COMPARAÇÃO DE OPERADORES
DIFERENCIAIS

Oscar F. Vilcachagua Erazo

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gilioli

Durante a elaboração deste trabalho o autor foi bolsista da Organização do Estados Americanos(O.E.A.) e da FINEP.

São Paulo, Agosto de 1975

Comparação de Operadores Diferenciais errata.

O.V.E

lg.	linha	diz	deve dizer.
7	-1	$P^{(w)}(ss^0) = 0$	$P_m^{(w)}(ss^0) = 0$
8	6,10,13,-1	tal que	tais que
9	1	$M_p s^{2(m-k)}$	$M s^{2(m-k)} t^{2k}$
9	-5	tal que	tais que
9	15	(1.1.5)	(1.1.7)
11	5	tal que	tais que
15	13	$= 1/c_T^2 \tilde{P}(T(s))$	$= 1/c_T^2 \tilde{P}^2(T(s))$
15	-1	$\leq C_T'' P_0 T(T^{-1}(n))$	$\leq C_T'' \tilde{P}_0 T(T^{-1}(n))$
19	1	$\lim_{t \rightarrow \infty} s_0 \left(\sum_{\alpha \geq 0} P_m^{(\alpha)}(t s^0) ^2 \right)^{1/2}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} s_0 \left(\sum_{\alpha \geq 0} P_m^{(\alpha)}(t s^0) ^2 \right)^{1/2} / t^m$
20	-2	$c_1 \sum_{i,j} \left \frac{\partial}{\partial s_i \partial s_j} P_m(s) \right ^2 + \sum_{j=1}^n \left \frac{\partial P_{m-1}}{\partial s_j}(s) \right ^2 = 0$	$\sum_{i,j} \left \frac{\partial P_m}{\partial s_i \partial s_j}(s) \right ^2 + \sum_{j=1}^n \left \frac{\partial P_{m-1}}{\partial s_j}(s) \right ^2 \neq 0$
23	3	$\sum_{ \alpha =2} P_m^{(\alpha)}(s) ^2 + \sum_{ \alpha =1} P_m^{(\alpha)}(s) ^2$	$\sum_{ \alpha =2} P_m^{(\alpha)}(s) ^2 + \sum_{ \alpha =1} P_{m-1}^{(\alpha)}(s) ^2$
24	4	(1.2.30)	(1.2.26)
26	8	tal que $\text{pe dim } V = j$	tal que : $\text{pe dim } V = j$
28	-2	$\eta_l \ll P_0 T$	$\eta_l \ll P_0 T; l = 1, \dots, j$
28	-1	$\{\eta_1, \dots, \eta_l\}$	$\{\eta_1, \dots, \eta_j\}$
30	7	que pe para	que : pe para
44	-1	$\lambda_i \leq 0$ e $\alpha_i > 0$	$\lambda_i \leq 0$ e $p_i > 0$
17	3	de suporte H_j de Γ tal que	de suporte H_j de Γ tais que
19	-1	Então toda face	Então para toda face
50	4	$\tilde{u} \in N^n$ tal que	$\tilde{u} \in N^n$ tais que
14	-6	poliedro convexo por $(\bigcup_{j=1}^N P_j) \cup \{0\}$	poliedro convexo gerado por $(\bigcup_{j=1}^N P_j) \cup \{0\}$
16	-6	e com poliedro característico	e o poliedro característico de $P(s)$ é
21	1	de $P(P)$ tal que	de $P(P)$ tais que
11	4	$\alpha^0 \in P_{i_n}^{k_n}$	$\alpha^0 \in P_{i_n}^{k_n}$
14	2	$p_s(\alpha^0, \lambda_2^s e)$	$p_s(\alpha^0, \lambda_2^s e^2)$
8	5	$P_{i_n}^{k_n}$ de $P(P)$ tal que	$P_{i_n}^{k_n}$ de $P(P)$ tais que
19	-3	Teorema 3.5.1	Teorema 3.4.1.
0	-2	para todo aberto $\Omega' \subset \Omega$,	para todo aberto $\Omega' \subset \Omega$ e toda distribuição $\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

Oscar Vilcachaqua E. :

I

I N T R O D U Ç Ã O

Em [3], L. Hörmander definiu o conceito de operador mais fraco que um outro dado. (Vide [3], Definição 1.2). No mesmo trabalho, ele mostrou que a sua definição é equivalente à Definição 0.1.1 dada na presente monografia. É natural, que a Definição 0.1.1, seja a mais usada para determinar se um operador Q é mais fraco que um outro P , pois ela só envolve condições algébricas sobre os polinômios. Também o conceito de operador dominado por um outro, foi definido por Hörmander em [4].

Em [3], usando a noção de operador mais fraco que um outro, ele definiu duas grandes classes de operadores diferenciais (com coeficientes constantes), os elípticos e os de tipo principal.

Na presente monografia, serão dadas outras classes de operadores diferenciais, igualmente importantes como as anteriores. O trabalho foi dividido em quatro capítulos, os quais descreveremos brevemente.

No capítulo 0 damos um resumo dos resultados de Hörmander (vide [4])

No capítulo I, §1.1, fazemos algumas observações aos resultados do capítulo 0. No §1.2, nós formulamos e resolvemos algumas questões relacionadas com a noção de comparação de operadores diferenciais. A nosso ver, a questão mais importante é a III. Damos uma resposta parcial a ela no Teorema 1.2.1.

II

No capítulo II usamos uma técnica diferente, que nos deu outra resposta parcial para a questão III do capítulo I, §1.2. Mas infelizmente os métodos usados não forneceram uma resposta completa.

O capítulo III é uma recopilação de resultados demonstrados nas bibliografias [5], [6] e [8]. Nós resolvemos incluí-las neste trabalho, por que as técnicas usadas são diferentes das daquelas de Hörmander e por que, quando tivemos conhecimento da existência de tais trabalhos, o principal resultado deste capítulo, (o Teorema 3.4.1) apareceu somente enunciado (não demonstrado) em [9] e quisemos dar uma demonstração do mesmo. Posteriormente, o teorema mencionado, foi demonstrado em [5].

No capítulo IV damos aplicações dos resultados anteriores aos operadores de força constante, assim como os enunciados das principais propriedades de tais operadores (ver [4]), que constituem a motivação básica de todo o presente trabalho.

Para terminar, queremos expressar nossos agradecimentos a todas as pessoas e entidades que tornaram possível a realização da presente monografia. Menção especial merece o Professor Dr. Antonio Gilioli por haver-nos sugerido o tema matéria da monografia e sua constante orientação no desenvolvimento da mesma.

São Paulo, Agosto de 1975

Oscar Vilcachagua Erazo

Í N D I C E

Introdução	I
Notações	0
Capítulo 0	1
Capítulo I	5
§1.1.- Algumas consequências dos resultados do Capítulo 0	5
§1.2.- Alguns resultados gerais sôbre compara- ção de operadores diferenciais	14
Capítulo II : Operadores que dominam todo operador de grau 1	26
§2.1.- Preliminares	26
§2.2.- Operadores que dominam todo operador de grau 1	31
Capítulo III: Poliedros convexos e comparação de operadores diferenciais	38
§3.1.- Introdução	38
§3.1.- Conjunto e poliedros convexos	38
§3.2.- Poliedro convexo associado a um polino- mio e a uma família de polinômios	58
§3.3.- Polinômios regulares não negativos	64
§3.4.- Comparação de operadores diferenciais	81
Capítulo IV : Operadores de força constante	88

N O T A Ç Õ E S

$\mathbb{R}^n$: espaço Euclidiano n -dimensional, denotamos os elementos de $\mathbb{R}^n$ por $p, q, x, y, \dots$.

N^n : subconjunto de $\mathbb{R}^n$ consistindo dos elementos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com α_i número natural $i=1, \dots, n$.
Denotamos os elementos de N^n por α, β, γ .

Para $p, q \in \mathbb{R}^n$, $q \leq p \iff q_i \leq p_i \quad i=1, \dots, n$

Para $\alpha \in N^n$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Para $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in N^n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$

Ω : conjunto aberto contido em $\mathbb{R}^n$

$D'(\Omega)$: espaço de distribuições em Ω

$\mathcal{E}'(\Omega)$: espaço de distribuições em Ω com suporte compacto

$C^m(\Omega)$: $m = 0, 1, \dots, \infty$ espaço de funções definidas em Ω , com valores complexos e m vezes continuamente diferenciáveis.

C A P Í T U L O 0

Neste capítulo, daremos algumas definições e resultados que usaremos constantemente na presente monografia. Não demonstraremos nenhuma das afirmações, limitando-nos a indicar a referência bibliográfica correspondente:

Começaremos por associar a cada polinômio P (em n -variáveis) uma função definida por:

$$\tilde{P}(\xi) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2} \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n \quad (0.1.1)$$

onde $P^{(\alpha)}(\xi)$ é o polinômio $P^{(\alpha)}(\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha P(\xi)$

Definição 0.1.1. - Se $P(D)$ e $Q(D)$ são operadores diferenciais tais que

$$\tilde{Q}(\xi) / \tilde{P}(\xi) < C \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (0.1.2)$$

diremos que Q é mais fraco que P e escreveremos $Q < P$ ou que P é mais forte que Q e escreveremos $P > Q$. Se $P < Q < P$, os operadores são chamados igualmente fortes.

O seguinte teorema nos dá informação sobre as operações que podemos realizar usando a relação $Q < P$. Em particular ele nos diz que o conjunto

$$V = \{ Q(D) ; Q < P \} ,$$

é um espaço vetorial .

Teorema 0.1.1 ([4] Teorema 3.3.1) : i) Se $Q_1 < P$ e $Q_2 < P$, segue-se que $a_1 Q_1 + a_2 Q_2 < P$ para a_1 e a_2 números complexos arbitrários.

ii) Se $Q_1 < P_1$ e $Q_2 < P_2$ temos $Q_1 Q_2 < P_1 P_2$

iii) Se $Q_1 Q_2 < P_1 P_2$ e $Q_1 > P_1$, segue-se $Q_2 < P_2$

Para dar uma caracterização da relação $Q < P$, introduziremos a seguinte notação

$$\tilde{P}(\xi, t) = \left(\sum_{\alpha} |p^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} \right)^{1/2} \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (0.1.3)$$

Deste modo $\tilde{P}(\xi) = \tilde{P}(\xi, 1)$.

Teorema 0.1.2 - ([4] - Teorema 3.3.2) Cada uma das seguintes condições é necessária e suficiente para que $Q < P$

a) Existe uma constante C' tal que

$$|Q(\xi)| \leq C' \tilde{P}(\xi) \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (0.1.4)$$

b) Existe uma constante C'' tal que

$$\tilde{Q}(\xi, t) \leq C'' \tilde{P}(\xi, t) \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t \geq 1 \quad (0.1.5)$$

A seguir, introduziremos uma outra relação de comparação entre operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Definição 0.1.2 - Dizemos que P domina Q e escrevemos $P \gg Q$ ou $Q \ll P$ se

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \tilde{Q}(\xi, t) / \tilde{P}(\xi, t) \rightarrow 0 ; t \rightarrow \infty \quad (0.1.6)$$

O seguinte teorema dá uma caracterização da relação $Q \ll P$

Teorema 0.1.3 - ([4] - Teorema 3.3.3) - Para que $Q \ll P$ é necessário e suficiente que

$$\inf_t \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |Q(\xi)| / \tilde{P}(\xi, t) = 0 \quad (0.1.7)$$

O seguinte teorema será de grande utilidade nos capítulos posteriores.

Teorema 0.1.4 - ([4] - Teorema 3.3.4) Para que $P < P + aQ < P$ para todo número complexo a é necessário e suficiente que $Q \ll P$.

Um teorema semelhante ao Teorema 0.1.1 será dado para a relação de dominação.

Teorema 0.1.5 - ([4] - Teorema 3.3.5) Se $Q_1 \ll P$ e $Q_2 \ll P$ segue-se que $a_1 Q_1 + a_2 Q_2 \ll P$ para números complexos arbitrários a_1 e a_2 . Se $Q_1 \ll P_1$ e $Q_2 \ll P_2$ temos $Q_1 Q_2 \ll P_1 P_2$. Por outro lado, se $Q_1 Q_2 \ll P_1 P_2$ e $Q_1 \gg P_1$, segue-se que $Q_2 \ll P_2$. Similarmente, $Q_1 Q_2 \ll P_1 P_2$ e $Q_1 \gg P_1$ implica que $Q_2 \ll P_2$.

Os dois últimos teoremas do capítulo, serão para dar exemplos das relações de comparação.

Definição 0.1.3 - Um operador diferencial $P(D)$ de ordem m chama-se elíptico se sua parte principal $P_m(D)$, isto é, a parte homogênea de $P(D)$ de ordem m , satisfaz a condição

$$P_m(\xi) \neq 0 \quad \text{quando} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n \quad (0.1.3)$$

Teorema 0.1.6 - ([4] - Teorema 3.3.6) Um operador diferencial $P(D)$ de ordem m é mais forte que todo operador de ordem $\leq m$ se e somente se, este é elíptico.

Teorema 0.1.7 - ([4] - Teorema 3.3.7) Seja $P(D)$ um operador diferencial com parte principal $P_m(D)$. As seguintes condições são equivalentes:

- i) $P \gg Q$ para todo Q de ordem $< m$.
- ii) P é igualmente forte que todo operador com a mesma parte principal
- iii) $\sum_{i=1}^n |\partial P_m(\xi) / \partial \xi_j|^2 \neq 0 \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

Os operadores que cumprem uma das condições equivalentes do teorema anterior, chamam-se operadores de Tipo principal ou operadores sem características múltiplas.

Exemplo 0.1.1 - Veremos que $P^{(\alpha)} \ll P$ para todo $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}^n$. Para isto observemos que

$$|P^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} \leq \tilde{P}^2(\xi, t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

Segue-se da desigualdade anterior que

$$\sup_{\xi} \frac{|P^{(\alpha)}(\xi)|}{\tilde{P}(\xi, t)} \leq \frac{1}{t^{|\alpha|}}$$

por conseguinte:

$$\inf_t \sup_{\xi} \frac{|P^{(\alpha)}(\xi)|}{\tilde{P}(\xi, t)} = 0$$

o resultado segue do Teorema 0.1.3.

É evidente também que $Q < P$ se $Q \ll P$.

C A P Í T U L O I

§1.1 - Algumas consequências dos resultados do capítulo 0.

Nesta seção daremos algumas proposições que se deduzem facilmente das definições e teoremas enunciadas no capítulo anterior.

Proposição 1.1.1 - Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais.

- i) Se $Q < P$, então $\text{grau } Q \leq \text{grau } P$
- ii) Se $Q \ll P$, então $\text{grau } Q < \text{grau } P$.

Demonstração - i) Suponhamos o contrário, isto é, $r = \text{grau } Q > \text{grau } P = m$. Sejam Q_r a parte principal de Q e $0 \neq \xi^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Q_r(\xi^0) \neq 0$. Da hipótese e do Teorema 0.1.2 a) temos:

$$|Q(s\xi^0)| = |Q_r(s\xi^0) + \sum_{i=1}^r Q_{r-i}(s\xi^0)| \leq C \tilde{P}(s\xi^0) ; \forall s \in \mathbb{R}, s > 0 \quad (1.1.1)$$

onde $C > 0$ é uma constante.

Agora, observemos que

$$0 < |Q_r(\xi^0)| = \lim_{s \rightarrow \infty} |Q(s\xi^0)|/s^r \leq C \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{P}(s\xi^0)/s^r = 0 \quad (1.1.2)$$

pois $m < r$; mas (1.1.2) é impossível e portanto $r \leq m$.

ii) Como $Q \ll P$ implica $Q < P$, temos $r \leq m$. Mostraremos que não podemos ter $r = m$.

Observemos primeiro que para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| < m$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2(|\alpha|-m)} = \lim_{t \rightarrow \infty} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2(|\alpha|-m)} = 0 \quad (1.1.3)$$

Por outro lado,

$$\sum_{|\alpha|=m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 = \text{cte} \neq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{|\alpha|=m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 = \text{cte} \neq 0 \quad (1.1.4)$$

Logo

$$\begin{aligned} \sup_{R^n} \frac{\tilde{Q}(\xi, t)}{\tilde{P}(\xi, t)} &\geq \frac{\tilde{Q}(\xi, t)}{\tilde{P}(\xi, t)} = \\ &= \left[\frac{\sum_{|\alpha|=m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2m} + \sum_{|\alpha|<m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}}{\sum_{|\alpha|=m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2m} + \sum_{|\alpha|<m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Dividindo numerador e denominador de (1.1.5) por t^m temos de (1.1.3) e (1.1.4)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\xi} \frac{\tilde{Q}(\xi, t)}{\tilde{P}(\xi, t)} \geq \left[\frac{\sum_{|\alpha|=m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2}{\sum_{|\alpha|=m} |P^{(\alpha)}(s)|^2} \right]^{1/2} \neq 0 \quad (1.1.6)$$

(1.1.6) contradiz a definição 0.1.2.

As duas seguintes proposições dão condições necessárias para que um operador diferencial Q seja mais fraco que um outro P .

Proposição 1.1.2 - Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais tais que $Q < P$. Se existe $0 \neq \xi^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $P_m^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k < m$, então $Q_m^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k < m$.

Demonstração - Faremos a demonstração por indução em $|\alpha|$.

Para $|\alpha| = 0$ temos: se $Q_m(\xi^0) \neq 0$ e $P_m(\xi^0) = 0$

$$0 < |Q_m(\xi^0)| = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|Q(s\xi^0)|}{s^m} \leq C \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tilde{F}(s\xi^0)}{s^m} = 0 \quad (1.1.7)$$

onde C é uma constante dada pelo teorema 0.1.2 a). Mas (1.1.7) é impossível.

Suponhamos nossa afirmação verdadeira para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k-1$ e demonstremos para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = k$. Seja então $P_m^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = k$, então evidentemente $P_m^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k-1$. Logo, pela hipótese de indução $Q_m^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k-1$.

Devemos mostrar que $Q_m^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = k$.

Suponhamos que existe $\beta \in \mathbb{N}^n$ tal que

$$Q_m^{(\beta)}(\xi^0) \neq 0 ; |\beta| = k. \quad (1.1.8)$$

Do Teorema 0.1.2 b), sabemos que existe uma constante $C'' > 0$ tal que para todo $s > 0$, $t \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} & |Q_m^{(\beta)}(s\xi^0) + \sum_{i=1}^m Q_{m-1}^{(\beta)}(s\xi^0)|^2 t^{2k} \leq \tilde{Q}^2(\xi^0, t) \leq \\ & \leq C'' \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |P^{(\alpha)}(s\xi^0)|^2 t^{2|\alpha|} + \sum_{|\alpha| > k} |P^{(\alpha)}(s\xi^0)|^2 t^{2|\alpha|} \right) \quad (1.1.9) \end{aligned}$$

Sabemos por hipótese que $P_m^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k$. Logo, é fácil ver que:

$$P^{(\alpha)}(s\xi^0) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} ; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n ; |\alpha| \leq K \quad (1.1.10)$$

Segue de (1.1.10) que

$$\begin{aligned}
 |P^{(\alpha)}(s\xi^0)|^2 t^{2|\alpha|} &= \left| \sum_{i=1}^m s^{m-i-|\alpha|} P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi^0) \right|^2 t^{2|\alpha|} \leq \\
 &\leq \sup_{1 \leq i \leq m} |P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi^0)|^2 \left| \sum_{i=1}^m s^{m-i-|\alpha|} \right|^2 t^{2|\alpha|} \leq \\
 &\leq c_\alpha |s^{m-i-|\alpha|}|^2 t^{2|\alpha|} \quad (1.1.11)
 \end{aligned}$$

De (1.1.11) segue que existem constantes $M_\alpha^1 > 0$ e $C_\alpha^1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 |P^{(\alpha)}(s\xi^0)|^2 t^{2|\alpha|} &\leq \\
 &\leq C_\alpha^1 s^{2(m-1-|\alpha|)} t^{2|\alpha|} \quad s \geq M_\alpha^1 ; |\alpha| \leq k \quad (1.1.12)
 \end{aligned}$$

Analogamente, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| > k$ temos: existem constantes $M_\alpha^2 > 0$ e $C_\alpha^2 > 0$ tal que

$$|P^{(\alpha)}(s\xi^0)|^2 t^{2|\alpha|} \leq C_\alpha^2 s^{2(m-|\alpha|)} t^{2|\alpha|} ; s \geq M_\alpha^2 ; |\alpha| > k \quad (1.1.13)$$

Por outro lado, de (1.1.9) segue que existem constantes $C_\beta > 0$ e $M_\beta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 C_\beta s^{2(m-k)} t^{2k} &\leq |Q_m^{(\beta)}(\xi^0)|^2 s^{2(m-k)} t^{2k} \leq \\
 &\leq |Q^{(\beta)}(s\xi^0)|^2 t^{2k} , s \geq M_\beta. \quad (1.1.14)
 \end{aligned}$$

Finalmente, de (1.1.10), (1.1.12), (1.1.13) e (1.1.14) segue que existem constantes $C > 0$ e $M > 0$ tal que: para $s \geq M$ e $t \geq 1$ temos

$$M_{\beta} s^{2(m-k)} \leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq k} s^{2(m-1-|\alpha|)} t^{2|\alpha|} + \sum_{|\alpha| > k} s^{2(m-|\alpha|)} t^{2|\alpha|} \right) \quad (1.1.15)$$

Pode-se ver facilmente que a desigualdade (1.1.15) é falsa. Para isto, basta tomar $s = t^r$ com $1 < r < \frac{k}{k-1}$ e observar que neste caso, temos:

$$s^{2(m-k)} t^{2k} > s^{2(m-1-|\alpha|)} t^{2|\alpha|} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq k.$$

$$s^{2(m-k)} t^{2k} > s^{2(m-|\alpha|)} t^{2|\alpha|} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| > k.$$

Logo dividindo os dois lados da desigualdade (1.1.15) por $t^{2r(m-k)+2k}$ e fazendo $t \rightarrow \infty$, teremos $M < 0$. Esta contradição mostra a Proposição 1.1.2.

Proposição 1.1.3 - Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais tais que $Q < P$. Então $P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $0 \leq i < m$ e todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $i+|\alpha| \leq k$ implica $Q_{m-i}^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo $0 \leq i < m$ e todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $i+|\alpha| \leq k$.

