HAMILTON LUIZ GUIDORIZZI

OPERADORES
ANALÍTICOS LINEARES

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

1971

INDICE

Introdução

CAPÍTULO I

§ 1 - Integração sobre intervalos.....	1
§ 2 - Integração sobre caminhos.....	5 A
§ 3 - Funções holomorfas.....	8

CAPÍTULO II

§ 1 - Definição do espaço $H(K)$	24
§ 2 - Os espaços $\mathcal{B}_N^*$	29
§ 3 - Fórmula de Fantappiè.....	37

CAPÍTULO III

§ 1 - Transformada de Fourier - Borel.....	48
§ 2 - Aplicação de tipo exponencial nulo.....	55

CAPÍTULO IV

§ 1 - Desenvolvimento de Pincherle de um operador linear.....	58
§ 2 - Operadores de ciclo fechado.....	67
§ 3 - Operadores normais.....	77

Bibliografia.....	84
-------------------	----

INTRODUÇÃO

Foi Salvatore Pincherle ([9]) um dos primeiros a estudar de maneira bastante sistemática os operadores entre funções analíticas; sua atenção estava voltada para aqueles operadores da forma $f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)}$, que atualmente são denominados operadores lineares desenvolvíveis em série de Pincherle. Em seguida, Luigi Fantappiè ([3]) utilizando a fórmula de Cauchy e a função indicatriz $u(\alpha) = f\left(\frac{i}{\alpha - t}\right)$, do operador linear f , deu um grande impulso à teoria.

Em fins da década de 40, José Sebastião e Silva introduziu sobre o espaço (K) das funções holomorfas em volta do compacto K , a relação de equivalência $R : y \equiv w \pmod{R} \iff y(t) = w(t)$ para t pertencente a algum aberto contendo K , dando origem, então, ao espaço vetorial $H(K)$. Em seguida, Cândido Lima da Silva Dias ([2]), A. Grothendieck ([4]) e G. Kothe ([6]) introduziram sobre $H(K)$ uma estrutura de espaço localmente convexo, subordinando a teoria de Fantappiè ao estudo dos espaços localmente convexos. Logo, em seguida, José Sebastião e Silva introduziu a classe importante dos espaços $\mathcal{L}_N^*$.

Mais recentemente, a teoria dos funcionais analíticos lineares foi enriquecida com a introdução, por A. Martineau ([7]), da transformada de Fourier - Borel $v(\alpha) = f(e^{\alpha t})$ do funcional linear e contínuo f . Com auxílio desta transformada A. Martineau estudou a equação de convolução ou do ciclo fechado $f(y) = g$, $g \in H(K)$, e mostrou que a solução de $f(y) = 0$ está na aderência do subespaço de $H(K)$ gerado pelas funções da forma $p(x)e^{\alpha x}$ onde p é um polinômio e α um número complexo.

Ainda, com o auxílio da transformada de Fourier - Borel de um operador linear e contínuo, Domingos Pizanelli deu uma caracterização, muito elegante, para que uma série de Pincherle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)}$ convirja, em $H(K)$, para todo y de $H(K)$ (teorema 1, § 1, cap. IV), caracterização esta fundamental no estudo dos operadores analíticos lineares de $H(K)$ em $H(K)$ que são desenvolvíveis em série de Pincherle. Em seguida, tendo em vista suas aplicações às equações diferenciais de ordem infinito, Domingos Pizanelli voltou a sua atenção aos operadores do ciclo fechado e normais e os estudou de modo bastante completo (§ 2 e § 3, cap. IV). Com os resultados

obtidos e com aquele anteriormente obtido por A. Martineau (resolução da equação de convolução), D. Pizanelli mostrou que a solução da equação de Euler de ordem infinito

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!} y^{(n)} = 0 \text{ pertence à aderência do subespaço}$$

de $H(K)$, onde K é um compacto logaritmicamente convexo de $\mathbb{C}$, gerado pelos elementos da forma $p(\log x) \cdot x^\alpha$ e mostrou, ainda, que $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!} y^{(n)} = g, g \in H(K)$, admite solução em $H(K)$. ([10-a]).

Este nosso trabalho é, em essência, a redação de um curso ministrado por Domingos Pizanelli, em 1970, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. O objetivo principal foi o de colocar numa linguagem didática e atual a bela teoria dos operadores lineares analíticos, procurando com isso facilitar o estudo daqueles que se interessarem por esta teoria. Para tentar atingir este nosso objetivo, contamos, durante a redação deste trabalho, com a atenção inensa do nosso orientador Domingos Pizanelli que conosco discutiu, com grande entusiasmo, grande parte das demonstrações dos teoremas mais delicados.

Queremos ressaltar que, por falta de tempo, não foram fei-

tas as numerosas aplicações da teoria (teorema de Runge; comportamento assintótico de equações diferenciais e de diferenças finitas ordinárias; cálculo operacional; equação de convolução e equação de Euler de ordem infinito, etc.)

Ao nosso orientador e amigo Domingos Pizanelli, ~~nosso~~ muito obrigado. Ao prof. Luiz Arthaud Berthet nosso reconhecimento. A todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram na nossa formação nosso agradecimento. Finalmente, queremos agradecer a Antônio Carlos Picolo pelo excelente trabalho de datilografia.

Instituto de Matemática
e Estatística da U.S.P.
Abril de 1971

H.L.G.

CAPÍTULO I

FUNÇÕES HOLOMORFAS

§ 1. Integração sobre intervalos. Em todo este primeiro capítulo, X designará sempre um espaço localmente convexo separado e completo por sequências; $[a, b]$ designará um intervalo fechado de números reais. Qualquer sequência finita $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, denomina-se uma divisão de $[a, b]$. Se $\mathcal{D} = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ é uma divisão de $[a, b]$, poremos:

$$|\mathcal{D}| = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|, \text{ onde } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Sejam $f : [a, b] \rightarrow X$ uma função, $\mathcal{D} = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ uma divisão de $[a, b]$ e $(x'_i)_{1 \leq i \leq n}$ uma sequência finita tal que $x_{i-1} \leq x'_i \leq x_i$, para $i = 1, \dots, n$. A soma

$$S(\mathcal{D}, (x'_i)) = \sum_{i=1}^n f(x'_i) \Delta x_i$$

denomina-se soma de Riemann de f , associada à divisão $\mathcal{D}$ e à sequência $(x'_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Definição. Diz-se que uma função $f : [a, b] \rightarrow X$ é integrável sobre $[a, b]$, se existe um elemento $I \in X$ que goza da seguinte proprie-

dade: dados $\varepsilon > 0$ e uma semi-norma contínua p sobre X , existe $\delta > 0$ tal que : se $|\mathcal{D}| \leq \delta$, $\mathcal{D} = (x_i)$, e se $x_i \in [x_{i-1}, x_i]$, então, $p(S(\mathcal{D}, (x_i)) - I) \leq \varepsilon$.

O elemento I quando existe é único e é denominado integral de f sobre $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x) dx$.

É de demonstração imediata a seguinte

Proposição 1. a) Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então, $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e tem-se

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

b) Se f é integrável em $[a, b]$ e se k é um escalar, então, $k f$ é integrável em $[a, b]$ e tem-se

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema. Se $f : [a, b] \rightarrow X$ é contínua em $[a, b]$, então, f é integrável sobre $[a, b]$.

Demonstração. Como f é contínua em $[a, b]$, f é uniformemente contínua, portanto, dados $\varepsilon > 0$ e uma semi-norma contínua p sobre X , existe $\delta > 0$ tal que

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \text{ acarreta } p(f(x_1) - f(x_2)) \leq \varepsilon.$$

Sejam S' e S'' somas de Riemann de f correspondentes às divisões

$\mathcal{P}' = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ e $\mathcal{P}'' = (y_j)_{0 \leq j \leq m}$ e às sequências

$(x'_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $(y'_j)_{1 \leq j \leq m}$, respectivamente, sendo

$|\mathcal{P}'| \leq \frac{\delta}{2}$ e $|\mathcal{P}''| \leq \frac{\delta}{2}$. Chamemos

$I'_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $I''_j = [y_{j-1}, y_j]$. Temos:

$$I'_i = \bigcup_{j=1}^m (I'_i \cap I''_j) = \bigcup_{j=1}^m I_{ij}, \quad \text{onde}$$

$$I_{ij} = I'_i \cap I''_j, \quad \text{e} \quad I''_j = \bigcup_{i=1}^n (I''_j \cap I'_i) = \bigcup_{i=1}^n I_{ij},$$

donde, sendo m a medida de Jordan,

$$\begin{aligned} S' - S'' &= \sum_{i=1}^n f(x'_i) m(I'_i) - \sum_{j=1}^m f(y'_j) m(I''_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x'_i) \left[\sum_{j=1}^m m(I_{ij}) \right] - \sum_{j=1}^m f(y'_j) \left[\sum_{i=1}^n m(I_{ij}) \right] = \\ &= \sum_{i,j} [f(x'_i) - f(y'_j)] m(I_{ij}). \quad \text{Se} \end{aligned}$$

$I_{ij} = \emptyset$, $m(I_{ij}) = 0$; se $I_{ij} \neq \emptyset$, $|x'_i - y'_j| \leq \delta$ e, por-

tanto,

$|f(x'_i) - f(y'_j)| \leq \xi$. Então:

$|S' - S''| \leq \sum_{i,j} \xi m(I_{ij}) = \xi(b-a)$. A sequência

$(S_n)_{n \geq 1}$, onde $S_n = \sum_{i=1}^n f(x'_i) \frac{b-a}{n}$ e

$x_i^1 = a + \frac{b-a}{n} i$, é, pela desigualdade acima, uma sequência de Cauchy; logo, $(S_n)_n \geq 1$ converge a um elemento $I \in X$. A integrabilidade de f , segue, então, da desigualdade $p(S - I) \leq p(S - S_n) + p(S_n - I)$ e da desigualdade acima. //

Proposição 2. Se $f : [a, c] \rightarrow X$ é contínua e se $a < b < c$, então,

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Demonstração. Imediata.

Proposição 3. Se $f : [a, b] \rightarrow X$ é integrável em $[a, b]$, então

$\int f(x) dx \in (b-a) \bar{A}$, onde A é a envoltória absolutamente convexa de $f([a, b])$.

Demonstração. Como f é integrável, dado a vizinhança V da origem em X , existe $\delta > 0$ tal que

$S(0, (x_i^1)) \in \int_a^b f(x) dx + V$, desde que $|0| \leq \delta$.

Como

$S(0, (x_i^1)) = \sum f(x_i^1) \Delta x_i \in \sum A \Delta x_i = (\sum \Delta x_i) A = (b-a) A$, pois, A é absolutamente convexo ([8-b] pag.5),

segue que $\int_a^b f(x) dx \in (b-a) \bar{A}$. //

Proposição 4. Sejam X e Y localmente convexos, separados e

$u : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear e contínua. Se

$f : [a,b] \rightarrow X$ é integrável sobre $[a,b]$, então, $u \circ f$ é integrável sobre $[a,b]$ e tem-se :

$$u \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b (u \circ f)(x) dx.$$

Demonstração. As somas de Riemann de $u \circ f$ são da forma

$u(S(\mathcal{U}, (x_i^j)))$, onde $S(\mathcal{U}, (x_i^j))$ é uma soma de Riemann de f . Então, dado a vizinhança W da origem em

Y , $u^{-1}(W)$ é uma vizinhança da origem em X ; logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$S(\mathcal{U}, (x_i^j)) - \int_a^b f(x) dx \in u^{-1}(W) \text{ se } |\mathcal{U}| \leq \delta,$$

daí,

$$u(S(\mathcal{U}, (x_i^j))) - u\left(\int_a^b f(x) dx\right) \in W \text{ se } |\mathcal{U}| \leq \delta.$$

Segue, então, que $u \circ f$ é integrável e

$$u\left(\int_a^b f(x) dx\right) = \int_a^b (u \circ f)(x) dx. //$$

\ Proposição 5. (Mudança de variáveis). Sejam $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $f : g([a,b]) \rightarrow X$ contínua. Então,

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

Demonstração. Seja $x' \in X'$. Temos :

$$\begin{aligned} x' \left(\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt \right) &= \int_a^b x' (f(g(t)) g'(t)) dt = \\ &= \int_a^b x' (f(g(t)) g'(t)) dt; \quad \text{segue, então, do} \end{aligned}$$

teorema clássico de mudança de variáveis, que

$$\int_a^b x' (f(g(t)) g'(t)) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} x' (f(x)) dx;$$

portanto,

$$\begin{aligned} x' \left(\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt \right) &= \\ &= x' \left(\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx \right) \quad \text{para todo } x' \in X', \text{ logo,} \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx. //$$

§ 2 . Integração sobre caminhos. Chama-se caminho diferenciável

uma aplicação $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 . A origem de γ é o

ponto $\gamma(a)$ e a extremidade é o ponto $\gamma(b)$. Se D é um aberto

do plano complexo, diz-se que γ é um caminho diferenciável de

aberto D se a função γ toma seus valores em D . Chama-se caminho

diferenciável por partes uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

tal que existe uma divisão $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ de modo que as restrições de γ a cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, sejam de classe C^1 .

Definição. Sejam $\gamma: [a, b] \rightarrow C$ um caminho diferenciável do aberto D e $f: D \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Define-se a integral de f sobre γ , e escreve-se $\int_{\gamma} f(z) dz$, pela fórmula

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Se $\gamma: [a, b] \rightarrow C$ é um caminho diferenciável por partes do aberto D , define-se

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz$$

onde γ_i , $i = 1, \dots, n$, é a restrição de classe C^1 de γ ao subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Observação. Segue da proposição 2 do § anterior que a integral

$\int_{\gamma} f(z) dz$, quando γ é um caminho diferenciável por partes, não depende da divisão $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ do intervalo $[a, b]$.

Consideremos, agora, uma função $t: [a_1, b_1] \rightarrow R$ de classe C^1 , cuja derivada $t'(u)$ seja sempre > 0 e tal que $t(a_1) = a$ e $t(b_1) = b$; seja $\gamma: [a, b] \rightarrow C$ um caminho diferenciável de um aberto D . A aplicação $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow C$ dada por $\gamma_1(u) = \gamma(t(u))$ é um caminho diferenciável de D . Diz-se que γ_1 é

deduzido de γ por uma mudança de parâmetro. Seja $f : D \rightarrow X$ contínua. Segue da fórmula de mudanças de variáveis que

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Temos, então, que o valor da integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ não se altera se se substitui γ por um outro caminho diferenciável deduzido de γ por uma mudança de parâmetro.

Tomemos, agora, uma função $t : [a_1, b_1] \rightarrow R$, tal que

$t'(u) < 0$, $t(a_1) = b$ e $t(b_1) = a$. É fácil de verificar que neste caso temos

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Diz-se, então, que se efetuou sobre γ uma mudança de parâmetro que muda a orientação de γ .

Proposição. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ um caminho diferenciável por partes, de um aberto D , $f : D \rightarrow X$ contínua, A a envoltória absolutamente convexa de $f(\gamma([a, b]))$ e $|\gamma|$ o comprimento de γ . Nestas condições, tem-se

$$\int_{\gamma} f(z) dz \in |\gamma| \cdot A$$

Demonstração. I) Seja γ diferenciável em $[a, b]$.

a) $\gamma' \neq 0$. Para cada inteiro positivo n , seja

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i)) \gamma'(t_i) \frac{(b-a)}{n}, \text{ onde}$$

$$t_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Temos: } S_n \in A \quad \sum_{i=1}^n |\gamma'(t_i)| \frac{b-a}{n}, \text{ daí}$$

$$\frac{S_n}{\sum_{i=1}^n |\gamma'(t_i)| \frac{b-a}{n}} \in A. \text{ Fazendo } n \rightarrow \infty, \text{ obtemos:}$$

$$\frac{\int_{\gamma} f(z) dz}{|\gamma|} \in \bar{A}, \text{ ou seja, } \int_{\gamma} f(z) dz \in |\gamma| \bar{A}.$$

b) $\gamma' = 0$. Temos $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$; neste caso a desigualdade é evidente.

II) Quando γ é diferenciável por partes, existe uma divisão

$(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ tal que γ é diferenciável em

$[t_{i-1}, t_i]$. Então

$\int_{\gamma_i} f(z) dz \in |\gamma_i| \bar{A}, \quad 1 \leq i \leq n$. Por soma de tem a proposição. //

§ 3. Funções holomorfas.

Definição 1. Seja D um aberto em $\mathbb{C}$; uma função $f: D \rightarrow X$ denomina-se holomorfa em D se existe

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{f(z_0 + \alpha) - f(z_0)}{\alpha} = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$$

para todo $z_0 \in D$.

Proposição 1. Se f é holomorfa em D , então f é contínua em D .

