UM TEOREMA DE COMPARAÇÃO E

APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

SÉRGIO ALVES

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

PROF. DR. CARLOS EDGARD HARLE

DURANTE A ELABORAÇÃO DESTES TRABALHOS O AUTOR RECEBEU
APOIO FINANCEIRO DO CAPES E FINEP, PROCESSO FINEP 80/75.

- SÃO PAULO, SETEMBRO DE 1976 -

Aos meus pais,
pela formação que
me propiciaram,
ã Sonia
e
ã Maria Lúcia

Í N D I C E

PREFÁCIO.	iv
CAPÍTULO 1	
PRELIMINARES	1
CAPÍTULO 2	
TEOREMA DE TOPONOGOV	9
CAPÍTULO 3	
GEODÉSICAS QUE VÃO AO INFINITO	58
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	66

- 0 -

P R E F Á C I O

O interesse pelo assunto desta monografia surgiu em consequência de seminários sob a responsabilidade do Prof. Dr. Carlos Edgard Harle, abordando alguns tópicos de Geometria Riemanniana.

O teorema de comparação de Toponogov foi publicado, em russo, por volta de 1957 (Dokl. Akad. Nauk, SSSR, 115, pp. 674-676) e outras publicações do próprio Toponogov datando de 1958 e 1959 referem-se à ele.

Entretanto pelas dificuldades inerentes à demonstração original (e ao próprio idioma também) surgiram várias versões do referido teorema. Entre elas podemos destacar a a apresentada por M. Berger (ver [1]) publicada em 1961 e mais recentemente a versão de J. Cheeger e D. Ebin (ver [3]) publicada em 1975.

A demonstração encontrada neste trabalho segue bem de perto o tratamento apresentado nesta última referência e foi nosso propósito apresentar uma prova do teorema de Toponogov explicitando os argumentos cruciais e pondo em relevo os aspectos geométricos envolvidos. Foi também nossa preocupação ilustrarmos tal teorema através algumas aplicações.

Por razões puramente didáticas, dividimos o trabalho em três capítulos. O primeiro, com caráter principalmente introdutório, desenvolve de forma rápida e objetiva os resultados que são necessários à demonstração do teorema de Toponogov; não houve a preocupação de provar tais resultados, limitando-nos apenas a sugerir ao leitor as referências on-

de as mesmas podem ser encontradas. Com o desígnio de ajudar o leitor procuramos usar notações semelhantes às das referidas referências.

No segundo capítulo é desenvolvida a prova do teorema de Toponogov e no último capítulo procuramos dar uma idéia da "força" do teorema em pauta. São inúmeras as suas aplicações e, apenas por gosto pessoal do autor, nos restringimos ao estudo do comportamento de certas geodésicas em uma variedade riemanniana. Diversas aplicações em outras áreas de estudo da Geometria Riemanniana podem ser encontradas em [3].

São várias as pessoas que contribuíram para a execução deste trabalho e a elas queremos deixar aqui o nosso sincero agradecimento. Um destaque especial para o Prof.Dr. Carlos Edgard Harle, orientador deste trabalho, a quem devemos principalmente todo o incentivo e amizade pessoal que nos tem distingüido durante o decorrer destes anos.

Queremos aproveitar a oportunidade para agradecer também a todas as pessoas que de um modo ou de outro contribuíram para a nossa formação matemática.

O excelente trabalho datilográfico do Sr. João Baptista Esteves de Oliveira e o de impressão é de responsabilidade do Sr. Armando Garcia Segura.

São Paulo, setembro de 1976

Sérgio Alves

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo inicial fixaremos a notação a ser utilizada nos demais capítulos, assim como daremos de uma maneira sucinta os pré-requisitos básicos que serão necessários para a leitura deste trabalho.

Não nos preocuparemos com as demonstrações das proposições e teoremas aqui enunciados, uma vez que estas encontram-se feitas em quase todos os livros textos de Geometria Riemanniana; com o intuito de auxiliar o leitor, sugerimos as redações claras e precisas encontradas em [2],[5],[6] e no capítulo inicial de [3], sendo esta última referência recomendada ao leitor que tenha certa familiaridade com os conceitos básicos de Geometria Riemanniana.

Entre os conceitos básicos acima citados, são indispensáveis para a compreensão deste trabalho, as noções de conexão riemanniana, curvatura riemanniana, fórmulas de variação do comprimento do arco, aplicação exponencial, teorema de Hopf-Rinow, campos de Jacobi, pontos conjugados, sub-variedades, segunda forma fundamental, teorema de Bonnet-Myers, pontos focais relativamente a uma sub-variedade.

O leitor que porventura não tiver conhecimento desses conceitos poderá preencher esta lacuna utilizando o material encontrado em [2],[4],[5],[6].

Desde que o teorema de Toponogov é uma generalização dos teoremas de comparação de Rauch, tomaremos estes resultados como ponto de partida; enunciaremos aqui dois teoremas de comparação, um atinente a pontos conjugados (que a partir de agora será denominado Rauch I) e outro atinente a pontos focais (que passará a ser chamado Rauch II).

Em linhas bem gerais podemos afirmar que: dadas duas variedades riemannianas, cujas curvaturas seccionais em cada ponto e para cada sub-espaco bi-dimensional do espaco tangente, obedecem à mesma relação de ordem, o objetivo do teorema de Rauch é comparar comprimentos de curvas convenientemente construídas sobre as variedades.

A proposição seguinte, também devida a Rauch, é fundamental para os nossos objetivos.

PROPOSIÇÃO 1.1 -

Sejam (M^m, g) e $(\tilde{M}^{\tilde{m}}, \tilde{g})$ variedades riemannianas com $m \leq \tilde{m}$; consideremos $\gamma: [0, a] \rightarrow M^m$, $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}^{\tilde{m}}$ geodésicas de M e $\tilde{M}$, respectivamente, parametrizadas pelo comprimento de arco e sejam ainda J e $\tilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente, com

$$J(0) = \tilde{J}(0) = 0$$

$$\left| \left(\frac{\nabla J}{dt} \right) (0) \right| = \left| \left(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt} \right) (0) \right|$$

$$g_{\gamma(t)}(J(t), \gamma'(t)) = \tilde{g}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{J}(t), \tilde{\gamma}'(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, a].$$

Se $\tilde{\gamma}$ não possui pontos conjugados a $\tilde{\gamma}(0)$ no intervalo $[0, a]$ e se para quaisquer sub-espacos bi-dimensionais

$$\pi_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} M^m, \quad \tilde{\pi}_{\tilde{\gamma}(t)} \in T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{M}^{\tilde{m}},$$

tivermos

$$K_{\gamma(t)}(\pi_{\gamma(t)}) \leq \tilde{K}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\pi}_{\tilde{\gamma}(t)})$$

então

$$|J(t)| \geq |\tilde{J}(t)| \quad \forall t \in [0, a].$$

Além disso, se existe $t_0 \in (0, a]$ tal que

$$|J(t_0)| = |\tilde{J}(t_0)|$$

então

$$|J(t)| = |\tilde{J}(t)| \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Como consequência imediata da proposição acima, podemos enunciar os seguintes resultados:

COROLÁRIO 1.2 -

Seja (M^n, g) variedade riemanniana com $K_M \leq 0$, isto é, para todo $p \in M^n$ e todo sub-espaco bi-dimensional $\pi_p \subset T_p M^n$ temos

$$K_p(\pi_p) \leq 0.$$

Então M^n não possui pontos conjugados.

COROLÁRIO 1.3 -

Se a curvatura seccional K_M de uma variedade riemanniana (M^n, g) satisfaz

$$0 < L \leq K_M \leq H$$

então a distância d entre dois pontos conjugados consecutivos satisfaz

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}$$

com o auxílio da proposição 1.1 podemos provar o teorema de Rauch atinente a pontos conjugados.

TEOREMA 1.4 - (Rauch I)

Sejam (M^m, g) e $(\tilde{M}^{\tilde{m}}, \tilde{g})$ variedades riemannianas completas com $m \leq \tilde{m}$.

Consideremos $p \in M^m$, $\tilde{p} \in \tilde{M}^{\tilde{m}}$ e $I: T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ uma isometria linear.

Seja $S'_p = \{\vec{v} \in T_p M / |\vec{v}|=1\}$ e $E: [0, a] \rightarrow S'_p$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco.

Sendo $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável consideremos as curvas de M^m e $\tilde{M}^{\tilde{m}}$ dadas por

$$c(t) = \exp_p f(t)E(t) \quad t \in [0, a]$$

$$\tilde{c}(t) = \exp_{\tilde{p}} f(t)\tilde{E}(t) \quad t \in [0, a] \text{ onde } \tilde{E}(t) = I(E(t)).$$

Suponhamos que para cada t fixo, as geodésicas de M e $\tilde{M}$

$$u(s) = \exp_p sf(t)E(t) \quad s \in [0, 1]$$

$$\tilde{u}(s) = \exp_{\tilde{p}} sf(t)\tilde{E}(t) \quad s \in [0, 1]$$

são tais que:

- $\tilde{u}$ não possui pontos conjugados a $\tilde{p} = \tilde{u}(0)$ no intervalo $[0, 1]$.
- para quaisquer sub-espacos bi-dimensionais

$$\pi_u(s) \subset T_{u(s)} M, \quad \pi_{\tilde{u}}(s) \subset T_{\tilde{u}(s)} \tilde{M}$$

tem-se

$$K_{u(s)}(\pi_{u(s)}) \leq \tilde{K}_{\tilde{u}(s)}(\tilde{\pi}_{\tilde{u}(s)}).$$

Então nessas condições $L(c) \geq L(\bar{c})$.

Como aplicação destes resultados iniciais podemos dar alguma informação a respeito de variedades com curvatura seccional não-positiva.

TEOREMA 1.5 - (Cartan-Hadamard)

Seja (M^n, g) variedade riemanniana completa com $K_M \leq 0$.
Então para todo $p \in M^n$, $\exp_p : T_p M \rightarrow M^n$ é uma aplicação de re
cobrimento (portanto o recobrimento universal de M^n é difeo-
morfo ao $\mathbb{R}^n$); segue-se imediatamente do teorema acima os co-
rolários:

COROLÁRIO 1.6

Seja (M^n, g) variedade riemanniana completa, simplesmente conexa, com $K_M \leq 0$.

Então M^n é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

COROLÁRIO 1.7

Seja (M^n, g) variedade riemanniana completa, simplesmente co
nexa, com $K_M \leq 0$.

Então existe uma única geodésica (que é portanto minimal) ligando dois pontos arbitrários de M^n .

Passemos agora a estender o teorema de Rauch para o caso atinente a pontos focais; iniciaremos com a seguinte definição

DEFINIÇÃO 1.8 -

Seja $\gamma:[0,b] \rightarrow M^n$ geodésica de uma variedade riemanniana (M^n, g) parametrizada pelo comprimento de arco e $p = \gamma(0)$.

Consideremos

$$B_{\epsilon}(0) = \{\vec{v} \in [\gamma'(0)]^{\perp} / |\vec{v}| < \epsilon\}$$

diremos que γ é livre de pontos focais em $[0, b]$ se existe um $\epsilon > 0$ tal que γ não possui pontos focais relativamente à subvariedade

$$\Sigma_{\epsilon} = \exp_p(B_{\epsilon}(0)).$$

De modo análogo ao caso de pontos conjugados temos a seguinte proposição de importância vital.

