CLASSIFICAÇÃO DOS CONJUNTOS FE-
CHADOS E DOS DIFEOMORFISMOS
DE UMA VARIEDADE DIFERENCIÁVEL
 C^∞ DE DIMENSÃO UM.

Vera Helena Giusti de Souza

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDA-
DE DE SÃO PAULO, PARA OB-
TENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM MATEMÁTICA.

ORIENTADOR: Prof. Dr. ÂNGELO BARONE NETTO.

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do Projeto FINEP, convênio 184/CT, e da CAPES, processo nº 3.992/74.

SÃO PAULO, 1976.

Errata da demonstração de 23.5 (pág. 201).

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $j: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ a função definida por $j(x) = e^{2\pi i x}$ e consideremos os levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ de f e g por les^1 ; então,

$$\tilde{f}(x) = x + \frac{\alpha}{2\pi} \text{ e}$$

$$\tilde{g}(x) = x + \frac{\beta}{2\pi} .$$

A $0_{\tilde{f}}(0)$ e a $0_{\tilde{g}}(0)$ são densas em $[0,1]$; isto é;

$$A = \{x_n = \frac{n\alpha}{2\pi} - [\frac{n\alpha}{2\pi}] : n \in \mathbb{Z}\} \text{ é tal que } \bar{A} = [0,1] \text{ e}$$

$$B = \{y_m = \frac{m\beta}{2\pi} - [\frac{m\beta}{2\pi}] : m \in \mathbb{Z}\} \text{ é tal que } \bar{B} = [0,1] .$$

Por construção análoga à feita em 8.3, existe uma aplicação $\tilde{h}$ bijetora e crescente de A sobre B e tal que $\tilde{h}(1) = 1$; para estender $\tilde{h}$ a $[0,1]$ temos:

$$\forall x \in [0,1] \setminus A, \text{ definimos } \tilde{h}(x) = \sup \{\tilde{h}(x_n) : x_n < x\} .$$

É claro que

$$\tilde{h} \in \text{Dif}^0([0,1]) \text{ e } \tilde{h}(A) = B .$$

Por outro lado, da própria definição de $\tilde{h}$ decorre que

$$\forall x \in [0,1], \tilde{h}(0_{\tilde{f}}(x)) = 0_{\tilde{g}}(\tilde{h}(x)) ;$$

e podemos concluir que

$$\tilde{f} \approx \tilde{g} .$$

Voltando com $\tilde{h}$ para S^1 através de j , temos que

$$f \approx g .$$

**

ERRATA.

Pág.:	linha:	onde se lê:	leia-se:
9	2	$x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$	$\forall x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$
16	1	2	3.2
23	-4	$\tilde{f}(]0, \frac{1}{2}[) \cap \tilde{g}(] \frac{1}{4}, 1[)$	$\tilde{f}(]0, \frac{1}{2}[) \cap \tilde{g}(] \frac{1}{4}, 1[)$
37	1	3	7.3
37	6	4	7.4
37	8	5	7.5
37	10	6	7.6
48	4	.3	10.3
49	8	.4	10.4
54	4	(2.17)	(2.18)
55	12	De (2.17)	De (2.18)
59	10	e	$e \mathfrak{F}$
59	11	$\# \geq$	$\# \mathfrak{F} \geq$
61	10	$\forall n \in \mathbb{N}$	$\forall n \in K \subset \mathbb{N}$
61	10	$S = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$	$S = \{r_n : n \in K\}$
64	10	satisfaça	satisfaz
80	gráfico	$g = f^{-1}$	$g \equiv f^{-1}$
85	10	$k: I \rightarrow -I$	$k: I \rightarrow I$
90	16	se somente	se e somente
92	4	$\bar{A} = A;$	$\bar{A} = A \text{ e } \{0,1\} \subset A;$

Pág.:	linha:	onde se lê:	leia-se
102	10	f é decrescente	g é decrescente
102	11	$g^2(x) > g(f(x))$	$g^2(x) < g(f(x))$
119	-2	$ \alpha < \frac{\epsilon}{2^{1+1} \max \dots}$	$ \alpha < \frac{\epsilon}{\max \dots}$
139	-5	$B_r(f, \epsilon) \supset B_1(f, \epsilon)$	$B_r(f, \epsilon) \subset B_1(f, \epsilon)$
145	4	18.2	19.2
159	11	$\tilde{B} = j_1^{-1}(B) \cap I.$	$\tilde{B} = j_1^{-1}(B) \cap I,$ com $j_1(x) = z_1 e^{2\pi i x}$
163	6	$(\frac{\partial \psi}{\partial t} = 1$	$(\frac{\partial \psi}{\partial t} = 1$
170	gráfico	$f(z)$	$f(z_0)$
190	5	$\overrightarrow{z_q z_r} \cap$	$\overrightarrow{z_q z_r} \cap$
192	6	$0_g(k(z)).$	$= 0_g(k(z)).$
192	11	$= g^{\psi(i)} _{h(z_0)\bar{z}_j}$	$\left(g _{\overrightarrow{h(z_0)\bar{z}_j}}\right)^{\psi(i)}$

ABSTRACT.*

The main result of this work is the classification, by homeomorphism, in a natural way, of the closed sets of a one dimensional C^∞ differentiable manifold.

In the case of the interval $[0,1]$, this classification is equivalent to associating to each closed set a conveniently ordered sequence of real numbers and to compare, to the effect of conjugation, the order types of the sequences thus obtained.

We next verify what happens to the $[0,1]$ diffeomorphisms. Defining the $\approx$ conjugation by an homeomorphism which takes orbits onto orbits, strictly weaker than the habitual conjugation ($\sim$), we have the following:

$f \approx g \iff f \circ g$ is increasing and there exists h in $\text{Dif}^0([0,1])$ such that $h(\text{per}_n f) = \text{per}_n g$, $\forall n \in \{1,2\}$, where $\text{per}_n f = \{x \in [0,1] : f^n(x) = x \text{ and } f^i(x) \neq x, \text{ for } 1 \leq i < n\}$.

We extend the results, obtained for $[0,1]$, to the remaining one dimensional C^∞ differentiable manifolds.

In the case of S^1 , we prove that two ergodic diffeomorphisms are conjugate by $\approx$; and, finally, we show that if f is not ergodic, each of

* AMS(MOS) June 1975 subject classifications. Primary 58A99; Secondary 57D50.