Demonstração. A proposição decorre da identidade

$$f(z_0 + \alpha) - f(z_0) = \frac{f(z_0 + \alpha) - f(z_0)}{\alpha} \cdot \alpha, \quad \alpha \neq 0.$$

Definição 2. Uma função $f : D \rightarrow X$ denomina-se fracamente holomorfa em D se $x' \circ f$ é holomorfa em D , para todo $x' \in X'$, onde X' é o dual topológico de X .

Teorema. Uma função $f : D \rightarrow X$ é holomorfa em D se, e somente se, f é fracamente holomorfa em D .

Demonstração. $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{(x' \circ f)(z_0 + \alpha) - (x' \circ f)(z_0)}{\alpha} = \\ & = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha \neq 0}} \left\langle x', \frac{f(z_0 + \alpha) - f(z_0)}{\alpha} \right\rangle = \left\langle x', f'(z_0) \right\rangle. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Consideremos a expressão

$$\phi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{f(z_0 + \alpha) - f(z_0)}{\alpha} - \frac{f(z_0 + \beta) - f(z_0)}{\beta} \right]$$

Sejam $0 < r < R$ tais que os círculos de centro z_0 e raios r e R estejam contidos em D .

Vamos mostrar que para cada $x' \in X'$, existe $M_{x'} > 0$ tal que

$|\langle x', \phi(\alpha, \beta) \rangle| \leq M_{x'}$, desde que $0 < |\alpha|, |\beta| < r$, daí seguirá que o conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \phi(\alpha, \beta) \mid 0 < |\alpha|, |\beta| < r, \alpha \neq \beta \right\}$$

é fracamente limitado em X . ([8-b] pag 11)

Temos:

$$\langle x', \phi(\alpha, \beta) \rangle = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{\langle x', f(z_0 + \alpha) \rangle - \langle x', f(z_0) \rangle}{\alpha} + \frac{\langle x', f(z_0 + \beta) \rangle - \langle x', f(z_0) \rangle}{\beta} \right]. \quad \text{Seja}$$

$\gamma(t) = z_0 + R e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. Pela fórmula de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\langle x', f(z_0 + \alpha) \rangle - \langle x', f(z_0) \rangle}{\alpha} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\langle x', f(t) \rangle}{t - z_0 - \alpha} - \frac{\langle x', f(t) \rangle}{t - z_0} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x', f(t) \rangle}{(t - z_0 - \alpha)(t - z_0)} dt \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta) \langle x', \phi(\alpha, \beta) \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{\langle x', f(t) \rangle}{(t - z_0 - \alpha)(t - z_0)} - \frac{\langle x', f(t) \rangle}{(t - z_0 - \beta)(t - z_0)} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\alpha - \beta}{(t - z_0 - \alpha)(t - z_0 - \beta)(t - z_0)} \langle x', f(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Dai

$$\begin{aligned} \langle x', \phi(\alpha, \beta) \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x', f(t) \rangle}{(t - z_0 - \alpha)(t - z_0 - \beta)(t - z_0)} dt, \text{ logo,} \\ |\langle x', \phi(\alpha, \beta) \rangle| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x', f(t) \rangle}{(t - z_0 - \alpha)(t - z_0 - \beta)(t - z_0)} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{N_{x'}}{(R-r)(R-r)R} 2\pi R = \frac{N_{x'}}{(R-r)^2} = M_{x'}, \text{ onde} \end{aligned}$$

$$N_{x'} = \max_{z \in \gamma} |\langle x', f(z) \rangle| \quad \text{e} \quad 0 < |\alpha|, |\beta| < r.$$

Como $\mathcal{A}$ é fracamente limitado, segue, pelo teorema de Makey

([4] pg.), que $\mathcal{A}$ é limitado na topologia de X , portanto,

se p é uma semi-norma contínua sobre X , existirá $M_p > 0$ de modo

$$\text{que } p \left(\frac{f(z_0 + \alpha) - f(z_0)}{\alpha} - \frac{f(z_0 + \beta) - f(z_0)}{\beta} \right) \leq M_p |\alpha - \beta|.$$

Segue da condição de Cauchy, tendo em vista que X é completo por sequência, que existe

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{f(z_0 + \alpha) - f(z_0)}{\alpha} . //$$

Proposição 2. (De Cauchy). Seja K um subconjunto compacto com

bordo orientado γ ([1.] pag. 65), $K \subset D$. Se $f : D \rightarrow X$ é holomorfa, então :

$$a) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

$$b) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t - z}, \quad \text{para } z \in K^o.$$

Demonstração. a) Para todo $x' \in X'$, $\langle x', f(z) \rangle$ é uma função holomorfa sobre D , com valores em $\mathbb{C}$. Segue pelo teorema clássico

$$\text{de Cauchy que } \int_{\gamma} \langle x', f(z) \rangle dz = 0.$$

Como x' é em funcional linear e contínuo, segue da proposição 1, § 1,

$$\text{que : } \int_{\gamma} \langle x', f(z) \rangle dz = \langle x', \int_{\gamma} f(z) dz \rangle.$$

Resulta, então, que

$$\langle x', \int_{\gamma} f(z) dz \rangle = 0, \quad \text{para todo } x' \in X', \text{ portanto,}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

b) Pela fórmula integral de Cauchy

$\langle x', f(z) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle x', f(t) \rangle}{t-z} dt$, para todo $z \in \overset{0}{K}$,
 daí $\langle x', f(z) \rangle = \langle x', \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt \rangle$ para todo
 $x' \in X'$. Logo,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt, \text{ para todo } z \in \overset{0}{K}. //$$

Proposição 3. Seja $f: D \rightarrow X$; se f é holomorfa em D , então,

$f^{(n)}(z)$ existe para todo z de D e para todo natural n e tem-se

$$(x' \circ f)^{(n)}(z) = \langle x', f^{(n)}(z) \rangle, \text{ para todo}$$

$z \in D$ para todo $x' \in X'$ e para todo natural n .

Demonstração. Para $n = 1$ a proposição é verdadeira. Suponhamos

verdadeiro para $n = k > 1$. Como $x' \circ f$ é holomorfa em D ,

$(x' \circ f)^{(k+1)}(z)$ existe para todo $z \in D$ e para todo natural k .

Então:

$$\begin{aligned}
 (x' \circ f)^{(k+1)}(z) &= \frac{d(x' \circ f)^{(k)}(z)}{dz} \quad (\text{pela hip. de indução}) \\
 &= (x' \circ f^{(k)})'(z), \text{ portanto, } x' \circ f^{(k)} \text{ é holomorfa em } D, \text{ pa-} \\
 &\text{ra todo } x' \in X', \text{ ou seja, } f^{(k)} \text{ é fracamente holomorfa, logo, pe-} \\
 &\text{lo teorema anteriormente demonstrado, } f^{(k)} \text{ é holomorfa em } D; \\
 \text{portanto, } \frac{d f^{(k)}}{dz}(z) &= f^{(k+1)}(z) \text{ existe para todo} \\
 z \in D \text{ e}
 \end{aligned}$$

$$(x' \circ f^{(k)})'(z) = \langle x', f^{(k+1)}(z) \rangle, \text{ ou seja,}$$

$$(x' \circ f)^{(k+1)}(z) = \langle x', f^{(k+1)}(z) \rangle \text{ para todo } z \in D$$

e todo natural k . //

Proposição 4. (Integração por partes). Sejam $v : D \rightarrow X$ e

$y : D \rightarrow C$ funções holomorfas e $\gamma : [a,b] \rightarrow D$ um caminho diferenciável. Então:

$$\textcircled{1} \int_{\gamma} v(\alpha) y'(\alpha) d\alpha = \left[v(\gamma(b)) y(\gamma(b)) - v(\gamma(a)) y(\gamma(a)) \right] + \\ - \int_{\gamma} v'(\alpha) y(\alpha) d\alpha .$$

Demonstração.

$$\frac{d}{dz} \left[\langle x', v(z) \rangle \cdot y(z) \right] = \\ = \left[\frac{d}{dz} \langle x', v(z) \rangle \right] \cdot y(z) + \langle x', v(z) \rangle y'(z)$$

Dai,

$$\int_{\gamma} \langle x', v(\alpha) \rangle y'(\alpha) d\alpha = \\ = \left[\langle x', v(\gamma(b)) \rangle y(\gamma(b)) - \langle x', v(\gamma(a)) \rangle y(\gamma(a)) \right] + \\ + \int_{\gamma} \langle x', \frac{dv}{d\alpha}(\alpha) \rangle y(\alpha) d\alpha \quad \text{para todo } x' \in X', \text{ logo,}$$

$$\langle x', \int_{\gamma} v(\alpha) y'(\alpha) d\alpha \rangle = \\ \langle x', \left[v(\gamma(b)) y(\gamma(b)) - v(\gamma(a)) y(\gamma(a)) \right] + \\ + \int_{\gamma} v'(\alpha) y(\alpha) d\alpha \rangle \quad \text{para todo } x' \in X', \text{ portanto, } \textcircled{1} \text{ se verifica. //$$

Proposição 5. Seja $f : D \rightarrow X$ holomorfa em D . Então

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

onde γ é o bordo orientado de um compacto $K \subset D$ e $z \in \overset{o}{K}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle x', f^{(n)}(z) \rangle &= (x' \circ f)^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(x' \circ f)(t)}{(t-z)^{n+1}} dt = \\ &= \langle x', \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \rangle \text{ para todo } x' \in X', \text{ portanto,} \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt. // \end{aligned}$$

Proposição 6. (Desigualdade de Cauchy). Seja $f : D \rightarrow X$ holomorfa

em D . Então, para cada $z_0 \in D$, tem-se

$$f^{(n)}(z_0) \in \frac{n!}{r^n} \bar{A}$$

onde $A = \bigcap f(B_r(z_0))$ e $B_r(z_0)$ é um círculo fechado de centro z_0 e raio r , contido em D .

Demonstração. Seja $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Temos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &\in |\gamma| \bar{B}, \text{ onde } B = \bigcap f(\gamma([0, 2\pi])); \text{ então:} \\ f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt \in \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r \bar{B} \subset \frac{n!}{r^n} \bar{A}. // \end{aligned}$$

Proposição 7. (Fórmula de Taylor). Seja $f : D \rightarrow X$ holomorfa e

$B_r(z_0) \subset D$. Então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

para todo $z \in B_r(z_0)$; a convergência é uniforme sobre todo compacto contido em $B_r(z_0)$.

Demonstração. Seja $A = \bigcap f(B_r(z_0))$. Pela desigualdade de

Cauchy, $\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \in \frac{1}{r^n} \bar{A}$, $n \geq 0$, logo,

$$\left\| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right\|_{\bar{A}} \leq \frac{1}{r^n}, \text{ para } n \geq 0, \text{ onde}$$

$\|\cdot\|_{\bar{A}}$ é a norma do espaço de Banach $C. \bar{A}$ cuja bola unitária fechada é $\bar{A}$.

Tomando-se $0 < r' < r$, segue, para $|z - z_0| < r'$, que

$$\left\| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \right\|_{\bar{A}} = \left\| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right\|_{\bar{A}} |z - z_0|^n \leq \left(\frac{r'}{r} \right)^n.$$

Pelo critério de Weirstrass, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$

converge em $C. \bar{A}$, uniformemente sobre todo compacto contido em

$B_r^0(z_0)$. Portanto, a série acima converge, em X , uniformemente sobre todo compacto de $B_r^0(z_0)$. Por outro lado, como

$\langle x', f(z) \rangle$ é holomorfa sobre D , com valores em C , temos

pelo teorema clássico de Taylor que

$$\begin{aligned} \langle x', f(z) \rangle &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (x' \circ f)^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left\langle x', \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right\rangle. \text{ Como} \end{aligned}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \text{ converge em } X, \text{ segue para todo}$$

$$x' \in X',$$

$$\begin{aligned} \left\langle x', \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right\rangle &= \sum_{n \geq 0} \left\langle x', \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right\rangle \\ &= \langle x', f(z) \rangle; \text{ portanto,} \end{aligned}$$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{para todo } z \in \overset{o}{B}_r(z_0). //$$

Nosso objetivo a seguir é mostrar que se uma função

$f : D \rightarrow X$ é desenvolvível em série de potências numa vizinhança de cada ponto $z_0 \in D$, então, f é holomorfa. Temos, precisamente, a

Proposição 8. Seja a função $f : D \rightarrow X$. Se f é desenvolvível em série de potências numa vizinhança de cada ponto $z_0 \in D$, então, f é holomorfa.

Demonstração. Seja $z_0 \in D$; temos

$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ para $z \in \overset{o}{B}_r(z_0) \subset D$. Segue que $\langle x', f(z) \rangle = \sum_{n \geq 0} x'(a_n) (z - z_0)^n$ para $z \in \overset{o}{B}_r(z_0)$ e para todo $x' \in X'$. Resulta, daí, $\langle x', f(z) \rangle$ é analítica em D , para todo $x' \in X'$; portanto, f é fracamente holomorfa, logo, holomorfa em D .

Reunindo as proposições 7 e 8 obtemos o seguinte importante resultado: "uma função $f : D \rightarrow X$ é holomorfa se, e somente se, f é desenvolvível em série de potências numa vizinhança de cada ponto $z_0 \in D$ ".

Proposição 9. (De Laurent) Se $f : D \rightarrow X$ é holomorfa e se

$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z - z_0| \leq R \right\}$ está contido em D , então,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n (z - z_0)^{-n}, \text{ para}$$

$$r < |z - z_0| < R, \text{ onde}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, \quad \Gamma(t) = z_0 + R e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{-n+1}} dt, \quad \gamma(t) = z_0 + r e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Demonstração.

$$a_n \in \frac{1}{R^n} \bar{A} \text{ e } b_n \in r^n \bar{A}, \text{ onde } A \text{ é a envoltória absoluta}$$

mente convexa de $\left\{ f(z) \mid r \leq |z - z_0| \leq R \right\}$.

Segue que

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ converge em } C \bar{A} \text{ e, portanto, em } X, \text{ se}$$

$$|z - z_0| < R. \text{ Por outro lado,}$$

$$\sum_{n \geq 1} \|b_n (z - z_0)^{-n}\| \leq \sum_{n \geq 1} r^n |z - z_0|^{-n}, \text{ logo,}$$

$$\sum_{n \geq 1} \|b_n (z - z_0)^{-n}\| \text{ converge para } |z - z_0| > r.$$

Segue, daí, que

$$\sum_{n \geq 1} b_n (z - z_0)^{-n} \text{ converge em } C \bar{A} \text{ e, portanto, em } X. \text{ Pelo teo-}$$

rema clássico de Laurent, temos:

$$\langle x', f(z) \rangle = \sum_{n \geq 0} a'_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b'_n (z - z_0)^{-n}$$

onde

$$a'_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(x' \circ f)(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt = x'(a_n)$$

$$b'_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\langle x', f(t) \rangle}{(t-z_0)^{-n+1}} dt = x'(b_n). \text{ Então,}$$

$$\langle x', f(z) \rangle = \sum_{n \geq 0} x'(a_n) (z-z_0)^n + \sum_{n \geq 1} x'(b_n) (z-z_0)^{-n} =$$

$$= \langle x', \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n (z-z_0)^{-n} \rangle \text{ para todo}$$

$x' \in X'$ e $r < |z-z_0| < R$. Logo,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n (z-z_0)^{-n}, \text{ para}$$

$$r < |z-z_0| < R. //$$

Proposição 10. Seja D um aberto de $\mathbb{C}$ e $a \in D$. Se $f: D - \{a\} \rightarrow X$ é holomorfa em $D - \{a\}$ e limitada numa vizinhança de a , então,

f pode ser estendida a uma função holomorfa sobre D .

Demonstração. Sejam $0 < r < R$ tais que

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\} \subset D. \text{ Por Laurent}$$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n + \sum_{n \geq 1} b_n (z-a)^{-n} \text{ para}$$

$$r < |z-a| < R.$$

Para todo $x' \in X'$, $\langle x', f(z) \rangle$ é holomorfa em $D - \{a\}$ e limitada numa vizinhança de a . Por outro lado,

$$\langle x', f(z) \rangle = \sum_{n \geq 0} x'(a_n) (z-a)^n + \sum_{n \geq 1} x'(b_n) (z-a)^{-n};$$

segue por um teorema clássico sobre funções holomorfas que

$$x'(b_n) = 0 \text{ para todo } x' \in X' \text{ e para todo } n \geq 1, \text{ logo,}$$

$$b_n = 0 \text{ para } n \geq 1, \text{ portanto, } f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n; \text{ basta,}$$

$$\text{então, fazer } f(a) = a_0. //$$

Proposição 11. (Teorema de Liouville). Se $f : C \rightarrow X$ é holomorfa e limitada em C , então, f é constante sobre C .