PROPOSIÇÃO 1.9 -

Sejam (M^m, g) e $(\tilde{M}^{\tilde{m}}, \tilde{g})$ variedades riemannianas com $m \leq \tilde{m}$; consideremos $\gamma: [0, a] \rightarrow M^m$, $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}^{\tilde{m}}$ geodésicas de M e $\tilde{M}$, respectivamente, parametrizadas pelo comprimento de arco e sejam ainda J e $\tilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente, com

$$\left(\frac{\nabla J}{dt}\right)(0) = \left(\frac{\nabla \tilde{J}}{dt}\right)(0) = 0$$

$$|J(0)| = |\tilde{J}(0)|$$

$$g_{\gamma(t)}(J(t), \gamma'(t)) = \tilde{g}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{J}(t), \tilde{\gamma}'(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, a]$$

Se $\tilde{\gamma}$ é livre de pontos focais em $[0, a]$ e se para quaisquer sub-espacos bi-dimensionais

$$\pi_{\gamma(t)} \subset T_{\gamma(t)} M, \quad \tilde{\pi}_{\tilde{\gamma}(t)} \subset T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{M},$$

tivermos

$$K_{\gamma(t)}(\pi_{\gamma(t)}) \leq \tilde{K}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\pi}_{\tilde{\gamma}(t)})$$

então

$$|J(t)| \geq |\tilde{J}(t)| \quad \forall t \in [0, a].$$

Além disso se existe $t_0 \in [0, a]$ tal que $|J(t_0)| = |\tilde{J}(t_0)|$ então

$$|J(t)| = |\tilde{J}(t)| \quad \forall t \in [0, t_0]$$

temos como consequência imediata os seguintes resultados:

COROLÁRIO 1.10

Seja (M^n, g) variedade riemanniana com $K_M \leq 0$.

Se $\gamma: [0, a] \rightarrow M^n$ é uma geodésica de M^n , parametrizada pelo comprimento de arco, então γ é livre de pontos focais em $[0, a]$ $\forall a > 0$.

COROLÁRIO 1.11

Seja (M^n, g) variedade riemanniana com $K_M \leq L$ ($L > 0$) e $\gamma: [0, a] \rightarrow M^n$ geodésica de M^n parametrizada pelo comprimento de arco. Então se

$$a < \frac{\pi}{2\sqrt{L}}$$

teremos que γ é livre de pontos focais em $[0, a]$.

Finalmente estamos em condições de enunciar o teorema de Rauch atinente a pontos focais.

TEOREMA 1.12 - (Rauch II)

Sejam (M^m, g) e $(\tilde{M}^{\tilde{m}}, \tilde{g})$ variedades riemannianas completas com $m \leq \tilde{m}$.

Consideremos $\gamma: [0, a] \rightarrow M^m$ e $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}^{\tilde{m}}$ geodésicas de M e $\tilde{M}$, respectivamente, parametrizadas pelo comprimento de arco.

Sejam E e $\tilde{E}$ campos de vetores paralelos e unitários ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$ e que são perpendiculares a γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente.

Sendo $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, consideremos as

curvas de M^m e $\tilde{M}^{\tilde{m}}$ dadas por

$$c(t) = \exp_{\gamma(t)} f(t) E(t) \quad t \in [0, a]$$

$$\tilde{c}(t) = \exp_{\tilde{\gamma}(t)} f(t) \tilde{E}(t) \quad t \in [0, a].$$

Suponhamos que, para cada t fixo, as geodésicas de M e $\tilde{M}$

$$u(s) = \exp_{\gamma(t)} s f(t) E(t) \quad s \in [0, 1]$$

$$\tilde{u}(s) = \exp_{\tilde{\gamma}(t)} s f(t) \tilde{E}(t) \quad s \in [0, 1].$$

São tais que:

a) $\tilde{u}$ é livre de pontos focais em $[0, 1]$.

b) para quaisquer sub-espacos bi-dimensionais

$\pi_{u(s)} \subset T_{u(s)} M$, $\tilde{\pi}_{\tilde{u}(s)} \subset T_{\tilde{u}(s)} \tilde{M}$ tem-se $K_{u(s)}(\pi_{u(s)} \leq \tilde{K}_{\tilde{u}(s)}(\tilde{\pi}_{\tilde{u}(s)})$.

Então nessas condições $L(c) \geq L(\tilde{c})$.

Observação: Warner obteve uma generalização técnica dos teoremas de Rauch estendendo estes resultados para sub-variedades com hipóteses adicionais sobre a segunda forma fundamental; para maiores detalhes veja [6].

CAPÍTULO 2

TEOREMA DE TOPONOGOV

Neste capítulo nós provaremos o teorema de Toponogov que é uma poderosa generalização global do primeiro teorema de Rauch.

Em linhas bem gerais podemos adiantar que esta generalização é tomada no seguinte sentido: enquanto que no teorema de Rauch temos a hipótese de que na variedade de curvatura maior, certas geodésicas que partem de um ponto $\tilde{p}$ e chegam a uma curva previamente construída, que denominamos $\tilde{c}$, não devem ter pontos conjugados a $\tilde{p}$ e com isso conseguiremos comparar o comprimento das curvas c e $\tilde{c}$ (veja teorema 1.4)

no teorema de Toponogov nos restringiremos a fazer hipóteses apenas sobre as duas geodésicas que ligam $\tilde{p}$ aos pon-

tos extremos de $\tilde{c}$ e com a vantagem ainda de não precisarmos ter a curva $\tilde{c}$ previamente construída (veja teorema 2.2 (B) abaixo).

Existem duas proposições equivalentes do teorema de Toponogov e será conveniente prová-las simultaneamente.

Antes de passar ao seu enunciado formal, façamos algumas observações quanto a notação:

- 1) todos os índices neste capítulo serão tomados módulo 3, salvo menção em contrário.
- 2) indicaremos por M^H a variedade riemanniana bi-dimensional completa, simplesmente conexa, de curvatura constante e igual a H .
- 3) indicaremos por $\rho(p,q) = \inf\{L(\mu)/\mu \mid \mu \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ a } q\}$ a distância entre dois pontos p e q de uma variedade riemanniana.

A título de recordação iniciamos com a seguinte definição

DEFINIÇÃO 2.1 -

Um triângulo geodésico numa variedade riemanniana (M^n, g) é um conjunto de 3 segmentos de geodésicas, parametrizadas pelo comprimento de arco,

$$\gamma_1: [0, \ell_1] \rightarrow M^n$$

$$\gamma_2: [0, \ell_2] \rightarrow M^n$$

$$\gamma_3: [0, \ell_3] \rightarrow M^n$$

tais que

$$\gamma_i(\ell_i) = \gamma_{i+1}(0) \quad \text{e} \quad \ell_i + \ell_{i+1} \geq \ell_{i+2} \quad i=1,2,3$$

indicaremos por

$$\alpha_i = \angle(-\gamma'_{i+1}(\ell_{i+1}), \gamma'_{i+2}(0)), \quad 0 \leq \alpha_i \leq \pi, \quad i=1,2,3$$

nós especificaremos um triângulo geodésico dando seus lados $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

TEOREMA 2.2 - (Toponogov)

Seja (M^n, g) variedade riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$ com $K_M \geq H$.

(A) - Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ um triângulo geodésico em M^n ; suponha que γ_1, γ_3 são minimais e se $H > 0$, suponha que

$$L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

Então existe um triângulo geodésico $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ em M^H tal que $L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i)$, $i=1,2,3$ e $\bar{\alpha}_1 \leq \alpha_1$, $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.

Exceto no caso

$$H > 0 \text{ e } L(\gamma_i) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

para algum i , o triângulo em M^H é unicamente determinado.

(B) - Sejam γ_1, γ_2 segmentos de geodésicas em M^n , parametrizadas pelo comprimento de arco, tais que

$$\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0) \text{ e } \angle(-\gamma_1'(l_1), \gamma_2'(0)) = \alpha$$

tal configuração será denominada uma DOBRA e a denotaremos por

$$(\gamma_1, \gamma_2, \alpha).$$

Suponha γ_1 minimal e se $H > 0$, $L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$.

Sejam $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ segmentos de geodésicas em M^H tais que

$$\bar{\gamma}_1(l_1) = \bar{\gamma}_2(0), \quad L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i) = l_i, \quad i=1,2$$

$$\text{e } \angle(-\bar{\gamma}_1'(l_1), \bar{\gamma}_2'(0)) = \alpha.$$

Então $\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$.

PROVA -

A prova consiste de um número de passos, nenhum dos quais é

difícil; em toda a demonstração deste teorema, condições envolvendo $\sqrt{H}$ serão ignoradas se $H \leq 0$.

Inicialmente trabalharemos em $M^{H-\epsilon}$, $\epsilon > 0$, ao invés de M^H pois desejamos, a princípio, que os pontos $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_1(\ell_1)$ assim como $\bar{\gamma}_2(0)$ e $\bar{\gamma}_2(\ell_2)$ não sejam antípodas; observe que

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}}$$

tal medida restritiva se tornará mais clara a medida que formos avançando na prova do teorema.

LEMA 1 - Sejam $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ segmentos de geodésicas em $M^{H-\epsilon}$ parametrizadas pelo comprimento de arco com

$$\bar{\gamma}_1(\ell_1) = \bar{\gamma}_2(0), \quad \angle(-\bar{\gamma}_1'(\ell_1), \bar{\gamma}_2'(0)) = \alpha \text{ e } L(\bar{\gamma}_i) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} \quad i=1,2.$$

Então a função $f(\alpha) = \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2))$ é estritamente crescente em $[0, \pi]$.

PROVA -

Pensaremos em $\bar{\gamma}_1$ fixo e $\bar{\gamma}_2$ variando; quando α varia, $\bar{\gamma}_2(\ell_2)$ percorre uma circunferência Σ de $M^{H-\epsilon}$ de centro $\bar{\gamma}_2(0)$ e raio $L(\bar{\gamma}_2) = \ell_2$

admitamos que para cada $\alpha \in [0, \pi]$ exista uma única geodésica minimal $\bar{\phi}_\alpha$ ligando $\bar{\gamma}_1(0)$ a $\bar{\gamma}_2(\ell_2)$ onde $\alpha = \angle(-\bar{\gamma}_1'(\ell_1), \bar{\gamma}_2'(0))$

a hipótese adicional acima é automaticamente satisfeita se $H \leq 0$ (veja Corolário 1.7) e para $H > 0$ uma condição suficiente é que

$$\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) < \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}}$$

em ambos os casos podemos escrever

$$\bar{\phi}_\alpha(s) = \exp_{\bar{\gamma}_1(0)} s\theta(\alpha) \quad s \in [0,1]$$

onde

$$\theta(\alpha) \in T_{\bar{\gamma}_1(0)} M^{H-\epsilon} \quad \forall \alpha \in [0, \pi],$$

além disso θ é uma função diferenciável de α devido a regularidade da aplicação $\exp_{\bar{\gamma}_1(0)}$ logo

$$f(\alpha) = \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) = L(\bar{\phi}_\alpha) = |\theta(\alpha)|$$

desde que $\theta(\alpha) = 0 \implies \alpha = 0$ teremos que f é diferenciável em $(0, \pi]$; se tivermos

$$\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) = \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}}$$

então $\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2$ é uma geodésica quebrada ligando pontos antípodas sobre a esfera de dimensão 2 e curvatura $H-\epsilon$.

