-1} (b, g_f(b)) \| = \\ &= \| \psi_f (g_f)^{-1}(a) - \psi_f (g_f)^{-1}(b) \| \leq L (\psi_f (g_f)^{-1}) \| a - b \| = \\ &= L (\psi_f (g_f)^{-1}) \| u - v \|. \end{aligned}$$

Logo, f^{-1}/W_1 é uma contração, já que

$$L (\psi_f (g_f)^{-1}) < (\varepsilon^{-1} - \varepsilon)^{-1} < 1$$

* * *

4.3 COROLARIO. A origem é o único ponto fixo de f .

Demonstração :

Qualquer ponto fixo de f deve pertencer a W_1 , pois se $f(a) = a$, então $f^{-j}(a) = a \in E(r)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, sendo f^{-1}/W_1 uma contração, f^{-1} tem no máximo um ponto fixo em W_1 .

* * *

4.4 PROPOSIÇÃO. Seja $f : E(r) \rightarrow E$ como no lema 4.1 e suponhamos que $f \in UC^1$. Então, $g_f \in UC^1$.

Demonstração :

Como $T \in C^\infty$, temos $f - T \in C^1$ e portanto, pelo lema 1.9,

$$\| D(f - T)(z) \| \leq L(f - T) < \varepsilon, \quad \forall z \in E(r)$$

Segue-se daí que

$$\| Df(z) - T \| < \varepsilon, \quad \forall z \in E(r)$$

Isso quer dizer que, para todo $z \in E(r)$, a função $Df(z)/E(1) -$ que indicaremos ainda por $Df(z) -$ é tal que

$$L(Df(z) - T) = \| Df(z) - T \| < \varepsilon$$

e portanto está bem definida a transformação-gráfico a ela associada,

$$\Gamma_{Df(z)} : G_1 \rightarrow G_1$$

onde $G_1 = \{ g \in M(E_1(1), \overline{E_2(1)}) : L(g) \leq 1 \}$;

lembramos que, para $g \in G_1$,

$$\Gamma_{Df(z)}(g) = Df_2(z) \circ (1, g) \circ [Df_1(z) \circ (1, g)]^{-1} / E_1(1)$$

e que $\Gamma_{Df(z)}(g)$ é uma contração, $\forall g \in G_1$.

Consideremos agora o espaço (completo)

$$H = \{ h \in C^0(E_1(r), L(E_1, E_2)) : \|h(x)\| \leq 1, \forall x \in E_1(r) \}$$

que nada mais é do que a bola fechada unitária do espaço de Banach das funções contínuas e limitadas $E_1(r) \rightarrow L(E_1, E_2)$. Observe -se que, quaisquer que sejam $h \in H$ e $z_1 \in E_1(r)$, temos

$$\tilde{h}(z_1) = h(z_1) / E_1(1) \in G \text{ e que portanto, se } z = (1, g)(z_1),$$

$$\text{então } \Gamma_{Df(z)}(\tilde{h}(z_1)) \in G_1 \text{ e}$$

$$\Gamma_{Df(z)}(\tilde{h}(z_1)) = Df_2(z) \circ (1, \tilde{h}(z_1)) \circ [Df_1(z) \circ (1, \tilde{h}(z_1))]^{-1} / E_1(1)$$

Definimos então, para cada $g \in G$, a função

$$\omega_g : H \rightarrow H$$

tal que, $\forall h \in H$:

$$\omega_g(h)(x) = Df_2(z) \circ (1, h(z_1)) \circ [Df_1(z) \circ (1, h(z_1))]^{-1}$$

onde $z_1 = \psi_f(g)^{-1}(x)$, $z_2 = g(z_1)$ e $z = (z_1, z_2)$. Em ou-

tras palavras, $\omega_g(h)(x)$ é a (única) extensão linear a E_1 de

$\bigcap_{Df(z)} (\bar{h}(z_1))$. Logo, está bem definida e

$$\|\omega_g(h)(x)\| \leq 1, \quad \forall x \in E_1(r)$$

pois $\omega_g(h)(x)$, restrita à bola unitária, é uma contração. Isso mostra que $\omega_g(h) \in H$. Mostremos que ω_g é uma contração:

$$\begin{aligned} d(\omega_g(h_1), \omega_g(h_2)) &= \sup_{x \in E_1(r)} \|\omega_g(h_1)(x) - \omega_g(h_2)(x)\| = \\ &= \sup_{x \in E_1(r)} d(\bigcap_{Df(z)} (\bar{h}_1(z_1)), \bigcap_{Df(z)} (\bar{h}_2(z_1))) \leq \\ &\leq \sup_{x \in E_1(r)} K \cdot d(\bar{h}_1(z_1), \bar{h}_2(z_1)) \end{aligned}$$

onde $K = L(\bigcap_{Df(z)}) < 1$. Mas

$$x \in E_1(r) \implies z_1 = \psi_f(g)^{-1}(x) \in E_1(r).$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(\omega_g(h_1), \omega_g(h_2)) &\leq K \sup_{z_1 \in E_1(r)} \|h_1(z_1) - h_2(z_1)\| = \\ &= K d(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Construímos assim uma família $(\omega_g)_{g \in G}$ de contrações

$\omega_g : H \longrightarrow H$. Seja

$$F_f : G \times H \longrightarrow G \times H$$

tal que

$$F_f(g, h) = (\Gamma_f(g), \omega_g(h)).$$

Já sabemos que $\Gamma_f : G \rightarrow G$ tem um atrator g_f ; logo, para recairmos nas condições do teorema da contração em fibras (1.8), basta mostrar que, para cada $h \in H$, a função $u : G \rightarrow H$ tal que

$$u(g) = \omega_g(h)$$

é contínua. Então: seja $g \in G$ e mostremos que u é contínua em g :

$$d(\omega_g(h), \omega_{g'}(h)) = \sup_{x \in E_1(r)} \|\omega_g(h)(x) - \omega_{g'}(h)(x)\|$$

Seja $A(x) = \|\omega_g(h)(x) - \omega_{g'}(h)(x)\|$ Temos

$$\begin{aligned} A(x) &= \left\| Df_2(z) \circ (1, h(z_1)) \circ [Df_1(z) \circ (1, h(z_1))]^{-1} \right. \\ &\quad \left. - Df_2(z') \circ (1, h(z'_1)) \circ [Df_1(z') \circ (1, h(z'_1))]^{-1} \right\| \end{aligned}$$

onde : $z = (1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x) = (z_1, z_2)$

$$z' = (1, g') \circ [f_1 \circ (1, g')]^{-1}(x) = (z'_1, z'_2)$$

Como as funções envolvidas na expressão acima são tôdas lineares, suas normas são suas constantes de Lipschitz. Aplicando então a proposição 1.6, obtemos :

$$A(x) \leq \|Df_2(z) - Df_2(z')\| + \\ + \|Df_2(z')\| \left\{ \|h(z_1) - h(z'_1)\| + L(\psi_{Df(z)}(h(z_1))^{-1}) \cdot \right. \\ \left. \cdot [\|Df_1(z) - Df_1(z')\| + \|Df_1(z')\| \|h(z_1) - h(z'_1)\|] \right\}$$

(note-se que $\|(1, h(z'_1))\| = 1$, pois $\|h(z'_1)\| \leq 1$).

Mas, para todo $x \in E_1(r)$:

$$\|z - z'\| = \|(1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x) - (1, g') \circ [f_1 \circ (1, g')]^{-1}(x)\| \leq \\ \leq d((1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}, (1, g') \circ [f_1 \circ (1, g')]^{-1}) \leq \\ \leq d(g, g') + L(\psi_f(g)^{-1}) \cdot d(\psi_f(g), \psi_f(g'))$$

Ora, $L(\psi_f(g)^{-1}) < 1$ e

$$d(\psi_f(g), \psi_f(g')) < \varepsilon \cdot d(g, g')$$

(Como foi visto em 3.8). Segue-se que

$$\|z - z'\| \leq (1 + \varepsilon) d(g, g') \quad , \quad \forall x \in E_1(r).$$

Então, para todo $\rho > 0$, existe $\rho_1 > 0$, independente de x , tal que

$$d(g, g') < \rho_1 \Rightarrow \|z - z'\| < \rho$$

Por outro lado, sendo Df uniformemente contínua em $E(r)$, temos :

$$\forall \eta > 0, \exists \rho' > 0 \quad \text{tal que}$$

$$\|z - z'\| < \rho' \Rightarrow \|Df(z) - Df(z')\| < \eta \Rightarrow$$

$$\|Df_i(z) - Df_i(z')\| < \eta \quad (i = 1, 2)$$

Além disso, h sendo contínua, temos :

$$\forall \eta > 0, \exists \rho'' > 0 \quad \text{tal que} \quad \|z - z'\| < \rho'' \Rightarrow \|h(z_1) - h(z'_1)\| < \eta$$

Finalmente, sabemos que existe $M > 0$ tal que

$$\|Df_i(z')\| \leq M, \quad \forall z' \in E(r) \quad (i = 1, 2) \quad (\text{basta tomar}$$

$M = \|T\| + \varepsilon)$ e também que

$$L(\Psi_{Df(z)}(\bar{h}(z_1))^{-1}) < 1, \quad \forall z_1 \in E_1(r).$$

Conclusão: para todo $\eta > 0$, tomando $\rho = \min\{\rho', \rho''\}$, teremos

$$d(g, g') < \rho_1 \Rightarrow \|z - z'\| < \rho \quad A(x) < \eta + M \{ \eta + M \eta \} = \eta(M+1)^2$$

Como ρ_1 independe de x , temos :

$$\begin{aligned} d(g, g') < \rho_1 &\Rightarrow d(u(g), u(g')) = d(\omega_g(h), \omega_{g'}(h)) = \\ &= \sup_{x \in E(r)} A(x) \leq \eta (M+1)^2 \end{aligned}$$

o que prova a continuidade de u no ponto g .

Pelo teorema 1.8, concluímos que existe $h_f \in H$ tal que (g_f, h_f) é um atrator para F_f e h_f é o ponto fixo de ω_{g_f} . A parte final da demonstração será decomposta em diversas etapas:

(a) Se $g \in G$ e g é de classe C^1 , então :

$Dg \in H$, $\Gamma_f(g)$ é diferenciável e

$$D(\Gamma_f(g)) = \omega_g(Dg)$$

e portanto $\Gamma_f(g)$ é de classe C^1 , pois

$$\omega_g(Dg) \in H \Rightarrow \omega_g(Dg) \text{ é contínua.}$$

De fato : $Dg \in H$, pois sendo g lipschitziana com $L(g) \leq 1$, segue-se do lema 1.9 que $\|Dg(z_1)\| \leq 1$, $\forall z_1 \in E_1(r)$.

Por outro lado, vimos na demonstração de 3.4 que

$L(\psi_f(g) - T_1) < \|T_1^{-1}\|^{-1}$. Então, como $\psi_f(g)$ é diferenciável, o teorema 1.10 (item (c)) nos permite concluir que $\psi_f(g)^{-1}$ é diferenciável. Sendo $\varphi_f(g)$ também diferenciável, segue-se a diferenciabilidade de $\Gamma_f(g)$. Agora, $\forall x \in E_1(r)$:

$$\begin{aligned} D(\Gamma_f(g))(x) &= D\varphi_f(g)(z_1) \circ D[\psi_f(g)^{-1}](x) = \\ &= Df_2(z) \circ (1, Dg(z_1)) \circ [Df_1(z) \circ (1, Dg(z_1))]^{-1} = \\ &= \omega_g(Dg)(x) \end{aligned}$$

onde $z = (1, g)(z_1)$ e $z_1 = \psi_f(g)^{-1}(x)$. Isso mostra que

$$D(\Gamma_f(g)) = \omega_g(Dg)$$

(b) Se $g \in G$ é uniformemente C^1 , então $\Gamma_f(g)$ também é uniformemente C^1 .