Demonstração - Por indução em $i+|\alpha|$.

Se $i+|\alpha| = 0$ o resultado segue de (1.1.5).

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para todo i e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $i+|\alpha| \leq k-1$. Demonstraremos para i e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $i+|\alpha| = k$.

Suponhamos que existem i_0 e $\beta \in \mathbb{N}^n$ com $i_0+|\beta|=k$ e tal que

$$|Q_{m-i_0}^{(\beta)}(\xi^0)| \neq 0 \quad (1.1.16)$$

Da Definição 0.1.1, da hipótese da proposição e da hipótese indutiva, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=i_0}^m Q_{m-i}^{(\beta)}(s\xi^0) \right|^2 &\leq |Q(s\xi^0)|^2 \leq \\
&\leq C \left(\sum_{\alpha} \left| \sum_{i+|\alpha|>k} P_{m-i}^{(\alpha)}(s\xi^0) \right|^2 \right), \quad s > 0 \quad (1.1.17)
\end{aligned}$$

pois $Q_{m-i}^{(\beta)}(\xi^0) = 0$ para $i < i_0$ e $P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi^0) = 0$ para todo i e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $i+|\alpha| \leq k$. Dividindo os dois lados da desigualdade (1.1.17) por $s^{2(m-k)}$ teremos

$$\begin{aligned}
0 < |Q_{m-i_0}^{(\beta)}(\xi^0)|^2 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_{i=i_0}^m Q_{m-i}^{(\beta)}(s\xi^0) \right|^2}{s^{2(m-k)}} \leq \\
&\leq C \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\sum_{\alpha} \frac{\left| \sum_{i+|\alpha|>k} P_{m-i}^{(\alpha)}(s\xi^0) \right|^2}{s^{2(m-k)}} \right) = 0 \quad (1.1.18)
\end{aligned}$$

A desigualdade (1.1.18) é um absurdo. Isto prova a proposição.

A seguinte proposição nos dá uma caracterização da relação $Q < P$. Antes daremos a seguinte definição:

Definição 1.1.1 - Dados um polinômio P de grau m e $t \in \mathbb{R}^n$, definimos a função $\tilde{P}(\xi, t)$ por

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(\xi, t) &= \\
&= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2\alpha} \right)^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \quad t \in \mathbb{R}^n \quad (1.1.19)
\end{aligned}$$

onde $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$.

Proposição 1.1.4 - Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais. Para que $Q < P$ é necessário e suficiente que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$\tilde{Q}(\xi, t) \leq C \tilde{P}(\xi, t) \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \quad t \in \mathbb{R}^n \quad t_i \geq 1 \quad (1.1.20)$$

O seguinte lema de L. Hörmander será usado na demons

tração da proposição acima.

Lema 1.1.1 - ([4] - Lema 3.1.5) Seja A um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ tal que nenhum polinômio de grau $\leq m$ se anula em A sem anular-se identicamente. Então existem constantes positivas C_1 e C_2 , dependendo de A , tal que para todos os polinômios P de grau $\leq m$ e todo (complexo) ξ

$$C_1 \tilde{P}(\xi) \leq \sup_{v \in A} |P(\xi+v)| \leq C_2 \tilde{P}(\xi) \quad (1.1.21)$$

Demonstração da proposição 1.1.4. É evidente que (1.1.20) é suficiente para que $Q < P$.

Veremos agora que a condição é também necessária. Observemos primeiro que existem constantes positivas C_1 e C_2 dependendo só de n e m tais que para todo polinômio P de grau $\leq m$ temos

$$\begin{aligned} C_1 \tilde{\tilde{P}}(\xi, t) &\leq \sup_{|v_i| \leq t_i} |P(\xi+v)| \leq \\ &\leq C_2 \tilde{\tilde{P}}(\xi, t) \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^n \quad t_i \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Se $t = (1, 1, \dots, 1)$ nossa afirmação segue do Lema 1.1.1. Se aplicamos este caso ao Polinômio $R(\eta) = P(t\xi)$ onde $t = (t_1\xi_1, \dots, t_n\xi_n) = \eta$ temos

$$C_1 \tilde{\tilde{R}}(\eta) \leq \sup_{|\theta_i| \leq 1} |R(\eta+\theta)| \leq C_2 \tilde{\tilde{R}}(\eta) \quad (1.1.23)$$

Por outro lado, observemos que $\tilde{\tilde{R}}(\eta) = \tilde{\tilde{P}}(t\xi, t)$ e $R(\eta+\theta) = P(t\xi+t\theta)$. Logo de (1.1.23) temos

$$C_1 \tilde{\tilde{P}}(\xi t, t) \leq \sup_{|v_i| \leq t_i} |P(t\xi+v)| \leq C_2 \tilde{\tilde{P}}(t\xi, t) \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t_i \geq 0$$

Logo

$$C_1 \tilde{P}(\eta, t) \leq \sup_{|v_i| \leq t_i} |P(\eta+v)| \leq C_2 \tilde{P}(\eta, t) \quad (1.1.24)$$

Usando repetidas vezes a desigualdade (1.1.24) e o Teorema 0.1.2 a) temos

$$\begin{aligned} C_1^2 \tilde{Q}(\xi, t) &\leq C_1 \sup_{|v_i| \leq t_i} |Q(\xi+v)| \leq C' C_1 \sup_{|v_i| \leq t_i} \tilde{P}(\xi+v) \leq \\ &\leq C' \sup_{|v_i| \leq t_i} \sup_{|\theta_i| \leq 1} |P(\xi+v+\theta)| \leq C' \sup_{|v_i| \leq t_{i+1}} |P(\xi+v)| \leq \\ &\leq C' C_2 \tilde{P}(\xi, t+1) \leq C' C_2 2^{n \cdot m} \tilde{P}(\xi, t) \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Tomando $C = C' C_2 2^{n \cdot m} / C_1^2$ e os extremos da desigualdade (1.1.25) temos (1.1.20).

A seguinte proposição é um análogo parcial da proposição 1.1.2.

Proposição 1.1.5 - Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais tais que $P_m(\xi^0) = 0$ e $\frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(\xi^0) = 0$ para algum $1 \leq j \leq n$ e algum $0 \neq \xi^0 \in \mathbb{R}^n$. Se $Q < P$ então $Q_m(\xi^0) = 0$ e $\frac{\partial Q_m}{\partial \xi_j}(\xi^0) = 0$.

Demonstração - Segue-se de (1.1.7) que $Q_m(\xi^0) = 0$. Portanto, será suficiente demonstrar que $\frac{\partial Q_m}{\partial \xi_j}(\xi^0) = 0$. Suponhamos que

$$\frac{\partial Q_m}{\partial \xi_j}(\xi^0) \neq 0 \quad (1.1.26)$$

Da hipótese e da proposição 1.1.4, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que para $t = (1, \dots, 1, t_j, 1, \dots, 1)$ te

mos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Q_m}{\partial \xi_j}(s\xi^0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial Q_{m-i}}{\partial \xi_j}(s\xi^0) \right|^2 t_j^2 &\leq \tilde{Q}^2(s\xi^0, t) \leq \\ &\leq C^2 \tilde{P}^2(s\xi^0, t) \quad t_j \geq 1, \quad s > 0 \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Por outro lado, existe uma constante $M_0 > 0$ tal que para todo $s \geq M_0$ e $t_j \geq 1$ temos.

$$\begin{aligned} \tilde{P}^2(s\xi^0, t) &= \left| \sum_{i=1}^m P_{m-i}(s\xi^0) \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial P_{m-i}}{\partial \xi_j}(s\xi^0) \right|^2 t_j^2 + \sum_{\substack{|\beta|=1 \\ \beta_j=0}} |P^{(\beta)}(s\xi^0)|^2 \\ &\quad + \sum_{\substack{|\beta| \geq 2 \\ \beta_j \neq 0}} |P^{(\beta)}(s\xi^0)|^2 t_j^{2\beta_j} \leq C_1 s^{2(m-1)} + \\ &\quad C_2 s^{2(m-2)} t_j^2 + C_3 s^{2(m-1)} + C_4 s^{2(m-2)} t_j^{2m} \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

De (1.1.26) segue que existem constantes C' e M_1 tais que

$$C' s^{2(m-1)} t_j^2 \leq \left| \frac{\partial Q}{\partial \xi_j}(s\xi^0) \right|^2 t_j^2 \quad \forall s \geq M_1, \quad t_j \geq 1 \quad (1.1.29)$$

De (1.1.27), (1.1.28) e (1.1.29) temos que existem constantes $C'' > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\begin{aligned} C' s^{2(m-1)} t_j^2 &\leq \\ C''(s^{2(m-1)} + s^{2(m-2)} t_j^{2m}) &\quad \forall s \geq M, \quad t_j \geq 1 \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

Observemos agora que a desigualdade (1.1.30) é falsa. Na realidade, basta tomar $s = t_j^r$ com $r > m-1$ e fazer $t_j \rightarrow \infty$ para concluir que $C' \leq 0$.

Esta contradição mostra a proposição.

§1.2 - Alguns resultados gerais sobre comparação de Operadores Diferenciais.

Nesta seção, apresentamos uma lista de questões que a nosso parecer surgem naturalmente da análise dos resultados contidos no capítulo 0. Daremos aqui, respostas afirmativas ou contra exemplos a algumas delas.

Questões.

I) Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais e $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. São as seguintes afirmações verdadeiras?

- a) $Q < P$ implica $QoT < PoT$
- b) $Q << P$ implica $QoT < PoT$
- c) P e PoT são igualmente fortes.

II) Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais, $P_{m-i}(D)$ e $Q_{m-i}(D)$ as partes homogêneas de grau $m-i$ de $P(D)$ e $Q(D)$ respectivamente. São as seguintes afirmações verdadeiras?

- a) $Q < P$ implica $\sum_{i=0}^r Q_{m-i} < \sum_{i=0}^r P_{m-i} \quad r=0, \dots, m-1$
- b) $Q_m < P_m$ implica $Q < P$
- c) $Q < P$ implica $Q^{(\alpha)} < P^{(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \neq 0$

III) Se $P(D)$ é um operador diferencial de grau m . Que condições deve satisfazer P para que domine todo operador de grau $\leq k < m$?

Antes de responder a questão I, daremos o seguinte.

Lema 1.2.1 - Sejam $P(D)$ um operador diferencial de

grau $\leq m$ e $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear não singular. Então

a) Existem constantes positivas C_T^I e C_T^{II} tais que

$$C_T^I \widetilde{\text{PoT}}(\xi) \leq \tilde{P}(T(\xi)) \leq C_T^{II} \widetilde{\text{PoT}}(\xi) \quad (1.2.1)$$

b) Existem constantes $B_T^I > 0$ e $B_T^{II} > 0$ tais que

$$B_T^I \widetilde{\text{PoT}}(\xi, t) \leq \tilde{P}(T(\xi), t) \leq B_T^{II} \widetilde{\text{PoT}}(\xi, t) \quad (1.2.2)$$

Demonstração - Seja $\eta = T(\xi)$, então $\xi = T^{-1}(\eta)$. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos

$$\begin{aligned} |(\text{PoT})^{(\alpha)}(\xi)|^2 &= \left| \sum_{|\beta|=|\alpha|} |P^{(\beta)}(T(\xi))| C_\beta \right|^2 \leq \\ &\leq C_\alpha \sum_{|\beta|=|\alpha|} |P^{(\beta)}(T(\xi))|^2 \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

De (1.2.3) vemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{PoT}}^2(\xi) &= \sum_{\alpha \geq 0} |(\text{PoT})^{(\alpha)}(\xi)|^2 \leq C \sum_{\alpha \geq 0} \sum_{|\beta|=|\alpha|} |P^{(\beta)}(T(\xi))|^2 \\ &\leq \frac{1}{C_T^{I2}} \sum_{\alpha \geq 0} |P^{(\alpha)}(T(\xi))|^2 = \frac{1}{C_T^{I2}} \tilde{P}(T(\xi)) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Logo, a desigualdade da esquerda de (1.2.1), segue de (1.2.4).

Para mostrar a outra desigualdade consideremos o polinômio $R(\xi) = (\text{PoT})(\xi)$. Logo, por (1.2.4) existe uma constante positiva $C_{T^{-1}}^I$ tal que

$$C_{T^{-1}}^I \widetilde{\text{PoT}}^{-1}(\eta) \leq \tilde{R}(T^{-1}(\eta)) \quad \eta \in \mathbb{R}^n$$

de onde

$$\tilde{P}(\eta) \leq C_T^{II} \text{PoT}(T^{-1}(\eta)) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n \quad (1.2.5)$$

onde $C_T'' = 1/C_T'$. Portanto de (1.2.5) temos

$$\tilde{P}(T(\xi)) \leq C_T'' \widetilde{PoT}(\xi) \quad (1.2.6)$$

Finalmente, (1.2.1) segue de (1.2.4) e (1.2.6).

Para mostrar (1.2.2), observemos que de (1.2.1), sabemos que existem constantes $C_T' > 0$ e $C_T'' > 0$ tais que

$$C_T' \widetilde{PoT}(t\xi) \leq \tilde{P}(T(t\xi)) \leq C_T'' \widetilde{PoT}(t\xi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.2.7)$$

Por outro lado, é fácil ver que

$$\widetilde{PoT}(t\xi) = \widetilde{PoT}(t\xi, t) \quad \text{e} \quad \tilde{P}(T(t\xi)) = \tilde{P}(T(t\xi), t) \quad (1.2.8)$$

Portanto (1.2.2) segue de (1.2.7) e (1.2.8).

Ia) Proposição 1.2.1 - Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais. Então $Q < P$ se e somente se $QoT < PoT$ para toda transformação linear inversível $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Demonstração - Se $QoT < PoT$ para toda $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear inversível, então tomando $T = I$ (I ; transformação identidade de $\mathbb{R}^n$) segue que $Q < P$.

Por outro lado, segue-se de (1.2.1) e da Definição 0.1.1 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C_T' \widetilde{QoT}(\xi) \leq \tilde{Q}(T(\xi)) \leq C \tilde{P}(T(\xi)) \leq CC_T'' \widetilde{PoT}(\xi); \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.2.9)$$

Portanto de (1.2.9) temos

$$\widetilde{QoT}(\xi) \leq C'' \widetilde{PoT}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Logo $QoT < PoT$.

Ib) Proposição 1.2.2 - Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais. Então $Q \ll P$ se e somente se $QoT \ll PoT$ para toda transformação linear inversível $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Demonstração - Para a suficiência consideremos como na Proposição 1.2.1 $T = I$.

Para mostrar a outra implicação, observemos que de (1.2.2) segue

$$\inf_{t>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{\widetilde{QoT}(\xi, t)}{\widetilde{PoT}(\xi, t)} \leq \frac{B_T^n}{B_T} \inf_{t>0} \sup_{T(\xi) \in \mathbb{R}^n} \frac{\widetilde{Q}(T(\xi), t)}{\widetilde{P}(T(\xi), t)} = 0$$

Portanto $QoT \ll PoT$.

Observação - Se a transformação T não for inversível,

Ia) e Ib) são falsos, como mostra o seguinte exemplo. Sejam

$P(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^2 + \xi_1 \xi_2$ e $Q(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$. É fácil ver que $P \gg Q$.

Seja T a transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ dada por

$T(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, 0)$; então $PoT(\xi) = 0$ e $QoT(\xi) = \xi_1$. Logo

$QoT \not\ll PoT$.

A afirmação Ic) é falsa. Pois se considerarmos o polinômio $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^2 + i\xi_1$ e a Transformação $T(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1)$ temos $PoT(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + i\xi_2$ e $P \not\ll PoT$. Pois em caso contrário existiria uma constante $c > 0$ tal que para $\xi_1 = 0$ teríamos

$$|\xi_2^2|^2 \leq c \widetilde{PoT}(0, \xi_2) = c(|i\xi_2|^2 + |i|^2 + 2^2) \quad (1.2.10)$$

Segue de (1.2.10) que

$$1 \leq \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \frac{c \widetilde{PoT}(0, \xi_2)}{\xi_2^4} = 0$$

esta contradição mostra nossa afirmação.

Analogamente pode-se mostrar que $P \not\subset T$.

Resposta da Questão 2.

IIa) É verdadeira para $r = 0$ e $r = m-1$. Para mostrar isto, veremos antes a seguinte:

Proposição 1.2.3 - Sejam $P_m(D)$ e $Q_m(D)$ operadores diferenciais homogêneos de grau m . Então $Q_m < P_m$ se e somente se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|Q_m(\xi)| \leq C |P_m(\xi)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.2.11)$$

Demonstração - A condição se, é evidente.

Suponhamos agora que $Q_m < P_m$ e que (1.2.11) não seja verdadeira. Então para todo $s \in \mathbb{N}^n$ existe $\xi^s \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$|Q_m(\xi^s)| > s |P_m(\xi^s)| \quad (1.2.12)$$

Sabemos pelo teorema 0.1.2 a) que existe uma constante $C' > 0$ tal que

$$|Q_m(\xi)| \leq C' \left(\sum |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.2.13)$$

Sejam $s_0 > C'$ e $\xi^{s_0} \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (1.2.12).

Segue de (1.2.13) que

$$\begin{aligned} |Q_m(t \xi^{s_0})| &\leq C' \left(\sum_{\alpha \geq 0} |P_m^{(\alpha)}(t \xi^{s_0})|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq s_0 \left(\sum_{\alpha \geq 0} |P_m^{(\alpha)}(\xi^{s_0})|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

de (1.2.14) segue

$$|Q_m(\xi^{s_0})| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} s_0 \left(\sum_{\alpha \geq 0} |P_m^{(\alpha)}(t \xi^{s_0})|^2 \right)^{1/2} = s_0 |P_m(\xi^{s_0})| \quad (1.2.15)$$

A contradição entre (1.2.12) e (1.2.15) prova a proposição.

Corolário 1.2.1 - Se $Q < P$, então $Q_m < P_m$.

Demonstração - Pela proposição 1.2.3, basta mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que a desigualdade (1.2.11) esteja satisfeita. Isto pode ser feito, repetindo com algumas modificações o argumento usado na demonstração da proposição anterior:

Se $r \neq 0$ temos o seguinte contra exemplo:

Exemplo 1.1.1 - Consideremos os polinômios

$$P(\xi) = \xi_1 \xi_2^2 + \xi_1 \xi_3;$$

$$Q(\xi) = \xi_1 \xi_2^2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2^2 + \xi_3 = P(\xi) + \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\xi)$$

É claro que $Q < P$, pois $\frac{\partial P}{\partial \xi_1} \ll P$ (vide Teorema 0.1.4). Veremos que

$$P = P_m + P_{m-1} \not\leq Q_m + Q_{m-1} = R.$$

Suponhamos que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |R(\xi)| &= |\xi_1 \xi_2^2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2^2| \leq C \tilde{P}(\xi) = \\ &= C(\xi_1^2(\xi_2^2 + \xi_3)^2 + [(\xi_2^2 + \xi_1)^2 + 4(\xi_1 \xi_2)^2 + \xi_1^2] + [4\xi_2^2 + 4\xi_1^2 + 1] + 4)^{1/2}; \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Fazendo na desigualdade anterior $\xi_3 = -\xi_2^2$ e $\xi_1 = 0$ temos

$$|\xi_2^2| \leq C (4 \xi_2^2 + 5)^{1/2}$$

Dividindo os dois lados da desigualdade anterior por ξ_2^2 temos

$$1 \leq C \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} (4 \xi_2^2 + 5)^{1/2} / \xi_2^2 = 0$$

esta contradição prova nossa afirmação.

Observemos que no exemplo 1.1.1 temos $R_m = Q_m = P_m$ e evidentemente $R_m < P_m$, mas $R \not\leq P$. Isto mostra que II.B é falso.

Também II C) é falso. Pois se $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$ e $Q(\xi) = \xi_1 \xi_2$ temos que P é elíptico e por conseguinte $P > Q$ (Teorema 0.1.6) mas $\frac{\partial P}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} = 0$ e $\frac{\partial Q}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} = 1$ e portanto $P^{(\alpha)} \not\leq Q^{(\alpha)}$ $\alpha=(1,1)$

A questão III foi resolvida por L. Hörmander para $k=m-1$. (Vide teorema 0.1.7). Nós daremos aqui uma resposta para $k=m-2$. No caso geral, não conhecemos nenhum resultado relativamente simples.

Teorema 1.2.1. - Seja $P(0)$ um operador diferencial de grau m . As seguintes condições são equivalentes

a) $P > Q$ para todo Q grau $< m - 1$.

b) $P < R < P$ para todo R tal que $R_m(\xi) + R_{m-1}(\xi) = P_m(\xi) + P_{m-1}(\xi)$

$$c) 1) \sum_{i,j}^n \left| \frac{\partial}{\partial \xi_i \partial \xi_j} P_m(\xi) \right|^2 + \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial P_{m-1}}{\partial \xi_j}(\xi) \right|^2 = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

(1.2.16)

$$2) \frac{\partial P_{m-1}}{\partial \xi_j} < P \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

Antes de fazer a demonstração do teorema acima, observe-se que se P_m é um polinômio homogêneo de grau m , então

$$m \cdot P_m(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(\xi) \quad (1.2.17)$$

$$m(m-1) P_m(\xi) = \sum_{i,j} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi) \quad (1.2.18)$$

As fórmulas (1.2.16) e (1.2.17) são conhecidas como "identidades de Euler".

Demonstração do Teorema 1.2.1. -

a) implica b). Seja

$$R(\xi) = P_m(\xi) + P_{m-1}(\xi) + \sum_{i=2}^m R_{m-i}(\xi) = P(\xi) + \sum_{i=2}^m (R_{m-i} - P_{m-i})(\xi)$$

Então b) segue de a) e do Teorema 0.1.4.

b) implica a). Se $Q(D)$ é um operador de grau $< m-1$, temos por b)

$$P_m + P_{m-1} < P < P_m + P_{m-1} + aQ < P < P_m + P_{m-1} \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

Logo da relação anterior e do Teorema 0.1.4 temos

$$Q << P_m + P_{m-1} < P$$

e portanto $Q << P$.

a) implica c). Suponhamos que a condição c 1) não seja verdade.