Mas

$$L(\bar{\gamma}_i) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}} \quad i=1,2;$$

logo $\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2$ é uma geodésica diferenciável, ou seja, $\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2$ é parte de um círculo máximo de $M^{H-\epsilon}$ ligando $\bar{\gamma}_1(0)$ a $\bar{\gamma}_2(l_2)$ e portanto $\alpha = \pi$.

Assim

$$\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) = \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}} \implies \alpha = \pi.$$

logo em qualquer caso temos que $f(\alpha) = \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2))$ é diferenciável em $(0, \pi)$.

Afirmo agora que $f'(\alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha \in (0, \pi)$; assim f será estritamente monótona.

Suponha por absurdo que $\exists \alpha_0 \in (0, \pi)$ tal que $f'(\alpha_0) = 0$

$$f(\alpha) = |\theta(\alpha)| = \langle \theta(\alpha), \theta(\alpha) \rangle^{1/2}; \text{ logo } f'(\alpha) = \frac{\langle \theta'(\alpha), \theta(\alpha) \rangle}{|\theta(\alpha)|}$$

$f'(\alpha_0) = 0 \implies \langle \theta'(\alpha_0), \theta(\alpha_0) \rangle = 0$ o que resulta $\bar{\phi}_{\alpha_0}$ ortogonal a Σ .

De fato temos que

$$\bar{\phi}'_{\alpha_0}(s) = (\exp_{\bar{\gamma}_1(0)}^{-1})_*(s\theta(\alpha_0))^{\theta(\alpha_0)}$$

$$\therefore \bar{\phi}'_{\alpha_0}(1) = (\exp_{\bar{\gamma}_1(0)}^{-1})_*\theta(\alpha_0)^{\theta(\alpha_0)}$$

uma parametrização de Σ pelo ângulo α pode ser dada por

$$\lambda(\alpha) = \exp_{\bar{\gamma}_1(0)}^{-1}\theta(\alpha)$$

logo

$$\lambda'(\alpha_0) = (\exp_{\bar{\gamma}_1(0)}^{-1})_*\theta(\alpha_0)^{\theta'(\alpha_0)}.$$

Pelo lema de Gauss vem que $\bar{\phi}_{\alpha_0}$ é ortogonal a Σ .

portanto $\bar{\phi}_{\alpha_0} u - \bar{\gamma}_2$ é uma geodésica não-quebrada de $M^{H-\epsilon}$ ligando $\bar{\gamma}_1(0)$ a $\bar{\gamma}_1(\ell_1)$ e distinta de $\bar{\gamma}_1$.

Isto é impossível para $H \leq 0$ (corolário 1.7) e no caso $H > 0$ isso implica que $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_1(\ell_1)$ são antípodas o que é absurdo, pois

$$L(\bar{\gamma}_1) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}}$$

assim $f'(\alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha \in (0, \pi)$.

Mas

$$f(0) = |\ell_1 - \ell_2| \text{ e } f(\pi) = \min\{\ell_1 + \ell_2, \frac{2\pi}{\sqrt{H-\epsilon}} - \ell_1 - \ell_2\} = D.$$

Desde que $D > |\ell_1 - \ell_2|$ temos que f é estritamente crescente em $[0, \pi]$.

OBSERVAÇÃO - é conveniente fazer alguns comentários a respeito do lema acima no caso em que considerarmos a variedade M^H . Observe que se

$$L(\bar{\gamma}_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}} \quad i=1,2$$

então uma demonstração análoga do lema 1 nos mostra que f é uma função estritamente crescente em $[0, \pi]$, isto é, seu gráfico é do tipo

se

$$L(\bar{\gamma}_i) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

para algum i então verifica-se imediatamente que f é uma função constante, isto é, seu gráfico é do tipo

O próximo lema trata da unicidade do triângulo geodésico em $M^{H-\epsilon}$.

LEMA 2 -

Em $M^{H-\epsilon}$ um triângulo com lados de comprimento $\leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ é determinado, a menos de isometria, pelo comprimento de seus lados.

PROVA -

Seja $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ um triângulo em $M^{H-\epsilon}$ tal que

$$L(\bar{\sigma}_i) = L(\bar{\gamma}_i) = \ell_i \quad i=1,2,3.$$

Desde que $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ é um triângulo em $M^{H-\epsilon}$ com lados de comprimento $\leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ (logo seus lados são geodésicas minimais) temos que

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq D = \min\{\ell_1 + \ell_2, \frac{2\pi}{\sqrt{H-\epsilon}} - \ell_1 - \ell_2\}$$

assim fixados ℓ_1 e ℓ_2 segue-se pelo lema 1 que ℓ_3 determina unicamente α_3 .

logo

$$\angle(-\bar{\gamma}_1'(\ell_1), \bar{\gamma}_2'(0)) = \alpha_3 = \angle(-\bar{\sigma}_1'(\ell_1), \bar{\sigma}_2'(0))$$

seja

$$p = \bar{\sigma}_1(\ell_1)$$

e

$$q = \bar{\gamma}_1(\ell_1)$$

tomamos $I: T_p M^{H-\epsilon} \longrightarrow T_q M^{H-\epsilon}$ isometria linear tal que

$$I(\bar{\sigma}_1'(\ell_1)) = \bar{\gamma}_1'(\ell_1) \quad \text{e} \quad I(\bar{\sigma}_2'(0)) = \bar{\gamma}_2'(0)$$

pela homogeneidade de $M^{H-\epsilon}$ existe uma isometria

$$\phi: M^{H-\epsilon} \longrightarrow M^{H-\epsilon}$$

tal que

$$\phi(p) = q \quad \text{e} \quad (\phi_*)_p = I$$

é imediato que tal isometria leva $\bar{\sigma}_1$ sobre $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\sigma}_2$ sobre $\bar{\gamma}_2$.

Lembrando que uma isometria preserva comprimento de curvas temos que $\phi(\bar{\sigma}_3)$ é uma geodésica de $M^{H-\epsilon}$ de comprimento $\leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ ligando os pontos $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_2(\ell_2)$.

Assim ϕ leva $\bar{\sigma}_3$ sobre $\bar{\gamma}_3$ e temos o resultado desejado.

c.q.d.

O terceiro lema nos dá uma versão da equivalência das proposições do teorema de Toponogov.

LEMA 3 - Fixado uma dobra $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ tal que γ_1 é minimal e

$L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$, então são equivalentes:

(A') - Seja γ_3 uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando $\gamma_2(\ell_2)$ a $\gamma_1(0)$. Então existe um triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com $L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i)$ $i=1,2,3$ e $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.

(B') - Seja $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha_3)$ uma dobra em $M^{H-\epsilon}$ com $L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i)$ $i=1,2$. Então

$$\ell_2 - \ell_1 \leq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) \leq \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)).$$

PROVA -

(A') $\Rightarrow$ (B')

Dado $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha_3)$ como em (B'), seja γ_3 uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando $\gamma_2(\ell_2)$ a $\gamma_1(0)$.

por (A'), existe um triângulo $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\sigma}_i) = L(\gamma_i) \quad i=1,2,3 \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$$

$(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ é um triângulo $\Rightarrow L(\bar{\sigma}_3) + L(\bar{\sigma}_1) \geq L(\bar{\sigma}_2)$

$$\therefore L(\bar{\sigma}_3) \geq L(\bar{\sigma}_2) - L(\bar{\sigma}_1), \text{ ou seja, } L(\gamma_2) - L(\gamma_1) \leq L(\gamma_3)$$

logo

$$\ell_2 - \ell_1 \leq \ell_3 = \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)).$$

fixados $L(\bar{\gamma}_1) = L(\bar{\sigma}_1)$ e $L(\bar{\gamma}_2) = L(\bar{\sigma}_2)$ segue-se pelo lema 1 que

$$\rho(\bar{\sigma}_1(0), \bar{\sigma}_2(\ell_2)) \leq \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2))$$

$$L(\bar{\sigma}_3) = L(\gamma_3) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} \Rightarrow \bar{\sigma}_3 \text{ é minimal} \Rightarrow \rho(\bar{\sigma}_1(0), \bar{\sigma}_2(\ell_2)) = L(\bar{\sigma}_3) = \ell_3$$

assim

$$\ell_2 - \ell_1 \leq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) = \ell_3 \leq \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2))$$

$$(B') \Rightarrow (A')$$

Seja γ_3 uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando $\gamma_2(\ell_2)$ a $\gamma_1(0)$.

Consideremos $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha_3)$ uma dobra em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i) \quad i=1,2.$$

por (B') temos que

$$\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)) \geq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) = \ell_3 \geq \ell_2 - \ell_1$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 \text{ é minimal} \Rightarrow \ell_1 &= \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \leq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) + \\ &+ \rho(\gamma_2(\ell_2), \gamma_2(0)) = \ell_3 + \rho(\gamma_2(\ell_2), \gamma_2(0)) \leq \ell_3 + \ell_2 \end{aligned}$$

$$\therefore \ell_1 \leq \ell_3 + \ell_2 \text{ ou seja } \ell_3 \geq \ell_1 - \ell_2$$

$$\text{logo } \ell_3 \geq |\ell_1 - \ell_2|.$$

pelo lema 1, podemos construir uma dobra em $M^{H-\epsilon}, (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\alpha}_3)$, com

$$L(\bar{\sigma}_i) = L(\bar{\gamma}_i) \quad i=1,2.$$

$$\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$$

$$\rho(\bar{\sigma}_1(0), \bar{\sigma}_2(l_2)) = l_3 = \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)).$$

Seja $\bar{\sigma}_3$ uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando $\bar{\sigma}_2(l_2)$ a $\bar{\sigma}_1(0)$.

Então $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ é um triângulo em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\sigma}_i) = L(\gamma_i) \quad i=1,2,3 \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$$

c.q.d.

Para a elaboração do próximo lema, necessitamos de um novo conceito.

DEFINIÇÃO -

Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobra em (M^n, g) . Diremos que é uma dobra pequena se

$$\max L(\gamma_i) = \frac{r}{2} \quad i=1,2 \quad \text{onde} \quad \exp_{\gamma_2(0)} \Big|_{B_r(0)}$$

é um mergulho.

Um triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é chamado pequeno se cada uma de suas dobras $(\gamma_i, \gamma_{i+1}, \alpha_{i+2})$ $i=1,2,3$ é uma dobra pequena.

LEMA 4 -

(A) vale para triângulos pequenos e (B) vale para dobras pequenas.

PROVA -

Provaremos diretamente que (B) vale para dobras pequenas e aplicaremos o lema anterior para provar que (A) vale para

triângulos pequenos.

Seja então $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobra pequena de M^n e consideramos $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$ uma correspondente dobra em $M^{H-\epsilon}$ com $L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i)$ $i=1,2$.