Por (a), basta mostrar que $\omega_g(Dg)$ é uniformemente contínua :

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in E_1(r) : \quad & \|\omega_g(Dg)(x) - \omega_g(Dg)(x')\| = \\ & = \|Df_2(z) \circ (1, Dg(z_1)) \circ [Df_1(z) \circ (1, Dg(z_1))]^{-1} - \\ & - Df_2(z') \circ (1, Dg(z'_1)) \circ [Df_1(z') \circ (1, Dg(z'_1))]^{-1}\| \end{aligned}$$

onde $z = (z_1, z_2) = (1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x)$

e $z' = (z'_1, z'_2) = (1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x')$

Como na demonstração da continuidade da função u , por aplicação de 1.6, obtemos :

$$\begin{aligned} & \| \omega_g(Dg)(x) - \omega_g(Dg)(x') \| \leq \| Df_2(z) - Df_2(z') \| + \\ & + \| Df_2(z') \| \left\{ \| Dg(z_1) - Dg(z'_1) \| + \| Df_1(z) - Df_1(z') \| + \right. \\ & \left. + \| Df_1(z') \| \cdot \| Dg(z_1) - Dg(z'_1) \| \right\} \end{aligned}$$

Mas :

(i) $\forall \rho > 0, \exists \eta' > 0$ tal que

$$\| z - z' \| < \eta' \Rightarrow \| Df_i(z) - Df_i(z') \| < \rho$$

pois $f \in UC^1$.

(ii) $\exists M > 0$ tal que $\| Df_i(z') \| \leq M, \quad \forall z' \in E(r)$

(i=1,2)

(basta tomar $M = \| T \| + \varepsilon$)

(iii) $\forall \rho > 0 \exists \eta'' > 0$ tal que

$$\|z_1 - z'_1\| < \eta' \implies \|Dg(z_1) - Dg(z'_1)\| < \rho$$

(pois Dg é uniformemente contínua).

$$(iv) \quad \|z - z'\| = \|(1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x) -$$

$$- (1, g) \circ [f_1 \circ (1, g)]^{-1}(x')\| \leq$$

$$\leq L(1, g) \cdot \|\psi_f(g)^{-1}(x) - \psi_f(g)^{-1}(x')\| \leq$$

$$\leq L(1, g) \cdot L(\psi_f(g)^{-1}) \|x - x'\| < \|x - x'\|$$

(pois $L(1, g) \leq 1$ e $\psi_f(g)^{-1}$ é contração).

Então : dado $\rho > 0$, tomando

$$\eta = \min \{ \eta', \eta'' \}, \quad \text{teremos :}$$

$$\|x - x'\| < \eta \implies \|z - z'\| < \eta \implies \|\omega_g(Dg)(x) - \omega_g(Dg)(x')\| <$$

$$< \rho + M \{ \rho + \rho + M \rho \} = \rho (M + 1)^2$$

o que mostra que $\omega_g(Dg)$ é uniformemente contínua.

(c) Se $g \in UC^1$ então a sequência $(D(\Gamma_f^n(g)))_{n \in \mathbb{N}}$

converge para h_f em H (isto é, uniformemente), e portanto h_f

é uniformemente contínua, como limite uniforme de uma sequência de funções uniformemente contínuas.

Ponhamos $\Delta g = (g, Dg) \in G \times H$. Então :

$$F_f(\Delta g) = (\Gamma_f(g), \omega_g(Dg)) = (\Gamma_f(g), D(\Gamma_f(g))) = \Delta \Gamma_f(g).$$

Por indução, chega-se facilmente a $F_f^n(\Delta g) = \Delta \Gamma_f^n(g)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como, porém, (g_f, h_f) é um atrator para F_f , temos

$$F_f^n(\Delta g) \longrightarrow (g_f, h_f). \text{ Logo,}$$

$$\Delta \Gamma_f^n(g) = (\Gamma_f^n(g), D(\Gamma_f^n(g))) \longrightarrow (g_f, h_f), \text{ donde concluimos que } D(\Gamma_f^n(g)) \longrightarrow h_f \text{ em } H.$$

(d) $h_f = Dg_f$, o que termina a demonstração.

De fato: seja $g \in G$ uma função uniformemente C^1 (existe tal função; por exemplo, $g = 0$). A sequência de funções $(\Gamma_f^n(g))$ satisfaz as hipóteses do teorema 1.12, pois são diferenciáveis (item (a)), a sequência $(\Gamma_f^n(g)(a))$ converge para todo $a \in E_1(r)$ (pois $\Gamma_f^n(g) \rightarrow g_f$), e a sequência $D(\Gamma_f^n(g))$ converge uniformemente em $E_1(r)$ (item (c)); logo, em qualquer bola contida em $E_1(r)$.

Conclusão : $D(\Gamma_f^n(g)) \longrightarrow Dg_f$ (pontualmente). Mas

$$D(\Gamma_f^n(g)) \longrightarrow h_f \text{ uniformemente, e portanto } h_f = Dg_f.$$

* * *

4.5 LEMA. Para todo $\tilde{r} \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \tilde{r} \leq r$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$g_f = f_2^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) \circ [f_1^j \circ (1, g_{\tilde{f}})]^{-1} / E_1(r)$ onde $\tilde{f} = f/E(\tilde{r})$
e $g_{\tilde{f}} = g_f / E(\tilde{r})$ é o ponto fixo de $\Gamma_{\tilde{f}}$.

Demonstração :

Inicialmente observemos que, como não se tem necessariamente $\text{Im } f \subset E(r)$, pode não estar bem definida a composta $f \circ f \circ \dots \circ f$. Restringindo f ao conjunto $A = f^{-n}(E(r))$ (ver secção 3), porém, podemos considerar a composta $(f/A) \circ (f/A) \circ \dots \circ (f/A)$ (n vezes), que será indicada livremente por f^n . A mesma observação vale para a função $\Psi_f(g_f)$.

Seja $p = \Psi_f(g_f) : E_1(r) \rightarrow E$. Sabemos de 3.4 que p é uma expansão, isto é,

$$\|p(x) - p(y)\| \geq (\zeta^{-1} - \xi) \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E(r).$$

Afirmamos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $p^j(E_1(\tilde{r})) \supset E_1(r)$.

De fato : ponhamos $K = \zeta^{-1} - \xi$ e consideremos uma sequência (r_n) de números reais tais que

$$\tilde{r} > r_1 > r_2 > \dots > r_n > \dots > \frac{\tilde{r}}{K}. \quad \text{É claro que existe o menor } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } K^j > r_j > K^{j-1} \tilde{r} \geq r. \text{ Por 1.11, temos}$$

$p(E_1(\tilde{r})) \supset E_1(Kr_1)$. Se $Kr_1 \geq r$, temos $j = 1$. Se

$Kr_1 < r$, temos novamente por 1.11 : $p(E_1(Kr_1)) \supset E_1(K^2 r_2)$ e como $E_1(Kr_1) \subset p(E_1(\tilde{r})) \cap E_1(r)$ temos

$p^2(E_1(\tilde{r})) \supset p(E_1(Kr_1)) \supset E_1(K^2 r_2)$. Se $K^2 r_2 \geq r$, temos

$j = 2$; caso contrário, repetimos o raciocínio, obtendo

$p^3 (E_1 (\tilde{r})) \supset E_1 (K^3 r_3)$. Então, após j passos, chegaremos -
a $p^j (E_1 (\tilde{r})) \supset E_1 (K^j r_j) \supset E_1 (r)$.

Lembrando agora que $(1, g_f) \circ \tilde{H}_1 = 1_{W_1}$ é fácil -
ver que $p^j = \tilde{H}_1 \circ f^j \circ (1, g_f)$ donde -

$\tilde{H}_1 \circ f^j \circ (1, g_f) (E_1 (\tilde{r})) \supset E_1 (r)$ e portanto -

$(1, g_f) \circ \tilde{H}_1 \circ f^j \circ (1, g_f) (E_1 (\tilde{r})) \supset (1, g_f) (E_1 (r))$ ou seja -
 $f^j (\text{graf } g_{\tilde{f}}) \supset \text{graf } g_f$. Isso acarreta -

$$(4-I) \quad f^j (\text{graf } g_{\tilde{f}}) \cap E(r) = \text{graf } g_f .$$

Podemos agora provar o lema em duas etapas :

(a) $\left[f_1^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) \right]^{-1}$ está bem definida em $E_1 (r)$
e toma valores em $E_1 (\tilde{r})$.

De fato : Se $x \in E_1 (r)$, existe um único -
 $(x, g_f (x)) \in \text{graf } g_f$. Então, por (4-I), existe um único -
 $(y, g_{\tilde{f}} (y)) \in \text{graf } g_{\tilde{f}}$ tal que $f^j (y, g_{\tilde{f}} (y)) = (x, g_f (x))$ -
(pois f é bijetora) . Então : $x = f_1^j (y, g_{\tilde{f}} (y))$, o que de-
monstra o item (a) .

$$(b) \quad g_f = f_2^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) \circ \left[f_1^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) \right]^{-1} / E_1 (r) .$$

De fato, com as notações de (a) , temos :

$$\begin{aligned} g_f(x) &= f_2^j(y, g_{\tilde{f}}(y)) = f_2^j \circ (1, g_{\tilde{f}})(y) = \\ &= f_2^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) \circ [f_1^j \circ (1, g_{\tilde{f}})]^{-1}(x) \end{aligned}$$

* * *

Observação : Será útil notar que

$$\begin{aligned} f_1^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) &= [f_1 \circ (1, g_f)]^{j-1} \circ f_1 \circ (1, g_{\tilde{f}}) \quad (\text{pois} \\ \tilde{\pi}_1 \circ f \circ (1, g_f) \circ \tilde{\pi}_1 \circ f \circ (1, g_f) \circ \dots \circ \tilde{\pi}_1 \circ f \circ (1, g_{\tilde{f}}) &= \\ = \tilde{\pi}_1 \circ f^j \circ (1, g_{\tilde{f}})) \text{ e que portanto } f_1^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) \text{ é um difeomor} & \\ \text{fismo quando } f \in UC^1. \end{aligned}$$

4.6 LEMA . Seja (g_n) uma sequência de funções de $E(r)$ em F , E e F espaços normados . Então, $g_n^* \xrightarrow{C^p} g^*$ se, e somente se, $g_n \xrightarrow{C^{p+1}} g$ ($p \geq 1$) .

Demonstração .

Suponhamos em primeiro lugar que $g_n \xrightarrow{C^{p+1}} g$. Então, $Dg_n \xrightarrow{C^p} Dg$ e $D^2g_n \xrightarrow{C^{p-1}} D^2g$, o que acarreta, devido a 2.7, $\theta_i \circ Dg_n \circ \tilde{\pi}_1 \xrightarrow{C^p} \theta_i \circ Dg \circ \tilde{\pi}_1$ ($i = 1, 2$) (notações de 2.14) e

$$\theta_1 \circ v \circ (D^2g_n \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) \xrightarrow{C^{p-1}} \theta_1 \circ v \circ (D^2g \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) .$$

Pela proposição 2.14, podemos concluir que $D(g_n^*) \xrightarrow{C^{p-1}} D(g^*)$,

donde $g_n^* \xrightarrow{C^p} g^*$.

