SOBRE O "PROPER FORCING AXIOM"

Lúcia Renato Junqueira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: Topologia Geral
Orientadora: Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas

- São Paulo, dezembro de 1990 -

Aos meus pais,

Agradeço:

Aos meus pais, pela dedicação, amor e todo o apoio que me deram, tornando possível a continuidade de meus estudos.

Aos meus irmãos, à minha avó e aos meus tios e primos que muito me ajudaram, principalmente após minha vinda para São Paulo.

À minha orientadora Ofelia por todo o apoio, incentivo, paciência e sobretudo pela amizade sempre demonstrada.

Ao Professor Frank Tall pelas sugestões e incentivo.

Aos professores que de uma forma ou de outra me ajudaram, em especial à Lucília, Iole, Daciberg e Stavros.

Aos meus companheiros de sala, Márcia e Lúcio e aos meus amigos de graduação e pós-graduação, em especial ao Cássio, Renata, Eduardo, Artur, Carlos, Pedro, Simone e Claudio.

À Elen e ao Walter pela eficiência no trabalho de digitação da minha tese.

INDICE

INTRODUÇÃO	01
Cap. I - PRELIMINARES	
I.1 Alguns conceitos básicos	02
I.2 Forcing	04
I.3 O Axioma de Martin (MA)	09
I.4 Conjuntos fechados não limitados e conjuntos estacionários	09
I.5 Subestruturas elementares e $H(\kappa)$	14
I.6 Um pouco de Topologia	16
Cap. II - O PFA	
II.1 Ordens parciais próprias	19
II.2 O PFA	26
II.3 Uma primeira aplicação do PFA	27
II.4 Alguns exemplos	36
II.5 Uma aplicação do PFA na categoria dos espaços ω_1 -Baire	43
Cap. III - ALGUMAS APLICAÇÕES DO PFA USANDO FORCING	
III.1 Gaps e o “truque” de colapsar cardinais	55
III.2 Os números reais e o “truque” da hipótese do contínuo	65
Cap. IV - O PROBLEMA MOORE-MROWKA	
IV.1 Uma consequência do MA	83
IV.2 ω_1 -seqüências crescentes para relações pequenas	89
IV.3 A demonstração do resultado principal	104

INTRODUÇÃO

Um axioma importante na teoria dos conjuntos e que desde a sua criação em 1970 por Martin e Solovay, tem-se mostrado muito útil para a demonstração de que vários resultados são independentes da teoria dos conjuntos, é o Axioma de Martin (MA). Entretanto, o MA só pode ser aplicado para ordens parciais ccc, que é uma restrição muito forte. Na tentativa de encontrar uma exigência mais fraca para uma ordem parcial, mas que mantenha a propriedade que ccc tem de não colapsar ω_1 e ser preservada quando se faz uma iteração não finita de forcing, Shelah criou o conceito de ordem parcial própria, e com isso surgiu o “Proper Forcing Axiom” (PFA).

Neste trabalho apresentaremos um pouco do PFA, que é uma versão do MA bem mais poderosa e que tem se mostrado muito útil para resolver problemas deixados em aberto pelo MA. O PFA é na realidade uma generalização do $\text{MA}(\omega_1)$ e será importante o fato do PFA poder ser aplicado para ordens parciais *countably closed*. Uma outra coisa que mostra a força do PFA é o fato de que large cardinals são necessários para se obter sua consistência. Isso significa que o PFA pode ser aplicado para problemas que o MA de fato não pode resolver. Entretanto, é interessante observarmos que muitas das consequências do PFA não precisam de large cardinals; já são consistentes com ZFC. Isso acontece, por exemplo, com a consequência que mostraremos no último capítulo que trata do problema Moore-Mrowka, como mostra Alan Dow em [D].

Nosso objetivo neste trabalho, mais do que simplesmente mostrar aplicações do PFA, é mostrar um pouco da técnica envolvida na demonstração de suas consequências. O texto está organizado da seguinte maneira: no primeiro capítulo apresentaremos resumidamente alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho; no capítulo II definiremos ordem própria, apresentaremos o PFA, mostraremos alguns exemplos e faremos duas aplicações do PFA; no capítulo III mostraremos aplicações do PFA usando forcing e finalmente no capítulo IV mostraremos uma consequência do PFA que dá uma resposta para um problema de topologia geral antigo chamado problema Moore-Mrowka.

I. PRELIMINARES

1. Alguns conceitos básicos

Neste primeiro item vamos apresentar alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho. Falaremos apenas superficialmente destes conceitos e estaremos nos baseando no livro [K].

Estaremos entendendo por **ordinal** um conjunto transitivo e bem ordenado pela relação pertence. Um ordinal κ será um **cardinal** se $\kappa = |\kappa|$, onde $|\kappa|$ é o menor ordinal α tal que α é equipotente a κ .

Se A é um conjunto bem ordenado pela relação R , então existe um único ordinal C tal que $\langle A, R \rangle$ é isomorfo a $\langle C, \in \rangle$. Chamaremos esse ordinal de **order type** de A .

Usaremos também os conceitos de cofinalidade e de cardinal regular.

Definição 1.1: Se $f : \alpha \rightarrow \beta$, dizemos que f é uma função **cofinal** sse imagem (f) é não limitada em β .

Definição 1.2: A **cofinalidade** de β (denotaremos por $cf(\beta)$) é o menor α tal que existe uma função $f : \alpha \rightarrow \beta$ cofinal.

Definição 1.3: β é **regular** sse β é ordinal limite e $cf(\beta) = \beta$.

Temos que $cf(\beta)$ é sempre um cardinal regular.

Vamos agora apresentar algumas noções básicas de combinatória que também serão importantes.

Uma **ordem parcial** é um par $\langle P, \leq \rangle$ tal que $P \neq \emptyset$ e $\leq$ é uma relação em P que é transitiva e reflexiva (i.e. $\forall p \in P \quad p \leq p$). Se $p \leq q$ diremos que p **estende** q e se $p \in P$ diremos que p é uma **condição** de P . Se $p, q \in P$, diremos que p e q são **incompatíveis** se não existe $r \in P$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$. Uma **antidadeia** A em P é um subconjunto de P tal que para todo $p, q \in A$, p e q são incompatíveis.

Temos dois tipos de ordem parcial que serão importantes:

Definição 1.4: Uma ordem parcial $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ é dita **ccc** se toda anticadeia em $\mathbf{P}$ é enumerável.

Definição 1.5: Uma ordem parcial $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ é dita **countably closed** se para toda seqüência decrescente enumerável $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathbf{P}$ existe $q \in \mathbf{P}$ tal que $q \leq p_n \quad \forall n \in \omega$.

Para falar de PFA são ainda essenciais os conceitos de conjunto genérico e conjuntos densos.

Definição 1.6: Seja $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ uma ordem parcial. Dizemos que $D \subset \mathbf{P}$ é **denso** em $\mathbf{P}$ sse $\forall p \in \mathbf{P} \exists q \leq p$ tal que $q \in D$.

Definição 1.7: Se $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ é uma ordem parcial e $G \subset \mathbf{P}$ então G é um **filtro** em $\mathbf{P}$ sse

- (a) $\forall p, q \in G \exists r \in G$ tal que $r \leq p, q$.
- (b) $\forall p \in G, \forall q \in \mathbf{P}$, se $p \leq q$, então $q \in G$.

Se G satisfaz apenas a condição (a) dizemos que G é **dirigido** para a ordem $\leq$.

Se $\mathcal{D}$ é uma família de densos e G é um filtro tal que $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$, então geralmente iremos nos referir a G como sendo um **genérico** para essa família de densos ou um genérico que intercepta os elementos de $\mathcal{D}$.

Temos ainda alguns conceitos parecidos com o conceito de conjunto denso.

Definição 1.8: Se $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ é uma ordem parcial e $D \subset \mathbf{P}$, então dizemos que D é **denso abaixo de p** (onde $p \in \mathbf{P}$) se $\forall q \leq p$ existe $r \leq q$ tal que $r \in D$. Dizemos que D é **predenso** em $\mathbf{P}$ sse $\forall p \in \mathbf{P} \exists q \in D$ tal que p e q são compatíveis e dizemos que D é **predenso abaixo de p** ($p \in \mathbf{P}$) sse $\forall q \leq p \exists r \in D$ tal que r e p são compatíveis.

Para finalizar vamos definir Δ -sistema e enunciar o lema do Δ -sistema.

Definição 1.9: Uma família $\mathcal{A}$ de conjuntos é chamada de Δ -sistema se existe um conjunto r fixado, chamado de raiz ou kernel do Δ -sistema, tal que $a \cap b = r$ para todo $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b$.

Teorema 1.1 (Lema do Δ -sistema): Seja κ um cardinal infinito e seja $\theta > \kappa$ um cardinal regular satisfazendo que $\forall \alpha < \theta, \alpha^{<\kappa} < \theta$ (onde $\alpha^{<\kappa} = |\cup\{\lambda_\alpha : \lambda < \kappa\}|$, $\lambda_\alpha = \{f : f : \lambda \rightarrow \alpha\}$). Suponhamos ainda que $\mathcal{A}$ é uma família de conjuntos tal que $|\mathcal{A}| \geq \theta$ e $\forall x \in \mathcal{A}, |x| < \kappa$. Então existe $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \theta$ e $\mathcal{B}$ forma um Δ -sistema.

Quando $\kappa = \omega$ e $\theta = \omega_1$ temos o seguinte enunciado:

Teorema 1.11: Se $\mathcal{A}$ é uma família não enumerável de conjuntos finitos então existe $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ não enumerável tal que $\mathcal{B}$ forma um Δ -sistema.

Uma das importâncias do lema do Δ -sistema está no fato de que ele proporciona um argumento standard muito utilizado na demonstração de que uma dada ordem parcial é ccc. Ele possibilita fazermos suposições sobre uma anticadeia não enumerável de uma certa ordem parcial $\mathbf{P}$, se estivermos supondo que ela exista.

2. Forcing

Iremos neste item apresentar um pouco do forcing. Iremos defini-lo, apresentar algumas idéias gerais e alguns resultados que serão utilizados ao longo do trabalho. Não iremos, porém, mostrar os resultados e nem fazer uma exposição rigorosa sobre o forcing. Para isso uma boa referência é o livro [K], onde podem ser encontrados todos os resultados que mencionaremos aqui.

O forcing é uma técnica que nos permite construir uma grande variedade de modelos satisfazendo diversas propriedades matemáticas. Por isso é uma técnica freqüentemente utilizada quando se quer mostrar a consistência de algum resultado.

Estaremos sempre tomando M um “modelo transitivo enumerável de ZFC”. Estaremos na realidade tomando M como sendo um modelo enumerável transitivo para os axiomas de ZFC que são necessários para se fazer o argumento, mas escreveremos da maneira acima mencionada para simplificar.

Apresentaremos primeiro alguns conceitos básicos para a definição de forcing.

Definição 2.1: Seja $\mathbf{P}$ uma ordem parcial. G é um $\mathbf{P}$ -genérico sobre M sse G é um filtro em $\mathbf{P}$ e para todo denso $D \subset \mathbf{P}$, $D \in M$ implica que $G \cap D \neq \emptyset$.

Lema 2.2: Se M é enumerável e $p \in \mathbf{P}$, então existe um G que é $\mathbf{P}$ -genérico sobre M tal que $p \in G$.

Lema 2.3: Suponha que M é um modelo transitivo de ZFC, $\mathbf{P} \in M$, $E \subset \mathbf{P}$ e $E \in M$. Se $p \in G$ e E é denso abaixo de p , então $G \cap E \neq \emptyset$, onde G é um $\mathbf{P}$ genérico.

Seja M um modelo enumerável transitivo de ZFC, $\mathbf{P}$ uma ordem parcial em M e G um $\mathbf{P}$ -genérico em M . O nosso objetivo será construir um outro modelo enumerável transitivo de ZFC, ao qual chamaremos de $M[G]$, que irá satisfazer: $M \subset M[G]$, os ordinais são os mesmos em M e $M[G]$ e $G \in M[G]$. Além disso $M[G]$ será a menor extensão de M para um modelo enumerável transitivo de ZFC que contém G . Grosseiramente falando, $M[G]$ será o conjunto de todos os conjuntos que podem ser construídos a partir de G aplicando os processos da teoria dos conjuntos definíveis em M . Cada elemento de $M[G]$ vai ter um nome em M , que dirá como ele foi construído a partir de G .

Definição 2.4: τ é um $\mathbf{P}$ -nome sse τ é uma relação e $\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau, \sigma$ é um $\mathbf{P}$ -nome e $p \in \mathbf{P}$.

Definição 2.5: $\mathbf{V}^{\mathbf{P}}$ é a classe de todos os $\mathbf{P}$ -nomes. Se M é um modelo transitivo de ZFC e $\mathbf{P} \in M$, $M^{\mathbf{P}} = \mathbf{V}^{\mathbf{P}} \cap M$ ou $M^{\mathbf{P}} = \{\tau \in M : (\tau \text{ é um } \mathbf{P}\text{-nome})^M\}$.

Definição 2.6: $\text{val}(\tau, G) = \{\text{val}(\sigma, G) : \exists p \in G (\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$. Também escrevemos τ_G para $\text{val}(\tau, G)$.

Definição 2.7: Se M é um modelo transitivo de ZFC, $\mathbf{P} \in M$ e $G \subset \mathbf{P}$, então $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbf{P}}\}$.

Pode-se mostrar que $M[G]$ como acima definido satisfaz o que havíamos anunciado anteriormente.

Vamos agora definir forcing. Escreveremos que $p \Vdash \psi$ (p força ψ) para dizer que para todo G que é $\mathbf{P}$ -genérico sobre M , se $p \in G$, então ψ é verdade em $M[G]$.

Definição 2.8: Seja $\phi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula com todas as variáveis livres mostradas; seja M um modelo enumerável transitivo de ZFC, $\mathbf{P}$ uma ordem parcial em M , $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbf{P}}$ e $p \in \mathbf{P}$. Então $p \Vdash_{\mathbf{P}, M} \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ sse $\forall G, G$ é um $\mathbf{P}$ -genérico sobre M e $p \in G$ implicam que $\phi^{M[G]}(\text{val}(\tau_1, G), \dots, \text{val}(\tau_n, G))$.

Vamos normalmente escrever simplesmente $\Vdash$ no lugar de $\Vdash_{\mathbf{P}, M}$, quando $\mathbf{P}$ e M estiverem claros. Escreveremos ainda que $p \Vdash \phi$ se $p \Vdash \phi \forall p \in \mathbf{P}$.

Lema 2.9: Na notação da definição 2.8 temos que:

- (a) $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ e $q \leq p$ implicam que $q \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$.
- (b) $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ e $p \Vdash \psi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ sse $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Temos ainda os seguintes teoremas importantes sobre forcing

Teorema 2.10: Nas condições da definição 2.8, temos:

- (a) Pode ser decidido em M se $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$.
- (b) Para todo G $\mathbf{P}$ -genérico sobre M , $[\phi(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})]^{M[G]}$ sse $\exists p \in G$ tal que $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Na prática 2.10(a) é utilizado para garantir que muitos dos conjuntos construídos usando $\Vdash$ vão estar em M .

Teorema 2.11: Nas condições da definição 2.8,

- (a) $\{p \in \mathbf{P} : p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ ou } p \Vdash \neg \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)\}$ é denso;
- (b) $p \Vdash \neg \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ sse não existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$;
- (c) $p \Vdash \exists x \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n)$ sse $\{r \leq p : \exists \sigma \in M^{\mathbf{P}} \text{ tal que } r \Vdash \phi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n) \text{ é denso abaixo de } p$;
- (d) se $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \text{ e } \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n))$ então $\exists q \leq p \exists \pi \in \text{dom}(\sigma)$ tal que $q \Vdash \phi(\pi, \tau_1, \dots, \tau_n)$.

Quando começamos a falar de extensão genérica, mencionamos que os ordinais são os mesmos em M e $M[G]$, ou seja, os ordinais são preservados quando estendemos M . O mesmo não necessariamente acontece com os cardinais. Não é difícil mostrar que a noção de cardinais não precisa ser absoluta para M , $M[G]$. Isso acontece porque podemos, ao estender M , estar adicionando novas funções e com isso podemos ter, por exemplo, que em $M[G]$ exista uma bijeção entre κ e λ , onde κ e λ são cardinais em M . Neste caso, se $\mathbf{P}$ é a ordem parcial que foi utilizada para fazer esta extensão, dizemos que $\mathbf{P}$ colapsa cardinais. Se $\kappa > \lambda$, dizemos que $\mathbf{P}$ colapsa κ em λ ou colapsa κ sobre λ .

No capítulo III tomaremos ordens parciais que colapsam λ em ω_1 (λ cardinal e $\lambda > \omega_1$) e $2^{\aleph_0}$ em ω_1 com condições enumeráveis. No primeiro caso temos que as condições são funções de α em λ onde $\alpha < \omega_1$ e no segundo funções de α em $2^{\aleph_0}$ onde $\alpha < \omega_1$. Nos dois casos temos que $p \leq q$ sse $p \supseteq q$. Ao forçarmos com essas ordens parciais conseguiremos construir na extensão funções sobrejetoras de ω_1 em λ ou ω_1 em $2^{\aleph_0}$ conforme o caso. Do fato de ω_1 ser regular, segue que nos dois casos as ordens parciais são *countably closed*.

Para ordens parciais *countably closed* temos o seguinte resultado importante:

Teorema 2.12: Suponhamos que $\mathbf{P} \in M$, $A, B \in M$ e que, em M , $\mathbf{P}$ é *countably closed* e A é enumerável. Seja G um $\mathbf{P}$ -genérico sobre M e seja $f \in M[G]$ onde $f : A \rightarrow B$. Então $f \in M$.

Segue como consequência deste teorema que se forçarmos com ordens parciais *countably closed* não estaremos adicionando novos subconjuntos de ω (e portanto não estaremos também adicionando novos reais) já que sempre podemos identificar um subconjunto de ω com um função de ω em 2.

Para ordens parciais ccc temos o seguinte resultado que também é muito utilizado:

Teorema 2.13: Suponhamos que $\mathbf{P}$ é uma ordem parcial ccc, que σ é um $\mathbf{P}$ -nome e que $\Vdash \text{“}\sigma \text{ é enumerável e } \sigma \subset \omega_1\text{”}$. Então existe $\beta < \omega_1$ tal que $\Vdash \sigma \subset \beta$.

Vamos agora estabelecer a notação de forcing que usaremos durante o trabalho. Usare-

mos a notação que geralmente é encontrada nos artigos e que difere da notação que aparece em [K], talvez por ser mais simples. Em primeiro lugar, estaremos sempre forçando sobre o universo V da teoria dos conjuntos. Assim, se P é uma ordem parcial e G é um genérico sobre V , denotaremos a extensão por $V[G]$ ou, quando não for necessário especificar o genérico em questão, por V^P . Nós geralmente usaremos os elementos de V como nomes para eles mesmos na linguagem do forcing e usaremos letras com pontos em cima para denotar os elementos da extensão genérica que podem não estar em V .

Se $Q \in V^P$ é uma ordem parcial na extensão, então denotaremos por $P * Q$ a composição do forcing de P e Q , isto é, forçamos primeiro com P , e obtemos V^P , e depois forçamos com Q sobre V^P , obtendo $[V^P]^Q$. Formalmente, se $\dot{Q}$ é um termo da linguagem do forcing que denota Q em V^P , então $P * Q$ é o conjunto dos pares (p, q) tais que $p \in P$ e $\Vdash_P \dot{q} \in \dot{Q}$, ordenado por $(p_1, \dot{q}_1) \leq (p_2, \dot{q}_2)$ sse $p_1 \leq p_2$ e $p_1 \Vdash \dot{q}_1 \leq \dot{q}_2$.

Para encerrar, mostraremos dois resultados simples relacionados com anticadeias maximais que serão usados mais tarde.

Lema 2.14: Se G é um genérico de P e A é uma anticadeia maximal em P , onde P é uma ordem parcial, então $G \cap A = \{p\}$.

Demonstração:

Como G é filtro, temos que $G \cap A$ não pode ter mais de um elemento. Basta então mostrar que $G \cap A \neq \emptyset$. Seja $D = \{p \in P : \exists q \in A \text{ tal que } p \leq q\}$. Daí se $p \in P$, como A é maximal, existe $q \in A$ tal que p e q são compatíveis. Seja $r \in P$ tal que $r \leq p, q$. Temos então que $r \in D$ e $r \leq p$. Portanto D é denso em P o que implica que $D \cap G \neq \emptyset$. Seja $r \in D \cap G$. Daí existe $q \in A$ tal que $q \geq r$. Como G é filtro, segue que $q \in G$. ■

Lema 2.15: Se D é denso na ordem parcial P , então existe $A \subset D$ tal que A é uma anticadeia maximal em P .

Demonstração:

Seja $A \subset D$ uma anticadeia maximal em D . Vamos mostrar que A é maximal em P ,

i.e., que $\forall p \in \mathbf{P} \exists q \in A$ tal que p e q são compatíveis. Seja $p \in \mathbf{P}$. Como D é denso em $\mathbf{P}$, existe $r \leq p$ tal que $r \in D$. Agora A é maximal em D . Portanto existe $q \in A$ tal que q e r são compatíveis. Mas como $r \leq p$, segue que q e p são compatíveis. ■

3. O Axioma de Martin (MA).

Se κ é um cardinal, $MA(\kappa)$ é a seguinte afirmação:

$MA(\kappa)$: Seja $\mathbf{P}$ uma ordem parcial ccc e $\mathcal{D}$ uma família de subconjuntos densos de $\mathbf{P}$ hfill
tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$. Então existe um filtro G em $\mathbf{P}$ tal que $\forall D \in \mathcal{D} D \cap G \neq \emptyset$.

O Axioma de Martin é a seguinte afirmação:

$$MA : \forall \kappa < 2^{\aleph_0} \text{ vale } MA(\kappa)$$

Temos que $MA(\omega)$ é verdadeiro e que $MA(2^{\aleph_0})$ é falso. Temos ainda que $MA + \neg CH$ é consistente com ZFC. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [K], por exemplo, e requer a técnica de forcing iterado.

Vale ainda o seguinte resultado, cuja demonstração também pode ser encontrada em [K].

Lema 3.1: $MA(\kappa)$ implica que $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$.

Como veremos no capítulo seguinte, vale que o PFA implica $MA(\omega_1)$. Assim segue do lema acima que o PFA implica que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

4. Conjuntos fechados não limitados e conjuntos estacionários

Para definir ordem parcial própria precisaremos de uma generalização do conceito de conjunto estacionário feito por Jech. Apresentaremos aqui esta generalização, com a

correspondente generalização de conjunto fechado e não limitado, e alguns resultados que nos serão úteis. Antes porém, definiremos esses conceitos no sentido usual e recordaremos alguns resultados conhecidos que também serão utilizados.

Definição 4.1: Seja α um ordinal e $C \subseteq \alpha$. Então dizemos que C é **não limitado** em α se $\sup C = \alpha$ e dizemos que C é **fechado** em α se $\sup(C \cap \beta) \in C$ para todo $\beta < \alpha$.

Definição 4.2: Um conjunto $S \subseteq \alpha$, α ordinal, é dito **estacionário** se $S \cap C \neq \emptyset$ para todo C fechado e não limitado em α .

Os próximos resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [Je] ou em [K].

Teorema 4.3: Se κ é um cardinal regular não enumerável, então a interseção de menos do que κ fechados não limitados em κ é um fechado não limitado em κ .

Teorema 4.4 (Teorema de Fodor): Suponhamos que κ é um cardinal regular não enumerável.

- (a) Se $\langle C_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ é uma seqüência de conjuntos fechados e não limitados em κ , então $C = \{\alpha < \kappa : \forall \beta < \alpha \quad \alpha \in C_\beta\}$ é também fechado e não limitado em κ . C é chamado de **interseção diagonal** dos C_α .
- (b) Suponhamos que $S \subseteq \kappa$ é um estacionário em κ e $f : S \rightarrow \kappa$ é tal que $f(x) < x \quad \forall x \in S$ (tal f é dita **regressiva** em S). Então existe $S' \subseteq S$ estacionário tal que f é constante em S' .

Teorema 4.5: Para todo $\kappa > \omega$ regular, existe uma família de κ subconjuntos de κ estacionários disjuntos.

Antes de generalizar os conceitos acima definidos, vamos estabelecer a seguinte notação. Seja A um conjunto e λ um cardinal. Então fixaremos

$$[A]^\lambda = \{x \subseteq A : |x| = \lambda\}$$

$$[A]^{\leq \lambda} = \cup \{[A]^\mu : \mu \leq \lambda\}$$

$$[A]^{< \lambda} = \cup \{[A]^\mu : \mu < \lambda\}$$

Suponhamos agora que λ é um cardinal regular. Segue as seguintes definições:

Definição 4.6: Um conjunto $C \subseteq [A]^{<\lambda}$ é dito **não limitado** em $[A]^{<\lambda}$ se $\forall x \in [A]^{<\lambda}$ existe $y \in C$ tal que $x \subseteq y$; C é dito **fechado** em $[A]^{<\lambda}$ se para toda seqüência crescente $\langle x_\alpha : \alpha < \mu \rangle, \mu < \lambda$, de elementos de C , temos que $\cup\{x_\alpha : \alpha < \mu\} \in C$.

Definição 4.7: Diremos que $S \subseteq [A]^{<\lambda}$ é **estacionário** em $[A]^{<\lambda}$ se $S \cap C \neq \emptyset$ para todo C , fechado não limitado em $[A]^{<\lambda}$.

Mostraremos agora alguns resultados que serão utilizados posteriormente e que podem ser encontrados em [Ba 2].

Teorema 4.8: $C \subseteq [A]^{<\lambda}$ é fechado sse C é fechado para uniões dirigidas de cardinalidade $< \lambda$ (isto é, se $D \subseteq C, |D| < \lambda$ e $\forall x, y \in D$ existe $z \in D$ tal que $x, y \subseteq z$, então $\cup D \in C$).

Demonstração:

Como toda união crescente é dirigida, basta verificarmos a implicação da esquerda para a direita.

Suponhamos que C é fechado e que $D \subseteq C$ é como no teorema. Vamos verificar que $\cup D \in C$ por indução na cardinalidade de D .

Se $|D|$ é finito, então D tem um elemento maximal z . Daí, para todo $x \in D, x \subseteq z$. Agora $z \in D$ e portanto $z \in C$. Segue então que $\cup D \in C$.

Se D é enumerável, então, usando o fato de D ser dirigido, podemos construir uma seqüência $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de D tal que $\forall y \in D \exists n \in \omega$ tal que $y \subseteq x_n$. Teremos então que $\cup\{x_n : n \in \omega\} = \cup D \in C$.

Suponhamos agora que $\lambda = |D| > \omega$. Podemos então encontrar uma seqüência crescente $\langle D_\alpha : \alpha < cf\lambda \rangle$ de subconjuntos dirigidos de D tal que $\cup\{D_\alpha : \alpha < cf\lambda\} = D$ e cada D_α tem cardinalidade menor do que λ . Por hipótese de indução, temos que $\cup D_\alpha \in C$ para cada α e como $\langle \cup D_\alpha : \alpha < cf\lambda \rangle$ é uma seqüência crescente, segue que $\cup D = \cup\{\cup D_\alpha : \alpha < cf\lambda\} \in C$ (pois C é fechado). ■

Teorema 4.9 (Jech): Suponhamos que λ é um cardinal regular não enumerável e que $|A| \geq \lambda$.

- (a) Se $\langle C_\alpha : \alpha \in A \rangle$ é uma seqüência de conjuntos fechados não limitados em $[A]^{<\lambda}$, então $C = \{x \in [A]^{<\lambda} : \forall \alpha \in x \quad x \in C_\alpha\}$ é também fechado não limitado em $[A]^{<\lambda}$. C é chamado de **interseção diagonal** dos C_α .
- (b) Suponhamos que $S \subseteq [A]^{<\lambda}$ é estacionário em $[A]^{<\lambda}$ e que $f : S \rightarrow A$ é uma função regressiva, ie, $f(x) \in x \quad \forall x \neq \emptyset$. Então existe $S' \subseteq S$ estacionário tal que f é constante em S' .

Demonstração:

(a) Vamos primeiro mostrar que C é fechado. Suponhamos que $\langle x_\gamma : \gamma < \mu \rangle$ é uma seqüência crescente de elementos de C . Seja $X = \bigcup \{x_\gamma : \gamma < \mu\}$. Se $\alpha \in X$, então $\alpha \in x_\gamma$ para algum $\gamma < \mu$ e portanto $\alpha \in x_\beta \quad \forall \beta > \gamma$. Segue então que $x_\beta \in C_\alpha \quad \forall \beta > \gamma$ o que implica que $\bigcup \{x_\beta : \gamma < \beta < \mu\} = \bigcup \{x_\beta : \beta < \mu\} = X \in C_\alpha$, ou seja, $X \in C$.

Vamos agora verificar que C é não limitado. Fixemos $x \in [A]^{<\lambda}$ e vamos construir a seqüência $\langle x_n : n < \omega \rangle$ por indução em n . Seja $x_0 = x$. Definido x_n , para cada $\alpha \in x_n$ seja $x_n^\alpha \in C_\alpha$ tal que $x_n \subseteq x_n^\alpha$ (tal x_n^α existe pois C_α é não limitado). Definimos então $x_{n+1} = \bigcup \{x_n^\alpha : \alpha \in x_n\}$. Agora, para cada $\alpha \in y = \bigcup \{x_n : n \in \omega\}$, temos que $y = \bigcup \{x_n^\alpha : n < \omega\}$, pois sempre que $\alpha \in x_n$ vale que $x_n \subseteq x_n^\alpha \subseteq x_{n+1}$. Como C_α é fechado e $\langle x_n^\alpha : n < \omega \rangle$ é crescente, temos que $y \in C_\alpha$. Portanto $y \in C$ e como $y \supseteq x$, segue que C é não limitado.

(b) Seja $f : S \rightarrow A$ regressiva e suponhamos que f não é constante em nenhum subconjunto estacionário de S . Para cada $\alpha \in A$ seja C_α um conjunto fechado não limitado que é disjunto de $\{x \in S : f(x) = \alpha\}$ e seja C a interseção diagonal dos C_α 's. Tomemos agora $x \in C$ tal que $x \neq \emptyset$. Suponhamos que $f(x) = \alpha$. Mas daí $\alpha \in x$ (pois $f(x) \in x$) e portanto $x \in C_\alpha$ o que implica que $f(x) \neq \alpha$. Obtemos assim uma contradição que mostra (b). ■

Para falar de ordem própria estaremos particularmente interessados em subconjuntos

estacionários de $[A]^{<\lambda}$ quando $\lambda = \omega_1$. Neste caso, existe um teorema que nos dá uma representação para conjuntos fechados não limitados.

Definição 4.10: Se $f : [A]^{<\omega} \rightarrow A$ e $x \subseteq A$, então dizemos que x é **fechado para f** se x é não vazio e $\forall y \in [x]^{<\omega}$ vale que $f(y) \in x$.

Observemos que $\{x \in [A]^{\leq\omega} : x \text{ é fechado para } f\}$ é sempre fechado e não limitado em $[A]^{\leq\omega}$.

Definição 4.11: Se $x \subseteq A$ e f é como acima, então o **fecho de x para f** é o menor conjunto $y \supseteq x$ que é fechado para f .

Teorema 4.12 (Kueker): Suponhamos que C é fechado e não limitado em $[A]^{\leq\omega}$. Então existe $f : [A]^{<\omega} \rightarrow A$ tal que $\{x \in [A]^{\leq\omega} : x \text{ é fechado para } f\} \subseteq C$.

Demonstração:

Vamos primeiro obter uma função auxiliar $g : \{x \in [A]^{<\omega} : x \neq \emptyset\} \rightarrow C$. Definiremos $g(x)$ por indução na cardinalidade de x . Se $x = \{\alpha\}$, então seja $g(x)$ um elemento z de C tal que $\alpha \in z$. Se $|x| > 1$, então tomemos $g(x)$ como sendo um elemento z de C tal que para todo subconjunto próprio y de x , $g(y) \subseteq z$.

Para cada x , seja $h_x : \omega \rightarrow g(x)$ uma sobrejeção. Seja ainda $p : \omega \setminus \{0, 1\} \rightarrow (\omega \setminus \{0\}) \times \omega$ uma bijeção tal que se $p(k) \geq (m, n)$ então $k \geq m$.

Agora, definiremos $f : [A]^{<\omega} \rightarrow A$. Tomemos $f(\emptyset)$ arbitrário. Seja $<_A$ uma boa ordem de A em order type $|A|$ e seja $f(\{\alpha\})$ o $<_A$ sucessor de α . Temos assim que todo conjunto fechado para f é infinito e tem order type α onde α é um ordinal limite na ordem $<_A$. Suponhamos agora que $x \subset [A]^{\leq\omega}$, $|x| \geq 2$ e que $p(|x|) = (m, n)$. Se $x = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, onde $\alpha_1 <_A \dots <_A \alpha_k$, definamos $f(x) = h_y(x)$, onde $y = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Temos que mostrar que f satisfaz o que queremos. Vamos mostrar primeiro que se z é fechado para f , então $\forall x \in [z]^{<\omega}$, $x \neq \emptyset$ implica que $g(x) \subseteq z$. De fato, como z é fechado para f , temos que o order type de z é um ordinal limite na ordem $<_A$. Suponhamos que $x = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, onde $\alpha_1 <_A \dots <_A \alpha_m$. Seja n arbitrário e seja

$k = p(m, n)$. Tomemos agora $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_k$ em z tal que $\alpha_m <_A \alpha_{m+1} <_A \dots <_A \alpha_k$. Então $f(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) = h_x(n) \in z$ e como n era arbitrário, mostramos o que queríamos.

Mas agora, se z é fechado para f , então $\{g(x) : x \in [z]^{<\omega}, x \neq \emptyset\}$ é uma família dirigida de elementos de C (pois $g(x_1), g(x_2) \subset g(x_1 \cup x_2)$). Portanto se $|z| \leq \omega$, então $z = \cup\{g(x) : x \in [z]^{<\omega}, x \neq \emptyset\} \in C$, pelo teorema 4.8, o que completa a demonstração. ■

Teorema 4.13: Suponhamos que C é um subconjunto fechado não limitado de $[A]^{\leq\omega}$ e que $B \subseteq A$. Então $\{x \cap B : x \in C\}$ contém um subconjunto fechado e não limitado de $[B]^{\leq\omega}$.

Demonstração:

Pelo teorema 4.12 podemos supor que $f : [A]^{<\omega} \rightarrow A$ é tal que $C = \{x \in [A]^{\leq\omega} : x \text{ é fechado para } f\}$. Se $x \in [B]^{\leq\omega}$, seja $\bar{x}$ o menor conjunto fechado para f que contém x como subconjunto. Temos então que $\{x \in [B]^{\leq\omega} : x = \bar{x} \cap B\}$ é fechado e não limitado e é um subconjunto de $\{x \cap B : x \in C\}$. ■

5. Subestruturas elementares e $H(\kappa)$

Utilizaremos ao longo do trabalho o conceito de subestrutura elementar e alguns resultados básicos sobre esse assunto. Tomaremos apenas estruturas do tipo $(A, \in)$, onde A é um conjunto não vazio, e portanto a linguagem de primeira ordem utilizada será a linguagem da teoria dos conjuntos.