Então existe $0 \neq \xi^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi^0) = 0 \quad \forall j, i = 1, \dots, n \text{ e } \frac{\partial P_{m-1}}{\partial \xi_j}(\xi^0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.2.19)$$

Usando as identidades (1.2.17), (1.2.18) e as relações (1.2.19)

temos:

$$\frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(\xi^0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n; \quad P_m(\xi^0) = P_{m-1}(\xi^0) = 0 \quad (1.2.20)$$

de (1.2.19) e (1.2.20) temos

$$\tilde{P}^2(s\xi^0, t) = \sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(s\xi^0)|^2 t^{2|\alpha|} = s^{2(m-2)} |P_{m-2}(\xi^0)|^2 + O(s^{2m-5})(1+t^{2m})$$

quando $s \rightarrow \infty$. Logo, se Q é homogêneo de grau $m-2$ temos

$$|Q(s\xi^0)|^2 / \tilde{P}^2(s\xi^0, t) \rightarrow |Q(\xi^0)|^2 / |P_{m-2}(\xi^0)|^2 \quad s \rightarrow \infty$$

se escolhermos Q tal que $Q(\xi^0) \neq 0$ temos

$$\inf_t \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q(\xi)|}{\tilde{P}(\xi, t)} \neq 0$$

o que significa que P não domina Q .

c.2) é necessário. Pois considerando o polinômio $P(\xi) = \xi_1 \xi_2^2 + \xi_1 \xi_3$ dado no exemplo 1.1.1, observamos que

$$\sum_{|\alpha|=2} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 = |2\xi_2|^2 + |2\xi_1|^2 + |\xi_3|^2 + |\xi_1|^2 \neq 0$$

Portanto P cumpre a condição c.1), porém $P \not\equiv \frac{\partial P_{m-1}}{\partial \xi_1} = \xi_3$.

Mais ainda podemos ver que $P \not\equiv \frac{\partial P_{m-1}}{\partial \xi_1}$. Pois em caso contrário, teríamos no exemplo 1.1.1

$$P > Q + (-1)\xi_3 = R$$

o que não é verdade.

c) implica a). Como (1.2.16) é diferente de zero e homogêneo

geneo de grau $m-2$, existe uma constante $C > 0$ tal que para $\underline{t_0}$ do $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$C|\xi|^{2(m-2)} \leq \sum_{|\alpha|=2} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 \quad (1.2.21)$$

Por outro lado

$$|P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 \leq 2|P^{(\alpha)}(\xi)|^2 + 2\left|\sum_{i=1}^m P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha|=2 \quad (1.2.22)$$

$$|P_{m-1}^{(\alpha)}(\xi)|^2 \leq 2|P^{(\alpha)}(\xi)|^2 + 2\left|P_m^{(\alpha)}(\xi) + \sum_{i=2}^m P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha|=1$$

De (1.2.21) e (1.2.22) temos

$$\begin{aligned} C|\xi|^{2(m-2)} &\leq \\ &\leq 2\left(\sum_{|\alpha|=1} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |P_m^{(\alpha)}(\xi) + \sum_{i=2}^m P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi)|^2\right) \\ &+ 2\sum_{|\alpha|=2} \left|\sum_{i=1}^m P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 = 2R(\xi) + 2\sum_{|\alpha|=2} \left|\sum_{i=1}^m P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 \quad (1.2.23) \end{aligned}$$

Por outro lado, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=2} \left|\sum_{i=1}^m P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 \leq C_1(|\xi|^{2m-5+1})$$

Logo de (1.2.23) e a desigualdade anterior obtemos

$$C|\xi|^{2(m-2)} \leq 2R(\xi) + 2C_1(|\xi|^{2m-5+1}) \quad (1.2.24)$$

Agora, existem duas possibilidades

$$1^\circ) |\xi| > \frac{4C_1}{C}. \text{ Neste caso, } |\xi|^{2m-5} < C|\xi|^{2(m-2)}/4C_1 \quad \text{e}$$

portanto de (1.2.24) temos

$$C|\xi|^{2(m-2)} \leq 4R(\xi) + 4C_1 \quad (1.2.25)$$

2º) $|\xi| \leq 4C_1/C$. Neste caso, existe uma constante $B > 0$ tal que

$$C|\xi|^{2(m-2)} \leq 2R(\xi) + 2B \quad (1.2.26)$$

De (1.2.25) e (1.2.30) segue que existe uma constante $C' > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 1 + |\xi|^{2(m-2)} &\leq \\ &\leq C' \left(\sum_{|\alpha| \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |P_m^{(\alpha)} + \sum_{i=2}^m P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right) \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Por outro lado, de c.2), exemplo 0.1.1 e Teorema 0.1.5 obtemos

$$P \gg \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j} + \sum_{i=2}^m \frac{\partial P_{m-i}}{\partial \xi_j} \quad j = 1, \dots, n.$$

Agora se Q é um polinômio de grau $\leq m-2$, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$|Q(\xi)|^2 \leq A(1 + |\xi|^{2(m-2)}) \quad (1.2.28)$$

Logo, de (1.2.27) e (1.2.28) temos:

$$\begin{aligned} \inf_t \sup_{\xi} \frac{|Q(\xi)|}{\tilde{P}(\xi, t)} &\leq \inf_t \sup_{\xi} \frac{\sqrt{A}(1 + |\xi|^{2(m-2)})^{1/2}}{\tilde{P}(\xi, t)} \leq \\ &\leq \sqrt{AC'} \inf_t \sup_{\xi} \left(\frac{\sum_{|\alpha| \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |P_m^{(\alpha)}(\xi) + \sum_{i=2}^m P_{m-i}^{(\alpha)}(\xi)|^2}{\tilde{P}^2(\xi)} \right)^{1/2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pois } P^{(\alpha)} \ll P \text{ para todo } \alpha \neq 0 \text{ e } P \gg \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j} + \\ + \sum_{i=2}^m \frac{\partial P_{m-i}}{\partial \xi_j} \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Observação Se no Teorema 1.2.1, substituirmos c.2 por $P > \frac{\partial P_{m-1}}{\partial \xi_j}$ para todo $j = 1, \dots, n$ e a) por $P > Q$ para todo

Q de grau $< m-1$, temos a seguinte.

Proposição 1.2.4 - Para que $P > Q$ para todo Q de grau $\leq n-2$ é suficiente que:

- i) $\sum_{|\alpha|=2} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |P_{m-1}^{(\alpha)}(\xi)|^2 \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- ii) $\frac{\partial P_{m-1}}{\partial \xi_j} < P$ para todo $j = 1, \dots, n$

Demonstração - Seguir os passos da demonstração c) implica a) do Teorema 1.2.1. Substituindo $>>$ por $>$.

Observação - A condição ii) da proposição anterior é também necessária. Como pode ser visto no exemplo dado anteriormente para mostrar que a condição c.2) era necessária no Teorema 1.2.1.

C A P Í T U L O 2

OPERADORES QUE DOMINAM TODO OPERADOR DE GRAU 1

§2.1. - Preliminares

Proposição 2.1.1 - Sejam $P(\xi)$ um polinômio de grau m e V o espaço vetorial

$$V = \left\{ Q(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k \mid a_k \in \mathbb{C} ; P \gg Q \right\}.$$

Então existe uma transformação linear de coordenadas $\xi = T(\eta)$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ tal que se $\dim V = j$ ($1 \leq j \leq n$), então o conjunto de polinômios $\{\eta_1, \dots, \eta_j\}$ é uma base do espaço vetorial

$$V_T = \left\{ Q(\eta) = \sum_{k=1}^n b_k \eta_k \mid b_k \in \mathbb{C} ; Q \ll P \circ T \right\}$$

Antes de proceder a demonstrar a proposição acima, veremos alguns lemas prévios.

Lema 2.1.1 - Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ operadores diferenciais.

Então:

- a) $P \gg Q$ se e somente se $P \gg Q_1$ e $P \gg Q_2$
- b) $P > Q$ se e somente se $P > Q_1$ e $P > Q_2$

onde Q_1 e Q_2 são as partes real e imaginária de Q (Q_1 e Q_2 são operadores com coeficientes reais).

Demonstração - Segue do Teorema 0.1.5 (Teorema 0.1.1)

que $P \gg Q$ ($P > Q$) se $P \gg Q_i$ ($P > Q_i$) $i = 1, \dots, 2$.

Para mostrar a outra implicação, observemos primeiro que

$$\begin{aligned} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} &= |Q_1^{(\alpha)}(\xi) + i Q_2^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} = |Q_1^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} + \\ &+ |Q_2^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} \geq |Q_i^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} \quad i=1,2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \\ &\quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo da hipótese e da desigualdade anterior temos

$$a) \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{\tilde{Q}_i(\xi, t)}{\tilde{P}(\xi, t)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{\tilde{Q}(\xi, t)}{\tilde{P}(\xi, t)} = 0,$$

e portanto $Q_i < P$.

$$b) \tilde{Q}_i(\xi, t) \leq \tilde{Q}(\xi, t) \leq C \tilde{P}(\xi, t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; t \geq 1,$$

logo $Q_i < P$. A proposição está demonstrada.

Consideremos agora o espaço vetorial.

$$V_1 = \{Q(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k; a_k \in \mathbb{R}; P > Q\}.$$

É claro que $V_1 \subset V$.

Lema 2.1.2. - $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{R}} V_1$.

Demonstração - Seja $B = \{Q_l^{(\xi)} = \sum_{k=1}^n a_{lk} \xi_k; 1 \leq l \leq j \leq n\}$ uma base de V_1 . Demonstraremos que B é base de V .

É claro que B é linearmente independente como subconjunto de V . Logo só resta mostrar que B gera V .

Seja $R = R_1 + i R_2 \in V$. Sabemos pelo Lema 2.1.1 que $R_i \in V_1$ $i = 1, 2$, logo existem constantes reais a_l e b_l $l=1, 2, \dots, j$ tais que:

$$R_1(\xi) = \sum_{l=1}^j a_l Q_l(\xi) \quad \text{e} \quad R_2(\xi) = \sum_{l=1}^j b_l Q_l(\xi)$$

Então:

$$R(\xi) = R_1(\xi) + iR_2(\xi) = \sum_{l=1}^j (a_l + ib_l) Q_l(\xi) = \sum_{l=1}^j c_l Q_l(\xi); \quad c_l \in \mathbb{C}$$

Isto prova o lema.

Demonstração da Proposição 2.1.1 - Seja $B = \{Q_l(\xi) =$

$$= \sum_{k=1}^j a_{lk} \xi_k \quad 1 \leq l \leq j\}$$
 uma base real de $V(a_{lk} \in \mathbb{R})$. Con-

sideremos os polinômios homogêneos de grau 1.

$$Q_{j+s}(\xi) = \sum_{k=1}^n a_{j+s,k} \xi_k \quad a_{j+s,k} \in \mathbb{R} \quad ; \quad s=1, \dots, n-j$$

tal que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

seja não singular. Definamos $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $\eta = L(\xi)$ onde $\eta_l = Q_l(\xi)$ e seja $T = L^{-1}$. Observemos que:

$$\eta_l = (Q_l \circ T)(\eta) \quad \text{e} \quad P(\xi) = (P \circ T)(\eta).$$
 Portanto da Proposição

1.2.2 segue que $\eta_l \ll P \circ T$. Uma simples verificação mostra que

$\{\eta_1, \dots, \eta_l\}$ é uma base de V_T . A proposição está demonstrada.

Proposição 2.1.2 - Sejam P e V nas condições da Proposição 2.1.1. Se $\dim V = j$ $1 \leq j \leq n$, então existe uma transformação linear de coordenadas $\xi = T(\eta)$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$P_m(T(\eta)) = R_m(\eta_1, \dots, \eta_j). \quad (2.1.1)$$

Demonstração - Sabemos pela Proposição 2.1.1 que existe uma transformação linear de coordenadas $\xi = T(\eta)$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\{\eta_1, \dots, \eta_j\}$ é uma base de V_T . Suponhamos que $P_m(T(\eta)) \neq R_m(\eta_1, \dots, \eta_j)$, isto é, $P_m(T(\eta))$ depende também de η_k $j+1 \leq k \leq n$. Fazendo $\eta = (\eta', \eta'')$ onde $\eta' = (\eta_1, \dots, \eta_j, 0, \dots, 0)$ e $\eta'' = (0, \dots, 0, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n)$ e analogamente $\alpha = (\alpha', \alpha'')$, podemos escrever $P(T(\eta))$ na forma.

$$P(T(\eta)) = \sum_{|\alpha'|=m} a(\alpha', \alpha'') \eta'^{\alpha'} \eta''^{\alpha''} + S(\eta)$$

onde $S(\eta)$ é um polinômio de grau $\leq m-1$. Demonstraremos que se $|\alpha'| = m$ e $|\alpha''| \neq 0$ então $a(\alpha', \alpha'') = 0$.

Suponhamos que exista $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha''| \neq 0$, $|\alpha'| = m$ e tal que $a(\alpha', \alpha'') \neq 0$. Então existe $k \geq j+1$ tal que $\alpha_k \geq 1$. Seja $\beta \in \mathbb{N}^n$ definido por $\beta_i = \alpha_i$ para $i \neq k$ e $\beta_k = \alpha_k - 1$ e consideremos

$$D^\beta P(T(\eta)) = \sum_{l=1}^j C_l \eta_l^{C_l} \eta_{j+1}^{C_{j+1}} \dots + C_a(\alpha', \alpha'') \eta_k^{C_k} \dots C_n \eta_n^{C_n}.$$

Como $PoT \gg \sum_{l=1}^j C_l \eta_l^{C_l}$ e $PoT \gg D^\beta PoT$, segue do Teorema 0.1.5 que

$$PoT \gg C_{j+1} \eta_{j+1}^{C_{j+1}} \dots + C_a(\alpha', \alpha'') \eta_k^{C_k} \dots C_n \eta_n^{C_n} = Q(\eta)$$

Logo $Q(\eta)$ deve ser combinação linear de η_l $l = 1, \dots, j$.

(Prop. 2.1.1); o qual é impossível. Portanto devemos ter $C_{j+1} = \dots = C_n = 0$ e por conseguinte $a_{(\alpha', \alpha'')} = 0$ pois $C = \alpha! \neq 0$. Isto prova a proposição.

Proposição 2.1.3 - Sejam P e V nas condições da Proposição 2.1.1. Se $\dim V = j$ $1 \leq j \leq n$, então existe uma transformação linear de coordenadas $\xi = T(\eta)$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ tal que se para algum r , ($2 \leq r \leq m$)

$$P_r(T(\eta)) \neq R_r(\eta_1, \dots, \eta_j) \quad \text{e} \quad P_{r+i}(\eta) = R_{r+i}(\eta_1, \dots, \eta_j),$$

então $P_r(T(\eta))$ escreve-se na forma

$$P_r(T(\eta)) = R_r(\eta_1, \dots, \eta_j) + \sum_{k \geq j+1} a_k \eta_k \eta^{\beta}, \quad |\beta| = r-1.$$

Demonstração - Consideremos a transformação $\xi = T(\eta)$ definida na Proposição 2.1.1. Então podemos escrever $P_r(T(\eta))$ (Parte homogênea de grau r) na forma

$$P_r(T(\eta)) = R_r(\eta_1, \dots, \eta_j) + \sum_{|\alpha| = r} a_{(\alpha', \alpha'')} \eta^{\alpha'} \eta''^{\alpha''}$$

Mostraremos que $a_{(\alpha', \alpha'')} = 0$ se $|\alpha''| > 1$ e $|\alpha| = r$. Suponhamos que exista $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = r$, $|\alpha''| > 1$ e $a_{(\alpha', \alpha'')} \neq 0$. Então ou existe $j+1 \leq k \leq n$ tal que $\alpha_k > 1$ ou existem k_1 e k_2 ($j+1 \leq k_i \leq n$ $i=1,2$) tais que $\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2} = 1$. No primeiro caso, considerando $\beta \in \mathbb{N}^n$ com $\beta_i = \alpha_i$ para $i \neq k$ e $\beta_k = \alpha_k - 1$ teremos

$$D^{\beta}(P \circ T)(\eta) = D^{\beta'}(D^{\beta''}(P \circ T)(\eta)) = C_{\alpha} \eta_k + \sum_{\substack{k \neq l \\ l \geq j+1}} C_l \eta_l + \sum_{l=1}^j C_l \eta_l + C$$

pois $D^{\beta} P_{r+1}(T(\eta)) = 0$ ($|\beta''| > 0$ e $P_{r+1}(T(\eta)) = R_{r+1}(\eta_1, \dots, \eta_j)$).

Raciocinando como na proposição anterior, (para mostrar que $a_\alpha = 0$ se $|\alpha''| > 0$), mostra-se que $Ca_\alpha = C_l = 0 \quad \forall l \geq 1$. Portanto $a_\alpha = 0$ pois $C = \alpha!$.

Se $\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2} = 1$, consideramos $\beta \in \mathbb{N}^n$ com $\beta_i = \alpha_i$ para $i \neq k_1$ e $\beta_{k_1} = \alpha_{k_1} - 1$. Logo como no caso anterior $|\beta''| > 0$ e por conseguinte

$$D^{\beta} P(T(\eta)) = C_1 a_\alpha \eta_{k_1} + \sum_{\substack{l \neq k_1 \\ l \geq j+1}} C_l^1 \eta_l + \sum_{l=1}^j C_l^1 \eta_l + C^1,$$

de onde concluímos que $a_\alpha = 0$ (pois $C_1 = \alpha!$). Isto termina a demonstração:

§2.2 - Operadores que dominam todo operador de grau 1.

Neste parágrafo, daremos uma condição necessária e suficiente para que um polinômio de grau m (em duas variáveis) domine todo polinômio homogêneo de grau 1 (por conseguinte todo polinômio de grau ≤ 1). Mais precisamente demonstraremos o seguinte

Teorema 2.2.1 - Sejam $P(\xi_1, \xi_2)$ um polinômio de grau m e $V = \{Q(\xi) = a\xi_1 + b\xi_2 \mid P \gg Q\}$. Então $\dim V = 1$ se e somente se existe uma transformação linear de coordenadas $\xi = T(\eta)$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $P \circ T$ escreva-se na forma:

$$P(T(\eta)) = \sum_{k=1}^m a_k \eta_1^k + b \eta_2 + C \quad (2.2.1)$$

Antes de proceder à demonstração do teorema acima, daremos alguns lemas.

Lema 2.2.1 - Seja $P(\eta_1, \eta_2)$ um polinômio da forma

$$P(\eta_1, \eta_2) = \sum_{p=3}^m a_p \eta_1^p + b\eta_1^2 + c\eta_1\eta_2 + d\eta_1 + e\eta_2 + f ; a_m \neq 0 ; m \geq 3.$$

Então $P \gg \eta_1^k$ para todo $k = 1, \dots, m-1$.

Demonstração - Como $m \geq 3$, então

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \eta_1^{m-1}} P(\eta) = m! a_m \eta_1 + (m-1)! a_{m-1}$$

Portanto $P \gg \eta_1$. Pelo Teorema 0.1.4 temos

$$P < P_1 < P \quad (2.2.2)$$

onde

$$P_1(\eta) = \sum_{p=3}^m a_p \eta_1^p + b\eta_1^2 + c\eta_1\eta_2 + e\eta_2.$$

Consideremos a derivada

$$\frac{\partial P_1}{\partial \eta_1}(\eta) = \sum_{p=3}^m p a_p \eta_1^{p-1} + 2b\eta_1 + c\eta_2$$

se $c \neq 0$ e $e \neq 0$, então segue do Teorema 0.1.4 que

$$P_1 < cP_1 + e \frac{\partial P_1}{\partial \eta_1} < P_1 \quad (2.2.3)$$

Logo de (2.2.2) e (2.2.3) obtemos

$$P < P_2 < P, \quad (2.2.4)$$

onde

$$\begin{aligned} P_2(\eta) &= \sum_{p=3}^m c_p \eta_1^p + r\eta_1^2 + q\eta_1\eta_2 = \\ &= \eta_1 \left(\sum_{p=3}^m c_p \eta_1^{p-1} + r\eta_1 + q\eta_2 \right) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Observamos da relação anterior que P_2 é da forma

$P_2 = Q_1 Q_2$. Onde

$$Q_1(\eta) = \eta_1 \quad \text{e} \quad Q_2(\eta) = \sum_{p=3}^m c_p \eta_1^{p-1+r} \eta_1 + q \eta_2.$$

Demonstraremos agora que $P \gg \eta_1^k$ para todo $k = 1, \dots, m-1$. Faremos isto por indução em k . Suponhamos que para $1 \leq k < n-1$ temos $P \gg \eta_1^k$ (para $k=1$ já foi mostrado). Então segue de (2.2.4), (2.2.5) e do Teorema 0.1.5 que

$$P > P_2 \gg \eta_1 \frac{\partial Q_2}{\partial \eta_1} = c_m \eta_1^{m-1} + \sum_{p=3}^{m-1} c_p \eta_1^{p-1+r} \eta_1 \quad (2.2.6)$$

pois $Q_1 < Q_1$ e $\frac{\partial Q_2}{\partial \eta_1} < Q_2$.

Finalmente, da hipótese de indução, do Teorema 0.1.5 e a relação (2.2.6) temos que P domina η_1^{m-1} .

Se $e = 0$, então $P_1(\eta)$ está na forma (2.2.5). Logo basta seguir a demonstração a partir daí.

Se $c = 0$, basta considerar as derivadas $\frac{\partial^i P}{\partial \eta_1^i}$ $i = 1, \dots, m-1$. Isto prova o lema.

Lema 2.2.2 - Seja $P(\eta)$ um polinômio da forma

$$P(\eta_1, \eta_2) = \sum_{k=1}^m a_k \eta_1^k + b \eta_2 + c.$$

Então P não domina η_2 .

Demonstração - Suponhamos $b \neq 0$ (o caso $b = 0$ é evidente). Então

$$\sup_{\eta} \frac{|\eta_2|}{\tilde{P}(\eta, t)} \quad \sup_{(0, \eta_2)} \frac{|\eta_2|}{(|b\eta_2 + c|^2 + \sum_{p=1}^m c_p t^{2p})^{1/2}} = \frac{1}{|b|} \neq 0$$

Portanto

$$\inf_{t>0} \sup_{\eta} \frac{|\eta_2|}{\tilde{P}(\eta, t)} \neq 0,$$

logo $P \nmid \eta_2$.

Lema 2.2.3 - Seja P um polinômio (em duas variáveis) da forma

$$P(\eta_1, \eta_2) = a_m \eta_1^m + \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_\alpha \eta^\alpha. \quad (2.2.7)$$

Se P não domina η_2 , então P escreve-se na forma (2.2.1).