Demonstração. Pela fórmula de Taylor

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \text{ para todo } z \in C, \text{ onde } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ para } n \geq 0.$$

Para todo $x' \in X'$, $\langle x', f(z) \rangle$ é holomorfa e limitada em C , e

$\langle x', f(z) \rangle = \sum_{n \geq 0} x'(a_n) z^n$; pelo teorema clássico de Liouville, $x'(a_n) = 0$ para todo $n \geq 1$ e para todo $x' \in X'$, logo, $a_n = 0$ para $n \geq 1$; portanto, $f(z) = a_0$ para todo

$z \in C$. //

Proposição 12. Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções holomorfas de D em X . Se $(f_n)_{n \geq 1}$ converge para a função $f : D \rightarrow X$, uniformemente sobre todo compacto de D , então, f é holomorfa em D .

Demonstração. Para todo $x' \in X'$, a sequência de funções holomorfas de D em C , $(x' \circ f_n)_{n \geq 1}$, converge uniformemente, sobre todo o compacto de D , à função holomorfa $x' \circ f : D \rightarrow C$ (teorema clássico de Weierstrass). Segue que f é fracamente holomorfa, logo, holomorfa. //

Corolário. Seja $(f_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de funções holomorfas de D em X . Se a série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformemente, sobre todo compacto de D , então, a função limite é holomorfa em D .

Proposição 13. (Princípio do prolongamento analítico). Sejam f e g duas funções holomorfas em D , com valores em X , onde D é um aberto conexo de $\mathbb{C}$. Se f e g coincidem numa vizinhança de um ponto de D , então, $f = g$ sobre D .

Demonstração. Seja $x' \in X$; $x' \circ f = x' \circ g$ numa vizinhança de um ponto de D ; pelo teorema clássico, $x' \circ f = x' \circ g$ sobre D , logo, $f = g$. //

Proposição 14. Seja $f : D \rightarrow X$ uma função holomorfa. Dado $t_0 \in D$, existem uma vizinhança fechada $V(t_0)$ e um subespaço B de B_a - nach de X , com $B \hookrightarrow X$ contínua, tal que $f : \overset{0}{V}(t_0) \rightarrow B$ seja holomorfa.

Demonstração. Dado $t_0 \in D$, seja $V(t_0)$ um disco fechado de centro t_0 e raio R , contido em D . Da holomorfia de f , $f(V(t_0))$ é limitado em X ; seja A a envoltória absolutamente convexa e fechada de $f(V(t_0))$. Então :

$$\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} \in \frac{A}{R^n}, \quad n \geq 0, \text{ logo, } \left\| \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} \right\|_A \leq \frac{1}{R^n}.$$

Dai

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (z - t_0)^n, \text{ para } |z - t_0| < R, \text{ em C.A.} //$$

Seja, agora, S a esfera de Riemann. Diz-se que uma função f definida na vizinhança $V_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \cup \{\infty\}$

é holomorfa no infinito se a função

$$g(z') = \begin{cases} f\left(\frac{1}{z'}\right) & \text{se } z' \neq 0 \\ f(\infty) & \text{se } z' = 0 \end{cases}$$

é holomorfa na origem.

Para finalizar este capítulo vamos dar exemplo de função holomorfa. No capítulo seguinte daremos outros exemplos importantes.

Exemplo.

Seja $\mathcal{B}(K)$ o espaço das funções complexas, definidas e contínuas no espaço topológico compacto K ; $\mathcal{B}(K)$ munido com a norma: $\|f\| = \max_{z \in K} |f(z)|$, é um espaço de Banach.

Uma função $u: D \rightarrow \mathcal{B}(K)$, onde D é um aberto de S , é holomorfa se, e somente se, a função $(t, x) \in D \times K \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{C}$ é contínua e, para cada $x \in K$ fixado, a função $t \in D \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{C}$ é holomorfa. (Estamos indicando por $u(t, x)$ o valor que $u(t) \in \mathcal{B}(K)$ assume no ponto $x \in K$).

Solução. ($\Rightarrow$) Da continuidade de u , $u(t)(x)$ converge a

$u(t_0)(x)$, uniformemente em $x \in K$, quanto $t \rightarrow t_0 \in D$.

Por outro lado, $u(t_0)(x)$ converge para $u(t_0)(x_0)$ quan-

do $x \rightarrow x_0 \in K$, logo, $u(t, x)$ converge para $u(t_0, x_0)$

quando $(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)$. Vamos mostrar, agora, que para

cada $x \in K$ fixado, $u(t, x)$ é holomorfa em t . Seja, então, $x \in K$;

a forma linear $v_x : f \in \mathcal{C}(K) \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ é contínua. Co-

mo $u(t, x) = (v_x \circ u)(t)$, segue a afirmação.

($\Leftarrow$) Supomos, agora, que $u(t, x)$ é holomorfa em t e contínua

em (t, x) . Queremos provar que u é holomorfa.

Faremos isto mostrando que em cada ponto $t_0 \in D$, $t_0 \neq \infty$ se

$\infty \in D$, u tem por derivada a função dada por

$$u'(t_0)(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x). \quad (\text{No caso em que } t_0 = \infty,$$

basta fazer a mudança de variável $t = \frac{1}{t'}$).

Tomemos $0 < r < R$, tal que a bola fechada de raio R e centro t_0 ,

$B_R(t_0)$, esteja contida em D ; seja Γ a fronteira desta bola.

Temos, pela fórmula de Cauchy:

$$\begin{aligned} A &= \frac{u(t, x) - u(t_0, x)}{(t - t_0)^2} - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{t-t_0} \left[\frac{1}{z-t} - \frac{1}{z-t_0} \right] - \frac{1}{(z-t_0)^2} \right\} u(z, x) dz. \end{aligned}$$

$$\text{Temos:} \quad \left| \frac{1}{(t-t_0)^2} \left[\frac{1}{z-t} - \frac{1}{z-t_0} \right] - \frac{1}{(z-t_0)^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{(z-t)(z-t_0)} - \frac{1}{(z-t_0)^2} \right| = \left| \frac{1}{z-t_0} \right| \left| \frac{t-t_0}{(z-t)(z-t_0)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{R} \cdot \frac{|t-t_0|}{(R-r)R} \text{ se } t \in B_r(t_0) \text{ e } z \in \Gamma.$$

Seja $M = \max_{(z,x) \in \Gamma \times K} |u(z,x)|$, que existe, pois $u(z,x)$ é contínua e $\Gamma \times K$ compacto. Então :

$$|A| \leq \frac{1}{2\|R\|^2} \frac{|t-t_0|}{(R-r)} M. \quad 2\|R\| = \frac{|t-t_0|}{R(R-r)} M.$$

Desta desigualdade, segue que

$$\frac{u(t,x) - u(t_0,x)}{t-t_0} \text{ converge a } \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x), \text{ quando}$$

$t \rightarrow t_0$, uniformemente sobre K . Portanto, u é holomorfa em t_0 . //

C A P Í T U L O I I

O ESPAÇO $H (K)$

§ I . Definição do espaço $H (K)$. Seja K um compacto da esfera complexa S , $K \neq \emptyset$ e $K \neq S$. Indica-se por (K) o conjunto das funções f que satisfazem às condições :

- i) f é holomorfa num aberto D_f que contém K ;
- ii) $f (\infty) = 0$, se ∞ pertence a K .

As restrições impostas a K , inicialmente, foram feitas com o objetivo de excluir os casos extremos:

se $K = S$, $(K) = \{ 0 \}$, onde estamos indicando por 0 a função identicamente nula sobre S ;

se $K = \emptyset$, $(K) = \{ f \mid f \text{ é holomorfa em algum aberto de } S \}$.

No que segue, usaremos a notação (y , D_y) para indicar que y é uma função holomorfa em D_y .

Seja, agora, R a relação de equivalência sobre (K) , definida do seguinte modo :

$(y , D_y) \equiv (w , D_w) \bmod (R)$ se, e somente se, $y (z) = w (z)$ para todo $z \in D$, onde $K \subset D \subset D_y \cap D_w$.

O conjunto quociente $(K) / R$ será indicado por $H (K)$.

É fácil de verificar que as operações

$$(y, D_y) + (w, D_w) = (y+w, D_y \cap D_w)$$

$$\alpha(y, D_y) = (\alpha y, D_y), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

determinam sobre $H(K)$ uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Nosso objetivo, a seguir, é definir sobre $H(K)$ uma estrutura de espaço localmente convexo. Seja, então, $(D_n)_{n \geq 1}$ uma sequência decrescente de abertos de S , tais que :

- i) $D_n \supset K$ e $D_n \supset D_{n+1}$, para todo $n \geq 1$;
- ii) se D é um aberto de S tal que $D \supset K$, então, existe $n \geq 1$ tal que $D \supset D_n$;
- iii) cada componente conexa de D_n contém pontos de K .

É sempre possível construir uma tal sequência; por exemplo a sequência $(D_n)_{n \geq 1}$ onde $D_n = \left\{ x \in S \mid d(x, K) < \frac{1}{n} \right\}$, $i = 1, \dots, n$, satisfaz às condições i), ii) e iii) acima.

A cada sequência $(D_n)_{n \geq 1}$ que satisfaz às três condições anteriores, está associada a sequência $(H(D_n))_{n \geq 1}$ onde $H(D_n)$ é o espaço de Banach das funções holomorfas e limitadas em D_n , nulas no infinito, se o infinito pertence a K .

(Estamos considerando sobre $H(D_n)$ a norma :

$$\|f\| = \sup_{z \in D_n} |f(z)|.$$

Proposição 1. Seja D um aberto que contem K , tal que cada componente conexa de D contém pontos de K . Nestas condições, a aplicação

$$y \in H(D) \longmapsto (y, D) \in H(K)$$

é linear e injetora.

Demonstração. A linearidade da aplicação em questão é imediata.

Suponhamos, então, que $(y, D) = (0, D)$; vamos mostrar que $y = 0$ sobre D . Como (y, D) é equivalente a $(0, D)$, segue que $y = 0$ sobre $D' \subset D$, onde $D' \supset K$. Seja D_1 uma componente conexa de D ; como D_1 contém pontos de K , segue que $D_1 \cap D' = \emptyset$; sendo D_1 conexo e $y = 0$ sobre $D_1 \cap D'$, segue que $y = 0$ sobre D_1 . Sendo $y = 0$ sobre cada componente conexa de D , segue que $y = 0$ sobre D . //

A imagem de $H(D)$ pela aplicação da proposição anterior, será denotada por $\check{H}(D)$. Segue, então, que a aplicação acima é um isomorfismo vetorial de $H(D)$ sobre $\check{H}(D)$. Definindo-se sobre $\check{H}(D)$ a norma $\| (y, D) \| = \| y \|$, segue que $\check{H}(D)$ é isométrico a $H(D)$. No que segue, não faremos distinção entre os elementos de $\check{H}(D)$ e de $H(D)$.

Seja, agora, $(D_n)_{n \geq 1}$ uma sequência satisfazendo às condições i) ii) e iii). Consideremos a aplicação

$u_n : H(D_n) \longrightarrow H(D_{n+1})$, dada por : $u_n(f) = f|_{D_{n+1}}$.

Com o auxílio do teorema de Montel, ([1] pag. 166) demonstra-se sem dificuldade que u_n é um operador compacto, isto é, que $u_n(B_n)$ é compacto em $H(D_{n+1})$, onde B_n é a bola unitária fechada de $H(D_n)$. Transferindo este resultado para os espaços $\dot{H}(D_{n-1})$ e $\dot{H}(D_n)$ obtemos :

Proposição 2. Seja $(D_n)_{n \geq 1}$ uma sequência satisfazendo às condições i), ii) e iii). Então, a bola unitária fechada de $\dot{H}(D_n)$ é compacta em $\dot{H}(D_{n+1})$ para todo $n \geq 1$.

Proposição 3. Sejam K um compacto da esfera complexa, $K \neq \emptyset$ e $K \neq S$, e $(D_n)_{n \geq 1}$ uma sequência satisfazendo às condições i), ii) e iii). Nestas condições, tem-se

$$H(K) = \bigcup_{n \geq 1} \dot{H}(D_n)$$

Demonstração. A inclusão $\bigcup_{n \geq 1} \dot{H}(D_n) \subset H(K)$ é evidente.

Agora, se $(y, D) \in H(K)$, existe n tal que $D \supset D_n$, logo

$$(y, D) = (y, D_n) \in \dot{H}(D_n). //$$

Seja, agora, K um compacto da esfera complexa, $K \neq \emptyset$ e $K \neq S$, e seja $(D_n)_{n \geq 1}$ uma sequência satisfazendo às condições i), ii) e iii); sobre $H(K)$, definiremos de modo natural, uma topologia localmente convexa T ; esta topologia T é, precisamente,

a mais fina das topologias localmente convexas sobre $H(K)$ que tornam contínuas as imersões $H(D_n) \hookrightarrow H(K)$, $n \geq 1$. Um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $H(K)$ é formado pelas partes.

$$\bigcap_{n \geq 1} V_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} V_n$$

onde V_n é uma vizinhança de 0 em $H(D_n)$, $n \geq 1$. ([5] Pag.157).

O objetivo da nossa próxima proposição é mostrar que a topologia de $H(K)$ não depende da particular sequência $(D_n)_{n \geq 1}$ escolhida. Seja, então, K um compacto de S , $K \neq \emptyset$ e $K \neq S$, e seja $\mathcal{A}$ a família de todos os abertos de S satisfazendo às propriedades:

- I) todo elemento de $\mathcal{A}$ contém K ;
- II) cada componente conexa de $D \in \mathcal{A}$ contém pontos de K .

Indicaremos por T' a mais fina das topologias localmente convexas sobre $H(K)$ que tornam contínuas as imersões $H(D) \hookrightarrow H(K)$, $D \in \mathcal{A}$. Temos, então, a

Proposição 4. As topologias T e T' sobre $H(K)$ coincidem.

Demonstração.

$$\bigcap_{D \in \mathcal{A}} V_D \supset \bigcap_{n \geq 1} V_{D_n} = \bigcap_{n \geq 1} V_n \text{ onde } V_n = V_{D_n}, \text{ portanto,}$$

T é mais fina que T' . Por outro lado, dado $D \in \mathcal{A}$, existe $D_n \subset D$ e temos: $H(D) \subset H(D_n)$; como a topologia de $H(D)$ é mais fina que a induzida por $H(D_n)$, segue que se V_n é vizinhança da origem em $H(D_n)$, então, $V_n \cap H(D)$ é vizinhança da origem em $H(D)$, daí segue que $\bigcap_{n \geq 1} V_n$ é uma T' -vizinhança, portanto, T' é mais fina que T . //

§ 2. Os espaços L_N^* . Dados um compacto K de S , $K \neq \emptyset$ e

$K \neq S$, e uma sequência $(D_n)_{n \geq 1}$ satisfazendo às condições i), ii) e iii), vimos que :

$$1) H(K) = \bigcup_{n \geq 1} \dot{H}(D_n);$$

2) $\dot{H}(D_n)$ é um subespaço de $H(K)$ com estrutura de espaço de Banach ;

3) A sequência $(\dot{H}(D_n))_{n \geq 1}$ é crescente;

4) A bola fechada unitária de $\dot{H}(D_n)$ é compacta em $\dot{H}(D_{n+1})$;

5) $\| \cdot \|_n \geq \| \cdot \|_{n+1}$, onde estamos indicando por

$\| \cdot \|_n$ a norma de $H(D_n)$.

Motivado por estas propriedades, J. Sebastião e Silva introduziu uma classe especial de espaços localmente convexos denominados espaços $\mathcal{L}_N^*$ (leia : $\mathcal{L}_N$ estrêla), cuja definição daremos a seguir.

Definição 1. Sejam X um espaço vetorial sobre C e $(H_n)_{n \geq 1}$

uma sequência crescente de subespaço de Banach, satisfazendo às seguintes propriedades :

$$(a) \quad X = \bigcup_{n \geq 1} H_n ;$$

(b) a bola unitária fechada de H_n é compacta em H_{n+1} ;

(c) $\| \cdot \|_n \geq \| \cdot \|_{n+1}$, onde $\| \cdot \|_n$ é a norma sobre H_n .

O espaço vetorial X , munido com a mais fina das topologias localmente convexas que tornam contínuas as imersões

$H_n \hookrightarrow X$, $n \geq 1$, denomina-se espaço $\mathcal{L}N^*$.

Diz-se, ainda, que a sequência $(H_n)_{n \geq 1}$ induz sobre X uma estrutura de espaço $\mathcal{L}N^*$.

Exemplos.