Definição 5.1: Se B é um subconjunto não vazio de A , então dizemos que $(B, \in)$ é uma **subestrutura elementar de $(A, \in)$** , e escrevemos $(B, \in) \prec (A, \in)$ se para toda fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ da linguagem da teoria dos conjuntos e para todo $b_1, \dots, b_n \in B$, $\varphi(b_1, \dots, b_n)$ é verdade em $(B, \in)$ sse for verdade em $(A, \in)$. Normalmente escreveremos $B \prec A$ ao invés de $(B, \in) \prec (A, \in)$.

O próximo resultado é conhecido como o Critério de Tarski para subestruturas ele-

mentares.

Teorema 5.2: $B \prec A$ sse B é um subconjunto não vazio de A e para toda fórmula $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ e para todo $b_1, \dots, b_n \in B$, se $\exists x \varphi(x, b_1, \dots, b_n)$ é verdade em $(A, \in)$, então existe $b_0 \in B$ tal que $\varphi(b_0, b_1, \dots, b_n)$ é verdade em $(A, \in)$.

Teorema 5.3:

- (a) Suponhamos que $X \subseteq A$ e A é infinito. Então existe $B \prec A$ tal que $X \subseteq B$ e $|B| = |X| + \aleph_0$.
- (b) Se $\langle B_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ é uma seqüência crescente de subestruturas elementares de A , então $\cup\{B_\alpha : \alpha < \lambda\} \prec A$.

Corolário 5.4: Seja A um conjunto infinito. Então $\{N \in [A]^{\leq \omega} : N \prec A\}$ é um subconjunto fechado não limitado de $[A]^{\leq \omega}$.

Seja agora λ um cardinal.

Definição 5.5: $H(\lambda) = \{x : |\text{trcl}(x)| < \lambda\}$, onde $\text{trcl}(x)$ é o fecho transitivo de x (i.e., o menor conjunto transitivo que contém x). Se $x \in H(\lambda)$ dizemos que x é hereditariamente de cardinalidade $< \lambda$.

Teorema 5.6: Se λ é um cardinal regular e $\lambda > \omega$, então $H(\lambda)$ é um modelo de ZFC-P (onde P é o axioma das partes). Se λ for fortemente inacessível então $H(\lambda)$ é um modelo de ZFC.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [K].

Estaremos, portanto, geralmente interessados em subestruturas elementares de $H(\lambda)$ onde λ é regular.

Agora, se $B \prec A$ e $\varphi(x)$ é uma fórmula tal que existe um único $a \in A$ satisfazendo $\varphi(a)$ (neste caso dizemos que a é definido por $\varphi(x)$), então $a \in B$, pois como $\exists x \varphi(x)$ é verdade em $(A, \in)$, e portanto em $(B, \in)$, segue que existe $b \in B$ tal que $\varphi(b)$ vale em $(B, \in)$. Mas

como $B \prec A$, $\varphi(b)$ também vale em $(A, \in)$ e portanto $b = a$. Como consequência disso, temos, por exemplo, que se λ é não enumerável e $N \prec H(\lambda)$, então $\omega \in N$.

Uma observação similar à que foi feita acima vale para o caso em que a é definido por $\varphi(x, b_1, \dots, b_n)$, onde $b_1, \dots, b_n \in B$.

Teorema 5.7: Suponhamos que λ é um cardinal regular não enumerável e que $N \prec H(\lambda)$, N enumerável. Então para todo conjunto enumerável a , se $a \in N$ então $a \subseteq N$, e portanto $\omega_1 \cap N \in \omega_1$.

Demonstração:

Já observamos acima que $\omega \in N$. Da mesma forma, temos que cada $n \in \omega$ é definível em $(H(\lambda), \in)$ e portanto é um elemento de N . Agora, se a é enumerável e $a \in N$, então a afirmação “ $\exists f$ tal que f é uma função de ω em a sobrejetora” vale em $H(\lambda), \in$ e portanto em $(N, \in)$, pois $\omega, a \in N$. Portanto, existe tal função $f \in N$. Mas como $f, n \in N$ para cada $n \in \omega$, temos que $f(n) \in N$ para cada $n \in \omega$, pois $f(n)$ é definível a partir de f e n . Segue então que $a \subseteq N$.

Vamos verificar agora que $\omega_1 \cap N \in \omega_1$. Pelo que acabamos de mostrar, temos que se $\alpha \in \omega_1 \cap N$ então $\alpha \subseteq N$. Portanto $\omega_1 \cap N$ é um segmento inicial de ω_1 , e como N é enumerável, o segmento inicial é próprio. ■

6. Um pouco de topologia

Vamos neste item apresentar alguns conceitos de topologia que talvez sejam menos conhecidos e que aparecerão posteriormente.

Definição 6.1: Um espaço topológico X é **quasi-regular** se para todo aberto U não vazio de X existe um conjunto V aberto não vazio de X tal que $\bar{V} \subset U$.

Definição 6.2: Um espaço topológico X é **ω_1 -Baire** se para toda família $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de abertos densos de X , $\bigcap_{\alpha < \omega_1} U_\alpha$ é densa em X .

Definição 6.3: Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma π -base para τ é um conjunto $\mathcal{U} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$ tal que para todo $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

No capítulo IV usaremos o conceito de espaço enumeravelmente compacto.

Definição 6.4: Um espaço topológico X é dito **enumeravelmente compacto** se toda cobertura aberta de X , enumerável, admite subcobertura finita.

Temos o seguinte teorema que nos dá uma caracterização importante para espaços enumeravelmente compactos.

Teorema 6.5: São equivalentes:

- (a) X é enumeravelmente compacto;
- (b) Todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação.

Aparecerão ainda os seguintes cardinais invariantes topológicos:

Definição: Seja (X, τ) um espaço topológico:

- (a) A densidade de X , $d(X)$ é o $\min\{|S| : S \subset X \text{ e } S \text{ é denso em } X\} + \aleph_0$.
- (b) $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ é uma base de vizinhanças para } x \text{ em } X\} + \aleph_0$ e é chamado o caráter x em X .
- (c) $\psi(x, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ é uma } \psi\text{-base local de } x \text{ em } X\} + \aleph_0$. Uma ψ -base de x em X é uma família $\mathcal{V} \subset \tau$ tal que $\bigcap \mathcal{V} = \{x\}$. $\psi(x, X)$ é chamado pseudo-caráter de x em X .

Vamos encerrar este item apresentando o conceito de filtro fechado livre.

Definição 6.7: Seja $\mathcal{P}$ uma coleção de subconjuntos não vazios de um conjunto X . Dizemos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, é um **filtro** se

- (1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- (2) se $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, então $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$;
- (3) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset A_1 \in \mathcal{P}$, então $A_1 \in \mathcal{F}$.

Um **filtro fechado** de um espaço topológico T_1, X é um filtro em $\mathcal{P}$ onde $\mathcal{P}$ é a coleção dos fechados não vazios de X .

Definição 6.8: Dizemos que $\mathcal{F}$ é um filtro **livre** se $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Temos a seguinte caracterização para filtros maximais em $\mathcal{P}$.

Teorema 6.9: Um filtro $\mathcal{F}$ é maximal em $\mathcal{P}$ sse todo conjunto $A \in \mathcal{P}$ interceptando todo membro de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.

Diremos que um filtro $\mathcal{F}$ é enumeravelmente fechado, ou σ -completo, se toda interseção enumerável de membros de $\mathcal{F}$ está em $\mathcal{F}$.

De forma dual a definição de filtro podemos definir **ideal** e dizemos que um ideal é um σ -**ideal** se toda união enumerável de membros do ideal está no ideal.

II - O PFA

Neste capítulo vamos apresentar o PFA e o conceito de ordem parcial própria, fazer alguns exemplos e duas aplicações do PFA. Os exemplos visam mostrar que as hipóteses colocadas no enunciado do axioma são realmente necessárias. Como em um dos exemplos a ordem parcial utilizada é parecida com a ordem parcial que usaremos em uma das aplicações, decidimos inverter a ordem que seria mais natural, ou seja, faremos uma das aplicações antes de mostrar os exemplos. Acreditamos que assim será mais fácil a compreensão do texto. Terminaremos o capítulo com uma aplicação do PFA na direção da versão topológica do Axioma de Martin.

1. Ordens Parciais Próprias

Neste item vamos introduzir o conceito de ordem parcial própria, que é essencial para o estudo do PFA. Embora tenha uma definição simples, esta não é muito útil quando se quer decidir se uma determinada ordem parcial é própria ou não. Para esse fim, é geralmente usada uma das caracterizações de ordem parcial própria, que serão apresentadas no teorema 1.4 deste capítulo. Para finalizar, mostraremos que ordens parciais ccc e ordens parciais *countably closed* são próprias.

Definição 1.1: Uma ordem parcial $\mathbf{P}$ é dita **própria** se, para todo conjunto X não enumerável e para todo conjunto $S \subseteq [X]^{\leq \omega}$ estacionário, S continua estacionário em $[X]^{\leq \omega}$ em $\mathbf{V}^{\mathbf{P}}$.

Assim, podemos dizer que $\mathbf{P}$ é própria se $\mathbf{P}$ não destrói conjuntos estacionários.

Para enunciarmos as duas formas equivalentes à definição de ordem parcial própria,

precisaremos das seguintes definições:

Definição 1.2: Se λ é um cardinal regular não enumerável e N é uma subestrutura elementar enumerável de $H(\lambda)$, com $\mathbf{P} \in N$, então dizemos que $p \in \mathbf{P}$ é $(\mathbf{P}, N)$ -**genérico** se $\forall D \in N$, se D é uma anticadeia maximal de $\mathbf{P}$, então $D \cap N$ é predenso abaixo de $\mathbf{P}$.

Definição 1.3: Consideremos o seguinte **jogo** $\Gamma(\mathbf{P})$ para dois jogadores I e II. O jogador I começa (no 0-ésimo movimento) escolhendo $p_0 \in \mathbf{P}$ e uma anticadeia maximal (em $\mathbf{P}$) A_0 . O jogador II responde escolhendo $B_0^0 \subset A_0$ enumerável. A seguir, I joga outra anticadeia maximal A_1 e II responde escolhendo $B_0^1 \subseteq A_0$ e $B_1^1 \subseteq A_1$ enumeráveis. Em geral, no n -ésimo movimento ($n > 0$) I joga uma anticadeia maximal A_n e II joga $B_i^n \subseteq A_i$ enumeráveis, para todo $i \leq n$. O jogo prossegue por ω movimentos e II ganhará o jogo se e somente se existir $q \leq p_0$ tal que para todo $i \in \omega$, $B_i = \cup \{B_i^n : n \geq i\}$ é predenso abaixo de q .

Teorema 1.4: São equivalentes:

- (a) $\mathbf{P}$ é própria.
- (b) Para todo λ regular, se $\lambda > |\{D \subseteq \mathbf{P} : D \text{ é uma anticadeia maximal}\}|$, então $\{N \prec H(\lambda) : N \text{ enumerável, } \mathbf{P} \in N \text{ e } \forall p \in \mathbf{P} \cap N \exists q \leq p \text{ tal que } q \text{ é } (\mathbf{P}, N)\text{-genérico}\}$ contém um fechado não limitado de $[H(\lambda)]^{\leq \omega}$.
- (c) O jogador II tem uma estratégia vencedora no jogo $\Gamma(\mathbf{P})$.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Seja $C = \{N \prec H(\lambda) : N \text{ enumerável, } \mathbf{P} \in N\}$. Então C é um fechado não limitado de $[H(\lambda)]^{\leq \omega}$. Fixemos $p \in \mathbf{P}$ e seja $S_p = \{N \in C : p \in N \text{ e não existe } q \leq p$

tal que q é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico}. Observemos inicialmente que será suficiente mostrarmos que cada S_p é não-estacionário. De fato, se cada S_p é não-estacionário, então para cada p existe um fechado não limitado C_p tal que $C_p \cap S_p = \emptyset$. Mas daí, pelo teorema I 4.9, $C' = \{N \in [H(\lambda)]^{\leq \omega} : \forall p \in N \ N \in C_p\}$ é fechado não limitado. Seja $S = \{N \in C : \exists p \in N \text{ tal que } N \in S_p\}$. Agora, $N \in C'$ implica que $\forall p \in N \ N \in C_p$, e como $C_p \cap S_p = \emptyset$, segue que, para todo $p \in N \ N \notin S_p$, ou seja, $N \notin S$. Temos assim que $C' \cap S = \emptyset$ e portanto $C' \cap C \subset C \setminus S$. Mas $C \setminus S$ é precisamente o conjunto da parte (b) do teorema.

Vamos então mostrar que cada S_p é não-estacionário. Seja G_p um $\mathbf{P}$ -genérico sobre $\mathbf{V}$ com $p \in G_p$. Trabalhando em $\mathbf{V}[G_p]$, vamos definir uma função da seguinte forma: se D é uma anticadeia maximal em $\mathbf{P}$ e $D \in \mathbf{V}$, então seja $f(D)$ o único q tal que $G_p \cap D = \{q\}$ (existe tal q , pois D é anticadeia maximal e é único, pois G_p é filtro). Tome agora

$C_p = \{N \prec H(\lambda)^{\mathbf{V}} : N \text{ enumerável, } \mathbf{P} \in N \text{ e } \forall D \in N \text{ se } D \text{ é uma anticadeia maximal em } \mathbf{P}, \text{ então } f(D) \in N\}$.

Temos então que C_p é um fechado não limitado em $[H(\lambda)]^{\leq \omega}$. É claro que C_p é fechado. Para mostrarmos que C_p é não limitado tomemos $N \in [H(\lambda)]^{\leq \omega}$. Seja $N_0 \prec H(\lambda)$ enumerável tal que $N \subset N_0$ e $\mathbf{P} \in N_0$. Tomemos $N_1 \prec H(\lambda)$ enumerável tal que $N_0 \subset N_1$ e, para todo $D \in N_0$, se D é uma anticadeia maximal em $\mathbf{P}$, então $f(D) \in N_1$. Dessa forma definimos N_n para todo $n \in \omega$. Tomemos $N' = \bigcup_{n \in \omega} N_n$. Daí $N' \in C_p$ e $N' \supset N$, e portanto C_p é não limitado.

Vamos mostrar que $C_p \cap S_p = \emptyset$.

Suponhamos que $N \in S_p$ e tomemos $q \leq p$ arbitrário. Como q não é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico (pela definição de S_p), existe uma anticadeia maximal $D \in N$ tal que $D \cap N$ não é predenso abaixo de q . Portanto existe $q' \leq q$ tal que q' é incompatível com todo elemento de $D \cap N$. Mas como q era arbitrário, mostramos que

$E = \{q' \leq p : \exists D \in N \text{ anticadeia maximal tal que } q' \text{ é incompatível com todo}$

elemento de $D \cap N$

é denso abaixo de p . Temos portanto que $G_p \cap E \neq \emptyset$. Tomemos $q' \in G_p \cap E$.

Agora, se $N \in C_p$, então $f(D) \in N \cap D$ e temos ainda que q' e $f(D)$ são compatíveis pois os dois pertencem a G_p . Mas isso contradiz o fato de que q' é incompatível com todo elemento de $D \cap N$, e portanto $C_p \cap S_p = \emptyset$.

Como $C_p \in V[G_p]$, nós apenas mostramos que S_p é não-estacionário em $V[G_p]$. Mas como estamos supondo que $\mathbf{P}$ é própria, se S_p fosse estacionário em V , S_p continuaria estacionário em $V[G_p]$. Logo temos que S_p é também não-estacionário em V .

(b) $\Rightarrow$ (a)

Seja X não enumerável e seja $S \subseteq [X]^{\leq \omega}$ estacionário. Pelo teorema I.4.12 é suficiente mostrarmos que se $p_0 \Vdash \dot{f} : [X]^{<\omega} \rightarrow X$, então $\exists q \leq p_0 \exists z \in S$ tal que $q \Vdash z$ é fechado para $\dot{f}$. De fato, o teorema I 4.12 nos diz que se C é um fechado não limitado em $[X]^{\leq \omega}$ então existe $f : [X]^{<\omega} \rightarrow X$ tal que $\{x \in [X]^{\leq \omega} : x \text{ é fechado para } f\} \subseteq C$. Podemos assim assumir que $C = \{x \in [X]^{\leq \omega} : x \text{ é fechado para } f\}$. Com isso, temos que $C \cap S \neq \emptyset$ se existe $z \in S$ tal que z é fechado para f . Como queremos mostrar que S é estacionário na extensão, temos que mostrar que existe tal z de forma que a condição esteja satisfeita na extensão, ou seja, que $\exists z \in S$ tal que $[z \text{ é fechado para } f]^{V[G]}$, e escrevendo isso em termos de *forcing*, temos exatamente a afirmação feita no início do parágrafo.

Para simplificar, vamos identificar $\dot{f}$ com $\{(p, a, x) : p \in \mathbf{P}, x \in [X]^{<\omega} \text{ e } p \Vdash \dot{f}(x) = a\}$.

Seja λ grande o suficiente para termos $\dot{f}, X \in H(\lambda)$ e para que (b) se aplique. Então, por (b), $C' = \{N \prec H(\lambda) : N \text{ enumerável, } \mathbf{P}, \dot{f}, X, p_0 \in N \text{ e } \forall p \in N \cap \mathbf{P} \exists q \leq p, q \text{ é } (\mathbf{P}, N)\text{-genérico}\}$ contém um fechado não limitado C . Segue do teorema I 4.13 que $\{N \cap X : N \in C\}$ contém um fechado não limitado de $[X]^{\leq \omega}$ (aplicamos o teorema

para $A = H(\lambda)$ e $B = X$; observe que $X \subseteq H(\lambda)$ pois $X \in H(\lambda)$ e $H(\lambda)$ é transitivo). Portanto, existe $N \in C$ tal que $N \cap X \in S$. Mostraremos que se $q \leq p_0$ é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico (existe tal q , pois $N \in C \subset C'$) então $q \Vdash N \cap X$ é fechado para $\dot{f}$, o que completará a demonstração de (b) $\Rightarrow$ (a).

Seja $x \in [N \cap X]^{<\omega}$. Então $x \in N$, o que implica que o conjunto $D = \{q \in \mathbf{P} : \text{ou } q \text{ é incompatível com } p_0 \text{ ou } q \leq p_0 \text{ e } \exists a \in X \text{ tal que } q \Vdash f(x) = a\} \in N$. Observemos que D é denso em $\mathbf{P}$ (por I 2.11).

Agora, em $H(\lambda)$ é verdade que D contém uma anticadeia maximal E , e portanto tal conjunto está em N também. Agora $E \cap N$ é predenso abaixo de q (pois q é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico). Tomemos $q' \leq q$ tal que $q' \Vdash \dot{f}(x) = a$. Então como q' é compatível com algum $r \in E \cap N$, temos que $r \Vdash \dot{f}(x) = a$. Mas a é definível por r, x e $\dot{f}$ e portanto $a \in N$. Temos assim que $q' \Vdash \dot{f}(x) \in N \cap X$.

Mas q' era arbitrário. Logo temos que $q \Vdash \dot{f}(x) \in N \cap X$. Como x também era arbitrário, concluímos que $q \Vdash N \cap X$ é fechado para $\dot{f}$, que era o que queríamos mostrar.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Seja λ algum cardinal satisfazendo (b) e seja C um fechado não limitado contido no conjunto descrito em (b). Vamos descrever uma estratégia vencedora para o jogador II no jogo $\Gamma(\mathbf{P})$.

Suponhamos que I começa jogando p_0 e A_0 . Então II encontra $N_0 \in C$ tal que $p_0, A_0 \in N_0$ e II responde jogando $B_0^0 = N_0 \cap A_0$. Se I joga A_1 , então II encontra $N_1 \in C$ com $N_0 \subseteq N_1$, $A_1 \in N_1$ e joga $B_0^1 = N_1 \cap A_0$ e $B_1^1 = N_1 \cap A_1$. E assim por diante.

No final do jogo, tome $N = \cup\{N_n : n \in \omega\}$. Daí $N \in C$, pois C é fechado, e como $p_0 \in N$, temos que existe $q \leq p_0$ que é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico. Mas agora para cada $i \in \omega$ temos que $\cup\{B_i^n : n \geq i\} = \cup\{N_n \cap A_i : n \geq i\} = N \cap A_i$, que é predenso abaixo de q

(pois q é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico e A_i é anticadeia maximal). Portanto, II ganha o jogo.

(c) $\Rightarrow$ (b)

Seja σ uma estratégia vencedora para II no jogo $\Gamma(\mathbf{P})$. Podemos assumir que σ é definida nas seqüências $(p_0, A_0, A_1, \dots, A_n)$ de jogadas do jogador I de forma que se II jogar $\sigma(p_0, A_0, \dots, A_n)$ no seu n -ésimo movimento, ele ganhará o jogo.

Agora seja λ como em (b) e observe que $\sigma \in H(\lambda)$. Será suficiente mostrarmos que se $N \prec H(\lambda)$, N enumerável, $\mathbf{P}, \sigma \in N$, então $\forall p \in N \cap \mathbf{P} \exists q \leq p$ tal que q é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico, já que o conjunto de todos esses N 's é fechado não limitado em $[H(\lambda)]^{\leq \omega}$.

Fixemos tal N . Seja $p_0 \in N \cap \mathbf{P}$ e seja $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ uma enumeração do conjunto de todas as anticadeias maximais que estão em N (N é enumerável). Agora, consideremos o jogo no qual I joga sucessivamente $(p_0, A_0), A_1, A_2, A_3, \dots$. Como $\sigma \in N$ e $p_0, A_0, \dots, A_n \in N$, temos que $\sigma(p_0, A_0, \dots, A_n) = (B_0^n, \dots, B_n^n) \in N$ e como cada B_i^n é enumerável, temos que $B_i^n \subseteq N$. Assim, no final do jogo, $B_i = \cup \{B_i^n : n \geq i\} \subseteq A_i \cap N$. Mas II ganha o jogo. Logo existe $q \leq p_0$ tal que cada B_i é predenso abaixo de q e portanto, cada $A_i \cap N$ é predenso abaixo de q . Segue então que q é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico.

Isso completa a demonstração do teorema 1.4. ■

Observemos que a demonstração da equivalência entre (b) e (c) mostra que é suficiente que (b) esteja satisfeito para um único λ .

Podemos, agora, facilmente mostrar que ordens parciais ccc e *countably closed* são próprias.

Teorema 1.5:

(a) Toda ordem parcial ccc é própria.

(b) Toda ordem parcial *countably closed* é própria.

Demonstração:

(a)

Suponhamos que $\mathbf{P}$ seja uma ordem parcial ccc e consideremos o jogo $\Gamma(\mathbf{P})$. Vamos mostrar uma estratégia vencedora para o jogador II.

Como $\mathbf{P}$ é ccc, toda antichain maximal que I jogar vai ser enumerável. Então II pode sempre jogar $B_i^n = A_i$ para todo $n \in \omega$ e para cada $i \leq n$. Teremos então que $B_i = A_i$ para todo $i \in \omega$ e portanto cada B_i é uma antichain maximal. Segue então que B_i é predense abaixo de p_0 para todo $i \in \omega$ e temos assim que II ganha o jogo.

(b)

Consideremos novamente o jogo $\Gamma(\mathbf{P})$, mas agora com $\mathbf{P}$ uma ordem parcial *countably closed*. Suponhamos que I jogue p_0, A_0 . Daí II responde escolhendo $q_1 \in A_0$ tal que q_1 é compatível com p_0 (existe, pois A_0 é maximal) e II joga $B_0^0 = \{q_1\}$. Seja $p_1 \in \mathbf{P}$ tal que $p_1 \leq p_0, q_1$. Na jogada seguinte, se I joga A_1 , II escolhe $q_2 \in A_1$ tal que q_2 é compatível com p_1 e joga $B_0^1 = \emptyset$ e $B_1^1 = \{q_2\}$. Seja $p_2 \in \mathbf{P}$ tal que $p_2 \leq q_2, p_1$. De modo geral, se I joga A_n , II escolhe $q_{n+1} \in A_n$ tal que q_{n+1} é compatível com p_n e joga $B_i^n = \emptyset$ se $i < n$ e $B_n^n = \{q_{n+1}\}$. Tomamos $p_{n+1} \in \mathbf{P}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n, q_{n+1}$.

Como $\mathbf{P}$ é *countably closed*, temos que existe $q \in \mathbf{P}$ tal que $q \leq p_n \ \forall n \in \omega$. Agora, $B_i = \{q_{i+1}\}$ é sempre predense abaixo de q , pois $q \leq p_{i+1} \leq q_{i+1}$. Temos assim que II ganha o jogo. ■

Finalizaremos este item com a seguinte consequência imediata da definição de ordem própria, que é bastante útil e será usada no capítulo III.

Teorema 1.6: Se $\mathbf{P}$ é uma ordem parcial própria (em $\mathbf{V}$) e $\mathbf{Q}$ é uma ordem parcial

própria em V^P , então $P * Q$ é própria.

Demonstração:

Se $S \subseteq [X]^{\leq \omega}$ é estacionário em V , então S continua estacionário em V^P , pois P é própria, e como Q é própria em V^P , S é estacionário em $(V^P)^Q = V^P * Q$. Portanto, $P * Q$ é própria. ■

Segue como consequência deste resultado que iterações finitas de ordens parciais próprias são próprias. Na realidade, é verdade que uma iteração com suporte enumerável de ordens parciais próprias continua sendo própria, independentemente do comprimento da iteração. Nós não precisaremos deste fato nas aplicações do PFA e por isso não o provaremos. A demonstração pode ser encontrada em [De] ou [Sh].

2. O PFA

O “Proper Forcing Axiom” (PFA) é a seguinte afirmação:

PFA: Se P é uma ordem parcial própria e $\langle D_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ é uma sequência de subconjuntos densos em P , então existe um filtro $G \subseteq P$ tal que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Como toda ordem parcial ccc é própria, temos que o PFA implica $MA(\omega_1)$. Assim, se tivermos $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ teremos que o PFA implica MA.

Talvez a primeira pergunta a ser feita é se o PFA é consistente com ZFC. Neste sentido temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1: Se “ZFC + existe um cardinal supercompacto” é consistente, então $ZFC + 2^{\aleph_0} = \aleph_2 + PFA$ também é.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [De]. Como a demonstração exige algumas sofisticacões na teoria de *large cardinals* e não acrescentaria nada às técnicas que serão usadas nas aplicações do PFA, vamos omiti-la. Faremos apenas algumas observaões no sentido de tentar explicar o por quê da necessidade de *large cardinals* para a consistência do PFA, sendo que não eram necessários para a consistência do MA.

Quando se mostra a consistência do MA, na realidade se mostra a consistência do MA restrito a ordens parciais de cardinalidade $< 2^{\aleph_0}$ (MA^*). Mas como é um teorema de ZFC que MA^* implica MA, segue a consistência do MA. Se tentarmos repetir os argumentos usados na demonstração da consistência do MA^* , com algumas modificaões conseguiremos mostrar a consistência de “ $2^{\aleph_0} = \aleph_2 + PFA$ para ordens parciais de cardinalidade $\leq \aleph_1$ ”. Faz-se necessário então algum princípio que garanta que a propriedade de uma ordem parcial ser própria seja “refletida” a uma subordem de cardinalidade $\leq \aleph_1$. A supercompacidade vai ser esse princípio.

3. Uma primeira aplicaão do PFA

Neste item apresentaremos uma primeira aplicaão do PFA que mostrará que de fato o PFA é mais “forte” do que o MA, no sentido de que ele é capaz de resolver problemas que independem do MA. Mostraremos uma consequência do PFA cuja negaão é consistente com o MA. Estaremos mostrando assim uma consequência do PFA que é independente de “ $ZFC + MA + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ ”.

Seja $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ uma família de subconjuntos infinitos de ω_1 . Podemos então fazer a seguinte pergunta:

Problema: Será que existe um conjunto $C \subset \omega_1$ fechado e não limitado de ω_1 tal que $A_\alpha \not\subset C \ \forall \alpha < \omega_1$?

Primeiramente mostraremos que é consistente com o MA que existe uma família $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ como acima tal que para todo conjunto fechado não limitado $C \subset \omega_1$, $C \supset A_\alpha$, para algum $\alpha < \omega_1$. Mostraremos depois que segue como consequência do PFA que a resposta do problema é sim para toda família $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos infinitos de ω_1 .

Vamos começar mostrando o seguinte fato sobre *forcing*:

Teorema 3.1: Em qualquer extensão ccc de $\mathbf{V}$, todo subconjunto fechado não limitado de ω_1 contém um conjunto fechado não limitado de $\mathbf{V}$.

Demonstração:

Seja $\dot{C}$ um termo da linguagem do *forcing* que denota C , onde C é um conjunto fechado não limitado da extensão $\mathbf{V}[G]$. Temos então que para algum $p \in G$, $p \Vdash \dot{C}$ é fechado não limitado em ω_1 .

Vamos trabalhar em $\mathbf{V}$. Para cada $\beta < \omega_1$, defina $Z_\beta = \{\gamma < \omega_1 : \text{para algum } q \leq p, q \Vdash \text{"}\gamma \text{ é o menor elemento de } \dot{C} \text{ que é maior que } \beta\text{"}\}$. Podemos então, para cada $\gamma \in Z_\beta$, associar um q_γ , onde $q_\gamma \Vdash \text{"}\gamma \text{ é o menor elemento de } \dot{C} \text{ que é maior que } \beta\text{"}$.

Se tivermos $\gamma \neq \gamma'$, mas q_γ e $q_{\gamma'}$ compatíveis, então existe $q' \leq q_\gamma, q_{\gamma'}$, e teremos que $q' \Vdash \text{"}\gamma \text{ e } \gamma' \text{ é o menor elemento de } \dot{C} \text{ que é maior que } \beta\text{"}$, ou seja, $\gamma = \gamma'$, o que é uma contradição. Portanto, temos que $\{q_\gamma : \gamma \in Z_\beta\}$ é uma anticadeia. Mas a ordem é ccc. Logo, $|\{q_\gamma : \gamma \in Z_\beta\}| < \omega_1$ e portanto $|Z_\beta| < \omega_1$. Temos então que $\sup Z_\beta < \omega_1$.

Seja D o conjunto de todos os $\alpha < \omega_1$ tal que $\alpha > 0$ e ainda

(1) Se $\beta < \alpha$ então $\sup Z_\beta < \alpha$.

Observemos que $D \in \mathbf{V}$. Temos ainda que D é fechado não limitado em ω_1 . De fato, seja $\langle \alpha_\xi : \xi < \omega \rangle$ uma seqüência em D com limite α . Temos que mostrar que $\alpha \in D$. Seja $\beta < \alpha$. Daí $\beta < \alpha_\xi$ para algum $\xi < \omega$ e portanto $\sup Z_\beta < \alpha_\xi < \alpha$.

Segue então que $\alpha \in D$, o que mostra que D é fechado. Para mostrarmos que D é não limitado, seja $\gamma < \omega_1$ e vamos construir por indução a seguinte sequência: tomemos $\xi_0 = \gamma$ e $\xi_{n+1} = \xi_n \cup \bigcup \{\sup Z_i + 1 : i < \xi_n\}$. Seja $\xi = \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$. Daí, se $\alpha < \xi$, então $\alpha \in \xi_n$ para algum n e portanto $\sup Z_\alpha < \xi_{n+1} < \xi$. Logo, $\xi \in D$. Como $\xi > \gamma$ e γ era qualquer, isso mostra que D é não limitado.

Só nos resta mostrar então que $p \Vdash D \subset \dot{C}$. Suponhamos que não. Então existe $q \leq p$ e $\alpha \in D$ tal que $q \Vdash \alpha \notin \dot{C}$. Então existe $q' \leq q$ e $\beta < \alpha$ tal que $q' \Vdash$ “ β é o maior membro de $\dot{C}$ que é $< \alpha$ ” (existe β pois $p \Vdash$ “ C é fechado”). Mas daí precisa existir $r \leq q'$ e γ tal que $r \Vdash$ “ γ é o menor elemento de $\dot{C}$ que é maior do que β ”. É claro que $\gamma > \alpha$. Mas $\gamma \in Z_\beta$, o que contradiz (1), pois $\alpha \in D$.

Temos então que $p \Vdash D \subseteq \dot{C}$, o que mostra o teorema. ■

Suponhamos agora que CH vale em V . Temos então que existe uma família $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos infinitos de ω_1 tal que todo conjunto fechado não limitado na extensão genérica ccc de V contém um dos A_α . Basta tomarmos $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ como sendo a família formada por todos os subconjuntos infinitos enumeráveis de ω_1 . Daí se C é fechado não limitado da extensão, então, pelo teorema 3.1, C contém um fechado não limitado de V e portanto contém algum A_α .

Suponhamos então que temos um modelo onde vale CH, e que a partir dele foi construído um modelo onde vale $MA + \neg CH$, do modo usual, ou seja, do modo como é construído na demonstração da consistência de $MA + \neg CH$. Como esse modelo obtido é uma extensão ccc do modelo que tínhamos inicialmente, vale que todo conjunto fechado não limitado neste modelo contém um dos A_α 's, onde $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ é a família construída acima (posso fazê-lo, pois no modelo inicial vale CH). Conseguimos assim construir um modelo onde vale MA e que satisfaz o fato de que existe uma família $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos infinitos de ω_1 tal que a resposta do problema é não.

Vamos agora mostrar que o PFA implica que a resposta do problema é sempre sim. Para isso, vamos utilizar a seguinte ordem parcial. Seja $\mathbf{P}$ o conjunto das funções parciais finitas p tal que para algum fechado não limitado $C \subseteq \omega_1$, se $f : \omega_1 \rightarrow C$ enumera C em ordem crescente, então $p \subseteq f$. Definimos $p \leq q$ sse $p \supseteq q$. Para podermos aplicar o PFA, temos primeiro que mostrar que $\mathbf{P}$ é própria. Para isso, porém, precisaremos do seguinte:

Definição 3.2: Um ordinal $\alpha < \omega_1$ é dito **indecomposable** se $\alpha = \omega^\beta$ para algum ordinal β (convém observar que aqui se trata de exponenciação de ordinais).

Lema 3.3: Se α é *indecomposable*, então:

- (a) $\forall \xi, \eta < \alpha, \quad \xi + \eta < \alpha$.
- (b) $\forall \gamma < \alpha, \{ \beta : \gamma \leq \beta < \alpha \}$ tem *order type* α .

Demonstração:

(a)

Se α é *indecomposable*, então $\alpha = \omega^\delta$, para algum ordinal δ . Vamos mostrar que (a) vale para todo ω^δ por indução em δ .

Se $\delta = 0$, então $\omega^\delta = \omega$. Portanto, $\xi, \eta < \omega^\delta$ implica que ξ, η são finitos e segue então que $\xi + \eta < \omega$. Se δ é sucessor, suponhamos que $\delta = \delta' + 1$. Daí $\eta, \xi < \omega^{\delta'+1} = \omega^{\delta'} \cdot \omega$ implica que $\eta, \xi < \omega^{\delta'} \cdot m$ para algum $m \in \omega$. Temos então que $\eta + \xi < \omega^{\delta'} \cdot (2m) < \omega^{\delta'+1}$. Se δ é limite, temos que se $\eta, \xi < \omega^\delta$, então $\eta, \xi < \omega^\theta$ para algum $\theta < \delta$. Mas daí, por hipótese de indução, $\eta + \xi < \omega^\theta < \omega^\delta$.