Demonstração - Por indução em $m = \text{grau } P$. Para $m = 2$, não temos nada a demonstrar. Suponhamos o lema verdadeiro para todo polinômio P de grau $\leq m-1$ e demonstraremos para P de grau n .

Considerando a derivada $\frac{\partial P}{\partial \eta_1}$ de P temos

$$\frac{\partial P}{\partial \eta_1}(\eta_1, \eta_2) = m a_m \eta_1^{m-1} + \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_\alpha \alpha_1 \eta_1^{\alpha_1-1} \eta_2^{\alpha_2} = b_{m-1} \eta_1^{m-1} + \sum_{|\beta| \leq 2} b_\beta \eta^\beta$$

onde $b_\beta = \alpha_1 a_\alpha$. Observamos então, que $\frac{\partial P}{\partial \eta_1}$ escreve-se na forma (2.2.7) e como $\frac{\partial P}{\partial \eta_1} \nmid \eta_2$, (em caso contrário P dominaria η_2) devemos ter $b_\beta = \alpha_1 a_\alpha = 0$ para todo β tal que $\beta_2 \neq 0$ e $|\beta| \geq 2$. Isto é, $a_\alpha = 0$ para todo α com $\alpha_2 \neq 0$ e $|\alpha| \geq 3$. Logo

$$P(\eta_1, \eta_2) = \sum_{p=3}^n a_p \eta_1^p + a_{20} \eta_1^2 + a_{11} \eta_1 \eta_2 + a_{02} \eta_2^2 + a_{10} \eta_1 + a_{01} \eta_2 + a_0.$$

Segue-se da Proposição 2.1.3 que devemos ter $a_{02} = 0$ e portanto pelo Lema 2.2.1 e o Teorema 0.1.4 temos

$$P < P_1 < P \quad (2.2.8)$$

onde $P_1(\eta_1, \eta_2) = a_m \eta_1^m + a_{11} \eta_1 \eta_2 + a_{01} \eta_2$.

Observemos agora que

$$P > P_1 \gg \frac{\partial P_1}{\partial \eta_1} = m a_m \eta_1^{m-1} + a_{11} \eta_2$$

Usando novamente o Lema 2.2.1 concluimos que P domina η_2 . Isto contradiz nossa hipótese. Logo devemos ter $a_{11} = 0$ e portanto

$$P(\eta_1, \eta_2) = \sum_{p=1}^m a_p \eta_1^p + b \eta_2 + c.$$

O lema está demonstrado.

Demonstração do Teorema 2.2.1 - Segue do Lema 2.2.2 que se PoT escreve-se na forma (2.2.1), então PoT não domina η_2 . Logo $\dim V_T = 1$.

Por outro lado, observa-se sem dificuldade que $\dim V_T = \dim V$.

Se $\dim V = 1$, então pela Proposição 2.1.2, existe uma transformação de coordenadas $\xi = T(\eta)$ de R^2 em R^2 tal que

$$(PoT)(\eta) = a_m \eta_1^m + \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_\alpha \eta^\alpha.$$

Portanto o resultado segue do Lema 2.2.3. O Teorema está demons

trado.

Para finalizar este capítulo, daremos uma caracterização dos operadores mais fortes que todo operador de grau 1. Para isto, observemos primeiro, que se considerarmos os espaços vetoriais

$$V = \{Q(\xi) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2, P \gg Q\} \text{ e}$$

$$\tilde{V} = \{Q(\xi) = b_1\xi_1 + b_2\xi_2, P > Q\}, \quad (2.2.9)$$

então $V \subset \tilde{V}$ e em geral $\dim V \neq \dim \tilde{V}$.

Teorema 2.2.2 - Seja P um polinômio em duas variáveis e seja $\tilde{V}$ o espaço vetorial considerado em (2.2.9). Então $\dim \tilde{V} = 1$ se e somente se existe uma transformação linear de coordenadas $\xi = T(\eta)$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que PoT escreve-se na forma 2.2.1 e $\operatorname{im}(\overline{a_m}b) = 0$.

Demonstração - Se $\dim \tilde{V} = 1$, então $\dim V = 1$. Logo pelo Teorema 2.2.1 existe uma transformação linear de coordenadas $\xi = T(\eta)$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que PoT escreve-se na forma (2.2.1).

Por outro lado, se PoT é da forma (2.2.1), então pelo Lema 2.2.1

$$PoT < Q < PoT \quad (2.2.10)$$

onde $Q(\eta_1, \eta_2) = a_m\eta_1^m + b\eta_2$. Logo se $\operatorname{im}(\overline{a_m}b) \neq 0$ temos

$$|a_m|^2 |Q(\eta_1, \eta_2)|^2 =$$

$$|a_m|^2 \eta_1^m + \operatorname{real}(a_m b) \eta_2|^2 + |\operatorname{im}(\overline{a_m}b)|^2 \eta_2^2 \quad (2.2.10')$$

e portanto

$$|\eta_2|^2 \leq \frac{|a_m|^2}{|\operatorname{im}(\bar{a}_m b)|^2} |Q(\eta_1, \eta_2)|^2 \leq c^2 \tilde{Q}^2(\eta_1, \eta_2) \quad (2.2.11)$$

Portanto segue de (2.2.10) e (2.2.11) que $\eta_2 < \operatorname{PoT}$. Isto contradiz nossa hipótese e prova a necessidade.

É claro que se PoT é da forma (2.2.1), então $\operatorname{PoT} > \eta_1$. Logo $\eta_1 < Q$.

Suponhamos que $\eta_2 < Q$. Então existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\eta_2|^2 &\leq c^2 \tilde{Q}^2(\eta) = \\ &= (|Q(\eta)|^2 + \sum_{j=1}^m \left| \frac{m!}{(m-j)!} a_m \eta_1^{m-j} \right|^2) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Logo se PoT é da forma (2.2.1), $\operatorname{im}(\bar{a}_m b) = 0$ e $\eta_2 = -\frac{|a_m|^2}{\operatorname{real}(a_m b)} \eta_1^m$; temos de (2.2.10') e (2.2.12),

$$\frac{|a_m|^4}{|\operatorname{real}(a_m b)|^2} |\eta_1^m|^2 \leq c \sum_{j=1}^m \left| \frac{m!}{(m-j)!} a_m \eta_1^{m-j} \right|^2.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade anterior por η_1^{2m} e fazendo $\eta_1 \rightarrow \infty$ teremos

$$\frac{|a_m|^4}{|\operatorname{real}(a_m b)|^2} = 0.$$

Mas isto é uma contradição (pois $a_m \neq 0$). Portanto de (2.2.10) segue que $\operatorname{PoT} \neq \eta_2$, o que significa que $\dim \tilde{V} = 1$. Isto prova a suficiência.

C A P Í T U L O 3

POLIEDROS CONVEXOS E COMPARAÇÃO DE OPERADORES DIFERENCIAIS

§.3.0. - INTRODUÇÃO - Neste capítulo, a um dado polinômio $P(\xi)$ (em n variáveis) associaremos dois poliedros convexos $\Gamma(P)$ e $\tilde{\Gamma}(P)$. Daremos condições em $\Gamma(P)$ e $P(\xi)$ para que $P(\xi)$ seja mais forte que todo polinômio $Q(\xi)$ com $\tilde{\Gamma}(Q) \subset \tilde{\Gamma}(P)$. Todos os resultados aqui expostos, com algumas exceções as quais foram incluídas para tornar mais clara a exposição, encontram-se em [5] [6] e [8]. Começaremos dando um resumo de definições e proposições relativos a conjuntos e poliedros convexos.

§.3.1. - Conjuntos e poliedros convexos

Definição 3.1.1. - Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se convexo se e somente se $x \in S$ e $y \in S$ implica $z = (1-t)x + ty \in S$ $0 \leq t \leq 1$.

Definição 3.1.2. - Um subconjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ chama-se uma variedade linear (ou variedade afim) se e somente se existem um subespaço $N \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$ tais que $L = p + N$. Definimos a dimensão de L como a dimensão do subespaço N . Uma variedade linear de dimensão $n-1$ será chamado hiperplano.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio. Chamaremos variedade linear gerada por A à interseção de todas as variedades lineares que contêm A .

Definição 3.1.3. - Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo não vazio, então definimos a dimensão de A como a dimensão da variedade linear gerada por A .

Se H é um hiperplano de $\mathbb{R}^n$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$H = \{p \in \mathbb{R}^n : (p, \lambda) = d\}$$

onde $(p, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i \lambda_i$. Dizemos que $(p, \lambda) = d$ é a equação do hiperplano H .

Definição 3.1.4 - a) Seja H um hiperplano com equação $(p, \lambda) = d$.

Os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

$$H_- = \{p \in \mathbb{R}^n : (p, \lambda) \leq d\} ; H^+ = \{p \in \mathbb{R}^n : (p, \lambda) \geq d\}$$

chamam-se semi-espacos fechados determinados por H .

b) Um hiperplano H de $\mathbb{R}^n$ diz-se hiperplano de suporte de um subconjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$ se e somente se $S \cap H \neq \emptyset$ e S está contido num dos semiespacos (fechados) determinados por H .

c) Se S e S' são dois subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, então um hiperplano H de $\mathbb{R}^n$ diz-se que separa S e S' se e somente se S está contido num dos semiespacos determinados por H e S' no outro.

Proposição 3.1.1. - a) Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e fechado e $p_0 \notin S$. Então existe um hiperplano que separa S e p_0 .

b) Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e $p_0 \in \partial S$ (∂S fronteira de S), então existe um hiperplano de suporte H de S tal que $p_0 \in H$.

Demonstração - Vide [2] Teoremas 1 e 4 páginas 11 e 12.

Definição 3.1.5 - Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. Chamaremos envoltória convexa de A e denotaremos por $\text{conv } A$ ao conjunto

$$\text{Conv } A = \bigcap_{\lambda \in I} S_\lambda$$

onde a família $\{S_\lambda\}_{\lambda \in I}$ está formada por todos os conjuntos convexos que contêm A .

Proposição 3.1.2. - A envoltória convexa de um conjunto finito de pontos $A = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$\text{Con}A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^m u_i p_i, u_i \geq 0, \sum u_i = 1\}$$

Demonstração - Vide [1] Teorema 3 página 603.

Definição 3.1.7 - a) Um subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ chama-se um poliedro convexo se e somente se Γ é a intersecção de um número finito de semi-espacos.

b) Sejam Γ um poliedro convexo e F um subconjunto de Γ . Então F diz-se uma face de Γ se e somente se existe um hiperplano de suporte H de Γ tal que $F = \Gamma \cap H$. Denotaremos as faces de Γ por Γ_i^k $i = 1, \dots, n_\Gamma$, $k = 0, \dots, n-1$, onde k é a dimensão de Γ_i^k e n é a dimensão de Γ . As faces de dimensão 0 serão chamados de vértices.

Observação - a) Os pontos de um poliedro convexo Γ satisfazem um sistema de inequações da forma

$$\pm (P, \lambda^i) \leq d_i \quad i = 1, \dots, m.$$

Se orientarmos convenientemente as normais dos hiperplanos que definem o poliedro, podemos supor que os pontos de Γ satisfazem um sistema de inequações da forma

$$(p, \lambda^i) \leq d_i \quad i = 1, \dots, m$$

onde $(p, \lambda^i) = d_i \quad i=1, \dots, m$ são as equações dos hiperplanos que determinam os semi-espacos que contêm o poliedro.

b) Segue da definição de poliedro convexo, que se P_i^k é uma face de um poliedro convexo Γ , então Γ_i^k é um poliedro convexo.

Definição 3.1.8 - Um vetor $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}^n$ diz-se normal exterior de um hiperplano de suporte H de um conjunto convexo S se e somente se λ é normal de H e está dirigido para o semi-espaço que não contém S .

Observação - Sejam S um conjunto convexo e H um hiperplano de suporte de S . Se $(p, \lambda) = d$ é a equação de H e λ é a normal exterior de H , então $(p, \lambda) \leq d$ para todo $p \in S$.

Proposição 3.1.3 - Seja Γ um poliedro convexo compacto. Então para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}^n$, existe uma única face Γ_i^k de Γ tal que λ é a normal exterior de um hiperplano de suporte H de Γ e tal que $\Gamma_i^k = \Gamma \cap H$.

Demonstração - Seja $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(p) = (p, \lambda).$$

A função f é contínua. Como Γ é compacto, então existe $p_0 \in \Gamma$ tal que $f(p) \leq f(p_0) = (\lambda, p_0)$ para todo $p \in \Gamma$. Seja H o

hiperplano com equação $(\lambda, p_0) = d$ e seja $\Gamma_i^k = \Gamma \cap H$. Isto prova a proposição. (Vide definição 3.1.7 b)).

Proposição 3.1.4. - A fronteira de um poliedro convexo n -dimensional Γ é a reunião das faces $(n-1)$ -dimensionais.

Demonstração - Vide [2] Teorema 3, página 27.

Proposição 3.1.5. - Cada face $(n-2)$ -dimensional de um poliedro convexo n -dimensional é a intersecção de duas faces $(n-1)$ -dimensionais.

Demonstração - Vide [2] Teorema 4, página 27.

Proposição 3.1.6. - Seja Γ um poliedro convexo compacto, F_1 uma face de Γ e F_2 uma face de F_1 . Então F_2 é uma face de Γ .

Demonstração - Vide [2] Teorema 5, página 33.

Proposição 3.1.7. - Sejam Γ um poliedro convexo compacto de dimensão n e $0 \leq k < n-1$. Então cada face k -dimensional de Γ é a intersecção das faces $(k+1)$ -dimensionais que o contêm.

Demonstração - Vide [2] Teorema 7, página 35.

Proposição 3.1.8. - Seja Γ um poliedro convexo. Se F e F_1 são faces de Γ tal que $F \subset F_1$, então F é face de F_1 .

Demonstração - Seja H um hiperplano de suporte de Γ tal que $F = H \cap \Gamma$. Como $F \subset F_1$ e $F_1 \subset \Gamma$ temos

$$F = F \cap F_1 = H \cap \Gamma \cap F_1 = H \cap F_1.$$

Logo F é uma face de F_1 .

Proposição 3.1.9. - a) Seja Γ um poliedro convexo compacto. Então

$$\Gamma = \text{Conv.}\{e^1, \dots, e^m\}$$

onde $e^i = i=1, \dots, n$ são os vértices de Γ .

b) A envoltória convexa de um conjunto finito de pontos $A = \{p^1, \dots, p^m\} \subset \mathbb{R}^n$ é um poliedro convexo. Mais ainda, os vértices de Γ pertencem a A .

Demonstração - Vide [1] Teorema 5 página 613.

Em adiante, consideraremos apenas poliedros convexos compactos contidos em $\mathbb{R}_+^n = \{p \in \mathbb{R}^n, p_i \geq 0 \ i=1, \dots, n\}$ que contém a origem de coordenadas como um de seus vértices e que tenha dimensão n .

Definição 3.1.9 - Seja Γ um poliedro convexo. Uma face Γ_i^{n-1} $(n-1)$ -dimensional Γ^{n-1} de Γ diz-se uma face principal se e somente se a normal exterior do hiperplano suporte H de Γ tal que $\Gamma_i^{n-1} = \Gamma \cap H$, tem pelo menos uma coordenada positiva (> 0). Uma face Γ_i^k de Γ (de dimensão $k < n-1$) diz-se uma face principal se e somente se existe uma face $(n-1)$ -dimensional Γ_j^{n-1} de Γ tal que $\Gamma_i^k \subset \Gamma_j^{n-1}$ e Γ_j^{n-1} é uma face principal de Γ .

Observação - Se Γ_i^k é uma face principal de Γ . Então existe um hiperplano de suporte H de Γ tal que $\Gamma_i^k = \Gamma \cap H$ e a normal exterior λ de H tem pelo menos uma coordenada positiva. (não damos a demonstração, pois não iremos usar posteriormente).

Definição 3.1.10 - a) - Seja Γ um poliedro convexo. Uma face Γ_i^k de Γ diz-se própria (completamente própria) se e somente se existe um hiperplano de suporte H de Γ tal que $\Gamma_i^k = H \cap \Gamma$ e tal que todas as coordenadas de sua normal exterior são não negativas (positivas).

b) Se toda face principal $(n-1)$ -dimensional do poliedro Γ for própria, então o poliedro diz-se próprio.

c) Se cada eixo coordenado de $\mathbb{R}_+^n$ contém um vértice de Γ diferente da origem de coordenadas, o poliedro chama-se completo.

Observação - Pode-se demonstrar (nós não faremos isto, pois não usaremos posteriormente) que se Γ é um poliedro convexo, F_1 uma face completamente própria de Γ e F uma face de F_1 , então F é uma face completamente própria de Γ .

Lema 3.1.1. - Sejam Γ um poliedro convexo, Γ_j^k uma face de Γ não contida em um hiperplano coordenado. Então existe um ponto $p \in \Gamma_j^k$ tal que $p_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$.

Demonstração - Para cada $i = 1, \dots, n$, existe $p_j^i \in \Gamma_j^k$ tal que $p_j^i > 0$. Sejam $u_i > 0$ $i = 1, \dots, n$ números reais tais que $\sum_{i=1}^n u_i = 1$. Então $p = \sum_{i=1}^n u_i p_j^i$ satisfaz as condições do lema.

Proposição 3.1.10. - Seja Γ um poliedro convexo. Uma face $(n-1)$ -dimensional Γ^{n-1} de Γ é uma face principal de Γ se e somente se Γ^{n-1} não está contida em um hiperplano coordenado.

Demonstração - Se Γ^{n-1} não está contida em um hiperplano coordenado, então existe $p \in \Gamma^{n-1}$ tal que $p_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ (Lema 3.1.1.). Seja H o hiperplano de suporte de Γ tal que $\Gamma^{n-1} = H \cap \Gamma$. Se Γ^{n-1} não é uma face principal, então a normal exterior λ de H tem as coordenadas $\lambda_i \leq 0$ $i=1, \dots, n$. Logo, se $(p, \lambda) = d$ é a equação de H , devemos ter $d < 0$. (Pois $\lambda_i \leq 0$ e $\alpha_i > 0$ para todo i e $\lambda_{i_0} < 0$ para algum $i_0 \in \{1, \dots, n\}$),

portanto $0 \notin \Gamma$. Isto contradiz o fato de estarmos considerando poliedros convexos Γ com $0 \in \Gamma$.

Por outro lado é evidente que se Γ^{n-1} está contido em um hiperplano coordenado, então Γ^{n-1} não é uma face principal.

Corolário 3.1.1. - Seja Γ um poliedro convexo completo. Uma face $(n-1)$ -dimensional Γ^{n-1} de Γ é uma face principal de Γ se e somente se $0 \notin \Gamma^{n-1}$.

Demonstração - Seja H o hiperplano de suporte de Γ tal que $\Gamma^{n-1} = H \cap \Gamma$. Se λ é a normal exterior de H , então existe $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ $\lambda_{j_0} > 0$.

Por outro lado, sendo Γ um poliedro completo, existe um vértice e de Γ tal que $e_{j_0} > 0$ e $e_j = 0$ para $j \neq j_0$. Logo, se $(\alpha, \lambda) = d$ é a equação de H , então

$$d \geq (\lambda, e) = \lambda_{j_0} e_{j_0} > 0.$$

Portanto $0 \notin \Gamma^{n-1}$. Isto prova a necessidade.

Para provar a suficiência, observemos que toda face $(n-1)$ -dimensional contida em um hiperplano coordenado contém 0 . Logo, se $0 \notin \Gamma^{n-1}$, então Γ^{n-1} não está contida em um hiperplano coordenado e pela Proposição 3.1.10 Γ^{n-1} é uma face principal de Γ . Isto termina a demonstração do corolário.

Corolário 3.1.2. - Seja Γ um poliedro convexo completo. Então: a) A face k -dimensional Γ^k de Γ é principal se e somente se $0 \notin \Gamma^k$.

b) O único vértice não principal de Γ é a origem de coordenadas.

c) O poliedro $\Gamma|_{\alpha_j=0} = \{\alpha \in \Gamma; \alpha_j=0\}$ é completo e to da face principal de $\Gamma|_{\alpha_j=0}$ é uma face principal de Γ .

d) Se Γ^k é uma face principal de Γ e H é um hiperplano de suporte de Γ tal que $\Gamma^k = \Gamma \cap H$, então a normal exterior λ de H tem pelo menos uma coordenada positiva.

Demonstração -

a) Segue da definição 3.1.10 e do Corolário 3.1.1.

b) Idem.

c) É claro que $\Gamma_{\alpha_j=0}$ é completo. A outra afirmação segue da parte a).

d) Suponhamos que existe um hiperplano de suporte H de Γ tal que $\Gamma^k = \Gamma \cap H$ e tal que a normal exterior λ de H tem as coordenadas $\lambda_i \leq 0$. Seja $(p, \lambda) = d$ a equação de H . Então $d \leq 0$ e como $0 \notin \Gamma^k$ (pois Γ^k é face principal), devemos ter $d < 0$. Portanto $0 \notin \Gamma$ o que contradiz o fato que $0 \in \Gamma$ (pois estamos considerando poliedros com $0 \in \Gamma$).

Proposição 3.1.11. - Seja Γ um poliedro convexo. As seguintes condições são equivalentes.

a) Γ é um poliedro convexo próprio.

b) $0 \leq q < p \in \Gamma$ implica $q \in \Gamma$

Demonstração - a) implica b). Demonstraremos que se H é um hiperplano de suporte de Γ com equação $(p, \lambda) = d$, então

$$(q, \lambda) \leq d \quad (3.1.1)$$

Será suficiente mostrar (3.1.1) para os hiperplanos H tais que $H \cap \Gamma$ é uma face $(n-1)$ -dimensional (pois o poliedro está comple-

tamente determinado por êsses hiperplanos).