Reciprocamente, se $g_n^* \xrightarrow{C^p} g^*$, então
 $D(g_n^*) \xrightarrow{C^{p-1}} D(g^*)$, e novamente pela proposição 2.14, temos:

- (i) $\theta_1 \circ Dg_n \circ \tilde{\pi}_1 \xrightarrow{C^{p-1}} \theta_1 \circ Dg \circ \tilde{\pi}_1$, e
 (ii) $\theta_2 \circ Dg_n \circ \tilde{\pi}_1 + \theta_1 \circ v(D^2g_n \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) \xrightarrow{C^{p-1}} \theta_2 \circ Dg \circ \tilde{\pi}_1 +$
 $+ \theta_1 \circ v \circ (D^2g \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$.

A proposição 2.7 permite concluir então de (i) que
 $Dg_n \xrightarrow{C^{p-1}} Dg$ e portanto de (ii) que $D^2g_n \xrightarrow{C^{p-1}} D^2g$,
 donde $g_n \xrightarrow{C^{p+1}} g$. De fato: mostremos que

$$\theta_1 \circ Dg_n \circ \tilde{\pi}_1 \xrightarrow{C^{p-1}} \theta_1 \circ Dg \circ \tilde{\pi}_1 \implies Dg_n \xrightarrow{C^{p-1}} Dg.$$

Para isso, definamos as aplicações $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{p-1}$ do seguinte modo: $\eta_0 = \theta_1 : L(E_1, E_2) \longrightarrow L(E_1 \times E_1, E_2)$ e para $i = 1, 2, \dots, p-1$,

$$\eta_i : L(E_1, L(E_1, \dots, L(E_1, E_2))) \longrightarrow L(E_1 \times E_1, L(E_1 \times E_1, \dots, L(E_1 \times E_1, E_2)))$$

é tal que $\eta_i(u) = \eta_{i-1} \circ u \circ \tilde{\pi}_1$.

É fácil ver que se trata de aplicações lineares contínuas. Se pusermos $\alpha = \theta_1 \circ (Dg_n - Dg) \circ \tilde{\pi}_1$, um cálculo paciente permite chegar, com o auxílio de 2.7, a

$$D_{\alpha}^j = \eta_j \circ (D^{j+1}g_n - D^{j+1}g) \circ \tilde{\pi}_1, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Então: para $x, y \in E_1(r)$, temos:

$$\|D_{\alpha}^j(x, y)\| = \|\eta_j \circ (D^{j+1}g_n - D^{j+1}g)(x)\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \| \gamma_{j-1} \circ [D^{j+1} g_n(x) - D^{j+1} g(x)] \circ \tilde{\pi}_1 \| = \\
&= \sup_{\|a_1\| \leq 1} \| \gamma_{j-1} \circ [D^{j+1} g_n(x) - D^{j+1} g(x)] (a_1) \| \\
&= \sup_{\|a_1\| \leq 1} \| \gamma_{j-2} \circ [D^{j+1} g_n(x) - D^{j+1} g(x)] a_1 \circ \tilde{\pi}_1 \| = \\
&= \dots = \sup_{\|a_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq j} \| \gamma_0 \circ [D^{j+1} g_n(x) - D^{j+1} g(x)] a_1 \dots a_j \| = \\
&= \sup_{\|a_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq j} \| [D^{j+1} g_n(x) - D^{j+1} g(x)] a_1 \dots a_j \circ \tilde{\pi}_1 \| = \\
&= \sup_{\|a_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq j+1} \| [D^{j+1} g_n(x) - D^{j+1} g(x)] a_1 \dots a_{j+1} \| = \\
&= \| D^{j+1} g_n(x) - D^{j+1} g(x) \|. \text{ Mas, devido a (i), sabemos que }
\end{aligned}$$

$$\| \alpha \|_{p-1} = \max_{0 \leq j \leq p-1} \sup_{\|x\|, \|y\| < r} \| D^j_C(x, y) \| \longrightarrow 0$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
&\max_{0 \leq j \leq p-1} \sup_{\|x\|, \|y\| < r} \| D^{j+1} g_n(x) - D^{j+1} g(x) \| \longrightarrow 0 \text{ ou se-} \\
&\text{ja, } Dg_n \xrightarrow{C^{p-1}} Dg.
\end{aligned}$$

Agora, de (ii), concluimos que

$$\theta_1 \circ v \circ (D^2 g_n \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) \xrightarrow{C^{p-1}} \theta_1 \circ v \circ (D^2 g \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2). \text{ Mostremos para } p=1 \text{ e } p=2 \text{ que daí segue } D^2 g_n \xrightarrow{C^{p-1}} D^2 g \text{ (a demonstração geral se faz por indução) . Sejam}$$

$$K_n = \theta_1 \circ v \circ (D^2 g_n \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) \text{ e } K = \theta_1 \circ v \circ (D^2 g \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$$

$$\boxed{p=1} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{\|x\|, \|y\| < r} \| K_n(x, y) - K(x, y) \| < \frac{\varepsilon r}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|x\|, \|y\| < r \quad \|D^2 g_n(x) y \circ \tilde{\pi}_1 - D^2 g(x) y \circ \tilde{\pi}_1\| < \frac{\xi}{2} r \\
&\Rightarrow \|x\|, \|y\| < r \quad \sup_{\|a\| \leq 1} \|D^2 g_n(x) \cdot y \cdot a - D^2 g(x) \cdot y \cdot a\| < \frac{\xi}{2} r \\
&\Rightarrow \sup_{\|x\| < r} \sup_{\|a\| \leq 1} \frac{r}{2} \|D^2 g_n(x) a - D^2 g(x) a\| < \frac{\xi}{2} r \\
&\Rightarrow \sup_{\|x\| < r} \|D^2 g_n(x) - D^2 g(x)\| < \xi \Rightarrow \|D^2 g_n - D^2 g\|_0 < \xi
\end{aligned}$$

p = 2 Se $(x, y), (a, b) \in E_1 \times E_1$, temos por 2.10 :

$$\begin{aligned}
DK(x, y)(a, b) &= \theta_1 \circ Dv(D^2 g(x), y) \circ (D^3 g(x) \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)(a, b) = \\
&= Dv(D^2 g(x), y)(D^3 g(x) a, b) \circ \tilde{\pi}_1 = \\
&= (D^2 g(x) b + D^3 g(x) \cdot a \cdot y) \circ \tilde{\pi}_1 = D^2 g(x) b \circ \tilde{\pi}_1 + D^3 g(x) \cdot a \cdot y \circ \tilde{\pi}_1
\end{aligned}$$

Então :

$$DK(x, y) = \theta_1 \circ D^2 g(x) \circ \tilde{\pi}_2 + \theta_1 \circ D^3 g(x) y \circ \tilde{\pi}_1 \quad \text{donde,}$$

indicando por ρ a composição à esquerda com θ_1 , obtemos :

$$DK = \rho \circ \theta_2 \circ D^2 g \circ \tilde{\pi}_1 + \rho \circ \theta_1 \circ v \circ (D^3 g \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) \quad (\text{análogo para } DKr). \text{ Agora, se } K_n \xrightarrow{C^1} K, \text{ então } DK_n \xrightarrow{C^0} DK. \text{ Mas}$$

$$K_n \xrightarrow{C^1} K \Rightarrow K_n \xrightarrow{C^0} K \Rightarrow D^2 g_n \xrightarrow{C^0} D^2 g \quad (\text{já demonstrado}).$$

Concluimos por 2.7 que

$$\rho \circ \theta_2 \circ D^2 g_n \circ \tilde{\pi}_1 \xrightarrow{C^0} \rho \circ \theta_2 \circ D^2 g \circ \tilde{\pi}_1 \quad \text{e que portanto}$$

$$\rho \circ \theta_1 \circ v \circ (D^3 g_n \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) \xrightarrow{C^0} \rho \circ \theta_1 \circ v \circ (D^3 g \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$$

De um modo análogo ao que se fez no caso $p = 1$, concluimos que

$$D^3 g_n \xrightarrow{C^0} D^3 g \quad \text{ou seja} \quad D^2 g_n \xrightarrow{C^1} D^2 g.$$

4.7 PROPOSIÇÃO . Seja $f : E(r) \rightarrow E$ como no lema 4.1 e suponhamos que $f \in U C^k$ ($1 \leq k < \infty$) . Então existe $\hat{r} \leq r$ tal que $g_{\hat{f}} = g_f / E(\hat{r})$ é uniformemente C^k .

Demonstração .

Façamos indução sobre k . O caso $k = 1$ foi demonstrado em 4.4 , com $\hat{r} = r$. Suponhamos então válida a proposição para funções uniformemente C^{k-1} , com $k \geq 2$, e provemos que vale para funções uniformemente C^k . Seja M tal que $\|f\|_k \leq M$ e sejam $\tilde{\epsilon}$ e $\tilde{r}$ tais que

$$\epsilon < \tilde{\epsilon} < \min \left\{ \frac{1 - \bar{\epsilon}}{1 + \bar{\epsilon}} , \|T^{-1}\|^{-1} \right\} , 0 < \tilde{r} \leq r , \text{ e } M\tilde{r} < \tilde{\epsilon} - \epsilon$$

Indicaremos $\tilde{f} = f / E(\tilde{r})$.

Consideremos o operador $T \times T : E \times E \rightarrow E \times E$ tal que $T \times T(x, y) = (Tx, Ty)$. É trivial verificar que $T \times T$ é um operador hiperbólico (seu espectro está contido no espectro de T , uma vez que $T - \lambda I$ é injetor (sobrejetor) se, e somente se, $T \times T - \lambda(I \times I)$ é injetor (resp., sobrejetor)) e que a de composição canônica de $E \times E$ a ele associada é

$(E_1 \times E_1) \oplus (E_2 \times E_2)$. Consequentemente, se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ são dois elementos de E , com $u_i, v_i \in E_i$ ($i = 1, 2$) , o elemento (u, v) de $E \times E$ passará a ser indicado por $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$, isto é, as suas coordenadas serão (u_1, v_1) e (u_2, v_2) . Também é fácil ver que

$$(T \times T)_i = T_i \times T_i , \|T_i \times T_i\| = \|T_i\| ,$$

$$(T_i \times T_i)^{-1} = T_i^{-1} \times T_i^{-1} \text{ e } \|(T_i \times T_i)^{-1}\| = \|T_i^{-1}\|$$

$$(i = 1, 2) . \text{ Segue-se que } T \times T \text{ tem assimetria } \mathcal{C} .$$

Lembremos agora que $\tilde{f}^* : (E \times E)(\tilde{r}) \longrightarrow E \times E$ é definida por $\tilde{f}^*(x, y) = (\tilde{f}(x), D\tilde{f}(x) \cdot y)$ (ver 2.13) . Se $\tilde{f}_1^*$ e $\tilde{f}_2^*$ indicam suas componentes segundo a decomposição canônica de $E \times E$, temos : $\tilde{f}_i^* = (\tilde{f}_i)^*$ ($i = 1, 2$) . De fato: se $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in E(\tilde{r})$, o elemento $\tilde{f}^*(u, v) = (\tilde{f}(u), D\tilde{f}(u) \cdot v) \in E \times E$ se escreve, de acordo com o que observamos anteriormente,

$$((\tilde{f}_1(u), D\tilde{f}_1(u) \cdot v), (\tilde{f}_2(u), D\tilde{f}_2(u) \cdot v)) \text{ ou seja}$$

$$((\tilde{f}_1)^*(u, v), (\tilde{f}_2)^*(u, v)) .$$

Sabemos de 2.13 que $\tilde{f}^*$ é uniformemente $\mathcal{C}^{k-1}$. Mostremos então que $L(\tilde{f}^* - T \times T) < \tilde{\mathcal{E}}$, e assim estará satisfeita a hipótese de indução : $\forall x, y, x', y' \in E(\tilde{r})$;