Key words and phrases. Closed sets classification, equivalent closed sets by homeomorphism, diffeomorphisms of $[0,1]$, diffeomorphisms of S^1 , equivalent diffeomorphisms, periodic points set, rotation number, non wandering points set, ω -limit, α -limit, ergodic diffeomorphism of S^1 , non ergodic diffeomorphism of S^1 .

its orbits intersects at most once a connected component of the complement of its non wandering set; this determines a partition of the set of those components.

A question which naturally arises is how can these partitions be. The answer could lead to a classification of the non ergodic diffeomorphisms of S^1 .

Vera Helena Giusti de Souza.
Departamento de Matemática.
Inst. de Matemática e Estatística.
Universidade de São Paulo.
Cidade Universitária.
C. P. 20.570 - Ag. Iguatemi.
01000 - São Paulo.
SP - Brasil.

PREFÁCIO.

Uma das razões pelas quais se estudam os Sistemas Dinâmicos do ponto de vista genérico é evitar uma classificação de todos os conjuntos fechados de uma variedade.

Tal classificação, por homeomorfismo, para o caso de uma variedade diferenciável C^∞ de dimensão um, foi objeto de uma comunicação feita pelo Prof. Angelo Barone Netto no 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, julho de 1973. Este trabalho contém uma formalização daquelas idéias.

No capítulo 1, mostramos que toda variedade diferenciável C^∞ de dimensão um ou é difeomorfa a um intervalo ou é difeomorfa a S^1 .

No capítulo 2, definimos a conjugação topológica entre conjuntos fechados do intervalo $[0,1]$ e demonstramos que isto equivale a uma classificação, pelo tipo de ordem, das seqüências de números reais de $[0,1]$, sem ponto de acumulação. Obtemos, como era de se esperar, um espaço quociente com a potência do contínuo.

No capítulo 3, estudamos os difeomorfismos de $[0,1]$, sobre os quais demonstramos propriedades bem conhecidas. Definindo a conjugação $\approx$, por homeomorfismo que leva órbita sobre órbita, obtemos uma relação de equivalência estritamente mais fraca do que a habitual, $\sim$, por diagrama comutar (o que é mostrado com um contra-exemplo), mas que não impede de continuar válida a equivalência entre estabilidade estrutural e hiperbolicidade. Além disso, temos que:

$f \approx g$ em $[0,1] \iff f$ og for crescente e $\text{per}_n f \sim \text{per}_n g$,
 $\forall n \in \{1,2\}$,

onde $\sim$ designa a conjugação entre dois fechados (definida no capítulo 2) e $\text{per}_n f =$

$= \{x \in [0,1] : f^n(x) = x \text{ e } f^i(x) \neq x, \text{ se } 1 \leq i < n\}$.

Ainda no capítulo 3, mostramos que dado um conjunto fechado A , de $[0,1]$, é possível construir $f \in \text{Dif}^\infty([0,1])$, crescente e tal que

$$(f - \text{id})^{-1}(\{0\}) = A;$$

em particular, se A for finito, então f será hiperbólico.

No capítulo 4, estendemos os resultados, obtidos para $[0,1]$, às demais variedades diferenciáveis C^∞ de dimensão um. No caso de S^1 , "diminuímos" o número de classes de equivalência de $\approx$ sobre $\text{Dif}^r(S^1)$, pois mostramos, por exemplo, que dois difeomorfismos ergódicos conjugam por $\approx$, independentemente de seu número de rotação, influenciando estritamente o fato de que suas órbitas são topologicamente equivalentes, quando o conjunto dos pontos não errantes é todo o S^1 . Para o caso não ergódico, demonstramos que toda órbita intercepta, *no máximo*, uma vez cada componente conexa do complementar de seu conjunto não errante; e se f intercepta todas, f^n não, no seguinte sentido: estabelecendo sobre o conjunto dessas componentes a relação de equivalência "estar na mesma órbita", f determina um espaço quociente unitário e f^n um com n elementos, para todo inteiro estritamente maior que um.

Uma continuação natural deste trabalho seria, então, estudar as partições assim determinadas,

visando com isso uma classificação dos difeomorfismos não ergódicos de S^1 .

Queremos, aqui, deixar nossos agradecimentos: ao Prof. Ângelo Barone Netto, que nos proporcionou o problema e nos orientou efetivamente na elaboração deste conteúdo; ao CNP_q e ao BNDE, pelo apoio financeiro durante as fases de Aperfeiçoamento e Pós-graduação; ao Projeto FINEP e à CAPES, pelas bolsas de Mestrado; ao Manoel Peres Garcia, do Setor de Publicações do IME-USP, pelo trabalho de datilografia; ao companheiro e amigo Podalyro, pelos desenhos e pela revisão; à Maria Cristina Bonomi Baruffi, pela revisão; ao Sr. Armando Garcia Segura e sua equipe, do Setor Gráfico do IME-USP, pelo trabalho de impressão; e a todos aqueles que, em algum momento, ajudaram a elucidar as dúvidas surgidas.

São Paulo, IME-USP, setembro de 1976.

Vera Helena Giusti de Souza.

0 NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES.

1 NOTAÇÕES.

$\mathbb{N}$:	conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z}$:	conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{R}$:	conjunto dos números reais, munido da <u>topologia</u> habitual.
$\mathbb{R}^{*+}$:	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, com a topologia induzida.
$\mathbb{R}^n$:	$\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n vezes, munido da topologia habitual.
I :	$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$ com a topologia induzida.
$\mathbb{C}$:	conjunto dos números complexos, munido da norma euclidiana $ \cdot $.
S^1 :	$\{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$, com a topologia induzida.
$\bar{A}$:	aderência do conjunto A.
∂A :	fronteira do conjunto A.
$\overset{\circ}{A} = \text{int } A$:	interior do conjunto A.
A' :	derivado do conjunto A, isto é, conjunto dos pontos de acumulação de A.