Sejam $(\alpha, \lambda^j) = d_j$ $j = 1, \dots, N_{n-1}$ as equações dos hiperplanos de suporte H_j de Γ tal que $\Gamma_j^{n-1} = H_j \cap \Gamma$ é uma face $(n-1)$ -dimensional. Se a face Γ_j^{n-1} está contida em um hiperplano coordenado não temos nada a demonstrar ($q \geq 0$). Se Γ_j^{n-1} não está contida em um hiperplano coordenado, então pela Proposição 3.1.10. ela é face principal e por conseguinte própria. (Def. 3.1.10.b), logo a normal exterior λ^j de H_j tem as coordenadas $\lambda_i^j \geq 0$ $i=1, \dots, n$ e portanto

$$(q, \lambda^j) \leq (p, \lambda^j) \leq d_j$$

b) implica a). - Suponhamos que Γ não é um poliedro próprio. Então existe uma face principal $(n-1)$ -dimensional Γ^{n-1} de Γ tal que a normal exterior do hiperplano de suporte H de Γ tal que $\Gamma^{n-1} = \Gamma \cap H$ tem pelo menos uma coordenada $\lambda_{i_0} < 0$. Seja

$p = (p_1, \dots, p_n) \in \Gamma^{n-1}$ tal que $p_{i_0} > 0$ (lembrar que Γ^{n-1} é uma face principal e portanto não está contida em um hiperplano coordenado). Seja $q \in \mathbb{R}_+^n$ definido por $q_i = p_i$ $i \neq i_0$ e $q_{i_0} = p_{i_0} - \frac{1}{2} p_{i_0}$. Evidentemente $0 < q < p$. Mas

$$(q, \lambda) = (p, \lambda) - \frac{1}{2} p_{i_0} \lambda_{i_0} > d$$

onde $(p, \lambda) = d$ é a equação de H . Isto contradiz a hipótese e prova a proposição.

Corolário 3.1.3. - Seja Γ um poliedro convexo próprio de dimensão n . Então:

a) Γ é completo.

b) Se Γ^k é uma face principal de Γ não contida em um hi-

perplano coordenado e H é um hiperplano de suporte de Γ tal que $\Gamma^k = H \cap \Gamma$, então a normal exterior λ de H tem as coordenadas $\lambda_i \geq 0$.

Demonstração -

a) Se Γ é um poliedro próprio n -dimensional, então existe $p \in \Gamma$ tal que $p_i > 0$ $i = 1, \dots, n$. Logo, $p^i = (0, \dots, p_i, \dots, 0) \in \Gamma$ $i = 1, \dots, n$ e portanto Γ é completo.

b) semelhante à demonstração da Proposição 3.1.11. b) implica a).

A seguir consideraremos poliedros gerados por um conjunto finito de pontos $A \subset \mathbb{N}^n$ e tal que $0 \in A$. Antes introduziremos algumas notações.

Para cada $\alpha \in A$, denotemos por $D\alpha$ o conjunto

$$D\alpha = \{\beta \in \mathbb{N}^n ; 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad i = 1, \dots, n\},$$

por DA o conjunto

$$DA = \bigcup_{\alpha \in A} D\alpha$$

e por $\Gamma(A)$ e $\tilde{\Gamma}(A)$ os poliedros convexos gerados por A e DA respectivamente.

É claro que se A não está contido em um hiperplano coordenado, o poliedro $\tilde{\Gamma}(A)$ é próprio (Prop. 3.1.11) e portanto completo (Corolário 3.1.3.a)).

Proposição 3.1.12. - Com as notações anteriores temos

- a) $\Gamma(A) \subset \tilde{\Gamma}(A)$
- b) $\tilde{\Gamma}(A)$ é o menor poliedro convexo próprio que contém $\Gamma(A)$
- b') Se $\Gamma(A)$ é próprio, então $\Gamma(A) \equiv \tilde{\Gamma}(A)$
- c) As faces completamente próprias de $\Gamma(A)$ e $\tilde{\Gamma}(A)$ coincidem.

a) É evidente.

b) Seja $\bar{\Gamma}$ um poliedro convexo próprio tal que $\bar{\Gamma} \supset A$. Mostraremos que $\tilde{\Gamma}(A) \subset \bar{\Gamma}$. Para isto, será suficiente mostrar que se $\beta \in DA$, então $\beta \in \bar{\Gamma}$. Mas isto é evidente.

b') Segue de a) e b).

c) Seja Γ_i^k uma face completamente própria de $\Gamma(A)$. Então existe um hiperplano de suporte H de $\Gamma(A)$ tal que $\Gamma_i^k = \Gamma(A) \cap H$ e tal que a normal exterior λ de H tem as coordenadas $\lambda_i > 0$ $i = 1, \dots, n$. Seja $(p, \lambda) = d$ a equação de H . Mostraremos que $\Gamma_i^k = H \cap \tilde{\Gamma}(A)$. Como $\Gamma_i^k \subset H \cap \tilde{\Gamma}(A)$, será suficiente mostrar que $H \cap \tilde{\Gamma}(A) \subset \Gamma_i^k$. Para isto, basta mostrar que se $\beta \in H \cap DA$, então $\beta \in A$ e portanto $\beta \in \Gamma_i^k$. Se $\beta \notin A$ então existe $\alpha \in A$ tal que $\beta < \alpha$. Logo, $(\beta, \lambda) < (\alpha, \lambda) \leq d$ ($\lambda_i > 0$) e portanto $\beta \notin H$. Isto contradiz o fato de que $\beta \in H$, logo, $\beta \in A$.

Seja agora $\tilde{\Gamma}_i^k$ uma face completamente própria de $\tilde{\Gamma}(A)$. Então existe um hiperplano de suporte $\tilde{H}$ de $\tilde{\Gamma}(A)$ tal que $\tilde{\Gamma}_i^k = \tilde{H} \cap \tilde{\Gamma}(A)$ e tal que a normal exterior $\tilde{\lambda}$ de $\tilde{H}$ tem as coordenadas $\tilde{\lambda}_i > 0$ $i = 1, \dots, n$. Seja $(p, \tilde{\lambda}) = d$ a equação de $\tilde{H}$. Demonstraremos que $\tilde{\Gamma}_i^k = \tilde{H} \cap \Gamma(A)$. É claro que $\tilde{H} \cap \Gamma(A) \subset \tilde{\Gamma}_i^k$. Para mostrar a outra inclusão, será suficiente mostrar que se $\beta \in \tilde{\Gamma}_i^k \cap DA$, então $\beta \in A$. Se $\beta \notin A$, então existe $\alpha \in A$ tal que $\beta < \alpha$. Logo, $d = (\beta, \tilde{\lambda}) < (\alpha, \tilde{\lambda})$ e portanto $\alpha \notin \tilde{\Gamma}(A)$. Isto é uma contradição, pois $\alpha \in A \subset \tilde{\Gamma}(A)$.

Lema 3.1.2 - Seja $\Gamma(A)$ um poliedro convexo próprio gerado por um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}^n$. Então $\forall$ toda face completamente

própria Γ_i^k do poliedro

$$\Gamma(A) \Big|_{\alpha_n = 0} = \{\alpha \in \Gamma(A) ; \alpha_n = 0\} ,$$

existem uma face completamente própria $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ de $\Gamma(A)$ é um multi índice $\bar{\mu} \in \mathbb{N}^n$ tal que:

$$i) \Gamma_{i_1}^{k_1} - \bar{\mu} \subset \Gamma_i^k$$

$$ii) \text{ Se } \beta \in \Gamma(A) \setminus \Gamma_{i_1}^{k_1}, \text{ então } \beta - \bar{\mu} \notin \Gamma_i^k$$

$$iii) \text{ Se existe } \alpha \in \Gamma_{i_1}^{k_1} \text{ tal que } \alpha_i > 0, \text{ então } \bar{\mu}_i = 0.$$

Demonstração - Se Γ_i^k é uma face completamente própria de $\Gamma(A)$, tomamos $\Gamma_{i_1}^{k_1} = \Gamma_i^k$ e $\bar{\mu} = (0, \dots, 0)$.

Suponhamos que Γ_i^k não é uma face completamente própria de Γ . Seja H' um hiperplano de suporte do poliedro $\Gamma(A) \Big|_{\alpha_n = 0}$

(H' é um hiperplano em $\mathbb{R}^{n-1}$) tal que $H' \cap \Gamma(A) \Big|_{\alpha_n = 0} = \Gamma_i^k$ e tal

que a normal exterior λ' de H' tenha as coordenadas $\lambda_i > 0$

$i=1, \dots, n-1$ e seja $(p, \lambda') = d$ a equação de H' . Consideremos

$\lambda^0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$, onde λ_i $i = 1, \dots, n-1$ são as coordenadas de λ' e seja H^0 o hiperplano de $\mathbb{R}^n$ com equação $(p, \lambda^0) = d$.

Então $\Gamma(A) \cap H^0 \neq \emptyset$ (pois $\Gamma_i^k \subset H^0$) e H^0 é um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$.

(pois $\Gamma(A)$ é próprio). Logo, $\Gamma_j^l = H^0 \cap \Gamma(A)$ é uma face de $\Gamma(A)$ e $\Gamma_j^l \supset \Gamma_i^k$.

Mostraremos que $\Gamma_i^k \neq \Gamma_j^l$. Para isto, observemos primeiro que se $\beta \in \Gamma_j^l \cap \mathbb{N}^n$, então existem $\alpha \in \Gamma_i^k$ e $\mu \in \mathbb{N}^n$ tais que

$$\beta = \alpha + \mu \quad \text{onde } \mu = (0, \dots, 0, \mu_n). \quad (3.1.2)$$

Pois sendo $\Gamma(A)$ um poliedro próprio, $\alpha = \beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 0) \in \Gamma(A)$.

Além disso $\beta' \in \Gamma(A) \Big|_{\alpha_n = 0}$ e $(\beta', \lambda') = (\beta, \lambda^0) = d$. Portanto

$\beta' \in H'$ donde $\beta' \in H' \cap \Gamma(A) \Big|_{\alpha_n = 0} = \Gamma_i^k$. Logo α e $\mu = (0, \dots, 0, \beta_n)$

satisfazem (3.1.2).

Veremos que existe

$$\beta \in \Gamma_j^l \cap \mathbb{N}^n, \quad \beta_n > 0 \quad (3.1.3)$$

Suponhamos que (3.1.3) não é verdade. Então $\Gamma_j^l = \Gamma_i^k$ e portanto, se $\beta \in \Gamma(A) \cap \mathbb{N}^n$ e $\beta_n > 0$, temos

$$\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 0) \notin \Gamma_i^k \quad (3.1.4)$$

Seja $\bar{d} = \max(\alpha, \lambda^0)$; $\alpha \in \Gamma(A) \cap \mathbb{N}^n \setminus \Gamma_i^k$. Então $\bar{d} < d$ e portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\bar{d} + \delta < d \quad (3.1.5)$$

Seja $d_1 = \max \alpha_n$; $\alpha \in \Gamma(A) \cap \mathbb{N}^n$ e seja

$$\lambda^\sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \sigma) \quad , \quad 0 < \sigma < \frac{\delta}{d_1} \quad (3.1.6)$$

onde λ_i $i = 1, \dots, n-1$ são as coordenadas de λ' .

Mostraremos que o hiperplano H^σ com equação $(p, \lambda^\sigma) = d$, é um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$ e que $\Gamma_i^k = H^\sigma \cap \Gamma(A)$. Logo,

Γ_i^k será uma face completamente própria de $\Gamma(A)$. Isto contradiz o fato que Γ_i^k não é uma face completamente própria. Logo, devemos ter $\Gamma_i^k \neq \Gamma_j^l$.

Mostraremos primeiro que H^σ é um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$. Para isto, será suficiente mostrar que $(\alpha, \lambda^\sigma) \leq d$ para todo $\alpha \in A$.

Se $\alpha \in A$, então $\alpha \in \Gamma_i^k$ ou $\alpha \in A \setminus \Gamma_i^k$. No primeiro caso,

$$(\alpha, \lambda^\sigma) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \lambda_j + 0 \cdot \sigma = d \quad (3.1.7)$$

No segundo caso, segue de (3.1.4), (3.1.5) e (3.1.6) que

$$(\alpha, \lambda^\sigma) \leq \bar{d} + \delta < d.$$

Logo, $(\alpha, \lambda^\sigma) \leq d$ para todo $\alpha \in A$ e portanto H^σ é um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$.

Mostraremos agora que $\Gamma_i^k = H^\sigma \cap \Gamma(A)$. Será suficiente mostrar que $H^\sigma \cap \Gamma(A) \subset \Gamma_i^k$ (pois a outra inclusão segue de (3.1.7) e para isto, será suficiente mostrar que $H^\sigma \cap A \subset \Gamma_i^k$).

Seja $\beta \in H^\sigma \cap A$ e suponhamos que $\beta \notin \Gamma_i^k$, então por (3.1.5) e (3.1.6) temos $(\beta, \lambda^\sigma) \leq \bar{d} + \delta < d$ e portanto $\beta \notin H^\sigma$. Isto contradiz o fato de que $\beta \in H^\sigma \cap A$.

Seja $\beta^0 \in \Gamma_j^l \cap N^n$ tal que $\beta_n^0 \geq \beta_n$ para todo $\beta \in \Gamma_j^l \cap N^n$

e consideremos

$$\Gamma_{i_1}^{k_1} = (\Gamma_i^k + \bar{\mu}) \cap \Gamma(A)$$

onde $\bar{\mu} = (0, \dots, 0, \beta_n^0)$.

Observemos que $\Gamma_{i_1}^{k_1} \subset \Gamma_j^z$, pois se $\beta \in \Gamma_{i_1}^{k_1}$, então $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \bar{\mu}_n)$ com $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 0) \in \Gamma_i^k$, donde $(\beta, \lambda^0) = (\beta', \lambda') = d$ e portanto $\beta \in H^0 \cap \Gamma(A) = \Gamma_j^z$.

Sejam λ^σ como em (3.1.6) e $d_2 = d + \sigma \bar{\mu}_n$. Seja H o hiperplano com equação $(p, \lambda^\sigma) = d_2$.

Veremos que H é um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$ tal que $H \cap \Gamma(A) = \Gamma_{i_1}^{k_1}$.

Para mostrar que H é um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$, será suficiente mostrar que $(\alpha, \lambda) \leq d_2$ para todo $\alpha \in A$.

Seja $\alpha \in A$. Então $\alpha \in \Gamma_{i_1}^{k_1}$ ou $\alpha \in A \setminus \Gamma_{i_1}^{k_1}$. Se $\alpha \in \Gamma_{i_1}^{k_1}$, então $\alpha = \alpha' + \bar{\mu}$, com $\alpha' \in \Gamma_i^k$, donde $(\alpha, \lambda^\sigma) = (\alpha', \lambda') + \beta_n \sigma = d + \bar{\mu}_n \sigma = d_2$.

Se $\alpha \in A \setminus \Gamma_i^k$, então $\alpha \in \Gamma_j^z$ ou $\alpha \notin \Gamma_j^z$. No primeiro caso, $\alpha_n < \bar{\mu}_n$ e $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \in \Gamma_i^k$, logo

$$(\alpha, \lambda^\sigma) = d + \alpha_n \sigma < d + \bar{\mu}_n \sigma = d_2.$$

Se $\alpha \in A \setminus \Gamma_j^z$, então $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \notin \Gamma_i^k$ e portanto, segue de (3.1.5) e (3.1.6) que $(\alpha, \lambda^\sigma) < d \leq d_2$. Logo, H é um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$.

Por outro lado é claro que $\Gamma_{i_1}^{k_1} \subset H^\sigma \cap \Gamma(A)$. Portanto, somente falta mostrar que $H^\sigma \cap \Gamma(A) \subset \Gamma_{i_1}^{k_1}$. Será suficiente mostrar que $H^\sigma \cap A \subset \Gamma_i^k$.

Seja $\alpha \in H^\sigma \cap A$. Se $\alpha \notin \Gamma_{i_1}^{k_1}$ então $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \notin \Gamma_i^k$ ou $\alpha_n < \bar{\mu}_n$, em qualquer dos dois casos, pode-se mostrar sem dificuldade que $\alpha \notin H^\sigma$. Esta contradição mostra que $\Gamma_{i_1}^{k_1} \supset H^\sigma \cap \Gamma(A)$ e portanto $\Gamma_{i_1}^{k_1} = H^\sigma \cap \Gamma(A)$. Logo, $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ é uma face completamente própria de $\Gamma(A)$.

Finalmente, observa-se sem dificuldade que $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ e $\bar{\mu}$ satisfazem as condições i, ii e iii do lema.

Proposição 3.1.13. - Seja $\Gamma(A)$ um poliedro convexo próprio gerado por um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}^n$. Então para toda face principal Γ_i^k de $\Gamma(A)$, existem uma face completamente própria $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ de $\Gamma(A)$ e um multiíndice $\bar{\mu} \in \mathbb{N}^n$ satisfazendo as condições i, ii e iii do Lema 3.1.2.

Demonstração - Faremos a demonstração por indução na dimensão do poliedro $\Gamma(A)$.

Se $\dim \Gamma(A) = 1$, não temos nada a demonstrar. Suponhamos a proposição verdadeira para $\Gamma(A)$ de dimensão $\leq n-1$ e demonstremos para $\Gamma(A)$ de dimensão n .

Seja Γ_i^k uma face principal de $\Gamma(A)$. Se Γ_i^k é uma face completamente própria de $\Gamma(A)$, nossa demonstração termina. Se Γ_i^k não é uma face completamente própria, então temos as seguintes possibilidades.

- a) Γ_i^k está contida em algum hiperplano coordenado.
 b) Γ_i^k não está contida em nenhum hiperplano coordenado.

a) Suponhamos que Γ_i^k está contida no hiperplano

$$H_n = \{p \in \mathbb{R}^n; p_n = 0\}.$$

Então pela Proposição 3.1.8. Γ_i^k é uma face do poliedro $\Gamma(A)|_{\alpha_n = 0}$. Segue da Proposição 3.1.11 que $\Gamma(A)|_{\alpha_n = 0}$ é um poliedro próprio e pelo Corolário 3.1.2 a) Γ_i^k é uma face principal de $\Gamma(A)|_{\alpha_n = 0}$. Logo, pela hipótese de indução, existe uma face completamente própria $\Gamma_{i'}^{k'}$ de $\Gamma(A)|_{\alpha_n = 0}$ e um multiíndice $\bar{\mu}' \in \mathbb{N}^{n-1}$ satisfazendo as condições i), ii) e iii) do Lema 3.1.2.

Por outro lado, pelo Lema 3.1.2 existe uma face completamente própria $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ de $\Gamma(A)$, um multiíndice $\bar{\mu}'' = (0, \dots, \bar{\mu}_n)$ satisfazendo as condições i), ii) e iii) do Lema 3.1.2.

Seja $\bar{\mu} = (\mu_1', \dots, \mu_{n-1}', \bar{\mu}_n)$. Observa-se sem dificuldade que a face $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ de $\Gamma(A)$ e o multiíndice $\bar{\mu} \in \mathbb{N}^n$ satisfazem as condições i), ii) e iii) do Lema 3.1.2.

b) Seja agora uma face principal Γ_i^k não contida em um hiperplano coordenado e não completamente própria. Seja H um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$ tal que $\Gamma_i^k = H \cap \Gamma(A)$ e com normal exterior λ . Então pelo Corolário 3.1.3. b) $\lambda_i \geq 0$ $i = 1, \dots, n$. Seja

$$S = \{ i \in \{1, \dots, n\} ; \lambda_i = 0 \}$$

É evidente que $S \neq \emptyset$ (pois Γ_i^k não é uma face completamente própria). Seja

$$\Gamma_{i_0}^{k_0} = \{ \alpha \in \Gamma_i^k ; \alpha_i = 0, i \in S \} = \bigcap_{i \in S} (H^i \cap \Gamma_i^k)$$

onde H^i são os hiperplanos $H^i = \{ p \in \mathbb{R}^n, p_i = 0 \}, i \in S$. É claro que $\Gamma_{i_0}^{k_0}$ é uma face de $\Gamma(A)$ e que $\Gamma_{i_0}^{k_0}$ está contido em um hiper-

plano coordenado. Logo, pela parte a), existem uma face completamente própria $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ de $\Gamma(A)$ é um multiíndice $\bar{\mu} \in \mathbb{N}^n$ tal que

$$a) \Gamma_{i_1}^{k_1} - \bar{\mu} \subset \Gamma_{i_0}^{k_0} \subset \Gamma_i^k$$

$$b) \text{ Se } \alpha \in \Gamma(A) \mid \Gamma_{i_1}^{k_1}, \text{ então } \alpha - \bar{\mu} \notin \Gamma_{i_0}^{k_0} \quad (3.1.7)$$

$$c) \text{ Se existe } \alpha \in \Gamma_{i_1}^{k_1} - \bar{\mu} \text{ tal que } \alpha_i > 0, \text{ então } \bar{\mu}_i = 0$$

Mostraremos que $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ é uma face de Γ_i^k . Sejam $(P, \lambda) = d$

a equação de H e $\beta \in \Gamma_{i_1}^{k_1}$. Então $\beta = \alpha + \bar{\mu}$ com $\alpha \in \Gamma_{i_0}^{k_0} \subset \Gamma_i^k$.

Portanto

$$d \geq (\beta, \lambda) = (\alpha, \lambda) + (\bar{\mu}, \lambda) = d + (\bar{\mu}, \lambda). \quad (3.1.8)$$

Observamos de (3.1.8), que $(\bar{\mu}, \lambda) = 0$, (pois $\lambda_i \geq 0, \bar{\mu}_i \geq 0$),

que $\bar{\mu}_i = 0$ para todo $i \notin S$ e que $\beta \in H \cap \Gamma(A) = \Gamma_i^k$. Logo,

$\Gamma_{i_1}^{k_1} \subset \Gamma_i^k$ e portanto $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ é uma face de Γ_i^k (Prop. 3.1.8).

De (3.1.7) a) segue que $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ e $\bar{\mu}$ satisfazem a condição i)

do Lema 3.1.2.

Observemos agora que se $\beta \in \Gamma_i^k \setminus \Gamma_{i_1}^{k_1}$, então existe $i \in S$ tal que $\beta_i < \bar{\mu}_i$ pois em caso contrário teríamos que $\beta \geq \beta'$. Onde β' é definido por $\beta'_i = \beta_i$ se $i \notin S$ e $\beta'_i = \bar{\mu}_i$ se $i \in S$. É claro que $\beta' \in \Gamma_{i_1}^{k_1}$. Logo, se H é um hiperplano de suporte de $\Gamma(A)$ tal ' que $\Gamma_{i_1}^{k_1} = H \cap \Gamma(A)$ e a normal exterior λ de H tem as coordenadas $\lambda_i > 0$ teríamos

$$d \geq (\beta, \lambda) \geq (\beta', \lambda) = d$$

onde $(P, \lambda) = d$ é a equação de H . Logo teríamos $\beta \in \Gamma_{i_1}^{k_1}$ contradizendo o fato de que $\beta \notin \Gamma_{i_1}^{k_1}$.