Seja

$$p = \gamma_1(\ell_1) = \gamma_2(0) \quad e \quad \bar{p} = \bar{\gamma}_1(\ell_1) = \bar{\gamma}_2(0)$$

observemos que, como

$$\exp_p \Big|_{B_r(0)}$$

é um mergulho, teremos necessariamente pelo corolário 1.3 que

$$r \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

$$\therefore 2 \max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

logo

$$\max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}} < \frac{\pi}{2\sqrt{H-\epsilon}}$$

Se $I: T_{\bar{p}}^{M^{H-\epsilon}} \longrightarrow T_p^M$ é uma isometria linear tal que

$$I(\bar{\gamma}'_1(\ell_1)) = \gamma'_1(\ell_1)$$

$$I(\bar{\gamma}'_2(0)) = \gamma'_2(0)$$

e se $\bar{\gamma}_3$ é uma geodésica minimal ligando $\bar{\gamma}_2(\ell_2)$ a $\bar{\gamma}_1(0)$ então podemos escrever: (lembramos que

$$\max L(\bar{\gamma}_i) < \frac{\pi}{2\sqrt{H-\epsilon}}$$

implica que nenhum ponto sobre $\bar{\gamma}_3$ é antípoda a $\bar{p}$).

$$\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{p}} f(t) \bar{E}(t) \quad t \in [0, a]$$

onde $\bar{E}: [0, a] \rightarrow S^1_{\bar{p}} = \{\vec{v} \in T_{\bar{p}} M^{H-\epsilon} / |\vec{v}| = 1\}$ é uma curva diferenciável com $\bar{E}(0) = \bar{\gamma}_2'(0)$, $\bar{E}(a) = -\bar{\gamma}_1'(a_1)$ e $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável apropriada.

Seja c a curva em M^n definida por $c(t) = \exp_p f(t) I(\bar{E}(t))$ $t \in [0, a]$, isto é, $c = \exp_p \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{\gamma}_3)$

então c liga os pontos $\gamma_2(\ell_2)$ a $\gamma_1(0)$ e desde que $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ é uma dobra pequena temos que, para cada t fixo, a geodésica de M^n dada por

$$u(s) = \exp_p^{sf(t)} I(\bar{E}(t)) \quad s \in [0, 1]$$

não possui pontos conjugados a $p = u(0)$ no intervalo $[0, 1]$ logo todas as hipóteses do teorema 1.4 (Rauch I) estão satisfeitas e portanto

$$L(\bar{\gamma}_3) \geq L(c)$$

assim

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) \leq L(c) \leq L(\bar{\gamma}_3) = \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)),$$

isto é, (B) vale para dobras pequenas.

Fixemos um vértice, digamos $\gamma_2(0)$, do triângulo geodésico $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ que estamos supondo pequeno.

Pela parte inicial deste lema e pelo lema 3, existe um triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com $L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i)$ $i=1, 2, 3$ e $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.

Como o triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é pequeno, temos

$$\max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2), L(\gamma_3)\} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$$

e pelo lema 2 um triângulo em $M^{H-\epsilon}$ com lados de comprimento

$$\leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

é determinado pelo comprimento de seus lados; assim se nós começarmos fixando algum outro vértice, nós obteremos o mesmo triângulo em $M^{H-\epsilon}$.

Portanto existe um único triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i) \quad i=1,2,3 \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}_i \leq \alpha_i \quad i=1,2,3$$

o que prova (A) para triângulos pequenos.

c.q.d.

Em linhas gerais, o lema 4 nos diz que o teorema de Toponogov é verdadeiro para dobras cujos lados tem comprimentos pequenos; a seguir verificaremos que o teorema vale para dobras em que um dos lados tem comprimento pequeno em comparação ao outro lado.

Dividiremos este estudo em 3 casos conforme o ângulo da dobra for reto, obtuso ou agudo.

Iniciaremos com o caso reto:

Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \pi/2)$ uma dobra em M^n como em (B) com

$$L(\gamma_1) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}.$$

Consideremos $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \pi/2)$ uma correspondente dobra em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i) \quad i=1,2.$$

Seja $\bar{\gamma}_3$ uma geodésica minimal ligando $\bar{\gamma}_1(0)$ a $\bar{\gamma}_2(\ell_2)$.

Afirmo que podemos escrever

$$\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_2(t)} f(t) \bar{E}(t) \quad t \in [0, \ell_2]$$

onde $\bar{E}(t)$ é um campo de vetores paralelo e unitário ao longo de $\bar{\gamma}_2$ com $\bar{E}(0) = -\bar{\gamma}'_1(\ell_1)$ e f é uma função diferenciável apropriada.

De fato, para $H \leq 0$ é imediato e para $H > 0$ basta notar que, como

$$L(\gamma_1) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}},$$

a geodésica que parte de $\bar{\gamma}_2(t)$ com velocidade na direção de $\bar{E}(t)$, encontra $\bar{\gamma}_3(t)$ a uma distância

$$\leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}.$$

Seja $E(t)$ um campo de vetores paralelo ao longo de γ_2 com

$$E(0) = -\gamma_1'(\ell_1).$$

DEFINIÇÃO -

Diremos que $(\gamma_1, \gamma_2, \pi/2)$ é uma dobra reta fina se as hipóteses do teorema 1.12 (Rauch II) se aplicam às curvas

$$\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_2(t)} f(t) \bar{E}(t) \quad t \in [0, \ell_2]$$

e

$$c(t) = \exp_{\gamma_2(t)} f(t) E(t) \quad t \in [0, \ell_2].$$

isto é equivalente a exigir que, para cada t fixo, a geodésica

$$u(s) = \exp \gamma_2(t) s f(t) E(t) \quad s \in [0,1]$$

é livre de pontos focais em $[0,1]$; observemos que

$$L(u) = |f(t)|.$$

LEMA 5 -

(B) vale para dobras retas finas.

PROVA -

A curva c liga os pontos $\gamma_1(0)$ e $\gamma_2(l_2)$ e pelo teorema 1.12 (Rauch II) temos que

$$L(\bar{\gamma}_3) \geq L(c)$$

assim

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq L(c) \leq L(\bar{\gamma}_3) = \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

c.q.d.

OBSERVAÇÃO -

Convém notar que neste estudo foi usado de modo crucial o fato de estarmos trabalhando em $M^{H-\epsilon}$ e não em M^H .

De fato se estivéssemos em M^H ,

$$H > 0, \text{ e } L(\gamma_2) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

então, mesmo que

$$L(\gamma_1) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}},$$

não teremos que

$$\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_2(t)} f(t) \bar{E}(t) \quad t \in [0, l_2].$$

Passaremos agora a estudar o caso em que temos um ângulo obtuso.

Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobra em M^n como em (B) com $\alpha > \pi/2$.

Consideremos $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$ uma correspondente dobra em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i) \quad i=1,2.$$

Seja $\bar{\gamma}_3$ uma geodésica minimal ligando os pontos

$$\bar{\gamma}_2(\ell_2) \text{ e } \bar{\gamma}_1(0).$$

Tomamos $\bar{\sigma}: [0, \ell] \rightarrow M^{H-\epsilon}$ segmento de geodésica de $M^{H-\epsilon}$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que

$$\bar{\sigma}(0) = \bar{\gamma}_2(0)$$

$$\langle \bar{\sigma}'(0), \bar{\gamma}_2'(0) \rangle = 0$$

$$\bar{\sigma}'(0) = -\delta \bar{\gamma}_1'(\ell_1) + \beta \bar{\gamma}_2'(0) \text{ com } \delta, \beta > 0$$

$\bar{\sigma}(\ell)$ é o primeiro ponto de $\bar{\sigma}$ que está sobre $\bar{\gamma}_3$.

Seja $\sigma: [0, \ell] \rightarrow M^n$ segmento de geodésica de M^n emanando de $\gamma_2(0)$ tal que

$$g_{\gamma_2(0)}(\sigma'(0), \gamma_2'(0)) = 0$$

$$\sigma'(0) = -\delta \gamma_1'(\ell_1) + \beta \gamma_2'(0) \text{ com } \delta, \beta > 0$$

$$L(\sigma) = L(\bar{\sigma}) = \ell.$$

DEFINIÇÃO -

Diremos que $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ é uma dobra obtusa fina se

- i) $(\gamma_1, \sigma, \alpha - \pi/2)$ é uma dobra pequena.
- ii) $(\sigma, \gamma_2, \pi/2)$ é uma dobra reta fina.

LEMA 6 -

(B) vale para dobras obtusas finas.

PROVA -

Pela desigualdade triangular temos

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq \rho(\gamma_1(0), \sigma(l)) + \rho(\sigma(l), \gamma_2(l_2)).$$

Pelo lema 4 temos

$$\rho(\gamma_1(0), \sigma(l)) \leq \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\sigma}(l)).$$

Pelo lema 5 temos

$$\rho(\sigma(l), \gamma_2(l_2)) \leq \rho(\bar{\sigma}(l), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

Logo

$$\begin{aligned} \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) &\leq \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\sigma}(l)) + \rho(\bar{\sigma}(l), \bar{\gamma}_2(l_2)) = \\ &= \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)). \end{aligned}$$

pois $\bar{\gamma}_3$ é minimal.

c.q.d.

Vale aqui a mesma observação feita após o lema 5. Finalmente vejamos o caso em que o ângulo é agudo.

Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobra em M^n como em (B) com $\alpha < \pi/2$.

Consideremos a função $d: [0, \ell_2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(X) = \rho(\gamma_2(X), \gamma_1(0)).$$

d é contínua no compacto $[0, \ell_2]$ e portanto assume um mínimo num ponto $\ell \in [0, \ell_2]$, isto é, $\gamma_2(\ell)$ é o ponto, sobre γ_2 , mais próximo de $\gamma_1(0)$.

Seja

$$\tau = \gamma_2|_{[0, \ell]} ; \theta = \gamma_2|_{[\ell, \ell_2]} \quad \text{e} \quad \sigma: [0, k] \rightarrow M^n$$

uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(\ell)$.

DEFINIÇÃO -

Diremos que $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ é uma dobra aguda fina se

- i) (γ_1, τ, σ) é um triângulo pequeno.
- ii) $0 < \ell < \ell_2$.
- iii) $(\sigma, \theta, \pi/2)$ é uma dobra reta fina.

LEMA 7 -

(B) vale para dobras agudas finas.

PROVA -

Pelo lema 4 existe um triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\tau}, \bar{\sigma})$ em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\gamma}_1) = L(\gamma_1) \quad L(\bar{\tau}) = L(\tau) \quad L(\bar{\sigma}) = L(\sigma) \text{ e}$$

$$\angle(-\bar{\gamma}_1'(\ell_1), \bar{\tau}'(0)) = \bar{\alpha} \leq \alpha \quad \text{e} \quad \angle(-\bar{\tau}'(\ell), -\bar{\sigma}'(k)) = \bar{\alpha}_1 \leq \pi/2.$$

Seja $\bar{\theta}: [\ell, \ell_2] \rightarrow M^{H-\epsilon}$ geodésica de $M^{H-\epsilon}$ parametrizada pelo comprimento de arco, definida por

$$\bar{\theta}(\ell) = \bar{\tau}(\ell) \quad \text{e} \quad \bar{\theta}'(\ell) = \bar{\tau}'(\ell).$$

Ponhamos $\bar{\gamma}_2 = \bar{\tau} \cup \bar{\theta}$, observe que

$$\angle(-\bar{\sigma}'(k), \bar{\theta}'(\ell)) = \pi - \bar{\alpha}_1 \geq \pi/2$$

desde que $(\sigma, \theta, \pi/2)$ é uma dobra reta fina segue-se pelos lemas 1 e 5 que

$$\rho(\bar{\sigma}(0), \bar{\theta}(\ell_2)) \geq \rho(\sigma(0), \theta(\ell_2))$$

ou seja

$$\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)).$$

Desde que

$$\angle(-\bar{\gamma}_1'(l_1), \bar{\gamma}_2'(0)) = \bar{\alpha} \leq \alpha$$

o resultado desejado segue-se usando o lema 1.

c.q.d.