1. O espaço $H(K)$ munido com a sua topologia natural é um espaço $\mathcal{L}N^*$.

2. Seja X o espaço vetorial sobre C de todas as sequências quase nulas de números complexos e consideremos a sequência $(H_n)_{n \geq 1}$,

$$\text{onde } H_n = \left\{ (z_1, \dots, z_n, 0, \dots) \mid z_i \in C, i=1, \dots, n \right\}.$$

Munindo-se H_n com a sua estrutura de Banach natural, temos que a

sequência $(H_n)_{n \geq 1}$ induz sobre X uma estrutura de espaço $\mathcal{L}N^*$.

Um sistema fundamental de vizinhanças da origem em X , é formado pelos conjuntos da forma

$\bigcap_{n \geq 1} V_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} V_n$ onde V_n é uma vizinhança da origem em H_n , $n \geq 1$.

Observação. Usaremos com frequência a expressão :

" X é um espaço $\mathcal{L}N^*$ ", $X = \bigcup_{n \geq 1} H_n$, para indicar que a sequência $(H_n)_{n \geq 1}$, induz sobre X a sua estrutura de espaço $\mathcal{L}N^*$.

Teorema 1. Seja X um espaço $\mathcal{L}N^*$, $X = \bigcup_{n \geq 1} H_n$. Um subconjunto D de X é aberto em X se, e somente se, $D \cap H_n$ é aberto em H_n , para todo $n \geq 1$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Como as imersões $v_n : H_n \longrightarrow X$ são contínuas,

$D \cap H_n = v_n^{-1}(D)$ é aberto em H_n .

($\Leftarrow$) Seja $x_0 \in D$; existe p tal que $x_0 \in H_p$. Como, por hipótese, $D \cap H_p$ é aberto, existe, em H_p , uma bola fechada $V^p(x_0)$

contida em $D \cap H_p$. Em H_{p+1} , $\bigcap_{p+1} (D \cap H_{p+1}) =$

$= H_{p+1} - D \cap H_{p+1}$ é fechado, $V^p(x_0)$ é compacto e

$$V^p(x_0) \cap \bigcap_{p+1} (D \cap H_{p+1}) = \emptyset, \text{ logo,}$$

$$\delta_{p+1} = d(V^p(x_0), \bigcap_{p+1} (D \cap H_{p+1})) > 0. \text{ Tomemos}$$

$V^{p+1}(x_0) = V^p(x_0) + W^{p+1}(0)$, onde $W^{p+1}(0)$ é a bola fechada de raio $\frac{1}{2} \delta_{p+1}$ e centro na origem, em H_{p+1} ;

$V^{p+1}(x_0)$ é, então, uma vizinhança de x_0 em H_{p+1} e temos,

ainda, $V^{p+1}(x_0)$ contém $V^p(x_0)$. Vamos mostrar que

$$V^{p+1}(x_0) \subset D \cap H_{p+1}. \text{ De fato, se } x \in V^{p+1}(x_0), \text{ exis-}$$

tem $y \in V^p(x_0)$ e $z \in W^{p+1}(0)$ tal que $x = y + z$; en-

tão, $\|x - y\|_{p+1} = \|z\|_{p+1} \leq \frac{1}{2} \delta_{p+1}$. Ora, se

$$x \notin D \cap H_{p+1}, \quad x \in \bigcap_{p+1} (D \cap H_{p+1}) \text{ e daí}$$

$$\|x - y\|_{p+1} \geq \delta_{p+1} \text{ que é contradição.}$$

Por outro lado, $V^p(x_0)$ compacto, em H_{p+1} , acarreta $V^p(x_0)$

compacto em H_{p+2} (a topologia de H_{p+1} é mais fina que a indu-

zida por H_{p+2}); $W^{p+1}(0)$ fechado em H_{p+1} acarreta $W^{p+1}(0)$

compacto em H_{p+2} , logo, $V^{p+1}(x_0)$ é compacto em H_{p+2} . Repe-

tindo o raciocínio anterior, construiremos a sucessão

$$V^p(x_0) \subset V^{p+1}(x_0) \subset \dots \subset V^{p+k}(x_0) \subset \dots \subset D$$

onde $V^{p+k}(x_0)$ é uma vizinhança de x_0 em H_{p+k} . Pela construção

dos $V^n(x_0) = x_0 + V^n(0)$, $n \geq p$, $V^n(0)$ é absolutamente

convexo e como $(V^n(0))_{n \geq p}$ é crescente vem;

$\bigcup_{n \geq p} V^n(x_0) = x_0 + \bigcup_{n \geq p} V^n(0) = x_0 + \bigcap_{n \geq p} V^n(0) \subset D$,
 portanto, D é aberto. //

Corolário 1. Seja X um espaço $\mathcal{B}N^*$, $x = \bigcup_{n \geq 1} H_n$. Um subconjunto F de X é fechado em X se, e somente se, $F \cap H_n$ é fechado em H_n , para todo $n \geq 1$.

Corolário 2. Todo espaço $\mathcal{B}N^*$ é separado.

Teorema 2. Seja X um espaço $\mathcal{B}N^*$, $X = \bigcup_{n \geq 1} H_n$. Se L é limitado em X , então, existe um índice $n \geq 1$, tal que $L \subset H_n$ e é aí limitado.

Demonstração. É suficiente provar que $L \subset \bigcap_{n \geq 1} B_n$ onde B_n é a bola unitária de H_n . Suponhamos, por absurdo, que $L \not\subset \bigcap_{n \geq 1} B_n$, para todo $n \geq 1$; então, para cada n , existe $x_n \in L$ e

$\frac{1}{n} x_n \notin B_n$; façamos $y_n = \frac{1}{n} x_n$. De $B_{n+1} \supset B_n$, segue que $y_n \notin B_j$, para todo $n \geq j$. Nosso objetivo, a seguir, é construir uma sequência crescente $(V_j)_{j \geq 1}$, onde V_j é uma vizinhança da origem em H_j , tal que $y_n \notin V_j$, quaisquer que sejam

n e j . Façamos, então, $V_1 = B_1$; como B_1 é compacto em H_2 e $y_1 \notin B_1$ segue que $\delta_1 = d_2(y_1, V_1) > 0$. Seja $B_{\frac{1}{2}\delta_1}$ a bola fechada de centro na origem e raio $\frac{1}{2}\delta_1$ em H_2 ;

$V_2 = (V_1 + B_{\frac{1}{2}\delta_1}) \cap B_2$ é vizinhança da origem em H_2 e contém

V_1 . Temos, ainda, $y_1 \notin V_2$. De fato, $y_1 \in V_2 \Rightarrow y_1 \in B_1 + B_{\frac{1}{2}\delta_1}$,

então, $y_1 = x_1 + z_1$, com $x_1 \in B_1$ e $z_1 \in B_{\frac{1}{2}\delta_1}$; daí,

$\|y_1 - x_1\|_2 = \|z_1\|_2 \leq \frac{1}{2}\delta_1$, que é contradição, pois,

$\|y_1 - x_1\|_2 \geq \delta_1$. Como V_2 é compacto em H_3 e y_1 e y_2

não pertencem a V_2 segue que $\delta_2 = \min(d_3(y_1, V_2), d_3(y_2, V_2))$

é estritamente positivo. Seja $B_{\frac{1}{2}\delta_2}$ a bola fechada de centro

na origem e raio $\frac{1}{2}\delta_2$, em H_3 . $V_3 = (V_2 + B_{\frac{1}{2}\delta_2}) \cap B_3$

é vizinhança da origem em H_3 , contém V_2 e, ainda, $y_1, y_2 \notin V_3$.

Prosseguindo com este raciocínio construímos a sequência

$(V_j)_{j \geq 1}$. Seja, então, $\bigcap_{j \geq 1} V_j = \bigcup_{j \geq 1} V_j$. Como L

é limitado existe n tal que $L \subset \bigcup_{j \geq 1} V_j$, portanto,

$y_n = \frac{1}{n} x_n \in \bigcup_{j \geq 1} V_j$, ou seja, $y_n \in V_j$ para algum in-

dice j , que é absurdo. //

Definição 2. Um espaço localmente convexo, separado, denomina-se espaço de Montel, se todo limitado é relativamente compacto.

Como consequência do teorema 2, segue que todo espaço $\mathcal{L}N^*$ é um espaço de Montel. Temos, precisamente, o seguinte

Corolário 1. Seja X um espaço $\mathcal{L}N^*$, $X = \bigcup_{n \geq 1} H_n$. Se L é

limitado em X , então, L é relativamente compacto em X .

Sabe-se, da teoria geral dos espaços localmente convexos, que todo espaço de Montel é sequencialmente completo. Resulta daí que todo espaço $\mathcal{L}N^*$ é sequencialmente completo. Em particular, todo espaço $H(K)$ é sequencialmente completo.

Observação. Na realidade, temos um resultado mais forte, isto é, podemos mostrar que todo espaço $\mathcal{L}N^*$ é completo (por filtros).

Para isto, demonstra-se que :

- 1 - todo espaço $\mathcal{L}N^*$ é reflexivo ;
- 2 - o dual forte X' de X é um espaço de Fréchet;
- 3 - o dual forte X'' de X' é completo (utiliza-se aqui o fato de que X' é bornológico) ([5] pag. 223).

Para os nossos objetivos, é suficiente que o espaço seja sequencialmente completo.

Corolário 2. Seja X um espaço $\mathcal{L}N^*$, $X = \bigcup_{n \geq 1} H_n$. Uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ converge em X se, e somente se, existe H_m tal que $x_n \in H_m$, para todo $n \geq 1$, e $(x_n)_{n \geq 1}$ converge em H_m .

Demonstração.

($\Leftarrow$) Imediata.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $x_n \rightarrow x$ em X ; $L = \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}$ é limitado em X , logo, existe um índice $m \geq 2$, tal que $L \subset H_{m-1}$ e é aí limitado; segue que L é relativamente compacto em H_m , logo, $(x_n)_{n \geq 1}$ admite uma subsequência $(x_{n_q})_{q \geq 1}$ que converge a y em H_m ; portanto, $(x_{n_q})_{q \geq 1}$ converge a y em X , daí, $x = y$. Segue que $(x_n)_{n \geq 1}$ admite x como único ponto limite em H_m ; portanto, $x_n \rightarrow x$ em H_m . //

O corolário acima, aplicado ao espaço $H(K)$, nos fornece o seguinte importante resultado: " Uma sequência $(\dot{y}_n)_{n \geq 1}$ de elementos de $H(K)$, converge a $\dot{y} \in H(K)$ se, e somente se, existe um aberto $D \supset K$ tal que $y_n \in H(D)$, $n \geq 1$, $y \in H(D)$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ converge a y uniformemente sobre D ".

Proposição. Sejam X um espaço $\mathcal{B}N^*$ e Y um espaço localmente convexo. Uma aplicação linear $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, for sequencialmente contínua.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Imediata.

($\Leftarrow$) Sejam $X = \bigcup_{n \geq 1} H_m$ e $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de H_m que converge a x ; então, $f(x_n)$ converge a $f(x)$, logo, f é contínua sobre H_m , pois, H_m é um espaço de Banach. Como f é contí-

nua sobre cada H_m , segue que f é contínua sobre X .

§ 3 . Fórmula de Fantapié . Iniciaremos este parágrafo, dando dois exemplos importantes de funções holomorfas.

Exemplo 1.

Sejam D e D' abertos em S . Uma aplicação $u : D \rightarrow H(D')$ é holomorfa se, e somente se, a função

$(t, x) \in D \times D' \mapsto u(t, x) \in C$ é parcialmente holomorfa e para todo $t_0 \in D$ existe uma vizinhança $V(t_0) \subset D$ tal que $u(t, x)$ é limitada em $V(t_0) \times D'$.

Solução.

($\Rightarrow$) Como u é localmente limitada, dado $t_0 \in D$, existem

$V(t_0) \subset D$ e $M_{t_0} > 0$ tal que

$$|u(t, x)| \leq \|u(t)\| \leq M_{t_0} \quad \text{para todo}$$

$(t, x) \in V(t_0) \times D'$.

Como $u(t) \in H(D')$, segue que $u(t, x)$ é parcialmente holomorfa em x ; para mostrar a holomorfia em t procede-se do mesmo modo como no exemplo do § 3, cap. I.

($\Leftarrow$) Demonstra-se de modo análogo ao exemplo do § 3, cap. I.

Exemplo 2.

Uma aplicação $u : D \rightarrow H(K)$, D aberto em S , é holomorfa se, e somente se, existe $u(t, x)$ holomorfa num aberto que contém $D \times K$, de modo que $u(\dot{t}, x) = u(\dot{t})$.

Solução.

($\Rightarrow$) Dado $t_0 \in D$, existem $V(t_0) \subset D$ e $D_{t_0} \supset K$ tal que $u : \overset{0}{V}(t_0) \rightarrow H(D_{t_0})$ é holomorfa (proposição 14, § 3 do cap. I). Segue do exemplo 1, que $u_{t_0}(t, x) = u(\dot{t})(x)$ é parcialmente holomorfa em $\overset{0}{V}_{t_0} \times D_{t_0}$ e $u_{t_0}(\dot{t}, x) = u(\dot{t})$. A família $(u_{t_0})_{t_0 \in D}$ define, então, uma função $u(t, x)$ holomorfa num aberto que contém $D \times K$ e $u(\dot{t}, x) = u(\dot{t})$.

($\Leftarrow$) Para todo $t_0 \in D$, $\{t_0\} \times K$ é compacto; existem então, $V(t_0) \subset D$, $D_{t_0} \supset K$ e $M_{t_0} > 0$ tal que $|u(t, x)| \leq M_{t_0}$ para $(t, x) \in V(t_0) \times D_{t_0}$. Do exemplo 1, $t \in \overset{0}{V}(t_0) \mapsto u(\dot{t}, x) \in H(D_{t_0})$ é holomorfa, logo, $t \in D \mapsto u(\dot{t}, x) \in H(K)$ também é holomorfa. //

Estamos, agora, em condições de demonstrar o teorema central dos operadores analíticos, ou seja, o teorema de representação de Fantapié. Antes, daremos o seguinte

Lema (De representação de $\dot{y} \in H(K)$). Se $\dot{y} \in H(K)$,

então,

$$\dot{y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{i}{z-t} y(z) dz$$

onde Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset D_y$ tal que $K \subset \overset{\circ}{H}$, sendo D_y o domínio de um representante y de $\dot{y}$.

Demonstração. A função

$$z \in \bigcup_S K \mapsto \frac{i}{z-t} \in H(K) \text{ é holomorfa, pois,}$$

$$(z, t) \in S \times S - \Delta \mapsto \frac{1}{z-t} \text{ é parcialmente holomorfa e}$$

$$S \times S - \Delta \supset \bigcup_S K \times K \text{ (} \Delta \text{ é a diagonal de } S \times S \text{)}.$$

Por outro lado, se $\dot{y} \in H(K)$, $y \in H(D_n)$ para algum índice n . ($H(K) = \bigcup_{n \geq 1} H(D_n)$). A função

$$z \in \bigcup_S \bar{D}_{n+1} \mapsto \left(\frac{1}{z-t} \right)_{n+1} \in H(D_{n+1}) \text{ é holomorfa,}$$

$$\text{pois, } \frac{1}{z-t} \text{ é parcialmente holomorfa em } \bigcup_S \bar{D}_{n+1} \times D_{n+1} \text{ e}$$

$$\text{para cada } z_0 \in \bigcup_S \bar{D}_{n+1} \text{ existe } V(z_0), \text{ tal que } \frac{1}{z-t} \text{ é limi-}$$

tada em $V(z_0) \times D_{n+1}$. Então:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{z-t} \right)_{n+1} y(z) dz \in H(D_{n+1}), \text{ onde } \Gamma \text{ é}$$

o bordo orientado de um compacto $H \subset D_n$, tal que

$$\bar{D}_{n+1} \subset \overset{\circ}{H}.$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{z-t} \right)_{n+1} y(z) dz \right)(x) =$$

$$= v_x \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{z-t} \right)_{n+1} y(z) dz \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z-x} y(z) dz = y(x), \text{ para todo } x \in D_{n+1};$$

$$\text{logo, } y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{z-t} \right)_{n+1} y(z) dz.$$

Como a imersão $H(D_{n+1}) \hookrightarrow H(K)$ é linear e contínua, segue

$$\text{que } \dot{y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{i}{z-t} y(z) dz //$$

Teorema (Fórmula de Fantapié) Seja Y um espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo. Se $f : H(K) \rightarrow Y$ é um operador linear e contínuo, então

$$f(\dot{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(z) y(z) dz$$

onde u é uma aplicação com valores em Y , holomorfa em $\bigcup_s K$ e tal que $u(\infty) = 0$ se $\infty \in \bigcup_s K$; Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset D_y$, $\overset{\circ}{H} \supset K$, sendo D_y o domínio de um representante y de $\dot{y}$.