(b)

Fixemos $\gamma < \alpha$ e tomemos $f : \alpha = \omega^\delta \rightarrow \{ \beta : \gamma \leq \beta < \omega^\delta \}$ definida por $f(\xi) = \gamma + \xi$ $\forall \xi \in \alpha$. Então, f é uma função crescente e injetora. Temos ainda que f está bem

definida (i.e., $f(\xi) \in \{\beta : \gamma \leq \beta < \omega^\delta\} \forall \xi \in \alpha$) pelo item (a). Só nos resta então mostrar que f é sobrejetora. Temos que mostrar que, para todo β tal que $\gamma \leq \beta < \omega^\delta$, existe ξ tal que $\gamma + \xi = \beta$. Vamos mostrar por indução em β .

Se $\beta = \gamma$, basta tomarmos $\xi = 0$. Se β é sucessor, suponhamos que $\beta = \beta' + 1$. Por hipótese de indução, temos que existe ξ tal que $\beta' = \gamma + \xi$. Portanto $\beta = \gamma + (\xi + 1)$. Se β é limite, por hipótese de indução, temos que para todo β' tal que $\gamma \leq \beta' < \beta$, existe $\xi_{\beta'}$, tal que $\gamma + \xi_{\beta'} = \beta'$. Tomemos $\xi = \sup\{\xi_{\beta'} : \beta' < \beta\}$. Daí $\gamma + \xi = \sup\{\gamma + \xi' : \xi' < \xi\} = \sup\{\gamma + \xi_{\beta'} : \beta' < \beta\} = \sup\{\beta' : \beta' < \beta\} = \beta$.

Portanto, temos que $f : \alpha \rightarrow \{\beta : \gamma \leq \beta < \alpha\}$ é um isomorfismo, o que implica que $\{\beta : \gamma \leq \beta < \alpha\}$ tem *order type* α . ■

Segue agora o seguinte lema:

Lema 3.4: Se $p \in \mathbf{P}$, $\alpha > \max \text{imagem}(p)$ e α é indecomposable, então $p \cup \{(\alpha, \alpha)\} \in \mathbf{P}$.

Demonstração:

Suponhamos que p seja um subconjunto da função que enumera o fechado não limitado C . Seja $\gamma = \max \text{imagem}(p)$ e $C' = (C \cap \gamma) \cup (\omega_1 \setminus \gamma)$. Observemos que $\{x \in C' : x < \alpha\}$ tem *order type* α , pois contém $\{\beta : \gamma \leq \beta < \alpha\}$, que tem *order type* α , pelo lema 3.3.(b). Segue então que $p \cup \{(\alpha, \alpha)\}$ é um subconjunto da função que enumera C' e portanto temos que $p \cup \{(\alpha, \alpha)\} \in \mathbf{P}$. ■

Estamos agora prontos para mostrar que a ordem parcial $\mathbf{P}$ que tomamos é própria.

Teorema 3.5: $\mathbf{P}$ é própria.

Demonstração:

Observemos que, para todo $\alpha < \omega_1$, existe apenas um número não enumerável de

$p \in \mathbf{P}$ tal que $p \subseteq \alpha \times \alpha$. Se A é uma anticadeia maximal em $\mathbf{P}$, então para cada $\alpha < \omega_1$, seja $g(\alpha)$ o menor ordinal $\beta < \omega_1$ tal que $\forall p \in \mathbf{P}$ se $p \subseteq \alpha \times \alpha$, então existe $q \in A$ tal que q é compatível com p e $q \subseteq \beta \times \beta$.

Seja $C(A) = \{\beta : \forall \alpha < \beta \ g(\alpha) < \beta\}$. Temos que $C(A)$ é fechado e não limitado em ω_1 . De fato, seja $\langle \beta_\xi : \xi < \omega \rangle$ uma seqüência crescente com limite β tal que $\beta_\xi \in C(A) \ \forall \xi < \omega$. Se $\alpha < \beta$, então $\alpha < \beta_\xi$ para algum ξ , e como $\beta_\xi \in C(A)$ segue que $g(\alpha) < \beta_\xi < \beta$. Portanto, $\beta \in C(A)$, o que mostra que $C(A)$ é fechado. Seja agora $\gamma \in \omega_1$ qualquer. Por indução, defina $\beta_0 = \gamma$, $\beta_{n+1} = \beta_n \cup \{g(\alpha) + 1 : \alpha < \beta_n\}$. Seja $\beta = \bigcup \{\beta_n : n < \omega\}$. Daí, se $\alpha < \beta$, então $\alpha < \beta_n$ para algum n e portanto $g(\alpha) < \beta_{n+1}$, o que implica que $g(\alpha) < \beta$. Assim, temos que $\beta \in C(A)$ e $\beta < \gamma$. Portanto $C(A)$ é não limitado.

Vamos agora mostrar que $\mathbf{P}$ é própria usando o teorema 1.4. Mostraremos que vale 1.4(b). Seja $\lambda \leq \omega_2$ um cardinal regular arbitrário e seja N uma subestrutura elementar enumerável de $H(\lambda)$ com $\mathbf{P} \in N$ (isso vai acontecer automaticamente, pois $\mathbf{P}$ é definível em $H(\lambda)$). Vamos mostrar que $\forall p \in \mathbf{P} \cap N \ \exists q \leq p$ tal que q é $(\mathbf{P}, N)$ -genérico.

Fixemos $p \in \mathbf{P} \cap N$ e seja $q = p \cup \{(\alpha, \alpha)\}$, onde $\alpha = \omega_1 \cap N$. Observemos que se $\beta \in N$, então $\omega^\beta \in N$. Segue então que para todo $\beta \in \alpha$, como $\alpha = N \cap \omega_1$, vale que $\beta \in N$ e portanto $\omega^\beta \in N$, o que implica que $\omega^\beta \in \alpha$. Logo, temos que $\omega^\alpha = \alpha$ e portanto α é indecomposable. Como $p \subseteq \alpha \times \alpha$, pelo lema 3.4 segue que $q \in \mathbf{P}$. Temos ainda que se $A \in N$ é uma anticadeia maximal em $\mathbf{P}$, então $C(A) \in N$ também, pois $C(A)$ é definível a partir de A .

Agora, se $\bar{q} \leq q$ e $q' = \bar{q} \cap (\alpha \times \alpha)$, então q' está em N , pois q' é finito. Portanto, existe $r \in N \cap A$ tal que r é compatível com q' . Temos ainda que $r \subseteq \alpha \times \alpha$. Só resta mostrarmos que $\bar{q}$ é compatível com r . Mas isso acontece porque se $\bar{q}$ é um subconjunto da função que enumera C_1 e $q' \cup r$ está da mesma forma relacionado com C_2 , então $\bar{q} \cap r$ é um subconjunto da função que enumera $(C_2 \cap \gamma) \cup (\alpha \setminus \gamma) \cup (C_1 \setminus \alpha)$, onde $\gamma = \max \text{imagem}(q' \cup r)$. Portanto, $q \cup r \in \mathbf{P}$.

Segue assim que $\mathbf{P}$ é própria. ■

Estamos agora prontos para mostrar a nossa primeira aplicação do PFA.

Teorema 3.6: (PFA). Se $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ é uma família de subconjuntos infinitos de ω_1 , então existe um fechado não limitado C tal que $A_\alpha \not\subseteq C \ \forall \alpha < \omega_1$.

Demonstração:

Seja $\mathbf{P}$ a ordem definida acima. Vamos primeiro mostrar que

$$D_\alpha = \{p \in \mathbf{P} : \exists \gamma \in A_\alpha \exists \beta \text{ tal que } p(\beta) < \gamma < p(\beta + 1)\} \cup \\ \{p \in \mathbf{P} : 0 \in \text{dom } p \text{ e } \exists \gamma \in A_\alpha \text{ tal que } \gamma < p(0)\}$$

é denso em $\mathbf{P}$, para cada $\alpha < \omega_1$.

Seja $q \in \mathbf{P}$. Então $q \subset f$, onde f é uma função crescente que enumera um fechado não limitado de ω_1 , C . Temos dois casos possíveis:

Caso 1: $\exists \gamma \in A_\alpha$ tal que $\gamma \notin C$.

Suponhamos primeiro que $\gamma > \min C$. Podemos então definir $\xi = \min\{\alpha \in C : \alpha > \gamma\}$ e $\delta = \max\{\alpha \in C : \alpha < \gamma\}$ (existe δ , pois C é fechado). Então, como f enumera C em ordem crescente, temos que existe β tal que $f(\beta) = \delta$ e $f(\beta + 1) = \xi$. Basta agora tomarmos $p = q \cup \{(\beta, \delta), (\beta + 1, \xi)\}$. Daí $p \in D_\alpha$ e $p \leq q$.

Agora, pode acontecer que $\gamma < \min C$. Mas daí basta tomarmos $p = q \cup \{(0, \min C)\}$ e teremos que $p \in D_\alpha$ e $p \leq q$.

Caso 2: $A_\alpha \subset C$.

Suponhamos primeiro que existe $\gamma \in A_\alpha$ tal que $\gamma > \max \text{imagem } q$. Seja $C' = C \cap ((\max \text{imagem } q) + 1) \cup (\omega_1 \setminus \gamma + 1)$ e f' a função que enumera C' em ordem crescente. Daí temos que $q \subset f'$ e $\gamma \notin C'$. Podemos então repetir o que foi feito no caso

1 e achar $p \leq q$ tal que $p \in D_\alpha$.

Suponhamos agora que $\forall \gamma \in A_\alpha \ \gamma < \max \text{ imagem } q$ e que $q = \{(\beta_1, f(\beta_1)), \dots, (\beta_n, f(\beta_n))\}$. Podemos supor que $A_\alpha \subset \{\beta : f(\beta_1) < \beta < f(\beta_2)\} = A$. Temos então duas possibilidades:

(1) $\exists \mu \in \omega_1$ tal que $f(\mu + 1) \in A_\alpha$:

Como A_α é infinito e $A_\alpha \subset A$, segue que $f(\mu + \omega) < f(\beta_1)$. Portanto, $\mu + \omega < \beta_1$. Temos ainda que $f(\mu + 1)$ não pode ser limite de uma seqüência em C (pois $\{\gamma : f(\mu) < \gamma < f(\mu + 1)\} \cap C = \emptyset$), o que implica que $C \setminus \{f(\mu + 1)\}$ é também um fechado não limitado de ω_1 . Podemos tomar, então, $C' = C \setminus \{f(\mu + 1)\}$ e definir $g : \omega_1 \rightarrow C'$ tal que $g(\alpha) = f(\alpha)$ se $\alpha \leq \mu$ ou $\alpha \geq \mu + \omega$; $g(\mu + n) = f(\mu + n + 1) \ \forall n \in \omega, n \geq 1$. Temos então que g enumera C' em ordem crescente e que $p \subset g$. Como temos que $f(\mu + 1) \notin C'$ e $f(\mu + 1) \in A_\alpha$, podemos repetir novamente o que foi feito no caso 1.

(2) Não existe $\mu \in \omega_1$ tal que $f(\mu + 1) \in A_\alpha$.

Podemos supor que A_α tem order type ω e que $A_\alpha = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots\}$ onde $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots$. Como $A_\alpha \subset C$, para cada $\gamma_i \in A_\alpha$ podemos tomar $\gamma_i^* \in \omega_1$ tal que $f(\gamma_i^*) = \gamma_i$.

Agora, para cada γ_i^* definimos $\alpha_i = \text{order type } (\gamma_i^* \setminus \gamma_{i-1}^*)$ se $i \geq 1$ e $\alpha_0 = \text{order type } (\beta_1 \setminus \gamma_0^*)$. Tomemos $n \in \omega$ tal que $\alpha_n \leq \alpha_i \ \forall i \in \omega$. Como estamos supondo que A_α tem order type ω , vale que $B = \{\gamma_i^* : \gamma_i^* > \gamma_n^*\}$ é infinito. Portanto, temos que

$$\text{order type } \{\beta : \gamma_n^* < \beta < \beta_2\} \geq \sum_{i > n} \alpha_i \geq \sum_{i > n} \alpha_n = \alpha_n \cdot \omega.$$

Seja $\lambda \in \omega_1$ tal que $\text{order type } \{\beta : \gamma_n^* < \beta < \lambda\} = \alpha_n \cdot \omega$. Temos ainda que

$$\alpha_n + \alpha_n \cdot \omega = \alpha_n(1 + \omega) = \alpha_n \cdot \omega.$$

Conseguimos então um isomorfismo

$$h : \{\beta : \gamma_{n-1}^* < \beta < \lambda\} \rightarrow \{\beta : \gamma_n^* < \beta < \lambda\}.$$

Definimos agora $C' = C \setminus \{\beta : \gamma_{n-1} < \beta \leq \gamma_n\}$ e $g : \omega_1 \rightarrow C'$ dada por:

$$g(\alpha) = f(\alpha) \text{ se } \alpha \leq \gamma_{n-1}^* \text{ ou } \alpha \geq \lambda$$

$$g(\alpha) = f(h(\alpha)) \text{ se } \gamma_{n-1}^* < \alpha < \lambda.$$

(Observe que se por acaso $n = 0$, coloco β_1 no lugar de γ_{n-1}^* e $f(\beta_1)$ no lugar de γ_{n-1}).

Temos então que C' é fechado não limitado de ω_1 , g enumera C' em ordem crescente e $q \subset g$. Como $\gamma_n \notin C'$ e $\gamma_n \in A_\alpha$, podemos mais uma vez terminar a demonstração como no caso 1.

Isso mostrou que D_α é denso em $\mathbf{P} \quad \forall \alpha < \omega_1$.

O que é natural fazer agora é aplicar o PFA e tomar G um genérico tal que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset \quad \forall \alpha < \omega_1$. Seja $C = \cup \{\text{image } p : p \in G\}$. Observemos que, como p está sempre contido em uma função que enumera um fechado não limitado em ordem crescente, temos que se $p \in G$ e $p(\beta) < \gamma < p(\beta+1)$, então $\gamma \notin C$. Temos assim que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ implica que $A_\alpha \not\subseteq C$. Restaria apenas, então, mostrar que C é um fechado não limitado de ω_1 . Mas para poder garantir isso, precisaremos de mais alguns densos.

Seja $E_\alpha = \{p \in \mathbf{P} : \alpha \in \text{dom } p\} \quad \forall \alpha \in \omega_1$. É claro que cada E_α é denso em $\mathbf{P}$. Se $G \cap E_\alpha \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in \omega_1$, teremos que C é não limitado em ω_1 (pois $p(\alpha) \geq \alpha \quad \forall p \in \mathbf{P}$).

Tomemos agora $F_\alpha = \{p \in \mathbf{P} : \text{ou } \exists \beta \text{ tal que } p(\beta) < \alpha < p(\beta+1) \text{ ou } \exists \beta \text{ tal que } p(\beta) = \alpha\} \cup \{p \in \mathbf{P} : 0 \in \text{dom } p \text{ e } \alpha < p(0)\}$, para todo ordinal limite α . Temos que cada F_α é denso em $\mathbf{P}$. De fato, seja α um ordinal limite e $p \in \mathbf{P}$. Suponhamos que $p \subset f$ onde f é a função que enumera um fechado não limitado C' . Se $\alpha \in C'$, é só tomar β tal que $f(\beta) = \alpha$ e definir $q = p \cup \{(\beta, \alpha)\}$. Se $\alpha \notin C'$ repetimos o que foi feito no caso 1 para mostrar que D_α é denso. Suponhamos então que $G \cap F_\alpha \neq \emptyset$. Daí teremos que ou $\alpha \in C$ ou α não é limite de uma seqüência em C . Segue então que se $G \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para todo ordinal limite α , então C é fechado.

Concluimos assim que para obter C como queremos basta tomarmos G um genérico tal que G intercepta todos os D_α , E_α e F_α e isso pode ser feito usando o PFA, pois $|D_\alpha \cup E_\alpha \cup F_\alpha| = \omega_1$. ■

4. Alguns Exemplos

No primeiro exemplo, vamos verificar que alguma hipótese sobre a ordem parcial $\mathbf{P}$ é necessária no enunciado do PFA. Veremos que se $\mathbf{P}$ colapsa ω_1 , então o PFA não pode ser aplicado. Poderia se perguntar, então, se não poderíamos aplicar o PFA para ordens parciais que não colapsam ω_1 , mas não são próprias. O segundo exemplo nos mostrará que não.

Um outro tipo de pergunta natural, é se não podemos estender o PFA de modo que possamos tomar $\aleph_2$ conjuntos densos em $\mathbf{P}$ ao invés de apenas $\aleph_1$. Mais uma vez a resposta é não, e o exemplo 3 justificará essa afirmação. Nessa direção, veremos no capítulo seguinte que, na realidade, vale que o PFA é incompatível com $\text{MA}(\omega_2)$, ou seja, mostraremos que o PFA implica a negação de $\text{MA}(\omega_2)$.

Exemplo 4.1:

Seja $\mathbf{P}$ uma ordem parcial que colapsa ω_1 . Daí temos que existe $\dot{f}$ tal que $\Vdash \dot{f} : \omega \rightarrow \omega_1$ é sobrejetora. Para cada $\alpha < \omega_1$, seja $D_\alpha = \{p \in \mathbf{P} : \exists n \text{ tal que } p \Vdash \dot{f}(n) = \alpha\}$. Temos então que D_α é denso em $\mathbf{P}$, para todo $\alpha < \omega_1$. De fato, se $q \in \mathbf{P}$, então $q \Vdash \dot{f} : \omega \rightarrow \omega_1$ é sobrejetora, e portanto $q \Vdash \exists n \text{ tal que } \dot{f}(n) = \alpha$. Mas daí, por I 2.11, $\{r \leq q : \exists n \text{ tal que } r \Vdash \dot{f}(n) = \alpha\}$ é denso abaixo de q , e portanto D_α é denso em $\mathbf{P}$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Suponhamos agora que o PFA possa ser aplicado e então seja G um genérico em $\mathbf{P}$ que intercepta D_α , para todo $\alpha < \omega_1$. Tomemos a seguinte função:

$$g = \{(n, \alpha) : \exists p \in G \text{ tal que } p \Vdash \dot{f}(n) = \alpha\}.$$

Como $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \omega_1$, segue que g é uma função sobrejetora de um subconjunto de ω em ω_1 , o que é um absurdo. Concluimos assim que o PFA não pode ser aplicado para ordens parciais que colapsam ω_1 . ■

No próximo exemplo, precisaremos do seguinte resultado combinatório.

Lema 4.2: Se $S \subseteq \omega_1$ é estacionário, então para todo $\alpha < \omega_1$ existe um conjunto fechado $x \subseteq S$ de order type $\alpha + 1$.

Demonstração:

Mostraremos por indução em α que $\forall \gamma < \omega_1 \exists x \subset S \setminus \gamma$ tal que x é fechado e tem order type $\alpha + 1$. Para $\alpha = 0$, basta tornarmos x um unitário contido em $S \setminus \gamma$. Se α é sucessor, suponhamos que $\alpha = \beta + 1$; por hipótese de indução (aplicado para β), existe $x \subset S \setminus \gamma$ fechado com order type $\beta + 1$. Basta tomarmos então $y \in S \setminus \gamma$ tal que $y > \sup x$ e daí $x \cup \{y\} \subset S \setminus \gamma$ e tem order type $\alpha + 1$. Observemos que não haverá problema em acharmos tal y , pois S é estacionário e portanto não limitado.

Suponhamos agora que α é um ordinal limite. Seja

$C = \{\beta \in \omega_1 : \forall \gamma < \beta \forall \delta < \alpha \exists x \subseteq (S \cap \beta) \setminus \gamma \text{ tal que } x \text{ é fechado e tem order type } \delta + 1\}$.

Temos que C é fechado não limitado. De fato, observemos primeiro que

$$C = \bigcap_{\delta < \alpha} \{\beta \in \omega_1 \mid \forall \gamma < \beta \exists x \subset (S \cap \beta) \setminus \gamma \text{ fechado com order type } \delta + 1\}.$$

Seja $C_\delta = \{\beta \in \omega_1 \mid \forall \gamma < \beta \exists x \subset (S \cap \beta) \setminus \gamma \text{ fechado com order type } \delta + 1\}$.

Basta mostrarmos que cada C_δ é um fechado não limitado.

Seja $\langle \beta_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência crescente com limite β tal que $\beta_n \in C_\delta$ $\forall n \in \omega$. Daí se $\gamma < \beta$, então $\gamma < \beta_m$ para algum $m \in \omega$, e portanto como $\beta_m \in C_\delta$, $\exists x \subset (S \cap \beta_m) \setminus \gamma$ fechado com order type $\delta + 1$. Mas daí $x \subset (S \cap \beta) \setminus \gamma$, o que implica

que $\beta \in C_\delta$. Temos então que C_δ é fechado.

Seja agora $\beta < \omega_1$. Como $\delta < \alpha$, por hipótese de indução $\exists x_0 \subset S \setminus \beta$ fechado com *order type* $\delta + 1$. Seja $\gamma_1 = (\max x_0) + 1$. Daí $\exists x_1 \subset S \setminus \gamma_1$ fechado com *order type* $\delta + 1$. Seja $\gamma_2 = (\max x_1) + 1$. De modo geral, podemos tomar $x_n \subset S \setminus \gamma_n$ fechado com *order type* $\delta + 1$ e definir $\gamma_{n+1} = (\max x_n) + 1$. Tomemos $\beta_* = \sup \gamma_n$. Daí $\beta_* \in C_\delta$, pois se $\gamma < \beta_*$, então $\gamma < \gamma_n$ para algum n e temos que $x_n \subset (S \cap \beta_*) \setminus \gamma$ (pois sempre tomamos $\gamma_{n+1} = (\max x_n) + 1$); portanto, $x_n \subset (S \cap \beta_*) \setminus \gamma$. Temos ainda que $\beta_* > \beta$, o que mostra que C_δ é não limitado.

Mostramos assim que cada C_δ é um fechado não limitado de ω_1 e portanto C é também um fechado não limitado de ω_1 .

Temos então que existe $\mu \in C \cap S$. Observemos que $\mu \geq \alpha$, pois $\mu \in C$. Podemos supor μ com cofinalidade $\aleph_0$ (pois $\{\alpha \in \omega_1 \mid cf(\alpha) = \aleph_0\}$ é fechado não limitado em ω_1).

Seja $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ uma seqüência crescente com limite α . Podemos agora fazer a seguinte construção por indução. Tomamos $x_0 \subset S \cap \mu$ fechado com *order type* $\alpha_0 + 1$; seja $\gamma_0 = \max x_0 < \mu$. Tomamos $x_1 \subset S \cap \mu \setminus \gamma_0$ fechado com *order type* $\alpha_1 + 1$; seja $\gamma_1 = \max x_1 < \mu$. De modo geral, tomamos $x_n \subset S \cap \mu \setminus \gamma_{n-1}$ fechado com *order type* $\alpha_n + 1$ e $\gamma_n = \max x_n < \mu$. Essa construção pode ser feita, pois $\mu \in C$.

Se vale que $\sum_{n \in \omega} \alpha_n + 1 = \alpha$, tomamos $x = \{\mu\} \cup \bigcup \{x_n : n \in \omega\}$. Daí $x \subseteq S$, x é fechado e tem *order type* $\alpha + 1$, pois, como os x_n 's são disjuntos, vale que $\bigcup \{x_n : n \in \omega\}$ tem *order type* igual a $\sum_{n \in \omega} \alpha_n + 1 = \alpha$. Observemos que $\mu \notin \bigcup \{x_n : n \in \omega\}$, pois $x_i \subset \mu \quad \forall i \in \omega$.

Suponhamos agora que $\sum_{n \in \omega} \alpha_n + 1 > \alpha$. Daí existe $m \in \omega$ tal que $\alpha_0 + 1 + \alpha_1 + 1 + \dots + \alpha_m + 1 > \alpha$ e portanto $\sum_{i=1}^m \alpha_i + 1 \geq \alpha$. Temos então que existe uma função $f : \alpha + 1 \rightarrow x_0 \cup \dots \cup x_m$ crescente que leva fechado em fechado e segmento inicial em segmento inicial. Como $\alpha + 1$ é um segmento inicial fechado, temos que $f(\alpha + 1)$ é um

segmento inicial fechado de $x_1 \cup \dots \cup x_m$. Tomemos então $x = f(\alpha + 1)$. Daí $x \subset S$ é fechado e tem *order type* $\alpha + 1$.

Poderíamos ainda ter construído x de modo que $\gamma < \min x$ para qualquer γ fixado. Era só ter tomado x_0 de modo que $\gamma < \min x_0$ (talvez seja necessário tomar μ maior, mas isso é sempre possível, pois $\omega_1 \setminus \mu$ é fechado não limitado para todo $\mu \in \omega_1$).

Completamos assim a nossa indução e com isso mostramos o lema. ■

Exemplo 4.3:

Tomemos $\mathbf{P} = \{p \mid p \text{ é finito e existe um conjunto fechado enumerável } c \text{ tal que } p \subset f, \text{ onde } f \text{ é a função que enumera } c \text{ em ordem crescente}\}$. Definimos $p \leq q$ sse $p \supseteq q$. Suponhamos que $S \subseteq \omega_1$ é estacionário. Então definimos $\mathbf{P}_S = \{p : p \text{ é finito e para algum fechado enumerável } c \subseteq S, p \subset f, \text{ onde } f \text{ é a função que enumera } c \text{ em ordem crescente}\}$ e diremos que $p \leq q$ sse $p \supseteq q$.

Primeiramente, mostraremos que, se forcarmos com $\mathbf{P}_S$, adicionaremos um conjunto fechado não limitado dentro de S .

De fato, seja $D_\alpha = \{p \in \mathbf{P}_S : \max \text{ imagem } p \geq \alpha\}$, para cada $\alpha < \omega_1$. Vamos mostrar que D_α é denso em $\mathbf{P}_S \forall \alpha < \omega_1$. Pelo lema 4.2 temos que, se $q \in \mathbf{P}_S$ podemos achar um conjunto fechado $x \subset S$ tal que $c' = (c \cap (\max \text{ imagem } q) + 1) \cup (x \setminus (\max \text{ imagem } q) + 1)$ tem *order type* maior do que α , onde c é tal que $q \subset f$, f a função crescente que enumera c . Basta então tomarmos $p \subset f'$, onde f' é a função que enumera c' em ordem crescente, de modo que $p \leq q$ e $\max \text{ imagem } p \geq \alpha$. Observemos que conseguimos p tal que p estende q , pois para definir c' apenas alteramos c acima do $(\max \text{ imagem } q) + 1$.

O conjunto fechado não limitado que queremos será $C = \bigcup \{\text{imagem } p : p \in G\}$, onde G é um genérico que intercepta D_α , $\forall \alpha < \omega_1$. Temos então que $C \subset S$, pois $\text{imagem } p \subset S \forall p \in \mathbf{P}_S$ e do fato de que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha < \omega_1$ segue que C é não limitado. Porém, temos ainda que garantir que C é fechado. Para isso, procedemos

de modo análogo ao que foi feito na demonstração do teorema 3.6 deste capítulo. Ou seja, tomamos $F_\alpha = \{p \in \mathbf{P} : \text{ou } \exists \beta \text{ tal que } p(\beta) < \alpha < p(\beta + 1) \text{ ou } \exists \beta \text{ tal que } p(\beta) = \alpha\} \cup \{p \in \mathbf{P} : 0 \in \text{dom } p \text{ e } \alpha < p(0)\}$, para todo ordinal limite $\alpha < \omega_1$. Para mostrar que cada F_α é denso é análogo, com apenas uma complicação a mais no caso em que $\alpha \notin c$, $\alpha > \min c$. Como aqui c é um fechado enumerável, poderia acontecer que $\alpha > \max c$. Mas daí podemos proceder como na demonstração de que D_α é denso, e construir c' tal que $c \cap (\max \text{ imagem } p) + 1 = c' \cap (\max \text{ imagem } p) + 1$ e c' tem *order type* $> \alpha$, recaindo assim nos casos anteriores (pois daí teremos que $\alpha < \max c'$). Tomando agora G um genérico tal que $G \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para todo α , garantimos que c é fechado.

Conseguimos assim construir um conjunto fechado não limitado dentro de S , como queríamos.

Agora, se escolhermos S de modo que $\omega_1 \setminus S$ também é estacionário (isso é possível pelo teorema I 4.5) ao forçarmos com $\mathbf{P}_S$, $\omega_1 \setminus S$ deixará de ser estacionário, já que ele não vai interceptar o fechado não limitado que foi adicionado dentro de S . Temos então que, neste caso, $\mathbf{P}_S$ não pode ser própria.

Suponhamos agora que o PFA possa ser aplicado para $\mathbf{P}_S$ e $\mathbf{P}_{\omega_1 \setminus S}$. Daí conseguimos construir conjuntos fechados não limitados C_1 e C_2 dentro de S e de $\omega_1 \setminus S$, respectivamente. Observemos que quando construímos C na demonstração acima foram necessários apenas ω_1 conjuntos densos, e por isso a mesma construção pode ser feita usando o PFA. Conseguimos portanto construir dois fechados não limitados de ω_1 com intersecção vazia, o que é um absurdo. Concluimos assim que o PFA não pode ser aplicado para $\mathbf{P}_S$ e $\mathbf{P}_{\omega_1 \setminus S}$.

Como o nosso objetivo era mostrar um exemplo de uma ordem parcial para a qual não pode ser aplicado o PFA, mas a ordem não colapsa ω_1 , nos resta ainda mostrar que $\mathbf{P}_S$ e $\mathbf{P}_{\omega_1 \setminus S}$ têm essa propriedade.

Temos assim que o nosso exemplo estará completo quando mostrarmos o seguinte:

Teorema 4.3.1: Se S é estacionário, então $\mathbf{P}_S$ não colapsa ω_1 .

Demonstração:

Suponhamos que $\Vdash \dot{f} : \omega \rightarrow \omega_1$ e tomemos $p_0 \in \mathbf{P}_S$ arbitrário. Para cada $n \in \omega$, seja $D_n = \{p \in \mathbf{P}_S : \exists \alpha \ p \Vdash \dot{f}(n) = \alpha\}$. Observemos que D_n é denso em $\mathbf{P}_S$ para cada $n \in \omega$ (por I 2.11). Seja agora $\langle N_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ uma seqüência de subestruturas elementares enumeráveis de $H(\omega_1)$ tal que $p_0, S, \mathbf{P}_S, \langle D_n : n \in \omega \rangle \in N_0$ e $\forall \xi < \omega_1$, $\omega_1 \cap N_\xi < \omega_1 \cap N_{\xi+1}$, e se ξ é limite, então $N_\xi = \bigcup \{N_\eta : \eta < \xi\}$. Segue então que $C = \{N_\xi \cap \omega_1 : \xi < \omega_1\}$ é fechado não limitado em ω_1 e portanto existe ξ tal que $\alpha = N_\xi \cap \omega_1 \in S$. Observemos que α é *indecomposable* (igual a α da demonstração de II 3.5).

Seja $q = p_0 \cup \{(\alpha, \alpha)\}$. Vamos mostrar que $q \in \mathbf{P}_S$. Seja $x_0 \in N_\xi$ tal que p_0 é um subconjunto da função que enumera x_0 , x_0 é fechado e $x_0 \subseteq S$. Como o lema 4.2 vale em $H(\omega_1)$, ele também vale em N_ξ . Do fato de α ser *indecomposable* segue que, em particular, α é um ordinal limite. Assim, pelo passo α da indução feita na demonstração do lema 4.2 (mas em N_ξ), conseguimos conjuntos $x_n \in N_\xi$ fechados tal que x_n tem *order type* $\alpha_n + 1$, onde $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ é uma seqüência crescente com limite α . Observemos que, como α é *indecomposable*, temos que $\sum \{\alpha_n + 1 : n \in \omega\} = \sup \{\alpha_n : n \in \omega\} = \alpha$. Consideremos agora o conjunto $x = \{\alpha\} \cup \bigcup \{x_n : n \in \omega\}$. Pelo que foi observado anteriormente, segue que *order type* $(\bigcup \{x_n : n \in \omega\}) = \sum \{\alpha_n + 1 : n \in \omega\} = \alpha$. Assim sendo, temos que q é um subconjunto da função crescente que enumera x e portanto $q \in \mathbf{P}_S$. Observemos ainda que podemos mostrar que q é $(\mathbf{P}_S, N_\xi)$ -genérico, da mesma forma que mostramos, na demonstração de II 3.5, que o q tomado lá era $(\mathbf{P}, N)$ -genérico.

Agora, cada D_n é denso. Então para cada n conseguimos $A_n \subset D_n$ tal que A_n é anticadeia maximal em $\mathbf{P}$. Como q é $(\mathbf{P}_S, N_\xi)$ -genérico, tenho que $A_n \cap N_\xi$ é predenso abaixo de $q \ \forall n \in \omega$, e portanto, $D_n \cap N_\xi$ é predenso abaixo de $q \ \forall n \in \omega$,

ou seja, $\{p \in \mathbf{P}_S : \exists \alpha p \Vdash \dot{f}(n) = \alpha\} \cap N_\xi$ é predenso abaixo de q , $\forall n \in \omega$. Temos portanto, por I 2.11, que $\forall n$

$$q \Vdash \dot{f}(n) \in \{\beta : \exists p \in D_n \cap N_\xi \text{ tal que } p \Vdash \dot{f}(n) = \beta\}.$$

Seja $\bar{\beta} = \sup\{\beta : \exists n \exists p \in D_n \cap N_\xi \text{ tal que } p \Vdash \dot{f}(n) = \beta\} < \omega_1$. Então temos que $q \Vdash \dot{f} : \omega \rightarrow \bar{\beta}$. Mostramos assim que se $\Vdash \dot{f} : \omega \rightarrow \omega_1$, então conseguimos $\bar{\beta} < \omega_1$ e $q \in \mathbf{P}$ tal que $q \Vdash \dot{f} : \omega \rightarrow \bar{\beta}$, ou seja, não conseguimos $\dot{f}$ tal que $\Vdash \dot{f}$ é uma sobrejeção de ω em ω_1 . Logo ω_1 não é colapsado, como queríamos mostrar. ■

Exemplo 4.4:

Seja $\mathbf{P} = \cup\{\alpha\omega_2 : \alpha < \omega_1\}$, ordenado por: $p \leq q$ sse $p \supseteq q$. Observemos primeiro que $\mathbf{P}$ é *countably closed*, e portanto é própria. De fato, se $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ é uma seqüência decrescente de elementos de $\mathbf{P}$, tomamos $q = \cup\{p_n : n \in \omega\}$. Daí $q \leq p_n$ $\forall n \in \omega$ e $q \in \mathbf{P}$, pois $|q| < \omega_1$, já que $|p_n| < \omega_1$ para cada $n \in \omega$ e ω_1 é regular.

Suponhamos agora que o PFA possa ser aplicado de modo que podemos tomar $\aleph_2$ conjuntos densos, ao invés de $\aleph_1$. Seja $D_\alpha = \{p \in \mathbf{P} \mid \alpha \in \text{dom } p\} \forall \alpha < \omega_1$ e $E_\beta = \{p \in \mathbf{P} \mid \beta \in \text{imagem } p\}$, $\forall \beta < \omega_2$. Daí cada D_α e cada E_β é denso em $\mathbf{P}$ (pois dado $p \in \mathbf{P}$, basta estender p para q de modo que $q \leq p$ e $\alpha \in \text{dom } q$ ou $\beta \in \text{imagem } q$, conforme for o caso).