Novamente aqui vale a mesma observação feita após o lema 5; tendo as noções de dobras finas nada mais natural do que definir-se a noção de triângulo fino.

DEFINIÇÃO -

Dado um triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ como em (A), diremos que é um triângulo fino se $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ e $(\gamma_2, \gamma_3, \alpha_1)$ são dobras finas.

Como consequência imediata dos lemas anteriores temos:

LEMA 8 -

(A) vale para triângulos finos.

PROVA -

Fixemos um vértice, digamos $\gamma_2(0)$, do triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ que estamos supondo fino.

Pelos lemas 5-7 e pelo lema 3 existe um triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com $L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i)$ $i=1,2,3$ e $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.

Como os lados do triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tem comprimento $\leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$

e pelo lema 2, um triângulo nessas condições em $M^{H-\epsilon}$ é determinado pelo comprimento de seus lados teremos que fixarmos o vértice $\gamma_3(0)$ obteremos o mesmo triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com $\bar{\alpha}_1 \leq \alpha_1$ o que prova (A) para triângulos finos.

c.q.d.

Passaremos agora a provar o teorema de Toponogov no caso geral; a idéia é dividir um triângulo arbitrário em triângulos finos e aplicar os resultados até aqui obtidos.

Dado uma dobra arbitrária $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ como em (B), fixemos um inteiro positivo N e seja

$$\tau_{k,l} = \gamma_2 \left| \left[\frac{k l_2}{N}, \frac{(k+l) l_2}{N} \right] \right|$$

onde k, l são inteiros com $0 \leq k, l \leq N$, $k+l \leq N$.

Seja σ_k uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando

$$\gamma_1(0) \text{ a } \gamma_2 \left(\frac{k l_2}{N} \right),$$

com $\sigma_0 = \gamma_1$ e seja ainda

$$T_{k,l} = (\sigma_k, \tau_{k,l}, \sigma_{k+l})$$

Nós podemos supor que $L(\gamma_1) + L(\sigma_N) \geq L(\gamma_2)$ pois caso contrário (B) segue-se trivialmente; de fato se $L(\gamma_1) + L(\sigma_N) < L(\gamma_2)$ então

$$\begin{aligned} \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) &= L(\sigma_N) < L(\gamma_2) - L(\gamma_1) = \\ &= L(\bar{\gamma}_2) - L(\bar{\gamma}_1) \leq \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} L(\bar{\gamma}_2) &= \rho(\bar{\gamma}_2(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)) \leq \rho(\bar{\gamma}_2(0), \bar{\gamma}_1(0)) + \\ &+ \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)) = L(\bar{\gamma}_1) + \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)). \end{aligned}$$

Assim a partir de agora assumiremos que

$$L(\gamma_1) + L(\sigma_N) \geq L(\gamma_2).$$

Nós afirmamos que $T_{k,\ell}$ é realmente um triângulo geodésico em M^n , isto é todas as desigualdades triangulares estão satisfeitas.

De fato, temos

$$\begin{aligned} L(\gamma_1) + L(\sigma_N) &\geq L(\gamma_2) \\ L(\tau_{0,k}) + L(\sigma_k) &\geq L(\gamma_1) \\ L(\tau_{k+\ell, N-k-\ell}) + L(\sigma_{k+\ell}) &\geq L(\sigma_N) \end{aligned}$$

Sendo as últimas duas desigualdades consequência imediata da desigualdade triangular para distância e do fato que γ_1 e σ_N são minimais. Somando-se as desigualdades obtemos:

$$L(\tau_{0,k}) + L(\sigma_k) + L(\tau_{k+\ell, N-k-\ell}) + L(\sigma_{k+\ell}) \geq L(\gamma_2)$$

mas

$$L(\gamma_2) = L(\tau_{0,k}) + L(\tau_{k,\ell}) + L(\tau_{k+\ell, N-k-\ell})$$

logo

$$L(\sigma_k) + L(\sigma_{k+\ell}) \geq L(\tau_{k,\ell}).$$

As desigualdades

$$L(\sigma_k) + L(\tau_{k,\ell}) \geq L(\sigma_{k+\ell}) \quad \text{e} \quad L(\tau_{k,\ell}) + L(\sigma_{k+\ell}) \geq L(\sigma_k)$$

são decorrência imediata da desigualdade triangular para distância e do fato que σ_k , $\sigma_{k+\ell}$ são geodésicas minimais.

Logo $T_{k,\ell}$ é um triângulo geodésico em M^n .

A próxima propriedade destes triângulos é de fundamental importância para os nossos objetivos e convém destacá-la na forma de um lema.

LEMA 9 -

Para N suficientemente grande, os triângulos da forma

$$T_{k,1} = (\sigma_k, \tau_{k,1}, \sigma_{k+1})$$

são todos triângulos finos.

PROVA -

Denotaremos por $b_k = \rho\left(\gamma_1(0), \gamma_2\left(\frac{k\ell_2}{N}\right)\right)$ de modo que

$$\sigma_k: [0, b_k] \rightarrow M^n$$

seja

$$\alpha_k = \angle\left(-\sigma'_k(b_k), \gamma'_2\left(\frac{k\ell_2}{N}\right)\right) \quad \text{e} \quad \beta_k = \angle\left(-\sigma'_k(b_k), -\gamma'_2\left(\frac{k\ell_2}{N}\right)\right).$$

Pela definição de triângulo fino, precisamos mostrar que se o comprimento de $\tau_{k,1}$ for suficientemente pequeno então $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \alpha_k)$ e $(\sigma_{k+1}, \tau_{k,1}, \beta_{k+1})$ são dobras finas, $0 \leq k \leq N-1$

Para tanto utilizaremos a noção de vizinhança fortemente convexa que damos a seguir:

Dada $\Omega \subset M^n$ sub-variedade aberta de M^n diremos que Ω é fortemente convexa se:

- 1) para quaisquer pontos $p, q \in \Omega$ existe uma geodésica minimal ligando p a q e cuja imagem está inteiramente contida em Ω .
- 2) $\exists \lambda > 0$ tal que para cada $p \in \Omega$ a restrição de $\exp_p$ ao disco aberto $D_\lambda(0) \subset T_p M^n$ é um difeomorfismo e

$$\Omega \cap \exp_p(D_\lambda(0)) = B_\lambda(p)$$

(isto é, Ω é vizinhança normal de cada um de seus pontos).

Um resultado importante é que cada ponto $p \in M^n$ possui um sistema fundamental de vizinhanças normais fortemente convexas. (Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [4]).

Voltando ao lema, para cada ponto $y \in \gamma_2[0, l_2]$ consideramos um par de vizinhanças normais fortemente convexas,

$$B_{\varepsilon_y}(y), B_{\bar{\varepsilon}_y}(y) \text{ com } 0 < \bar{\varepsilon}_y < \varepsilon_y/4.$$

Devido a compacidade de $\gamma_2([0, l_2])$ é possível encontrar um recobrimento finito formado por vizinhanças normais fortemente convexas

$$B_{\bar{\varepsilon}_{y_j}}(y_j), j=1, 2, \dots, n$$

Sendo $\lambda_j > 0$, $j=1,2,\dots,n$, um número real associado a cada

$$B_{\epsilon_{y_j}}(y_j)$$

(pela parte 2) da definição de fortemente convexa) consideremos $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Seja N_1 de forma que

$$\gamma_2\left(\frac{k\ell_2}{N_1}\right) \text{ e } \gamma_2\left(\frac{(k+1)\ell_2}{N_1}\right)$$

pertençam a uma mesma vizinhança fortemente convexa

$$B_{\bar{\epsilon}_{y_i}}(y_i)$$

do recobrimento finito dado.

Isto acarretará que

$$\rho\left(\gamma_2\left(\frac{k\ell_2}{N_1}\right), \gamma_2\left(\frac{(k+1)\ell_2}{N_1}\right)\right) = \frac{\ell_2}{N_1} \leq 2\bar{\epsilon}_{y_i} < \frac{\epsilon_{y_i}}{2}$$

para algum y_i ; logo

$$\overline{B_{\frac{\ell_2}{N_1}} \left(\gamma_2 \left(\frac{k\ell_2}{N_1} \right) \right)} \subset B_{\epsilon_{y_i}}(y_i)$$

$B_{\epsilon_{y_i}}(y_i)$ é fortemente convexa $\Rightarrow \exists \lambda_i > 0$ tal que

$$B_{\epsilon_{y_i}}(y_i) \subset B_{\lambda_i}(p), \quad \forall p \in B_{\epsilon_{y_i}}(y_i); \text{ daí vem que } \frac{\ell_2}{N_1} < \frac{\epsilon_{y_i}}{2} \leq \frac{\lambda_i}{2}.$$

Repetindo o raciocínio para $0 \leq k \leq N_1 - 1$ obtemos
 $\ell_2/N_1 < \lambda/2.$

Seja $\sigma_k: [0, b_k] \rightarrow M^n$ geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando

$$\gamma_1(0) \text{ a } \gamma_2 \left(\frac{k\ell_2}{N_1} \right).$$

Podemos ter 3 situações:

a) o ângulo α_k entre σ_k e $\tau_{k,1}$ é $\pi/2$.

Neste caso consideramos $(\bar{\sigma}_k, \bar{\tau}_{k,1}, \pi/2)$ uma dobra correspondente em $M^{H-\epsilon}$ com $L(\bar{\sigma}_k) = L(\sigma_k)$, $L(\bar{\tau}_{k,1}) = L(\tau_{k,1})$.

Seja $\bar{c}$ uma geodésica minimal ligando

$$\bar{\gamma}_2 \left(\frac{(k+1)\ell_2}{N_1} \right) \text{ a } \bar{\sigma}_k(0).$$

Sabemos que

$$\bar{c}(t) = \exp_{\bar{\sigma}_k(t)} f(t) \bar{E}(t), \quad t \in [0, b_k]$$

(veja definição de dobra reto fino).

Além disso, $|f(t)|$ é o comprimento da geodésica de $M^{H-\epsilon}$ que parte de $\bar{\sigma}_k(t)$ com velocidade na direção de $\bar{E}(t)$ e termina em $\bar{c}(t)$.

Sendo $E(t)$ campo de vetores paralelo ao longo de σ_k com

$$E(b_k) = \gamma_2' \left(\frac{k\ell_2}{N_1} \right)$$

consideramos

$$c(t) = \exp_{\sigma_k(t)} f(t)E(t), t \in [0, b_k].$$

b) O ângulo α_k entre σ_k e $\tau_{k,1}$ é maior que $\pi/2$.

Neste caso consideramos $(\bar{\sigma}_k, \bar{\tau}_{k,1}, \alpha_k)$ uma dobra correspondente em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\sigma}_k) = L(\sigma_k), L(\bar{\tau}_{k,1}) = L(\tau_{k,1}).$$

Seja $\bar{c}$ uma geodésica minimal ligando os pontos

$$\bar{\gamma}_2 \left(\frac{(k+1)\ell_2}{N_1} \right) \text{ e } \bar{\sigma}_k(0).$$

Tomamos $\bar{\psi}_k: [0, \ell] \rightarrow M^{H-\epsilon}$, segmento de geodésica de $M^{H-\epsilon}$, parametrizada pelo comprimento de arco tal que

$$\bar{\psi}_k(0) = \bar{\sigma}_k(b_k), \quad \langle \bar{\psi}'_k(0), \bar{\sigma}'_k(b_k) \rangle = 0$$

$$\bar{\psi}'_k(0) = -\delta \bar{\sigma}'_k(b_k) + \beta \bar{\gamma}'_2 \left(\frac{k\ell_2}{N_1} \right) \quad \text{com } \delta, \beta > 0.$$

$\bar{\psi}_k(\ell)$ é o primeiro ponto de $\bar{\psi}_k$ que está sobre $\bar{c}$.