Seja $\beta \in \Gamma(A) \setminus \Gamma_{i_1}^{k_1}$. Então $\beta \in \Gamma_i^k$ ou $\beta \notin \Gamma_i^k$. Se

$\beta \in \Gamma_i^k$, então pela observação acima $\beta - \bar{\mu} \notin \Gamma_i^k$. Se $\beta \notin \Gamma_i^k$, então $\tilde{\beta} \notin \Gamma_{i_0}^{k_0}$ (onde $\tilde{\beta}$ é tal que $\tilde{\beta}_i = \beta_i$ $i \notin S$ e $\tilde{\beta}_i = 0$ $i \in S$). Logo, $\beta - \bar{\mu} = \tilde{\beta} + \alpha \notin \Gamma_i^k$, onde $\alpha_i = 0$ $i \notin S$ e $\alpha_i = \beta_i - \bar{\mu}_i$ se $i \in S$. Isto prova que se $\beta \in \Gamma(A) \setminus \Gamma_{i_1}^{k_1}$, então $\beta - \bar{\mu} \notin \Gamma_i^k$ e portanto ii).

Finalmente, a condição iii) segue de (3.1.7) c).

Definição 3.1.12. - Seja Γ um poliedro convexo. Um ponto $\alpha \in \Gamma$ diz-se completamente próprio se e somente se α pertence a alguma face completamente própria.

Seja $\Gamma(A)$ um poliedro convexo gerado por um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}^n$. Denotemos por A' o conjunto dos pontos completamente próprio de $\Gamma(A)$.

As seguintes duas proposições são verdadeiras. Não daremos aqui a demonstração, pois não serão usados no que segue.

Proposição 3.1.14 - Seja $\Gamma(A)$ um poliedro convexo próprio gerado por um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}^n$. Então uma face Γ_i^k de $\Gamma(A)$ é uma face completamente própria se e somente se todo ponto de $\Gamma_i^k \cap \mathbb{N}^n$ é completamente próprio.

Proposição 3.1.15 - Os poliedros convexos $\tilde{\Gamma}(A)$ e $\tilde{\Gamma}(A')$ são iguais.

§.3.2. - Poliedro convexo associado a um polinômio e a uma família de polinômios.

Dado um polinômio com coeficientes constantes

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha, \text{ seja}$$

$$\Gamma_p = \{\alpha \in \mathbb{N}^n ; a_\alpha \neq 0\}$$

Denotemos por $\Gamma(P)$ o poliedro convexo gerado por $\Gamma_p \cup \{0\}$.

Definição 3.2.1. - O poliedro convexo $\Gamma(P)$, chama-se o poliedro característico do polinômio $P(\xi)$.

Seja $P(\xi)$ um polinômio com poliedro característico $\Gamma(P)$.

Para cada face Γ_i^k de $\Gamma(P)$ $k=0, \dots, n-1, i=1, \dots, N_k$, definimos o

polinômio

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Gamma_i^k} a_\alpha \xi^\alpha \quad (3.2.1)$$

Definição 3.2.2 - O polinômio $P(\xi)$ diz-se λ -homogêneo de grau d , se e somente se para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos

$$P(t^\lambda \xi) = t^d P(\xi)$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $t^\lambda \xi = (t^{\lambda_1} \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \xi_n)$.

Proposição 3.2.1. ([6], Lema 1.4.) - O polinômio (3.2.1) é λ -homogêneo. Para todo λ normal exterior de um hiperplano de suporte H de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k = H \cap \Gamma(P)$.

Demonstração - Seja $(\lambda, p) = d$ a equação de H . Substituindo em (3.1.2) ξ por $t^\lambda \xi$ temos

$$P^{i,k}(t^\lambda \xi) = \sum_{\alpha \in \Gamma_i^k} a_\alpha (t^\lambda \xi)^\alpha = \sum_{\alpha \in \Gamma_i^k} t^{(\alpha, \lambda)} a_\alpha \xi^\alpha = t^d P^{i,k}(\xi)$$

Isto prova o lema.

Lema 3.2.1. - Sejam $a_1, \dots, a_p$ números reais positivos e $\mu_1, \dots, \mu_p$ números reais tais que $\mu_i \geq 0$ $i = 1, \dots, p$ e $\sum_{j=1}^p \mu_j = 1$.

Então

$$\prod_{j=1}^p a_j^{\mu_j} \leq \sum_{j=1}^p \mu_j a_j$$

Demonstração - Por indução em p . Para $p = 2$, consideremos a função $g(x) = x^s - sx$, $0 < x < \infty$, $0 \leq s \leq 1$. A função $g(x)$ tem máximo no ponto $x = 1$. Portanto, para todo $x \in (0, \infty)$ $g(x) \leq g(1) = 1 - s$.

Fazendo $x = \frac{a_1}{a_2}$, $s = \mu_1$ e $1 - s = \mu_2$ temos

$$\frac{\mu_1}{a_1} \frac{\mu_2}{a_2} \leq \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 \quad (3.2.2)$$

Suponhamos o lema verdadeiro para todo número natural $\leq p - 1$ e demonstremos para p . Observemos que

$$\prod_{j=1}^p \frac{\mu_j}{a_j} = \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{\mu_j}{a_j} \right) \frac{\mu_p}{a_p} = \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{v_j}{a_j} \right)^{1-\mu_p} \frac{\mu_p}{a_p} \quad (3.2.3)$$

onde $v_j = \mu_j / (1 - \mu_p)$ $j = 1, \dots, p-1$. É claro que $\sum_{j=1}^{p-1} v_j = 1$ e $v_j \geq 0$,

logo pela hipótese de indução temos

$$\prod_{j=1}^{p-1} \frac{v_j}{a_j} \leq \sum_{j=1}^{p-1} v_j a_j \quad (3.2.4.)$$

de (3.2.2), (3.2.3) e (3.2.4) temos

$$\prod_{j=1}^p \frac{\mu_j}{a_j} \leq \sum_{j=1}^p \mu_j a_j \dots$$

Proposição 3.2.2 - ([8] Lema 4). Seja $P(\xi)$ um polinômio com poliedro característico $\Gamma(P)$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|P(\xi)| \leq C \sum_{j=0}^{N_0} |\xi^{e^j}| = C B(\xi) \quad (3.2.5)$$

onde e^j $j=0, \dots, N_0$ são os vértices de $\Gamma(P)$.

Demonstração - Será suficiente demonstrar que para todo $\alpha \in \Gamma(P)$.

$$|\xi^\alpha| \leq C_\alpha B(\xi)$$

Pois

$$|P(\xi)| \leq \sum |a_\alpha| |\xi^\alpha| \leq \sum |a_\alpha| C_\alpha^B(\xi) \leq C^B(\xi)$$

onde $C = \sum_{\alpha \in \Gamma(A)} C_\alpha |a_\alpha|$.

Pela Proposição 3.1.9 a), existem $\mu_1, \dots, \mu_{N_0} \in \mathbb{R}$ tais que $\mu_i \geq 0$ $i = 1, \dots, N_0$, $\sum_{j=1}^{N_0} \mu_j = 1$ e tal que

$$\alpha = \sum_{j=0}^{N_0} \mu_j e^j.$$

Logo, do Lema 3.2.1. temos

$$|\xi^\alpha| = \prod_{j=0}^{N_0} |\xi^{e^j}|^{\mu_j} \leq \sum_{j=0}^{N_0} \mu_j |\xi^{e^j}| \leq B(\xi)$$

Isto prova a proposição.

Consideremos agora uma família de polinômios

$$P = \{ P_j(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_\alpha^j \xi^\alpha \quad j=1, \dots, N \} \quad (3.2.6)$$

Sejam Γ_{P_j} os conjuntos

$$\Gamma_{P_j} = \{ \alpha \in \mathbb{N}^n ; a_\alpha^j \neq 0 \} \quad j=1, \dots, N$$

Denotemos por $\Gamma(P)$ o poliedro convexo por $(\bigcup_{j=1}^N \Gamma_{P_j}) \cup \{0\}$

Dada a família de polinômios (3.2.6) consideremos o polinômio

$$P(\xi) = \sum_{j=1}^N |P_j(\xi)|^2 = \sum_{\beta \geq 0} b_\beta \xi^\beta \quad (3.2.7)$$

A seguinte proposição relaciona os poliedros característicos $\Gamma(P)$ e $\Gamma(P)$.

Proposição 3.2.3. - ([6] - Lema 4.2) a) O poliedro $\Gamma(P)$ é semelhante ao poliedro $\Gamma(P)$ com fator de semelhança 2 e centro de semelhança a origem de coordenadas (i.ê., $\Gamma(P) = 2 \Gamma(P) = \Gamma(P) + \Gamma(P)$).

b) Se $\alpha = \beta^1 + \beta^2$ com $\beta^1, \beta^2 \in \Gamma(P)$, então $\alpha \in \Gamma_i^k(P)$ se e somente se $\beta^1, \beta^2 \in \Gamma_i^k(P)$.

$$c) P^{jk}(\xi) = \sum_{j=1}^N |P_j^{jk}(\xi)|^2$$

Demonstração - a) Suponhamos primeiro que $N = 1$. Demonstraremos então, que $\Gamma(|P_1|^2) = 2\Gamma(P_1)$.

Por definição, $\Gamma(|P_1|^2) = \{ \beta \in \mathbb{N}^n; b_\beta \neq 0 \}$.

Observemos que

$$|P_1(\xi)|^2 = \left(\sum a_\alpha \xi^\alpha \right) \left(\sum \bar{a}_\alpha \xi^\alpha \right) = \sum_{\alpha, \gamma \in \Gamma_{P_1}} a_\alpha \bar{a}_\gamma \xi^{\alpha+\gamma}$$

Logo, para todo $\beta \in \Gamma_{|P_1|^2}$ existem α e $\gamma \in \Gamma_{P_1}$ tais que

$$\beta = \alpha + \gamma.$$

Demonstraremos que $2\Gamma(P_1) \subset \Gamma(|P_1|^2)$. Para isto, será suficiente demonstrar que todo vértice de $2\Gamma(P_1)$ pertence a $\Gamma(|P_1|^2)$. Seja $2e^i$ um vértice de $2\Gamma(P_1)$. Então e^i é um vértice de $\Gamma(P_1)$ e $e^i \in \Gamma_{P_1}$, portanto $a_{e^i} \neq 0$.

Por outro lado, observamos que

$$|P_1(\xi)|^2 = |a_{e^i}|^2 \xi^{2e^i} + \sum_{\alpha, \gamma \in \Gamma_{P_1}} a_\alpha \bar{a}_\gamma \xi^{\alpha+\gamma}; \gamma \neq e^i \text{ ou } \alpha \neq e^i$$

Logo, $b_{2e^i} = |a_{e^i}|^2 \neq 0$ e portanto $2e^i \in \Gamma_{|P_1|^2}$. Isto prova que $2\Gamma(P_1) \subset \Gamma(|P_1|^2)$.

Demonstraremos a outra inclusão por contradição. Suponha mos que existe $\alpha^0 \in \Gamma(|P_1|^2)$ tal que $\alpha^0 \notin 2\Gamma(P_1)$. Então pela Proposição 3.1.1 a) existe um hiperplano H que separa $2\Gamma(P_1)$ e α^0 , isto é, se $(P, \lambda) = d$ é a equação de H , então $(\alpha, \lambda) \leq d$ para todo $\alpha \in 2\Gamma(P_1)$ e $(\alpha^0, \lambda) > d$. Se $\beta \in \Gamma(P_1)$, então $2\beta \in 2\Gamma(P_1)$ e portanto $(\beta, \lambda) \leq \frac{d}{2}$, logo, não existe $\alpha, \gamma \in \Gamma(P_1)$ tal que $\alpha^0 = \alpha + \gamma$ (caso contrário teríamos $(\alpha^0, \lambda) \leq d$). Isto é uma contradição, pois observa-se sem dificuldade que para todo $\alpha^0 \in \Gamma(|P_1|^2)$ existem α e $\gamma \in \Gamma(P_1)$ tais que $\alpha^0 = \alpha + \gamma$. (Pois isto vale para $\beta \in \Gamma_{|P_1|^2}$ e $\Gamma(|P_1|^2) = \text{conv } \Gamma_{|P_1|^2}$).

Seja agora $N > 1$. Como no caso $N = 1$, $\Gamma(P) = \text{conv } \Gamma_P = \{\beta \in \mathbb{N}^n, b_\beta \neq 0\}$. Observamos também, que se $\beta \in \Gamma_P$, então existem $1 \leq j_0 \leq N$ e $\alpha, \gamma \in \Gamma_{P_{j_0}}$ tais que $\beta = \alpha + \gamma$, portanto $\beta \in \Gamma(P_{j_0}) + \Gamma(P_{j_0}) = 2\Gamma(P_{j_0}) = \Gamma(|P_{j_0}|^2) \subset 2\Gamma(P)$. Isto mostra que $\Gamma_P \subset 2\Gamma(P)$ e portanto $\Gamma(P) = \text{conv } \Gamma_P \subset 2\Gamma(P)$.

Para mostrar a outra inclusão, procederemos como no caso $N = 1$, observando que se $2e^i$ é um vértice de $2\Gamma(P)$, então exis

te $1 \leq j \leq N$ tal que $a_{e_i}^j \neq 0$ e que $b_{2e_i} = \sum_{j=1}^N |a_{e_i}^j|^2 \neq 0$. Logo, todo vértice de $2\Gamma(P)$ pertence a $\Gamma(P)$ e por conseguinte $2\Gamma(P) \subset \Gamma(P)$.

b) Seja $\alpha = \beta^1 + \beta^2$ com β^1 e $\beta^2 \in \Gamma(P)$ e suponhamos que $\beta^1, \beta^2 \in \Gamma_i^k(P)$. Então, $\alpha = \beta^1 + \beta^2 = 2\left(\frac{\beta^1 + \beta^2}{2}\right) \in 2\Gamma_i^k(P) = \Gamma_i^k(P)$.

Para mostrar a outra implicação, observemos que se $\alpha \in \Gamma_i^k(P)$ e H é um hiperplano de suporte de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k(P) = H \cap \Gamma(P)$ e com equação $(p, \lambda) = 2d$, então pela parte a) $(\lambda, p) = d$ é a equação de um hiperplano de suporte H' de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k(P) = H' \cap \Gamma(P)$. Se $\beta^1 \notin \Gamma_i^k(P)$, então $(\beta^1, \lambda) < d$ donde

$$(\alpha, \lambda) = (\beta^1 + \beta^2, \lambda) = (\beta^1, \lambda) + (\beta^2, \lambda) < d + d = 2d$$

Logo, $\alpha \notin \Gamma_i^k(P)$. Isto contradiz nossa hipótese.

c) Segue de b).

§.3.3 - Polinômios regulares não negativos

Definição 3.1.1. a) Seja $P(\xi)$ um polinômio com poliedro característico $\Gamma(P)$. Uma face Γ_i^k de $\Gamma(P)$ diz-se P -regular se e somente se

$$P^{i,k}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in R^n \quad \xi_i \neq 0 \quad i=1, \dots, n$$

b) Dizemos que um polinômio $P(\xi)$ é regular se e somente se toda face principal de $\Gamma(P)$ é P -regular.

No que segue, salvo menção em contrário, consideraremos polinômios $P(\xi)$ com coeficientes reais e tal que $P(\xi) \geq 0$ para todo $\xi \in R^n$.

Proposição 3.3.1. ([6] Lema 2.2) Seja Γ_i^k $i=1, \dots, N_k$, $k = 0, \dots, n-1$ uma face principal do poliedro característico $\Gamma(P)$ de um polinômio regular e não negativo $P(\xi)$. Então

$$P^{i,k}(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \xi_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Demonstração - Suponhamos que existe $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi_i^0 \neq 0$ $i = 1, \dots, n$ e tal que $P^{i,k}(\xi^0) < 0$ ($P^{i,k}(\xi^0) \neq 0$ pois P é regular). Seja λ a normal exterior de um hiperplano de suporte H de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k = \Gamma(P) \cap H$ e seja $(p, \lambda) = d$ a equação de H . Então para todo $\beta \in \Gamma(P) \setminus \Gamma_i^k$ temos $(\beta, \lambda) < d$.

Consideremos a curva $\xi_i(t) = \xi_i^0 t^{\lambda_i}$ $i=1, \dots, n$ $t > 0$. Como $P^{i,k}(\xi)$ é λ -homogeneo, então

$$\begin{aligned} P(\xi(t)) &= \sum_{\alpha \in \Gamma_i^k} a_\alpha (\xi^0)^\alpha t^{(\alpha, \lambda)} + \sum_{\beta \in \Gamma(P) \setminus \Gamma_i^k} a_\beta (\xi^0)^\beta t^{(\beta, \lambda)} \\ &= t^d P^{i,k}(\xi^0) + \sum_{\beta \in \Gamma(P) \setminus \Gamma_i^k} a_\beta (\xi^0)^\beta t^{(\beta, \lambda) - d} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Como $(\lambda, \beta) < (\lambda, \alpha)$ para $\beta \notin \Gamma_i^k$ e o número de multiíndices $\beta \in \Gamma(P) \setminus \Gamma_i^k$ é finito, segue que para $\epsilon = -P^{i,k}(\xi^0)/2$ existe $M > 0$ tal que

$$P(\xi(t)) \leq \frac{t^d}{2} P^{i,k}(\xi^0) < 0 \quad \text{para } t \geq M$$

Isto contradiz o fato que $P(\xi) \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e prova a proposição.

Corolário 3.3.1. - Nas condições da proposição anterior temos

a) Se $e^i \in N^n$ é um vertice principal de $\Gamma(P)$, então $a_{e^i} > 0$ e as coordenadas de e^i são pares.

b) Se $\Gamma(P)$ é um poliedro completo, então o polinômio

$$B(\xi) = \sum_{e^i} \xi^{e^i} \quad (3.3.2)$$

é positivo (e^i são os vértices de $\Gamma(P)$).

Demonstração — a) Se $a_{e^i} < 0$ então tomando $\xi \in R^n$ tal que $\xi_i > 0$ $i=1, \dots, n$ teríamos $a_{e^i} \xi^{e^i} < 0$. Isto contradiz a Proposição 3.3.1.

Por outro lado, como $a_{e^i} \xi^{e^i} > 0$ e $a_{e^i} > 0$, então é evidente que as coordenadas de e^i são pares.

b) Como $\Gamma(P)$ é completo, então o único vértice não principal é a origem de coordenadas (Corol. 3.1.2 b)) e portanto o resultado segue de a).

Corolário 3.3.2. — Seja $P(\xi)$ um polinômio regular e positivo ($P(\xi) \geq C_0 > 0$) com poliedro característico completo $\Gamma(P)$ e seja $\check{P}(\xi)$ o polinômio

$$\check{P}(\xi) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \xi^{\alpha} \quad \alpha \in \Gamma(P) \cap \{\beta \in N^n; \beta_j = 0\}$$

Então o polinômio $\check{P}(\xi)$ é regular, $\check{P}(\xi) \geq C_0$ com poliedro característico

$$\Gamma(P) \Big|_{\alpha_j = 0} = \{\alpha \in \Gamma(P); \alpha_j = 0\}$$

Demonstração — Que $\check{P}(\xi)$ é regular segue do fato de que toda face principal de $\Gamma(P) \Big|_{\alpha_j = 0}$ é face principal de $\Gamma(P)$ (Corol. 3.1.2.c)).

Suponhamos que existe $\xi^0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\forall (\xi^0) < C_0$ e consideremos $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ definido por $\xi(t) = (\xi_1^0, \dots, \xi_{j-1}^0, \frac{1}{t}, \xi_{j+1}^0, \dots, \xi_n^0)$ $t > 0$. Então

$$P(\xi(t)) = P(\xi^0) + \sum_{\alpha_j > 0} a_\alpha (\xi(t))^\alpha.$$

É evidente que $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_j > 0} a_\alpha (\xi(t))^\alpha = 0$ e portanto dado $\varepsilon = C_0 - P(\xi^0)$,

existe $M > 0$ tal que

$$P(\xi(t)) < 0 \quad \text{para } t \geq M$$

Isto contradiz a hipótese.

Proposição 3.3.2. ([5] Lema 2.1.) Sejam $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ um conjunto de polinômios com poliedro característico $\Gamma(P)$, $P(\xi)$ o polinômio definido por (3.2.7) e $\Gamma(P)$ seu poliedro característico. Então a face $\Gamma_i^k(P)$ é P -regular se e somente se

$$\sum_{j=1}^N |P_j^{i,k}(\xi)|^2 \neq 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \xi_i \neq 0 \quad i=1, \dots, n$$

Demonstração - Consequência imediata da Proposição 3.2.3.c)

O principal resultado da secção é o seguinte.

Teorema 3.3.1. ([6] Teorema 3.2.) Seja $P(\xi)$ um polinômio (com coeficientes reais) regular, positivo ($P(\xi) \geq C_0 > 0$) e com poliedro característico completo $\Gamma(P)$. Então existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 B(\xi) \leq P(\xi) \leq C_2 B(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (3.3.3)$$

onde $B(\xi)$ é o polinômio definido em (3.3.2).

Antes de demonstrar o Teorema 3.3.1., daremos alguns lemas preliminares.

Seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ um vetor positivo $(\xi_i > 0 \ i=1, \dots, n)$. Então podemos escrever ξ na forma

$$\xi = \rho^\lambda \quad \xi_i = \rho^{\lambda_i} \quad i=1, \dots, n; \quad |\lambda|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1 \quad (3.3.5)$$

onde

$$\rho = \exp \left[+ \left(\sum_{i=1}^n (\ln \xi_i)^2 \right)^{1/2} \right] \text{ e } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i = \ln \xi_i / \ln \rho.$$

Lema 3.3.1. ([5] Teorema 1.2) Seja $(\xi^s)_{s \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência de vetores positivos $(\xi_i^s > 0 \ i=1, \dots, n \ s \in \mathbb{N})$. Então existe uma base ortonormal $B = \{e^1, \dots, e^n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e uma subseqüência de (ξ^s) , que ainda denotamos por $\{\xi^s\}$, tal que:

$$i) \ \xi^s = \rho_s^{\sum_{i=1}^n \lambda_i^s e^i} \quad (\text{Vide 3.3.5})$$

$$ii) \ \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_1^s = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_{i+1}^s / \lambda_i^s = 0 \quad i=1, \dots, n-1$$

$$iii) \ \text{Existe } s_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \lambda_i^s > 0 \quad \forall s \in \mathbb{N} \ s \geq s_0$$

Demonstração - Consideremos a sequência de vetores unitários (λ^s) , $\lambda^s = (\lambda_1^s, \dots, \lambda_n^s)$ onde $\lambda_i^s = \ln \xi_i^s / \ln \rho_s$. Então existe uma subsequência de (λ^s) , que ainda denotamos por (λ^s) , tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda^s = \lambda^\infty$.