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{f}^* - T \times T)(x, y) - (\tilde{f}^* - T \times T)(x', y')\| = \\ & = \|\tilde{f}^*(x, y) - T \times T(x, y) - \tilde{f}^*(x', y') + T \times T(x', y')\| = \\ & = \|(\tilde{f}_1^*(x, y), \tilde{f}_2^*(x, y)) - (T_1 \times T_1(x_1, y_1), T_2 \times T_2(x_2, y_2)) - \\ & - (\tilde{f}_1^*(x', y'), \tilde{f}_2^*(x', y')) + (T_1 \times T_1(x'_1, y'_1), T_2 \times T_2(x'_2, y'_2))\| \\ & = \max \left\{ \|\tilde{f}_1^*(x, y) - T_1 \times T_1(x_1, y_1) - \tilde{f}_1^*(x', y') + T_1 \times T_1(x'_1, y'_1)\|, \right. \\ & \left. \|\tilde{f}_2^*(x, y) - T_2 \times T_2(x_2, y_2) - \tilde{f}_2^*(x', y') + T_2 \times T_2(x'_2, y'_2)\| \right\} \end{aligned}$$

Mas, para $i = 1, 2$, temos :

$$\begin{aligned}
 & \| \tilde{f}_i^*(x, y) - T_i \circ T_i(x_i, y_i) - \tilde{f}_i^*(x', y') + T_i \circ T_i(x'_i, y'_i) \| = \\
 & \| (\tilde{f}_i(x), D\tilde{f}_i(x)y) - (T_i x_i, T_i y_i) - (\tilde{f}_i(x'), D\tilde{f}_i(x')y') + \\
 & \quad + (T_i x'_i, T_i y'_i) \| = \\
 & = \| (\tilde{f}_i(x) - T_i x_i - \tilde{f}_i(x') + T_i x'_i, D\tilde{f}_i(x)y - T_i y_i - D\tilde{f}_i(x')y' + T_i y'_i) \| = \\
 & = \| \tilde{\pi}_i [(\tilde{f} - T)(x) - (\tilde{f} - T)(x')] , \tilde{\pi}_i [(D\tilde{f}(x) - T)(y) - (D\tilde{f}(x') - T)(y')] \| = \\
 & = \max \left\{ \| \tilde{\pi}_i [(\tilde{f} - T)(x) - (\tilde{f} - T)(x')] \| , \| \tilde{\pi}_i [(D\tilde{f}(x) - T)(y) - (D\tilde{f}(x') - T)(y')] \| \right\} \leq \\
 & \leq \max \left\{ \| (\tilde{f} - T)(x) - (\tilde{f} - T)(x') \| , \| (D\tilde{f}(x) - T)(y) - (D\tilde{f}(x') - T)(y') \| \right\} \leq \\
 & \leq \max \left\{ L(\tilde{f} - T) \| x - x' \| , \| D\tilde{f}(x) - D\tilde{f}(x') \| \cdot \| y \| + \right. \\
 & \quad \left. + \| D\tilde{f}(x') - T \| \cdot \| y - y' \| \right\} \\
 & < \max \left\{ \varepsilon \| x - x' \| , \| D\tilde{f}(x) - D\tilde{f}(x') \| \tilde{r} + \varepsilon \| y - y' \| \right\}
 \end{aligned}$$

(pois conforme foi visto na demonstração de 4.4, temos

$$\| D\tilde{f}(z) - T \| < \varepsilon , \quad \forall z \in E(\tilde{r}) :$$

Ora, sendo $\tilde{f}$ de classe C^k , $k \geq 2$, e $|\tilde{f}|_k \leq M$, segue-se do Teorema do Valor Médio que $D\tilde{f}$ é lipschitziana e $L(D\tilde{f}) \leq M$ (v.l.9).

Daí,

$$\begin{aligned} & \| D\tilde{f}(x) - D\tilde{f}(x') \| \tilde{r} + \xi \| y - y' \| \leq M\tilde{r} \| x - x' \| + \xi \| y - y' \| \\ & \leq (M\tilde{r} + \xi) \max \{ \| x - x' \|, \| y - y' \| \} < \tilde{\xi} \| (x, y) - (x', y') \| \end{aligned}$$

Concluimos que, para $i = 1, 2$, temos :

$$\begin{aligned} & \| \tilde{f}_i^* (x, y) - T_i x T_i(x_i, y_i) - \tilde{f}_i^* (x', y') + T_i x T_i(x'_i, y'_i) \| < \\ & < \tilde{\xi} \| (x, y) - (x', y') \| \end{aligned}$$

donde

$$\| (\tilde{f}^* - T x T)(x, y) - (\tilde{f}^* - T x T)(x', y') \| < \tilde{\xi} \| (x, y) - (x', y') \|$$

e portanto $L(\tilde{f}^* - T x T) < \tilde{\xi}$.

Pela hipótese de indução, a função

$$g_{\tilde{f}^*} : (E_1 \times E_1)(\tilde{r}) \longrightarrow (E_2 \times E_2)(\tilde{r}),$$

ponto fixo da transformação-gráfico

$$\Gamma_{\tilde{f}^*} : \tilde{G}_2 \longrightarrow \tilde{G}_2 = \left\{ g \in M((E_1 \times E_1)(\tilde{r}), (E_2 \times E_2)(\tilde{r})) : L(g) \leq 1 \right\},$$

é uniformemente C^{k-1} em uma bola $E(\hat{r})$, com $\hat{r} \leq \tilde{r}$. A seguir, estabeleceremos uma relação entre $g_{\hat{f}^*}$ e $g_{\hat{f}}$, que são, como é fácil ver, as restrições de g_{f^*} e g_f às bolas $(E_1 \times E_1)(\hat{r})$ e $E_1(\hat{r})$.

Ponhamos

$$\hat{G} = \left\{ g \in M(E_1(\hat{r}), \overline{E_2(\hat{r})}) : L(g) \leq 1 \right\}$$

$$\hat{H} = \left\{ h \in C^0(E_1(\hat{r}), L(E_1, E_2)) : \|h(x)\| \leq 1, \forall x \in E_1(\hat{r}) \right\}$$

Analogamente ao que se fez na demonstração de 4.4, podemos definir a função

$$F_{\hat{f}} : \hat{G} \times \hat{H} \longrightarrow \hat{G} \times \hat{H}$$

tal que

$$F_{\hat{f}}(g, h) = (\Gamma_{\hat{f}}(g), \omega_g(h))$$

onde

$$\omega_g(h)(x) = D\hat{f}_2(z) \circ (1, h(z_1)) \circ \left[D\hat{f}_1(z) \circ (1, h(z_1)) \right]^{-1}$$

para todo $h \in \hat{H}$, $x \in E_1(\hat{r})$, sendo $z = (1, g)(z_1)$ e

$$z_1 = \left[\hat{f}_1 \circ (1, g) \right]^{-1}(x). \text{ Sabemos que } F_{\hat{f}} \text{ contrai as fibras e}$$

tem um atrator $\Delta_{g_{\hat{f}}} = (g_{\hat{f}}, Dg_{\hat{f}}) \in \hat{G} \times \hat{H}$. Afirmamos agora que se

$g \in \hat{G}$ é de classe C^1 e se $\psi_{\hat{f}^*}(g^*) = \hat{f}_1^* \circ (1, g^*)$ é inversível

e nesse caso existe $\Gamma_{\hat{f}^*}(g^*)$ - então vale a seguinte "comutatividade"

$$(4-II) \quad \Gamma_{\hat{f}^*}(g^*) = \Gamma_{\hat{f}}(g)^*$$

que pode ser visualizada através do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 g^* & \xrightarrow{\Gamma_{\hat{f}^*}} & \Gamma_{\hat{f}^*}(g^*) = \Gamma_{\hat{f}}(g)^* \\
 \uparrow * \circ \pi_G & & \uparrow * \circ \pi_G \\
 \Delta g = (g, Dg) & \xrightarrow{F_{\hat{f}}} & F_{\hat{f}}(\Delta g) = \Delta \Gamma_{\hat{f}}(g)
 \end{array}$$

Para a demonstração desse fato, vide lema 4.8.

Seja agora $g = 0 : E_1(\hat{r}) \longrightarrow E_2(\hat{r})$. É claro que

$g^* \in \hat{G}_2$ e portanto $\Psi_{\hat{f}^*}(g^*)$ é inversível, valendo (4.II).

O fato de $\hat{G}_2$ ser invariante por $\Gamma_{\hat{f}^*}$ nos permite então afirmar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(4-III) \quad \Gamma_{\hat{f}^*}^n(g^*) = \Gamma_{\hat{f}}^n(g)^*$$

(isso se demonstra facilmente por indução.).

Estamos então nas condições do lema 4.6, uma vez que,

como foi visto na demonstração de 4.4, temos :

(i) para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{\hat{f}}^n(g) \in UC^1$

(ii) $\Delta \Gamma_{\hat{f}}^n(g) = F_{\hat{f}}^n(\Delta g) \longrightarrow (g_{\hat{f}}, Dg_{\hat{f}}) = \Delta g_{\hat{f}}$ e portanto

$$\Gamma_{\hat{f}}^n(g) \xrightarrow{C^1} g_{\hat{f}}$$

Conclusão : $\Gamma_{\hat{f}}^n(g)^* \xrightarrow{C^0} g_{\hat{f}}^*$ e portanto a convergência

se dá na topologia de $\hat{G}_2$. Por outro lado, sabemos que

$$\Gamma_{\hat{f}}^n(g^*) \longrightarrow g_{\hat{f}}^* . \quad \text{Segue-se então de (4-III) que}$$

$$g_{\hat{f}}^* = g_{\hat{f}}^*$$

e que portanto $g_{\hat{f}}^* \in UC^{k-1}$, donde, pela proposição 2.13,

$$g_{\hat{f}} \in UC^k.$$

OBSERVAÇÃO : Do lema 4.5 e da observação feita após a sua demonstração, concluímos que g_f é de classe C^k em toda a bola $E_1(r)$ pois f_1^j o $(1, g_{\hat{f}})$ sendo um difeomorfismo e de classe C^k , sua inversa também será de classe C^k (Teorema da função inversa, ver [8]).