Seja $\psi_k: [0, \ell] \rightarrow M^n$ segmento de geodésica de M^n emanando de $\sigma_k(b_k)$ tal que

$$g_{\sigma_k(b_k)}(\psi'_k(0), \sigma'_k(b_k)) = 0, \quad \psi'_k(0) = -\delta \sigma'_k(b_k) + \beta \gamma'_2 \left(\frac{k\ell_2}{N_1} \right),$$

com $\delta, \beta > 0$ e $L(\psi_k) = L(\bar{\psi}_k) = \ell$.

Observamos que se $L(\tilde{\psi}_k) = L(\psi_k) < \frac{\lambda}{2}$ segue-se imediatamente que $(\tau_{k,1}, \psi_k, \alpha_k - \pi/2)$ é uma dobra pequena.

c) O ângulo α_k entre σ_k e $\tau_{k,1}$ é menor que $\pi/2$.

Neste caso consideramos a função $d: [0, b_k] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(X) = \rho\left(\gamma_2\left(\frac{(k+1)\ell_2}{N_1}\right), \sigma_k(X)\right)$$

d é contínua no compacto $[0, b_k]$ e portanto assume um mínimo num ponto $\ell \in [0, b_k]$, isto é, $\sigma_k(\ell)$ é o ponto, sobre σ_k , mais próximo de

$$\gamma_2\left(\frac{(k+1)\ell_2}{N_1}\right).$$

É fácil ver que

$$\sigma_k(\ell) \in B_{\frac{\ell_2}{N_1}}\left[\gamma_2\left(\frac{(k+1)\ell_2}{N_1}\right)\right] \subset B_{\epsilon_{y_j}}(y_j)$$

(logo $\ell \in [0, b_k]$)).

Seja θ_k segmento de geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando

$$\gamma_2 \left(\frac{(k+1)\ell_2}{N_1} \right) \text{ a } \sigma_k(\ell).$$

(Observemos que $L(\theta_k) < L(\tau_{k,1}) = \frac{\ell_2}{N_1}$).

Denotando

$$\xi_k = \sigma_k \Big|_{[\ell, b_k]}$$

teremos que se $L(\xi_k) < \frac{\lambda}{2}$ então $(\tau_{k,1}, \theta_k, \xi_k)$ é um triângulo pequeno.

De forma completamente análoga fazemos as mesmas considerações a respeito da dobra $(\sigma_k, \tau_{k-1,1}, \beta_k)$.

Para mostrarmos que uma dobra é fina precisamos provar que certas geodésicas são livres de pontos focais ou que certas dobras são pequenas (veja as definições de dobras finas).

As considerações feitas acima nos dão condições para que tenhamos dobras pequenas ($L(\psi_k) < \lambda/2$ e $L(\xi_k) < \lambda/2$); vamos procurar agora condições para que geodésicas sejam livres de pontos focais; o objetivo é utilizar o corolário 1.11 e para tanto precisamos de uma majoração para a curvatura riemanniana de M^n (lembramos que a hipótese do teorema de Toponogov é $K_M \geq H$).

Considerando-se um conjunto X formado pelas imagens de geodésicas minimais ligando $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(t)$, $t \in [0, \ell_2]$, é fácil ver que existe $s > 0$ tal que

$$X \subset \overline{B(\gamma_1(0), s)} = \{X \in M^n \text{ tal que } \rho(X, \gamma_1(0)) \leq s\}$$

Desde que a curvatura riemanniana de M^n é uma função contínua sobre as grassmannianas dos 2-planos de M^n temos que existe um real $L_1 > 0$ tal que, $\forall p \in \overline{B_{\gamma_1}(0), s)}$ e todo sub-espaço bi-dimensional $\pi_p \subset T_p M^n$,

$$K_p(\pi_p) \leq L_1$$

seja $r \geq s$ de tal modo que se $\sigma: [0, b] \rightarrow M^n$ é uma geodésica minimal arbitrária ligando $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(t)$ então as imagens das geodésicas que saem ortogonalmente de σ (no sentido das definições de dobras finas) e de comprimento

$$< \frac{\pi}{2\sqrt{L_1}},$$

ainda estejam contidas em $\overline{B(\gamma_1(0), r)}$.

Tomamos $L \geq L_1$ tal que, $\forall p \in \overline{B(\gamma_1(0), r)}$ e todo sub-espaço bi-dimensional $\pi_p \subset T_p M^n$,

$$K_p(\pi_p) \leq L.$$

Sendo

$$I = \min\left\{\frac{\lambda}{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{L}}\right\}$$

tomamos $N \geq N_1$ de modo que se $\sigma_k: [0, b_k] \rightarrow M^n$ é uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando

$$\gamma_1(0) \text{ a } \gamma_2\left(\frac{k\ell_2}{N}\right)$$

tenhamos:

1) se o ângulo α_k entre σ_k e $\tau_{k,1}$ for $\pi/2$ então

$$|f(t)| < I, \quad \forall t \in [0, b_k].$$

2) se o ângulo α_k entre σ_k e $\tau_{k,1}$ não for reto então

$$L(\xi_k) < I$$

com $\ell \in (0, b_k)$, $|f(t)| < I$ onde f é a função associada à dobra reta

$$(\sigma_k \Big|_{[0, \ell]}, \theta_k, \pi/2) \text{ e } |g(t)| < I$$

onde g é a função associada à dobra reta $(\sigma_k, \psi_k, \pi/2)$.

É imediato que para tal N os triângulos $T_{k,1}$ são triângulos finos, $0 \leq k \leq N-1$.

c.q.d.

A título de esclarecimento, desejamos aqui enfatizar 2 pontos:

- a) em nenhum lugar da definição de triângulo fino é assumido que σ_k, σ_{k+1} estão perto um do outro.
- b) estamos usando o fato de trabalharmos em $M^{H-\epsilon}$ pois se estivéssemos em M^H e para algum k , $L(\sigma_k) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$, então não poderíamos garantir necessariamente que

$$(\sigma_k, \tau_{k,1}, \sigma_{k+1})$$

fosse um triângulo fino, não importando o quão pequeno foi assumindo o comprimento de $\tau_{k,1}$ (veja observação após o lema 5).

A demonstração do teorema de Toponogov no caso geral será feita por indução e o próximo lema nos fornece o passo desta indução; no que se segue fixamos N de modo que os triângulos da forma $T_{k,1}$ são triângulos finos.

LEMA 10 -

Se (A) é verdadeiro para $T_{\ell,k} = (\sigma_\ell, \tau_{\ell,k}, \sigma_{\ell+k})$ para k fixado e ℓ qualquer.

Então (B) é verdadeiro para as dobras

$$(\sigma_\ell, \tau_{\ell,k+1}, \alpha_\ell) \quad \text{e} \quad (\sigma_{\ell+k+1}, \tau_{\ell,k+1}, \beta_{\ell+k+1})$$

para k fixado e ℓ qualquer onde

$$\alpha_\ell = \mathfrak{F} \left[-\sigma'_\ell(b_\ell), \gamma'_2 \left(\frac{\ell \ell_2}{N} \right) \right] \quad \text{e}$$

$$\beta_\ell = \mathfrak{F} \left[-\sigma'_\ell(b_\ell), -\gamma'_2 \left(\frac{\ell \ell_2}{N} \right) \right].$$

PROVA -

Assumindo (A) para $T_{\ell,k}$, existe um triângulo

$$\bar{T}_{\ell,k} = (\bar{\sigma}_\ell, \bar{\tau}_{\ell,k}, \bar{\sigma}_{\ell+k})$$

em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\sigma}_\ell) = L(\sigma_\ell), L(\bar{\tau}_{\ell,k}) = L(\tau_{\ell,k}), L(\bar{\sigma}_{\ell+k}) = L(\sigma_{\ell+k})$$

$$\text{e } \bar{\alpha}_\ell \leq \alpha_\ell, \bar{\beta}_{\ell+k} \leq \beta_{\ell+k}.$$

Como no lema 7, extendo a geodésica $\bar{\tau}_{\ell,k}$ "adicionando" um segmento de geodésica $\bar{\tau}_{\ell+k,1}$, parametrizado pelo comprimento de arco, de comprimento $L(\bar{\tau}_{\ell+k,1}) = L(\tau_{\ell+k,1})$.

Indicando por

$$\theta = \angle \left(-\bar{\sigma}'_{\ell+k}(b_{\ell+k}), \bar{\gamma}_2' \left[\frac{(\ell+k)\ell_2}{N} \right] \right)$$

temos

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{\ell+k} + \theta &= \pi = \alpha_{\ell+k} + \beta_{\ell+k} \quad \therefore \theta - \alpha_{\ell+k} = \beta_{\ell+k} - \bar{\beta}_{\ell+k} \geq 0 \\ &\therefore \theta \geq \alpha_{\ell+k}. \end{aligned}$$

Desde que o triângulo $(\sigma_{\ell+k}, \tau_{\ell+k,1}, \sigma_{\ell+k+1})$ é um triângulo fino, pois é o triângulo $T_{\ell+k,1}$ temos pelos lemas 8, 3 e 1

$$\rho \left(\bar{\sigma}_{\ell}(0), \bar{\gamma}_2 \left[\frac{(\ell+k+1)\ell_2}{N} \right] \right) \geq \rho \left(\gamma_1(0), \gamma_2 \left[\frac{(\ell+k+1)\ell_2}{N} \right] \right)$$

desde que $\bar{\alpha}_{\ell} \leq \alpha_{\ell}$ segue-se pelo lema 1 que (B) é verdadeiro para a dobra

$$(\sigma_{\ell}, \tau_{\ell,k+1}, \alpha_{\ell}).$$

Analogamente prova-se para a dobra

$$(\sigma_{\ell+k+1}, \tau_{\ell,k+1}, \beta_{\ell+k+1})$$

de fato, pelo lema 8, (A) vale para o triângulo $T_{\ell+k,1}$; logo existe um triângulo

$$\bar{T}_{\ell+k,1} = (\bar{\sigma}_{\ell+k}, \bar{\tau}_{\ell+k,1}, \bar{\sigma}_{\ell+k+1})$$

em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\sigma}_{\ell+k}) = L(\sigma_{\ell+k}), \quad L(\bar{\tau}_{\ell+k,1}) = L(\tau_{\ell+k,1}),$$

$$L(\bar{\sigma}_{\ell+k+1}) = L(\sigma_{\ell+k+1}) \text{ e } \bar{\alpha}_{\ell+k} \leq \alpha_{\ell+k}, \quad \bar{\beta}_{\ell+k+1} \leq \beta_{\ell+k+1}.$$

Como antes extendo a geodésica $\bar{\tau}_{\ell+k,1}$ "adicionando" um segmento de geodésica $\bar{\tau}_{\ell,k}$, parametrizado pelo comprimento de arco, de comprimento $L(\bar{\tau}_{\ell,k}) = L(\tau_{\ell,k})$.