Tomemos agora um genérico G tal que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha < \omega_1$ e $G \cap E_\beta \neq \emptyset \forall \beta < \omega_2$. Como G é um filtro, os elementos de G são dois a dois compatíveis, e portanto $\cup G$ é uma função com domínio contido em ω_1 e imagem contida em ω_2 . Como $G \cap D_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha < \omega_1$, temos que $\alpha \in \text{dom}(\cup G) \forall \alpha < \omega_1$, ou seja, $\text{dom}(\cup G) = \omega_1$. Temos ainda que $G \cap E_\beta \neq \emptyset \forall \beta < \omega_2$, o que implica que $\beta \in \text{imagem}(\cup G) \forall \beta < \omega_2$, ou seja, $\text{imagem}(\cup G) = \omega_2$. Temos assim que $\cup G$ é uma função sobrejetora de ω_1 em ω_2 , o que é um absurdo.

Mostramos assim que não podemos aplicar o PFA para $\aleph_2$ conjuntos densos, como queríamos. ■

5. Uma aplicação do PFA na categorias dos espaços ω_1 -Baire

Talvez um dos resultados mais conhecidos sobre o MA, seja o fato de ele ser equivalente a:

Versão topológica do MA: Se X é um espaço compacto Hausdorff ccc e $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$, $\lambda < 2^{\aleph_0}$ é uma família de abertos densos de X , então $\bigcap_{\alpha < \lambda} U_\alpha \neq \emptyset$.

Se queremos apenas uma consequência do MA, a hipótese de que X é compacto Hausdorff pode ser enfraquecida. Podemos substituí-la, por exemplo, pela hipótese de que X é um espaço “Martin- $< 2^{\aleph_0}$ completo” ([Fr]), que será definido neste item.

Quando demonstramos que o MA implica a sua versão topológica, ou mesmo a “versão” com a hipótese sobre X enfraquecida, precisamos de que o espaço X seja ccc, unicamente para garantir que a ordem tomada é ccc, que é essencial para se poder aplicar o MA. Como $\text{PFA} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ implica o MA, também implicará as consequências do MA acima mencionadas. No entanto, se vamos aplicar o PFA e não o MA, não precisamos mais que a ordem parcial tomada seja ccc, basta ser própria. É natural então perguntar que hipótese que precisamos colocar sobre X para garantir que a ordem parcial que vai ser tomada seja própria. É nessa direção que mostraremos uma consequência do PFA.

Primeiramente vamos introduzir o conceito de espaços Martin- κ -completo e espaços Martin- $< \kappa$ -completo.

Definição 5.1: Seja κ um cardinal. Um espaço topológico X é **Martin- κ -completo** se existe $\preceq, U$ tal que:

- (i) $\preceq$ é uma ordem parcial nos subconjuntos abertos não vazios de X tal que $G \preceq H \Rightarrow G \subseteq H$ e $G \subseteq G' \prec H' \subseteq H \Rightarrow G \prec H$.
- (ii) Se G_1 e G_2 são conjuntos abertos e $\emptyset \neq G_1 \subset G_2$, então existe $H \neq \emptyset$ aberto tal que $H \subseteq G_1$ e $H \prec G_2$.
- (iii) $\mathcal{U}$ é uma coleção de π -bases para a topologia de X .
- (iv) Se $\mathcal{G}$ é uma família de subconjuntos abertos não vazios de X tal que $\mathcal{G}$ é dirigido para $\preceq$ e $\mathcal{G}$ encontra todo membro de $\mathcal{U}$, então $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
- (v) $|\mathcal{U}| \leq \kappa$.

Se X é **Martin-0-completo** (isto é, as condições acima podem ser satisfeitas com $\mathcal{U} = \emptyset$), então diremos que X é **Martin-completo**.

Definição 5.2: Dizemos que X é **Martin- $< \kappa$ -completo** se X for **Martin- λ -completo** para algum $\lambda < \kappa$.

Será útil o seguinte lema:

Lema 5.3: Se $\preceq$ satisfaz as condições 5.1(i) e 5.1(ii), então sempre que G_1 e G_2 são conjuntos abertos tais que $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, existe H não vazio, aberto, tal que $H \preceq G_1$ e $H \preceq G_2$.

Demonstração:

Se $G_2 \not\subseteq G_1$, então $G_1 \cap G_2 \subsetneq G_2$. Por 5.1(ii), temos que existe H_1 não vazio aberto tal que $H_1 \subseteq G_1 \cap G_2$ e $H_1 \prec G_2$. Se $H_1 = G_1$, tomamos $H = H_1$. Se $H_1 \subsetneq G_1$, usamos 5.1(ii) novamente e achamos $H \subseteq H_1$, aberto e não vazio tal que $H \prec G_1$. Daí $H \subseteq H_1 \prec G_2$. Portanto, $H \prec G_2$, por 5.1(ii).

Se $G_1 \not\subseteq G_2$ usamos o mesmo argumento e se $G_1 = G_2$, tomamos $H = G_1 = G_2$. ■

Acreditamos ser importante citar alguns exemplos de espaços topológicos que sejam

Martin- κ -completo. Para isso, porém, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 5.4: A condição 5.1(iv) é equivalente a:

(iv)' Se $\mathcal{G}$ é uma coleção não vazia de conjuntos abertos não vazios, dirigidos para $\subseteq$, tal que para todo $G \in \mathcal{G}$ existe $H \in \mathcal{G}$ tal que $H \prec G$, e também tal que para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ existe $G \in \mathcal{G}$, $V \in \mathcal{U}$ tal que $G \subseteq V$, então $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Demonstração:

É claro que quando vamos verificar a condição 5.1(iv), é suficiente considerarmos as famílias $\mathcal{G}$ não vazias que não possuem menor elemento (para $\subseteq$ usual). Consideremos então $\preceq$ satisfazendo as condições 5.1(i) e 5.1(ii) e $\mathcal{G}$ uma coleção não vazia de conjuntos abertos, não vazios, sem menor elemento (para $\subseteq$). Temos que vale o seguinte:

$\mathcal{G}$ é dirigido para $\preceq \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \mathcal{G}$ é dirigido para $\subseteq$ e $\forall G \in \mathcal{G} \exists H \in \mathcal{G}$ tal que $H \prec G \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{G}^* = \{H : H \subseteq X \text{ é aberto e } \exists G \in \mathcal{G}(H \supseteq G)\}$ é dirigido para $\preceq$.

A primeira equivalência segue em um sentido $(\Rightarrow)$ porque $\preceq$ satisfaz $G \preceq H \Rightarrow G \subseteq H$ e porque $\mathcal{G}$ não tem menor elemento, e no outro $(\Leftarrow)$ porque por 5.1(i) $(G \prec H \subseteq H' \Rightarrow G \preceq H')$. A segunda equivalência segue direito do fato de $\mathcal{G}$ ser dirigido e de $\preceq$ satisfazer 5.1(i). Observemos que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^*$.

Observemos ainda que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ sse $\bigcap \mathcal{G}^* \neq \emptyset$.

Vamos mostrar agora que (iv) é equivalente a (iv)'.

(iv) $\Rightarrow$ (iv)': Suponha $\mathcal{G}$ satisfazendo as condições de (iv)'. Consideremos $\mathcal{G}^*$ como acima. Por (2) segue que $\mathcal{G}^*$ é dirigido para $\preceq$. Temos que mostrar que $\mathcal{G}^*$ intercepta todos os membros de $\mathcal{U}$. Mas temos que $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{U} \exists G \in \mathcal{G}$ e $V \in \mathcal{U}$ tais que $G \subseteq V$. Logo pela definição de $\mathcal{G}^*$ temos que $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U}$ tal que $V \in \mathcal{G}^*$, que é o que queríamos mostrar. Temos assim que $\mathcal{G}^*$ satisfaz as hipóteses de (iv). Segue então que $\bigcap \mathcal{G}^* \neq \emptyset$ e portanto $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

(iv)' $\Rightarrow$ (iv): Seja $\mathcal{G}$ satisfazendo as hipóteses de (iv). Segue de (1) que $\mathcal{G}$ é dirigido para $\subseteq$ e que $\forall G \in \mathcal{G} \exists H \in \mathcal{G}$ tal que $H \prec G$. Como $\mathcal{G}$ intercepta todos os

membros de $\mathbf{U}$, temos que para todo $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \in \mathcal{G}$ e portanto as hipóteses de (iv)' estão satisfeitas. Logo, $\cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. ■

Lema 5.5:

- (a) Se X é Martin- κ -completo e $\lambda \geq \kappa$, então X é Martin- λ -completo.
- (b) Se X é Martin- ω -completo, então X é Martin-completo.
- (c) Se X é Martin- κ -completo e quase-regular, e $\mathcal{H}$ é uma família não vazia de conjuntos abertos, com $|\mathcal{H}| \leq \kappa$, tal que $Y = \cap \mathcal{H}$ é densa em X , então Y é Martin- κ -completo.

Demonstração:

(a) É trivial pois κ só aparece no item 5.1(v).

(b) Suponhamos que $\mathbf{U}$ e $\preceq$ satisfazem as condições da definição 5.1, com $\mathbf{U}$ enumerável. Se $\mathbf{U} = \emptyset$, então X é Martin-completo e não há nada a fazer. Suponhamos então que $\mathbf{U} \neq \emptyset$ e que $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$.

Para $G \subseteq X$ aberto não vazio, definimos

$\theta(G) = \min\{n : n \in \omega \text{ e não existe } V \in \mathcal{U}_n \text{ tal que } G \subseteq V\}$. Coloque ∞ para $\inf \emptyset$.

Temos que $G \subseteq H$ implica que $\theta(G) \geq \theta(H)$, pois se não existe $V \in \mathcal{U}_n$ tal que $G \subseteq V$, então não existe $V \in \mathcal{U}_n$ tal que $H \subseteq V$.

Definimos agora $\preceq_1$ por $G \preceq_1 H$ se e somente se $G = H$ (ou $G \prec H$ e, ou $\theta(H) = \infty$ ou $\theta(G) > \theta(H)$). Vamos verificar que $\preceq_1, \emptyset$ satisfazem as condições da definição 5.1:

(i) Temos que $\preceq_1$ é uma ordem parcial, pois $\preceq$ e $<$ são ordens parciais. Temos ainda que $G \preceq_1 H \Rightarrow G \subseteq H$ pois $G \preceq H \Rightarrow G \subseteq H$. Finalmente vale que $G \subseteq G' \prec_1 H' \subseteq H \Rightarrow G \prec_1 H$, pois o mesmo vale para $\prec$, $G \prec_1 H' \Rightarrow G' \subset H'$ e ainda porque vale que $G \subseteq H$ implica que $\theta(G) \geq \theta(H)$.

(ii) Sejam G_1 e G_2 conjuntos abertos tais que $\emptyset \neq G_1 \subset G_2$. Por 5.1(ii) para $\preceq$, temos que existe um aberto não vazio $H \subseteq G_1$ tal que $H \prec G_2$. Se $\theta(G_2) = \infty$, então $H \prec_1 G_2$. Se $\theta(G_2) = n < \infty$, então existe $V \in \mathcal{U}_n$ tal que $V \subseteq H$, porque $\mathcal{U}_n$ é uma π -base, e nesse caso $V \prec G_2$ (pois $V \subset H \prec G_2$) e $\theta(V) > n$. Portanto temos que $V \prec_1 G_2$.

(iii) Trivial.

(iv) Pela definição de $\preceq_1$, temos que se $\mathcal{G}$ é uma família não vazia de conjuntos abertos não vazios, dirigida para $\preceq_1$, e sem menor elemento, então $\mathcal{G}$ é dirigida para $\preceq$, e pelo que foi feito na demonstração do lema anterior,

$$\mathcal{G}^* = \{H : H \subset X \text{ é aberto e } \exists G \in \mathcal{G} \text{ tal que } G \subseteq H\}$$

é dirigido para $\preceq$.

Agora, existe uma seqüência $\langle G_n \rangle_{n \in \omega}$ em $\mathcal{G}$ que é estritamente decrescente para $\preceq_1$ e segue por indução em n que $\theta(G_n) \geq n \ \forall n \in \omega$. Então pela definição de $\theta(G)$, $\mathcal{G}^*$ encontra todo $\mathcal{U}_n$. Como $\preceq$, $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ satisfazem as condições da definição 5.1, temos então que $\cap \mathcal{G}^* \neq \emptyset$ e portanto $\cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Mostramos assim que $\preceq_1, \emptyset$ satisfazem as condições da definição 5.1 e portanto X é Martin-completo.

(c) Suponhamos que $\preceq$ e $\mathbf{U}$ satisfazem as condições da definição 5.1 com $|\mathbf{U}| \leq \kappa$. Seja τ_Y a topologia de Y (de subespaço) e para cada $A \in \tau_Y$ seja

$$W_A = \cup \{G : G \subseteq X \text{ aberto e } G \cap Y = A\}.$$

Definimos $\preceq_Y$ por $A \preceq_Y B$ sse $W_A \prec W_B$ ou $A = B$, para $A, B \in \tau_Y$ não vazios. É claro que $\preceq_Y$ satisfaz 5.1(i) já que $\preceq$ o satisfaz.

Se $A, B \in \tau_Y$ são tais que $\emptyset \neq A \subset B$, então $\emptyset \neq W_A \subset W_B$, pois $x \in W_A$ implica que $x \in G$, onde G é um aberto de X tal que $G \cap Y = A$. Tomemos $G_1 \in W_B$. Daí,

temos que $x \in G \cup G_1$ e $(G \cup G_1) \cap Y = B$ (pois $B \supset A$). Portanto $x \in W_B$ e segue que $W_A \subset W_B$. Como $\prec$ satisfaz 5.1(ii), existe $G \subseteq W_A$ aberto (em X) não vazio tal que $G \prec W_B$. Como X é quase-regular, temos que existe $H \subseteq X$ aberto não vazio tal que $\overline{H} \subseteq G$. Agora

$$W_{H \cap Y} = \cup \{G : G \subseteq X \text{ aberto e } G \cap Y = H \cap Y\} \subseteq \overline{H \cap Y},$$

pois $x \in W_{H \cap Y}$ implica que $x \in G$ aberto em X , G tal que $G \cap Y = H \cap Y$. Como Y é denso em X , $x \in \overline{Y}$. Logo $x \in G \cap \overline{Y}$ e portanto $x \in \overline{G \cap Y}$. Segue então que $x \in \overline{H \cap Y}$.

Com isso temos que $W_{H \cap Y} \subseteq G \prec W_B$. Pelo fato de Y ser denso, segue ainda que $H \cap Y \neq \emptyset$. Temos então que $W_{H \cap Y} \prec W_B$ e portanto $H \cap Y \prec_Y B$. Vale ainda que $H \cap Y \subseteq G \cap Y \subseteq A$. Logo $\preceq_Y$ satisfaz 5.1(ii).

Para $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$ seja $\mathcal{U}_Y = \{A : A \in \tau_Y \text{ e existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } \overline{A} \subseteq V\}$ e para $H \in \mathcal{H}$ seja $\mathcal{V}_H = \{A : A \in \tau_Y \text{ e } \overline{A} \subseteq H\}$. Daí cada $\mathcal{U}_Y$ e cada $\mathcal{V}_H$ é uma π -base para τ_Y . De fato, seja $B \in \tau_Y$ e seja G um aberto em X tal que $G \cap Y = B$. Como $\mathcal{U}$ é π -base, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset G$ e como X é quase-regular existe H aberto não vazio de X tal que $\overline{H} \subset V$. Como Y é denso em X , temos que $H \cap Y \neq \emptyset$. Podemos tomar então $A = H \cap Y$. Daí $A \in \tau_Y$, $A = H \cap Y \subset V \cap Y \subset G \cap Y = B$ e ainda $\overline{A} \subset V$. Logo cada $\mathcal{U}_Y$ é uma π -base. Para vermos que cada $\mathcal{V}_H$ é também uma π -base para todo $H \in \mathcal{H}$, lembremos primeiro que H é um aberto de X e que $Y = \cap \mathcal{H}$. Assim, temos que $Y \subset H$ e se $B \in \tau_Y$, então $B \subset H$. Seja G um aberto de X tal que $G \cap Y = B$. Podemos agora repetir o mesmo argumento feito anteriormente, mas agora para $V = G \cap H$ e concluimos que $\mathcal{V}_H$ é uma π -base para τ_Y , para todo $H \in \mathcal{H}$.

Tomemos agora $\mathbf{V} = \{\mathcal{U}_Y : \mathcal{U} \in \mathbf{U}\} \cup \{\mathcal{V}_H : H \in \mathcal{H}\}$. Temos então que $\mathbf{V}$ é a coleção de π -bases para τ_Y que é pedida em 5.1(iii).

Resta apenas verificarmos 5.1(iv). Para isso seja $\mathcal{A} \subseteq \tau_Y$ uma coleção não vazia de conjuntos abertos não vazios, dirigidos para $\preceq_Y$ e sem menor elemento, que encontra

todo membro de $\mathbf{V}$. Então $\{W_A : A \in \mathcal{A}\}$ é dirigido para $\preceq$ e não tem menor elemento. Se $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$, então existe $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{U}_Y$, ou seja, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{A} \subseteq V$, e portanto $W_A \subseteq V$ (podemos mostrar que $W_A \subseteq \overline{A}$ como foi mostrado que $W_{H \cap Y} \subseteq \overline{H \cap Y}$). Pelo fato de X ser Martin- κ -completo e pelo lema 5.4 temos que $Z = \cap\{W_A : A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$. Ainda se $H \in \mathcal{H}$, então existe $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_H$ e nesse caso $Z \subseteq W_A \subseteq \overline{A} \subseteq H$. Logo temos que $Z \subseteq \cap \mathcal{H} = Y$ e portanto $\cap \mathcal{A} = Y \cap Z \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A}$ era arbitrário, segue que vale 5.1(iv).

Concluimos assim que $\preceq_Y$ e $\mathbf{V}$ satisfazem as condições da definição 5.1 e portanto Y é Martin- $(|\mathbf{V}|)$ -completo.

Se κ é infinito, então $|\mathbf{V}| \leq \kappa$ e portanto Y é Martin- κ -completo. Se κ é finito, então $\mathbf{V}$ também é finito e Y é Martin- ω -completo e portanto Martin-completo (por (b)), e ainda, se quiser, é Martin- κ -completo. ■

Daremos agora alguns exemplos de espaços que são Martin- κ -completo. No primeiro exemplo, mostraremos que espaços Hausdorff compactos são Martin-completo, o que mostra que, de fato, a hipótese de um espaço ser Martin- $< \kappa$ -completo é mais fraca do que a hipótese de um espaço ser Hausdorff compacto.

Exemplo 5.6: Espaços localmente compactos quase-regulares são Martin-completos. Em particular, espaços Hausdorff compactos são Martin-completos.

De fato, se X é localmente compacto e quase-regular, definimos $\preceq$ do seguinte modo: se G e H são abertos não vazios de X , então diremos que $G \preceq H$ sse $G = H$ ou $\overline{G}$ é compacto e $\overline{G} \subseteq H$. Como queremos mostrar que o espaço é Martin-completo, tomamos $\mathbf{U} = \emptyset$. Precisamos mostrar que as condições (i)-(iv) de 5.1 estão satisfeitas.

- (i) É claro que $\preceq$ é uma ordem parcial e que $G \preceq H \Rightarrow G \subseteq H$. Suponha que $G \subseteq G' \prec H' \subseteq H$. Daí $\overline{G} \subseteq \overline{G'}$ e $\overline{G'}$ é compacto. Logo, $\overline{G}$ é compacto e

$\overline{G} \subseteq \overline{G'} \subset H' \subseteq H$. Portanto $G \prec H$.

(ii) Segue direto da definição de espaço quase-regular e do fato do espaço ser localmente compacto.

(iii) Tomamos $U = \emptyset$.

(iv) Seja $\mathcal{G}$ uma família de abertos não vazios de X tal que $\mathcal{G}$ é dirigida para $\preceq$. Precisamos mostrar que $\cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Podemos supor que $\mathcal{G}$ não tem menor elemento para $\preceq$.

Tomemos $U, V \in \mathcal{G}$. Portanto existe $H \in \mathcal{G}$ tal que $\overline{H}$ é compacto e $\overline{H} \subset U$ e $\overline{H} \subset V$. Consideremos o conjunto $\mathcal{G}' = \{\overline{H \cap U} : U \in \mathcal{G}\}$. Como $\overline{H}$ é compacto, temos que $\cap \mathcal{G}' \neq \emptyset$ (pois $\mathcal{G}'$ tem a propriedade da interseção finita já que $\mathcal{G}$ é dividido). Agora, se $U \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{G}$ não tem menor elemento, existe $V \in \mathcal{G}$ tal que $V \cap U \subsetneq U$. Portanto existe $W \in \mathcal{G}$ tal que $\overline{W} \subset U$, o que implica que $\overline{W \cap H} \subset U$. Assim, para cada elemento de $\mathcal{G}$ temos um elemento de $\mathcal{G}'$ que está contido nele, ou seja, $\cap \mathcal{G}' \subset \cap \mathcal{G}$. Segue, portanto, que $\cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, como queríamos.

Temos assim que as condições da definição 4.1 estão satisfeitas para $\preceq$ e $U = \emptyset$, e portanto X é Martin-completo. ■

No exemplo seguinte precisaremos das seguintes definições:

Definição 5.7: Um espaço G_κ -absoluto é um espaço topológico que é homeomorfo a um subespaço de um espaço Hausdorff compacto X que pode ser escrito como a interseção de κ ou menos conjuntos abertos de X .

Definição 5.8: Um espaço Čech-completo é um espaço topológico X que é homeomorfo a um subconjunto G_δ de algum espaço Hausdorff compacto.

Temos portanto que um espaço Čech-completo é um espaço G_ω -absoluto.

Exemplo 5.9: Espaços G_κ -absolutos são Martin- κ -completos; espaços Čech-completos são Martin-completos; espaços métricos completos são Martin-completos.

De fato, observemos primeiro que vale que todo espaço métrico completo é Čech-completo ([En], 4.3.26). Assim, pelo lema 5.5(b), teremos que o fato de espaços Čech-completos e espaços métricos completos serem Martin-completos, seguirá se mostrarmos que espaços G_κ -absolutos são Martin- κ -completos.

Seja X um espaço G_κ -absoluto. Então X é homeomorfo a Y onde Y é um subespaço de um espaço Hausdorff compacto e é tal que $Y = \bigcap \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ uma família de abertos não vazios de X tal que $|\mathcal{H}| \leq \kappa$. Tomemos $X' = \overline{Y}$. Então X' é um espaço Hausdorff compacto e portanto, pelo primeiro exemplo, é Martin-completo. Pelo lema 5.5(a) temos que X' é Martin- κ -completo. Podemos agora aplicar o lema 5.5(c) para X' e Y , e concluirmos assim que Y é Martin- κ -completo. Como X é homeomorfo a Y , temos que X também é Martin- κ -completo. ■

Vamos agora voltar a nossa preocupação inicial, que era mostrar uma consequência do PFA na direção mencionada no início deste item. Como consequência do MA, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.10: (MA). Seja X um espaço ccc, Martin- $< 2^{\aleph_0}$ -completo. Então a interseção de menos do que $2^{\aleph_0}$ abertos densos em X é densa.

A demonstração deste fato é igual à que será feita no teorema seguinte. Por isso vamos omiti-la. Ela pode ser encontrada em [Fr].

Como consequência do PFA segue o seguinte resultado.

Teorema 5.11: (PFA). Seja X um espaço topológico tal que se $\{W_\alpha : \alpha < \omega\}$ é uma cadeia decrescente de abertos, então existe V aberto tal que $V \subset \bigcap_{\alpha < \omega} W_\alpha$. Suponhamos ainda que X seja Martin- $< \aleph_2$ -completo. Então se $\{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$, $\lambda < \aleph_2$,

é uma família de abertos densos em X , segue que $\bigcap_{\alpha < \lambda} V_\alpha \neq \emptyset$.

Demonstração:

Seja $\preceq$, $\mathbf{U}$ da definição de Martin- $< \aleph_2$ -completo, $|\mathbf{U}| < \aleph_2$. Seja $\mathbf{P}$ o conjunto dos abertos não vazios de X ordenados por $\preceq$.

Primeiramente temos que mostrar que $\mathbf{P}$ é própria. Vamos fazê-lo usando a caracterização de ordem própria da teoria dos jogos (teorema II 1.4). Temos então que achar uma estratégia vencedora para o jogador II no jogo $\Gamma(\mathbf{P})$ (definição II 1.3).

Suponhamos que I joga $p_0 \in \mathbf{P}$ e A_0 , uma anticadeia maximal em $\mathbf{P}$. Temos então que existe $q_1 \in A_0$ tal que q_1 é compatível com p_0 . Daí II joga $B_0^0 = \{q_1\}$. Seja $p_1 \in \mathbf{P}$ tal que $p_1 \preceq p_0, q_1$. Se I joga A_1 , então existe $q_2 \in A_1$ tal que q_2 é compatível com p_1 . II então joga $B_0^1 = \emptyset$ e $B_1^1 = \{q_2\}$. Tomamos $p_2 \in \mathbf{P}$ tal que $p_2 \preceq p_1, q_2$. De modo geral, se I joga a anticadeia maximal A_n em $\mathbf{P}$, temos $q_{n+1} \in A_n$ tal que q_{n+1} é compatível com p_n e II joga $B_n^i = \emptyset$ se $i < n$ e $B_n^n = \{q_{n+1}\}$. Daí tomamos $p_{n+1} \in \mathbf{P}$ tal que $p_{n+1} \preceq q_{n+1}, p_n$.

Temos que mostrar agora que, com essa estratégia, II ganha o jogo, ou seja, que existe $q \preceq p_0$ tal que $\forall i \forall p \preceq q \exists r \in B_i = \bigcup \{B_i^n : n \geq i\}$ tal que r é compatível com p . Pela construção dos B_i^n 's temos que $B_i = \{q_{i+1}\}$ para todo $i \in \omega$. Precisamos mostrar então que existe $r \preceq p_0$ tal que $\forall i \in \omega \forall p \preceq r$ p é compatível com q_{i+1} . Agora, pela construção feita, temos que $p_0 \succeq p_1 \succeq \dots$, e portanto $p_0 \supseteq p_1 \supseteq \dots$, ou seja, $\{p_i : i \in \omega\}$ é uma cadeia decrescente de abertos (com relação a $\subseteq$) em X . Então, por hipótese, podemos tomar $r' \subset \bigcap_{i \in \omega} p_i \subset p_0$. Por 5.1(ii), podemos tomar r tal que $r \subset r' \subset \bigcap_{i \in \omega} p_i$ e $r \preceq p_0$. Vamos verificar que r serve. Seja $i \in \omega$ e $p \preceq r$. Portanto $p \subset r$. Temos ainda por construção que $r \subset \bigcap_{i \in \omega} p_i \subset q_{i+1}$. Logo, $p \cap q_{i+1} \neq \emptyset$. Pelo lema 5.3, existe $s \in \mathbf{P}$ tal que $s \preceq p$ e $s \preceq q_{i+1}$, ou seja, p e q_{i+1} são compatíveis. Portanto, II ganha o jogo.

Tendo mostrado que $\mathbf{P}$ é própria, podemos agora usar o PFA para provarmos o

teorema.

Seja $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$, $\lambda < \aleph_2$, uma família de abertos densos de X . Para $p \in \mathbf{P}$, seja $Q_p = \{q : q \in \mathbf{P} \text{ e } q \subset p\}$. Seja $D = \mathbf{U} \cup \{Q_V : V \in \mathcal{V}\}$. Observemos que cada Q_V é uma π -base de X , pois se U é um aberto de X , como V é aberto denso de X , $U \cap V$ é aberto não vazio e $U \cap V \in Q_V$. Assim, cada membro de D é uma π -base de X . Mas, observemos agora que se $\mathcal{V}$ é um π -base de X , então $\mathcal{V}$ é denso em $\mathbf{P}$. De fato, seja $q \in \mathbf{P}$ e suponhamos $q \notin \mathcal{V}$. Então como $\mathcal{V}$ é π -base, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset q$. Por 5.1(ii), temos que existe r aberto não vazio de X tal que $r \prec q$. De novo pelo fato de $\mathcal{V}$ ser π -base, existe $p \in \mathcal{V}$ tal que $p \subset r$. Temos então que $p \subset r \prec q$. Logo, por 5.1(i), $p \prec q$ e assim concluímos que $\mathcal{V}$ é denso em $\mathbf{P}$.

Temos portanto que cada membro de D é denso em $\mathbf{P}$. Observemos ainda que $|D| \leq \aleph_1$. Podemos agora aplicar o PFA e obtemos um genérico G que intercepta todos os membros de D .

Como, em particular, G intercepta todos os membros de $\mathbf{U}$ temos que $\cap G \neq \emptyset$, pela definição de Martin- κ -completo.

Agora, $G \cap Q_V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Então para cada $V \in \mathcal{V}$ podemos associar $p_V \in G$ tal que $p_V \subset V$. Se $x \in \cap G$, em particular, $x \in p_V$ para todo $V \in \mathcal{V}$, e portanto $x \in V$, para todo $V \in \mathcal{V}$. Assim concluímos que $\cap G \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} V_\alpha$. Como $\cap G \neq \emptyset$, segue que $\bigcap_{\alpha < \lambda} V_\alpha \neq \emptyset$, como queríamos. ■

Corolário 5.12: (PFA). Suponhamos X satisfazendo as hipóteses do teorema 5.11. Então a interseção de menos do que $\aleph_2$ abertos densos em X é densa em X .

Demonstração:

Basta observarmos que se X satisfaz as hipóteses do teorema 5.11, então um aberto U de X também satisfaz as mesmas hipóteses (como subespaço de X). Daí, se $\{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$, $\lambda < \aleph_2$, é uma família de abertos densos em X , aplicamos o teorema para

a família $\{V_\alpha \cap U : \alpha < \lambda\}$, $\lambda < \aleph_2$. ■

Para encerrar, talvez seja ilustrativo citarmos o seguinte exemplo.

Exemplo 5.13: $\beta\omega \setminus \omega$ é um espaço Hausdorff compacto tal que todo G_δ não vazio tem interior não vazio (Corolário 3.27, pág.78 em [Wa]) e portanto satisfaz as hipóteses do teorema 5.11.

III - ALGUMAS APLICAÇÕES DO PFA USANDO FORCING

Algumas aplicações do PFA, como por exemplo as aplicações vistas no capítulo anterior, são de uma certa forma parecidas com as aplicações do Axioma de Martin. Para mostrarmos um certo resultado, achamos uma ordem parcial “natural” que nos permitirá chegar onde queremos (geralmente as condições desta ordem parcial vão ser partes finitas daquilo que queremos construir), depois mostramos que a ordem é própria (ou ccc no caso do MA) e finalmente aplicamos o PFA. Entretanto, em muitas aplicações do PFA, essa ordem parcial “natural” só será encontrada em alguma extensão genérica, e por isso é necessário algum *forcing* antes. Com isso teremos vários “truques” possíveis para achar a tal ordem parcial. Esses tipos de “truques” não parecem ter análogos nas aplicações do MA. Alguns fatores responsáveis por eles serem possíveis nas aplicações do PFA são os fatos de ordem parciais *countably closed* serem próprias e de iterações finitas de ordens próprias serem próprias. Neste capítulo apresentaremos dois destes “truques”.

1. Gaps e o truque de colapsar cardinais

O nosso primeiro truque será aplicado usando o conceito de *gaps*, criado por Hausdorff em 1936. Mostraremos uma consequência do PFA que nos dará uma condição necessária para um certo *gap* ser não preenchido. Obteremos como resultado lateral o, talvez surpreendente, fato de que o PFA implica a negação de $MA(\omega_2)$.

Com as operações usuais da teoria dos conjuntos, $P(\omega)$ é uma álgebra de Boole. Vamos denotar por Fin o ideal dos conjuntos finitos. Então a álgebra quociente $P(\omega)/\text{Fin}$ consiste das classes de equivalência $[a]$ para $a \subseteq \omega$ e temos que $[a] < [b]$ sse $a \setminus b$ é finito e $b \setminus a$ é infinito. Iremos estender essa notação e escrever $a < b$ se $[a] < [b]$.

Definição 1.1: Se κ e λ são cardinais, então um (κ, λ^*) -gap é um par $(\bar{a}, \bar{b})$ de

seqüências de $P(\omega)$ tal que $\bar{a} = \langle a_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$, $\bar{b} = \langle b_\beta : \beta < \lambda \rangle$, $\forall \alpha, \beta < \kappa$, se $\alpha < \beta$ então $a_\alpha < a_\beta$, $\forall \alpha, \beta < \lambda$ se $\alpha < \beta$, então $b_\beta < b_\alpha$ e $\forall \alpha < \kappa \forall \beta < \lambda$ $a_\alpha < b_\beta$.

Definição 1.2: Diremos que um gap $(\bar{a}, \bar{b})$ é **preenchido** por $a \subseteq \omega$ se $\forall \alpha < \kappa$ e $\forall \beta < \lambda$, $a_\alpha < a < b_\beta$.

Em geral, estaremos apenas interessados em (κ, λ^*) -gaps onde $\kappa \leq \lambda$, e κ e λ são regulares. Passando ao complementar os conjuntos envolvidos, tudo que puder ser provado para (κ, λ^*) -gaps, também será verdade para (λ, κ^*) -gaps de forma dual. Então podemos assumir que $\kappa \leq \lambda$.

Suponhamos que $(\bar{a}, \bar{b})$ é um (κ, λ^*) -gap não preenchido e que nós queremos adicionar um subconjunto a de ω que preencha esse gap. Podemos supor que $(\bar{a}, \bar{b})$ satisfaz que $a_\alpha \subset b_\alpha \forall \alpha < \kappa$, pois caso isso não aconteça definimos $a'_\alpha = a_\alpha \cap b_\alpha$ e $\bar{a}' = \langle a'_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$. Daí se a preenche o gap $(\bar{a}', \bar{b})$, então a preencherá também o gap $(\bar{a}, \bar{b})$ (pois $a_\alpha \setminus b_\alpha$ é finito).

Para conseguirmos tal a consideremos a seguinte ordem parcial. Seja $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ o conjunto das triplas $\langle s, x, y \rangle$, onde $s \in {}^n 2$ para algum $n < \omega$, $x \in [\kappa]^{<\omega}$, $y \in [\lambda]^{<\omega}$ e para todo $i \geq n$, $i \in \bigcup_{\alpha \in x} a_\alpha$ implica que $i \in \bigcap_{\beta \in y} b_\beta$. Defina $\langle s_1, x_1, y_1 \rangle \leq \langle s_2, x_2, y_2 \rangle$ sse $s_1 \supseteq s_2$, $x_1 \supseteq x_2$, $y_1 \supseteq y_2$ e $\forall i \in \text{dom}(s_1) \setminus \text{dom}(s_2)$ se $i \in \bigcup \{a_\alpha : \alpha \in x_2\}$ então $s_1(i) = 1$ e se $i \notin \bigcap \{b_\beta : \beta \in y_2\}$ então $s_1(i) = 0$. Vamos agora mostrar que se tomarmos um $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ -genérico e os densos adequados, conseguimos construir $a \subset \omega$ de modo que a preenche o gap.

Lema 1.3: $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ adiciona $a \subset \omega$ tal que a preenche o gap $(\bar{a}, \bar{b})$.