Demonstração. Pelo lema

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{i}{z-t} y(z) dz. \text{ Como } f \text{ é linear e contínuo,} \\ f(\dot{y}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f\left(\frac{i}{t-z}\right) y(t) dt. \text{ Como a aplicação} \\ t \in \bigcup_s K &\mapsto \frac{i}{t-z} \in H(K) \text{ é holomorfa, vem que} \\ u : \bigcup_s K &\rightarrow Y, \text{ dada por : } u(t) = f\left(\frac{i}{t-z}\right) \text{ é holo-} \\ &\text{morfa e nula no infinito se } \infty \notin K. // \end{aligned}$$

Definição. Seja $f : H(K) \rightarrow Y$ um operador linear e contínuo.

A aplicação holomorfa $u : \bigcup_s K \rightarrow Y$

dada por : $u(t) = f\left(\frac{i}{t-z}\right)$, $t \in \bigcup_s K$, denomina-se indicatriz de f .

Consideremos, agora, o espaço $\mathcal{H}(D, Y)$ das funções holomorfas em D e nulas no infinito se o infinito pertence a D , com valores no espaço localmente convexo, separado, e sequencialmente completo Y . Quando $Y = \mathbb{C}$ escreveremos simplesmente $\mathcal{H}(D)$. Vamos mostrar a seguir que se $u \in \mathcal{H}\left(\bigcup_s K, Y\right)$, existe um único operador linear e contínuo $f : H(K) \rightarrow Y$ que tem por indicatriz a função u . Temos, precisamente, a seguinte

Proposição 1. A aplicação

$\phi : f \in \mathcal{L}(H(K), Y) \longmapsto u \in \mathcal{H}\left(\bigcup_s K, Y\right)$ onde $u(t) = f\left(\frac{i}{t-z}\right)$, $t \in \bigcup_s K$, é um isomorfismo algébrico de $\mathcal{L}(H(K), Y)$ sobre $\mathcal{H}\left(\bigcup_s K, Y\right)$. (Estamos indicando por $\mathcal{L}(H(K), Y)$ o espaço vetorial dos operadores lineares e contínuos de $H(K)$ em Y).

Demonstração.

1) A linearidade de ϕ é imediata

2) ϕ é injetora. Suponhamos que $\phi(f) = u = 0$

De

$$f\left(\frac{i}{y}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(z) y(z) dz \text{ e pelo fato de } u = 0$$

segue que

$$f(\dot{y}) = 0 \quad \text{para todo } \dot{y} \in H(K), \text{ logo, } f = 0.$$

3) ϕ é sobrejetora. Seja $u \in \mathcal{B}_s(K, Y)$; dado $\dot{y} \in H(K)$

consideremos a integral $\int_{\Gamma} u(z) y(z) dz$ onde Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset D_y$ e $\overset{o}{H} \supset K$, sendo D_y o domí-

nio do representante y de $\dot{y}$. É fácil verificar que a integral acima não depende do representante y de $\dot{y}$, escolhido. Consideremos, então, o operador linear

$$f(\dot{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(z) y(z) dz$$

de $H(K)$ em Y . Vamos mostrar que f é contínuo e, para isto,

basta mostrar que a restrição de f a cada $H(D_n)$ é contínua.

Suponhamos $y \in H(D_n)$; seja p uma semi-norma contínua sobre

Y ; temos:

$$p(f(y)) = p\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(z) y(z) dz\right) \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} |\Gamma| \max_{z \in \Gamma} p(u(z)) \cdot \|y\|_n, \text{ portanto,}$$

$$p(f(y)) \leq M \|y\|_n \text{ para todo } y \in H(D_n), \text{ onde}$$

$$M = \frac{|\Gamma|}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} p(u(z)) \text{ e } \Gamma \text{ é o bordo orientado de}$$

um compacto $H \subset D_n$ e $\overset{o}{H} \supset K$ (Observamos que podemos to-

mar o mesmo Γ para todo $y \in H(D_n)$). Da desigualdade

acima, segue a continuidade de //

Observação. Munindo-se $\mathcal{H}(H(K), Y)$ com a topologia da convergência uniforme sobre as partes limitadas de $H(K)$ e $\mathcal{H}(\bigcup_s K, Y)$ com a topologia da convergência uniforme sobre as partes compactas de $\bigcup_s K$, demonstra-se que o isomorfismo ϕ é um isomorfismo topológico.

Exemplos.

3. Consideremos o espaço $H(\{z_0\})$ onde $z_0 \in \mathbb{C}$. A indicatriz do funcional linear $f: \dot{y} \in H(\{z_0\}) \mapsto y(z_0)$ é dada

por $u(t) = f\left(\frac{1}{t-z}\right) = \frac{1}{t-z_0}$ que é holomorfa em

$\bigcup_s \{z_0\}$ e $u(\infty) = 0$. Logo, f é contínuo

4. A indicatriz do funcional linear

$f: \dot{y} \in H(\{z_0\}) \mapsto y^{(n)}(z_0) \in \mathbb{C}$ é dada por

$u(t) = f\left(\frac{1}{t-z}\right) = \frac{n!}{(t-z_0)^{n+1}}$ que é holomorfa em

$\bigcup_s \{z_0\}$ e $u(\infty) = 0$. Então, f é contínuo

5. Seja $K = \bigcup_{j=1}^n \{z_j\}$, $z_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$. O funcional

linear é contínuo sobre $H(K)$, cuja indicatriz é dada por

$u(z) = \frac{1}{p(z)}$ onde $p(z) = (z-z_1) \dots (z-z_n)$, de-

nomina-se diferença dividida de ordem $n-1$ e se indica por

$[z_1, \dots, z_n]$ ou por Δ^{n-1} . Então,

$$[z_1, \dots, z_n] y = \Delta^{n-1} y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{p(z)} y(z) dz,$$

onde Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset D_y$ e $\overset{\circ}{H} \supset K$.

Quando $z_i \neq z_j$ para $i \neq j$, temos :

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{(z-z_1)\dots(z-z_n)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z-z_j} \cdot \frac{1}{(z_j-z_1)\dots(\overbrace{z_j-z_j})\dots(z_j-z_n)}$$

daí

$$\begin{aligned} [z_1, \dots, z_n] \dot{y} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{y(z)}{z-z_j} \frac{1}{(z_j-z_1)\dots(z_j-z_n)} dz = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{y(z_j)}{(z_j-z_1)\dots(\overbrace{z_j-z_j})\dots(z_j-z_n)} \end{aligned}$$

Quando $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, vem :

$$[z_1, \dots, z_n] \dot{y} = \frac{1}{(n-1)!} y^{(n-1)}(z_1).$$

(Estamos considerando

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(z_j-z_1)\dots(\overbrace{z_j-z_j})\dots(z_j-z_n)} = \\ &= \frac{1}{(z_j-z_1)\dots(z_j-z_{j-1})(z_j-z_{j+1})\dots(z_j-z_n)} \end{aligned}$$

Temos a seguinte propriedade :

$$\triangle_{n-1} z^m = \begin{cases} 0 & \text{se } m < n-1. \\ 1 & \text{se } m = n-1. \end{cases}$$

De fato, seja Γ o bordo orientado de um disco $B_R(0)$

tal que $z_j \in B_R(0)$, $j = 1, \dots, n$; R é tomado de modo

que $\frac{1}{z_j} \notin B_{\frac{1}{R}}(0)$. Fazendo $z = \frac{1}{w}$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^m}{(z - z_1) \dots (z - z_n)} dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{w^m}}{(\frac{1}{w} - z_1) \dots (\frac{1}{w} - z_n)} \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{w^{n-m-2}}{(1 - wz_1) \dots (1 - wz_n)} dw \quad \text{onde } \Gamma_1 \text{ é o} \end{aligned}$$

bordo orientado do disco $B_{\frac{1}{R}}(0)$.

a) Se $n - m - 2 \geq 0$ ou $m < n - 1$, o integrando da última integral é holomorfa numa vizinhança da origem, logo,

$$\triangle_{n-1} z^m = 0 \quad \text{se } m < n - 1$$

b) Se $m = n - 1$,

$$\triangle_{n-1} z^m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{w} \frac{1}{(1 - wz_1) \dots (1 - wz_n)} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w} dw = f(0) = 1.$$

A seguir, vamos dar alguns exemplos de operadores lineares e contínuos de $H(K)$ em $H(K_1)$. Lembramos inicialmente que uma aplicação

$$u : \bigcup_s K \rightarrow H(K_1)$$

é holomorfa se, e somente se, $u(t, x)$ é parcialmente holomorfa num aberto que contém $\bigcup_s K \times K_1$.

Exemplos:

6. A indicatriz da aplicação identidade $I : H(K) \rightarrow H(K)$, é:

$$u(t) = I \left(\frac{1}{t-z} \right) = \frac{1}{t-z} ; \quad \frac{1}{t-x} \quad \text{é parcialmente holomorfa}$$

em $S \times S - \Delta \supset \bigcup_s K \times K$. Logo, I é um operador linear e contínuo.

7. A indicatriz do operador derivação

$$D^n : H(K) \rightarrow H(K) \quad \text{é} :$$

$$u(t) = D^n \left(\frac{1}{t-z} \right) = n! \frac{1}{(t-z)^{n+1}} ; \quad \frac{n!}{(t-x)^{n+1}}$$

é parcialmente holomorfa em $S \times S - \Delta$, logo, D^n é um operador linear e contínuo.

Para finalizar este capítulo, vamos dar uma caracterização muito útil para que um operador linear $f : H(K) \rightarrow H(K_1)$ seja contínuo. Temos, então, a

Proposição 2. Um operador linear $f : H(K) \rightarrow H(K_1)$ é contínuo se, e somente se, existe $u(t, x)$ holomorfa num aberto contendo $\bigcup_s K \times K_1$, $u(\infty, x) = 0$ e tal que

$$f(\dot{y})(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t, x) y(t) dt$$

para x em volta de K_1 ; Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset D_y$ e $H \supset K$.

Demonstração. ($\Rightarrow$)

$$f(\dot{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t) y(t) dt; \text{ como } u : \bigcup_s K \rightarrow H(K_1)$$

é holomorfa, segue que existe $u(t, x)$ holomorfa num aberto contendo $\bigcup_s K \times K_1$ e tal que $u(\dot{t}, x) = u(t)$. Por outro lado, é fácil ver que existe um aberto $D_{\Gamma} \supset K_1$ tal que $t \in \Gamma \Rightarrow u(\dot{t}, x) \in H(D_{\Gamma})$ é contínua. Então,

$$f(\dot{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\dot{t}, x) y(t) dt \in H(D_{\Gamma})$$

$$f(\dot{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\dot{t}, x) y(t) dt, \text{ logo,}$$

$$f(\dot{y})(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t, x) y(t) dt \text{ para todo } x \in D_{\Gamma}.$$

($\Leftarrow$) Temos $t \in \mathbb{C}_s \rightarrow u(\dot{t}, x)$ é holomorfa e nulo no infinito, logo, define um operador linear e contínuo.

$$\textcircled{1} \quad F(\dot{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\dot{t}, x) y(t) dt. \text{ Por outro lado,}$$

de

$$f(\dot{y})(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t, x) y(t) dt$$

vem :

$$\textcircled{2} \quad f(\dot{y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t, x) y(t) dt$$

De $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ segue que $F = f$; portanto, f é linear e contínuo. //

CAPÍTULO III

TRANSFORMADA DE FOURIER - BOREL

§ 1 . Transformada de Fourier - Borel. Seja $K \neq \emptyset$ um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. A aplicação

$$\alpha \in \mathbb{C} \mapsto e^{\alpha t} \in H(K)$$

é holomorfa, pois, $e^{\alpha t}$ é parcialmente holomorfa em $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \supset \mathbb{C} \times K$.

Definição. Seja $f : H(K) \rightarrow Y$ um operador linear e contínuo , onde Y é um espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo. A aplicação holomorfa

$$v : \mathbb{C} \rightarrow Y$$

dada por

$$v(\alpha) = f(e^{\alpha t}), \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

denomina-se transformada de Fourier - Borel do operador f .

Proposição. Se v é a transformada de Fourier - Borel do operador linear e contínuo $f : H(K) \rightarrow Y$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe L_ε limitado em Y tal que

$$v(\alpha) \in L_\varepsilon \quad \text{e} \quad |\alpha| \varepsilon + \sup_{t \in K} R(\alpha t)$$

para todo α de $\mathbb{C}$.

Demonstração. Seja B_D a bola unitária e fechada em $H(D)$, onde D é um aberto que contém K . Como f é contínuo, existe um limitado absolutamente convexo e fechado L_D em Y , tal que

$$\|f(y)\|_{L_D} \leq \|y\|_D \text{ para todo } y \text{ de } H(D).$$

Tomando-se $y = e^{\alpha t} \in H(D)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \|f(e^{\alpha t})\|_{L_D} &\leq \sup_{t \in D} |e^{\alpha t}| = \sup_{t \in D} e^{R(\alpha t)} = \\ &= e^{\sup_{t \in D} R(\alpha t)}. \end{aligned}$$

Fazendo $D = \overset{0}{V}_\xi(K)$, para cada $t \in D$, existe $z \in K$ tal que

$$|t - z| < \xi. \text{ Daí,}$$

$$R(\alpha t) - R(\alpha z) = R(\alpha(t - z)) \leq |\alpha(t - z)| \leq |\alpha|\xi,$$

$$\text{logo, } R(\alpha t) \leq |\alpha|\xi + R(\alpha z) \leq |\alpha|\xi + \sup_{z \in K} R(\alpha z),$$

Portanto,

$$\textcircled{2} \quad \sup_{t \in D} R(\alpha t) \leq |\alpha|\xi + \sup_{z \in K} R(\alpha z).$$

Substituindo $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$, segue a proposição. //

Seja $\hat{K}$ a envoltória convexa fechada de K e tomemos $\alpha \notin \hat{K}$; existe um único $\hat{\alpha} \in \hat{K}$ tal que $|\alpha - \hat{\alpha}| = d(\alpha, \hat{K})$.

No que segue, indicaremos por $\bigwedge(\alpha)$ a semi-reta $t(\alpha - \hat{\alpha})$,

$t \geq 0$, e por $\alpha \times \beta$ o produto interno entre α e β ; H_{α_0} ,

$\alpha_0 \notin \hat{K}$, indicará o semi-plano determinado pela desigualdade

$$(\alpha - \alpha_0) \times (\alpha_0 - \hat{\alpha}_0) \geq 0.$$

Lema 1. Seja $v \in \mathcal{H}_K(C, Y)$ (definição na pag. 53). Então, a fórmula

$$u_{\alpha_0}(\alpha) = \int_{\Lambda(\alpha_0)} e^{-\alpha\lambda} v(\lambda) d\lambda$$

define uma função contínua no semi-plano H_{α_0} e holomorfa no semi-plano aberto $H_{\alpha_0}^o$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existem L_ε limitado em Y e $z \in K$ tal que

$v(\lambda) \in L_\varepsilon$ e $|\lambda|\varepsilon + R(\lambda z)$ para todo λ de C . Então:

$$(1) \quad e^{-\alpha\lambda} v(\lambda) \in L_\varepsilon \quad e \quad |\lambda|\varepsilon + R(\lambda(z - \alpha)).$$

Fazendo $\lambda = t(\alpha_0 - \hat{\alpha}_0)$, vem:

$$\begin{aligned} R(\lambda(z - \alpha)) &= R(t(\alpha_0 - \hat{\alpha}_0)(z - \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_0 - \alpha_0 + \alpha_0 - \alpha)) = \\ &= t(\alpha_0 - \hat{\alpha}_0) \times (z - \hat{\alpha}_0) = t|\alpha_0 - \hat{\alpha}_0|^2 + t(\hat{\alpha}_0 - \alpha_0) \times \\ &(\alpha - \alpha_0); \end{aligned}$$

portanto,

$$(2) \quad R(\lambda(z - \alpha)) \leq -t|\alpha_0 - \hat{\alpha}_0|^2 \quad \text{para todo } \alpha \in H_{\alpha_0}.$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$(3) \quad e^{-\alpha\lambda} v(\lambda) \in L_\varepsilon \quad e \quad |\lambda|(\varepsilon - |\alpha_0 - \hat{\alpha}_0|) \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda(\alpha_0).$$

Fazendo em (3) $\varepsilon < |\alpha_0 - \hat{\alpha}_0|$, segue o lema. //

Lema 2. A função $\hat{u} : \hat{C}_s \hat{K} \rightarrow Y$, dada por

$$\hat{u}(\alpha) = \int_{\Lambda(\alpha)} e^{-\alpha\lambda} v(\lambda) d\lambda$$

é holomorfa em $\hat{C}_s \hat{K}$ e $\hat{u}(\infty) = 0$.