Indicando por

$$\psi = \angle \left(-\bar{\sigma}'_{\ell+k}(b_{\ell+k}), -\bar{\gamma}'_2 \left(\frac{(\ell+k)\ell_2}{N} \right) \right)$$

temos

$$\psi + \bar{\alpha}_{\ell+k} = \pi = \alpha_{\ell+k} + \beta_{\ell+k} \quad \therefore \quad \psi - \beta_{\ell+k} = \alpha_{\ell+k} - \bar{\alpha}_{\ell+k} \geq 0$$

$$\therefore \quad \psi \geq \beta_{\ell+k}.$$

Desde que (A) vale para o triângulo $T_{\ell,k}$ temos pelos lemas 3 e 1

$$\rho \left(\bar{\sigma}_{\ell+k}(0), \bar{\gamma}_2 \left(\frac{\ell\ell_2}{N} \right) \right) \geq \rho \left(\gamma_1(0), \gamma_2 \left(\frac{\ell\ell_2}{N} \right) \right).$$

Desde que $\bar{\beta}_{\ell+k+1} \leq \beta_{\ell+k+1}$ segue-se pelo lema 1 que (B) é verdadeiro para a dobra $(\sigma_{\ell+k+1}, \tau_{\ell,k+1}, \beta_{\ell+k+1})$.

c.q.d.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de Toponogov em sua situação mais geral.

Dado uma dobra arbitrária $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_0)$ como em (B), fixemos um natural N de modo que os triângulos da forma $T_{k,1}$ sejam triângulos finos.

Passemos a considerar os triângulos da forma

$$T_{0,k} = (\sigma_0, \tau_{0,k}, \sigma_k).$$

A prova do teorema será feita por indução sobre o natural k ; afirmamos que:

i) (A) vale para $T_{0,1}$.

PROVA -

Segue-se imediatamente do lema 8 e do fato que $T_{0,1}$ é um triângulo fino.

ii) se (A) vale para $T_{0,k}$ então (A) vale para $T_{0,k+1}$.

PROVA -

Como (A) vale para $T_{0,k}$ segue-se pelo lema 10 que (B) é verdadeiro para as dobras $(\sigma_0, \tau_{0,k+1}, \alpha_0)$ e $(\sigma_{k+1}, \tau_{0,k+1}, \beta_{k+1})$, logo, fixado a dobra $(\sigma_0, \tau_{0,k+1}, \alpha_0)$ segue-se pelo lema 3 que existe um triângulo $(\bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_{0,k+1}, \bar{\sigma}_{k+1})$ em $M^{H-\epsilon}$ com

$$L(\bar{\sigma}_0) = L(\sigma_0), \quad L(\bar{\tau}_{0,k+1}) = L(\tau_{0,k+1}), \quad L(\bar{\sigma}_{k+1}) = L(\sigma_{k+1})$$

$$\text{e } \bar{\alpha}_0 \leq \alpha_0.$$

Como os lados do triângulo $T_{0,k+1} = (\sigma_0, \tau_{0,k+1}, \sigma_{k+1})$ tem comprimento $\leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ e pelo lema 2, um triângulo nessas condições, em $M^{H-\epsilon}$, é determinado pelo comprimento de seus lados teremos que, se fixarmos a dobra $(\sigma_{k+1}, \tau_{0,k+1}, \beta_{k+1})$ obteremos o mesmo triângulo $(\bar{\sigma}_0, \bar{\tau}_{0,k+1}, \bar{\sigma}_{k+1})$

$$\text{em } M^{H-\epsilon} \text{ com } \bar{\beta}_{k+1} \leq \beta_{k+1}$$

o que prova (A) para o triângulo $T_{0,k+1}$.

Pelo princípio de indução segue-se que (A) é verdadeiro para o triângulo $T_{0,N}$ e pelo lema 3 vem que (B) é verdadeiro para a dobra $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_0)$.

Dado um triângulo arbitrário $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ como em (A) temos que, fixado a dobra $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$, existe pelo lema 3 um triângulo

$(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com $L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i)$, $i=1,2,3$ e $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.

Como os lados do triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tem comprimento $\leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ segue-se pelos lemas 2 e 3 que se fixarmos a dobra

$(\gamma_2, \gamma_3, \alpha_1)$

obteremos o mesmo triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com $\bar{\alpha}_1 \leq \alpha_1$ o que prova (A) para o triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

As considerações feitas acima são a prova do seguinte lema

LEMA 11 -

O teorema de Toponogov (nas suas duas formas (A) e (B)) é verdadeiro quando comparado a triângulos em $M^{H-\epsilon}$, $\epsilon > 0$.

Nesta situação, sabemos que para todo $\epsilon > 0$

$$\rho(\bar{\gamma}_1^\epsilon(0), \bar{\gamma}_2^\epsilon(l_2)) \geq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$$

onde $\bar{\gamma}_1^\epsilon, \bar{\gamma}_2^\epsilon$ são segmentos de geodésicas em $M^{H-\epsilon}$ tais que

$$\bar{\gamma}_1^\epsilon(l_1) = \bar{\gamma}_2^\epsilon(0)$$

$$L(\bar{\gamma}_i^\epsilon) = L(\gamma_i) = l_i, \quad i=1,2$$

$$\angle((\bar{\gamma}_1^\epsilon)'(l_1), (\bar{\gamma}_2^\epsilon)'(0)) = \alpha = \angle(-\gamma_1'(l_1), \gamma_2'(0))$$

Considerando-se a função $\phi(\epsilon) = \rho(\bar{\gamma}_1^\epsilon(0), \bar{\gamma}_2^\epsilon(l_2))$ é imediato que tal função é contínua em ϵ (isto pode ser visto observando-se a lei dos cossenos em $M^{H-\epsilon}$

$$\begin{aligned} \cos[\phi(\epsilon)\sqrt{H-\epsilon}] &= \cos[l_1\sqrt{H-\epsilon}]\cos[l_2\sqrt{H-\epsilon}] + \\ &+ \sin[l_1\sqrt{H-\epsilon}]\sin[l_2\sqrt{H-\epsilon}]\cos \alpha \text{ para } H-\epsilon > 0 \end{aligned}$$

$$[\phi(\epsilon)]^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \alpha \text{ para } H-\epsilon = 0$$

$$\begin{aligned} \cosh[\phi(\epsilon)\sqrt{-(H-\epsilon)}] &= \cosh[l_1\sqrt{-(H-\epsilon)}]\cosh[l_2\sqrt{-(H-\epsilon)}] - \\ &- \sinh[l_1\sqrt{-(H-\epsilon)}]\sinh[l_2\sqrt{-(H-\epsilon)}]\cos \alpha \text{ para } H-\epsilon < 0. \end{aligned}$$

Portanto fazendo-se $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos que (B) é verdadeiro para M^H ; embora nós tenhamos mostrado que (B) implica (A) somente no caso $\epsilon > 0$, uma modificação apropriada dos argumentos do lema 3 será usada para provar que tal implicação é verdadeira para $\epsilon = 0$.

Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ um triângulo geodésico em M^n como em (A).

Suponhamos inicialmente $L(\gamma_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$, $i=1,2,3$.

Consideremos $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha_3)$ uma dobra em M^H com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i), \quad i=1,2.$$

Como $L(\gamma_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ temos que a função f do lema 1 é estritamente crescente (veja observação após o lema 1).

Mas por (B) temos

$$\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$$

Além disso como $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é triângulo, temos

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) \geq |\ell_1 - \ell_2|$$

logo podemos construir uma dobra em M^H , $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\alpha}_3)$ com

$$L(\bar{\sigma}_i) = L(\gamma_i), \quad i=1,2$$

$$\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$$

$$\rho(\bar{\sigma}_1(0), \bar{\sigma}_2(\ell_2)) = \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) = \ell_3$$

Seja $\bar{\sigma}_3$ uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando $\bar{\sigma}_2(\ell_2)$ a $\bar{\sigma}_1(0)$.

Então $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ é um triângulo geodésico em M^H com

$$L(\bar{\sigma}_i) = L(\gamma_i), \quad i=1,2,3 \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$$

Uma demonstração análoga a do lema 2, nos mostra que um triângulo em M^H com lados de comprimento $< \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ é determinado, a menos de isometria, pelo comprimento de seus lados.

Logo se repetirmos o raciocínio feito acima para a dobra $(\gamma_2, \gamma_3, \alpha_1)$ obteremos o mesmo triângulo $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ em M^H com $\bar{\alpha}_1 \leq \alpha_1$ o que prova (A) para o triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ e M^H .

Suponhamos agora $L(\gamma_i) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ para algum i ; neste ca-

so dividiremos o nosso estudo em duas partes:

a) Suponhamos $L(\gamma_2) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$.

Consideremos $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha_3)$ uma dobra em M^H com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i), \quad i=1,2.$$

Como

$$\ell_2 = L(\gamma_2) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

temos que

$$\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)) = |\ell_1 - \ell_2| = \frac{\pi}{\sqrt{H}} - \ell_1$$

(veja observação após o lema 1).

Por (B) temos

$$\rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\ell_2)) \geq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(\ell_2)) = \ell_3$$

$$\therefore \frac{\pi}{\sqrt{H}} - \ell_1 \geq \ell_3, \text{ ou seja, } \ell_1 + \ell_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

Por outro lado, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é um triângulo em M^n , logo,

$$\ell_1 + \ell_3 \geq \ell_2 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}; \text{ portanto } \ell_1 + \ell_3 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

O triângulo em M^H agora é facilmente obtido, pois tomando-se $\bar{\gamma}_2: [0, \ell_2] \rightarrow M^H$ uma geodésica da esfera M^H tal que

$$L(\bar{\gamma}_2) = \ell_2 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

construimos um círculo máximo em M^H que faz um ângulo $\beta = \min\{\alpha_1, \alpha_3\}$ com $\bar{\gamma}_2$.

Como $\ell_1 + \ell_3 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ tomamos sobre este círculo máximo as

geodésicas

$\bar{\gamma}_1: [0, \ell_1] \rightarrow M^H$ e $\bar{\gamma}_3: [0, \ell_3] \rightarrow M^H$ com $L(\bar{\gamma}_i) = \ell_i$, $i=1,3$.

então $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ é um triângulo em M^H com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i), \quad i=1,2,3 \text{ e } \bar{\alpha}_1 = \beta \leq \alpha_1 \text{ e } \bar{\alpha}_3 = \beta \leq \alpha_3.$$

b) Suponhamos $L(\gamma_2) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$

Assim $L(\gamma_1) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ ou $L(\gamma_3) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$; apenas para fixar idéias,

suponhamos que $L(\gamma_1) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$; de forma análoga à parte a) obtemos que $\ell_2 + \ell_3 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$.

Consideremos $(\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3, \alpha_1)$ uma dobra em M^H com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i), \quad i=2,3.$$

Por (B) temos

$$\rho(\bar{\gamma}_2(0), \bar{\gamma}_3(\ell_3)) \geq \rho(\gamma_2(0), \gamma_3(\ell_3)) = \ell_1 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

Portanto

$$\rho(\bar{\gamma}_2(0), \bar{\gamma}_3(\ell_3)) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

Assim $\bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3$ é uma geodésica quebrada ligando pontos antípodos sobre a esfera M^H .

Mas $L(\bar{\gamma}_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$, $i=2,3$; logo $\bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3$ é uma geodésica diferenciável, ou seja, $\bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3$ é parte de um círculo máximo de M^H ligando $\bar{\gamma}_2(0)$ a $\bar{\gamma}_3(\ell_3)$ de onde concluímos que $\alpha_1 = \pi$.