* * *

4.8 LEMA. Se $g \in \hat{G}$ é de classe C^1 e se

$$\psi_{\hat{f}^*}(g^*) = \hat{f}_1^* \circ (1, g^*) \text{ é inversível, então}$$

$$\Gamma_{\hat{f}^*}(g^*) = \Gamma_{\hat{f}}(g)^*$$

Demonstração :

Se $\psi_{\hat{f}^*}(g^*)$ é inversível, temos

$$(4-IV) \quad \Gamma_{\hat{f}^*}(g^*) = \hat{f}_2^* \circ (1, g^*) \circ \left[\hat{f}_1^* \circ (1, g^*) \right]^{-1} / (E_1 \times E_1)(\hat{r})$$

Além disso, se $x, y \in E_1 \times E_1(\hat{r})$, então

$$\begin{aligned} \Gamma_{\hat{f}}(g)^*(x, y) &= (\Gamma_{\hat{f}}(g)(x), D \Gamma_{\hat{f}}(g)(x)y) = \\ &= (\hat{f}_2 \circ (1, g) \circ \left[\hat{f}_1 \circ (1, g) \right]^{-1} (x), \omega_g(Dg)(x)y) = \\ &= (\hat{f}_2(z), D\hat{f}_2(z) \circ (1, Dg(z_1)) \circ \left[D\hat{f}_1(z) \circ (1, Dg(z_1)) \right]^{-1} y) \end{aligned}$$

$$\text{Seja } w = (1, Dg(z_1)) \circ \left[D\hat{f}_1(z) \circ (1, Dg(z_1)) \right]^{-1}, y \in E(\hat{r})$$

Então :

$$(4-V) \quad \Gamma_{\hat{f}}(g)^*(x, y) = (\hat{f}_2(z), D\hat{f}_2(z) w) = \hat{f}_2^*(z, w)$$

Mas :

$$(z, w) = ((1, g) z_1, (1, Dg(z_1) u))$$

onde

$$u = [D\hat{f}_1(z) \circ (1, Dg(z_1))]^{-1} \cdot y \in E_1(\hat{r})$$

Logo,

$$(z, w) = ((z_1, u), (g(z_1), Dg(z_1) u)) = (1, g^*)(z_1, u)$$

Substituindo em (4-V), obtemos :

$$(4-VI) \quad \Gamma_{\hat{f}}(g)^*(x, y) = \hat{f}_2^* \circ (1, g^*)(z_1, u)$$

Por outro lado,

$$\hat{f}_1^* \circ (1, g^*)(z_1, u) = \hat{f}_1^*((z_1, u), (g(z_1), Dg(z_1) u)) =$$

$$= \hat{f}_1^*(z, w) = (\hat{f}_1(z), D\hat{f}_1(z) w) = (x, y)$$

Segue-se daí que

$$(z_1, u) = [\hat{f}_1^* \circ (1, g^*)]^{-1} (x, y)$$

Finalmente, por substituição em (4-VI), obtemos :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\hat{f}}(g)^*(x, y) &= \hat{f}_2^* \circ (1, g^*) \circ [\hat{f}_1^* \circ (1, g^*)]^{-1} (x, y) = \\ &= \Gamma_{\hat{f}}(g^*)(x, y) \end{aligned}$$

Indiquemos por $N_{\xi}^k(T)$ o conjunto

$$\left\{ f \in UC^k(E(r), E) : L(f-T) < \xi \quad e \quad f(0) = 0 \right\}$$

com a topologia induzida por $C^k(E(r), E)$ onde $T : E \longrightarrow E$ é um operador hiperbólico e

$$\xi < \min \left\{ \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \quad \|T^{-1}\|^{-1} \right\}$$

(lembremos que por 2.2, quando $U \subset E$ é um aberto convexo e limitado, tem-se $UC^k(U, F) \subset C^k(U, F)$).

4.9 PROPOSIÇÃO. A função

$$\begin{array}{ccc} N_{\xi}^k(T) & \longrightarrow & C^k(E_1(r), E_2(r)) \\ f & \longmapsto & g_f \end{array}$$

é contínua.

Demonstração :

Façamos indução sobre k . Seja inicialmente $k = 0$.

Se $f, f' \in N_{\xi}^0(T)$, temos para cada $g \in G$, aplicando 1.6 :

$$\begin{aligned} d(\Gamma_f(g), \Gamma_{f'}(g)) &= d(\varphi_f(g) \circ \psi_f(g)^{-1}, \varphi_{f'}(g) \circ \psi_{f'}(g)^{-1}) \leq \\ &\leq d(\varphi_f(g), \varphi_{f'}(g)) + L(\varphi_{f'}(g)) L(\psi_f(g)^{-1}) d(\psi_f(g), \psi_{f'}(g)) < \end{aligned}$$

$$< d(\varphi_f(g), \varphi_{f'}(g)) + d(\psi_f(g), \psi_{f'}(g)).$$

Mas :

$$d(\varphi_f(g), \varphi_{f'}(g)) = d(f_2 \circ (1, g), f'_2 \circ (1, g)) \leq d(f_2, f'_2)$$

$$\text{e } d(\psi_f(g), \psi_{f'}(g)) = d(f_1 \circ (1, g), f'_1 \circ (1, g)) \leq d(f_1, f'_1)$$

Logo,

$$d(\Gamma_f(g), \Gamma_{f'}(g)) < d(f_2, f'_2) + d(f_1, f'_1) \leq 2.d(f, f')$$

Então :

$$d(g_f, g_{f'}) = d(\Gamma_f(g_f), \Gamma_{f'}(g_{f'})) \leq$$

$$d(\Gamma_f(g_f), \Gamma_{f'}(g_f)) + d(\Gamma_{f'}(g_f), \Gamma_{f'}(g_{f'})) <$$

$$2d(f, f') + L(\Gamma_{f'}) \cdot d(g_f, g_{f'})$$

Donde, pondo $C = L(\Gamma_{f'}) < 1$,

$$d(g_f, g_{f'}) < \frac{2}{1-C} \cdot d(f, f')$$

o que mostra que a função $f \mapsto g_f$ é uniformemente contínua.

Suponhamos agora que vale a proposição para $k-1 \geq 0$ e mostremos que vale para k . Por 4.5, sabemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$(4-VII) \quad g_f = f_2^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) \circ \left[f_1^j \circ (1, g_{\tilde{f}}) \right]^{-1} / E_1(r)$$

(as notações são as de 4.7). Seja então (f_n) uma sequência de funções de $N_{\tilde{\varepsilon}}^k(T)$, com $f_n \xrightarrow{C^k} f \in N_{\tilde{\varepsilon}}^k(T)$. Existe $M > 0$ tal que $|f|_k \leq M$ e $|f_n|_k \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e portanto podemos tomar o mesmo $\tilde{r}$ para f e para todas as f_n . Então :

$$f_n \xrightarrow{C^k} f \implies \tilde{f}_n \xrightarrow{C^k} \tilde{f} \xrightarrow{(4.6)} \tilde{f}_n^* \xrightarrow{C^{k-1}} \tilde{f}^*$$

Pela hipótese de indução (lembremos que $\tilde{f} \in N_{\tilde{\varepsilon}}^{k-1}(T \times T)$), segue-se que

$$g_{\tilde{f}_n^*} \xrightarrow{C^{k-1}} g_{\tilde{f}^*}$$

donde

$$g_{\tilde{f}_n}^* \xrightarrow{C^{k-1}} g_{\tilde{f}}^*$$

(vide final da demonstração de 4.7)

Agora, do lema 4.6 segue-se que

$$g_{\tilde{f}_n} \xrightarrow{C^k} g_{\tilde{f}}$$

Aplicando (4-VII) para g_{f_n} , obtemos

$$g_{f_n} = (f_n^j)_2 \circ (1, g_{f_n}) \circ \left[(f_n^j)_1 \circ (1, g_{f_n}) \right]^{-1} / E_1(r)$$

donde

$$g_{f_n} \xrightarrow{C^k} f_2^j \circ (1, g_{f_n}) \circ \left[f_1^j \circ (1, g_{f_n}) \right]^{-1} / E_1(r)$$

ou seja

$$g_{f_n} \xrightarrow{C^k} g_f$$

* * *

4.10 TEOREMA. (da Variedade Instável)

Seja E um espaço de Banach e $T : E \longrightarrow E$ um operador hiperbólico com assimetria ζ . Dado $r > 0$, existem $\xi > 0$ independente de r e $\delta > 0$ tais que se $f : E(r) \longrightarrow E$ é uma função lipschitziana com $L(f-T) < \xi$ e $\|f(0)\| < \delta$, então existe uma única contração $g_f : E_1(r) \longrightarrow E_2(r)$ cujo gráfico é $W_1 = \bigcap_{n \geq 0} f^n(E(r))$; mais ainda, se $f \in UC^k$, então

$g_f \in C^k$ (uniformemente em uma bola $E(\hat{r})$ com $\hat{r} \leq r$); a função $f \longmapsto g_f$, de

$$N_{\xi, \delta}^k(T) = \left\{ f \in UC^k(E(r), E) : L(f-T) < \xi \text{ e } \|f(0)\| < \delta \right\}$$

em $C^k(E_1(r), E_2(r))$ é contínua; e $f^{-1} / W_1 : W_1 \longrightarrow W_1$ é uma

Demonstração :

Afirmamos que basta tomar

$$\xi < \min \left\{ \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \|T^{-1}\|^{-1} \right\} \text{ e } \delta < \frac{\xi^2 r \zeta}{1 + \zeta} . \quad \text{Se}$$

$f(0) = 0$, o teorema é verdadeiro, como vimos em 4.1, 4.2, 4.4, 4.7, e 4.9. Suponhamos então $f(0) \neq 0$. Mostraremos neste caso que f tem um ponto fixo em $E(r)$ e faremos uma "translação" da origem para êsse ponto, recaindo no caso já demonstrado.

Tomemos $\bar{r} < r$ tal que $\delta < \bar{r} \xi^2 \zeta$ e definamos

$$\bar{f} : \overline{E(\bar{r})} \longrightarrow E$$

$$\text{por } \bar{f}(x,y) = (T_1^{-1}(T_1 x + x - f_1(x,y)), f_2(x,y))$$

Então :

(i) $\bar{f}$ e f têm os mesmos pontos fixos

De fato :

$$\bar{f}(x,y) = (x,y) \iff T_1 x = T_1 x + x - f_1(x,y) \text{ e } f_2(x,y) = y$$

$$\iff f_1(x,y) = x \text{ e } f_2(x,y) = y \iff f(x,y) = (x,y)$$

(ii) $\bar{f}$ é uma contração.

Realmente : se $(x,y), (a,b) \in \overline{E(\bar{r})}$,

$$\| \bar{f}(x,y) - \bar{f}(a,b) \| = \max \left\{ \| T_1^{-1} (T_1 x + x - f_1(x,y) - T_1 a + a - f_1(a,b)) \|, \| f_2(x,y) - f_2(a,b) \| \right\}$$

Mas :

$$\begin{aligned} & \| T_1^{-1} (T_1 x + x - f_1(x,y)) - T_1^{-1} (T_1 a + a - f_1(a,b)) \| \leq \\ & \leq \| T_1^{-1} \| \cdot \| T_1 x - T_1 a - [f_1(x,y) - f_1(a,b)] + (x-a) \| \leq \\ & \leq \zeta \| T_1 [(T - f)(x,y) - (T-f)(a,b)] + (x-a) \| \leq \\ & \leq \zeta \cdot \varepsilon \| (x,y) - (a,b) \| + \zeta \| x-a \| \leq \\ & \leq (\zeta \varepsilon + \zeta) \| (x,y) - (a,b) \| \end{aligned}$$

e por outro lado

$$\| f_2(x,y) - f_2(a,b) \| \leq (\zeta + \varepsilon) \| (x,y) - (a,b) \| \quad (\text{lema 3.2})$$

Segue-se que

$$\| \bar{f}(x,y) - \bar{f}(a,b) \| \leq (\zeta + \varepsilon) \| (x,y) - (a,b) \|^2$$

e portanto : $L(\bar{f}) \leq \zeta + \varepsilon < 1$

$$(iii) \quad \bar{F}(\overline{E(\bar{r})}) \subset \overline{E(\bar{r})}$$

De fato; fazendo $(a,b) = (0,0)$ em (ii) obtemos, para todo $(x,y) \in \overline{E(\bar{r})}$:

$$\| \bar{F}(x,y) - \bar{F}(0,0) \| \leq (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) \| (x,y) \| \leq (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) \bar{r}$$

Então:

$$\| \bar{F}(x,y) \| \leq \| \bar{F}(0,0) \| + (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) \bar{r}$$

Por outro lado,

$$\| \bar{F}(0,0) \| = \| T_1^{-1}(-f_1(0,0), f_2(0,0)) \| =$$

$$= \max \left\{ \| T_1^{-1}(f_1(0,0)) \|, \| f_2(0,0) \| \right\} \leq$$

$$\leq \max \left\{ \bar{\varepsilon} \| f_1(0,0) \|, \| f_2(0,0) \| \right\} \leq \| f(0,0) \| < \delta$$

$$\text{Logo, } \| \bar{F}(x,y) \| < \delta + (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) \bar{r} < \varepsilon^2 \bar{r} \bar{\varepsilon} + (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) \bar{r} =$$

$$= \bar{r} (\varepsilon^2 \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} + \varepsilon) < \bar{r} (\varepsilon^2 \bar{\varepsilon} + 1 - \bar{\varepsilon} \varepsilon) = \bar{r} (1 - \bar{\varepsilon} \varepsilon (1 - \varepsilon)) < \bar{r}$$