$\#A$:	cardinal do conjunto A.
$A \setminus B$:	complementar do conjunto B em relação ao conjunto A, isto é, $\{x \in A : x \notin B\}$.
V_x :	vizinhança aberta do ponto x.
$f \in C^r$:	f é uma função de classe C^r , isto é, f tem derivadas até ordem r, inclusive, contínuas.
$f \in C^0$:	f é contínua.
$f: A \longrightarrow B$:	função f de domínio A e contra-domínio B.
$f _A$:	restrição da função f ao conjunto A, isto é, $f _A$ é uma aplicação definida em A, cujo gráfico está contido no gráfico de f.
$\text{Dif}^r(A, B)$:	conjunto dos difeomorfismos de A sobre B, de classe C^r , com $0 \leq r \leq \infty$.
$\text{Dif}^r(A)$:	conjunto dos difeomorfismos de A sobre A, de classe C^r , com $0 \leq r \leq \infty$.
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A:	sequência de elementos de A, isto é, uma aplicação F de $\mathbb{N}$ em A definida por $F(n) = x_n$.
$x_n \longrightarrow x$:	a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x.
$x_n \uparrow \longrightarrow x$:	a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e converge para x.
$x_n \downarrow \longrightarrow x$:	a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e converge para x.
∂M^1 :	bordo de M^1 .

$\|f\|_r$: norma C^r de f , com $f \in \text{Dif}^r(A, B)$ ou $f \in \text{Dif}^r(A)$, $0 \leq r \leq \infty$.

$B_r(f, \epsilon)$: bola aberta de $\text{Dif}^r(A, B)$ de centro em $f \in \text{Dif}^r(A, B)$ e raio $\epsilon > 0$, na norma C^r ; isto é,

$$B_r(f, \epsilon) = \{g \in \text{Dif}^r(A, B) : \|f - g\|_r < \epsilon\}.$$

2 DEFINIÇÕES.

2.1 $f: A \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação diferenciável em $A \subset \mathbb{R}^n$ se e somente se existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$ e uma função $\tilde{f}: V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, diferenciável, tais que $A \subset V$ e $f|_A = \tilde{f}$.

2.2 $f: A \longrightarrow B$ é um difeomorfismo C^r ($0 \leq r \leq \infty$) de A sobre B se e somente se f é uma bijeção de A sobre B , $f \in C^r$ e $f^{-1} \in C^r$. Em particular, se $r=0$, f chama-se homeomorfismo de A sobre B .

2.3 Carta local C^r ($0 \leq r \leq \infty$) de dimensão um para um ponto x de um espaço topológico $M \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo $h \in C^r$ de um aberto V_x de M sobre um aberto V de $\mathbb{R}$.

2.4 M^1 é uma variedade diferenciável C^r ($1 \leq r \leq \infty$) de dimensão um se e somente se M é um espaço topológico Hausdorff, com base enumerável, tal que todo ponto $x \in M$ possui uma carta local h de classe C^r e dimensão um; além disso, se x possui outra carta local g de classe C^r e dimensão um, então $g \circ h^{-1}: h^{-1}(U_x \cap V_x) \longrightarrow g(U_x \cap V_x)$ é uma

aplicação C^r .

2.5 M^1 é uma variedade diferenciável C^r ($1 \leq r \leq \infty$) de dimensão um com bordo se e somente se dado $x \in M$ ou

(1) existe uma carta local C^r de dimensão um para x ou

(2) existe um aberto V_x de M e um difeomorfismo $h \in C^r$ de V_x sobre $[0, a[$, com $a \in \mathbb{R}^{*+}$, tal que $h(x) = 0$.

2.6 Bordo de M^1 é o conjunto dos pontos de M^1 que satisfazem à condição (2) de 2.5.

2.7 J é um intervalo aberto de M^1 se e somente se ou

(1) $J \cap \partial M^1 = \emptyset$ e existem um intervalo aberto $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ e um difeomorfismo $f \in C^r$ de $]a, b[$ sobre J (isto é, $f(]a, b[) = J$)

ou

(2) $J \cap \partial M^1 = \{p\}$ e existem um intervalo $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ e um difeomorfismo $f \in C^r$ de $[a, b[$ sobre J (isto é, $f([a, b[) = J$) tais que $f(a) = p$

ou

(3) $J \cap \partial M^1 = \{p, q\}$ e existem um intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ e um difeomorfismo $f \in C^r$ de $[a, b]$ sobre J (isto é, $f([a, b]) = J$) tais que $f(a) = p$ e $f(b) = q$.

2.8 Norma C^r em $\text{Dif}^r(A, B)$ é a norma definida por:

$\forall f \in \text{Dif}^r(A, B)$,

(1) se $r < \infty$, $\|f\|_r = \sum_{i=0}^r \sup_{x \in A} |f^{(i)}(x)|$

e

(2) se $r = \infty$, $\|f\|_{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sup_{x \in A} |f^{(i)}(x)|}{2^i}$, onde $f^{(0)} = f$ e

$f^{(i)}$ é a derivada i -ésima de f , $\forall i \geq 1$.

2.9 $j: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ é a função definida por $j(x) = e^{2\pi i x}$.

2.10 Dada $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, a função $\tilde{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$j \circ \tilde{f} = f \circ j.$$

(Observamos que existem infinitas funções que satisfazem a igualdade $j \circ \tilde{f} = f \circ j$, todas diferindo por uma translação.)

2.11 $f \in \text{Dif}^r(S^1)$ ($0 \leq r \leq \infty$) preserva a orientação de S^1 se e somente se cada uma das funções $\tilde{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas em 2.10, é estritamente crescente.

2.12 $f \in \text{Dif}^r(S^1)$ ($0 \leq r \leq \infty$) inverte a orientação de S^1 se e somente se cada uma das funções $\tilde{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas em 2.10, é estritamente decrescente.

2.13 $A \subset M^1$ é dito minimal para $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, se e somente se A é fechado, invariante por f ($f(A) \subset A$) e o único subconjunto próprio de A , fechado e invariante por f , é o conjunto vazio.

2.14 O ω -limite de um ponto $z \in M^1$ por uma função $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, é o conjunto dos pontos de acumulação de $O_f^+(z) = \{f^n(z) : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Em símbolos: $\omega_f(z) = (O_f^+(z))'$.

2.15 O α -limite de um ponto $z \in M^1$ por uma função $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, é o conjunto dos pontos de acumulação de $O_f^-(z) = \{f^n(z) : n \in \mathbb{Z}^-\}$.

Em símbolos: $\alpha_f(z) = (O_f^-(z))'$.

2.16 Um ponto $p \in M^1$ é dito ponto não-errante de $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, se e somente se $\forall U$, vizinhança de p , $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\exists n \in \mathbb{Z}^*$ tal que $|n| > n_0$ e $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos não errantes de $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, é denotado por $\Omega(f)$.