Seja $\{e^{1,1}, \dots, e^{1,n}\}$ uma base ortonormal de R^n com $e^{1,1} = \lambda^\infty$. Então

$$\lambda^s = \sum_{j=1}^n \lambda_{1,j}^s e^{i,j} = \lambda_{1,1}^s e^{1,1} + \sum_{j=2}^n \lambda_{1,j}^s e^{i,j} = \lambda_{1,1}^s e^{1,1} + \mu^s. \quad (3.3.6)$$

Como $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda^s = \lambda^\infty = e^{1,1}$, então $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_{1,1}^s = 1$ e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_{i,j}^s / \lambda_{1,1}^s = 0 \quad j=2, \dots, n$$

Se $\mu^s = \sum_{j=2}^n \lambda_{1,j}^s e^{i,j}$ e $r^s = |\mu^s|$, então (tomando uma subseqüência se for necessário) afirmamos que existe $e^{2,2} \in R^n$ tal que

$$e^{2,2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu^s / r^s$$

É claro que $|e^{2,2}| = 1$ e que $e^{1,1}$ e $e^{2,2}$ são ortogonais.

Logo, $e^{2,2} \in M$, onde M é o subespaço de R^n gerado por $\{e^{1,2}, \dots, e^{1,n}\}$.

Seja $\{e^{2,2}, e^{2,3}, \dots, e^{2,n}\}$ uma base ortonormal de M . Então

$$\frac{\mu^s}{r^s} = \sum_{j=2}^n \mu_{2,j}^s e^{2,j} \quad \text{e} \quad \mu^s = \sum_{j=2}^n r^s \mu_{2,j}^s e^{2,j}$$

onde $\lim_{s \rightarrow \infty} \mu_{2,2}^s = 1$ e $\lim_{s \rightarrow \infty} \mu_{2,j}^s / \mu_{2,2}^s = 0$ para $j > 2$.

Substituindo μ^s em (3.3.6) temos

$$\lambda^s = \lambda_{1,1}^s e^{1,1} + \lambda_{2,2}^s e^{2,2} + \sum_{j=3}^n \lambda_{2,j}^s e^{2,j}$$

onde $\lambda_{2,j}^s = r^s \mu_{2,j}^s$ $j=2, \dots, n$. É claro que $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_{11}^s = 1$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2,2}^2}{\lambda_{11}^s} = 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2,j}^s}{\lambda_{2,2}^s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu_{2,j}^s / \mu_{2,2}^s = 0 \quad j=2, \dots, n \text{ e que existe } s_0 \in \mathbb{N}$$

tal que $\lambda_{11}^s > 0$ e $\lambda_{22}^s > 0$ para $s \geq s_0$.

Analogamente, considerando os vetores $\gamma^s = \sum_{j=3}^n \lambda_{2j}^s e^{2,j}$, o

subespaço gerado por $\{e^{2,3}, \dots, e^{2,n}\}$ e assim sucessivamente, construímos em um número finito de passos, a base $B = \{e^1, \dots, e^n\}$ de $\mathbb{R}^n$ (onde $e^i = e^{i,i}$ $i = 1, \dots, n$) que satisfaz as condições i), ii) e iii) do lema.

Lema 3.3.2. [[5], Teorema 1.2] Sejam $P(\xi)$ um polinômio regular, positivo ($P(\xi) \geq C_0 > 0$) e com poliedro característico completo $\Gamma(P)$; $\{\xi^s\} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência de vetores positivos tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi^s = \infty$ (isto é, $\lim_{s \rightarrow \infty} |\xi^s| = \infty$). Então:

$$a) \text{ Se } \xi^{r,s} = \rho_s^{j=r+1} \sum_{j=1}^n \lambda_j^s e^j \quad (\text{onde } \lambda_j^s \text{ e } e^j \text{ } j=1, \dots, n \text{ foram}$$

construídos no lema 3.2.1) e se existe i_0 ($1 \leq i_0 \leq n$) tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{i_0}^{r,s} = \infty \text{ ou } \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{i_0}^{r,s} = 0, \text{ então}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s^{-\lambda_{r+1}^s} = 0 \quad (3.3.7)$$

b) Se o vetor $e^1 = \lambda^\infty$ (construído no Lema 3.2.1) é normal exterior a um hiperplano de suporte H de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k = H \cap \Gamma(P)$ é uma face principal de $\Gamma(P)$, então existem

$r, (1 \leq r \leq n)$ e uma face principal $\Gamma_{i_r}^{k_r}$ de $\Gamma(P)$ tal que

i) Existe $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi^{r,s} = \xi^r$ $\xi_i^r \neq 0 \ i=1, \dots, n$ (e r é o menor dos inteiros entre 1 e n tal que i) é satisfeito).

ii) $P(\xi^s) = \rho_s (\alpha^0, \sum_{j=1}^r \lambda_j^s e^j) [P^{i_r, k_r}(\xi^r) + o(1)]; \alpha^0 \in \Gamma^{i_r, k_r}$

Demonstração - Observemos primeiramente que $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s = \infty$, pois $\lim_{s \rightarrow \infty} |\xi^s| = \infty$

$$a) \xi_{i_0}^{r,s} = \rho_s^{\sum_{j=r+1}^n \lambda_j^s e_{i_0}^j} \text{ e } \left| \sum_{j=r+1}^n \lambda_j^s e_{i_0}^j \right| \leq C \lambda_{r+1}^s \text{ para}$$

$s \geq s_0 > 0$ (pois $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_j^s / \lambda_{r+1}^s = 0 \ j > r+1$). Logo, observan

do que $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s = \infty$ temos

$$\rho_s^{-C\lambda_{r+1}^s} \leq \xi_{i_0}^{r,s} \leq \rho_s^{C\lambda_{r+1}^s} \text{ para } s \geq s_1 > 0$$

e daí segue o resultado.

b) Sejam $\Gamma_{i_j}^{k_j} \ j=1, \dots, m$ faces do poliedro característico

$\Gamma(P)$ satisfazendo a seguinte condição : $\Gamma_{i_1}^{k_1} = \Gamma_i^k$ e $\Gamma_{i_j}^{k_j}$ é uma face de $\Gamma_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$ tal que e^j é a normal exterior de um hiperplano

de suporte H^j de $\Gamma_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$ tal que $\Gamma_{i_j}^{k_j} = H^j \cap \Gamma_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$. Devido à for

ma como as faces $\Gamma_{i_j}^{k_j} \ j=1, \dots, n$ foram consideradas, é claro que

vale a seguinte relação para as dimensões $K_1 \geq K_2 \geq \dots \geq K_n$.

Podemos supor que para cada $1 \leq r \leq n$, $\lim_{s \rightarrow \infty} |\xi^{r,s}| = \infty$ ou $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi^{r,s} = \xi^r \in \mathbb{R}^n$. Pois se $\{\xi^{r,s}\}$ for limitado, então existe uma subsequência que converge. Em caso contrário existe uma subsequência que diverge e portanto podemos considerar esta subsequência se for necessário.

seja $\alpha^0 \in \bigcap_{j=1}^n \Gamma_{i_j}^{k_j}$, então

$$P(\xi^s) = P^{i_1, k_1}(\xi^s) + P_1(\xi^s) = \rho_s^{(\alpha^0, \lambda_1^s e^1)} P^{i_1, k_1}(\xi^{1,r}) + P_1(\xi^s) \quad (3.3.9)$$

(pois o polinômio $P^{i_1, k_1}(\xi)$ é e^1 -homogeneo).

Por outro lado, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|P_1(\xi^s)| = \left| \sum_{\alpha \notin \Gamma_i^k} a_\alpha \rho_s^{\sum_{j=1}^n \lambda_j^s (e^j, \alpha)} \right| \leq C \sum_{\alpha \notin \Gamma_i^k} \rho_s^{(\alpha, \lambda_1^s e^1) \sum_{j=2}^n \lambda_j^s (e^j, \alpha)} \quad (3.3.10)$$

Observando que $\Gamma(P) \setminus \Gamma_i^k \cap \mathbb{N}^n$ é finito e que para todo $\alpha \in \Gamma(P) \setminus \Gamma_i^k$ temos $(\alpha, e^1) < (\alpha^0, e^1)$, vemos que existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$\max_{\alpha \in \Gamma(P) \setminus \Gamma_i^k} (\alpha, e^1) < (\alpha^0, e^1) - \delta$$

Como $\lambda_1^s > 0$ para $s \geq s_0$ (Lema 3.3.1), então

$$(\alpha, \lambda_1^s e^1) < (\alpha^0, \lambda_1^s e^1) - \lambda_1^s \delta \quad \forall \alpha \in \Gamma(P) \setminus \Gamma_i^k \quad \text{e } \forall s \geq s_0 \quad (3.3.11)$$

Por outro lado, como $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_j^s / \lambda_1^s = 0$, existe $s_1 > 0$ tal

que

$$\sum_{j=2}^n \lambda_j^s (e^j, \alpha) < \frac{\delta}{2} \lambda_1^s \quad \forall \alpha \in \Gamma(P) \setminus \Gamma_{i_1}^{k_1} \quad \text{e } \forall s \geq s_1 \quad (3.3.12)$$

Logo, para $s \geq \max \{s_0, s_1\}$ temos de (3.3.10), (3.3.11) e (3.3.12)

$$|P_1(\xi^s)| \leq C \frac{(\alpha^0, \lambda_1^s e^1)}{\rho_s} - \frac{\delta/2 \lambda_1^s}{\rho_s} \quad s \geq \max \{s_0, s_1\}$$

portanto

$$P(\xi^s) = \frac{(\alpha^0, \lambda_1^s e^1)}{\rho_s} [P^{i_1, k_1}(\xi^{1, s}) + o(\frac{\lambda_1^s}{\rho_s})] \quad (3.3.13)$$

onde $\sigma_1 = \delta/2$.

Se existe $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi^{1, s} = \xi^1$, $\xi_i^1 \neq 0 \quad i=1, \dots, n$, então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P^{i_1, k_1}(\xi^{1, s}) = P^{i_1, k_1}(\xi^1) > 0$$

pois $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ é uma face principal e portanto P -regular. Logo, (lem-

brando que $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s = \infty$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_1^s = 1$ e que $(\alpha^0, \lambda_1^s e^1) > 0$ para

$s \geq s_0$) temos

$$P(\xi^s) = \frac{(\alpha^0, \lambda_1^s e^1)}{\rho_s} [P^{i_1, k_1}(\xi^1) + o(1)]$$

Se existe $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{i_0}^{1, s} = \infty$ ou $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{i_0}^{1, s} = 0$, en-

tão considerando o polinômio $P^{i_1, k_1}(\xi)$ e o poliedro $\Gamma_{i_1}^{k_1}$, temos

como no caso anterior

$$P^{i_1, k_1}(\xi^{1, s}) = \rho_s^{(\alpha^0, \lambda_2^s e)} [P^{i_2, k_2}(\xi^{2, s}) + o(\rho_s^{-\sigma_2 \lambda_2^s})] \quad (3.3.14)$$

Substituindo (3.3.14) em (3.3.13) e observando que $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_2^s / \lambda_1^s = 0$

temos

$$P(\xi^s) = \rho_s^{(\alpha^0, \lambda_1^s e^1 + \lambda_2^s e^2)} [P^{i_2, k_2}(\xi^{2, s}) + o(\rho_s^{-\sigma_2 \lambda_2^s})]$$

Continuando de forma análoga, achamos um $1 \leq r \leq n$ tal que

$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi^{r, s} = \xi^r$; $\xi_i^r \neq 0$ $i=1, \dots, n$. Logo, podemos escrever

$P(\xi)$ na forma

$$P(\xi^s) = \rho_s^{(\alpha^0, \sum_{j=1}^n \lambda_j^s e^j)} [P^{i_r, k_r}(\xi^{r, s}) + o(\rho_s^{-\sigma_r \lambda_r^s})]$$

e usando a) obtemos b.ii).

Se não existe $r < n$ tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi^{r, s} = \xi^r$; $\xi_i^r \neq 0$

$i=1, \dots, n$, então

$$P(\xi^s) = \rho_s^{(\alpha^0, \sum_{j=1}^n \lambda_j^s e^j)} [P^{i_n, k_n}(1, \dots, 1) + o(\rho_s^{-\sigma_n \lambda_n^s})]$$

donde obviamente, usando a) obtemos b.ii).

Demonstração do Teorema 3.3.1.

A desigualdade da direita, foi mostrada na Proposição 3.3.2 . Portanto, será suficiente mostrar a desigualdade da esquerda. Faremos isto por indução no número de variáveis do polinômio .

Para $n = 1$, temos

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \xi^i = \xi^m \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i \xi^{i-m} + a_m \right)$$

Logo, dado $\varepsilon = a_m/2$, existe $M_1 > 0$ tal que para $|\xi| > M_1$ temos

$$P(\xi) \geq a_m/2 \xi^m$$

pois m é par e $a_m > 0$ (Corolário 3.3.1.a)). Analogamente

$$B(\xi) = \xi^m \left(1 + \frac{1}{\xi^m} \right) \leq 2 \xi^m \quad \forall \xi \in \mathbb{R} ; |\xi| > M_2$$

Se $M = \max\{M_1, M_2\}$, então para $|\xi| > M$ temos

$$B(\xi) / P(\xi) \leq 4/a_m$$

A função $B(\xi)/P(\xi)$ é contínua em $|\xi| \leq M$. Logo, existe

$C_1 > 0$ tal que

$$B(\xi)/P(\xi) \leq C_1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} ; |\xi| \leq M$$

Tomando $C = \max\{4/a_m, C_1\}$ obtemos

$$B(\xi)/P(\xi) \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos o teorema verdadeiro para todo polinômio em $n - 1$ variáveis (satisfazendo as hipóteses) e demonstremos para $P(\xi)$ em n -variáveis.

Suponhamos o contrário, isto é, para todo $s \in \mathbb{N}$ existe $\xi^s \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$P(\xi^s) \leq \frac{1}{s} B(\xi^s) \quad (3.3.15)$$

Observemos que existe uma subsequência de $\{\xi^s\}$, que ainda denotaremos por $\{\xi^s\}$, tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} |\xi^s| = \infty$. Pois em caso contrário $\{\xi^s\}$ seria limitada, e portanto existiria uma subsequência convergente para $\xi \in \mathbb{R}^n$. Logo, considerando essa subsequência e usando o fato de que $P(\xi) \geq C_0 > 0$ e $B(\xi) \geq 1$, teríamos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} B(\xi^s) / P(\xi^s) = B(\xi) / P(\xi) = C < \infty; C > 0$$

o que contradiz (3.3.15).

Por outro lado, afirmamos que existem infinitos $s \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_i^s \neq 0$ para $i=1, \dots, n$, pois se existisse $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$, tal que $\xi_{i_0}^s \neq 0$ somente para um número finito de índices, considerando uma subsequência teríamos

$$P(\xi^s) = P_{i_0}(\xi^s) \text{ e } B(\xi^s) = B_{i_0}(\xi^s)$$

onde $P_{i_0}(\xi) = \sum a_\alpha \xi^\alpha$, $\alpha \in \Gamma(P)|_{\alpha_{i_0}=0} = \{\alpha \in \Gamma(P); \alpha_{i_0} = 0\}$

Logo, pela hipótese de indução e Corolário 3.3.2 teríamos

$$B(\xi^s) / P(\xi^s) = B_{i_0}(\xi^s) / P_{i_0}(\xi^s) \leq C_{i_0}$$

contrariando (3.3.15).

Finalmente, podemos supor, considerando uma subsequência se for necessário, que $\xi_i^s > 0$ para todo $i=1, \dots, n$ e para todo $s \in \mathbb{N}$. Começaremos por observar que existe um hiperoctante $\tilde{R}^n$ de R^n tal que $\xi^s \in \tilde{R}^n$ para infinitos $s \in \mathbb{N}$.

Consideremos a n -upla sinal de $\tilde{R}^n$ definida por

$$(\text{Sgn } \tilde{R}^n)_i = \begin{cases} 1 & \text{se a } i\text{-ésima coordenada de } \tilde{R}^n \text{ é } \geq 0 \\ -1 & \text{se a } i\text{-ésima coordenada de } \tilde{R}^n \text{ é } < 0 \end{cases}$$

Seja $T : R^n \longrightarrow R^n$ definida por

$$T(\xi) = \xi \text{ Sgn } \tilde{R}^n = (\xi_1 (\text{Sgn } \tilde{R}^n)_1, \dots, \xi_n (\text{Sgn } \tilde{R}^n)_n)$$

Então,

$$P(\eta) = P(T(\xi)) = (P \circ T)(\xi) = R(\xi)$$

É claro que $\Gamma(P) = \Gamma(R)$ e que $R(\xi)$ é regular e positivo ($R(\xi) \geq C_0$). Mais ainda

$$R(\eta^s) = P(\xi^s) \leq \frac{1}{s} B(\xi^s) = \frac{1}{s} B(\eta^s)$$

Logo, considerando o polinômio $R(\xi)$ se for necessário, podemos supor, $\xi_i^s > 0$ para todo $i=1, \dots, n$ e todo $s \in \mathbb{N}$.

A sequência $\{\xi^s\}$ satisfaz as condições do Lema 3.3.2. 78

Logo, se o vetor $e^1 = \lambda^\infty$ for normal exterior de um hiperplano de suporte H de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k = H \cap \Gamma(P)$ é uma face principal de $\Gamma(P)$, então existem $1 \leq r \leq n$ e uma face principal $\Gamma_{i_r}^{k_r}$ de $\Gamma(P)$ tal que

$$P(\xi^s) = \rho_s \left(\alpha^0, \sum_{j=1}^n \lambda_j^s e^j \right) [P_{i_r, k_r}(\xi^r) + o(1)]$$

$$B(\xi^s) = \rho_s \left(\alpha^0, \sum_{j=1}^r \lambda_j^s e^j \right) [B_{i_r, k_r}(\xi^r) + o(1)]$$

pois $\Gamma(B) = \Gamma(P)$ e $B(\xi)$ é positivo ($B(\xi) \geq 1$) e regular. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{B(\xi^s)}{P(\xi^s)} \leq \frac{B_{i_r, k_r}(\xi^r) + \varepsilon}{P_{i_r, k_r}(\xi^r) - \varepsilon} \leq C, \quad \forall s \geq s_0$$

Isto contradiz (3.3.15).

Se a face Γ_i^k não for principal, então as coordenadas do vetor e^1 são não positivas, isto é, $e_i^1 \leq 0$ $i=1, \dots, n$ (Corolário 3.1.2.d).

Seja

$$S = \{i \in \{1, \dots, n\} , e_i^1 = 0\}$$

Então, $\lim_{s \rightarrow \infty} \ln \xi_i^s / \ln \rho_s = 0$ para $i \in S$ e $\lim_{s \rightarrow \infty} \ln \xi_i^s / \ln \rho_s = e_i^1 < 0$,

$i \notin S$, donde $\xi_i^s < 1$, pois $\ln \rho_s > 0$ para s suficientemente grande, já que $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s = \infty$.

Como $\lim_{s \rightarrow \infty} |\xi^s| = \infty$, então existe $i_0 \in S$ tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{i_0}^s = \infty$.

Sejam $S_1 = \{i \in S, \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_i^s = \infty\}$ e $\psi(s) = \max_{i \in S_1} \xi_i^s$. Então

existe $C > 0$ tal que

$$\max_{i \in S_1} \ln \xi_i^s \leq \ln \psi(s) \leq C \max_{i \in S_1} \ln \xi_i^s$$

Logo,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \ln \psi(s) / \left(\sum_{k=1}^n (\ln \xi_k^s)^2 \right)^{1/2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \ln \psi(s) / \ln \rho_s = 0 \quad (3.3.16)$$

Por outro lado, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$0 \leq \sum_{i \in S_1} (\ln \xi_i^s)^2 / (\ln \psi(s))^2 \leq M \quad (3.3.17)$$

pois $\ln \xi_i^s \leq \ln \psi(s) \quad i \in S_1$

De (3.3.16) e (3.3.17) segue que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} (\ln \xi_i^s)^2 / (\ln \psi(s))^2 = \infty \quad (3.3.18)$$

Isto significa que existe $j_0 \in \{1, \dots, n\} - S$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\ln \xi_{j_0}^s| / \ln \psi(s) = \infty. \quad (3.3.19)$$

Afirmamos que para todo $a > 0$ e $b > 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\xi_{j_0}^s) [\psi(s)]^b = 0 \quad (3.3.20)$$

pois em caso contrário, existiriam $c > 0$ e $M > 0$ tal que

$$(\xi_{j_0}^s)^a [\psi(s)]^b > c, \quad \forall s \geq M.$$

Logo:

$$a \ln \xi_{j_0}^s + b \ln \psi(s) > \ln c \quad \text{i.e., } b > \frac{\ln c}{\ln \psi(s)} + a \cdot \frac{-\ln \xi_{j_0}^s}{\ln \psi(s)}$$

e portanto

$$b \geq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln c}{\ln \psi(s)} + a \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} (-\ln \xi_{j_0}^s / \ln \psi(s)) = \infty$$

seja $P_{j_0}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Gamma(P)} a_{\alpha} \xi^{\alpha} |_{\alpha_j = 0}$. Então

$$P(\xi^s) = P_{j_0}(\xi^s) + \sum_{\alpha_{j_0} > 0} a_{\alpha} (\xi^s)^{\alpha}; \quad B(\xi^s) = B_{j_0}(\xi^s) + \sum_{e_{j_0}^i > 0} (\xi^s)^{e^i}$$

logo, pela hipótese de indução

$$\lim_{s \rightarrow \infty} B(\xi^s) / P(\xi^s) = \lim_{s \rightarrow \infty} B_{j_0}(\xi^s) / P_{j_0}(\xi^s) \leq C_j$$

pois $\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_{j_0} > 0} a_{\alpha} (\xi^s)^{\alpha} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{e_{j_0}^i > 0} (\xi^s)^{e^i} = 0$ por (3.3.20) e $B_{j_0}(\xi^s) \geq 1$,

$P_{j_0}(\xi) \geq C_0$ (Corolário 3.3.2). Isto prova o teorema.