Concluimos que $\bar{F}$, e portanto f , tem um único ponto fixo $p_f = (p_1, p_2) \in \overline{E(\bar{r})} \subset E(r)$. Fazendo $g = T / \overline{E(\bar{r})}$ na proposição 1.3, concluímos ainda que

$$\|p_f\| < \frac{\delta}{1 - \zeta - \varepsilon}$$

Seja agora $\hat{r} = r - \delta(1 - \zeta - \varepsilon)^{-1} < r - \|p_f\|$

Uma vez que

$$\begin{aligned} r - \delta(1 - \zeta - \varepsilon)^{-1} &> r - \frac{\varepsilon^2 r \zeta}{(1 + \zeta)(1 - \zeta - \varepsilon)} > r - \frac{\varepsilon^2 r \zeta}{1 - \zeta - \varepsilon} = \\ &= r \frac{1 - \zeta - \varepsilon - \varepsilon^2 \zeta}{1 - \zeta - \varepsilon} \end{aligned}$$

e como

$$1 - \zeta - \varepsilon - \varepsilon^2 \zeta > \zeta \varepsilon - \varepsilon^2 \zeta = \zeta \varepsilon (1 - \varepsilon) > 0$$

$$\text{e } 1 - \zeta - \varepsilon > 0,$$

temos $\hat{r} > 0$. Definamos então $\hat{f} : E(\hat{r}) \longrightarrow E$

por
$$\hat{f}(x) = f(x + p_f) - p_f$$

Note-se que

$$\|x\| < \hat{r} \implies \|x + p_f\| \leq \|x\| + \|p_f\| < \hat{r} + \|p_f\| = r$$

o que garante que $\hat{f}$ está bem definida. Além disso, $\hat{f}(0) = 0$ e

$$L(\hat{f} - T) \leq L(f - T) < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\text{pois } & \|(\hat{f} - T)(x) - (\hat{f} - T)(y)\| = \\
& = \|f(x + p_f) - p_f - T_x - f(y + p_f) + p_f + T_y\| = \\
& = \|(f - T)(x + p_f) - (f - T)(y + p_f)\| \leq L(f - T) \|x - y\|
\end{aligned}$$

Concluimos que existe uma função $\hat{g} = g_{\hat{f}} : E_1(\hat{r}) \longrightarrow E_2(\hat{r})$, satisfazendo ao enunciado do teorema. A partir de $\hat{g}$, definimos a função

$$g = g_f : E_1(r) \longrightarrow E_2(r)$$

tal que
$$g(x) = p_2 + \varphi_{\hat{f}}(\hat{g}) \circ \psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1}(x - p_1)$$

(então : $g(p_1) = p_2$). Mostremos que g está bem definida em

$E_1(r)$ e toma realmente valores em $E_2(r)$. Inicialmente, afirmamos que

$$\delta < \frac{(\gamma^{-1} - \xi - 1)(1 - \zeta + \xi)r}{1 + \zeta^{-1} - \xi}$$

De fato :

$$\delta < \frac{\xi^2 r \zeta}{1 + \zeta} < \frac{\left(\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}\right)^2 r \zeta}{1 + \zeta} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1 - \zeta)(1 - \bar{\zeta}) r}{(1 + \zeta)^2 (\bar{\zeta}^{-1} + 1)} = \frac{(\bar{\zeta}^{-1} - 1)(\zeta - \bar{\zeta}^2) r}{(1 + \zeta)^2 (1 + \bar{\zeta}^{-1})} = \\
&= \frac{(\bar{\zeta}^{-1} - \frac{1 - \zeta}{1 + \bar{\zeta}} - 1)(1 - \bar{\zeta} - \frac{1 - \bar{\zeta}}{1 + \zeta}) r}{1 + \bar{\zeta}^{-1}} < \\
&< \frac{(\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon - 1)(1 - \bar{\zeta} - \varepsilon) r}{1 + \bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon}
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$(4-VIII) \quad (\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon) \hat{r} > r + \delta (1 - \bar{\zeta} - \varepsilon)^{-1}$$

pois

$$\begin{aligned}
&(\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon) \hat{r} - r - \delta (1 - \bar{\zeta} - \varepsilon)^{-1} = \\
&= r (\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon - 1) - \frac{\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon + 1}{1 - \bar{\zeta} - \varepsilon} \delta > \\
&> r (\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon - 1) - \frac{(\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon + 1)(\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon - 1)(1 - \bar{\zeta} - \varepsilon) r}{(1 - \bar{\zeta} - \varepsilon)(1 + \bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon)} = 0
\end{aligned}$$

Por outro lado, $L(\Psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1}) \leq (\bar{\zeta}^{-1} - \varepsilon)^{-1}$ e

$\psi_{\hat{f}}(\hat{g})(0) = 0$ acarretam, por 1.11 :

$$\psi_{\hat{f}}(\hat{g})(E_1(\hat{r})) \supset E_1((\zeta^{-1} - \varepsilon) \hat{r})$$

Conclusão :

$$x \in E_1(r) \Rightarrow \|x - p_1\| \leq \|x\| + \|p_1\| \leq \|x\| + \|p_f\| \leq$$

$$\leq r + \delta(1 - \zeta - \varepsilon)^{-1} \leq (\zeta^{-1} - \varepsilon) \hat{r} \Rightarrow$$

$$x - p_1 \in E_1((\zeta^{-1} - \varepsilon) \hat{r}) \Rightarrow x - p_1 \in \psi_{\hat{f}}(\hat{g})(E_1(\hat{r})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1}(x - p_1) \in E_1(\hat{r})$$

$$\Rightarrow \psi_{\hat{f}}(\hat{g}) \circ \psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1}(x - p_1) \in E_2(\hat{r})$$

$$\Rightarrow \|g(x)\| \leq \|p_2\| + \hat{r} \leq \|p_f\| + \hat{r} < r$$

Construída a função

$$g : E_1(r) \longrightarrow E_2(r)$$

devemos agora mostrar que ela satisfaz às condições do teorema :

(a) $L(g) < 1$, pois

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L(\psi_{\hat{f}}(\hat{g})) \cdot L(\psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1}) \|x - y\|$$

$$(b) \quad f(\text{graf } g) \cap E(r) = \text{graf } g$$

Em primeiro lugar, mostremos que se $(x, g(x)) \in \text{graf } g$ e $f(x, g(x)) \in E(r)$, então $\|x - p_1\| < \hat{r}$. De fato: como

$L(\psi_f(g)^{-1}) \leq (\mathcal{C}^{-1} - \varepsilon)^{-1}$ (a demonstração de 3.4 não utiliza a hipótese $g(0) = 0$), temos:

$$\begin{aligned} \|\psi_f(g)(x) - p_1\| &= \|\psi_f(g)(x) - \psi_f(g)(p_1)\| \implies \\ \implies \|x - p_1\| &\leq (\mathcal{C}^{-1} - \varepsilon)^{-1} \|\psi_f(g)(x) - p_1\| \leq \\ &\leq (\mathcal{C}^{-1} - \varepsilon)^{-1} [\|\psi_f(g)(x)\| + \|p_1\|] < \\ &< (\mathcal{C}^{-1} - \varepsilon)^{-1} [r + \mathcal{O}((1 - \mathcal{C} - \varepsilon)^{-1})] \stackrel{(4-VIII)}{\leq} \\ &\leq (\mathcal{C}^{-1} - \varepsilon)^{-1} \cdot (\mathcal{C}^{-1} - \varepsilon) \hat{r} = \hat{r} \end{aligned}$$

Então:

$$g(f_1(x, g(x))) = p_2 + \varphi_{\hat{f}}(\hat{g}) \circ \psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1} (f_1(x, g(x)) - p_1)$$

Mas:

$$f_1(x, g(x)) - p_1 = \hat{f}_1(x - p_1, g(x) - p_2)$$

$$e \quad g(x) - p_2 = \varphi_{\hat{f}}(\hat{g}) \circ \psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1}(x - p_1) = \hat{g}(x - p_1),$$

pois $\|x - p_1\| < \hat{r}$. Segue-se que

$$\begin{aligned} g(f_1(x), g(x)) &= p_2 + \varphi_{\hat{f}}(\hat{g}) \circ \psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1}(\hat{f}_1(x - p_1, \hat{g}(x - p_1))) = \\ &= p_2 + \varphi_{\hat{f}}(\hat{g}) \circ \psi_{\hat{f}}(\hat{g})^{-1} \circ \hat{f}_1 \circ (1, \hat{g})(x - p_1) = \\ &= p_2 + \varphi_{\hat{f}}(\hat{g})(x - p_1) = p_2 + \hat{f}_2(x - p_1, \hat{g}(x - p_1)) = \\ &= f_2(x, \hat{g}(x - p_1) + p_2) = f_2(x, g(x)) \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$f(\text{graf } g) \cap E(r) \subset \text{graf } g$$

Provemos agora a inclusão contrária : de (4-VIII), concluímos que existe $\tilde{r} < \hat{r}$ tal que $(\mathcal{C}^{-1} - \xi)\tilde{r} > r + \delta(1 - \mathcal{C} - \xi)^{-1}$. Daí por 1.11, temos

$$\psi_f(g)(E_1(p_1, \hat{r})) \supset E_1(p_1, (\mathcal{C}^{-1} - \xi)\tilde{r})$$

(onde $E_1(p_1, \lambda)$ indica a bola aberta de centro p_1 e raio λ).
Concluimos que

$$E_1(r) \subset \psi_f(g)(E_1(p_1, \hat{r})).$$

Então, se $(y, g(y)) \in \text{graf } g$, existe $x \in E_1(p_1, \hat{r})$

(e portanto, $x \in E_1(r)$) tal que $y = \psi_f(g)(x)$.

Logo,

$$f_2(x, g(x)) = f_2 \circ (1, g)(x) = \varphi_f(g) \circ \psi_f(g)^{-1}(y) = g(y)$$

donde

$$(y, g(y)) = f(x, g(x))$$

e portanto

$$\text{graf } g \subset f(\text{graf } g)$$

o que acarreta

$$\text{graf } g \subset f(\text{graf } g) \cap E(r)$$

$$(c) \text{ graf } g = W_1$$

(demonstração idêntica à de 4.1)

$$(d) \ f^{-1}/W_1 : W_1 \longrightarrow W_1 \text{ é uma contração.}$$

(demonstração idêntica à de 4.2)

$$(e) \ f \in UC^k \implies g \in C^k$$

$$\text{De fato : } f \in UC^k \implies \hat{f} \in UC^k \xrightarrow{(4.7)} \hat{g} \in C^k \implies g \in C^k$$

$$(f) \ f \mapsto g_f \text{ é uma função contínua de } N_{\xi, \delta}^k(T) \text{ em}$$

$$C^k(E_1(r), E_2(r))$$

De fato :

$$f_n \xrightarrow{C^k} f \Rightarrow \hat{f}_n \xrightarrow{C^k} \hat{f} \xrightarrow{(4.9)} g_{\hat{f}_n} \xrightarrow{C^k} g_{\hat{f}} \Rightarrow g_{f_n} \xrightarrow{C^k} g_f$$

* * *

4.11 COROLÁRIO. O teorema da variedade instável vale para $k = \infty$, uma vez que $\mathcal{E}$ e $\mathcal{J}$ não dependem de k .