Demonstração:

Definamos primeiro $D_n = \{ \langle s, x, y \rangle : n \subset \text{dom } s \}$, para cada $n \in \omega$. Então D_n é denso em $P(\bar{a}, \bar{b}) \ \forall n \in \omega$, pois se $\langle s, x, y \rangle \in P(\bar{a}, \bar{b})$, então pela definição de $P(\bar{a}, \bar{b})$ temos que $\cup \{a_\alpha : \alpha \in x\} \setminus \text{dom } s \subset \cap \{b_\beta : \beta \in y\} \setminus \text{dom } s$. Tomemos agora $\langle s_1, x, y \rangle$ tal que $n \subset \text{dom } s_1$ e $\forall i \in \text{dom}(s_1) \setminus \text{dom}(s)$ se $i \in \cup \{a_\alpha : \alpha \in x\}$, então $s_1(i) = 1$ e se $i \notin \cap \{b_\beta : \beta \in y\}$, então $s_1(i) = 0$. Daí temos que $\langle s_1, x, y \rangle \in P(\bar{a}, \bar{b})$, $\langle s_1, x, y \rangle \in D_n$ e $\langle s_1, x, y \rangle \leq \langle s, x, y \rangle$.

Para cada $\xi < \kappa$, definimos agora $E_\xi = \{ \langle s, x, y \rangle : \xi \in x \}$. Mais uma vez, temos que E_ξ é denso em $P(\bar{a}, \bar{b})$ para cada $\xi < \kappa$. De fato, seja $\langle s, x, y \rangle \in P(\bar{a}, \bar{b})$. Podemos supor que $\xi \notin x$. Seja então $\langle s_1, x \cup \{\xi\}, y \rangle$ onde s_1 seja tal que $s_1 \supset s$ e $\cup \{a_\alpha : \alpha \in x \cup \{\xi\}\} \setminus \text{dom } s_1 \subseteq \cap \{b_\beta : \beta \in y\} \setminus \text{dom } s_1$ (tal s_1 existe pois $\langle s_1, x, y \rangle \in P(\bar{a}, \bar{b})$ e $a_\xi \setminus b_\beta$ é finito $\forall \beta \in y$). Exigimos ainda que s_1 é tal que se $i \in \text{dom}(s_1) \setminus \text{dom}(s)$, então $i \in \cup \{a_\alpha : \alpha \in x\}$ implica que $s_1(i) = 1$ e $i \notin \cap \{b_\beta : \beta \in y\}$ implica que $s_1(i) = 0$. Daí temos que $\langle s_1, x \cup \{\xi\}, y \rangle \in P(\bar{a}, \bar{b})$, $\langle s_1, x \cup \{\xi\}, y \rangle \in E_\xi$ e ainda que $\langle s_1, x \cup \{\xi\}, y \rangle \leq \langle s, x, y \rangle$, como queríamos.

Por último, definamos $F_\eta = \{ \langle s, x, y \rangle : \eta \in y \} \ \forall \eta < \lambda$. Para mostrarmos que F_η é denso para cada $\eta < \lambda$, basta procedermos de modo análogo ao que foi feito acima, mas desta vez tomando $\langle s_1, x, y \cup \{\eta\} \rangle$.

Seja agora G um genérico que intercepta os densos $D_n, E_\xi, F_\eta, \forall n \in \omega, \forall \xi < \kappa$ e $\forall \eta < \lambda$, e defina

$$a = \{i : \exists \langle s, x, y \rangle \in G \text{ tal que } s(i) = 1\}.$$

Precisamos mostrar que a preenche o gap $(\bar{a}, \bar{b})$, ou seja, que $\forall \xi < \kappa, a_\xi \setminus a$ é finito e $a \setminus a_\xi$ é infinito, e que $\forall \eta < \lambda, a \setminus b_\eta$ é finito e $b_\eta \setminus a$ é infinito.

Tomemos primeiro $\xi < \kappa$ qualquer. Como $G \cap E_\xi \neq \emptyset$, temos que existe $\langle s, x, y \rangle \in G$ tal que $\xi \in x$. Tomemos $i \in \omega$ tal que $i \notin \text{dom } s$. Daí existe $\langle s_1, x_1, y_1 \rangle \leq \langle s, x, y \rangle$ tal que $\langle s_1, x_1, y_1 \rangle \in G$ e $i \in \text{dom } s_1$, pois $D_{i+1} \cap G \neq \emptyset$

e G é filtro. Temos então que se $i \in a_\xi$, teremos $s(i) = 1$, o que implica que $i \in a$. Concluimos assim que $i \notin \text{dom } s$ implica que $i \notin a_\xi \setminus a$, ou seja, $a_\xi \setminus a \subset \text{doms}$ e portanto é finito, como queríamos.

Vamos mostrar agora que $a \setminus a_\xi$ é infinito. Pelo que foi mostrado acima, como o ξ era qualquer, vale que $a_{\xi+1} \setminus a$ é finito. Agora, $a_{\xi+1} \setminus a_\xi$ é infinito, pela definição de gap. Mas

$$\begin{aligned} a_{\xi+1} \setminus a_\xi &= (a_{\xi+1} \setminus a) \cup (a_{\xi+1} \cap a) \setminus a_\xi = \\ &= ((a_{\xi+1} \setminus a) \setminus a_\xi) \cup ((a_{\xi+1} \cap a) \setminus a_\xi). \end{aligned}$$

Como $a_{\xi+1} \setminus a_\xi$ é infinito e $(a_{\xi+1} \setminus a) \setminus a_\xi$ é finito, temos que $(a_{\xi+1} \cap a) \setminus a_\xi$ é infinito, e portanto $a \setminus a_\xi$ é infinito.

Tomemos agora $\eta < \lambda$ e vamos mostrar que $a \setminus b_\eta$ é finito. Do fato de que $G \cap F_\eta \neq \emptyset$, segue que existe $\langle s, x, y \rangle \in G$ tal que $\eta \in y$. Tomemos $i \in \omega$ tal que $i \notin \text{doms}$. Daí, como $G \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ e G é filtro, existe $\langle s_1, x_1, y_1 \rangle \leq \langle s, x, y \rangle$ tal que $\langle s_1, x_1, y_1 \rangle \in G$ e $i \in \text{doms}_1$. Se $i \notin b_\eta$, então $s_1(i) = 0$, o que implica que $i \notin a$. Temos assim que $a \setminus b_\eta \subset \text{doms}$, ou seja, $a \setminus b_\eta$ é finito.

O fato de que $b_\eta \setminus a$ é infinito mostra-se de forma análoga ao que foi feito para mostrar que $a \setminus a_\xi$ é infinito. ■

Vamos mostrar agora os seguintes fatos sobre $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ que nos serão úteis posteriormente.

Teorema 1.4: Seja $(\bar{a}, \bar{b})$ um (κ, λ^*) -gap.

- (a) Se o gap é preenchido, então $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ é ccc.
- (b) Se $\text{cf } \kappa \neq \omega_1$ ou $\text{cf } \lambda \neq \omega_1$, então $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ é ccc.
- (c) Se $\kappa = \lambda = \omega_1$, o gap é não-preenchido e $a_\alpha \subset b_\alpha \ \forall \alpha < \omega_1$, então existe uma ordem parcial ccc $\mathbf{Q}$ que adiciona uma anticadeia não enumerável em $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$.

Demonstração:

(a)

Seja $\langle p_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ uma seqüência de elementos de $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$, onde $p_\alpha = \langle s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha \rangle$. Por hipótese, temos que existe $a \subset \omega$ tal que a preenche o gap. Para cada α , fixemos $k_\alpha \in \omega$ tal que

$$\forall \xi \in x_\alpha \quad \forall \eta \in y_\alpha \quad a_\xi \setminus k_\alpha \subseteq a \setminus k_\alpha \subseteq b_\eta \setminus k_\alpha.$$

Existe tal k_α , pois $a_\xi \setminus a$, $a \setminus b_\eta$, x_α e y_α são todos finitos.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que se $s_\alpha \in {}^n 2$ então $n \geq k_\alpha$ (pois caso isso não aconteça, podemos estender s_α , como foi feito para mostrar que D_α é denso no lema 1.3).

Como nós temos apenas um número enumerável de possibilidades para os k_α 's e os s_α 's, podemos escolher $\alpha, \beta < \omega_1$, $\alpha < \beta$ tal que $s_\alpha = s_\beta$ e $k_\alpha = k_\beta$. Vamos então mostrar que, nesse caso, p_α e p_β são compatíveis.

De fato, tomemos $p = \langle s_\alpha, x_\alpha \cup x_\beta, y_\alpha \cup y_\beta \rangle$. Temos que $p \in \mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ pois, como $k_\alpha = k_\beta = k$, $\forall \xi \in x_\alpha \cup x_\beta$ e $\forall \eta \in y_\alpha \cup y_\beta$ vale que $a_\xi \setminus k \subseteq a \setminus k \subseteq b_\eta \setminus k$. Mas $k \subset \text{doms}_\alpha$. Logo, $\cup\{a_\gamma : \gamma \in x_\alpha \cup x_\beta\} \setminus \text{doms}_\alpha \subset \cap\{b_\xi : \xi \in y_\alpha \cup y_\beta\} \setminus \text{doms}_\alpha$, o que implica que $p \in \mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$. É claro que $p \leq p_\alpha, p_\beta$.

Conseguimos assim achar dois elementos de $\langle p_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ compatíveis, o que mostra que $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ é ccc.

(b)

Suponhamos por absurdo que $A = \langle \langle s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha \rangle : \alpha < \omega_1 \rangle$ é uma anticadeia em $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$.

Suponhamos primeiro que $\text{cf } \kappa > \omega_1$. Então existe $\xi < \kappa$ tal que $x_\alpha \subseteq \xi \quad \forall \alpha < \omega_1$. Agora, a_ξ preenche o "gap" $(\langle a_\eta : \eta < \xi \rangle, \bar{b})$ e portanto, pelo item (a), $\mathbf{P}(\langle a_\eta : \eta < \xi \rangle, \bar{b})$ é ccc. Mas isso é impossível, pois como $x_\alpha \subseteq \xi \quad \forall \alpha < \omega_1$, temos que A é também uma anticadeia em $\mathbf{P}(\langle a_\eta : \eta < \xi \rangle, \bar{b})$ e obtemos assim uma contradição.

Se $\text{cf } \kappa < \omega_1$, então existe $\xi < \kappa$ tal que $x_\alpha \subseteq \xi$ para um número não enumerável de α 's, e isso é suficiente para se poder repetir o argumento acima (mas agora para uma

anticadeia A' tomando apenas os α 's tais que $x_\alpha \subseteq \xi$) e obter uma contradição.

O caso cf $\lambda \neq \omega_1$ é análogo ao caso cf $\kappa \neq \omega_1$ só que tomando o "gap" $(\bar{a}, < b_\eta : \eta < \xi >)$.

(c)

Para cada $\alpha < \omega_1$, seja $p_\alpha = \langle \emptyset, \{\alpha\}, \{\alpha\} \rangle$. Observemos que cada $p_\alpha \in \mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$, pois $a_\alpha \subset b_\alpha \forall \alpha < \omega_1$. Seja $\mathbf{Q}$ a ordem parcial formada por todos os $Z \in [\omega_1]^{<\omega}$ tal que $\{p_\alpha : \alpha \in Z\}$ é uma anticadeia, e diremos que $Z_1 \leq Z_2$ sse $Z_1 \supseteq Z_2$.

Vamos mostrar primeiro que $\mathbf{Q}$ é ccc. Suponhamos que não. Então existe uma anticadeia $\langle Z_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, a qual, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\max(Z_\alpha) < \min(Z_\beta)$ sempre que $\alpha < \beta$. Agora, para cada α existe $k_\alpha \in \omega$ tal que $\forall \xi, \eta \in Z_\alpha$, se $\xi \leq \eta$ então

$$a_\xi \setminus k_\alpha \subseteq a_\eta \setminus k_\alpha \subseteq b_\eta \setminus k_\alpha \subseteq b_\xi \setminus k_\alpha.$$

Mais uma vez, sem perda de generalidade, podemos assumir que $k_\alpha = k \forall \alpha < \omega_1$, já que só temos um número enumerável de possibilidades para os k_α 's. Seja $c_\alpha = a_\xi \setminus k$ e $d_\alpha = b_\xi \setminus k$ onde $\xi = \min(Z_\alpha)$.

Suponhamos que existe α, β , $\alpha \neq \beta$, tal que $c_\alpha \not\subseteq d_\beta$. Vamos mostrar que isso implica que $\{p_\gamma : \gamma \in Z_\alpha \cup Z_\beta\}$ é uma anticadeia em $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$, pois daí teremos que Z_α e Z_β são compatíveis em $\mathbf{Q}$, o que é uma contradição. Temos apenas que verificar que p_γ e p_δ são incompatíveis (i.e., que $a_\gamma \cup a_\delta \not\subseteq b_\gamma \cap b_\delta$) para $\gamma \in Z_\alpha$ e $\delta \in Z_\beta$, pois $Z_\alpha, Z_\beta \in \mathbf{Q}$ (e portanto para $\gamma, \delta \in Z_\alpha$ ou $\gamma, \delta \in Z_\beta$, já temos que p_γ e p_δ são incompatíveis). Agora, $\gamma \in Z_\alpha$, implica que $\gamma > \xi = \min(Z_\alpha)$. Então $c_\alpha = a_\xi \setminus k \subset a_\gamma \setminus k$. Analogamente, $b_\delta \setminus k \subseteq b_\eta \setminus k = d_\beta$, onde $\eta = \min(Z_\beta)$. Se $c_\alpha \not\subseteq d_\beta$, então $a_\xi \setminus k \not\subseteq b_\eta \setminus k$ e portanto $a_\gamma \setminus k \not\subseteq b_\delta \setminus k$. Segue então que $a_\gamma \not\subseteq b_\delta$, o que implica que $a_\gamma \cup a_\delta \not\subseteq b_\gamma \cap b_\delta$, como queríamos.

Temos então que $c_\alpha \subseteq d_\beta \forall \alpha, \beta$. Vamos mostrar agora que, nesse caso, $a = \bigcup \{c_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ preenche o gap, o que é uma contradição, mostrando, assim, que $\mathbf{Q}$ é ccc.

Suponhamos que $\gamma < \omega_1$. Então para algum α , $\gamma < \min(Z_\alpha)$ e portanto $a_\gamma < c_\alpha \subseteq a$. Temos ainda que $a = \bigcup \{c_i : i < \omega_1\} \subseteq d_\alpha < b_\gamma$, o que mostra que a preenche o gap.

Resta apenas mostrarmos agora que $\mathbf{Q}$ pode adicionar uma anticadeia não enumerável em $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$. Seja A_G um nome para o conjunto $\{p_\alpha : \alpha \in \bigcup G\}$, onde G é um $\mathbf{Q}$ -genérico. Observemos que A_G é uma anticadeia. De fato, tomemos $\alpha, \beta \in \bigcup G$. Então $\alpha \in Z_\alpha \in G$ e $\beta \in Z_\beta \in G$. Como G é filtro, existe $Z \in G$ tal que $Z \leq Z_\alpha, Z_\beta$, i.e., tal que $Z \supseteq Z_\alpha \cup Z_\beta$. Segue então que $\alpha, \beta \in Z$ e como $Z \in \mathbf{Q}$, isso implica que p_α e p_β são incompatíveis. Agora, se $\Vdash_{\mathbf{Q}} A_G$ é enumerável, então como $\mathbf{Q}$ é ccc, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\Vdash_{\mathbf{Q}} A_G \subseteq \{p_\beta : \beta < \alpha\}$. Mas isso é impossível, pois se $\gamma \geq \alpha$, então $\{\gamma\} \Vdash_{\mathbf{Q}} p_\gamma \in A_G$. Temos então que deve existir $Z \in \mathbf{Q}$ tal que $Z \Vdash A_G$ é não enumerável, o que completa a nossa demonstração. ■

Estamos agora prontos para mostrar uma aplicação do PFA, usando o “truque” de colapsar cardinais.

Teorema 1.5: (PFA). Se κ e λ são regulares, $\kappa \leq \lambda$ e $(\bar{a}, \bar{b})$ é um (κ, λ^*) -gap não preenchido, então ou $\kappa = \omega$ e $\lambda \geq \omega_2$, ou $\kappa = \lambda = \omega_1$.

Demonstração:

Observemos primeiro que, sem perda de generalidade, podemos supor que $a_\alpha \subset b_\alpha$ $\forall \alpha \in \kappa$.

Suponhamos que $\kappa = \omega$. Pelo teorema 1.4(b), temos que $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ é ccc. Assim, se $\lambda \leq \omega_1$, podemos preencher o gap usando o $\text{MA}(\omega_1)$, e portanto o PFA, fazendo a construção que foi feita no lema 1.3 (já que lá foram necessários apenas $\lambda \leq \omega_1$ subconjuntos densos de ω_1 para construirmos $a \subset \omega$ tal que a preenche o gap). Como estamos supondo que o gap é não preenchido, segue que $\lambda \geq \omega_2$.

Suponhamos agora que $\omega_1 \leq \kappa \leq \lambda$, e $\lambda > \omega_1$. Seja $\mathcal{R}$ a ordem parcial que colapsa λ sobre ω_1 . Os elementos de $\mathcal{R}$ são funções em $\bigcup \{\alpha \lambda : \alpha < \omega_1\}$, ordenados

por $p \leq q$ sse $p \supseteq q$. Agora em $V^{\mathcal{R}}$, temos que $\text{cf } \kappa = \text{cf } \lambda = \omega_1$, pois como $\mathcal{R}$ é *countably closed*, não poderíamos ter $\text{cf } \kappa = \text{cf } \lambda = \omega$ (se isso ocorresse, pelo teorema I 2.12 a função cofinal estaria em V , o que implicaria que $(\text{cf } \kappa = \text{cf } \lambda = \omega)^V$). Então em $V^{\mathcal{R}}$, $(\bar{a}, \bar{b})$ contém um (ω_1, ω_1^*) -gap $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ cofinal. Temos também que como $\mathcal{R}$ não adiciona novos subconjuntos de ω , $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ continua não preenchido em $V^{\mathcal{R}}$ (pois $(\bar{a}, \bar{b})$ continua não preenchido). Portanto, pelo teorema 1.4(c) existe uma ordem parcial ccc $\mathcal{Q}$ que adiciona uma anticadeia não enumerável em $P(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$, e portanto em $P(\bar{a}, \bar{b})$.

Mas temos que $\mathcal{R}$ é própria, pois é *countably closed*, e que $\mathcal{Q}$ é própria em $V^{\mathcal{R}}$, pois é ccc em $V^{\mathcal{R}}$. Portanto $\mathcal{R} * \mathcal{Q}$ é própria e adiciona uma anticadeia não enumerável em $P(\bar{a}, \bar{b})$. Mais ainda, para decidirmos os elementos da anticadeia, precisamos de apenas $\aleph_1$ conjuntos densos (basta tomarmos $D_\alpha = \{Z \in \mathcal{Q} \mid \alpha \in Z \text{ ou } \{\alpha\} \text{ é incompatível com } Z\} \forall \alpha < \omega_1$). Portanto pelo PFA existe uma anticadeia não enumerável de $P(\bar{a}, \bar{b})$, que está em V , o que implica que $P(\bar{a}, \bar{b})$ não é ccc. Mas isso contradiz o teorema 1.4(b), pois $\text{cf } \lambda > \omega_1$ (λ é regular). Segue então que $\kappa = \lambda = \omega_1$ como queríamos. ■

O “truque” aqui utilizado foi o de colapsar cardinais, usando a ordem parcial *countably closed* $\mathcal{R}$. Nós colapsamos λ sobre ω_1 , o que nos permitiu usar o teorema 1.4(c). Depois “juntamos” $\mathcal{R}$ com a ordem $\mathcal{Q}$, que é ccc em $V^{\mathcal{R}}$, obtendo assim a ordem parcial própria $\mathcal{R} * \mathcal{Q}$.

Vamos agora mostrar que não vale que $\text{PFA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1 + \text{MA}$ é consistente, ou seja, que o PFA é inconsistente com o $\text{MA}(\omega_2)$.

Teorema 1.6: PFA implica $\neg \text{MA}(\omega_2)$.

Demonstração:

Observemos primeiro que $\text{MA}(\omega_1)$ é suficiente para mostrar que se $\langle a_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ e b são tais que $a_\alpha < a_\beta < b$ sempre que $\alpha < \beta$, então existe $c \subset \omega$ tal que para todo $\alpha < \omega_1$, $a_\alpha < c < b$. De fato, é só procedermos de forma análoga ao que foi feito no lema

1.3. Tomamos uma ordem parcial parecida, ou seja, tomamos $\mathbf{P} = \{ \langle s, x \rangle : s \in {}^n 2, x \in [\omega_1]^{<\omega} \text{ e } \forall i \geq n \ i \in \bigcup_{\alpha \in x} a_\alpha \text{ implica que } i \in b \}$ e definimos $\langle s_1, x_1 \rangle \leq \langle s_2, x_2 \rangle$ sse $s_1 \supseteq s_2$, $x_1 \supseteq x_2$ e $\forall i \in \text{dom}(s_1) \setminus \text{dom}(s_2)$, $i \in \bigcup \{a_\alpha : \alpha \in x_1\}$ implica que $s(i) = 1$ e $i \notin b$ implica que $s(i) = 0$. Para mostrarmos que $\mathbf{P}$ é ccc, podemos proceder de forma análoga à demonstração de 1.4(a) (já que temos que $a_\alpha < a_\beta < b$ se $\alpha < \beta$). Finalmente, usando $\text{MA}(\omega_1)$ podemos construir c da mesma forma que foi construído a no lema 1.3.

Podemos usar este fato repetidas vezes para construir (usando $\text{MA}(\omega_1)$) uma sequência crescente $\bar{a} = \langle a_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$. Observemos que em cada passo da construção estaremos precisando de apenas $\aleph_1$ conjuntos densos (pois teremos $\langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle, \lambda < \omega_1$).

Seja agora $\langle b_\beta : \beta < \lambda \rangle$ uma sequência tal que $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ é um gap não preenchido. Essa construção é possível, pois podemos simplesmente ir adicionando os elementos b_β até que o gap não seja preenchido. Podemos supor que λ é regular.

Suponhamos agora que vale $\text{MA}(\omega_2)$. Não podemos ter $\lambda < \omega$, pois como estamos supondo o PFA, pelo teorema 1.5 temos que tal gap não preenchido não existe. Mas se $\lambda \leq \omega$, temos que $\mathbf{P}(\bar{a}, \bar{b})$ é ccc por 1.4(b) e podemos então, neste caso, usar $\text{MA}(\omega_1)$ para preencher o gap, o que é uma contradição, pois $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ é um gap não preenchido. Concluimos assim que não pode valer $\text{MA}(\omega_2)$. ■

Vamos terminar este item com uma outra aplicação do teorema 1.5.

Definição 1.7: Dizemos que um conjunto linearmente ordenado $(X, <_X)$ é **imerso** em $P(\omega)/\text{Fin}$ se existe uma função $f : X \rightarrow P(\omega)/\text{Fin}$ tal que $\forall x, y \in X$ $x <_X y$ se e somente se $f(x) < f(y)$.

Teorema 1.8: Suponhamos que vale o PFA ou, mais geralmente, que vale $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ e a conclusão do teorema 1.5. Então existe uma ordem linear de cardinalidade $2^{\aleph_0}$ que não é imersa em $P(\omega)/\text{Fin}$.

Demonstração:

Sejam κ o menor cardinal tal que $2^\kappa > 2^{\aleph_0}$. Então κ é regular (pelo teorema 18, pág.47 em [Je]) e como $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0}$, temos que $\kappa > \omega_1$.

Seja $X = \cup \{ {}^\alpha 2 : \alpha < \kappa \}$, ordenado lexicograficamente. Suponhamos que $f \in {}^\kappa 2$ e que $\{\alpha : f(\alpha) = 0\}$ e $\{\alpha : f(\alpha) = 1\}$ são ambos cofinais em κ . Vamos definir:

$$\ell(f) = \{s \in X : \text{existe } \alpha \text{ tal que } \text{dom}(s) = \alpha + 1, s \restriction \alpha = f \restriction \alpha,$$

$$s(\alpha) = 0 \text{ e } f(\alpha) = 1\}$$

e

$$r(f) = \{s \in X : \text{existe } \alpha \text{ tal que } \text{dom}(s) = \alpha + 1, s \restriction \alpha = f \restriction \alpha,$$

$$s(\alpha) = 1, f(\alpha) = 0\}.$$

Então $\ell(f)$ é bem ordenado em $\text{type } \kappa$ (pela ordem lexicográfica) e $r(f)$ é inversamente bem ordenado em $\text{type } \kappa^*$ (isto é, $r(f)$ é ordenado em $\text{type } \kappa$ se tomarmos a ordem inversa à ordem lexicográfica).

Suponhamos agora, por absurdo, que existe $h : X \rightarrow P(\omega)/\text{Fin}$ tal que h é uma imersão.

Observemos que se $f, g \in {}^\kappa 2$, $f \neq g$, são como acima, então não existe $a \in P(\omega)/\text{Fin}$ tal que

$$\forall s \in \ell(f) \forall t \in r(f) \ h(s) < a < h(t)$$

$$\text{e } \forall s \in \ell(g) \forall t \in r(g) \ h(s) < a < h(t).$$

De fato, suponhamos por absurdo que existe tal a . Como $f \neq g$, podemos definir $\xi = \min\{t : f(t) \neq g(t)\}$. Suponhamos que $f(\xi) < g(\xi)$, ou seja, que $f(\xi) = 0$ e $g(\xi) = 1$. Tomemos $t_1, s_2 \in {}^{\xi+1}2$, onde s_2 é tal que $s_2 \restriction \xi = g \restriction \xi$ e $s_2(\xi) = 0$, i.e., $s_2 \in \ell(g)$, e t_1 é tal que $t_1 \restriction \xi = f \restriction \xi$ e $t_1(\xi) = 0$, i.e., $t_1 \in r(f)$. Definimos agora $\mu = \min\{t : g(t) < f(t)\}$. Observemos que $\mu > \xi$. Tomemos $t_2, s_1 \in {}^{\mu+1}2$ tal que $t_2 \in r(g)$ (i.e., $t_2 \restriction \mu = g \restriction \mu$ e $t_2(\mu) = 1$) e $s_1 \in \ell(f)$ (i.e., $s_1 \restriction \mu = f \restriction \mu$ e $s_1(\mu) = 0$). Como estamos supondo que existe tal a , temos que

$$h(s_2) < a < h(t_2) \text{ e } h(s_1) < a < h(t_1).$$

Mas observemos que $s_2 = t_1 = s$, pois $s_2, t_1 \in {}^{\xi+1}2$, $g \restriction \xi = f \restriction \xi$ e $s_2(\xi) = t_1(\xi) = 0$. Segue então que $h(s) < a < h(s)$, que é um absurdo.

Agora, como existem 2^κ funções f tal que $\{\alpha : f(\alpha) = 0\}$ e $\{\alpha : f(\alpha) = 1\}$ são cofinais em κ , e $2^\kappa > 2^{\aleph_0}$, segue que consigo f dessa forma tal que para nenhum $a \in P(\omega)/\text{Fin}$ vale que $\forall s \in \ell(f) \forall t \in r(f) \ h(s) < a < h(t)$. Temos então que $\{h(s) : s \in \ell(f)\}$ e $\{h(t) : t \in r(f)\}$ determinam um (κ, κ^*) -gap não preenchido, mas isso contradiz o teorema 1.5, pois $\kappa > \omega_1$. ■

2. Os números reais e o “truque” da hipótese do contínuo

Neste item mostaremos algumas aplicações do PFA usando uma variação do truque de colapsar cardinais, apresentado no primeiro item deste capítulo. Primeiramente mostraremos que segue como consequência do PFA que todos os conjuntos $\aleph_1$ -densos da reta real são ordem-isomorfos. Mostraremos depois, usando a mesma idéia da primeira demonstração, que o PFA implica que toda família não enumerável de subconjuntos de ω contém uma cadeia ou uma anticadeia não enumerável. Finalmente, mostraremos que segue como consequência deste último resultado o fato de que toda função de um conjunto não enumerável de reais nos reais é monótona em um conjunto não enumerável.

O problema encontrado quando se vai tentar mostrar os dois primeiros resultados acima mencionados usando o PFA é o mesmo em ambos: a ordem parcial que seria a “natural” a ser tomada não é necessariamente própria. A tentativa então é ver se é possível encontrar uma subordem desta ordem “natural” que seja própria e seja ainda “forte” o suficiente para que se consiga mostrar o resultado desejado. Mostraremos que, nos dois casos, será possível encontrarmos tal subordem se assumirmos CH (na realidade encontraremos uma subordem ccc) e isso é suficiente para se poder aplicar o PFA já que a ordem parcial que colapsa $2^{\aleph_0}$ em $\aleph_1$ é uma ordem parcial *countably closed* e portanto própria. A esse “truque” damos o nome de “truque” da Hipótese do Contínuo.

Começarei mostrando o resultado sobre os conjuntos de reais $\aleph_1$ -densos.

Definição 2.1: Um conjunto A de números reais é dito $\aleph_1$ -denso se A intercepta todo intervalo não vazio da reta real $\mathbb{R}$ em exatamente $\aleph_1$ pontos.

Observe que se A é $\aleph_1$ -denso, então $|A| = \aleph_1$.

O resultado que apresentaremos é, na realidade, consistente com MA, como foi mostrado por Baumgartner em [Ba1]. Por outro lado, Shelah e Abraham mostraram (em [AS]) que ele não é uma consequência de MA, i.e., mostraram a consistência de “MA+ não vale que todos os conjuntos de reais $\aleph_1$ -densos são ordem-isomorfos”.

Suponhamos que A e B sejam dois conjuntos de reais $\aleph_1$ -densos. Uma ordem parcial natural para fazer com que A e B sejam ordem-isomorfos é o conjunto $\mathcal{Q}$ de todas as funções finitas de A em B que preservam a ordem, ordenado por $p \leq q$ sse $p \supseteq q$. Infelizmente esta ordem não é ccc, pois para cada $a \in A$, $\{(a, b) : b \in B\}$ é uma antichain não enumerável de $\mathcal{Q}$, e na realidade ela não vai ser nem própria (pois colapsa ω_1).

Vamos então, primeiramente, mostrar que se CH vale, conseguimos uma subordem de $\mathcal{Q}$ ccc que força que A e B sejam ordem-isomorfos.

Teorema 2.2: (CH). Sejam A e B dois conjuntos de reais $\aleph_1$ -densos e $\mathcal{Q}$ a ordem parcial das funções finitas de A em B que preservam ordem, com $p \leq q$ sse $p \supseteq q$. Então existe uma subordem de $\mathcal{Q}$ que é ccc e que força A e B a serem ordem-isomorfos.

Demonstração:

A idéia da demonstração, superficialmente falando, é a seguinte: se X é uma antichain não enumerável em $\mathcal{Q}$ e cada $q \in X$ tem cardinalidade n , então X pode ser identificado com um subespaço do espaço Euclidiano de dimensão $2n$. Portanto X tem um subconjunto denso enumerável X' . Como vale CH, é possível enumerar todos esses

X' em order type ω_1 . Se pudermos construir uma subordem $\overline{Q}$ de Q que “evita” cada X' a partir de algum ponto, então $\overline{Q}$ será ccc.

Se $q \in Q$, então podemos escrever q canonicamente como $\{(a_0, b_0), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1})\}$ onde $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$ e podemos identificar q com o ponto $(a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$ do espaço Euclidiano de dimensão $2n$. Podemos assim, falar de um conjunto aberto U que é vizinhança de q , etc. Iremos nos referir ao par (a_i, b_i) como o i -ésimo elemento de q e escreveremos $q_i = (a_i, b_i)$.

Se $U = I_0 \times I_1 \times \dots \times I_{2n-1}$ é um produto de intervalos abertos com extremos racionais e U é uma vizinhança de q , então diremos que q é **separado** por U sse $I_i \cap I_j = \emptyset \ \forall i, j < 2n, \ i, j \text{ pares}$ e $I_i \cap I_j = \emptyset \ \forall i, j < 2n, \ i, j \text{ ímpares}$ (i.e., os intervalos que contêm os a_i 's são dois a dois disjuntos e os intervalos que contêm os b_i 's também são dois a dois disjuntos).

Lema 2.2.1: Suponhamos que p e q são ambos separados por U e tais que $|p| = |q| = 2n$, p e q não têm coordenadas em comum (i.e., se $p = (a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$ e $q = (a'_0, b'_0, \dots, a'_{n-1}, b'_{n-1})$, então $a_i \neq a'_j$ e $b_i \neq b'_j \ \forall i, j$) e p e q são incompatíveis em Q . Então existe $i < n$ tal que p_i e q_i são incompatíveis, i.e., $\{p_i, q_i\} \notin Q$.

Demonstração:

Como p e q são incompatíveis, temos que $p \cup q \notin Q$. Suponhamos que p está identificado com $(a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$ e q com $(a'_0, b'_0, \dots, a'_{n-1}, b'_{n-1})$. Como p e q não têm coordenadas em comum, temos que $a_i \neq a'_j \ \forall i, j$ e $b_i \neq b'_j, \ \forall i, j$. Temos então que $p \cup q$ é uma função de A em B . Como $p \cup q \notin Q$, a única possibilidade é $p \cup q$ não preservar a ordem. Portanto, existe $i, j < n$ tal que $\{p_i, q_i\} \notin Q$, ou seja, se $p_i = (a_i, b_i)$ e $q_j = (a'_j, b'_j)$, então ou $a_i < a'_j$ e $b_i > b'_j$ ou $a_i > a'_j$ e $b_i < b'_j$. Vamos mostrar que $i = j$.

Suponhamos que $i < j$ e que aconteça $a_i < a'_j$ e $b_i > b'_j$. Daí, como $i < j$, temos

que $b_i < b_j$ e $b'_i < b'_j$, o que implica que $b'_j < b_i < b_j$. Mas $b'_j, b_j \in I_{2j}$ e $b_i, b'_i \in I_{2i}$. Portanto teríamos que $I_{2j} \cap I_{2i} \neq \emptyset$ (pois os I_k são todos intervalos $\forall k < 2n$), o que é uma contradição, pois p e q são separados por U .

Os outros casos são análogos. ■

Diremos que p e q são **totalmente distintos** se não tiverem coordenadas em comum (no sentido do lema 2.2.1).

Suponhamos agora que $X \subseteq \{q \in \mathbf{Q} : |q| = n\}$. Diremos que $q \in \mathbf{Q}$ é **consistente** com X sse

- (1) q é totalmente distinto de todos os elementos de X e $|q| = n$
- (2) q é incompatível com todo elemento de X
- (3) $\forall i < n$ e $\forall U$, se U é uma vizinhança de q , então existe $p \in U \cap X$ tal que $p \setminus \{p_i\}$ é compatível com $q \setminus \{q_i\}$.

Na prática X vai ser normalmente uma anticadeia e dizer que q é consistente com X é em parte dizer que q pode ser adicionado a X para se obter uma anticadeia maior.

Seja X como acima, $q \in \mathbf{Q}$ com $|q| = n - 1$ e $a \in A$. Então definimos:

$B_i(X, q, a) = \{b \in B : q \cup \{(a, b)\} \text{ é consistente com } X \text{ e } (a, b) \text{ é o } i\text{-ésimo elemento de } q \cup \{(a, b)\}\}$.

Se $b \in B$, definimos

$A_i(X, q, b) = \{a \in A : q \cup \{(a, b)\} \text{ é consistente com } X \text{ e } (a, b) \text{ é o } i\text{-ésimo elemento de } q \cup \{(a, b)\}\}$.

Lema 2.2.2: Cada $A_i(X, q, b)$ e $B_i(X, q, a)$ tem cardinalidade no máximo 2.