1 CLASSIFICAÇÃO DAS VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS C^∞ CONEXAS DE DIMENSÃO UM.

Esta classificação baseou-se no apêndice do livro "Topology from the Differentiable Viewpoint", de John W. Milnor e no artigo "Sur les Variétés Connexes de Dimension 1", de Hellmuth Kneser, publicado no "Bulletin de la Société Mathématique de Belgique", t.X, 1958, pp. 19 a 25.

3 *Dois Lemas Importantes.*

3.1 *LEMA.*

Sejam M^1 conexa, $J=f([0,1[)$ e $K=g([0,1[)$ dois intervalos abertos de M^1 tais que $J \cap K = P = f([0,b[) = g([c,1[)$ com

$0 < b \leq 1$ e $0 \leq c < 1$. Então $J \cup K$ é um intervalo aberto de M^1 .

DEMONSTRAÇÃO.

Notemos em primeiro lugar que:

- i) se $b=1$, então $J \cup K = K$ é um intervalo aberto de M^1 ;
- ii) se $c=0$, então $J \cup K = J$ é um intervalo aberto de M^1 .

Assim, podemos supor $0 < b < 1$ e $0 < c < 1$ e vamos construir $h \in \text{Dif}^r([0, 1[, J \cup K)$ de mesma classe C^r que f ou g .

Para tanto, sejam $L_g \in \text{Dif}^\infty([0, \frac{2}{3}[, [0, 1[)$, crescente e tal que $L_g(\frac{1}{3}) = c$ e $L_f \in \text{Dif}^\infty([\frac{1}{3}, 1[, [0, 1[)$, crescente e tal que $L_f(\frac{2}{3}) = b$ (para a construção de L_f e L_g ver apêndice A) e consideremos as funções

$$\tilde{f} = f \circ L_f \in \text{Dif}^r([\frac{1}{3}, 1[, J) \text{ e } \tilde{g} = g \circ L_g \in \text{Dif}^r([0, \frac{2}{3}[, K) \quad (1.0)$$

Então, $\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}$ é crescente e vale

$$\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g} \in \text{Dif}^r([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[) \quad (1.1)$$

Vamos dividir a demonstração em três itens.

$$\text{Item 1. } (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x) = x, \quad x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[.$$

$$\text{Item 2. } \exists x_0 \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\text{ tal que } (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x_0) < x_0.$$

$$\text{Item 3. } (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x) > x, \quad \forall x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[.$$

Item 1. Neste caso, $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$, $\forall x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ e a função h procurada é definida por

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & \frac{1}{3} < x < 1; \\ \tilde{g}(x), & 0 < x < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Como

$$\tilde{f} \in \text{Dif}^r(] \frac{1}{3}, 1[, J)$$

$$\tilde{g} \in \text{Dif}^r(] 0, \frac{2}{3}[, K)$$

e

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x), \quad \forall x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[,$$

decorre que

$$h \in \text{Dif}^r(] 0, 1[, J \cup K), \quad (1.2)$$

como esperávamos de h .

Item 2. Se $\exists x_0 \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ tal que $(\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x_0) < x_0$, como $((\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}) - \text{id})|_{] \frac{1}{3}, \frac{2}{3}[}$ é contínua, existe uma vizinhança

aberta V_{x_0} na qual $(\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x) < x$; portanto

$$\begin{aligned} \exists p, q \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\text{ com } p < q \text{ tais} \\ \text{que } (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x) < x, \forall x \in [p, q]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para construir a função h procurada, vamos antes considerar a "bump function" $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ que satisfaz

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \leq p; \\ 1, & x \geq q; \\ \text{estritamente crescente em }]p, q[. \end{cases}$$

(Para mais considerações sobre λ , ver [2])

Além disso, $\lambda^{(i)}(p) = \lambda^{(i)}(q) = 0, \forall i \in \mathbb{N}^*$.

A partir de λ , consideremos a função $\bar{h} :]\frac{1}{3}, 1[\longrightarrow]\frac{1}{3}, 1[$ definida por

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} \text{id}(x), & \frac{2}{3} \leq x < 1; \\ \lambda(x) \text{id}(x) + (1-\lambda(x)) (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x), & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}; \end{cases}$$

e provemos que $\bar{h} \in \text{Dif}^r(] \frac{1}{3}, 1[)$.

a) $\bar{h}$ está bem definida e é contínua em $\frac{2}{3}$, pois $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} \bar{h}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \bar{h}(x) = \bar{h}(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$.

b) $\bar{h} \in C^r$, pois λ , id e $\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}$ são de classe C^r (pelo menos) em $] \frac{1}{3}, 1[$ e vale

$$(\lambda \text{id} + (1-\lambda) (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}))|_{]p, \frac{2}{3}[} = \text{id}|_{]p, \frac{2}{3}[}$$

c) $\bar{h}'(x) > 0$, $\forall x \in]p, q[$, pois

$$\begin{aligned} \bar{h}'(x) &= \lambda'(x) \text{id}(x) + \lambda(x) + (1-\lambda(x)) \cdot (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})'(x) - \\ &\quad - \lambda'(x) \cdot (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x) = \\ &= \lambda'(x) (\text{id}(x) - (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x)) + \lambda(x) + (1-\lambda(x)) (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})'(x) \end{aligned}$$

e como

$\lambda'(x) > 0$ em $]p, q[$ ($\lambda|_{]p, q[}$ é estritamente crescente), $\text{id}(x) - (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x) > 0$ em $]p, q[$ (da hi-

pótese), $0 < \lambda(x) < 1$ em $]p, q[$ (da definição de λ) e

$$(\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})'(x) > 0 \text{ em }]p, q[\text{ (de (1.1))},$$

decorre que

$$\bar{h}'(x) > 0, \forall x \in]p, q[. \quad (1.4)$$

d) $\bar{h}'(x) > 0, \forall x \in]\frac{1}{3}, p[\cup [q, 1[$, pois

$$\bar{h}'(x) = (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})'(x), \forall x \in]\frac{1}{3}, p[$$

e

$$\bar{h}'(x) = 1, \quad \forall x \in [q, 1[$$

e) $\bar{h}$ é injetora, pois $\bar{h}'(x) > 0, \forall x \in]\frac{1}{3}, 1[$ (de c) e d)).

f) $\bar{h}$ é sobrejetora, pois

$$\bar{h}(]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[) =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$$

e

$$\bar{h}([\frac{2}{3}, 1[) = [\frac{2}{3}, 1[.$$

g) $\bar{h} \in \text{Dif}^r(]\frac{1}{3}, 1[)$, pois $\bar{h} \in C^r$, $\bar{h}'(x) > 0$ e podemos aplicar o teorema da função inversa, que afirma que, nessas condições $\bar{h}$ é um difeomorfismo local de classe C^r ; como $\bar{h}$ é bijetora (de e), f)), temos que

$$\bar{h} \in \text{Dif}^r(]\frac{1}{3}, 1[), \quad (1.5)$$

como queríamos demonstrar.