Observação - Pela Proposição 3.1.3, o vetor $e^1 = \lambda^{\infty}$, é normal exterior de um único hiperplano de suporte Π de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k = \Pi \cap \Gamma(P)$ é uma face de $\Gamma(P)$.

§3.4. - Comparação de operadores diferenciais

Lema 3.4.1. - ([8] , Lema 6) Se o polinômio $Q(\xi)$ é mais fraco que o polinômio $P(\xi)$, então $\tilde{\Gamma}(Q) \subset \tilde{\Gamma}(P)$.

Demonstração - Pela Proposição 3.1.12b) será suficiente mostrar que $\Gamma_Q \subset \tilde{\Gamma}(P)$. Suponhamos que existe $\alpha^0 \in \Gamma_Q$ tal que $\alpha^0 \notin \tilde{\Gamma}(P)$. Como $0 \in \tilde{\Gamma}(P)$, temos $\alpha^0 \neq 0$. Seja $I = \{x \in \mathbb{R}^n; x = s\alpha^0, s \geq 0\}$. Se $\Gamma(P)$ é n -dimensional, (isto acontece se $P(\xi)$ depende das n -variáveis), então existem uma fase principal $(n-1)$ -dimensional Γ_i^{n-1} de $\tilde{\Gamma}(P)$ e um número positivo $s_0 < 1$ tal que $s_0 \alpha^0 \in \Gamma_i^{n-1}$.

Seja $(\lambda, \alpha) = d$ a equação do hiperplano de suporte F de $\tilde{\Gamma}(P)$ tal que $\Gamma_i^{n-1} = F \cap \tilde{\Gamma}(P)$ e seja $(\lambda, \alpha) = d$ a equação de H . Então $(\alpha, \lambda) \leq d$ para todo $\alpha \in H$ e $(\alpha^0, \lambda) > d > 0$.

Seja $b = \max_{\alpha \in \Gamma_Q} (\alpha, \lambda)$. Como $(\alpha^0, \lambda) > d$ temos $b > d$. Seja $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi_i^0 \neq 0$ $i=1, \dots, n$ e seja $\xi(t) = t^\lambda \xi^0$. Então

$$\begin{aligned} Q(\xi(t)) &= Q_1(\xi(t)) + Q_2(\xi(t)) = \sum_{(\alpha, \lambda)=b} a_\alpha (\xi(t))^\alpha + \sum_{(\alpha, \lambda)<b} a_\alpha (\xi(t))^\alpha \\ &= Q_1(\xi^0) t^b + o(t^b) \quad t \sim \infty, \end{aligned} \quad (3.4.1.)$$

Por outro lado,

$$\tilde{P}(\xi(t)) \leq C \sum_{\alpha \in \tilde{\Gamma}(P)} |\xi(t)^\alpha| \leq C_1 t^d \quad t > 1. \quad (3.4.2.)$$

Se escolhermos ξ^0 tal que $Q_1(\xi^0) \neq 0$, então de (3.4.1) e (3.4.2) temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|Q(\xi(t))|}{\tilde{P}(\xi(t))} = \infty$$

Isto significa que $P(\xi)$ não é mais forte que Q e contra diz a hipótese. Logo, $\Gamma_Q \subset \tilde{\Gamma}(P)$. Isto prova o lema.

Corolário 3.4.1. - Se $P(\xi)$ e $Q(\xi)$ são igualmente fortes, então $\tilde{\Gamma}(Q) = \tilde{\Gamma}(P)$.

Observação - Pode acontecer que $Q < P$, mas $\Gamma(Q) \neq \Gamma(P)$; por exemplo, se $P(\xi_1, \xi_2) = a \xi_2^3 + b \xi_1^2 \xi_2^2$ e $Q(\xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi_2} =$

$3a \xi_2^2 + 2b \xi_1^2 \xi_2$, então é claro que $P > Q$ e que $\Gamma(Q) \neq \Gamma(P)$.

Teorema 3.4.1. ([5] , Teorema 2.1). Seja $P(\xi)$ um polinômio com poliedro característico $\Gamma(P)$. Uma condição necessária e suficiente para que $P(\xi)$ seja mais forte que todo polinômio $Q(\xi)$ com $\tilde{\Gamma}(Q) \subset \tilde{\Gamma}(P)$, é que toda face completamente própria de $\Gamma(P)$ se ja P -regular.

Demonstração - A condição é suficiente.

Devemos mostrar a desigualdade

$$\tilde{Q}(\xi) / \tilde{P}(\xi) \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

ou equivalentemente a desigualdade.

$$\tilde{Q}^2(\xi) / \tilde{P}^2(\xi) \leq C^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Denotemos $\Gamma(\tilde{P}^2)$ o poliedro característico do polinômio

$$\tilde{P}^2(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} |P^{(\mu)}(\xi)|^2. \text{ É claro que se } P(\xi) \text{ depende realmente}$$

das n -variáveis (o qual podemos supor), então o poliedro $\tilde{\Gamma}(P)$ é

próprio e completo, portanto $\Gamma(\tilde{P}^2)$ também o é. Logo, pelo Teorema 3.3.1, será suficiente demonstrar que toda face principal do poliedro característico $\Gamma(\tilde{P}^2)$ é $\tilde{P}^2$ -regular (pois evidentemente $\tilde{P}^2(\xi) \geq C_0 > 0$).

Seja então, $\Gamma_i^k(\tilde{P}^2)$ uma face principal de $\Gamma(\tilde{P}^2)$ e seja Γ_i^k a face principal de $\tilde{\Gamma}(P)$ correspondente a $\Gamma_i^k(\tilde{P})$ (Proposição 3.2.3.b). Então pela Proposição 3.1.13, existem uma face completamente própria $\Gamma_{i_1}^{k_1}$ de $\tilde{\Gamma}(P)$ (e portanto de $\Gamma(P)$ pela Proposição 3.1.12 c) e $\bar{\mu} \in \mathbb{N}^n$ tal que

$$i) \Gamma_{i_1}^{k_1} - \bar{\mu} \subset \Gamma_i^k$$

$$ii) \text{ Se } \beta \in \tilde{\Gamma}(P) \setminus \Gamma_{i_1}^{k_1}, \text{ então } \beta - \bar{\mu} \in \Gamma_i^k$$

$$iii) \text{ Se } \alpha \in \Gamma_{i_1}^{k_1} - \bar{\mu} \text{ e } \alpha_i > 0 \text{ para algum } i, \text{ então } \bar{\mu}_i = 0.$$

Portanto, escrevendo $P(\xi)$ na forma

$$P(\xi) = P^{i_1, k_1}(\xi) + P_1(\xi)$$

temos

$$P(\bar{\mu})(\xi) = (D^{\bar{\mu}} P)(\xi) = D^{\bar{\mu}} (P^{i_1, k_1}(\xi)) + D^{\bar{\mu}} P_1(\xi)$$

$$= D^{\bar{\mu}} \sum_{\beta \in \Gamma_{i_1}^{k_1}} a_{\beta} \xi^{\beta} + D^{\bar{\mu}} P_1(\xi)$$

$$= D^{\bar{\mu}} \sum_{\alpha \in \Gamma_{i_1}^{k_1} - \bar{\mu}} a_{\alpha + \bar{\mu}} \xi^{\alpha + \bar{\mu}} + D^{\bar{\mu}} P_1(\xi)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_{i_1} \\ |\alpha| = \bar{\mu}}} \frac{(\alpha + \bar{\mu})!}{\alpha!} a_{\alpha + \bar{\mu}} \xi^\alpha + D^{\bar{\mu}} P_1(\xi)$$

por (iii)

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_{i_1} \\ |\alpha| = \bar{\mu}}} \bar{\mu}! a_{\alpha + \bar{\mu}} \xi^\alpha + D^{\bar{\mu}} P_1(\xi) \\ &= \sum_{\substack{\beta \in \Gamma_{i_1} \\ |\beta| = \bar{\mu}}} \bar{\mu}! a_\beta \xi^\beta \cdot \xi^{-\bar{\mu}} + D^{\bar{\mu}} P_1(\xi) \\ &= \bar{\mu}! \xi^{-\bar{\mu}} P^{i_1, k_1}(\xi) + D^{\bar{\mu}} P_1(\xi) \end{aligned}$$

Logo, por i) e ii) ,

$$|[P^{(\bar{\mu})}(\xi)]^{i,k}|^2 = |\bar{\mu}! \xi^{-\bar{\mu}} P^{i_1, k_1}(\xi)|^2 \neq 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^n ;$$

$\xi_i \neq 0 \quad i=1, \dots, n$, e portanto pela Proposição 3.2.3.c) temos

$$[\tilde{P}^2(\xi)]^{i,k} = \sum_{|\mu| \geq 0} |[P^{(\mu)}(\xi)]^{i,k}|^2 \neq 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^n ; \xi_i \neq 0$$

$i=1, \dots, n$.

Isto prova que a face principal $\Gamma_i^k(\tilde{P}^2)$ é $\tilde{P}^2$ - regular.

A condição é necessária.

Suponhamos que alguma face completamente própria Γ_i^k do poliedro $\Gamma(P)$ não seja P -regular. Seja F um hiperplano de suporte de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k = H \cap \Gamma(P)$ e tal que a normal exterior λ

de H tenha as coordenadas $\lambda_i > 0$ $i=1, \dots, n$. Seja $\beta \in \Gamma_i^k$ um multiíndice fixo e consideremos o polinômio $Q(\xi) = \xi^\beta$. Demonstraremos que $Q \not\equiv P$.

Observemos que

$$\tilde{P}^2(\xi) = |\tilde{P}^2(\xi)|^{i,k} + \gamma(\xi) = |P^{i,k}(\xi)|^2 + \gamma(\xi) \quad (3.4.3)$$

onde $\gamma^{i,k}(\xi) \equiv 0$ (Vide observação no fim da demonstração do teorema). Se $Q(\xi)$ fosse mais fraco que $P(\xi)$ teríamos:

$$\frac{\xi^{2\beta}}{\tilde{P}^2(\xi)} \leq \frac{\tilde{Q}^2(\xi)}{\tilde{P}^2(\xi)} \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (3.4.4)$$

Por outro lado, existe $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i^0 \neq 0$ $i=1, \dots, n$ tal que

$$P^{i,k}(\xi^0) = 0 \quad (3.4.5)$$

Substituindo em (3.4.4) ξ por $\xi(t) = t^\lambda \xi^0$ $t > 0$, temos devido a (3.4.3), a λ -homogeneidade de $P^{i,k}(\xi)$ e (3.4.5).

$$\frac{t^{2(\lambda, \beta)} (\xi^0)^{2\beta}}{t^{2d} |P^{i,k}(\xi^0)| + \gamma(t^\lambda \xi^0)} = \frac{t^{2d} (\xi^0)^{2\beta}}{\gamma(t^\lambda \xi^0)} \leq C \quad t > 0 \quad (3.4.6)$$

Por outro lado, não é difícil ver que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t^\lambda \xi^0)}{t^{2d}} = 0$$

Logo, a desigualdade (3.4.6) não é verdade e portanto

$Q \not\equiv P$.

Observação - Seja $\alpha \in \Gamma(P)$. Se existe $\beta \in \Gamma(P)$ tal que $\alpha < \beta$, então α não é um ponto completamente próprio de $\Gamma(P)$. Pois se fosse, existiria uma face completamente própria Γ_i^k de $\Gamma(P)$ tal que $\alpha \in \Gamma_i^k$. Logo, se H é um hiperplano de suporte de $\Gamma(P)$ tal que $\Gamma_i^k = H \cap \Gamma(P)$ e tal que a normal exterior λ de H tem as coordenadas $\lambda_i > 0$, então se $(p, \lambda) = d$ é a equação de H teremos $d = (\lambda, \alpha) < (\lambda, \beta)$. Isto é $\beta \notin \Gamma(P)$.

Para finalizar o capítulo, daremos uma condição necessária em termos do poliedro característico $\Gamma(P)$, para que um polinômio $P(\xi)$ domine um outro $Q(\xi)$.

Proposição 3.4.1. - Seja $P(\xi)$ um polinômio com poliedro característico $\Gamma(P)$. Se $Q << P$, então $\tilde{\Gamma}(Q) \subset \tilde{\Gamma}(P) \setminus \Gamma'(P)$ ($\Gamma'(P)$ = um conjunto dos pontos completamente próprios de $\tilde{\Gamma}(P)$).

Demonstração - Como $Q << P$, então $Q < P$ e portanto $\tilde{\Gamma}(Q) \subset \tilde{\Gamma}(P)$ (Lema 3.4.1). Veremos que não existe um multiíndice $\alpha \in \Gamma'(P) \cap \tilde{\Gamma}(Q)$. Suponhamos o contrário, isto é, existe $\beta \in \Gamma'(P) \cap \tilde{\Gamma}(Q)$. Seja Γ_i^k uma face completamente própria de $\tilde{\Gamma}(P)$ tal que $\beta \in \Gamma_i^k$, e seja H um hiperplano de suporte de $\tilde{\Gamma}(P)$ tal que $\Gamma_i^k = H \cap \tilde{\Gamma}(P)$ e tal que a normal exterior λ de H tem as coordenadas $\lambda_i > 0$ $i=1, \dots, n$. Então, se $(p, \lambda) = d$ a equação de H e ξ^0 é um vetor de $\mathbb{R}^n$ tal que $Q^{i,k}(\xi^0) \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{|Q(s^{\lambda_{\xi^0}})|}{\tilde{P}(s^{\lambda_{\xi^0}}, t)} &= \left(\frac{|Q^{i,k}(s^{\lambda_{\xi^0}})|^2 + q(s^{\lambda_{\xi^0}})}{|P^{i,k}(s^{\lambda_{\xi^0}})|^2 + \gamma(s^{\lambda_{\xi^0}}) + \sum_{|\alpha| \geq 1} |P^{(\alpha)}(s^{\lambda_{\xi^0}})|^2 t^{2|\alpha|}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{|Q^{i,k}(\xi^0)|^2 + s^{-2d} q(s^{\lambda_{\xi^0}})}{|P^{i,k}(\xi^0)|^2 + s^{-2d} \gamma(s^{\lambda_{\xi^0}}) + s^{-2d} \sum_{|\alpha| \geq 1} |P^{(\alpha)}(s^{\lambda_{\xi^0}})|^2 t^{2|\alpha|}} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Logo, como $Q^{i,k}(\xi^0) \neq 0$ temos

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{|Q(s^{\lambda_{\xi^0}})|}{\tilde{P}(s^{\lambda_{\xi^0}}, t)} \geq \frac{|Q^{i,k}(\xi^0)|}{|P^{i,k}(\xi^0)|} \neq 0$$

Portanto

$$\inf_{t > 0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)} \geq \inf_{t > 0} \sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{|Q(s^{\lambda_{\xi^0}})|}{\tilde{P}(s^{\lambda_{\xi^0}}, t)} \geq \frac{|Q^{i,k}(\xi^0)|}{|P^{i,k}(\xi^0)|} \neq 0$$

Isto significa que $P(\xi)$ não domina $Q(\xi)$.

C A P Í T U L O IV

Uma das classes mais simples de operadores diferenciais lineares com coeficientes variáveis definidas em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é sem dúvida a classe dos operadores de força constante. A maioria dos resultados válidos para operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes, podem ser estendidos localmente para operadores de força constante. Neste capítulo, usando os resultados anteriores, daremos exemplos de tais operadores. Não é nosso propósito aqui, fazer um estudo detalhado dos operadores de força constante, pelo contrário, somente nos limitaremos a enunciar alguns resultados simples que sirvam de ilustração da importância do estudo de comparação de operadores diferenciais. O leitor interessado na matéria, pode consultar [4] capítulo VII.

Definição 4.1.1. - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Um operador diferencial $P(x,D)$ definido para $x \in \Omega$ diz-se de força constante em Ω se e somente se para todo $x, y \in \Omega$ os operadores diferenciais com coeficientes constantes $P(x,D)$ e $P(y,D)$ são igualmente fortes, isto é, existe uma constante $C_{x,y} > 0$ tal que

$$\tilde{P}(x,\xi) / \tilde{P}(y,\xi) \leq C_{x,y} \quad x, y \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Proposição 4.1.1. - Seja $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes satisfazendo uma das condições equivalentes do Teorema 1.2.1. Então qualquer que seja $Q(x,D)$ um operador diferencial de grau $\leq m - 2$ definido em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

o operador $R(x,D) = P(D) + Q(x,D)$ é de força constante em Ω .

Demonstração - Consequência imediata do Teorema 1.2.1.

O seguinte teorema dá exemplo de um operador de força constante $P(x,D)$ em termos do poliedro característico de $P(x,D)$.

Se $P(x,D)$ é um operador diferencial com coeficientes variáveis definidos em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por

$$\Gamma_p(x) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n, a_\alpha(x) \neq 0\} \quad \text{e por}$$

$$D\Gamma_p(x) = \{\beta \in \mathbb{N}^n, 0 \leq \beta \leq \alpha, \alpha \in \Gamma_p(x)\}.$$

Seja $\tilde{\Gamma}(x) = \text{conv } D\Gamma_p(x)$.

Segue do Corolário 3.4.1., que para que $P(x,D)$ seja de força constante em Ω , devemos ter $\tilde{\Gamma}(x) = \tilde{\Gamma}(y)$ para todo $x, y \in \Omega$, isto é, o poliedro característico $\tilde{\Gamma}(x)$ não depende do ponto $x \in \Omega$. Em adiante, suporemos que $\tilde{\Gamma}(x)$ não depende de $x \in \Omega$.

Teorema 3.4.1. - Seja $P(x,D)$ um operador diferencial com coeficientes variáveis definidos em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que toda face completamente própria do poliedro característico $\tilde{\Gamma}(x) \equiv \tilde{\Gamma}$ é $P(x)$ -regular para todo $x \in \Omega$, então $P(x,D)$ é de força constante em Ω .

Demonstração - Consequência do Teorema 3.5.1.

Os seguintes teoremas de existência encontram-se demonstrados em [4]. Cabe salientar, que os referidos teoremas,

tem enunciados mais precisos, envolvendo a regularidade das soluções em espaços de Sobolev. Tais espaços não foram definidos aqui. (Vide [4]).

Teorema 3.4.2. ([4] - Teorema 7.2.1.) Seja $P(x,D)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes contínuos e de força constante em uma vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se Ω é uma vizinhança aberta suficientemente pequena de x_0 , então existe um operador linear E em $L^2(\Omega)$ tal que

$$i) P(x,D) E f = f, \quad f \in L^2(\Omega)$$

$$ii) E P(x,D) u = u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$iii) Q(D)E \text{ é um operador limitado em } L^2(\Omega) \text{ se } Q(D) < P(x_0, D)$$

Teorema 3.4.3. - ([4] , Teorema 7.3.1.) - Seja $P(x,D)$ com coeficientes C^∞ e de força constante em uma vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Se Ω é uma vizinhança aberta suficientemente pequena de x_0 , então existe uma aplicação linear E de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$i) P(x,D) E f = f \text{ em } \Omega \text{ se } f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

$$ii) E P(x,D) u = u \text{ em } \Omega \text{ se } u \in \mathcal{E}'(\Omega)$$

Definição 4.4.2. - Um operador diferencial $P(x,D)$ com coeficiente em $C^\infty(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto) diz-se hipoelíptico em Ω se e somente se para todo aberto $\Omega' \subset \Omega$, $P(x,D) u \in C^\infty(\Omega')$ implica $u \in C^\infty(\Omega')$.

Definição 4.4.3. - Um operador diferencial $P(x,D)$ com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$ diz-se formalmente hipoelíptico em Ω se,

- i) Existe $x_0 \in \Omega$ tal que $P(x_0,D)$ é hipoelíptico.
- ii) $P(x,D)$ é e de força constante em Ω .

O seguinte teorema encontra-se demonstrado em [4] .

Teorema 3.4.4. ([4], Teorema 7.4.1) Seja $P(x,D)$ um operador de força constante com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$. Suponhamos que o operador $P_0(D) = P(x^0,D)$ é hipoelíptico em algum ponto $x_0 \in \Omega$. Então, $u \in D^s(\Omega)$ e $P(x,D)u \in C^\infty(\Omega)$ implica $u \in C^\infty(\Omega)$.

O teorema anterior, diz que todo operador formalmente hipoelíptico é hipoelíptico.

O seguinte teorema encontra-se demonstrado em [8] e dá exemplos de operadores formalmente hipoelípticos.

Teorema 3.4.5. - [[8] , Teorema 7] - Seja $P(x,D)$ um operador diferencial com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$. Suponhamos que para todo $x^0 \in \Omega$, $\Gamma(P(x_0)) = \Gamma(P)$ (isto é, $\Gamma(P)$ não depende de $x^0 \in \Omega$). Se para cada $x^0 \in \Omega$, toda face principal de $\Gamma(P)$ é completamente própria e $P(x_0)$ - regular, então $P(x,D)$ é formalmente hipoelíptico em Ω .

B I B L I O G R A F I A

- [1] - Alexandroff, P and Hopf H. - Topologie
- [2] - Grünbaum B. - Convex Polytopes - John Wiley & Sons Ltd.
1967
- [3] - Hörmander L. - On the theory of general partial differential operators. Acta Math. 94 161 - 248 (1955)
- [4] - Hörmander L. - Linear Partial differential operators -
Springer - Verlag 1969
- [5] - Kazarjan G.G. - Comparação de operadores diferenciais e operadores diferenciais de força constante. Trudy Matemática Institute AN S S S R 1974, Tom. 131 94-113.
- [6] - Mihailov V.P. - The behavior at infinity of a class of polynomials - Proc. Steklov Inst. Math 91(1967), 65-86.
- [7] - Trèves F. - Linear partial differential operators with constant coefficients. Gordon and Breach 1966.
- [8] - Volevic L.R. and Gant'likin S.G. - On a class of hypoelliptic polynomials - Math USSR -Skornik vol.4(1968);nº3
- [9] - Kazarjan G.G. - Comparison of differential operators and differential operator of constant strength - Soviet Math. Dokl (1973) 294 - 253.