Demonstração:

Suponhamos que $a \in A_i(X, q, b)$. Seja $\langle U_m : m \in \omega \rangle$ uma base de vizinhanças

decrecente para $q \cup \{(a, b)\}$. Por (3), para cada m , existe $p^m \in U_m \cap X$ tal que $p^m \setminus \{p_i^m\}$ é compatível com q . Como poderíamos ter escolhido U_0 tal que $q \cup \{(a, b)\}$ é separado por U_0 , temos, pelo lema 2.2.1, que p_i^m e (a, b) são incompatíveis (já que $p^m \setminus \{p_i^m\}$ é compatível com q), isto é, se $p_i^m = (a_i^m, b_i^m)$ então

$$\text{ou (4) } a_i^m < a \quad \text{e} \quad b < b_i^m$$

$$\text{ou (5) } a < a_i^m \quad \text{e} \quad b_i^m < b.$$

Se (4) acontecer para um número infinito de m 's então diremos que a é do tipo 1, enquanto que se (5) ocorrer para um número infinito de m 's diremos que a é do tipo 2.

Se $|A_i(X, q, b)| \geq 3$, então existe $a_1, a_2 \in A_i(X, q, b)$ tal que $a_1 < a_2$ e a_1 e a_2 são do mesmo tipo, por exemplo do tipo 1. Mas agora, se $a_2 = a$ como acima, então escolhendo m suficientemente grande, temos que $a_1 < a_i^m < a_2$ (consigo $a_i^m < a_2$ por (4) e $a_i^m > a_1$ porque $\{U_m : m \in \omega\}$ é decrescente) e $b < b_i^m$, e isso implica que $q \cup \{(a_1, b)\}$ (que é consistente com X) é compatível com p^m (que pertence a X), contradizendo (2).

Todos os outros casos são análogos a esse. ■

Seja agora $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ enumerando todos os subconjuntos enumeráveis de $\{q \in Q : |q| = n\}$ para cada n . Suponhamos que $A = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e $B = \{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Tomemos C como sendo o conjunto de todos os $\alpha < \omega_1$ tais que $\forall \beta, \gamma < \alpha$ e $\forall q \subseteq \{(a_\xi, b_\eta) : \xi, \eta < \alpha\}$, temos que $A_i(X_\beta, q, b_\gamma) \subseteq \{a_\xi : \xi < \alpha\}$ e $B_i(X_\beta, q, a_\gamma) \subseteq \{b_\beta : \beta < \alpha\}$ (*). Observemos que $0 \in C$. Temos ainda que C é um fechado não limitado. De fato, seja $\langle \xi_j : j < \omega \rangle$ uma seqüência crescente tal que $\sup_{j < \omega} \xi_j = \xi$ e $\xi_j \in C \quad \forall j < \omega$. Seja $\beta, \gamma < \xi$ e $q \subseteq \{(a_\delta, b_\eta) : \delta, \eta < \xi\}$. Daí $\beta, \gamma < \xi_j$ e $q \subseteq \{(a_\delta, b_\eta) : \delta, \eta < \xi_j\}$ para algum j . Como $\xi_j \in C$ segue (*) e portanto que C é fechado. Para mostrarmos que C é não limitado, tomemos $\theta < \omega_1$ qualquer. Tomemos

θ_0 tal que

$$\cup \{A_i(X_\beta, q, b_\gamma) : \beta, \gamma < \theta \text{ e } q \subseteq \{(a_\delta, b_\eta) : \delta, \eta < \theta\}\} \subset \{a_\xi : \xi < \theta_0\} \text{ e}$$

$$\cup \{B_i(X_\beta, q, a_\gamma) : \beta, \gamma < \theta \text{ e } q \subseteq \{(a_\delta, b_\eta) : \delta, \eta < \theta\}\} \subset \{b_\xi : \xi < \theta_0\}.$$

Por indução, tomemos θ_{n+1} tal que

$$\cup \{A_i(X_\beta, q, b_\gamma) : \beta, \gamma < \theta_n \text{ e } q \subseteq \{(a_\delta, b_\eta) : \delta, \eta < \theta_n\}\} \subseteq \{a_\xi : \xi < \theta_{n+1}\} \text{ e}$$

$$\cup \{B_i(X_\beta, q, a_\gamma) : \beta, \gamma < \theta_n \text{ e } q \subseteq \{(a_\delta, b_\eta) : \delta, \eta < \theta_n\}\} \subseteq \{b_\xi : \xi < \theta_{n+1}\}.$$

Tomemos agora $\alpha = \sup\{\theta_n : n \in \omega\}$. Daí $\alpha > \theta$ e $\alpha \in C$, pois se $\beta, \gamma < \alpha$ e $q \subset \{(a_\delta, b_\eta) : \delta, \eta < \alpha\}$, então existe n tal que $\beta, \gamma < \theta_n$ e $q \subseteq \{(a_\delta, b_\eta) : \delta, \eta < \theta_n\}$ e portanto $A_i(X_\beta, q, b_\gamma) \subseteq \{a_\xi : \xi < \theta_{n+1}\} \subseteq \{a_\xi : \xi < \alpha\}$ e $B_i(X_\beta, q, a_\gamma) \subseteq \{b_\xi : \xi < \theta_{n+1}\} \subseteq \{b_\xi : \xi < \alpha\}$. Segue então que C é não limitado.

Observemos agora que como A e B são $\aleph_1$ -densos, podemos achar um conjunto fechado não limitado $C' \subseteq C$ tal que $0 \in C'$ e se $\{c_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ enumera C' em ordem crescente, então $A_\alpha = \{a_\xi : c_\alpha \leq \xi < c_{\alpha+1}\}$ e $B_\alpha = \{b_\xi : c_\alpha \leq \xi < c_{\alpha+1}\}$ são sempre densos nos reais. De fato, seja $\{I_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de todos os intervalos de $\mathbf{R}$ com extremos racionais. Definamos c_1 do seguinte modo: seja ξ_0 tal que $a_{\xi_0} \in I_0 \cap A$; ξ_{n+1} tal que $a_{\xi_{n+1}} \in I_{n+1} \cap A$ e $\xi_{n+1} > \xi_n$ (isso é possível, pois $|A \cap I_{n+1}| = \aleph_1$); tomamos $\xi = \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$ e c_1 tal que $c_1 > \xi$ e $c_1 \in C$. Para achar c_{n+1} repetimos o processo, tomando $\xi_0 > c_n$. Se α é limite, definimos $c_\alpha = \sup\{c_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Construimos assim $C' = \{c_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ (tomamos $c_0 = 0$) e pela própria construção dos c_α 's temos que C' tem as propriedades desejadas.

Vamos agora definir a subordem ccc de $\mathbf{Q}$ que queremos e a qual chamaremos de $\overline{\mathbf{Q}}$. Se $\alpha, \beta < \omega_1$, então diremos que α e β são **vizinhos** se existe $n \in \omega$, $n \neq 0$ tal que ou $\alpha + n = \beta$ ou $\beta + n = \alpha$. Seja $\overline{\mathbf{Q}}$ o conjunto dos $q \in \mathbf{Q}$ tal que

(6) $\forall (a, b) \in q$, se $a \in A_\alpha$ e $b \in B_\beta$, então α e β são vizinhos.

(7) $\forall \alpha < \omega_1$, existe no máximo um par $(a, b) \in q$ tal que ou $a \in A_\alpha$ e $\exists \beta < \alpha$ tal que $b \in B_\beta$ ou então $b \in B_\alpha$ e existe $\beta < \alpha$ tal que $a \in A_\beta$.

Lema 2.2.3: Para todo $a \in A$, $\{q \in \overline{\mathbb{Q}} : a \in \text{dom } q\}$ é denso em $\overline{\mathbb{Q}}$ e para todo $b \in B$, $\{q \in \overline{\mathbb{Q}} : b \in \text{imagem } q\}$ é denso em $\overline{\mathbb{Q}}$.

Demonstração:

Seja $a \in A$. Então $a \in A_\alpha$ para algum α . Se $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $a \notin \text{domínio } q$, então como q é finito, podemos escolher n grande o suficiente para que tenhamos $B_{\alpha+n} \cap \text{imagem } q = \emptyset$ e $A_{\alpha+n} \cap \text{dom } q = \emptyset$. Escolhemos agora $b \in B_{\alpha+n}$ de modo que $q \cup \{(a, b)\} \in \mathbb{Q}$, o que é possível, porque $B_{\alpha+n}$ é denso nos reais. Observemos que $q \cup \{(a, b)\} \in \overline{\mathbb{Q}}$ já que $a \in A_\alpha$, $b \in B_{\alpha+n}$, o que garante (6), e que $A_{\alpha+n} \cap \text{dom } q = \emptyset$ e $B_{\alpha+n} \cap \text{imagem } q = \emptyset$, o que garante (7). Temos assim que $q \cup \{(a, b)\} \in \{p \in \overline{\mathbb{Q}} : a \in \text{dom } p\}$, e $q \cup \{(a, b)\} \leq q$.

Para mostrarmos que $\{q \in \overline{\mathbb{Q}} : b \in \text{imagem } q\}$ é denso em $\overline{\mathbb{Q}}$ é análogo. ■

Segue então que em $V\overline{\mathbb{Q}}$, A e B são ordem-isomorfos. É só tomarmos G um genérico, e teremos que G interceptará os densos acima definidos, e daí UG será um isomorfismo de A em B que preserva a ordem.

Só resta então mostrarmos que $\overline{\mathbb{Q}}$ é ccc.

Suponhamos que X é uma anticadeia não enumerável em $\overline{\mathbb{Q}}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que todo elemento de X tem cardinalidade n e que n é minimal entre todas as anticadeias não enumeráveis de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Lema 2.2.4: Sem perda de generalidade, podemos assumir que os elementos de X são dois a dois disjuntos.

Demonstração:

Como os elementos de X são finitos, existe um Δ -sistema $Y \subseteq X$ não enumerável com kernel Δ . Se $\Delta \neq 0$, então $\{q \setminus \Delta : q \in Y\}$ é uma anticadeia não enumerável com $|q \setminus \Delta| < |q| = n$, o que contradiz a minimalidade de n . Então $\Delta = 0$ e os elementos de

Y são dois a dois disjuntos. Basta então substituírmos X por Y .

Lema 2.2.5: Sem perda de generalidade, podemos assumir que os elementos de X são dois a dois totalmente distintos.

Demonstração:

Segue diretamente do lema 2.2.4 e da condição (6) da definição de $\overline{Q}$, pois para um certo a fixado, por exemplo, nós temos apenas um número enumerável de possibilidades para b (já que $a \in A_\alpha$ e $b \in B_\beta$ implica $\alpha = \beta + n$ ou $\beta = \alpha + n$ para algum n). Portanto, podemos ter apenas um número enumerável de pares (a, b) com a ou b em comum. ■

Seja agora $\langle U_m : m \in \omega \rangle$ uma base de abertos para o espaço Euclidiano de dimensão $2n$. Para cada $m \in \omega$ e cada $i \leq n$, seja $X(i, m) \subseteq X$ um conjunto maximal tal que $X(i, m) \subseteq U_m$ e $\{q \setminus \{q_i\} : q \in X(i, m)\}$ é uma anticadeia. Pela minimalidade de n temos que cada $X(i, m)$ é enumerável. Portanto, existe algum α tal que $X_\alpha = \cup \{X(i, m) : i < n \text{ e } m \in \omega\}$.

Observemos que pelo lema 2.2.5 precisa existir $q \in X$ tal que $\forall (a, b) \in q$, se $(a, b) \in A_\beta \times B_\gamma$ então $\beta, \gamma > \alpha$ (pois X é não enumerável, A_β e B_γ são enumeráveis $\forall \beta, \gamma$ e os elementos de X são dois a dois totalmente distintos).

Lema 2.2.6: q é consistente com X_α .

Demonstração:

(1) e (2) seguem direto das suposições sobre X e do fato de X ser anticadeia. Para verificar (3) fixe $i < n$ e U vizinhança de q . Seja m tal que $U_m \subseteq U$ e $q \in U_m$. Pela definição de $X(i, m)$ existe $p \in X(i, m)$ tal que $p \setminus \{p_i\}$ é compatível com $q \setminus \{q_i\}$

e $p \in U_m \cap X$ (pois $X(i, m)$ é maximal). Portanto, p satisfaz (3). ■

Seja agora δ o maior ordinal tal que $(A_\delta \times B) \cap q \neq \emptyset$ ou $(A \times B_\delta) \cap q \neq \emptyset$. Vamos assumir que $(A_\delta \times B) \cap q \neq \emptyset$. Daí, por (7), $(A_\delta \times B) \cap q$ é um conjunto unitário $\{(a, b)\}$ onde $b \in B_\gamma$ para algum $\gamma < \delta$. Observemos que não poderíamos ter $b \in B_\gamma$, onde $\gamma > \delta$, pois daí γ também iria satisfazer a condição acima; mas como $\gamma > \delta$ teríamos uma contradição com o fato de δ ser o maior ordinal que satisfaz tal condição. Suponhamos $(a, b) = q_i$.

Lema 2.2.7: $a \in A_i(X_\alpha, q \setminus \{q_i\}, b)$.

Demonstração:

Segue direto do lema 2.2.6. ■

Mas agora temos que $\alpha < c_\delta$. De fato, como $(A_\delta \times B) \cap q \neq \emptyset$ e para todo $(a, b) \in q$, $(a, b) \in A_\beta \times B_\gamma$ implica que $\beta, \gamma > \alpha$, temos que $\delta > \alpha$. Mas $c_\delta \geq \delta$, pois C' estava enumerado em ordem crescente. Portanto segue que $c_\delta > \alpha$.

Temos ainda que $q \setminus \{q_i\} \subseteq \{(a_\beta, b_\gamma) : \beta, \gamma < c_\delta\}$ (pela maximalidade de δ) e $b \in \{b_\gamma : \gamma < c_\delta\}$ (pois $b \in B_\gamma$, onde $\gamma < \delta$). Portanto, como $c_\delta \in C$, pela definição de C teríamos que ter que $A_i(X_\alpha, q \setminus \{q_i\}, b) \subseteq \{a_\gamma : \gamma < c_\delta\}$, contradizendo o fato de $a \in A_i(X_\alpha, q \setminus \{q_i\}, b)$ (pelo lema 2.2.7), pois $a \in A_\delta = \{a_\gamma : c_\delta < \gamma \leq c_{\delta-1}\}$.

Com essa contradição terminamos a demonstração do teorema 2.2. ■

Teorema 2.3. O PFA implica que todos os conjuntos de reais $\aleph_1$ -densos são ordem-isomorfos.

Demonstração:

Sejam A e B dois conjuntos de reais $\aleph_1$ -densos. Seja ainda $\mathbf{P}$ a ordem parcial que colapsa $2^{\aleph_0}$ sobre $\aleph_1$ com condições enumeráveis. Então $\mathbf{P}$ é *countably closed* e portanto própria. Temos ainda que $\mathbf{P}$ não adiciona novos reais. Como vale CH em $\mathbf{V}^{\mathbf{P}}$, pelo teorema 2.2, temos que existe uma ordem parcial ccc $\overline{\mathbf{Q}} \in \mathbf{V}^{\mathbf{P}}$ tal que em $(\mathbf{V}^{\mathbf{P}})^{\overline{\mathbf{Q}}}$ A e B são ordem-isomorfos. Mas $\mathbf{P} * \overline{\mathbf{Q}}$ é própria e precisamos de apenas $\aleph_1$ conjuntos densos para decidir o valor do isomorfismo para todo $a \in A$ (é só tomarmos $D_a = \{(p, q) \in \mathbf{P} * \overline{\mathbf{Q}} : a \in \text{dom } q\} \forall a \in A$ e $E_b = \{(p, q) \in \mathbf{P} * \overline{\mathbf{Q}} : b \in \text{imagem } q\} \forall b \in B$); assim, se o PFA vale, existe tal isomorfismo. ■

Vamos agora mostrar, usando o mesmo “truque” que usamos no resultado anterior, que o PFA implica que toda família não enumerável X de subconjuntos de ω contém uma cadeia (com relação a inclusão) ou uma anticadeia não enumerável. Convém ressaltar que aqui a anticadeia é um conjunto onde os elementos são dois a dois não comparáveis (pela inclusão).

A idéia é a seguinte. Suponhamos que X não contenha uma cadeia não enumerável. Então tentaremos achar uma ordem parcial que nos permita construir uma anticadeia não enumerável de X usando o PFA. A ordem natural a ser tomada é a ordem parcial onde as condições são anticadeias finitas de X , ordenadas por $p \leq q$ sse $p \supseteq q$. A essa ordem, daremos o nome de $\mathbf{Q}(X)$. Infelizmente, como acontecia no caso anterior, essa ordem pode não ser própria. Usaremos então a mesma técnica usada no caso anterior, ou seja, usaremos o “truque” da Hipótese do Contínuo.

Teorema 2.4: (CH). Suponhamos que X é uma família não enumerável de subconjuntos de ω que não contenha nenhuma cadeia (com relação à inclusão) não enumerável. Então existe $Y \subseteq X$ tal que a ordem parcial $\mathbf{Q}(Y)$ é ccc (onde $\mathbf{Q}(Y) = \{p \mid p \text{ é uma anticadeia finita de } Y\}$ com $p \leq q$ sse $p \supseteq q$).

Demonstração:

A demonstração é parecida com a demonstração do teorema 2.2. Aqui também vamos querer identificar uma condição q da ordem parcial com um ponto do espaço Euclidiano, mas agora, o de dimensão $n = |q|$. Para isso vamos precisar do seguinte:

Lema 2.4.1: Existe uma função φ , injetora, de $P(\omega)$ no conjunto dos números reais tal que $x \subset y$ implica que $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Demonstração:

Basta tomarmos $\varphi(x) = \sum\{3^{-i} : i \in x\}$. ■

Temos então que cada $q \in \mathbf{Q}(X)$ pode ser ordenado de forma canônica, colocando-se $q = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, onde $\varphi(x_0) < \dots < \varphi(x_{n-1})$. Podemos ainda associar cada q ao ponto $\varphi(q) = (\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_{n-1}))$ pertencente ao espaço Euclidiano de dimensão n . Iremos nos referir a x_i como o i -ésimo elemento de q e algumas vezes escreveremos $q_i = x_i$.

Para $q = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, se k é o menor inteiro tal que $\forall i, j < n, i \neq j$ implica que $x_i \cap k \not\subseteq x_j \cap k$, então diremos que $(x_0 \cap k, \dots, x_{n-1} \cap k)$ é o **tipo** de q . Diremos ainda que $p = (x_0, \dots, x_{n-1})$ e $q = (y_0, \dots, y_{n-1})$ **tem o mesmo tipo** se eles têm o mesmo k e $(x_0 \cap k, \dots, x_{n-1} \cap k) = (y_0 \cap k, \dots, y_{n-1} \cap k)$. Observemos que existem apenas um número enumerável de tipos.

Lema 2.4.2: Se $q, r \in \mathbf{Q}(X)$ têm o mesmo tipo e são incompatíveis, então existe $i < n$ tal que q_i e r_i são comparáveis, i.e., ou $q_i \subseteq r_i$ ou $r_i \subseteq q_i$.

Demonstração:

Como r e s têm o mesmo tipo, temos que, se $r = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $q = (y_0, \dots, y_{n-1})$ e k é como definido acima, então $(x_0 \cap k, \dots, x_{n-1} \cap k) = (y_0 \cap k, \dots, y_{n-1} \cap k)$. Do

fato de r e q serem incompatíveis, segue que $r \cup q \notin \mathbf{Q}(X)$, i.e., $r \cup q$ não é uma anticadeia e portanto existe x_i e y_j tal que $x_i \subset y_j$ ou $x_i \supset y_j$. Vamos mostrar que $i = j$. Suponhamos que $x_i \subset y_j$. Daí $x_i \cap k \subset y_j \cap k$, o que implica que $y_i \cap k \subset y_j \cap k$ (pois $x_i \cap k = y_i \cap k$). Portanto, $i = j$, pela definição de k . Se $x_i \subset y_j$ é análogo. ■

Seja $A \subseteq \{q \in \mathbf{Q}(X) : |q| = n\}$ e $q \in \mathbf{Q}(X)$ tal que $|q| = n$. Diremos que q é **consistente** com A se

- (1) q é incompatível e disjunto de todos os elementos de A e
- (2) $\forall i < n, \forall U$, se U é uma vizinhança de $\varphi(q)$, então existe $p \in A$ tal que $\varphi(p) \in U$, p tem o mesmo tipo que q e $p \setminus \{p_i\}$ é compatível com $q \setminus \{q_i\}$.

Para A como acima, $q \in \mathbf{Q}(X)$ com $|q| = n - 1$ e $i < n$, seja

$X_i(A, q) = \{x \in X : q \cup \{x\} \text{ é consistente com } A \text{ e } x \text{ é o } i\text{-ésimo elemento de } q\}$.

Lema 2.4.3: Todo $X_i(A, q)$ é enumerável ou finito.

Demonstração:

Suponhamos que não. Fixemos $x \in X_i(A, q)$ e seja $\langle U_m : m \in \omega \rangle$ uma base decrescente de vizinhanças de $\varphi(q \cup \{x\})$. Por (2), para cada $m \in \omega$, podemos escolher $p^m \in A$ tal $\varphi(p^m) \in U_m$, $p^m \setminus \{p_i^m\}$ é compatível com $q \setminus \{q_i\}$ e p^m tem o mesmo tipo que q . Segue então que

$$(3) \quad \text{ou } \varphi(p_i^m) < \varphi(q_i) = \varphi(x)$$

$$(4) \quad \text{ou } \varphi(x) = \varphi(q_i) < \varphi(p_i^m),$$

pois, pelo lema 2.4.2, por (1) e pelo fato de $p^m \setminus \{p_i^m\}$ ser compatível com $q \setminus \{q_i\}$, segue que ou $p_i^m \subset x$ ou $x \subset p_i^m$.

Se (3) ocorre um número infinito de vezes, então diremos que x é **acessível pela esquerda**; se (4) ocorre um número infinito de vezes, então diremos que x é **acessível**

pela direita.

Suponhamos agora que $Z \subseteq X_i(A, q)$ é um conjunto não enumerável de elementos de $X_i(A, q)$ que são acessíveis pela esquerda, tal que $\{q \cup \{x\} : x \in Z\}$ é tal que todos os seus elementos têm o mesmo tipo (isto é possível pois existem apenas um número enumerável de tipos). Tomemos $x_1, x_2 \in Z$ quaisquer e suponhamos que $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$. Se $x_2 = x$ como acima, então podemos achar m tal que $\varphi(x_1) < \varphi(p_i^m) < \varphi(x_2)$. Mas daí temos que $x_1 \subseteq p_i^m \subseteq x_2$, e como $x_1, x_2 \in Z$ eram quaisquer, isto implica que Z é uma cadeia não enumerável de X , que contraria a hipótese do teorema.

Como estamos supondo que $X_i(A, q)$ é não enumerável, teríamos que conseguir então $Z \subseteq X_i(A, q)$ como acima, mas agora com elementos acessíveis pela direita. Mas daí, fazendo um argumento análogo ao que foi feito, chegamos a uma contradição. Concluimos assim que $X_i(A, q)$ não pode ser não enumerável, isto é, $X_i(A, q)$ é enumerável ou finito, como queríamos. ■

Suponhamos agora que $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ enumera todos os $A \subseteq \{q \in \mathbf{Q}(X) : |q| = n\}$ tal que A é enumerável, para cada $n \in \omega$. Vamos definir $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ por indução em α . Suponha já definido $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Seja $Z_\alpha = \cup \{X_i(A_\beta, q) : \beta < \alpha, \exists n \text{ tal que } A_\beta \subseteq \{p \in \mathbf{Q}(\{y_\beta : \beta < \alpha\}) : |p| = n\}, q \in \mathbf{Q}(\{y_\beta : \beta < \alpha\}), |q| = n - 1, i < n\}$. Pelo lema 2.4.3, Z_α é enumerável. Podemos então escolher $y_\alpha \in X \setminus (Z_\alpha \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\})$.

Só nos resta agora verificar que $\mathbf{Q}(Y)$ é ccc. Suponhamos que não. Seja, então, W uma anticadeia não enumerável em $\mathbf{Q}(Y)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que todo elemento de W tem cardinalidade n e que n é minimal entre todas as anticadeias não enumeráveis de $\mathbf{Q}(Y)$.

Lema 2.4.4: Sem perda de generalidade podemos supor que todos os elementos de W são dois a dois disjuntos.

Demonstração:

É igual à demonstração do lema 2.2.4.

Podemos ainda supor que todos os elementos de W têm o mesmo tipo, já que temos apenas um número não enumerável de tipos.

Seja agora $\langle U_m : m \in \omega \rangle$ uma base de abertos para o espaço Euclidiano de dimensão n . Para cada $m \in \omega$ e cada $i \leq n$, seja $W(i, m) \subseteq W$ um conjunto maximal tal que $W(i, m) \subseteq U_m$ e $\{q \setminus \{q_i\} : q \in W(i, m)\}$ é uma anticadeia. Pela minimalidade de n , segue que cada $W(i, m)$ é enumerável. Portanto, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A_\alpha = \cup \{W(i, m) : i < n, m \in \omega\}$.

Agora, A_α é enumerável. Segue então que $\{y_\gamma : y_\gamma \in q \text{ e } q \in A_\alpha\}$ é enumerável (já que cada q é finito) e portanto é limitado em Y . Podemos então achar $q \in W$ tal que se $\delta = \max\{\gamma : y_\gamma \in q\}$, então $A_\alpha \subseteq \mathbf{Q}(\{y_\gamma : \gamma < \delta\})$ e $\delta > \alpha$ (pois W é não enumerável e seus elementos são dois a dois disjuntos).

Lema 2.4.5: q é consistente com A_α .

Demonstração:

(1) é claro, já que $q \in W$ e $A_\alpha \subset W$. Vamos então mostrar que vale (2).

Fixemos $i < n$ e U uma vizinhança de $\varphi(q)$. Seja m tal que $U_m \subseteq U$ e $\varphi(q) \in U_m$. Pela definição de $W(i, m)$, precisa existir $p \in W(i, m)$ tal que $p \setminus \{p_i\}$ é compatível com $q \setminus \{q_i\}$. Temos que p e q têm o mesmo tipo, pois estamos supondo que todos os elementos de W têm o mesmo tipo. ■

Seja $\delta = \max\{\gamma : y_\gamma \in q\}$. Suponhamos que y_δ é o i -ésimo elemento de q .

Lema 2.4.6: $y_\delta \in X_i(A_\alpha, q \setminus \{y_\delta\})$.

Demonstração:

Segue direto do lema 2.4.5. ■

Mas agora temos que $\alpha < \delta$, $q \setminus \{y_\delta\} \subseteq \{y_\gamma : \gamma < \delta\}$ e que $A_\alpha \subseteq \mathbf{Q}(\{y_\gamma : \gamma < \delta\})$. Portanto $X_i(A_\alpha, q \setminus \{y_\delta\}) \subset Z_\delta$ (pela definição de Z_δ). Portanto $y_\delta \in Z_\delta$, o que é uma contradição com a definição de $y_\delta \in Y$.

Concluimos assim que $\mathbf{Q}(Y)$ é ccc e portanto Y é de fato o conjunto procurado. ■

Teorema 2.5: O PFA implica que toda família não enumerável de subconjuntos de ω contém uma cadeia ou uma antcadeia não enumerável.

Demonstração:

A demonstração deste teorema é basicamente a mesma que fizemos para mostrar o teorema 2.3, com apenas uma dificuldade a mais. O razoável de se tentar fazer é, dada uma família X não enumerável de subconjuntos de ω , supor que X não contém uma cadeia não enumerável e tentar construir uma antcadeia não enumerável usando $\mathbf{Q}(Y)$ obtido no teorema 2.4. Pode acontecer porém, que em $\mathbf{Q}(Y)$ existam elementos que não podem ser estendidos, isto é, elementos que são antcadeias maximais finitas de Y . Neste caso, teríamos problemas para conseguir os densos necessários para construir a antcadeia desejada.

Para resolver esse problema, vamos primeiro mostrar que podemos achar $p \in \mathbf{Q}(Y)$ tal que $\forall q \in \mathbf{Q}(Y)$, se $q \leq p$, então existe um número não enumerável de $y \in Y$ tal que $q \cup \{y\} \in \mathbf{Q}(Y)$. Daí mostraremos o teorema usando uma subordem $\overline{\mathbf{Q}(Y)}$ de $\mathbf{Q}(Y)$, onde $\overline{\mathbf{Q}(Y)} = \{q \in \mathbf{Q}(Y) : q \leq p\}$.

Primeiramente, vamos achar tal p . Seja $A \subset \mathbf{Q}(Y)$ uma antcadeia maximal de

$\{p \in \mathbf{Q}(Y) : \{y \in Y : p \cup \{y\} \in \mathbf{Q}(Y)\} \text{ é enumerável}\}$. Como $\mathbf{Q}(Y)$ é ccc, temos que A é enumerável. Tomemos agora $B = \bigcup A \cup \{y \in Y : \exists p \in A \text{ tal que } p \cup \{y\} \in \mathbf{Q}(Y)\}$.

Como A é enumerável, segue que B também é enumerável. Podemos então tomar $y_* \in Y \setminus B$. Vamos mostrar que $p = \{y_*\}$ satisfaz o que queremos. Seja $q \in \mathbf{Q}(Y)$ tal que $q \supseteq \{y_*\}$. Temos então que $y_* \in q$, o que implica que $q \notin A$. Pela definição de A , segue que ou $\{y \in Y : q \cup \{y\} \in \mathbf{Q}(Y)\}$ é não enumerável, ou existe $r \in A$ tal que r é compatível com q . Suponhamos que aconteça a segunda alternativa. Daí existe $s \in \mathbf{Q}(Y)$ tal que $s \supseteq r \cup q$. Como $y_* \in q$, vamos ter então que $y_* \in s$ e portanto $r \cup \{y_*\} \in \mathbf{Q}(Y)$. Mas isso é um absurdo, pois $y_* \notin B$ e $r \in A$. Concluimos então que $\{y \in Y : q \cup \{y\} \in \mathbf{Q}(Y)\}$ é não enumerável, como queríamos.

Tomemos agora $\overline{\mathbf{Q}(Y)} = \{q \in \mathbf{Q}(Y) : q \leq p\}$. Podemos então repetir o que foi feito na demonstração do teorema 2.3, mas com $\overline{\mathbf{Q}(Y)}$ no lugar de $\overline{\mathbf{Q}}$. Obtemos assim a ordem parcial $\mathbf{P} * \overline{\mathbf{Q}(Y)}$ que é própria. Só resta agora mostrarmos que conseguimos, dessa forma, construir a anticadeia desejada. Para isso suponhamos que $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ (podemos supor que $|Y| = \omega_1$). Basta então tomarmos $D_\alpha = \{(p, q) \in \mathbf{P} * \overline{\mathbf{Q}(Y)} : \exists \beta > \alpha \text{ tal que } y_\beta \in q\} \forall \alpha < \omega_1$. Pelo que mostramos acima, temos que cada D_α é denso. Usando o PFA, podemos então tomar G um genérico tal que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha < \omega_1$. Daí $A = \bigcup \{q \in \overline{\mathbf{Q}(Y)} : (p, q) \in G \text{ para algum } p \in \mathbf{P}\}$ vai ser uma anticadeia não enumerável de Y e portanto de X . ■

Vamos terminar este item mostrando a seguinte consequência do teorema 2.5.

Teorema 2.6: (PFA). Toda função de um conjunto não enumerável de reais nos reais é monotônica em um subconjunto não enumerável.

Demonstração:

Suponhamos que $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função, onde $\mathbf{R}$ denota os reais e $A \subset \mathbf{R}$

é não enumerável. Se f for constante em um conjunto não enumerável, não há nada a fazer. Vamos assumir então que isso não acontece. Sem perda de generalidade, podemos assumir que f é injetora. Sejam, agora, $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ dois subconjuntos de $\mathbf{Q}$ (onde $\mathbf{Q}$ denota os números racionais) disjuntos tais que cada um deles é denso em $\mathbf{Q}$ e além disso $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \cup \mathbf{Q}_2$. Para cada $r \in A$, seja

$$x_r = \{q \in \mathbf{Q}_1 : r \leq q\} \cup \{q \in \mathbf{Q}_2 : f(r) \leq q\}.$$

Suponhamos que $r, s \in A$ e que $r < s$. Se x_r e x_s são comparáveis, então $x_s \subseteq x_r$ e $f(r) < f(s)$. Se x_r e x_s são incomparáveis, então $f(r) > f(s)$. Portanto, uma cadeia ou uma anticadeia não enumerável em $\{x_r : r \in A\}$ dá origem a uma função monotônica e temos assim que o resultado segue do teorema 2.5. ■

IV - O PROBLEMA MOORE-MROWKA

Neste capítulo, mostraremos que o PFA implica uma resposta afirmativa para o seguinte problema:

Problema Moore–Mrowka. Se X é um espaço Hausdorff compacto, com *tightness* enumerável, então X é seqüencial?

Definição 1: Dizemos que um espaço topológico X tem **tightness enumerável** se sempre que $x \in \overline{A}$, $A \subset X$, então existe $B \subset A$ enumerável tal que $x \in \overline{B}$.

Definição 2: Dizemos que um espaço topológico X é **seqüencial** se para todo $A \subset X$, A é fechado se e somente se toda seqüência enumerável de pontos de A só converge para pontos de A .

Este problema foi proposto pela primeira vez por Moore e Mrowka em [MM]. Ostaszewski em [O] e Fedorchuk em [Fe] construíram contra-exemplos usando $\diamond$, que mostram que é consistente com ZFC, uma resposta negativa para este problema. A existência de contra-exemplos é compatível também com “MA + a negação da hipótese do contínuo” e com o PFA restrito a ordens parciais de tamanho $\leq \omega_1$, como foi mostrado por Nyikos em [Ny].

Um tratamento mais detalhado do problema Moore–Mrowka, e questões relacionadas com ele, pode ser encontrado na seção de problemas de [TP], Problemas Clássicos VI, e em [A].

Balogh em [B] mostra que o PFA implica que todo espaço Hausdorff compacto com

tightness enumerável é seqüencial, que é a demonstração que apresentaremos neste capítulo. Na realidade, mostraremos um teorema combinatório, usando o PFA, do qual seguirá o resultado que queremos, utilizando uma consequência do MA. Temos assim que este capítulo estará dividido em três itens: no primeiro mostraremos a consequência do MA; no segundo mostraremos o teorema combinatório, que trata da existência de ω_1 -seqüências crescentes para relações pequenas; e no terceiro finalmente mostraremos o resultado anunciado.

1. Uma consequência do MA

Temos como objetivo, neste item, mostrar que segue como consequência do Axioma de Martin que um espaço Hausdorff compacto é seqüencial se e somente se é C -fechado. Este resultado também pode ser obtido se, ao invés de assumirmos MA, assumirmos que vale $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Precisamos, porém, para demonstrar as afirmações acima, de alguns resultados preliminares.

Uma consequência combinatória do MA, muito útil, é o seguinte princípio combinatório, que chamaremos de P_0 .

P_0 : Dada uma coleção de menos do que $2^{\aleph_0}$ subconjuntos de ω tal que a interseção de qualquer subcoleção finita é infinita, existe um subconjunto $B \subseteq \omega$ infinito tal que para todo membro A da coleção temos que $|B \setminus A| < \omega$.

Teorema 1.1: MA implica P_0 .