Finalmente, construíamos a função $h:]0,1[\rightarrow K \cup J$ por

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x), & 0 < x \leq \frac{1}{3}; \\ (\tilde{f} \circ \bar{h})(x), & \frac{1}{3} < x < 1; \end{cases}$$

e provemos que $h \in \text{Dif}^r(]0,1[, K \cup J)$.

h) h é contínua em $\frac{1}{3}$, pois

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} h(x) = \tilde{g}\left(\frac{1}{3}\right) = h\left(\frac{1}{3}\right).$$

i) $h \in C^r$, pois

$\tilde{f} \circ \bar{h} \in \text{Dif}^r(] \frac{1}{3}, 1[, J)$ (de (1.5) e (1.0)),

$\tilde{g} \in \text{Dif}^r(]0, \frac{2}{3}[, K)$ (de (1.0))

e

$$(\tilde{f} \circ \bar{h})|_{] \frac{1}{3}, 1[} = \tilde{g}|_{] \frac{1}{3}, 1[} \quad (\text{da definição de } \bar{h}).$$

j) h é injetora, pois

$\tilde{f} \circ \bar{h}|_{] \frac{1}{3}, 1[}$ é injetora (de (1.5) e (1.0)),

$\tilde{g}|_{]0, \frac{1}{3}]}$ é injetora (de (1.0)).

$$(\tilde{f} \circ \bar{h}) \left(]\frac{1}{3}, 1[\right) = J \text{ (de (1.5) e (1.0)),}$$

$$\tilde{g} \left(]0, \frac{1}{3}] \right) = K \setminus P \text{ (da construção de } \tilde{g}),$$

e

$$J \cap (K \setminus P) = J \cap K \cap CP = P \cap CP = \emptyset.$$

k) *h* é sobrejetora, pois

$$(\tilde{f} \circ \bar{h}) \left(]\frac{1}{3}, 1[\right) = J,$$

$$\tilde{g} \left(]0, \frac{1}{3}] \right) = K \setminus P$$

e

$$\begin{aligned} J \cup (K \setminus P) &= J \cup (K \cap CP) = (J \cup K) \cap (J \cup CP) = \\ &= (J \cup K) \cap M^1 = J \cup K. \end{aligned}$$

1) *h* $\in \text{Dif}^r([0, 1[, J \cup K)$, pois *h* é bijetora, de classe C^r (de *i*), *j*) e *k*)),

$$(\tilde{f} \circ \bar{h}) \in \text{Dif}^r \left(]\frac{1}{3}, 1[, J \right) \text{ (de (1.5) e (1.0)),}$$

$$\tilde{g} \Big|_{]0, \frac{1}{3}]} \in \text{Dif}^r \left(]0, \frac{1}{3}], K \setminus P \right) \text{ (da construção de } \tilde{g})$$

e

$$\tilde{f} \circ \bar{h} \Big|_{] \frac{1}{3}, p[} = \tilde{g} \Big|_{] \frac{1}{3}, p[}.$$

Portanto, construímos uma função *h* tal que

$$h \in \text{Dif}^r([0, 1[, J \cup K), \quad (1.6)$$

de mesma classe que *f* e *g*.

Item 3. Se $(\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g})(x) > x$, $\forall x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, então

$(\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{f})(x) < x$, $\forall x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ e a demonstração é análoga,

se trocarmos

$$\begin{array}{lll} \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g} & \text{por} & \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{f} \\ \tilde{f} & \text{por} & \tilde{g} \\ \tilde{g} & \text{por} & \tilde{f} \\ \lambda & \text{por} & 1-\lambda \\]\frac{2}{3}, 1[& \text{por} &]0, \frac{1}{3}[\quad (\text{na definição de } \tilde{h}). \end{array}$$

Assim se definirmos a função $h :]0, 1[\rightarrow$

$\rightarrow J \cup K$ por

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & \frac{2}{3} \leq x < 1, \\ (\tilde{g} \circ \tilde{h})(x), & 0 < x < \frac{2}{3}, \end{cases}$$

prova-se analogamente aos itens h) a l) que

$$h \in \text{Dif}^r([0, 1[, J \cup K). \quad (1.7)$$

Finalmente, de (1.2), (1.6) e (1.7), podemos concluir que, em qualquer situação, temos

$$\boxed{J \cup K \text{ um intervalo aberto de } M^1.} \quad (1.8)$$

2. LEMA.

Sejam M^1 conexa, com bordo, $J = f([0,1[)$ e $K = g([0,1[)$ dois intervalos abertos de M^1 tais que $p = f(0) = g(0) \in \partial M^1$ e $J \cap K$ é conexo. Então,

$$\exists h \in \text{Dif}^r([0,1[, J \cup K)$$

tal que $h(0) = p$.

DEMONSTRAÇÃO

Como J e K são abertos de M^1 , $P = J \cap K$ é aberto de M^1 e existe $q \in P$, $q \neq p$.

Daí,

$$\begin{aligned} q \in f([0,1[) &= J \setminus \{p\} = J_p, \text{ com} \\ f|_{[0,1[} &\in \text{Dif}^r([0,1[, J_p) \text{ e} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} q \in g([0,1[) &= K \setminus \{p\} = K_p, \text{ com} \\ g|_{[0,1[} &\in \text{Dif}^r([0,1[, K_p). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como $J \cap K$ é conexo e

$J_p \cap K_p = f([0,1[) \cap g([0,1[) \neq \emptyset$, podemos concluir que

$$J_p \cap K_p \text{ é conexo.} \quad (1.11)$$

Com (1.9), (1.10) e (1.11) podemos aplicar 3.1 e afirmar que existem $\tilde{h} \in \text{Dif}^r([0,1[, J_p \cup K_p)$ e $\epsilon > 0$ tais que: $\tilde{h}|_{[0,\epsilon[} = f|_{[0,\epsilon[}$ ou $\tilde{h}|_{[0,\epsilon[} = g|_{[0,\epsilon[}$.