Demonstração. Temos :

$$v(\lambda) \in L_\xi e^{\xi|\lambda| + R(\lambda z)} \subset L_\xi e^{\xi|\lambda| + |\lambda||z|} \subset L_\xi e^{|\lambda|A}$$

onde $A \geq \xi + |z|$. Pela desigualdade de Cauchy,

$$v^{(n)}(0) \in n! L_\xi \frac{e^{RA}}{R^n}, \text{ com } R \text{ arbitrário. Fazendo}$$

$RA = n$ vem :

$$v^{(n)}(0) \in n! L_\xi \frac{e^n}{\left(\frac{n}{A}\right)^n} = L_\xi A^n \frac{e^n}{n^n} n! \text{ e pela desigualdade de Stirling,}$$

$$\textcircled{1} \quad v^{(n)}(0) \in L_\xi A^n C_1^n = L_\xi C^n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Segue de $\textcircled{1}$ que

$$\sum_{n \geq 0} v^{(n)}(0) \frac{1}{\alpha^{n+1}}$$

define uma função holomorfa numa vizinhança do infinito e que

se anula no infinito.

Segue, ainda, de $\textcircled{1}$ que

$$\| e^{-\alpha\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n \|_{L_\xi} \leq e^{-R(\alpha\lambda) + C|\lambda|},$$

portanto,

$$\int_{\Lambda(\alpha_0)} e^{-\alpha\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n d\lambda, \text{ converge, absolutamente}$$

te, no semi-plano determinado pela desigualdade

$\alpha \text{ re}(\alpha_0 - \alpha_0) > c|\alpha_0 - \alpha_0|$. Então:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda(\alpha_0)} e^{-\alpha\lambda} v(\lambda) d\lambda &= \int_{\lambda(\alpha_0)} e^{-\alpha\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n d\lambda = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \int_{\lambda(\alpha_0)} e^{-\alpha\lambda} \lambda^n d\lambda = \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \frac{n!}{\alpha^{n+1}} = \\ &= \sum_{n \geq 0} v^{(n)}(0) \frac{1}{\alpha^{n+1}}. \end{aligned}$$

Segue daí que a família $(u_{\alpha_0})_{\alpha_0 \in \hat{K}}$ define uma função holomorfa:

$\hat{u} : \bigcup_{\alpha_0 \in \hat{K}} K \rightarrow Y$, tal que

$$\hat{u}(\alpha) = \sum_{n \geq 0} v^{(n)}(0) \frac{1}{\alpha^{n+1}}, \text{ para } |\alpha| > R, \text{ onde } R \text{ é um}$$

número real conveniente. Temos, então:

$\hat{u}(\alpha) = u_{\alpha_0}(\alpha)$, para $\alpha \in H_{\alpha_0}^0$ e daí, pela continuidade de

u_{α_0} sobre H_{α_0} , segue que

$$\hat{u}(\alpha_0) = \int_{\lambda(\alpha_0)} e^{-\alpha_0\lambda} v(\lambda) d\lambda \text{ para todo } \alpha_0 \in \hat{K} \text{ e o lema}$$

está demonstrado.

Como consequência imediata do lema anterior temos o

seguinte

Corolário. A aplicação $\hat{u}$ do lema anterior é a restrição a

$\bigcup_{\alpha_0 \in \hat{K}} K$ da indicatriz u do operador f .

Demonstração.

$$\begin{aligned}\hat{u}(\alpha) &= \int_{\Lambda(\alpha)} e^{-\alpha \lambda} v(\lambda) d\lambda = \int_{\Lambda(\alpha)} e^{-\alpha \lambda} f(e^{\lambda \cdot x}) d\lambda = \\ &= f\left(\int_{\Lambda(\alpha)} e^{\lambda(\cdot x - \alpha)} d\lambda\right) = f\left(\frac{e^{\lambda(\cdot x - \alpha)}}{x - \alpha} \Big|_{\Lambda(\alpha)}\right) = \\ &= f\left(\frac{i}{\alpha - x}\right) = u(\alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in \hat{K}_s. \quad //\end{aligned}$$

Seja K um subconjunto compacto de C . Indicaremos por $\mathcal{H}_K(C, Y)$ o espaço vetorial das funções holomorfas em C , com valores no espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo Y , que satisfazem a condição:

$v \in \mathcal{H}_K(C, Y) \iff$ dado $\varepsilon > 0$, existe L_ε limitado em Y tal que $v(\alpha) \in L_\varepsilon e^{|\alpha|\varepsilon + \sup_{t \in K} R(\alpha, t)}$ para todo α de C .

Teorema. Se K é um subconjunto compacto e convexo de C , então, a aplicação

$$\phi : f \in \mathcal{L}(H(K), Y) \mapsto v \in \mathcal{H}_K(C, Y), \text{ onde } v \text{ é}$$

a transformada de Fourier - Borel de f , é um isomorfismo algébrico.

Demonstração.

a) ϕ é linear. Evidente

b) ϕ é injetora. De fato, se $v(\alpha) = f(e^{\alpha \cdot t}) = 0$, para todo α de C ,

$$\hat{u}(\alpha) = \int_{\Lambda(\alpha)} e^{-\alpha\lambda} v(\lambda) d\lambda = 0 \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ logo,}$$

a indicatriz de f é nula, portanto, $f = 0$.

c) ϕ é sobrejetora. Seja $v \in \mathcal{H}_K(C, Y)$. Do lema 2, segue que

$$u(\alpha) = \int_{\Lambda(\alpha)} e^{-\alpha\lambda} v(\lambda) d\lambda$$

é holomorfa em $\mathbb{C}_S^K$ e nula no infinito. Seja

$f \in \mathcal{D}(H(K), Y)$, cuja indicatriz é u . Vamos mostrar que

v é a transformada de Fourier - Borel de f . Temos :

$$u(\alpha) = \sum_{n \geq 0} v^{(n)}(0) \frac{1}{\alpha^{n+1}} \quad \text{para } |\alpha| > \sup_{t \in K} |t|$$

(Veja demonstração do lema 2). Seja Γ o bordo orientado de uma circunferência de centro na origem e raio maior que

$\sup_{t \in K} |t|$. Então :

$$\begin{aligned} f(e^{\alpha t}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t) e^{\alpha t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{t^{n+1}} e^{\alpha t} dt = \\ &= \sum_{n \geq 0} v^{(n)}(0) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\alpha t}}{t^{n+1}} dt \right) = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n = v(\alpha), \quad \text{portanto, } v(\alpha) = f(e^{\alpha t}) \end{aligned}$$

para todo α de C . O teorema está demonstrado. //

Observação. Se no teorema anterior supusermos, apenas que, $\mathbb{C}_K$ seja conexo, então a aplicação linear 0 do teorema anterior, é injetora.

§ 2 . Aplicação de tipo exponencial nulo.

Definição. Uma aplicação holomorfa $v : C \rightarrow Y$, onde Y é um espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo, denomina-se de tipo exponencial nulo se para todo $\varepsilon > 0$, existe um limitado $L_\varepsilon \subset Y$ tal que

$$v(\alpha) \in L_\varepsilon \text{ e } |\alpha| \leq \varepsilon$$

para todo α de C .

Proposição. Uma aplicação holomorfa $v : C \rightarrow Y$ é de tipo exponencial nulo se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um limitado absolutamente convexo e fechado L_ε em Y , tal que

$$v^{(n)}(0) \in \varepsilon^n L_\varepsilon$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Como v é holomorfa em C , vem :

$$v(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n, \text{ para todo } \alpha \text{ de } C.$$

Então :

$$v(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n \in L_\xi \quad \sum_{n \geq 0} \frac{\xi^n}{n!} |\alpha|^n$$

ou seja,

$$v(\alpha) \in L_\xi \quad e^{\xi|\alpha|} \quad \text{para todo } \alpha \text{ de } C.$$

($\Rightarrow$) Como v é de tipo exponencial nulo, segue que dado $\xi > 0$, existe um limitado L_ξ em Y , tal que

$$v(\alpha) \in L_\xi \quad e^{|\alpha|\xi} + \sup_{t \in K} R(\alpha t), \quad \text{onde } K = \{0\}.$$

Então :

$$\int_{\Lambda(\alpha)} e^{-\alpha\lambda} v(\lambda) d\lambda = \sum_{n \geq 0} \frac{v^{(n)}(0)}{\alpha^{n+1}} \quad \text{converge para}$$

todo $|\alpha| > 0$. Dado $\xi > 0$, seja $\alpha \in C$ tal que

$0 < |\alpha| < \xi$. Por outro lado, existe um limitado absoluta-

mente convexo L_ξ tal que

$$\frac{v^{(n)}(0)}{\alpha^{n+1}} \in \frac{1}{\alpha} L_\xi \quad \text{para todo } n \geq 0, \text{ portanto,}$$

$$v^{(n)}(0) \in \alpha^n L_\xi \subset \xi^n L_\xi, \quad \text{para todo } n \geq 0. //$$

Corolário 1. (Teorema clássico). Uma função inteira

$v : C \rightarrow C$ é de tipo exponencial nulo se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \quad \text{onde } a_n = v^{(n)}(0), \quad n \geq 0.$$

Corolário 2. Seja K um compacto de C e $v : C \rightarrow H(K)$

uma aplicação holomorfa. Se v é de tipo exponencial nulo, en-

tão,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n(x)|} = 0, \text{ para todo } x \in K, \text{ onde}$$

$$\alpha_n = v^{(n)}(0), n \geq 0.$$

CAPÍTULO IV

DESENVOLVIMENTO DE PINCHERLE DE UM OPERADOR LINEAR

§ 1. Desenvolvimento de Pincherle de um operador linear. O objetivo d'êste parágrafo é caracterizar os operadores lineares e contínuos de $H(K)$ em $H(K)$, K um compacto de C , que são desenvolvíveis em série de Pincherle, através de sua indicatriz e da sua transformada de Fourier - Borel.

Observaremos, inicialmente, que o espaço $H(K)$, munido com a operação de multiplicação

$$(\dot{y}, \dot{w}) \in H(K) \times H(K) \longmapsto (\dot{y} \dot{w}) \in H(K)$$

é uma álgebra; se K é um compacto de C , $H(K)$ é uma álgebra com elemento unidade.

Observamos, ainda, que neste parágrafo e nos dois seguintes, sempre que nos referirmos ao espaço $H(K)$, estaremos supondo que K é um compacto de C .

Definição. Seja f um operador linear de $H(K)$ em $H(K)$.

Diz-se que f é desenvolvível em série de Pincherle se existe uma

família $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de elementos de $H(K)$ tal que

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)}$$

para todo y de $H(K)$; $y^{(n)}$ é a derivada n -ésima de y em $H(K)$.

Indicaremos por $\mathcal{P}(K)$ a classe dos operadores lineares de $H(K)$ em $H(K)$, que são desenvolvíveis em série de Pincherle.

Mostraremos, inicialmente, que todo operador linear e contínuo de $H(K)$ em $H(K)$ é "parcialmente" desenvolvível em série de Pincherle. Temos, precisamente, a seguinte

Proposição 1. Seja f um operador linear e contínuo de $H(K)$ em $H(K)$. Então

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)}$$

para todo $y \in H(V_\delta(K))$, onde $V_\delta(K)$ é a vizinhança fechada de K , de raio igual ao diâmetro δ de K , e $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ é uma família de elementos de $H(K)$.

Demonstração. Se $y \in H(V_\delta(K))$, $y \in H(D)$, onde D é um aberto que contém $V_\delta(K)$. Temos:

$d(\bigcup D, K) = \delta + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Seja $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$;

$B_{\delta + \frac{2}{3}}(x) \subset D$ para $x \in V_{\varepsilon'}(K) = D'$. Pela desigualdade de Cauchy

$$\textcircled{1} \quad \left| \frac{y^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq \frac{\|y\|_D}{\left(\delta + \frac{2}{3}\varepsilon\right)^n}$$

Por outro lado, existem um aberto $D'' \supset K$ e $M > 0$ tais que

$$\textcircled{2} \quad \|f(y)\|_{D''} \leq M \|y\|_D.$$

De $\textcircled{1}$, segue que

$$y(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{y^{(n)}(x)}{n!} (t-x)^n \text{ uniformemente em}$$

$t \in V_\varepsilon(K)$ e uniformemente em $x \in V_\varepsilon(K)$. Logo,

$$f(\dot{y}) = \sum_{n \geq 0} \frac{y^{(n)}(x)}{n!} f((t-x)^n) \text{ uniformemente em}$$

$x \in D'$. O aberto D'' pode ser escolhido de modo que

$D'' \subset D'$. Temos:

$$f(\dot{y})(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{y^{(n)}(x)}{n!} f((t-x)^n)(u) \text{ unifor-}$$

memente em $u \in D''$. Segue, então, de $\textcircled{2}$ que

$$f(\dot{y})(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{y^{(n)}(x)}{n!} f((t-x)^n)(x) \text{ unifor-}$$

memente para todo $x \in D''$, ou seja,

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)} \text{ para } y \in H(V_\delta(K), \text{ onde}$$

$\alpha_n(x) = f((t-x)^n)(x)$ é holomorfa em volta de K .

A proposição está demonstrada. //

Observação. Quando K se reduz a um ponto, $\delta = 0$ e $V_\delta(K) = K$.

Em tal caso, o desenvolvimento acima vale em todo o espaço $H(K)$.

Teorema 1. Seja $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ uma família de elementos de $H(K)$.

A série $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)}$ converge em $H(K)$, para todo

$y \in H(K)$, se, e somente se, $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} \alpha^n$ é de tipo exponencial nulo.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e x_0 um ponto da fronteira de K ;

existe $\alpha_0 \in \overset{0}{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap \bar{K}$. Como

$$\frac{1}{\alpha_0 - x} \in H(K),$$

$\sum_{n \geq 0} \alpha_n(x) \frac{1}{(\alpha_0 - x)^{n+1}}$ converge uniformemente em algum

aberto $D \supset K$. Existe, então, $M_{x_0, \varepsilon} > 0$, tal que

$$|\alpha_n(x) \frac{1}{(\alpha_0 - x)^{n+1}}| < M_{x_0, \varepsilon}, \text{ para todo } n \geq 0; \text{ daí}$$

$$|\alpha_n(x)| < M_{x_0, \varepsilon} |\alpha_0 - x|^{n+1} < M_{x_0, \varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^n \text{ se}$$

$$x \in \overset{0}{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap D$$

Pela compacidade da fronteira de K ($F(K)$) e pelo princípio do módulo máximo

$|\alpha_n(x)| \leq N_\varepsilon \cdot \varepsilon^n$ para $x \in K \cup \overset{0}{V}(F(K))$. Então:

$$|\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n(x)}{n!} \alpha^n| \leq N_\varepsilon \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} |\alpha|^n = N_\varepsilon e^{|\alpha| \varepsilon},$$

para todo $x \in K \cup \overset{0}{V}(F(K))$ e todo α de C . Portanto,

$\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} \alpha^n$ é de tipo exponencial nulo.

($\Leftarrow$) Seja $y \in H(K)$. Pela fórmula de Cauchy tem-se :

existe $R > 0$ e L_y limitado de $H(K)$, tal que

$$y^{(n)} \in \frac{n!}{R^n} L_y$$

Tomando-se $0 < \xi < R$ e lembrando que existe L_ξ limitado em

$H(K)$ tal que $\alpha_n \in \xi^n \cdot L_\xi$, $n \geq 0$, vem :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)} \in \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\xi}{R} \right)^n \overline{L_\xi \cdot L_y}$$

portanto, a série acima converge em $H(K)$. //

Vamos mostrar, a seguir, que todo operador linear de $H(K)$ em $H(K)$, que é desenvolvível em série de Pincherle é contínuo, isto é, $\mathcal{P}(K) \subset \mathcal{B}(H(K), H(K))$. Veremos, mais adiante, que em geral $\mathcal{P}(K) \subsetneq \mathcal{B}(H(K), H(K))$.

Proposição 2. Seja f um operador linear de $H(K)$ em $H(K)$.

Se f é desenvolvível em série de Pincherle, então, f é contínuo.

Demonstração. Para mostrar que f é contínuo, basta mostrar que f é limitado na bola unitária de cada subespaço $H(D)$ de $H(K)$.

Seja, então, B_D a bola unitária de $H(D)$ e

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)} \quad \text{para todo } y \in H(K).$$

Com raciocínio idêntico ao da 2a. parte da demonstração do teorema anterior, mostra-se que

$\frac{y^{(n)}}{n!} \in \frac{1}{R^n} L$, para todo $y \in B_D$, onde L é um limitado de $H(K)$. Tomando-se $0 < \xi < R$, vem:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)} \in \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\xi}{R} \right)^n \overline{L} L_\xi$$

para todo $y \in B_D$. Portanto, f é contínuo. //

Segue da proposição acima e da observação anterior que

$\mathcal{P}(K) = \mathcal{B}(H(K), H(K))$ quando K se reduz a um ponto.