4.12 COROLÁRIO. Se $f \in UC^k$ ($k \geq 1$), então W_1 é uma variedade de Banach modelada em E_1 .

Demonstração :

Basta tomar o atlas constituído pela única carta

$$\pi_1 : W_1 \longrightarrow E_1(r)$$

* * *

4.13 COROLÁRIO. Seja E um espaço de Banach e $V \subset E$ uma vizinhança da origem. Seja $f : V \longrightarrow E$ um difeomorfismo de classe C^1 tendo a origem como ponto fixo hiperbólico (isto é, $f(0) = 0$ e $Df(0) = T$ é um operador hiperbólico). Então, existem $\mathcal{E}$, $\mathcal{J}$, r para os quais valem as conclusões do teorema 4.10. Além disso, se $f \in UC^1$, tem-se $T_0 W_1 = E_1$ (a menos de isomorfismos).

Demonstração :

Como $D(f - T)(0) = Df(0) - T = 0$, temos :

dado $\varepsilon < \min \left\{ \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \|T^{-1}\|^{-1} \right\}$, existe $E(r) \subset V$ tal que $L[(f - T)/E(r)] < \varepsilon$ (vide 1.13).

Segue-se que, $\forall \delta > 0$, vale o teorema 4.10.

Quanto à segunda parte, é suficiente mostrar que

$Dg_f(0) = 0$, pois nesse caso a diferencial da "carta" $(1, g_f)$ na origem será $(1, Dg_f(0)) = (1, 0)$ e portanto, para todo $x \in E_1$,

$$(1, Dg_f(0))(x) = (x, 0)$$

ou seja : $T_0 W_1 = E_1$ Então :

$$g_f = f_2 \circ (1, g_f) \circ [f_1 \circ (1, g_f)]^{-1} / E_1(r) \implies \\ \implies Dg_f(0) = Df_2(0) \circ (1, Dg_f(0)) \circ [Df_1(0) \circ (1, Dg_f(0))]^{-1}$$

e portanto, restringindo à bola $E_1(1)$, obtemos por 3.7 :

$$Dg_f(0) = \Gamma_{Df(0)}(Dg_f(0)) = \Gamma_T(Dg_f(0)) = T_2 \circ Dg_f(0) \circ T_1^{-1}$$

donde

$$\|Dg_f(0)\| \leq \|T_2\| \cdot \|Dg_f(0)\| \cdot \|T_1^{-1}\|$$

Então, como $\|T_2\| < 1$ e $\|T_1^{-1}\| < 1$, $Dg_f(0) \neq 0$

levaria ao absurdo $\|Dg_f(0)\| < \|Dg_f(0)\|$.

* * *

4.14 TEOREMA . (da variedade estável) . Seja E um espaço de Banach e $T : E \rightarrow E$ um operador hiperbólico com assimetria ζ . Dado $r > 0$, existem $\varepsilon > 0$ independente de r e $\delta > 0$ tais que se $f : E(r) \rightarrow E$ é uma função lipschitziana tal que $L(f - T) < \varepsilon$ e $\|f(0)\| < \delta$, então existe uma única contração $g_{2f} : E_2(r) \rightarrow E_1(r)$ cujo gráfico é $W_2 = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(E(r))$; além disso : $f|_{W_2} : W_2 \rightarrow W_2$ é uma contração; se $f \in \cup C^k$, então $g_{2f} \in C^k$; e a função $N_{\varepsilon, \delta}^k(T) \rightarrow C^k(E_2(r), E_1(r))$ definida por $f \mapsto g_{2f}$ é contínua.

Demonstração .

A idéia é mostrar que " a variedade estável para f é a variedade instável para f^{-1} " . Surge então a dificuldade de f^{-1} não estar definida em $E(r)$. Mostremos então que existe $\tilde{r} > 0$ tal que $E(\tilde{r}) \subset f(E(r))$. Tomemos inicialmente

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} , \|T^{-1}\|^{-1} \right\} \quad \text{e} \quad \delta < \frac{\varepsilon^2 r \zeta}{1 + \zeta} .$$

Então, pelo que foi visto na demonstração do teorema 4.10, concluímos (com as notações lá utilizadas) que

$$E(p_f, \rho) \subset E(r) , \quad \forall \rho < \hat{r} \quad \text{donde, por 1.11 ,}$$

$$E(p_f, (\zeta^{-1} - \varepsilon) \rho) \subset f(E(r)) , \quad \forall \rho < \hat{r} . \quad \text{Além disso,}$$

de $\delta < \frac{\varepsilon^2 r \bar{z}}{1 + \bar{z}}$ segue $(\bar{z}^{-1} - \varepsilon) \hat{r} > \delta(1 - \bar{z} - \varepsilon)^{-1}$

(v. 4.VIII) . Tomando então ρ tal que

$$\delta(1 - \bar{z} - \varepsilon)^{-1} < (\bar{z}^{-1} - \varepsilon) \rho < (\bar{z}^{-1} - \varepsilon) \hat{r} , \quad \text{temos:}$$

$$\|p_f\| < \delta(1 - \bar{z} - \varepsilon)^{-1} < (\bar{z}^{-1} - \varepsilon) \rho \quad \text{onde}$$

$0 \in E(p_f, (\bar{z}^{-1} - \varepsilon) \rho) \subset f(E(r))$. Daí, como $f(E(r))$ é aberto (Teorema 1.10) , existe $\tilde{r} > 0$ tal que $E(\tilde{r}) \subset f(E(r))$ e portanto f^{-1} está definida em $E(\tilde{r})$.

Por outro lado, o operador $S = T^{-1} : E \rightarrow E$ é evidentemente hiperbólico (λ é valor espectral de $T \iff \lambda^{-1}$ é valor espectral de T^{-1}) . Seja $E = F_1 \oplus F_2$ a decomposição canônica de E relativamente a S . Então, uma vez que

$\|S / E_1\| < 1$ e $\|S^{-1} / E_2\| < 1$, concluímos que $F_1 = E_2$ e $F_2 = E_1$ e que S tem a mesma assimetria ($\bar{z}$) que T . Va

mos mostrar agora que $f^{-1} : E(\tilde{r}) \rightarrow E$ satisfaz, relativamente a S , às hipóteses do teorema 4.10 (a menos de uma escolha conveniente de ε e δ) . Em primeiro lugar, de

$f^{-1} - S = STf^{-1} - Sff^{-1} = S \circ (T - f) \circ f^{-1}$, e de 1.10, segue-se que

$$L(f^{-1} - S) \leq \|S\| \cdot L(f - T) \cdot L(f^{-1}) \leq \|S\| L(f - T) [\|S\|^{-1} - L(f - T)]^{-1}$$

Isso mostra que dado $\eta > 0$, $\eta < \min \left\{ \frac{1 - \bar{z}}{1 + \bar{z}} , \|S^{-1}\|^{-1} \right\}$,

existe $\xi_1 > 0$ tal que $L(f-T) < \xi_1 \Rightarrow L(f^{-1} - S) < \eta$.

Por outro lado, aplicando novamente 1.10, temos :

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(0)\| &\leq \|f^{-1}(0) - f^{-1}(p_f)\| + \|p_f\| \leq \\ &\leq [1 + L(f^{-1})] \|p_f\| \leq \left\{ 1 + [\|S\|^{-1} - L(f-T)]^{-1} \right\} \delta (1 - \zeta - \xi)^{-1} \end{aligned}$$

Concluimos que, dado $\mu > 0$, $\mu < \frac{\eta^2 \tilde{r} \zeta}{1 + \zeta}$, existem ξ_2 e

δ_1 tais que $L(f-T) < \xi_2$ e $\delta < \delta_1 \Rightarrow \|f^{-1}(0)\| < \mu$.

Tomemos agora $\xi < \min \left\{ \xi_1, \xi_2, \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \|T^{-1}\|^{-1} \right\}$

e $\delta < \min \left\{ \frac{\xi^2 r \zeta}{1 + \zeta}, \delta_1 \right\}$.

Então, para toda função $f : E(r) \rightarrow E$, lipschitziana, tal que $L(f-T) < \xi$ e $\|f(0)\| < \delta$, existe $\tilde{r} > 0$ tal que $f^{-1} : E(\tilde{r}) \rightarrow E$ está bem definida, é lipschitziana, com

$$L(f^{-1} - S) < \eta < \min \left\{ \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \|S^{-1}\|^{-1} \right\} \quad \text{e}$$

$$\|f^{-1}(0)\| < \mu < \frac{\eta^2 \tilde{r} \zeta}{1 + \zeta} . \quad \text{Logo, valem para } f^{-1} \text{ as con-}$$

clusões do teorema 4.10 (com η e μ representando os papéis de ξ e δ , respectivamente). Como já se fez na demonstração do lema 4.5, podemos provar que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{-j}(W_2(f / E(\tilde{r}))) \cap E(r) = W_2(f) . \quad \text{Mas, evidentemente,}$$

$$f^{-j}(W_2(f / E(\tilde{r}))) = f^{-j}(W_1(f^{-1} / E(\tilde{r}))) \quad \text{donde}$$

$$W_2(f) = f^{-j}(W_1(f^{-1} / E(\tilde{r}))) \quad \text{o que completa a demonstração}$$

(os detalhes são deixados ao leitor).

5 . OBSERVAÇÕES FINAIS

5.1 Seja $T : E \rightarrow E$ hiperbólico e $f : E \rightarrow E$ tal que na bola $E(r)$ se tenha $L(f-T) < \xi < \min \left\{ \frac{1-\zeta}{1+\zeta}, \|T^{-1}\|^{-1} \right\}$, com $\|f(0)\| < \xi < \frac{\xi^2 r \zeta}{1+\zeta}$. Os teoremas 4.10 e 4.14 garantem a existência das variedades instável (W_1) e estável (W_2) locais, isto é, em $E(r)$. Por iteração de f sobre W_1 e de f^{-1} sobre W_2 , obtemos as variedades globais (que podem não ser gráficos de funções).

5.2 A generalização da proposição 4.9 para $r = \infty$ apresenta a seguinte dificuldade: quando $\|x\| \rightarrow \infty$, o mesmo sucede com o número j de iterações de f^{-1} necessário para trazer $(x, g_f(x))$ para a bola $E(\tilde{r})$. Tome-se como exemplo para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$,

$f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_n(x, y) = (2x + \frac{y}{n}, \frac{y}{2})$ e

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x, \frac{y}{2})$. Então :

$$\zeta = \frac{1}{2}, \quad \|T^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{e portanto}$$

$$L(f_n - T) = \|f_n - T\| = \frac{1}{n} < \varepsilon < \frac{1}{3} = \min \left\{ \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \|T^{-1}\|^{-1} \right\}$$

Isso quer dizer que as funções f_n pertencem a $N_{\varepsilon}^k(T)$ e convergem para T na topologia C^k , $\forall k \geq 0$. Acontece que $g_{f_n}(x) = \frac{2x}{3n}$ (pois os auto-valores de f são 2 e $\frac{1}{2}$, e o auto-espaço correspondente ao auto-valor 2 é a reta $3ny - 2x = 0$),

$g_T(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e a sequência (g_{f_n}) não converge na topologia C^0 para a função nula :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_{f_n}(x)| = \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Em [6], os autores opinam que uma outra demonstração, com uma hipótese de indução diferente, possa ser imaginada.

5.3 Se $f(0) \neq 0$, a função Γ_f não leva necessariamente elementos de G em elementos de G . Ainda em [6], afirmam os autores que é possível demonstrar diretamente o teorema 4.10, acrescentando a G funções g tais que $g(0) \neq 0$ com $\|g(0)\|$ convenientemente pequeno, e provando que Γ_f é uma contração bem definida, etc.