Portanto, se definirmos $h: [0,1[\rightarrow K \cup J$

por

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{h}(x), & 0 < x < 1, \\ p = f(0) = g(0), & x = 0, \end{cases}$$

teremos que

$$h \in \text{Dif}^r([0,1[, J \cap K) \text{ com } h(0) = p.$$

**

4. Um Teorema Importante.

Daqui em diante, suporemos que os intervalos abertos de M^1 são imagem de um dos intervalos $]0,1[$, $[0,1[$ ou $[0,1]$.

4.1 TEOREMA

Sejam M^1 conexa sem bordo ($\partial M^1 = \emptyset$), J e K dois intervalos abertos de M^1 . Então:

- cada componente conexa de $J \cap K$ é um intervalo aberto de M^1 ;
- se $P = f(]a,b[) = g(]c,d[)$ é uma componente conexa de $J \cap K$, então $[0 < c < 1 \text{ e } 0 < b < 1] \implies [a = 0 \text{ e } d = 1]$;
- $J \cap K$ tem, no máximo, duas componentes conexas;
- se $J \cap K$ for conexo, então $J \cup K$ é um intervalo aberto de M^1 ;
- se $J \cap K$ tiver duas componentes conexas, então $J \cup K$ é difeomorfa a S^1 .

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $J = f([0,1[)$ e $K = g([0,1[)$.

Se $J \cap K = \emptyset$, vale o teorema; podemos, pois, supor $J \cap K \neq \emptyset$.

a) Seja P uma componente conexa de M^1 ; então $f^{-1}(P)$ é conexo de $]0,1[$ e $g^{-1}(P)$ idem; portanto, $f^{-1}(P)$ é um intervalo de $]0,1[$ e $g^{-1}(P)$ idem e concluímos que

P é um intervalo. (1.12)

Vamos provar que P é aberto de M^1 ; como J e K são abertos de M^1 , $J \cap K$ é aberto de M^1 e

$\forall x \in P, \exists V_x$, aberta e conexa, tal que $V_x \subset J \cap K$.

Suponhamos, agora, que

$V_x \not\subset P$, isto é, $\exists y \in V_x \mid y \notin P$;

mas $x \in V_x \cap P$; portanto $V_x \cup P$ é conexo, contra a hipótese de P ser componente conexa de $J \cap K$; segue disso que $V_x \subset P$; donde $P \subset^\circ P$ e

P é aberto de M^1 . (1.13)

De (1.12) e (1.13) temos que P é um intervalo aberto de M^1 .

b) Suponhamos $0 < c < 1$ e $0 < b < 1$ e vamos provar que $a = 0$ e $d = 1$, em duas etapas:

1ª) $0 < c < 1 \implies a = 0$ ou $b = 1$;

2ª) $0 < b < 1 \implies c = 0$ ou $d = 1$.

1ª) Como $0 < c < 1$, existe $g(c) \in K$; ora, como $c \in \delta([c, d[)$ e $g \in \text{Dif}^r([0, 1[, K)$, temos que

$$g(c) \in \delta(P). \quad (1.14)$$

Mas P é aberto e $\partial M^1 = \emptyset$; portanto, $g(c) \notin P$,
donde

$$g(c) \notin J \text{ (pois } g(c) \in K). \quad (1.15)$$

Agora, se supusermos $0 < a < b < 1$, como $P = f([a, b[)$ com $f \in \text{Dif}^r([0, 1[, J)$, podemos concluir que

$$\delta P = \{f(a), f(b)\}. \quad (1.16)$$

De (1.14) e (1.16),

$$\text{ou } g(c) = f(a) \text{ ou } g(c) = f(b),$$

contra (1.15); portanto,

$$0 < c < 1 \implies a = 0 \text{ ou } b = 1. \quad (1.17)$$

2ª) Análoga à 1ª); então,

$$0 < b < 1 \implies c = 0 \text{ ou } d = 1. \quad (1.18)$$

Como, nas nossas hipóteses, $0 < c < 1$ e $0 < b < 1$, de (1.17) e (1.18) tiramos que

$$0 < b < 1 \text{ e } 0 < c < 1 \implies a = 0 \text{ e } d = 1.$$

c) Suponhamos que $J \cap K$ tem pelo menos duas componentes conexas, P e Q (portanto $P \cap Q = \emptyset$).

Como $\partial M^1 = \emptyset$, de a) podemos escrever

$$P = f([a, b[) = g([c, d[), \text{ com } 0 \leq a < b \leq 1 \text{ e } 0 \leq c < d \leq 1 \text{ e}$$

$$Q = f([\bar{a}, \bar{b}[) = g([\bar{c}, \bar{d}[), \text{ com } 0 \leq \bar{a} < \bar{b} \leq 1 \text{ e } 0 \leq \bar{c} < \bar{d} \leq 1.$$

De b), podemos supor, sem perda de generalidade, que $a = 0$ e $d = 1$.

E como $P \cap Q = \emptyset$, de b) podemos ainda concluir que

$$\bar{c} = 0 \text{ e } \bar{d} = 1.$$

Então,

$$P = f([0, b[) = g([c, 1[) \text{ com } 0 < b < 1 \text{ e } 0 < c < 1$$

e

$$Q = f([\bar{a}, 0[) = g([0, \bar{d}[) \text{ com } 0 < \bar{a} < 1 \text{ e } 0 < \bar{d} < 1.$$

Se existisse componente conexa R de $J \cap K$ tal que $P \cap R = \emptyset$ e $Q \cap R = \emptyset$, teríamos

$$R = f([\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}[) = g([\bar{\bar{c}}, \bar{\bar{d}}[), \text{ onde}$$

$$0 < \bar{\bar{a}} < 1, \text{ porque } a = 0,$$

$$0 < \bar{\bar{b}} < 1, \text{ porque } \bar{b} = 1,$$

$$0 < \bar{\bar{c}} < 1, \text{ porque } \bar{c} = 0,$$

$$0 < \bar{\bar{d}} < 1, \text{ porque } d = 1,$$

contra b).