O próximo teorema caracteriza, em termos da indicatriz, os operadores lineares e contínuos de $H(K)$ em $H(K)$ que são desenvolvíveis em série de Pincherle.

Teorema 2. Um operador linear e contínuo f , de $H(K)$ em $H(K)$, é desenvolvível em série de Pincherle se, e somente se, a aplicação holomorfa $u(t, x)$ (Veja exemplo 2 do § 3, cap. II) se prolonga a um aberto que contém $S \times K - \Delta$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) De $f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)}$, vem:

$$u(t, x) = f\left(\frac{i}{t-z}\right)(x) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n(x) \frac{1}{(t-x)^{n+1}}.$$

Por outro lado, dado $\xi > 0$, existem um aberto $D_\xi \supset K$ e $M_\xi > 0$ tal que

$$|\alpha_n(x)| \leq M_\xi \xi^n, \text{ para todo } x \text{ de } D_\xi \text{ e para todo } n \geq 0.$$

Resulta que

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n(x) \frac{1}{(t-x)^{n+1}} \text{ é parcialmente holomorfa no aberto}$$

$$D'_\xi = \{ (t, x) \mid |t-x| > \xi, x \in D_\xi \}, \text{ logo, holomorfa em}$$

$$\bigcup_{\xi > 0} D'_\xi \supset S \times K - \Delta.$$

($\Leftarrow$) Suponhamos, agora, que $u(t, x)$ é holomorfa em

$D' \supset S \times K - \Delta$. Façamos a mudança de variável

$$\begin{cases} t_1 = \alpha - x & \text{e } t_2 = x & \text{se } \alpha \neq \infty \\ t_1 = \infty & \text{e } t_2 = x & \text{se } \alpha = \infty \end{cases}$$

Essa mudança transforma D' em $D'' \supset (S - \{0\}) \times K$.

Para cada $\xi > 0$, existe $V_\xi(\infty) \times \bar{D}_\xi \subset D''$, com

$D_\xi \supset K$, D_ξ aberto. Para cada x em D_ξ ,

$$\textcircled{1} \quad u(t_1 + x, x) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n(x) \frac{1}{t_1^{n+1}}, \quad |t_1| > \xi. \text{ Da}$$

continuidade de $u(t_1 + x, x)$, existe $M_\xi > 0$ tal que

$$|u(t_1 + x, x)| \leq M_\varepsilon, \text{ para } |t_1| \geq \varepsilon \text{ e } x \in D_\varepsilon.$$

Então :

$$|\alpha_n(x)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t_1|=\varepsilon} t_1^{n-1} u(t_1 + x, x) dt_1 \right| \leq \varepsilon^{n-1} M_\varepsilon,$$

isto é,

$$\textcircled{2} \alpha_n \in \varepsilon^n L_\varepsilon, \quad n \geq 0.$$

Seja $t \notin K$; segue de $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ que

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n(x) \frac{1}{(t-x)^{n+1}}, \text{ uniformemente em volta}$$

de K ; portanto,

$$\textcircled{3} u(t) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{i}{(t-z)^{n+1}}, \quad t \in \mathbb{C}_s^K.$$

Segue de $\textcircled{2}$ que

$$F(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)} \text{ é linear e contínuo e sua indica-}$$

triz é $\textcircled{3}$. Logo, $F = f$, isto é, $f \in \mathcal{P}(K)$. //

Finalmente, vamos caracterizar, através da transformada de Fourier - Borel, os operadores lineares e contínuos de $H(K)$ em $H(K)$ que são desenvolvíveis em série de Pincherle. Temos, então, o

Teorema 3. Seja K um compacto de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}_s^K$ seja conexo.

Um operador linear e contínuo f , de $H(K)$ em $H(K)$, é desen -

volvível em série de Pincherle se, e somente se, $f(e^{\dot{\alpha}t})e^{-\dot{\alpha}t}$ é de tipo exponencial nulo.

Demonstração.

$$(\Rightarrow) f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)}, \text{ logo,}$$

$$f(e^{\dot{\alpha}t}) = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} \alpha^n \right) e^{\dot{\alpha}t}, \text{ portanto,}$$

$$f(e^{\dot{\alpha}t})e^{-\dot{\alpha}t} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} \alpha^n \text{ que é de tipo exponen-}$$

cial nulo.

$$(\Leftarrow) \text{ Façamos } W(\alpha) = f(e^{\dot{\alpha}t})e^{-\dot{\alpha}t}, \alpha \in \mathbb{C};$$

$$W(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} \alpha^n, \text{ onde } \alpha_n = W^{(n)}(0); W \text{ é de}$$

tipo exponencial nulo, por hipótese. Seja então, $\phi \in \mathcal{P}(K)$ dado por

$$\phi(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)}, y \in H(K).$$

$$\text{Como: } \phi(e^{\dot{\alpha}t})e^{-\dot{\alpha}t} = W(\alpha) = f(e^{\dot{\alpha}t})e^{-\dot{\alpha}t}, \text{ vem:}$$

$$\phi(e^{\dot{\alpha}t}) = f(e^{\dot{\alpha}t}), \text{ daí, } f = \phi. //$$

Exemplo. (de operador que não é desenvolvível em série de Pincherle).

Seja K um disco fechado de raio $r > 0$ com centro na origem .

Seja $f: H(K) \rightarrow H(K)$ dado por

$f(y) = W$ onde $W(z) = y\left(\frac{z}{2}\right)$. Então :

$$f\left(\frac{i}{\alpha - t}\right)(x) = \frac{1}{\alpha - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2\alpha - x} \quad \text{que não se prolonga}$$

a um aberto que contém $S \times K - \Delta$.

Visto de outro modo :

$$\begin{aligned} f(e^{\dot{\alpha}t})e^{-\dot{\alpha}t}(x) &= f(e^{\dot{\alpha}t})(x)e^{-\dot{\alpha}x} = e^{\frac{\alpha x}{2}} \cdot e^{-\dot{\alpha}x} = \\ &= e^{-\frac{\alpha x}{2}} = \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{2}x\right)^n \frac{\alpha^n}{n!}. \quad \text{Como} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|-\frac{1}{2}x\right|^n} = \frac{1}{2}|x| \neq 0 \quad \text{se } x \neq 0, \text{ segue que}$$

$f(e^{\dot{\alpha}t})e^{-\dot{\alpha}t}$ não é de tipo exponencial nulo.

(Veja corolário 2 do § 2, cap. III).

§ 2 . Operadores do ciclo fechado. Sejam D_1 e D_2 abertos de $\mathbb{C}$;

$H(D_1 \times D_2)$ o espaço das funções holomorfas e limitadas

$u : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{C}$, com a norma do $\sup$; $H(D_1, H(D_2))$ o espaço das funções holomorfas e limitadas

$u : D_1 \rightarrow H(D_2)$ com a norma

$$\|u\| = \sup_{x \in D_1} \|u(x)\| = \sup_{x \in D_1} \sup_{y \in D_2} |u(x, y)|.$$

Dada a função $u \in H(D_1 \times D_2)$, indicaremos por

u_{x_1} , $x_1 \in D_1$, a função de $H(D_2)$ dada por

$$u_{x_1}(x_2) = u(x_1, x_2). \quad \text{Temos a seguinte}$$

Proposição 1 . A aplicação linear

$$\phi : H (D_1 \times D_2) \longrightarrow H (D_1, H (D_2))$$

dada por

$$\phi (u) (x_1) = u_{x_1} , \quad x_1 \in D_1 ,$$

é uma isometria.

Demonstração. Se $u \in H (D_1 \times D_2)$, a aplicação

$x_1 \in D_1 \longmapsto u_{x_1} \in H (D_2)$ é holomorfa e limitada, pois,

$u (x_1 , x_2)$ é parcialmente holomorfa e limitada em $D_1 \times D_2$.

Reciprocamente, dada a função

$x_1 \in D_1 \longmapsto u_{x_1} \in H (D_2)$, de $H (D_1, H (D_2))$, e toman-

do-se $u (x_1 , x_2) = u_{x_1} (x_2)$ segue que $u \in H (D_1 \times D_2)$

e é claro que $\phi (u) (x_1) = u_{x_1} , \quad x_1 \in D_1$. Segue que ϕ

é um isomorfismo algébrico. Por outro lado, de

$$| u (x_1 , x_2) | \leq \| u \|_{D_1 \times D_2} \quad \text{segue que}$$

$$\textcircled{1} \quad \sup_{x_1 \in D_1} \sup_{x_2 \in D_2} | u (x_1 , x_2) | \leq \| u \|_{D_1 \times D_2} ; \text{ de}$$

$$| u (x_1 , x_2) | \leq \sup_{x_2 \in D_2} | u (x_1 , x_2) |$$

$$\leq \sup_{x_1 \in D_1} \sup_{x_2 \in D_2} | u (x_1 , x_2) | , \text{ vem :}$$

$$\textcircled{2} \quad \| u \|_{D_1 \times D_2} \leq \sup_{x_1 \in D_1} \sup_{x_2 \in D_2} | u (x_1 , x_2) | . \text{ De } \textcircled{1} \text{ e } \textcircled{2}$$

resulta que ϕ é uma isometria. //

Sejam, agora, K_1 e K_2 compactos de C . Suponhamos que

$$H(K_1) = \bigcup_{n \geq 1} H(D_n^1) \text{ e } H(K_2) = \bigcup_{n \geq 1} H(D_n^2).$$

Não é difícil mostrar que a família $(H(D_n^1 \times D_n^2))_{n \geq 1}$

induz sobre $H(K_1 \times K_2)$ uma estrutura de espaço $\mathcal{B}N^*$.

Por outro lado, $H(K_1, H(K_2)) = \bigcup_{n \geq 1} H(D_n^1, H(D_n^2))$;

como $H(D_n^1 \times D_n^2)$ é isométrico a $H(D_n^1, H(D_n^2))$,

$H(K_1 \times K_2)$ é isomorfo topologicamente a $H(K_1, H(K_2))$.

Dado $u \in H(K_1 \times K_2)$, $u \in H(D_1 \times D_2)$; segue

daí que $x_1 \in D_1 \mapsto u_{x_1} \in H(D_2)$ é um elemento de

$H(D_1, H(D_2))$. Se $f: H(K_1) \rightarrow H(K_2)$ é um operador linear e contínuo, a aplicação

$$x_1 \in D_1 \mapsto f \cdot \dot{u}_{x_1} \in H(K_2)$$

é holomorfa. Indicaremos, simplesmente, por $f \cdot \dot{u}_{x_1}$ a classe

de equivalência determinada pela aplicação anterior; segue, en-

tão, que $f \cdot \dot{u}_{x_1} \in H(K_1, H(K_2))$.

Definição 1. Seja f um operador linear e contínuo de $H(K)$

em $H(K)$ e seja K_1 um compacto de C . O operador linear

$$f_{K_1}: H(K_1 \times K) \rightarrow H(K_1, H(K))$$

dado por

$$(f_{K_1} \dot{u})_{x_1} = f \dot{u}_{x_1}$$

denomina-se operador associado a f com relação ao compacto K_1 .

Proposição 2. O operador f_{K_1} , acima definido, é contínuo.

Demonstração. Como $f : H(K) \rightarrow H(K)$ é linear e contínuo,

dado o aberto $D \supset K$, existem um aberto $D' \supset K$ e $M > 0$ tal que

$$\|f(y)\|_{D'} \leq M \|y\|_D \text{ para todo } y \in H(D).$$

Consideremos, agora, o aberto $D_1 \supset K$.

Se $u \in H(D_1 \times D)$, temos :

$$\sup_{x_1 \in D_1} \|f(u_{x_1})\| \leq M \sup_{x_1 \in D_1} \|u_{x_1}\|_D, \text{ logo,}$$

$$\|f_{K_1}(u)\|_{D_1 \times D'} \leq M \|u\|_{D_1 \times D}. \text{ Segue que } f_{K_1} \text{ é}$$

limitada sobre a bola unitária de cada subespaço $H(D_1 \times D)$.

Portanto, f_{K_1} é contínuo. //

Consideremos, agora, o operador

$$\mathcal{C} : H(K) \rightarrow H(K \times \{0\}), \text{ dado por}$$

$$\mathcal{C} \dot{y} = y(\dot{x} + \alpha), \text{ onde } y(\dot{x} + \alpha) \text{ é a classe de equiva-}$$

lência determinada pela função $y(x + \alpha)$ holomorfa no aberto

$$\{(x, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid x + \alpha \in D_y\} \text{ que contém } K \times \{0\}. \text{ O ope-}$$

rador acima definido é contínuo. De fato, dado o aberto $D \supset K$,

seja $D' = \{ (x, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid x + \alpha \in D \} \supset K \times \{0\}$. Temos :

$$\begin{aligned} \|\zeta y\|_{D'} &= \sup_{(x, \alpha) \in D'} |y(x + \alpha)| = \sup_{t \in D} |y(t)| = \\ &= \|y\|_D \end{aligned}$$

para todo $y \in H(D)$. Segue daí a continuidade de ζ .

Definição 2. O operador ζ , acima definido, denomina-se operador translação.

Definição 3. Um operador linear e contínuo $f : H(K) \rightarrow H(K)$, denomina-se do ciclo fechado se

$$\zeta \circ f = f_0 \circ \zeta$$

onde f_0 é o associado de f com relação ao compacto $\{0\}$.

Proposição 2. Seja f um operador linear e contínuo de $H(K)$ em $H(K)$ e seja D o operador derivação de $H(K)$ em $H(K)$. O operador f é do ciclo fechado se, e somente se, f é permutável com D .

Demonstração. Seja $\dot{y} \in H(K)$; como $y(\dot{x} + \alpha) \in H(\{0\} \times K)$ a aplicação

$\alpha \longmapsto y(\dot{x} + \alpha) \in H(K)$ é holomorfa num aberto contendo a

origem . Logo, existe $r > 0$ tal que

$$y(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \dot{y}^{(n)} \alpha^n, \quad |\alpha| < r, \text{ ou seja,}$$

$$(\mathcal{L} \dot{y})_\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \dot{y}^{(n)} \alpha^n. \quad \text{Então:}$$

$$(f_0(\mathcal{L} \dot{y}))_\alpha = f(\mathcal{L} \dot{y})_\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{f(\dot{y}^{(n)})}{n!} \alpha^n$$

$$(\mathcal{L}(f(\dot{y})))_\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{(f(\dot{y}))^{(n)}}{n!} \alpha^n.$$

Pela identidade das séries de potências com valores em $H(K)$

teremos :

$$f_0 \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ f \Rightarrow f \circ D = D \circ f.$$

Reciprocamente,

$$f \circ D = D \circ f \Rightarrow f \circ D^n = D^n \circ f \Rightarrow f_0 \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ f. //$$

Teorema. Seja f um operador linear e contínuo de $H(K)$ em

$H(K)$, sendo K simplesmente conexo. São equivalentes as afir-

mações :

$$1. \quad f_0 \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ f$$

$$2. \quad f \circ D = D \circ f$$

$$3. \quad f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} y^{(n)}, \text{ para todo } y \in H(K),$$

onde $(a_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência de números complexos.

4. Existe uma sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ de números complexos tal que

$$f(t^n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j x^{n-j}$$

$$5. f(y)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} v(t-x) y(t) dt, \text{ para } x$$

em volta de K , onde $v \in H'(\{0\})$ e Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset D_y$ e $\overset{0}{H} \supset K$.

$$6. f(y)(x) = T_0(\mathcal{L}y)_x, \text{ onde } T_0 \in H'(\{0\}) \text{ e } x \text{ em volta de } K.$$

Demonstração. (1) $\Leftrightarrow$ (2) proposição anterior.

$$(2) \Rightarrow (3) f(e^{\alpha t}) \in L_{\xi} e^{|\alpha|\xi} + \sup_{t \in K} R(\alpha t), \alpha \in \mathbb{C};$$

$$f(e^{\alpha t}) e^{-\alpha t} \in L_{\xi} e^{|\alpha|\xi} + \sup_{t \in K} R(\alpha t) e^{-\alpha t}$$

$$|f(e^{\alpha t})(x) e^{-\alpha x}| \leq M_{\xi} e^{\xi|\alpha|} + \sup_{t \in K} R(\alpha t) + (-R(\alpha x)),$$

$x \in D_{\xi} \supset K$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Por outro lado, se $y \in H(V_{\xi}(K))$ temos:

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)} \quad (\text{veja prop. 1, § 1, cap. IV}). \text{ Então:}$$

$$\textcircled{1} (D \circ f)(y) = D(f(y)) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\alpha'_n}{n!} y^{(n)} + \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n+1)} \right)$$

$$\textcircled{2} (f \circ D)(y) = f(Dy) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n+1)}$$

Fazendo $y = e^{\dot{\alpha}t}$ e lembrando que $f \circ D = D \circ f$, segue de (1) e

(2) que :

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\alpha'_n}{n!} \beta^n + \frac{\alpha_n}{n!} \beta^{n+1} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} \beta^{n+1}, \text{ daí}$$

$\alpha'_n = 0$, $n \geq 0$. Pelo fato de K ser conexo, segue que

$\alpha'_n(x) = 0$, para x em um aberto conexo contendo K . Portan-

to, $\alpha'_n = a_n$ constante

Então:

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} y^{(n)} \text{ para todo } y \in H(V_\delta(K)).$$

Segue que:

$$\begin{aligned} |f(e^{\dot{\alpha}t})(x) e^{-\alpha x}| &= \left| \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} \alpha^n \right| \\ &\leq M_\xi e^{\xi|\alpha| + t \sup_{t \in K} R(\alpha t) + \inf_{t \in K} (-R(\alpha t))} = M_\xi e^{\xi|\alpha|}, \end{aligned}$$

portanto, $f(e^{\dot{\alpha}t}) e^{-\alpha t}$ é de tipo exponencial nulo, logo,

$$f \in \mathcal{B}(K) \text{ e } f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} y^{(n)} \text{ para todo}$$

$y \in H(K)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Imediato.