5.4 Vejamos a seguir, a título de exemplo de construção de um operador hiperbólico, uma outra demonstração de que as funções, $\omega_g : H \rightarrow H$ de 4.4 estão bem definidas e são contrações. Ponhamos $Z = L(E)$ e $Z_i = L(E, E_i)$ ($i = 1, 2$). É claro que $Z = Z_1 \oplus Z_2$ e que Z, Z_1 e Z_2 são espaços de Banach. Usaremos a seguinte notação: se $S = S_1 \oplus S_2 \in Z$, e $\bar{S} \in L(E_1, E_2)$, então $S^\# : Z(1) \rightarrow Z$, $\bar{S}^\# : Z_1(1) \rightarrow Z_2$ e $S_i^\# : Z(1) \rightarrow Z_i$ ($i = 1, 2$) indicam as composições à esquerda respectivamente por S , $\bar{S}$ e S_i ($i = 1, 2$), isto é,

$$S^\#(u) = S \circ u, \quad \forall u \in Z(1)$$

$$\bar{S}^\#(u) = \bar{S} \circ u, \quad \forall u \in Z_1(1)$$

$$S_i^\#(u) = S_i \circ u, \quad \forall u \in Z(1) \quad (i = 1, 2)$$

Portemos ainda

$$\|S^\#\| = \sup_{u \in Z(1)} \|S^\#(u)\|, \quad \|S^\#\| = \sup_{u \in Z_1(1)} \|S^\#(u)\| \text{ e}$$

$$\|S_i^\#\| = \sup_{u \in Z(1)} \|S_i^\#(u)\| \quad (i = 1, 2)$$

Valem as seguintes propriedades, cujas demonstrações deixamos a cargo do leitor :

$$(a) \quad \| J^\# \| = \| J \| \quad (J = S, \bar{S}, S_1, S_2)$$

$$(b) \quad l_E^\# = l_{Z(1)}$$

$$(c) \quad (S_i)^\# = (S^\#)_i \quad (i = 1, 2)$$

$$(d) \quad (S \circ \bar{S})^\# = S^\# \circ \bar{S}^\# \quad , \quad \forall \bar{S} \in Z$$

$$(e) \quad S \text{ é inversível} \iff S^\# \text{ é inversível e } (S^\#)^{-1} = (S^{-1})^\#$$

$$(f) \quad (S + \bar{S})^\# = S^\# + \bar{S}^\# \text{ e } (\lambda S)^\# = \lambda \cdot S^\# \quad , \quad \forall \bar{S} \in Z, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(g) \quad S^\# \text{ é lipschitziana e } L(S^\#) \leq \| S \|^2$$

(h) $T^\#$ (estendido a Z por linearidade) é um operador hiperbólico, deixa invariantes Z_1 e Z_2 e $Z = Z_1 \oplus Z_2$ é a decomposição canônica de Z em relação a $T^\#$ (e portanto $T^\#$ tem assimetria Z).

Então : se $z \in E(r)$, restringindo-nos a $Z(1)$, temos :

$$L(Df(z)^\# - T^\#) \stackrel{(f)}{\leq} L((Df(z) - T)^\#) \stackrel{(g)}{\leq} \| Df(z) - T \| < \varepsilon$$

$$< \min \left\{ \frac{1 - \bar{\varepsilon}}{1 + \bar{\varepsilon}}, \quad \| (T^\#)^{-1} \|^{-1} \right\} \quad . \quad \text{Isso permite definir}$$

$$\text{a contração } \Gamma_{Df(z)^\#} : G^\# \rightarrow G^\# = \left\{ \theta \in M(Z_1(1), \overline{Z_2(1)}) : L(\theta) \leq 1 \right\}$$

$$\text{por } \Gamma_{Df(z)^\#}(0) = Df(z)_2^\# \circ (1, \theta) \circ \left[Df(z)_1^\# \circ (1, \theta) \right]^{-1} / Z_1(1)$$

Mostremos agora que se $h \in H$, então $h(z_1)^\# \in G^\#$ e que portanto tem sentido $\Gamma_{Df(z)^\#}(h(z_1)^\#) \in G^\#$. É evi-

dente que $h(z_1)^{\#}(0) = 0$ e que $h(z_1)^{\#} : Z_1(1) \rightarrow Z_2(1)$

(pois $\|h(z_1)^{\#}(u)\| = \|h(z_1)^{\#} \circ u\| \leq \|h(z_1)\| \|u\| \leq 1, \forall u \in Z_1(1)$)

Quanto à constante de Lipschitz, basta observar que se $u, k \in Z_1(1)$,

$$\begin{aligned} \|h(z_1)^{\#}(u) - h(z_1)^{\#}(k)\| &= \|h(z_1) \circ u - h(z_1) \circ k\| \leq \\ &\leq \|h(z_1)\| \|u - k\| \leq \|u - k\| \end{aligned}$$

Usando agora as propriedades (a) a (h), pode-se provar que

$$\omega_g(h)(x) = \left[\Gamma_{Df(z)}^{\#}(h(z_1)^{\#})(\pi_1) \right] / E_1, \forall h \in H, \forall x \in E_1(r)$$

donde sai que as funções ω_g são contrações: pondo

$$\lambda = L(\Gamma_{Df(z)}^{\#}) < 1, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned} \|\omega_g(h_1) - \omega_g(h_2)\| &= \sup_{x \in E_1(r)} \|\omega_g(h_1)(x) - \omega_g(h_2)(x)\| = \\ &= \sup_{x \in E_1(r)} \|\Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_1(z_1)^{\#})(\pi_1) / E_1 - \Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_2(z_1)^{\#})(\pi_1) / E_1\| \\ &= \sup_{x \in E_1(r)} \left\| \left[\Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_1(z_1)^{\#}) - \Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_2(z_1)^{\#}) \right] (\pi_1) / E_1 \right\| \\ &\leq \sup_{x \in E_1(r)} \|\Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_1(z_1)^{\#}) - \Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_2(z_1)^{\#})\| \\ &= \sup_{x \in E_1(r)} \sup_{u \in Z(1)} \left\| \left[\Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_1(z_1)^{\#}) - \Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_2(z_1)^{\#}) \right] (u) \right\| \\ &= \sup_{x \in E_1(r)} d(\Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_1(z_1)^{\#}), \Gamma_{Df(z)}^{\#}(h_2(z_1)^{\#})) \leq \end{aligned}$$

$$\sup_{x \in E_1(r)} \lambda \cdot d(h_1(z_1)^{\#}, h_2(z_1)^{\#}) =$$

$$= \lambda \sup_{x \in E_1(r)} d(h_1(z_1)^{\#}, h_2(z_1)^{\#})$$

Mas $x \in E_1(r) \Rightarrow z_1 \in E_1(r)$. Daí,

$$\omega_g(h_1) - \omega_g(h_2) \leq \lambda \sup_{z_1 \in E_1(r)} \|h_1(z_1)^{\#} - h_2(z_1)^{\#}\|$$

$$= \lambda \sup_{z_1 \in E_1(r)} \sup_{u \in Z(1)} \|\llbracket h_1(z_1) - h_2(z_1) \rrbracket \circ u\| \leq$$

$$\leq \lambda \sup_{z_1 \in E_1(r)} \sup_{u \in Z(1)} \|h_1(z_1) - h_2(z_1)\| \cdot \|u\|$$

$$= \lambda \sup_{z_1 \in E_1(r)} \|h_1(z_1) - h_2(z_1)\| = \lambda \cdot d(h_1, h_2)$$

5.5 Uma generalização natural da noção de ponto fixo hiperbólico para um difeomorfismo é o conceito de conjunto hiperbólico. Seja M uma variedade riemanniana de classe C^{∞} e dimensão n , $U \subset M$ um aberto, $f: U \rightarrow M$ um mergulho ("embedding") de classe C^k , e Λ um subconjunto compacto invariante por f , isto é, tal que $f(\Lambda) = \Lambda$. Seja $T_{\Lambda}M$ a restrição do fibrado tangente TM a Λ . O conjunto Λ é dito hiperbólico para f se $T_{\Lambda}M$ admite uma decomposição $T_{\Lambda}M = E^u \oplus E^s$ (soma direta de Whitney) tal que:

(i) E^u e E^s são invariantes por Tf (Tf = diferencial de f)

(ii) existem constantes $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\max \left\{ \|Tf^n / E^s\| , \|Tf^{-n} / E^u\| \right\} < c \zeta^n$$

Em [6] , demonstra-se o Teorema da Variedade Estável para conjuntos hiperbólicos, que generaliza o teorema 4.14, e que garante a existência de uma família $(W_x^s)_{x \in \Lambda}$ de subvariedades de classe C^k , cada W_x^s tangente a E_x^s em x , invariantes por f (isto é, $f(W_x^s) \subset W_x^s$), e tais que existem $K > 0$ e $0 < \lambda < 1$ para os quais : se $y, z \in W_x^s$, então

$$d(f^n(y), f^n(z)) \leq K \cdot \lambda^n \cdot d(y, z) , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

5.6 Uma aplicação dos Teoremas das Variedades Estável e Instável para pontos fixos hiperbólicos de um difeomorfismo é a demonstração da existência das variedades estável e instável para uma órbita fechada hiperbólica de um campo de vetores em uma variedade M (uma órbita fechada γ é hiperbólica se a diferencial Df_p de uma transformação de Poincaré f associada a γ no ponto p tem em p um ponto fixo hiperbólico). Uma boa referência para o caso em que $\dim M < \infty$ é [1] .

B I B L I O G R A F I A

- 1 R. Abraham e J. Marsden
 Foundations of Mechanics
 Benjamin, New York, 1967 .
- 2 R. Abraham e J. Robbin
 Transversal Mappings and Flows
 Benjamin, New York, 1967 .
- 3 E. A. Coddington e N. Levinson
 Theory of Ordinary Differential Equations
 Mc Graw Hill - 1955
- 4 J. Dieudonné
 Foundations of Modern Analysis
 Academic Press - 1960
- 5 P. Hartman
 Ordinary Differential Equations
 John Wiley and Sons, 1964
- 6 M. W. Hirsch e C. C. Pugh
 Stable Manifolds and Hyperbolic Sets
 Proceedings of the A. M. S. Summer Institute
 on Global Analysis, vol. XIV -
 - Berkeley, 1968

- 7 R. B. Holmes
 A Formula for the Spectral Radius of an
 Operator
 The American Mathematical Monthly, -
 vol. 75 (1968) - pag. 163
- 8 E. L. Lima
 Análise Geométrica
 7º Colóquio Brasileiro de Matemática -
 - 1969
- 9 J. Palis Jr.
 On the local structure of hyperbolic -
 points in Banach Spaces.
 Anais da Academia Brasileira de Ciências,
 vol. 40 (1968) - nº 3
- 10 F. Riesz e B. Nagy
 Leçons d'Analyse Fonctionnelle
 Budapest - 1952
- 11 Robbin, J. W.
 Stable Manifolds of Semi-Hyperbolic -
 Fixed Points (a aparecer)

12 S. Smale

Differentiable Dynamical Systems

Bulletin of the A. M. S., vol. 73 -

(1967) , pag. 747

13

Seminários de Sistemas Dinâmicos -

1970 - IMPA (a aparecer)

I N D I C E

	PAG.
PREFÁCIO	1
1 . FUNÇÕES LIPSCHITZIANAS	5
2 . FUNÇÕES UNIFORMEMENTE C^k	17
3 . OPERADORES HIPERBÓLICOS	32
4 . OS TEOREMAS DAS VARIEDADES ESTÁVEL E INSTÁVEL .	44
5 . OBSERVAÇÕES FINAIS	92
BIBLIOGRAFIA	99