Portanto,

$J \cap K$ tem, no máximo, duas componentes conexas.

Daqui em diante, suporemos $a = 0$ (se necessário, basta trocar J por K).

Teremos, para a componente conexa P :

	a	b	c	d	Neste caso:
	0	1	quaisquer		$P = J.$
	0	eJ	0	1	$P = K.$
*	0	eJ	eK	1	pode existir Q.
**	0	eJ	0	eK	pode existir Q.

Para os casos * e **, se existira com
 ponente conexa $Q = f(\bar{a}, 1] = g(\bar{c}, \bar{d}]$:

	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
*	eJ	1	eK	1
**	eJ	1	0	eK

com $a = 0 < b < \bar{a} < 1 = \bar{b}$ em qualquer caso;

com $c = 0 < d < \bar{c} < \bar{d} = 1$ no caso * ;

com $\bar{c} = 0 < \bar{d} < c < d = 1$ no caso ** .

d) Como $J \cap K = P$ é conexo, só existe uma componente cone
 xa, e podemos aplicar 3.1; portanto,

$J \cup K$ é um intervalo aberto de M^1

e) Sejam P e Q as duas componentes conexas de $J \cap K$; en-
 tão, temos

$$P = f([0, b[) = g([c, 1[)$$

e

$$Q = f([\bar{a}, 1[) = g([0, \bar{d}[),$$

com $b \leq \bar{a}$ e $\bar{d} \leq c$.

Sejam $L_f \in \text{Dif}^\infty(\mathbb{R})$, $L_g \in \text{Dif}^\infty(\mathbb{R})$, tais que

$$L_f(0) = 0;$$

$$L_g\left(\frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$L_f\left(\frac{1}{4}\right) = \bar{a};$$

$$L_g\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{d};$$

$$L_f\left(\frac{1}{2}\right) = 1;$$

$$L_g(1) = c.$$

(Ver Apêndice A.)

A partir de L_f e L_g definimos

$$\tilde{f} = f \circ L_f \in \text{Dif}^r([0, \frac{1}{2}[, J)$$

e

$$\tilde{g} = g \circ L_g \in \text{Dif}^r([0, L_g^{-1}(1)[, K),$$

onde estamos considerando as respectivas restrições de L_f e L_g .

Nestas condições, $\tilde{f}([0, \frac{1}{2}[)$ e $\tilde{g}([\frac{1}{4}, 1[)$ são intervalos abertos de M^1 que têm intersecção conexa, pois $\tilde{f}([0, \frac{1}{2}[) \cap \tilde{g}([\frac{1}{4}, 1[) = Q$.

De 4.1 d) decorre que

$$\exists \tilde{h} \in \text{Dif}^r([0, 1[, \tilde{f}([0, \frac{1}{2}[) \cup \tilde{g}([\frac{1}{4}, 1[)) \text{ e}$$

existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$\bar{h} \Big|_{]0, \frac{1}{4} + \epsilon_1[} = \tilde{f} \Big|_{]0, \frac{1}{4} + \epsilon_1[}$$

e

(1.19)

$$\bar{h} \Big|_{] \frac{1}{2} - \epsilon_2, 1[} = \tilde{g} \Big|_{] \frac{1}{2} - \epsilon_2, 1[}$$

Como $\tilde{g}$ está definida em $] \frac{1}{4}, L_g^{-1}(1)[$, vamos considerar a seguinte situação:

$$\tilde{g}:] \frac{1}{4}, L_g^{-1}(1)[\longrightarrow K \setminus Q$$

e

$$\tilde{h}:]1, \frac{5}{4}[\longrightarrow J \setminus Q,$$

onde $\tilde{h}$ é definida por

$$\tilde{h}(x) = h(1-x). \quad (1.20)$$

Nestas condições, temos que

$$\bar{g}(\left]-\frac{1}{2}, L_g^{-1}(1)\right[) = K \setminus Q$$

e

$$\bar{h}(\left]1, \frac{5}{4}\right[) = J \setminus Q$$

são intervalos abertos que têm intersecção conexa, pois

$$\bar{g}(\left]-\frac{1}{2}, L_g^{-1}(1)\right[) \cap \bar{h}(\left]1, \frac{5}{4}\right[) = P.$$

Aplicando 4.1 d) podemos concluir que

$\exists \bar{\bar{h}} \in \text{Dif}^r(\left]-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right[, (K \cup J) \setminus Q)$ e existem $\epsilon_3, \epsilon_4 > 0$ tais que

$$\bar{\bar{h}} \Big|_{\left]-\frac{1}{2}, 1+\epsilon_3\right[} = \bar{g} \Big|_{\left]-\frac{1}{2}, 1+\epsilon_3\right[}$$

e

(1.21)

$$\bar{\bar{h}} \Big|_{\left]L_g^{-1}(1)-\epsilon_4, \frac{5}{4}\right[} = \bar{h} \Big|_{\left]L_g^{-1}(1)-\epsilon_4, \frac{5}{4}\right[}$$

De (1.20) e (1.21) temos que

$$\bar{\bar{h}} \Big|_{\left]L_g^{-1}(1)-\epsilon_4, \frac{5}{4}\right[} = h \Big|_{\left]1-L_g^{-1}(1)+\epsilon_4, \frac{1}{4}\right[} =$$

(1.22)

$$= \tilde{f} \Big|_{\left]1-L_g^{-1}(1)+\frac{\epsilon}{4}, \frac{1}{4}\right[}$$

E de (1.19), (1.21) e (1.22) podemos esquematizar o seguinte:

Portanto, como

$$\overline{h} \Big|_{\frac{1}{2}, 1} = \overline{g} \Big|_{\frac{1}{2}, 1}$$

2

$$\overline{h} \Big|_{\left[\frac{1}{2}, 1+\epsilon_3\right]} = \tilde{g} \Big|_{\left[\frac{1}{2}, 1+\epsilon_3\right]}$$

a função $h:]0, \frac{5}{4}[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} \bar{h}(x), & 0 < x < 1; \\ \bar{\bar{h}}(x), & 1 \leq x < \frac{5}{4}, \end{cases}$$

é de classe C^r , mas não é injetora, pois

$$h\left]0, \frac{1}{4}\right[= h\left]1, \frac{5}{4}\right[= J \setminus Q.$$

Consideremos, agora a seguinte relação de equivalência R em $]0, \frac{5}{4}[$:

DEFINIÇÃO.