Para obtermos o triângulo desejado em M^H , tomamos $\bar{\gamma}_1: [0, \ell_1] \rightarrow M^H$ uma geodésica da esfera M^H tal que

$$L(\bar{\gamma}_1) = \ell_1 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

Construímos um círculo máximo em M^H que faz um ângulo α_3 com $\bar{\gamma}_1$.

Como $\ell_2 + \ell_3 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ tomamos sobre este círculo máximo as geodésicas

$$\bar{\gamma}_2: [0, \ell_2] \rightarrow M^H \text{ e } \bar{\gamma}_3: [0, \ell_3] \rightarrow M^H \text{ com } L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i) = \ell_i, \\ i=2,3.$$

Então $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ é um triângulo em M^H com

$$L(\bar{\gamma}_i) = L(\gamma_i), \quad i=1,2,3 \text{ e } \bar{\alpha}_1 = \pi = \alpha_1 \quad \bar{\alpha}_3 = \alpha_3.$$

Observe que no caso em que $L(\gamma_i) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ para algum i , o triângulo obtido em M^H não é único.

Temos assim demonstrado completamente o teorema de Toponogov.

c.q.d.

OBSERVAÇÃO -

A hipótese, no teorema de Toponogov, de que γ_1 é minimal é essencial conforme mostra o seguinte exemplo:

Consideremos $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobra em $M^{H+\epsilon}$ onde $H > 0$, $\epsilon > 0$ e pequeno, $\alpha > 0$ e $L(\gamma_i) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$, $i=1,2$.

γ_1 não é minimal (observe que $\frac{\pi}{\sqrt{H}} > \frac{\pi}{\sqrt{H+\epsilon}}$); temos que

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) > 0 \text{ enquanto que } \rho(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) = 0.$$

CAPÍTULO 3

GEODÉSICAS QUE VÃO AO INFINITO

Uma aplicação típica do teorema de Toponogov é observar o comportamento de uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco

$$\gamma:[0,\infty) \rightarrow M^n$$

onde (M^n, g) é uma variedade riemanniana completa não-compacta; especificamente nós procuraremos conhecer condições em que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\gamma(0), \gamma(t)) = \infty.$$

Iniciamos com um exemplo bastante simples; consideremos o cilindro reto

$$M^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x^2 + y^2 = 1\}.$$

Existem 3 classes de geodésicas sobre o cilindro M^2 :

- a) as geratrizes paralelas ao eixo;
- b) as geodésicas fechadas perpendiculares às geratrizes;
- c) as hélices.

Note-se que as geodésicas do tipo (b) são as úni-

cas nesta variedade não-compacta que permanecem num conjunto compacto para todo $t \in [0, \infty)$ e as do tipo (a) são as únicas que realizam distância entre seus pontos extremos para todo t , isto é,

$$\rho(\gamma(0), \gamma(t)) = t, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

DEFINIÇÃO 3.1 -

Seja (M^n, g) variedade riemanniana completa não-compacta.

Um raio é uma geodésica $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M^n$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\rho(\gamma(0), \gamma(t)) = t, \quad \forall t \in [0, \infty)$.

PROPOSIÇÃO 3.2 -

Em qualquer variedade riemanniana completa não-compacta (M^n, g) existe pelo menos um raio partindo de cada ponto de M^n .

PROVA -

Dado $p \in M^n$, como a variedade é não-compacta, existe uma sequência de pontos (p_i) em M^n tal que $\rho(p, p_i) \rightarrow +\infty$.

Seja γ_i uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando p a p_i .

$(\gamma'_i(0))$ é uma sequência de pontos do compacto

$$S_p^1 = \{\vec{v} \in T_p M^n / |\vec{v}|=1\}$$

e tem portanto sub-sequência convergente para um elemento

$$\vec{v} \in S_p^1.$$

Seja $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M^n$ geodésica de M^n tal que $\gamma(0)=p$ e $\gamma'(0)=\vec{v}$.

Afirmamos que para todo $a > 0$, $\gamma|_{[0,a]}$ é minimal e portanto γ é um raio de M^n partindo de p .

De fato, pelo teorema da dependência contínua das soluções de um sistema de equações diferenciais relativamente a condições iniciais,

$$\gamma|_{[0,a]} \text{ é o limite uniforme de segmentos } \gamma_i|_{[0,a]},$$

que são todos minimais para i suficientemente grande; devido a continuidade da função distância obtemos que

$$\rho(\gamma(0), \gamma(a)) = a.$$

$$\text{Logo } \gamma|_{[0,a]} \text{ é minimal.}$$

c.q.d.

Em particular, temos a seguinte consequência imediata:

COROLÁRIO 3.3 -

Por cada ponto existe uma geodésica que eventualmente deixa todo conjunto limitado de uma variedade riemanniana completa não-compacta.

Voltando ao exemplo do cilindro, observamos que por cada ponto $p \in M^2$ existem dois raios partindo de p .

Observamos também que qualquer geodésica γ de M^2 que faz um

ângulo menor que $\pi/2$ com um raio vai ao infinito, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\gamma(t), \gamma(0)) = \infty$$

$$\alpha < \pi/2$$

tendo em mente este exemplo nós propomos um teorema que nos dá alguma informação no caso em que M^n tem curvatura seccional não-negativa.

TEOREMA 3.4 -

Seja (M^n, g) variedade riemanniana completa não-compacta de dimensão $n \geq 2$ com $K_M \geq 0$.

Sejam $\gamma, \sigma: [0, \infty) \rightarrow M^n$ geodésicas de M^n , parametrizadas pelo comprimento de arco, com $\gamma(0) = \sigma(0)$.

Se γ é um raio de M^n e $\alpha = \angle(\gamma'(0), \sigma'(0)) < \pi/2$ então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\sigma(0), \sigma(t)) = \infty$$

(ou mais brevemente, σ vai ao infinito).

PROVA -

Pela desigualdade triangular temos

$$\rho(\gamma(0), \gamma(s)) \leq \rho(\gamma(0), \sigma(t)) + \rho(\sigma(t), \gamma(s)).$$

Como $\gamma(0) = \sigma(0)$ vem que

$$\rho(\sigma(0), \sigma(t)) \geq \rho(\gamma(0), \gamma(s)) - \rho(\sigma(t), \gamma(s)).$$

Afirmamos que para t fixado,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\rho(\gamma(0), \gamma(s)) - \rho(\sigma(t), \gamma(s))] \geq t \cos \alpha.$$

Dai teremos que

$$\begin{aligned} \rho(\sigma(0), \sigma(t)) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \rho(\sigma(0), \sigma(t)) \geq \\ &\geq \lim_{s \rightarrow \infty} [\rho(\gamma(0), \gamma(s)) - \rho(\sigma(t), \gamma(s))] \geq t \cos \alpha \end{aligned}$$

para cada t fixado.

Portanto, desde que $\cos \alpha > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\sigma(0), \sigma(t)) = \infty$$

assim fixemos $t \in [0, \infty)$.

Desde que estamos interessados em provar uma desigualdade envolvendo valores arbitrariamente grandes de s , assumiremos sem perda de generalidade $s \geq t$ e seja $\tau_{s,t}$ uma geodésica minimal, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando $\sigma(t)$ a $\gamma(s)$.

Observamos que apesar de $\sigma|_{[0,t]}$ não ser necessariamente uma geodésica minimal, ainda assim $(\sigma|_{[0,t]}, \tau_{s,t}, \gamma|_{[0,s]})$ formam um triângulo geodésico em M^n , uma vez que estão satisfeitas todas as desigualdades triangulares, a saber:

$$s + L(\tau_{s,t}) \geq t$$

$$s + t \geq L(\tau_{s,t})$$

$$t + L(\tau_{s,t}) \geq s.$$

Como $K_M \geq 0$, segue-se pelo teorema de Toponogov (A) que existe um triângulo geodésico $(\bar{\sigma}|_{[0,t]}, \bar{\tau}_{s,t}, \bar{\gamma}|_{[0,s]})$ em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$L(\bar{\sigma}|_{[0,t]}) = t \quad L(\bar{\tau}_{s,t}) = L(\tau_{s,t}) \quad L(\bar{\gamma}|_{[0,s]}) = s$$

$$\text{e } \bar{\alpha} \leq \alpha.$$

Pela lei dos cossenos em $\mathbb{R}^2$ temos

$$L(\tau_{s,t})^2 = t^2 + s^2 - 2ts \cos \bar{\alpha}.$$

logo

$$s^2 - L(\tau_{s,t})^2 = 2ts \cos \bar{\alpha} - t^2$$

$$\therefore (s - L(\tau_{s,t}))(s + L(\tau_{s,t})) = 2ts \cos \bar{\alpha} - t^2.$$

Assim

$$\rho(\gamma(0), \gamma(s)) - \rho(\sigma(t), \gamma(s)) = s - L(\tau_{s,t}) = \frac{2ts \cos \bar{\alpha} - t^2}{s + L(\tau_{s,t})}$$

Mas

$$s + t \geq L(\tau_{s,t}) \implies 1 + \frac{t}{s} \geq \frac{L(\tau_{s,t})}{s}, \quad \forall s > 0$$

$$t + L(\tau_{s,t}) \geq s \implies \frac{L(\tau_{s,t})}{s} \geq 1 - \frac{t}{s}, \quad \forall s > 0.$$

logo

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{L(\tau_{s,t})}{s} = 1.$$

Daí obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [\rho(\gamma(0), \gamma(s)) - \rho(\sigma(t), \gamma(s))] &= \lim_{s \rightarrow \infty} (s - L(\tau_s, t)) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2ts \cos \bar{\alpha} - t^2}{s + L(\tau_s, t)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2t \cos \bar{\alpha} - t^2/s}{1 + \frac{L(\tau_s, t)}{s}} = \frac{2t \cos \bar{\alpha}}{2} \\ &= t \cos \bar{\alpha} \geq t \cos \alpha. \end{aligned}$$

c.q.d.

OBSERVAÇÕES -

- 1) Pelo exemplo dado (cilindro) vemos que a hipótese $< \pi/2$ não pode ser substituída por $\leq \pi/2$.
- 2) Pode-se provar que se a curvatura de M^n é estritamente positiva então toda geodésica $\sigma: [0, \infty) \rightarrow M^n$ vai ao infinito; portanto neste caso a hipótese $< \pi/2$ pode ser substituída por $\leq \pi/2$.

Esta generalização pode ser encontrada no capítulo 8 de [3]; trata-se de um artigo de leitura bastante difícil onde para a demonstração da generalização acima necessitamos de uma construção básica na qual se define a alma de uma variedade riemanniana completa não-compacta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - BERGER, M. - "An extention of Rauch's metric comparison theorem and some applications", Illinois, Journal of Mathematics, vol.6, nº 4, (1961), pp. 200-211.
- [2] - CARMO, M.P. - Notas de Geometria Riemanniana, IMPA, 1971.
- [3] - CHEEGER, J. and EBIN, D. - Comparison theorems in Riemannian Geometry, North-Holland Publishing Company, 1975.
- [4] - HARLE, C. E. - Notas de Geometria Riemanniana, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, 1974.
- [5] - OLIVEIRA, M.E. - O Teorema de Toponogov, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1974.
- [6] - REYNOL FILHO, A. - Extensão do Teorema de Comparação de Rauch a Subvariedades, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade De São Paulo, 1975.