(4) $\Rightarrow$ (2) É imediato que

$(f \circ D)(\dot{t}^n) = (D \circ f)(\dot{t}^n)$, portanto, se P é um po-

límômio $(f \circ D)(P) = (D \circ f)(P)$. Seja, agora,

$y \in H(K)$; pelo teorema de Runge ([2] pag. 59), segue que

$$(f \circ D)(y) = (D \circ f)(y), \text{ portanto, } f \circ D = D \circ f.$$

$$(3) \Rightarrow (5). \quad v(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{t^{n+1}} \text{ é holomorfa em}$$

$$\mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ portanto, } v \in H'(\{0\}). \text{ De}$$

$$u(t, x) = f\left(\frac{1}{t-x}\right)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{(t-x)^{n+1}}, \text{ segue que}$$

$$u(t, x) = v(t-x). \text{ Então,}$$

$$f(y)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t, x) y(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} v(t-x) y(t) dt, \text{ onde } \Gamma \text{ é o bordo orienta-}$$

$$\text{do de um compacto } H \subset D_y \text{ e } \overset{0}{H} \supset K.$$

$$(5) \Rightarrow (3) \text{ Como } v \in H'(\{0\}), u(t, x) = v(t-x)$$

é holomorfa num aberto que contém $S \times K - \Delta$, daí

$f \in \mathcal{P}(K)$. Por outro lado,

$$v(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{z^{n+1}}, \text{ logo,}$$

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{(t-x)^{n+1}} \text{ e}$$

$$u(\dot{t}, x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{i}{(t-x)^{n+1}} \quad \text{uniformemente}$$

sobre qualquer compacto de $\mathbb{C}_\infty$. Então

$$\begin{aligned} f(\dot{y}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\dot{t}, x) y(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{(t-x)^{n+1}} y(t) dt = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{i}{(t-x)^{n+1}} y(t) dt = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} y^{(n)}. \end{aligned}$$

$$(5) \Leftrightarrow (6)$$

$$\begin{aligned} f(\dot{y})(x) &= \int_{\Gamma} v(t-x) y(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x + \Gamma_0} v(t-x) y(t) dt \end{aligned}$$

onde $x + \Gamma_0$ é o bordo orientado de um círculo contido em H e

Γ_0 o bordo orientado de um círculo centrado na origem. Fazem-

do $t - x = \alpha$ vem :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{x + \Gamma_0} v(t-x) y(t) dt &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} v(\alpha) y(x + \alpha) d\alpha = \end{aligned}$$

$= T_0 y(\dot{x} + \alpha)$, onde $T_0 \in H'(\{0\})$ é o funcional cu-

ja indicatriz é v ; segue que

$$f(\dot{y})(x) = T_0 y(\dot{x} + \alpha), \text{ para } x \text{ em volta de } \cdot.$$

A recíproca é imediata.

§ 3. Operadores normais. Consideremos o operador

$$S : H(K) \longrightarrow H(\{1\} \times K)$$

dado por

$S \dot{y} = y(\dot{\alpha} x)$, onde $y(\dot{\alpha} x)$ é a classe de equivalência determinada pela função $y(\alpha x)$ holomorfa no aberto

$\{(q, x) \mid \alpha x \in D_y\}$ que contém $\{1\} \times K$. O operador S ,

acima definido, é contínuo. De fato, dado o aberto $D \supset K$, se-

ja o aberto

$$D' = \{(q, x) \mid \alpha x \in D\} \supset \{1\} \times K. \text{ Temos:}$$

$$\|S \dot{y}\|_{D'} = \sup_{(q, x) \in D'} |y(\dot{\alpha} x)| = \sup_{t \in D} |y(t)| = \|y\|_D,$$

para todo $y \in H(D)$. Segue daí a continuidade de S .

Definição 1. O operador S , acima definido, denomina-se operador homotetia.

Definição 2. Um operador linear e contínuo $f : H(K) \longrightarrow H(K)$,

denomina-se operador normal se

$$S \circ f = f_1 \circ S$$

onde f_1 é o associado de f com relação ao compacto $\{1\}$.

No que segue, indicaremos por X o operador linear e contínuo de $H(K)$ em $H(K)$ dado por

$$X \dot{y} = x \dot{y}'(x), \text{ para todo } \dot{y} \in H(K).$$

Proposição. Um operador linear e contínuo f , de $H(K)$ em $H(K)$, é normal, se, e somente se, $f \circ X = X \circ f$.

Demonstração. $(S \dot{y})_\alpha = y(\alpha x)$; então:

$$(S \dot{y}) = y(e^\beta x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^{(n)} y(e^\beta x)}{d \beta^n} \right)_{\beta=0} \beta^n$$

para β em volta de zero. Demonstra-se, por indução, que

$$\left(\frac{d^n y(e^\beta x)}{d \beta^n} \right)_{\beta=0} = (x^n \dot{y}), \text{ para } n \geq 0. \text{ Logo,}$$

$$(S \dot{y})_{e^\beta} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (x^n \dot{y}) \beta^n. \text{ Temos, agora:}$$

$$\textcircled{1} (S(f(\dot{y})))_{e^\beta} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (x^n f(\dot{y})) \beta^n \text{ e}$$

$$\textcircled{2} (f_1(S \dot{y}))_{e^\beta} = f(S \dot{y})_{e^\beta} =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (f(x^n \dot{y})) \beta^n.$$

Segue de $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ que

$$S \circ f = f_1 \circ S \iff X \circ f = f \circ X. //$$

Teorema. Seja f um operador linear e contínuo de $H(K)$ em $H(K)$, onde K é um compacto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$, $0 \notin K$.

São equivalentes as afirmações :

$$1) \quad S \circ f = f_1 \circ S$$

$$2) \quad X \circ f = f \circ X$$

$$3) \quad f(\dot{y}) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n \dot{x}^n}{n!} \dot{y}^{(n)}, \text{ onde } (a_n)_{n \geq 0}$$

é uma sequência de números complexos.

$$4) \quad f(\dot{t}^n) = \xi_n x^n; \quad \sum_{n \geq 0} \xi_n z^n \text{ se prolonga a uma}$$

função analítica w em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, com $w(\infty) = 0$.

$$5) \quad f(y)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{x} v\left(\frac{\alpha}{x}\right) y(\alpha) d\alpha, \text{ pa-}$$

ra x em volta de K , onde $v \in H'(\{1\})$ e Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset D_y$ e $\overset{\circ}{H} \supset K$.

$$6) \quad f(\dot{y})(x) = T_1(S\dot{y})_x, \text{ onde } T_1 \in H'(\{1\}),$$

para x em volta de K .

Demonstração. $(1) \Leftrightarrow (2)$ Proposição anterior.

$(3) \Rightarrow (4)$ É imediato que $f(\dot{t}^n) = \xi_n x^n$. Seja, ago-

ra, $R > R' > \sup_{t \in K} |t|$. Para cada $|\alpha| > R$,

$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^n$ converge uniformemente para $|t| < R'$, portan-

to,

$$\frac{i}{1 - \frac{t}{\alpha}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^n, \text{ para cada } |\alpha| > R.$$

Dai :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f\left(\frac{i}{\alpha - t}\right) &= \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{i}{1 - \frac{t}{\alpha}}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 0} f\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^n\right) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 0} \xi_n \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad f\left(\frac{i}{\alpha - t}\right) &= \sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!} \frac{n!}{(\alpha - x)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{x}{\alpha - x}\right)^n \frac{i}{\alpha - x} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{\frac{x}{\alpha}}{1 - \frac{x}{\alpha}}\right)^n \frac{i}{1 - \frac{x}{\alpha}} \end{aligned}$$

Como $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ é inteira, segue que

$$w(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{z}{1-z}\right)^n \frac{1}{1-z} \text{ é holomorfa em } \mathbb{C}_s \setminus \{1\}$$

e é claro que $w(\infty) = 0$. De $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ segue que w é

um prolongamento analítico de $\sum_{n \geq 0} \xi_n z^n$.

(4) $\Rightarrow$ (3) Por Laurent,

$$w(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{1}{(z-1)^{n+1}}; \text{ então}$$

$$u(t, x) = w\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t} \sum_{n \geq 0} b_n \left(\frac{t}{x-t}\right)^n \frac{1}{x-t}$$

para $x - t \neq 0$. De

$f\left(\frac{\dot{1}}{t-\alpha}\right) = \frac{1}{t} \sum_{n \geq 0} \xi_n \left(\frac{\dot{x}}{t}\right)^n$ e da hipótese, segue

que $u(\dot{t}, x) = u(t) = f\left(\frac{\dot{1}}{t-\alpha}\right)$, $t \in \mathbb{C}_S^K$. Como

$u(t, x)$ é holomorfa num aberto que contém $S \times K - \Delta$, segue

que f é desenvolvível em série de Pincherle.

Então :

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} y^{(n)} \quad \text{para todo } y \in H(K).$$

Resolvendo-se o sistema

$$f(\dot{t}^n) = \sum_{m=0}^n \frac{\alpha_m}{m!} A_{n,m} \dot{x}^{n-m} = \xi_n \dot{x}^n, \quad n \geq 0,$$

obtem-se

$$\alpha_n = a_n \dot{x}^n, \quad n \geq 0; \quad \text{portanto,}$$

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n \dot{x}^n}{n!} y^{(n)}.$$

(3) $\Rightarrow$ (5) Temos, inicialmente que

$$u(\dot{t}, x) = \sum_{n \geq 0} a_n \dot{x}^n \frac{\dot{1}}{(t-x)^{n+1}} \quad \text{uniformemente sobre}$$

cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}_S^K$. Então :

$$\begin{aligned} f(\dot{y}) &= \sum_{n \geq 0} \frac{a_n \dot{x}^n}{n!} y^{(n)} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{a_n \dot{x}^n}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\dot{1}}{(t-x)^{n+1}} y(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\sum_{n \geq 0} a_n \dot{x}^n \frac{\dot{1}}{(t-x)^{n+1}} \right) y(t) dt, \quad \text{portan-} \end{aligned}$$

to ,

$$f(\dot{y})(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{x} v\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt, \text{ onde}$$

$$v(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \quad z \neq 1, \text{ logo,}$$

$v \in H'(\{1\})$; Γ é o bordo orientado de um compacto

$$H \subset D_y \quad \bullet \quad \overset{\circ}{H} \supset K.$$

(5) $\Rightarrow$ (3) Imediato.

(5) $\Leftrightarrow$ (6) Sejam $\dot{y} \in H(K)$ e Γ o bordo orientado de

um compacto $H \subset D_y$ e $\overset{\circ}{H} \supset K$. Para cada $x \in \overset{\circ}{H}$, existe

$r > 0$, tal que $\gamma(t) = x + x r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, é ho-

motópico a Γ . Então:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{x} v\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{x} u\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} v(\alpha) y(\alpha(x)) d\alpha, \quad \text{onde}$$

$$\Gamma_1(t) = 1 + r e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \text{portanto,}$$

$$f(\dot{y})(x) = T_1 y(\alpha(x)), \text{ onde } T_1 \in H'(\{1\}) \text{ é o fun-}$$

cional cuja indicatriz é v . A recíproca é imediata.

(6) $\Rightarrow$ (1)

$$\textcircled{1} \quad (S(f(\dot{y})))_{\alpha}(x) = (f(\dot{y}))(\alpha x) = T_1 y(\beta x \alpha)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad (f_1 (S \dot{y}))_{\alpha} (x) &= (f (S \dot{y})_{\alpha}) (x) = (f \dot{y} (\alpha t)) (x) = \\ &= T_1 \dot{y} (\alpha x \beta) . \quad \text{De } \textcircled{1} \text{ e } \textcircled{2} \text{ segue que} \end{aligned}$$

$$S \circ f = f_1 \circ S .$$

(1) $\Rightarrow$ (6) Como K é simplesmente conexo e $0 \neq K$, existe $\log z$ em volta de K ; seja $K_0 = \log K$. Consideremos os operadores lineares e contínuos

$$E_K : \dot{y} \in H(K) \longmapsto \dot{y}(e^x) \in H(K_0) \text{ e}$$

$$E_1 : \dot{y} \in H(\{1\}) \longmapsto \dot{y}(e^{\alpha}) \in H(\{0\}) .$$

O diagrama "grande" de

$$\begin{array}{ccccccc} H(K_0) & \xrightarrow{E_K^{-1}} & H(K) & \xrightarrow{f} & H(K) & \xrightarrow{E_K} & H(K_0) \\ D \downarrow & & X \downarrow & & X \downarrow & & D \downarrow \\ H(K_0) & \xrightarrow{E_K^{-1}} & H(K) & \xrightarrow{f} & H(K) & \xrightarrow{E_K} & H(K_0) \end{array}$$

é comutativo, pois, os parciais o são. Portanto,

$$E_K \circ f \circ E_K^{-1} = F \text{ é do ciclo fechado. Existe, então,}$$

$$T_0 \in H'(\{0\}) \text{ tal que } F(\dot{y})(x) = T_0 \dot{y}(x + \alpha),$$

para x em volta de K . Temos :

$$f = E_K \circ F \circ E_K^{-1}, \text{ logo,}$$

$$f(\dot{y})(x) = T_1 \dot{y}(x + \alpha) = T_1 (S \dot{y})_x, \text{ onde}$$

$$T_1 = T_0 \circ E_1 \in H'(\{1\}). \text{ O teorema está demonstrado. //}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Cartan, H - Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann - Paris (1961).
- [2] Dias, C. L. da Silva - Espaços vetoriais topológicos e sua aplicação aos espaços funcionais analíticos. Tese de concurso (1951). Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo (1952).
- [3] Fantappiè, L. - a) I Funzionali Analitici. Memoria acc. dei Lincei. Vol. III - S. t - fasc. 11 (1930).
- b) Teoria de los Funcionales Analíticos y sus aplicaciones. Conferências redigidas por R. Vidal - Barcelona (1943).
- [4] Grothendieck, A. - Sur certaines espaces de fonctions holomorphes . Journal fur die Reine und A. Math . - Vol. 192 (1953).
- [5] Horváth, J. - Topological Vector Spaces and Distributions - Vol. I - Addison - Wesley (1966).
- [6] Kothe, G. - Dualität in der functionentheorie. Journal fur die Reine A. Math . - Vol, 191 (1953).

[7] Martineau, A. - Indicatrices des fonctionelles analyti -
ques e inversion de la transformation de Fourier - Borel par
la transformation de Laplace. C. R. Acad.Sc. , Paris, t. 255 ,
pag. 2888 - 2890 (1962).

[8] Nachbin, L. - Equações de convolução - 2º Colóquio de
Análise Funcional - São José dos Campos (1968).

[9] Pincherle, S. - a) Le operazioni distributive . Nicola
Zanichelli, Bologna (1901).

b) Contributo alla teoria degli opera-
tori lineari. Annali di Matematica Pura ed Applicata. Série IV-
Tonio XV , pag. 243 . Bologna (1936).

[10] Pizanelli, D. - a) Atas do 3º Colóquio de análise fun -
cional e equações a derivadas parciais - São José dos Campos
(1970). Anais da Academia Brasileira de Ciências (A aparecer).

b) Contribuição ao estudo dos operadores
analíticos. Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo ,
Vol. XVI. (1961).

[11] Silva, J . Sebastião. - a) Funções Analíticas e Análise
Funcional. Portugaliae Mathematica, Vol. 9 (1950).

b) Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni . Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni - Vol. XIV - Fasc. 3 - Roma (1955).