Demonstração:

Seja $\kappa < 2^{\aleph_0}$ e seja $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma coleção de subconjuntos de ω tais que

$$(1) \quad \forall F \in [\kappa]^{<\aleph_0}, \quad \cap \{A_\alpha : \alpha \in F\} \text{ é infinito.}$$

Vamos então definir a seguinte ordem parcial: seja $\mathbf{P}$ o conjunto de todos os pares

$\langle b, F \rangle$ tais que:

$$(2) \quad b \in [\omega]^{<\aleph_0} \quad \text{e} \quad F \in [\kappa]^{<\aleph_0}.$$

Diremos que $\langle b_1, F_1 \rangle \leq \langle b_2, F_2 \rangle$ sse

$$(2) \quad b_1 \supseteq b_2, \quad F_1 \supseteq F_2 \quad \text{e}$$

$$(4) \quad \forall \alpha \in F_2 \quad (b_1 \setminus b_2) \subseteq A_\alpha$$

Primeiramente vamos verificar que $\mathbf{P}$ é ccc. Para termos $(b_1, F_1), (b_2, F_2)$ incompatíveis, é necessário que $(b_1 \cup b_2, F_1 \cup F_2)$ não seja uma extensão deles, isto é, que exista $\alpha \in F_1 \cup F_2$ tal que $(b_2 \setminus b_1 \not\subseteq A_\alpha)$ ou exista $\alpha \in F_1 \cup F_2$ tal que $(b_1 \setminus b_2 \not\subseteq A_\alpha)$. Portanto, é necessário que b_1 e b_2 sejam distintos. Assim, para termos uma anticadeia $\{(b_i, F_i) : i \in I\}$, precisamos ter os b_i 's dois a dois distintos. Mas só temos um número enumerável de possibilidades para os b 's. Logo, não podemos ter uma anticadeia não enumerável e segue, então, que $\mathbf{P}$ é ccc.

Agora, para $\alpha \in \kappa$, seja $D_\alpha = \{\langle b, F \rangle \in \mathbf{P} : \alpha \in F\}$. Então D_α é denso, para cada $\alpha \in \kappa$. De fato, seja $q \in \mathbf{P}$, $q = \langle b, F \rangle$. Se $\alpha \in F$, não há o que fazer. Suponhamos que $\alpha \notin F$. Definimos $p = \langle b, F \cup \{\alpha\} \rangle$. Daí $p \in D_\alpha$ e $p \leq q$ (a condição (4) está satisfeita, pois temos o mesmo b para p e q).

Definimos agora, para cada $n \in \omega$, $E_n = \{\langle b, F \rangle \in \mathbf{P} : \text{para algum } m \geq n, m \in b\}$. Novamente, temos que E_n é denso, para cada $n \in \omega$. De fato, seja $q \in \mathbf{P}$, $q = \langle b, F \rangle$. Por (1), temos que $\cap \{A_\alpha : \alpha \in F\}$ é infinita. Logo, existe $m \geq n$ tal que $m \in \cap \{A_\alpha : \alpha \in F\}$. Tomemos $p = \langle b \cup \{m\}, F \rangle$. Daí $p \in E_n$ e $p \leq q$.

Seja agora $G \subseteq \mathbf{P}$ um genérico para os densos $\{D_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ e $\{E_n : n \in \omega\}$ e seja

$$B = \cup \{b : \langle b, F \rangle \in G \text{ para algum } F\}.$$

Temos que verificar que B satisfaz a conclusão de P_0 , isto é, que B é infinito e que $|B \setminus A_\alpha| < \omega$ para todo $\alpha \in \kappa$.

Seja $n \in \omega$. Como $E_n \cap G \neq \emptyset$, temos que existe $\langle b, F \rangle \in G$ tal que $\langle b, F \rangle \in E_n$, ou seja, tal que para algum $m \geq n$, $m \in b$. Mas $\langle b, F \rangle \in G$, logo $m \in B$. Assim, temos que $\forall n \in \omega \exists m \geq n$ tal que $m \in B$. Portanto, B é infinito.

Seja agora $\alpha \in \kappa$. Temos que mostrar que $|B \setminus A_\alpha| < \omega$. Como $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$, existe $\langle b_1, F_1 \rangle \in G$ tal que $\alpha \in F_1$. Seja $n \in B \setminus A_\alpha$. De $n \in B$, segue que $n \in b_2$, onde b_2 é tal que $\langle b_2, F_2 \rangle \in G$, para algum F_2 . Como G é filtro, $\exists \langle b_3, F_3 \rangle \in G$ tal que $\langle b_3, F_3 \rangle \leq \langle b_1, F_1 \rangle, \langle b_2, F_2 \rangle$. Do fato de que $\langle b_3, F_3 \rangle \leq \langle b_2, F_2 \rangle$, segue que $n \in b_3$, e do fato de que $\langle b_3, F_3 \rangle \leq \langle b_1, F_1 \rangle$ e $\alpha \in F_1$, segue que $b_3 \setminus b_1 \subset A_\alpha$. Agora, $n \notin A_\alpha$ e $n \in b_3$. Logo, $n \in b_1$. Temos então que $B \setminus A_\alpha \subset b_1$ e portanto é finito.

Segue então que B é o conjunto procurado. ■

Usando este princípio combinatório, vamos agora motrar o seguinte lema.

Lema 1.2: (MA). Seja X um espaço de Hausdorff, $A \subseteq X$ enumerável e $x_0 \in \overline{A}$, e suponha que pelo menos uma das condições abaixo esteja satisfeita:

- (a) $\chi(x_0, X) < 2^{\aleph_0}$.
- (b) X é regular, enumeravelmente compacto e $\psi(x_0, X) < 2^{\aleph_0}$.

Então existe uma seqüência em A convergindo para x_0 .

Demonstração:

Se existe uma seqüência constante em A convergindo para x_0 , não há o que fazer. Suponhamos então que isso não aconteça. Neste caso, $U \cap A$ é infinito para toda vizinhança U de x_0 .

(a) Suponhamos que $\chi(x_0, X) < 2^{\aleph_0}$.

Seja $\mathcal{U}$ uma base de vizinhanças de x_0 com $|\mathcal{U}| < 2^{\aleph_0}$. Então $\{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ é uma coleção de menos do que $2^{\aleph_0}$ subconjuntos infinitos de A tal que qualquer interseção finita é infinita (pois se $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ é finito, $\bigcap_{U \in \mathcal{U}'} (U \cap A) = (\bigcap_{U \in \mathcal{U}'} U) \cap A$, que é infinito pela suposição do começo). Como A é enumerável, existe $f : A \rightarrow \omega$ bijeção, e tomando a imagem pela f , conseguimos uma coleção que satisfaça as hipóteses de P_0 . Pelo teorema 1.1, temos então que existe $B \subseteq A$ infinito tal que $B \setminus (U \cap A) = B \setminus U$ é finito para todo $U \in \mathcal{U}$ (usamos P_0 e depois tomamos a imagem inversa pela f).

Tomamos agora qualquer seqüência que enumera B . Como $B \setminus U$ é finito para todo $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ é uma base de vizinhança para x_0 , $B \subset A$ e $U \cap A$ é infinito para todo $U \in \mathcal{U}$, segue que essa seqüência converge para x_0 .

(b) Suponhamos que vale (b).

Como X é regular, $\{x_0\} = \bigcap \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto das vizinhanças abertas de x_0 . Mas $\psi(x_0, X) < 2^{\aleph_0}$. Logo, existe uma família $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ tal que $|\mathcal{U}| < 2^{\aleph_0}$ e $\bigcap \mathcal{U} = \{x_0\}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, escolhemos $V_U \in \mathcal{V}$ tal que $\overline{V_U} \subseteq U$. Mais uma vez, usando P_0 e fazendo análogo ao que foi feito no item (a), temos que existe uma seqüência $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ em A tal que $\{n : x_n \notin V_U\}$ é finito para todo $U \in \mathcal{U}$.

Mas agora, se $W \in \mathcal{V}$, $W \supseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{V_U}$ que contém todos os pontos de acumulação de $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ (pois para cada $U \in \mathcal{U}$, só temos um número finito de n tal que $x_n \notin V_U$ e portanto os pontos de acumulação vão pertencer ao $\overline{V_U} \forall U \in \mathcal{U}$). Logo, como X é enumeravelmente compacto, $\{n : x_n \notin W\}$ é finito (pois se fosse infinito, teria um ponto de acumulação fora de W). Assim, para toda vizinhança W de x_0 , $\{n : x_n \notin W\}$ é finito. Logo, a seqüência $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ converge para x_0 . ■

O teorema seguinte é um resultado clássico de topologia geral, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ho], por exemplo.

Teorema 1.3 (Čech–Pospíšil): Seja X um espaço Hausdorff compacto tal que $\chi(p, X) \geq \kappa$ para cada $p \in X$. Então $|X| \geq 2^\kappa$.

Idéia da Demonstração:

A idéia é construir uma árvore com κ níveis tal que cada ponto de um certo nível $\alpha < \kappa$ se ramifica em dois. Cada caminho percorrido na árvore determina uma seqüência decrescente de conjuntos fechados não vazios em X , que por sua vez determina um ponto de X . Cada caminho determina pontos distintos e o número de caminhos é 2^κ . A versão enumerável dessa construção é a árvore de Cantor. ■

Vamos agora definir o que é um espaço topológico C -fechado e a seguir mostraremos um lema, que será usado posteriormente.

Definição 1.4: Um espaço topológico X é dito C -fechado se todo subconjunto de X enumeravelmente compacto é fechado em X . Equivalentemente, X é C -fechado, se todo subconjunto A de X não fechado contém uma seqüência x_n que não tem *cluster point* em A .

Lema 1.5: Se X é um espaço enumeravelmente compacto C -fechado, então $|X| \leq d(X)^{\aleph_0}$, onde $d(X)$ é a densidade de X .

Demonstração:

Seja A um subconjunto arbitrário de X e seja

$$\exp_\omega(A) = \{B \subseteq A : |B| \leq \omega\}.$$

Para todo $B \in \exp_\omega(A)$, seja $x(B)$ um ponto de acumulação de B em X e seja ainda

$$T(A) = \{x(B) : B \in \exp_\omega(A)\}.$$

Claramente, $|T(A)| \leq |A|^{\aleph_0}$.

Agora, seja D um subconjunto denso de X tal que $|D| = d(X)$. Seja $A_0 = D$. Se $\alpha < \omega_1$ e $\forall \beta < \alpha$ já tivermos definido A_β tal que $|A_\beta| \leq d(X)^{\aleph_0}$, seja

$$A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \cup T\left(\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta\right).$$

Daí $|A_\alpha| \leq d(X)^{\aleph_0}$ (pois $|T(\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta)| \leq |\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta|^{\aleph_0} \leq ((d(X))^{\aleph_0})^{\aleph_0} = (d(X))^{\aleph_0}$).

Seja $Y = \bigcup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$. Então, Y é enumeravelmente compacto (pois todo subconjunto infinito tem ponto de acumulação) e $|Y| = d(X)^{\aleph_0}$.

Como X é C -fechado, Y é fechado em X . Mas D é denso em X e $D \subseteq Y$. Logo $X = Y$ e temos portanto que $|X| \leq d(X)^{\aleph_0}$, como queríamos. ■

Podemos agora, mostrar o resultado principal deste item.

Teorema 1.6: ($2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ ou MA). Um espaço Hausdorff compacto X é seqüencial se e somente se é C -fechado.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Segue direto da definição de espaço seqüencial e da equivalente definição de espaço C -fechado.

($\Leftarrow$)

Suponhamos X C -fechado. Seja A um subconjunto de X não fechado. Para mostrar que X é seqüencial, temos que mostrar que existe uma seqüência em A convergindo para um ponto em $X \setminus A$.

Como X é C -fechado, existe uma seqüência $S = \{x_n : n \in \omega\}$ em A que não tem *cluster point* em A .

Seja $Y = \overline{S}$. Então Y é um espaço de Hausdorff, compacto e separável e Y é C -fechado. Então pelo lema 1.5, $|Y| \leq 2^{\aleph_0}$. Observemos que $Y \setminus S$ é um subconjunto

G_δ compacto de Y ($Y \setminus S$ é G_δ , pois $Y \setminus S = \cap \{Y \setminus \{x_n\} : n \in \omega\}$ e $Y \setminus \{x_n\}$ é aberto em $Y \forall n \in \omega$; $Y \setminus S$ é compacto, pois é fechado). Segue então que $\forall y \in Y \setminus S$, $\chi(y, Y) = \chi(y, Y \setminus S)$.

Se $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, pelo teorema 1.3 existe $y \in Y \setminus S$ tal que $\chi(y, Y) \leq \aleph_0$. Logo, existe uma subsequência de S convergindo para y . Como S não tem *cluster point* em A , $y \in X \setminus A$. Logo, existe uma sequência em A convergindo para um ponto em $X \setminus A$.

Suponhamos que vale MA. De novo pelo teorema 1.3, existe $y \in Y \setminus S$ tal que $\chi(y, Y) < 2^{\aleph_0}$. Logo, pelo lema 1.2, conseguimos uma sequência em S , e portanto em A , convergindo para y . Pela mesma razão acima, $y \in X \setminus A$.

Com isso, terminamos a demonstração do teorema. ■

2. ω_1 -seqüências crescentes para relações pequenas

Neste item, serão essenciais os seguintes conceitos.

Definição 2.1: Seja X um conjunto não vazio e $A, V \subset X^2$ relações reflexivas (ou seja, $x \in A(x)$ e $x \in V(x) \forall x \in X$) em X . Dizemos que uma seqüência $\{x_\xi : \xi \in \omega_1\}$ de pontos distintos de X é uma ω_1 -seqüência crescente para o par $\langle A, V \rangle$ se, para todo $\delta \in \omega_1$, vale que

$$A(x_\delta) \cap \{x_\xi : \xi \in \omega_1\} \subseteq \{x_\xi : \xi \leq \delta\}$$

$$\text{e } V(x_\delta) \cap \{x_\xi : \xi \in \omega_1\} \supseteq \{x_\xi : \xi \leq \delta\}$$

Observemos que se $A \subset X^2$ é uma relação, então $A(x) = \{y \in X : (x, y) \in A\}$.

Definição 2.2: Se X é um espaço topológico e $\mathcal{F}$ é um filtro fechado em X , diremos que um subconjunto Y de X é $\mathcal{F}$ -pequeno se existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $Y \cap F = \emptyset$. Uma relação $A \subseteq X^2$ vai ser chamada " $\mathcal{F}$ -small valued" se $A(x)$ é $\mathcal{F}$ -pequeno para todo $x \in X$.

O resto deste item consistirá da demonstração do seguinte teorema sobre a existência de ω_1 -seqüências crescentes para um par de relações.

Teorema 2.3: (PFA). Seja X um espaço T_1 , enumeravelmente compacto e não compacto, e seja $\mathcal{F}$ um filtro fechado livre em X . Suponhamos que $\langle A, V \rangle$, $A, V \subseteq X^2$, é um par de relações reflexivas em X tais que A é $\mathcal{F}$ -small valued e para todo $x \in X$, $A(x)$ é fechado e $V(x)$ é aberto. Então existe uma ω_1 -seqüência crescente para o par $\langle A, V \rangle$.

Demonstração:

Vamos primeiro observar que a conclusão do teorema acima (isto é, existe uma ω_1 -seqüência crescente para $\langle A, V \rangle$) não depende nem da topologia de X nem do filtro $\mathcal{F}$. Observemos ainda que a relação A existe, já que $\mathcal{F}$ é livre, pois se $x \in X$ fosse tal que $\{x\} \cap F \neq \emptyset \ \forall F \in \mathcal{F}$ então $x \in \bigcap \mathcal{F}$, o que é um absurdo. Podemos então tomar, por exemplo, $A(x) = \{x\}$ (que é fechado, pois X é T_1).

Consideremos então uma nova topologia τ' em X definida pela “operação fecho”

$$cl_{\tau'}(E) = \bigcup \{ \overline{D} : D \in [E]^{\leq \omega} \},$$

onde $\overline{D}$ denota o fecho de D na topologia original τ .

Segue direto da definição de fecho na topologia τ' , que $\langle X, \tau' \rangle$ tem *tightness* enumerável. Como $cl_{\tau'}(E) \subset \overline{E}$, temos ainda que τ' refina τ , e portanto que $\langle X, \tau' \rangle$ é um espaço T_1 , que $\mathcal{F}$ é uma base para um filtro fechado livre em $\langle X, \tau' \rangle$, e para todo $x \in X$, $A(x)$ é fechado e $V(x)$ é aberto em $\langle X, \tau' \rangle$. $\langle X, \tau' \rangle$ é enumeravelmente compacto, pois um subespaço infinito, enumerável, fechado e discreto em $\langle X, \tau' \rangle$ teria as mesmas propriedades em $\langle X, \tau \rangle$ (é fechado em τ pois, se E é tal subespaço, como E é enumerável, temos que $E = cl_{\tau'}(E) = \bigcup \{ \overline{D} : D \in [E]^{\leq \omega} \} = \overline{E}$).

Mais ainda, se estendermos $\mathcal{F}$ para um ultrafiltro $\mathcal{F}'$ fechado em $\langle X, \tau' \rangle$, então os conjuntos $\mathcal{F}$ -pequenos continuam pequenos com respeito a $\mathcal{F}'$. Então, se para A, V

dados, podemos achar X e $\mathcal{F}$ satisfazendo as condições do teorema, então X pode ser escolhido de modo que tenha *tightness* enumerável e $\mathcal{F}$ pode ser escolhido de modo que seja um ultrafiltro fechado.

Portanto, no resto da demonstração, vamos assumir que X tem *tightness* enumerável e que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro livre fechado em X .

Seja $\mathcal{H} = \{H \subset X : \exists F \in \mathcal{F} \text{ tal que } H \cap F = \emptyset\}$. Claramente, $\mathcal{H}$ é um ideal próprio.

Como X é enumeravelmente compacto, temos que $\mathcal{F}$ é um filtro σ -completo. De fato, como $\mathcal{F}$ é maximal temos que se G é fechado e é tal que $G \cap F \neq \emptyset \forall F \in \mathcal{F}$, então $G \in \mathcal{F}$. Seja $\{F_n : n \in \omega\}$ tal que $F_n \in \mathcal{F} \forall n \in \omega$; temos que mostrar que $\bigcap_{n \in \omega} F_n \in \mathcal{F}$. Suponhamos que não. Então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $(\bigcap_{n \in \omega} F_n) \cap F = \emptyset$, o que é um absurdo, pois X é enumeravelmente compacto e portanto toda família enumerável de fechados com a propriedade da interseção finita tem interseção não vazia. Temos assim, que de fato $\mathcal{F}$ é um filtro σ -completo e portanto $\mathcal{H}$ é um σ -ideal.

Seja $\mathcal{H}_0$ a família dos membros abertos de $\mathcal{H}$. Observemos que todo membro de $\mathcal{H}$ está contido em algum membro de $\mathcal{H}_0$, pois $H \cap F = \emptyset$ implica que $H \subset F^c$, e $F^c \in \mathcal{H}_0$. Observemos também que se $Z \subseteq X$ e $Z \notin \mathcal{H}$, então $X \setminus \overline{Z} \in \mathcal{H}$. De fato, se $Z \notin \mathcal{H}$, então $Z \cap F \neq \emptyset \forall F \in \mathcal{F}$. Logo, $\overline{Z} \cap F \neq \emptyset \forall F \in \mathcal{F}$, e como $\mathcal{F}$ é maximal, segue que $\overline{Z} \in \mathcal{F}$ e portanto $X \setminus \overline{Z} \in \mathcal{H}$.

Vamos agora definir um conjunto parcialmente ordenado $\langle \mathbf{T}, \preceq \rangle$ da seguinte forma. Primeiro, seja $\mathbf{T}$ o conjunto de todas as funções parciais finitas t de ω_1 em X tais que $\forall \eta, \xi \in \text{dom}(t), \eta < \xi$, vale que $t(\xi) \notin A(t(\eta))$. Esta condição vai nos garantir, quando construirmos a ω_1 -seqüência desejada, que $\forall \delta \in \omega_1 \ A(x_\delta) \cap \{x_\xi : \xi \in \omega_1\} \subseteq \{x_\xi : \xi \leq \delta\}$.

Se $t \in \mathbf{T}$, $\xi \in \text{dom}(t)$, então um ordinal $\eta \in \omega_1$ vai ser chamado (ξ, t) -bad, se $\eta \in \text{dom}(t) \cap \xi$ e $t(\eta) \notin V(t(\xi))$.

Se $s, t \in \mathbf{T}$, diremos que $t \preceq s$ sse $t \supseteq s$ e sempre que $\xi \in \text{dom}(s)$ e $\eta \in \text{dom}(t)$ é (ξ, t) -bad, existe $\eta' \in \text{dom}(s) \setminus \eta$ tal que η' é (ξ, t) -bad. A maneira como foi definida a ordem nos garantirá que a ω_1 -seqüência que será construída irá satisfazer a outra condição necessária para ser uma ω_1 -seqüência crescente para o par $\langle A, V \rangle$.

Primeiramente, vamos verificar que $\preceq$, como foi definida acima, é de fato uma ordem parcial em $\mathbf{T}$. Para verificar que vale a propriedade reflexiva, basta tomarmos $\eta = \eta'$. Vamos então verificar que vale a transitividade.

Suponhamos que $\mu \preceq t$ e $t \preceq s$. Temos então que $\mu \supseteq t$ e $t \supseteq s$ e portanto segue que $\mu \supseteq s$. Agora, pela definição da ordem temos que:

$$t \preceq s \Rightarrow (\xi \in \text{dom}(s) \text{ e } \eta \in \text{dom}(t) \text{ é } (\xi, t)\text{-bad} \Rightarrow \exists$$

$$\eta' \in \text{dom}(s) \setminus \eta \text{ tal que } \eta' \text{ é } (\xi, t)\text{-bad})$$

$$\mu \preceq t \Rightarrow (\xi \in \text{dom}(t) \text{ e } \eta \in \text{dom}(\mu) \text{ é } (\xi, \mu)\text{-bad} \Rightarrow$$

$$\exists \eta' \in \text{dom}(t) \setminus \eta \text{ tal que } \eta' \text{ é } (\xi, \mu)\text{-bad})$$

Precisamos mostrar que $\mu \preceq s$, ou seja, que $\xi \in \text{dom}(s)$ e $\eta \in \text{dom}(\mu)$ é (ξ, μ) -bad $\Rightarrow \exists \eta' \in \text{dom}(s) \setminus \eta$ tal que η' é (ξ, μ) -bad.

Suponhamos que $\xi \in \text{dom}(s)$ e que $\eta \in \text{dom}(\mu)$ é (ξ, μ) -bad. Como $s \subseteq t$, temos que $\xi \in \text{dom}(t)$. Portanto, como $\mu \preceq t$, existe $\eta' \in \text{dom}(t) \setminus \eta$ tal que η' é (ξ, μ) -bad. Mas daí pela definição de (ξ, μ) -bad e por $\eta' \in \text{dom}(t)$, temos que $\eta' \in \text{dom}(t) \cap \xi$ e $t(\eta') \notin V(t(\xi))$ (pois $\mu(\eta') = t(\eta')$ e $\mu(\xi) = t(\xi)$, já que $t \subset \mu$). Portanto, η' é (ξ, t) -bad. Mas $t \preceq s$. Então $\exists \eta'' \in \text{dom}(s) \setminus \eta'$ tal que η'' é (ξ, t) -bad, e portanto (ξ, μ) -bad. Para termos o que queríamos, resta agora verificar que $\eta'' \in \text{dom}(s) \setminus \eta$. De fato, como $\eta'' \in \text{dom}(s) \setminus \eta'$, temos que $\eta'' \geq \eta'$. Mas $\eta' \notin \eta$; logo $\eta' \geq \eta$. Portanto $\eta'' \geq \eta$ e segue que $\eta'' \in \text{dom}(s) \setminus \eta$.

Verificamos assim que, de fato, $\langle \mathbf{T}, \preceq \rangle$ é uma ordem parcial. Observemos ainda

que se $t \in \mathbf{T}$ e $\delta \in \omega_1$, então $t \restriction \delta \in \mathbf{T}$ e $t \preceq t \restriction \delta$. Para verificarmos que vale a desigualdade, basta tomarmos $\eta' = \eta$ e observarmos que se $\xi \in \text{dom}(t \restriction \delta)$ e $\eta \in \text{dom}(t) \cap \xi$ então $\eta \in \text{dom}(t \restriction \delta) \setminus \eta$.

Para podermos aplicar o PFA usando a ordem $\langle \mathbf{T}, \preceq \rangle$, precisaríamos agora mostrar que $\langle \mathbf{T}, \preceq \rangle$ é uma ordem própria. Entretanto, aparentemente, não há razão para acreditarmos que isso seja verdade. Temos então que introduzir uma nova ordem parcial $\mathbf{P}$ que será constituída pelos membros de $\mathbf{T}$, aumentados por “condições laterais”.

Para podermos definir $\mathbf{P}$, tomemos $\kappa \geq \omega_1$ um ordinal grande o suficiente para que X pertença a V_κ . Então definimos

$N = \{ \langle x, \varphi, M \rangle : x \in X, M \in [V_{\kappa+\omega_1}]^{<\omega} \text{ e } \varphi \text{ é uma função de } \mathbf{T} \text{ em } \mathcal{H} \text{ tal que } x \notin \varphi(t) \forall t \in \mathbf{T} \cap [M]^{<\omega} \} \subset V_{\kappa+\omega_1}$.

Se $p : \omega_1 \rightarrow N$ é uma função parcial e se para todo $\xi \in \text{dom}(p)$, $p(\xi) = \langle x_\xi, \varphi_\xi, M_\xi \rangle$, então definimos as funções $\widehat{p}$, V_p , φ_p , M_p em $\text{dom}(p)$ por:

$$\widehat{p}(\xi) = x_\xi, (V_p)(\xi) = V(\widehat{p}(\xi)), (\varphi_p)(\xi) = \varphi_\xi, (M_p)(\xi) = M_\xi.$$

Agora, seja $\mathbf{P}$ o conjunto de todas as funções parciais finitas p de ω_1 em N satisfazendo as seguintes condições:

(D1) $\widehat{p} \in \mathbf{T}$

(D2) se $\eta, \xi \in \text{dom}(p)$, $\eta < \xi$, então

(a) $[(\varphi_p)(\eta)](t) \subseteq [(\varphi_p)(\xi)](t) \forall t \in \mathbf{T}$;

(b) $(M_p)(\eta) \cup \{ \langle \eta, \widehat{p}(\eta) \rangle, \langle \eta, p(\eta) \rangle \} \subseteq (M_p)(\xi)$.

Se $p, q \in \mathbf{P}$, diremos que $p \leq q$ sse $p \supseteq q$ e $\widehat{p} \preceq \widehat{q}$. $\leq$ é uma ordem parcial em $\mathbf{P}$, pois $\preceq$ era uma ordem parcial em $\mathbf{T}$. Observemos que $p \in \mathbf{P}$ e $\delta \in \omega_1$ implica que $p \restriction \delta \in \mathbf{P}$ e $p \leq p \restriction \delta$ (pois $\widehat{p \restriction \delta} = \widehat{p} \restriction \delta$).

Para todo $p \in \mathbf{P}$, definimos $\widetilde{\varphi}(p)$ e $\widetilde{M}(p)$ por:

(a) $\forall t \in \mathbf{T}$, $\widetilde{\varphi}(p)(t) = [\varphi_p(\delta)](t)$ onde $\delta = \max \text{dom}(p)$.

(b) $\widetilde{M}(p) = \cup \{ (M_p)(\xi) \} \cup \{ \langle \xi, \widehat{p}(\xi) \rangle, \langle \xi, p(\xi) \rangle : \xi \in \text{dom}(p) \}$.

Com isso, terminamos de definir a ordem parcial, e mais algumas notações, que usaremos para demonstrar o teorema. Antes porém de mostrarmos que a ordem parcial $\mathbf{P}$ definida acima é própria, vamos verificar que, de fato, assumindo que ela seja própria e usando o PFA, conseguimos construir a ω_1 -seqüência procurada.

Para isso, vamos mostrar primeiro que $\forall \xi \in \omega_1$,

$$Q_\xi = \{p \in \mathbf{P} : \text{dom}(p) \setminus \xi \neq \emptyset\}$$

é denso em $\mathbf{P}$.

Seja $p \in \mathbf{P}$ arbitrário. Se $\sup \text{dom}(p) > \xi$, então $p \in Q_\xi$ e não há nada a fazer. Senão tome $\delta > \xi$. Temos então que existe um ponto

$$x \notin \bigcup \{A(\widehat{p}(\eta)) : \eta \in \text{dom}(p)\} \cup \bigcup \{\widetilde{\varphi}(p)(t) : t \in \mathbf{T} \cap [\widetilde{M}(p)]^{<\omega}\},$$

pois o lado direito da igualdade pertence a $\mathcal{H}$ ($A(\widehat{p}(\eta)) \in \mathcal{H}$ pois A é $\mathcal{F}$ -small-valued e $\widetilde{\varphi}(p)(t) \in \mathcal{H}$, pois $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{H}$ por definição; as uniões estão em $\mathcal{H}$, pois só estamos tomando uniões finitas ou enumeráveis e $\mathcal{H}$ é σ -ideal) e portanto é diferente de X , pois $\mathcal{H}$ é ideal próprio.

Então $q = p \cup \{< \delta, < x, \widetilde{\varphi}(p), \widetilde{M}(p) >>\} \in Q_\xi$ e $q \leq p \mid \delta = p$. Observemos que $q \in \mathbf{P}$:

(D1) : $\widehat{q} \in \mathbf{T}$, pois $x \notin \bigcup \{A(\widehat{p}(\eta)) : \eta \in \text{dom}(p)\}$.

(D2) : (a) vale pois $\varphi_p(\delta) = \widetilde{\varphi}(p)$, pela definição de $\widetilde{\varphi}(p)$ e pelo fato de $\widehat{p} \in \mathbf{T}$.

(b) vale pois $M_p(\xi) = \widetilde{M}(p)$.

Observemos ainda que o fato de que $x \notin \bigcup \{\widetilde{\varphi}(p)(t) : t \in \mathbf{T} \cap [\widetilde{M}(p)]^{<\omega}\}$ nos garante que $< x, \widetilde{\varphi}(p), \widetilde{M}(p) > \in N$ e portanto a imagem de q , de fato, está em N .

Temos assim que Q_ξ é denso para todo $\xi \in \omega_1$. Usando o PFA, temos que existe um genérico G tal que $G \cap Q_\xi \neq \emptyset \ \forall \xi \in \omega_1$. Vamos construir uma ω_1 -seqüência $\{p_\xi : \xi \in \omega_1\}$ de membros de $\mathbf{P}$, dois a dois compatíveis com domínios distintos. Faremos a construção por indução: tomemos $\xi_0 = 0$ e $p_0 \in G \cap Q_0$. Seja $\xi_1 = \sup \text{dom}(p_0) + 1$.

Como G é genérico, $\exists p_1 \in G \cap Q_{\xi_1}$, e como $p_0 \notin Q_{\xi_1}$, temos que $p_1 \neq p_0$. Vamos procedendo sempre do mesmo modo para os estágios sucessores. Se γ é um ordinal limite, para definirmos p_γ , tomamos ξ_γ tal que $\sup\{\text{dom}(p_\alpha) : \alpha \in \gamma\} < \xi_\gamma < \omega_1$ e tomamos $p_\gamma \in G \cap Q_{\xi_\gamma}$.

Por um argumento *standard* usando o lema do Δ -sistema, podemos assumir que $\text{dom}(p_\xi) = d_\xi \cup \Delta$ ($\forall \xi \in \omega_1$) de modo que:

- (1) $\xi \in \omega_1 \Rightarrow d_\xi \neq \emptyset$.
- (2) $\eta \in \xi \in \omega_1 \Rightarrow \max \Delta < \min d_\eta < \max d_\eta < \min d_\xi$ (a última desigualdade justifica-se pois para cada η teremos no máximo um número enumerável de d_ξ 's tais que não ocorra a desigualdade).

Agora, para cada $\xi \in \omega_1$, seja $x_\xi = \widehat{p}_\xi(\min d_\xi)$. Vamos mostrar que $\{x_\xi : \xi \in \omega_1\}$ é uma ω_1 -seqüência crescente para o par $\langle A, V \rangle$. Precisamos mostrar que $\forall \delta \in \omega_1$,

- (1) $A(x_\delta) \cap \{x_\xi : \xi \in \omega_1\} \subseteq \{x_\xi : \xi \leq \delta\}$.
- (2) $V(x_\delta) \cap \{x_\xi : \xi \in \omega_1\} \supseteq \{x_\xi : \xi \leq \delta\}$.

(1): Pela definição de $\mathbf{P}$, $\widehat{p}_\xi \in \mathbf{T} \ \forall \xi \in \omega_1$. Logo, pela definição de $\mathbf{T}$, temos que $\forall \eta, \delta \in \text{dom}(\widehat{p}_\xi)$, se $\eta < \delta$, então $\widehat{p}_\xi(\delta) \notin A(\widehat{p}_\xi(\eta))$. Assim $\forall \delta \in \omega_1$, $\delta < \eta$ implica que $x_\eta \notin A(x_\delta)$. Portanto, $x_\eta \in A(x_\delta)$ implica que $\eta \leq \delta$ e concluimos então que $A(x_\delta) \cap \{x_\xi : \xi \in \omega_1\} \subseteq \{x_\eta : \eta \leq \delta\}$, como queríamos.

(2): Seja $\delta \in \omega_1$. Suponhamos que $x_\xi \notin V(x_\delta)$. Precisamos mostrar que $\xi > \delta$. Como, por hipótese, V é reflexiva, temos que $\xi \neq \delta$. Suponhamos por absurdo que $\xi < \delta$. Pelo que assumimos sobre a ω_1 -seqüência, temos que $\min d_\xi < \min d_\delta$, isto é, $\min d_\xi \in \min d_\delta$. Como estamos supondo que $x_\xi \notin V(x_\delta)$, segue, pela definição de x_ξ e x_δ , que $\widehat{p}_\xi(\min d_\xi) \notin V(\widehat{p}_\delta(\min d_\delta))$.

Agora, os p_ξ 's são dois a dois compatíveis. Portanto os $\widehat{p}_\xi$'s também são dois a dois compatíveis. Assim, podemos tomar $\widehat{p} \in \mathbf{T}$ tal que $\widehat{p} \preceq \widehat{p}_\xi, \widehat{p}_\delta$.

Pela definição de $\preceq$ em $\mathbf{T}$ temos que:

$\widehat{p} \preceq \widehat{p}_\delta$ sse $\widehat{p} \supseteq \widehat{p}_\delta$ e $\forall \alpha \in \text{dom} \widehat{p}_\delta$ e $\beta \in \text{dom} \widehat{p}$, se β é $(\alpha, \widehat{p})$ -bad, então

$\exists \beta' \in \text{dom}(\widehat{p}_\delta) \setminus \beta$ tal que β' é $(\alpha, \widehat{p})$ -bad.

Mas $\min d_\xi \in \text{dom} \widehat{p}$, $\min d_\delta \in \text{dom} \widehat{p}$, $\widehat{p}(\min d_\delta) = \widehat{p}_\delta(\min d_\delta)$, $\min d_\xi \in \min d_\delta$ e, como já havíamos concluído, $\widehat{p}(\min d_\xi) \notin V(\widehat{p}_\delta(\min d_\delta))$. Logo, $\min d_\xi$ é $(\min d_\delta, \widehat{p})$ -bad. Portanto, existe $\beta' \in \text{dom}(\widehat{p}_\delta) \setminus \min d_\xi$ tal que β' é $(\min d_\delta, \widehat{p})$ -bad. Mas “ β' é $(\min d_\delta, \widehat{p})$ -bad” implica que $\beta' \in \text{dom}(\widehat{p}) \cap \min d_\delta$ e temos ainda que $\beta' \in \text{dom}(\widehat{p}_\delta) \setminus \min d_\xi$. Agora, $\beta' \in \text{dom}(\widehat{p}_\delta)$ e $\beta' \in \min d_\delta$ implicam que $\beta' \in \Delta$ (lembramos que $\max \Delta < \min d_\delta$ e $\text{dom} p_\delta = \Delta \cup d_\delta$). Portanto, temos que $\beta' \in \min d_\xi$ (pois $\max \Delta < \min d_\xi$), o que é uma contradição, pois $\beta' \in \text{dom}(\widehat{p}_\delta) \setminus \min d_\xi$.

Concluimos assim que $\xi > \delta$ e portanto a ω_1 -seqüência construída satisfaz (2).

Com isso mostramos que, se $\mathbf{P}$ é própria, então vale a conclusão do teorema. Assim, só nos resta mostrar que $\mathbf{P}$ é, de fato, uma ordem parcial própria. Para isso, usaremos a caracterização de ordem parcial própria na teoria dos jogos (teorema III 1.3).

Inicialmente, para facilitar, vamos estabelecer uma certa nomenclatura. Uma escolha de um $p_0 \in \mathbf{P}$ e de uma seqüência $\{A_n : n \in \omega\}$ de anticadeias maximais em $\mathbf{P}$ será chamada de um **desafio**. Dado um desafio $p_0, \{A_n : n \in \omega\}$ e uma seqüência crescente $\{P_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos enumeráveis de $\mathbf{P}$, vamos definir $P^* = \cup \{P_n : n \in \omega\}$ e para todo $n \in \omega$ seja $A_n^* = \{p \in \mathbf{P} : \exists q \in P^* \text{ tal que } p \geq q\}$. Vamos dizer que $\{P_n : n \in \omega\}$ é uma **resposta própria** para o desafio $p_0, \{A_n : n \in \omega\}$ se vale a seguinte condição:

(*) $\exists p_1 \leq p_0$ tal que $\forall m \in \omega$ e $\forall r \leq p_1 \exists p_2 \in A_m^*$ tal que p_2 é compatível com r .

Pela caracterização de ordem própria na teoria dos jogos (teorema II 1.3), teremos provado que $\mathbf{P}$ é própria se pudermos provar a seguinte afirmação:

(Af): Para todo desafio $p_0, \{A_n : n \in \omega\}$ podemos escolher uma resposta própria $\{P_n : n \in \omega\}$ de modo que P_{n+1} só depende de $p_0, A_0, \dots, A_n$, isto é, se $p_0, \{A_n : n \in \omega\}$ e $p_0, \{A'_n : n \in \omega\}$ são dois desafios, $\{P_n : n \in \omega\}, \{P'_n : n \in \omega\}$ são as duas respostas

próprias escolhidas para eles, $n \in \omega$ e $A_i = A'_i \forall i \leq n$, então $P_{n+1} = P'_{n+1}$.

De fato, suponhamos que a afirmação já tenha sido provada. Daí, se já tiverem sido escolhidos os P_n 's, basta definirmos $B_i^n = \{p \in A_i : \exists q \in P_n \text{ tal que } p \geq q\}$. Observemos que $B_i^n \subset A_i$ e que cada B_i^n é enumerável, pois P_n é enumerável, e como A_i é anticadeia, para $p, p' \in A_i$, se $p \neq p'$, não podemos ter q tal que $q \leq p, p'$, ou seja, para cada elemento de P_n , teremos no máximo um elemento de A_i que estará em B_i^n . Teremos então que $B_i = \cup \{B_i^m : m \geq i\} = \bigcup_{m \geq i} \{p \in A_i : \exists q \in P_m \text{ tal que } p \geq q\} = \{p \in A_i : \exists q \in \bigcup_{m \geq i} P_m \text{ tal que } p \geq q\} = A_i^*$, pois os P_n 's são crescentes. Logo, se (*) estiver satisfeita, II ganha o jogo e a ordem é própria.

Vamos então verificar que a afirmação é verdadeira. Para isso, vamos começar com um desafio p_0 , $\{A_m : m \in \omega\}$. Para cada $m \in \omega$, seja

$$Q_m = \{q \in \mathbf{P} : \exists p \in A_m \text{ tal que } p \leq q\}.$$

Para todo $p \in \mathbf{P}$, $m \in \omega$ e $t \in \mathbf{T}$ definimos ainda $K_k(p, m) \subseteq \mathbf{T}$ e $Z(p, m, t, k) \subseteq X$ por indução em $k \in \omega$, da seguinte forma:

$$K_0(p, m) = \{t \in \mathbf{T} : \exists q \in Q_m \text{ tal que } q \leq p \text{ e } \hat{q} = t\};$$

$$Z(p, m, t, k) = \{x \in X : \exists \xi > \sup \text{dom}(t) \text{ ordinal enumerável tal que}$$

$$t \cup \{< \xi, x > \in K_k(p, m)\}$$

e

$$K_{k+1}(p, m) = \{t \in \mathbf{T} : Z(p, m, t, k) \notin \mathcal{H}\}$$

Por indução em $n \in \omega$ vamos definir agora M_n, δ_n, W_n de modo que para todo $n \in \omega$, tenhamos o seguinte:

$$(i) (a) M_n \in [V_{\kappa+\omega_1}]^{\leq \omega}, \delta_n \in \omega_1 \text{ e } W_n \in \mathcal{H};$$

$$(b) M_0 = \{p_0\} \cup \omega, \delta_0 = \omega \text{ e } W_0 = \emptyset.$$

$$(ii) (a) M_{n+1} \supseteq [M_n]^{< \omega} \cup \delta_n \cup M_n;$$

$$(b) \text{ todo par e toda união finita de membros de } M_n \text{ estão contidos em } M_{n+1};$$

- (c) se $p \in \mathbf{P} \cap M_n$, então $\widehat{p} \in M_{n+1}$ e imagem $(\widehat{p})$, $\widetilde{M}(p) \subseteq M_{n+1}$;
- (d) se $q \in \mathbf{P}$ e $q \subseteq M_n$, então $q \in M_{n+1}$;
- (e) se $m \leq n$, $p \in \mathbf{P} \cap M_n$ e $t \in K_0(p, m) \cap M_n$, então existe $q \in Q_m \cap M_{n+1}$ tal que $q \leq p$ e $\widehat{q} = t$;
- (f) se $L_n = \{ \langle p, m, t, k \rangle \in M_n : p \in \mathbf{P}, m \leq n, t \in \mathbf{T}, k \in \omega \text{ e } Z(p, m, t, k) \notin \mathcal{H} \}$, então $\cap \{ \overline{M_{n+1} \cap Z(p, m, t, k)} \setminus W_n : \langle p, m, t, k \rangle \in L_n \} \neq \emptyset$.

Antes de continuarmos, vamos mostrar que (f) pode ser satisfeito. Primeiro observemos que para todo $\ell \in L_n$, $\overline{Z(\ell)} \setminus W_n \in \mathcal{F}$. De fato, se $\ell \in L_n$, então $Z(\ell) \notin \mathcal{H}$, o que implica que $\overline{Z(\ell)} \in \mathcal{F}$. Mas como $W_n \in \mathcal{H}$, temos que o complementar de W_n está em $\mathcal{F}$. Segue então que $\overline{Z(\ell)} \setminus W_n \in \mathcal{F}$. Agora, como $\mathcal{F}$ é enumeravelmente fechado (pois o espaço é enumeravelmente compacto), temos que existe um ponto $x \in \cap \{ \overline{Z(\ell)} \setminus W_n : \ell \in L_n \}$ (lembramos que L_n é enumerável, pois está contido em M_n). Como X tem *tightness* enumerável, para todo $\ell \in L_n$, existe um conjunto $Z(x, \ell) \in [Z(\ell)]^{\leq \omega}$ tal que $x \in \overline{Z(x, \ell)}$. Agora, para termos que $x \in \cap \{ \overline{M_{n+1} \cap Z(\ell)} \setminus W_n : \ell \in L_n \}$, só precisamos nos assegurar que M_{n+1} contém $Z(x, \ell)$ para todo $\ell \in L_n$. Como L_n é enumerável, isso pode ser feito.

Vamos continuar com as condições para δ_{n+1} e W_{n+1} , supondo que M_n, δ_n, W_n já foram construídos:

- (iii) (a) $\delta_{n+1} > \delta_n$;
- (b) $\text{dom}(p) \subseteq \delta_{n+1} \forall p \in \mathbf{P} \cap M_n$;
- (c) $p \in \mathbf{P} \cap M_n$, $t \in \mathbf{T} \cap M_n$, $x \in X \cap M_n$, $m \leq n$, $k \in \omega$ e $\exists \xi \in \omega_1$ tal que $\xi > \sup(\text{dom}(t))$ e $t \cup \{ \langle \xi, x \rangle \} \in K_k(p, m)$ implicam que existe $\xi \in \delta_{n+1}$ com as mesmas propriedades;
- (iv) (a) $W_{n+1} \supseteq W_n$;

- (b) $A(x) \subseteq W_{n+1} \forall x \in X \cap M_n$; (lembramos que A é $\mathcal{F}$ -small valued);
- (c) $p \in \mathbf{P} \cap M_n$, $t \in \mathbf{T} \cap M_n$ implicam que $\tilde{\varphi}(p)(t) \subseteq W_{n+1}$ (lembramos que $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{H}$);
- (d) se $p \in \mathbf{P} \cap M_n$, $m \leq n$, $t \in \mathbf{T} \cap M_n$ e $k \in \omega$, então $Z(p, m, t, k) \in \mathcal{H}$ implica que $Z(p, m, t, k) \subseteq W_{n+1}$.

Lembramos ainda que todo membro de $\mathcal{H}$ está contido em algum membro de $\mathcal{H}_0$, e por isso conseguimos W_{n+1} de modo que satisfaça (b), (c) e (d).

Tendo terminado a indução acima, $\{\mathbf{P} \cap M_n : n \in \omega\}$ será a resposta própria designada para o desafio p_0 , $\{A_n : n \in \omega\}$. Para ver que desse modo podemos ter o exigido em (Af), primeiro observemos que nas condições (i)-(iv) para $n+1$, nós apenas nos referimos ao segmento inicial do desafio (pois sempre que aparecia o m , que era o que se referia ao desafio, aparecia a condição $m \leq n$). Assim, para cada desafio p_0 , $\{A_n : n \in \omega\}$ podemos associar uma seqüência $\{< M_n, \delta_n, W_n > : n \in \omega\}$ de modo que $P_{n+1} = \mathbf{P} \cap M_{n+1}$ depende apenas de $p_0, A_0, \dots, A_n$. Agora, só resta mostrarmos que se $\{< M_n, \delta_n, W_n : n \in \omega\}$ satisfaz (i)-(iv), então $\{\mathbf{P} \cap M_n : n \in \omega\}$ é uma resposta própria para o desafio p_0 , $\{A_n : n \in \omega\}$.

Para mostrarmos isso, seja:

$$M^* = \cup\{M_n : n \in \omega\}, P^* = \mathbf{P} \cap M^*, \delta^* = \sup\{\delta_n : n \in \omega\} \text{ e } W^* = \cup\{W_n : n \in \omega\}.$$

De (i)-(iv) segue imediatamente que valem as seguintes afirmações:

- (G) (a) $M^* \in [V_{\kappa+\omega_1}]^{\leq \omega_1}$, $\delta^* \in \omega_1$ e $W^* \in \mathcal{H}_0$ (pois $\mathcal{H}$ é σ -ideal);
- (b) $\{p_0\} \cup \delta^* \subseteq M^*$ (por (ii)(a)) e $\omega < \delta^*$.
- (M) (a) M^* é fechado para a construção de pares e para uniões finitas (por (ii)(b)); todo subconjunto finito de M^* é um elemento de M^* (por (ii)(a));
- (b) $p \in P^*$ implica que $\hat{p} \in M^*$; imagem $(\hat{p})$, $\widetilde{M}(p) \subseteq M^*$ (por (ii)(c));
- (c) $q \in p$ e $q \subseteq M^*$ implica que $q \in P^*$ (por (ii)(d));

- (d) $m \in \omega$, $p \in P^*$ e $t \in K_0(p, m) \cap M^*$ implicam que existe $q \in Q_m \cap M^*$ tal que $q \leq p$ e $\widehat{q} = t$ (por (ii)(c));
- (e) se $L = \cup\{L_n : n \in \omega\} = \{ \langle p, m, t, k \rangle \in M^* : p \in P, t \in T, m, k \in \omega \text{ e } Z(p, m, t, k) \notin \mathcal{H} \}$, então existe um ponto $y^* \in \overline{M^* \cap Z(p, m, t, k)} \setminus W^* : \langle p, m, t, k \rangle \in L$.

Antes de prosseguirmos, vamos verificar que de fato (e) está satisfeita. Como X é enumeravelmente compacto, é suficiente mostrar que $\{\overline{M^* \cap Z(\ell)} \setminus W^* : \ell \in L\}$ tem a propriedade da interseção finita. Consideremos então $L' \in [L]^{<\omega}$. Temos que mostrar que $Y = \cap\{\overline{M^* \cap Z(\ell)} : \ell \in L'\} \not\subseteq W^*$. Suponhamos por absurdo que $Y \subseteq W^*$. Então como Y é um subespaço fechado de um espaço enumeravelmente compacto, Y é enumeravelmente compacto e portanto existe $n \in \omega$ tal que $Y \subseteq W_n$. Sem perda de generalidade, assumamos que $L' \subseteq L_n$. Então temos que $Y \supseteq \cap\{\overline{M_{n+1} \cap Z(\ell)} : \ell \in L_n\}$. Mas por (ii)(f) a interseção do lado direito não está contida em W_n , o que é uma contradição com $Y \subseteq W_n$. Com isso mostramos (e).

Vamos continuar listando as propriedades para δ^* e W^* :

- (D) (a) $\text{dom}(p) \subseteq \delta^* \ \forall p \in P^*$ (por (iii)(b));
- (b) $p \in P^*$, $t \in T \cap M^*$, $x \in X \cap M^*$, $m, k \in \omega$ e $\exists \xi \in \omega_1$ tal que $\xi > \sup(\text{dom}(t))$ e $t \cup \{ \langle \xi, x \rangle \} \in K_k(p, m)$ implicam que existe $\xi \in \delta^*$ com as mesmas propriedades (por (iii)(c)).
- (W) (a) $A(x) \subseteq W^* \ \forall x \in X \cap M^*$ (por (iv)(b));
- (b) $p \in P^*$ e $t \in T \cap M^*$ implicam que $\tilde{\varphi}(p)(t) \subseteq W^*$ (por (iv)(c));
- (c) $p \in P^*$, $t \in T \cap M^*$, $m \in \omega$ e $k \in \omega$ implicam que se $Z(p, m, t, k) \in \mathcal{H}$, então $Z(p, m, t, k) \subseteq W^*$ (por (iv)(d)).

Terminamos assim de listar as propriedades de M^* , P^* , δ^* e W^* . Podemos então

voltar para a demonstração de que a condição (*) na definição de resposta própria está satisfeita. Temos que achar um $p_1 \leq p_0$, que satisfaça as condições exigidas em (*). Teremos que p_1 vai ser uma extensão de p_0 , construída da seguinte forma. Primeiro, para todo $t \in \mathbf{T}$, seja

$$\mathcal{Z}(t) = \{Z(p, m, t, k) : p \in P^*, m, k \in \omega\} \cap \mathcal{H}$$

e seja

$$\psi^*(t) = \cup\{\tilde{\varphi}(p)(t) : p \in P^*\} \cup \bigcup \mathcal{Z}(t) \cup W^* \in \mathcal{H}.$$

Agora tomemos y^* de $(M)(e)$ e definamos

$$p_1 = p_0 \cup \{< \delta^*, < y^*, \psi^*, M^* >>\}.$$

Primeiramente temos que verificar que de fato $p_1 \in \mathbf{P}$. Observemos que p_1 está contido em uma função de ω_1 em N e que $|p_1| < \omega$. Vamos agora verificar que p_1 satisfaz as propriedades (D1) e (D2) da definição de $\mathbf{P}$:

(D1): Temos que $\hat{p}_1 \in \mathbf{T}$ se e somente se $\forall \eta, \xi \in \text{dom}(\hat{p}_1), \eta < \xi, \hat{p}_1(\xi) \notin A(\hat{p}_1(\eta))$. Como $p_0 \in \mathbf{P}$ e $\text{dom} p_0 \subset \delta^*$ (pois $p_0 \in P^*$), só precisamos mostrar que $\forall \eta \in \text{dom}(\hat{p}_1), \hat{p}_1(\delta^*) \notin A(\hat{p}_1(\eta))$. Mas $\hat{p}_1(\delta^*) = y^*$. Como y^* é aquele de $(M)(c)$, temos que $\hat{p}_1(\delta^*) \notin W^*$. Mas por (W)(a) $A(x) \subseteq W^*$ para todo $x \in X \cap M^*$. Como $\hat{p}_1(\eta) \in X \cap M^*$ (pois $\hat{p}_1(\eta) = \hat{p}_0(\eta)$ e por (M)(b)), segue que $A(\hat{p}_1(\eta)) \subseteq W^*$ e portanto $\hat{p}_1(\delta^*) \notin A(\hat{p}_1(\eta))$.

(D2): De novo basta verificar para $\eta \in \text{dom} p_0$ e δ^* :

(a) Temos que verificar que $[(\varphi_{p_1})(\eta)](t) \subseteq [(\varphi_{p_1})(\delta^*)](t)$ para todo $t \in \mathbf{T}$. Mas $\varphi_{p_1}(\delta^*) = \psi^*$. Então (a) segue pela definição de ψ^* e porque $p_0 \in P^*$.

(b) Temos que verificar que $(M_{p_1})(\eta) \cup \{< \eta, \hat{p}_1(\eta) >, < \eta, p_1(\eta) >\} \subseteq (M_{p_1})(\delta^*)$. Mas $M_{p_1}(\delta^*) = M^*$. Portanto (b) segue do fato de que $\widetilde{M}(p) \subseteq M^*$ para $p \in P^*$ e de que $p_0 \in P^*$.

Temos assim que de fato $p_1 \in P$. Obviamente temos que $p_1 \leq p_1 \mid \delta^* = p_0$. A demonstração de que p_1 satisfaz o que foi pedido em (*) vai ser baseada na seguinte propriedade crucial de δ^* e y^* :

(PC) se $m, k \in \omega$, $p \in P^*$, $t \in \mathbf{T}$, $\langle \delta^*, y^* \rangle \in t$, $s = t \mid \delta^* \in K_k(p, m) \cap M^*$ e se $\xi \in \text{dom}(t) \setminus \delta^*$ implica que $t(\xi) \notin W^*$, então $\exists s' \in K_0(p, m) \cap M^*$ tal que $t \cup s' \in \mathbf{T}$, $s' \preceq s$ e $t \cup s' \preceq t$.

Vamos mostrar (PC) por indução em $k \in \omega$. Para $k = 0$ basta tomar $s = s'$. Então assumamos que já tenhamos mostrado (PC) para k e suponhamos que as condições de (PC) estão satisfeitas para $k + 1$. Então, em particular, temos que $s = t \mid \delta^* \in K_{k+1}(p, m)$. Portanto, $Z(p, m, s, k) \notin \mathcal{H}$. Por (M)(e), temos que $y^* \in \overline{M^* \cap Z(p, m, s, k)}$. Então existe um ponto $x \in M^* \cap Z(p, m, s, k) \cap U$, onde

$$U = \cap \{V(t(\xi)) : \xi \in \text{dom}(t) \text{ e } y^* \in V(t(\xi))\} \setminus \\ \cup \{A(t(\xi)) : \xi \in \text{dom}(t) \cap \delta^* = \text{dom}(s)\}.$$

Observemos que $y^* \in U$ por (W)(a). Como $x \in Z(p, m, s, k)$, $\exists \eta > \sup(\text{dom}(s))$ tal que $s \cup \{\langle \eta, x \rangle\} \in K_k(p, m)$. Por (D)(b), podemos assumir que $\eta \in \delta^*$. De $x \in M^* \cup U$ e (W)(a), segue que $t \cup \{\langle \eta, x \rangle\} \in \mathbf{T}$, pois para $\xi \in \text{dom}(t)$, se $\xi > \eta$, então $\xi \in \text{dom}(t) \setminus \delta^*$ já que $\eta > \sup \text{dom}(s)$ e portanto, por hipótese, segue que $t(\xi) \notin W^*$; se $\xi < \eta$ temos que $t(\eta) \notin A(t(\xi))$, pois $x \in U$. Por (G)(b), $s, x \in M^*$ e (M)(a), segue que $s \cup \{\langle \eta, x \rangle\} \in M^*$ ($\eta \in M^*$ pois $\eta \in \delta^*$ e por (G)(b), $\delta^* \subseteq M^*$).

Segue então, do que foi mostrado acima, que $m \in \omega$, $p \in P^*$, $s \cup \{\langle \eta, x \rangle\}$ e $t \cup \{\langle \eta, x \rangle\}$ satisfazem as condições de (PC) com k no lugar de $k + 1$. Então, por hipótese de indução, existe $s' \in K_0(p, m) \cap M^*$ tal que $t \cup \{\langle \eta, x \rangle\} \cup s' \in \mathbf{T}$, $s' \preceq s \cup \{\langle \eta, x \rangle\}$ e ainda $t \cup \{\langle \eta, x \rangle\} \cup s' = t \cup s' \preceq t \cup \{\langle \eta, x \rangle\}$. (Observemos que temos que $t \cup \{\langle \eta, x \rangle\} \cup s' = t \cup s'$, pois $s' \preceq s \cup \{\langle \eta, x \rangle\}$ implica que $\{\langle \eta, x \rangle\} \subseteq s'$.)

Agora observemos que $t \cup \{\langle \eta, x \rangle\} \preceq t$. Para ver que isso acontece, basta verificarmos que se $\xi \in \text{dom}(t)$ e η é $(\xi, t \cup \{\langle \eta, x \rangle\})$ -bad, então δ^* é $(\xi, t \cup \{\langle \eta, x \rangle\})$ -bad.

$\eta, x >\}$)-bad. De fato, como η é $(\xi, t \cup \{< \eta, x >\})$ -bad, temos que $t(\eta) \notin V(t(\xi))$, ou seja, $x \notin V(t(\xi))$. Mas $x \in U$. Logo, pela definição de U , $y^* \notin V(t(\xi))$. Como $t(\delta^*) = y^*$, temos que $t(\delta^*) \notin V(t(\xi))$, o que implica que δ^* é $(\xi, t \cup \{< \eta, x >\})$ -bad, como queríamos.

Assim, $s' \in K_0(p, m) \cap M^*$, $t \cup s' \in \mathbf{T}$, $s' \preceq s \cup \{< \eta, x >\} \preceq s$ e $t \cup s' \preceq t \cup \{< \eta, x >\} \preceq t$. Temos, portanto, que a nossa indução está concluída.

Finalmente, para mostrar (*), seja $m \in \omega$, $r \leq p_1$ e seja $r' = r \upharpoonright \delta^* \in \mathbf{P}$. Como as anticadeias do desafio são maximais, sem perda de generalidade, podemos assumir que $r \in Q_m$. De $\langle \delta^*, \langle y^*, \psi^*, M^* \rangle \rangle \in r$ e de (D2)(b) da definição de $\mathbf{P}$, segue que $r' \subseteq M^*$. Então, por (M)(c), $r' \in P^*$.

Seja $\delta^* = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{n-1}$ uma enumeração do $\text{dom}(r) \setminus \delta^*$. Para todo $i < n$, seja $r(\gamma_i) = \langle y_i, \psi_i, M_i^* \rangle$ e para todo $j \leq n$ seja $r_j = r \upharpoonright (\delta^* \cup \{\gamma_i : i < j\})$. Por indução backwards no comprimento de r_j , vamos mostrar que

$$(B) \quad \forall k \leq n, \quad \hat{r}_{n-k} \in K_k(r', m).$$

Se $k = 0$, então $\hat{r}_n = \hat{r}$ e portanto claramente pertence a $K_0(r', m)$. Suponhamos que já tenhamos mostrado para $k - 1 \geq 0$. Então $\hat{r}_{n-(k-1)} = \hat{r}_{n-k} \cup \{< \gamma_{n-k}, y_{n-k} >\} \in K_{k-1}(r', m)$. Portanto $y_{n-k} \in Z(r', m, \hat{r}_{n-k}, k-1)$. Por outro lado, de (D2)(b) da definição de $\mathbf{P}$ segue que $\hat{r}_{n-k} \in [M_{n-k}^*]^{<\omega}$. Logo, de $\langle y_{n-k}, \psi_{n-k}, M_{n-k}^* \rangle \in N$ (pois $r \in \mathbf{P}$ e portanto r está contido em uma função de ω_1 em N) segue que $y_{n-k} \notin \psi_{n-k}(\hat{r}_{n-k}) \supseteq \psi^*(\hat{r}_{n-k}) \supseteq \cup Z(\hat{r}_{n-k})$. Comparando isso com $y_{n-k} \in Z(r', m, \hat{r}_{n-k}, k-1)$, segue da definição de $Z(t)$ que $Z(r', m, \hat{r}_{n-k}, k-1) \notin \mathcal{H}$. Daí $\hat{r}_{n-k} \in K_k(r, m)$ e portanto segue a indução.

Em particular, tomando $k = n$ em (B), temos que $\hat{r}' \in K_n(r', m)$. Observemos também que para cada $i < n$, $\hat{r}(\gamma_i) \notin \psi_i(\hat{r}_i) \supseteq \psi^*(\hat{r}_i) \supseteq W^*$. Podemos então aplicar a propriedade (PC). Daí temos que existe $s' \in K_0(r', m) \cap M^*$ tal que $\hat{r} \cup s' \in \mathbf{T}$, $s' \preceq \hat{r}'$

e $\hat{r} \cup s' \preceq \hat{r}$. Por (M)(d), temos que existe $q \in Q_m \cap M^*$ tal que $q \leq r'$ e $\hat{q} = s'$. Vamos agora considerar $p = r \cup q$.

Primeiramente, vamos verificar que $p \in \mathbf{P}$. Obviamente temos que $\hat{p} = \hat{r} \cup \hat{q} \in \mathbf{T}$. Para verificarmos que vale (D2), observemos inicialmente que basta verificar (a) e (b) quando tomamos $\eta \in \text{dom}(q)$ e $\xi \in \text{dom}(r) \setminus \delta^*$, já que $q \geq r'$ e $q \in \mathbf{P}$. Temos que (a) está satisfeito, pois $q \in \mathbf{P}^*$ e portanto $\tilde{\varphi}(q)(t) \subseteq \psi^*(t) \subseteq \psi_i(t)$ para todo $t \in \mathbf{T}$. Temos ainda que (b) está satisfeito, pois $p \in P^*$ implica que $\widetilde{M}(p) \subseteq M^* \subseteq M_i^*$ (a última inclusão ocorre pois $\gamma_i > \delta^*$).

Agora, como $q \in P^*$, temos que $\text{dom}(q) \subseteq \delta^*$ por (D)(a). Então $p \leq p \restriction \delta^* = q$ (lembramos que $q \leq r' = r \restriction \delta^*$). Por outro lado, $p \leq r$, pois $\hat{p} = \hat{r} \cup s' \prec \hat{r}$. Como $q \in Q_m \cap M^* \subseteq P^*$, temos que existe $p_2 \in A_m$ tal que $q \leq p_2$ (pelo fato de $q \in Q_m$), ou seja, existe $p_2 \in A_m^*$ tal que $q \leq p_2$, e portanto, tal que $p \leq p_2$. Assim, conseguimos achar $p_2 \in A_m$ tal que p_2 é compatível com r (pois $p \leq r, p_2$) e isso demonstra (*).

Mostramos assim que $\mathbf{P}$ é própria. ■

3. A demonstração do resultado principal

Neste item vamos finalmente mostrar o resultado mencionado no início deste capítulo, ou seja, que o PFA implica que todo espaço Hausdorff compacto com *tightness* enumerável é seqüencial. Antes porém vamos mostrar o seguinte teorema.

Teorema 3.1: (PFA). Em um espaço de Hausdorff compacto de *tightness* enumerável X , todo subespaço enumeravelmente compacto é compacto.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que exista um subespaço Y de X que é enumeravelmente compacto mas não é compacto. Então existe um filtro $\mathcal{F}$ em Y fechado e livre. Como

$\mathcal{F}$ é livre, para todo $y \in Y$, existe, em X , vizinhanças abertas $G(y)$ e $U(y)$ de y tais que valem:

- (1) $cl_X(G(y)) \cap Y$ é $\mathcal{F}$ -pequeno e
- (2) $cl_X(U(y)) \subseteq G(y)$.

Uma vez determinado $G(y)$, obviamente conseguimos $U(y)$, pois X é regular. Vamos então verificar que, de fato, conseguimos achar $G(y)$ de modo que (1) aconteça. Primeiro vamos mostrar que, para todo $y \in Y$, conseguimos uma vizinhança $G'(y)$ de y tal que $G'(y)$ é $\mathcal{F}$ -pequeno. Suponhamos que não. Então seja $y \in Y$ tal que toda vizinhança V_y de y não é $\mathcal{F}$ -pequena, ou seja, $V_y \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Temos então que para cada $F \in \mathcal{F}$, $F \cap V_y \neq \emptyset$ para toda vizinhança V_y de y . Como $F \subset Y$, temos que $F \cap (V_y \cap Y) \neq \emptyset$ e portanto temos que $y \in cl_Y(F)$. Mas F é fechado em Y . Logo, concluímos que $y \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{F}$ é um filtro livre. Mostramos assim que existe $G'(y)$, vizinhança de y em X tal que $G'(y) \cap F = \emptyset$ para algum $F \in \mathcal{F}$. Como X é regular, podemos tomar $G(y)$ tal que $G(y) \subset cl_X(G(y)) \subset G'(y)$. Assim, conseguimos $G(y)$ tal que $cl_X(G(y)) \cap Y \cap F = \emptyset$ para algum $F \in \mathcal{F}$ como queríamos.

Vamos agora definir as relações A e V para podermos aplicar o teorema 2.1. Para cada $y \in Y$, seja $A(y) = cl_X(G(y)) \cap Y$ e $V(y) = U(y) \cap Y$. Obviamente, A e V , definidos dessa forma, satisfazem as hipóteses do teorema.

Pelo teorema 2.1, temos que existe uma ω_1 -seqüência $\{y_\xi : \xi \in \omega_1\} \subseteq Y$ crescente para o para $\langle A, V \rangle$. Então para todo $\xi \in \omega_1$ vale que:

$$X_\xi = cl_X(\{y_\eta : \eta \leq \xi\}) \subseteq cl_X(V(y_\xi)) \subseteq G(y_\xi) \subseteq X \setminus \{y_\sigma : \sigma > \xi\}.$$

Observemos que $\{X_\xi : \xi \in \omega_1\}$ é uma seqüência estritamente crescente de subconjuntos compactos de X . Seja $X^* = \bigcup \{X_\xi : \xi \in \omega_1\}$. Se $x \in \overline{X^*}$, como X tem *tightness* enumerável, existe $A \subset X^*$ enumerável tal que $x \in \overline{A}$. Mas como $\{x_\xi : \xi \in \omega_1\}$ é uma cadeia estritamente crescente e A é enumerável, existe $\xi < \omega_1$ tal que $A \subset X_\xi$ e

portanto $\overline{A} \subset X_{\xi+1}$. Logo, $x \in \overline{A} \subset X^*$, ou seja, $\overline{X^*} = X^*$ e portanto segue que X^* é fechado. Temos então que X^* é compacto.

Por outro lado, $\{G(y_\xi) : \xi \in \omega_1\}$ é um recobrimento aberto de X^* sem subrecobrimento finito (pois já vimos que $X_\xi \subseteq G(y_\xi) \subseteq X \setminus \{y_\sigma : \sigma > \xi\}$ para todo $\xi < \omega_1$).

Temos então uma contradição, e portanto segue o teorema. ■

Segue agora, como consequência imediata dos resultados mostrados anteriormente, o seguinte teorema:

Teorema 3.2: (PFA $+2^{\aleph_0} = \aleph_2$). Todo espaço Hausdorff compacto de *tightness* enumerável é seqüencial.

Demonstração:

Pelo teorema 1.6 segue que se vale MA, então um espaço Hausdorff compacto é seqüencial se e somente se todo subespaço enumeravelmente compacto é compacto. Como PFA $+2^{\aleph_0} = \aleph_2$ implica MA, o resultado segue diretamente do teorema 3.1. ■

BIBLIOGRAFIA

- [A] ARHANGEL'SKII, A.V. *Structures and classification of topological spaces and cardinal invariants*. Uspeshi Mat. Nauk. 33, pag. 29-84, 1978.
- [AS] ABRAHAM, U. & SHELAH, S. *Martin's Axiom does not imply that every two $\aleph_1$ -dense sets of reals are isomorphic*. Israel J. Math., 38, pag. 161-176, 1981.
- [B] BALOGH, Z. *On compact Hausdorff spaces of countable tightness*. Proc. Am. Math. Soc. 105, pag. 755-764, 1989.
- [Ba1] BAUMGARTNER, J. *All $\aleph_1$ -dense sets of reals can be isomorphic*. Fund. Math. 79, pag. 101-106, 1973.
- [Ba2] BAUMGARTNER, J. *Applications of the proper forcing axiom*. Handbook of Set Theoretic Topology (K. Kunen e J. Vaughan, editors), North Holland, Amsterdam, pag. 913-960, 1984.
- [D] DOW, A. *On the consistency of the Moore-Mrowka solution*. Preprint, 1990.
- [De] DEVLIN, K.J. *A yorkshireman's guide to proper forcing*. A.R.D. Mathias, Ed., Surveys in Set Theory, L.M.S. Lecture Notes 87. (Cambridge University Press, Cambridge, 1983) pag. 60-115.
- [En] ENGELKING, R. *General topology*. Heldermann Verlag Berlin. (Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6) 1989.
- [Fe] FEDORCHUCK, V.V. *Fully closed mappings and the compatibility of some theorems of general topology with the axioms of set theory*. Mat. Sbornik (N.S.) 99, pag. 3-33, 1976.
- [Fr] FREMLIN, D.H. *Consequences of Martin's Axiom*. (Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 84) Cambridge University Press, 1984.
- [Ho] HODEL, R.E. *Cardinal Functions I*. Handbook of Set Theoretic Topology. (K. Kunen e J.E. Vaughan, editors) North-Holland, Amsterdam, pag. 1-61, 1984.
- [Je] JECH, T. *Set theory*. Academic Press, New York, 1978.

- [K] KUNEN, K. *Set theory, an introduction to independence proof*. North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [MM] MOORE, R.C. & MROWKA, S.G. *Topologies determined by countable objects*. Notices Amer. Math. Soc. 11, 1964.
- [Ny] NYIKOS, P. *Forcing compact non-sequential spaces of countable tightness*. Não publicado, 1987.
- [O] OSTASZEWSKI, A. *On countably compact, perfectly normal spaces*. J. London Math. Soc. (2) 14, pag. 505-516, 1976.
- [SH] SHELAH, S. *Proper forcing*. Lecture Notes in Mathematics 940, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [TP] Topology Proc. 2, pag. 679-685, 1977.
- [Wa] WALKER, R.C. *The Stone-Čech compactification*. Springer-Verlag, 1974.