$\forall x, y \in]0, \frac{5}{4}[$, xRy se e somente se $h(x) = h(y)$.

Temos o seguinte diagrama:

onde $\pi:]0, \frac{5}{4}[\rightarrow]0, \frac{5}{4}[_R$ é a projeção canônica

$\pi(x) = ([x]_R)$ (portanto, π é sobrejetora e contí-

nua) e $\psi: J \setminus Q \rightarrow]0, \frac{5}{4}[_R$ é definida por

$$\psi \circ \pi = h.$$

Vamos provar que ψ é difeomorfismo C^r .

e.1) ψ é bijetora, da própria definição de ψ (e de R).

e.2) ψ é contínua, pois se tomarmos um aberto A de

JUK ,

$h^{-1}(A)$ é aberto de $]0, \frac{5}{4}[$ (h é contínua)

e

$$(\pi^{-1} \circ \psi^{-1})(A) = h^{-1}(A);$$

portanto, $\psi^{-1}(A)$ é aberto de $\frac{]0, \frac{5}{4}[}{R}$, com a topologia co-induzida pela π e

$$\psi: \frac{]0, \frac{5}{4}[}{R} \longrightarrow JUK \text{ é contínua.} \quad (1.23)$$

e.3) ψ é aberta, pois se $A \subset \frac{]0, \frac{5}{4}[}{R}$ é aberto, então,

$h^{-1}(\psi(A)) = \pi^{-1}(A)$ é aberto de $]0, \frac{5}{4}[$ e resulta que

$\psi(A)$ é aberto de JUK ,

pois h é contínua.

De (1.23) e do fato de ψ ser bijetora podemos concluir que

$$\psi \in \text{Dif}^0\left(\frac{]0, \frac{5}{4}[}{R}, JUK\right). \quad (1.24)$$

Por outro lado, π e h são difeomorfismos C^r locais; portanto, considerando π^{-1} e h^{-1} como cartas locais para x e $\psi(x)$, respectivamente, temos que

$h^{-1} \circ \psi \circ \pi$ é um difeomorfismo C^r local,

o que quer dizer que

$$\psi \text{ é difeomorfismo } C^r \text{ local} \quad (1.25)$$

De (1.24) e (1.25) concluímos que

$$\psi \in \text{Dif}^r\left(\frac{]0, \frac{5}{4}[}{R}, JUK\right).$$

Ora, a aplicação

$\exp: \frac{]0, \frac{5}{4}[}{R} \longrightarrow S^1$ definida por $\exp x = e^{2\pi i x}$ é um difeomorfismo C^∞ .

Daí, $\exp^{-1} \circ \psi: S^1 \longrightarrow JUK$ é tal que

$$\exp^{-1} \circ \psi \in \text{Dif}^r(S^1, JUK);$$

portanto,

$$JUK \text{ é difeomorfo a } S^1. \quad (1.26)$$

Falta mostrar que, neste caso, $JUK = M^1$.

e.4) $JUK \neq \emptyset$, pois $J \cap K \neq \emptyset$ por hipótese.

e.5) JUK é aberto de M^1 , pois J e K são abertos de M^1 .

e.6) $J \cup K$ é fechado de M^1 , pois $J \cup K = \exp^{-1} \circ \psi(S^1)$, S^1 é compacta, $\exp^{-1} \circ \psi$ é contínua e M^1 é Hausdorff.

Como M^1 é conexa e valem e.4), e.5), e.6), segue-se que

$$J \cup K = M^1. \quad (1.27)$$

Finalmente, de (1.26) e (1.27) chegamos

a

$J \cup K$ é difeomorfo a S^1 .

**

4.2 COROLÁRIO.

Sejam M^1 conexa com bordo ($\partial M^1 \neq \emptyset$), J e K dois intervalos abertos de M^1 . Então:

- a) cada componente conexa de $J \cap K$ é um intervalo aberto de M^1 ;
- b) se $P = f([a, b[) = g([c, d[)$ é uma componente conexa de $J \cap K$, então $[0 < c < 1$ e $0 < b < 1] \implies a = 0$ e $d = 1$;
- c) se $P \cap \partial M^1 \neq \emptyset$, então ou $P = J$ ou $P = K$;
- d) $J \cap K$ tem, no máximo, uma componente conexa;
- e) $J \cup K$ é um intervalo aberto de M^1 .

DEMONSTRAÇÃO.

- a) Análoga à do item a) de 4.1.
- b) Análoga à do item b) de 4.1.

c) Suponhamos $P = f([0, a[)$; então, $J = f([0, b[)$ e $K = g([0, c[)$ e da demonstração de 3.2 segue-se que
ou $J \subset K$ ou $K \subset J$,

donde se tem, respectivamente,

ou $P = J$ ou $P = K$.

Os demais casos são análogos ($P = f([0, 1])$ ou $P = f(]0, 1])$).

d) Se $J \cup K$ tivesse duas componentes conexas, de c) seguir-se-ia que

$P = f(]a, b[)$ e $Q = g(]c, d[)$

e poderíamos aplicar 4.1 e); mas $\partial M^1 \neq \emptyset$ e $\partial S^1 = \emptyset$, o que quer dizer que

M^1 não pode ser difeomorfa a S^1 .

Portanto,

$J \cup K$ ou é $\emptyset$ ou é conexo.

e) Decorre de 4.1 ou 3.2.

**

5 O Teorema da Classificação.

5.1 TEOREMA.

Seja M^1 , conexa; então, ou M^1 é difeomorfa a um intervalo ou M^1 é difeomorfa a S^1 .

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $x_0 \in M^1$ e consideremos a família dos intervalos abertos de M^1 aos quais x_0 pertence. Vamos considerar os dois itens possíveis.

Item 1. Existem dois intervalos abertos, J e K , tais que $x_0 \in J \cap K$ e $J \cap K$ tem duas componentes conexas.

Item 2. Quaisquer que sejam J e K tais que $x_0 \in J \cap K$, tem-se que $J \cap K$ é conexo.

Item 1. Neste caso, de 4.1 e) decorre que

$$M^1 \text{ é difeomorfa a } S^1. \quad (1.28)$$

Item 2. Consideremos todos os intervalos aos quais x_0 pertence. De 4.1 d) ou 4.2 e) decorre que

existe um intervalo aberto, V_{x_0} , maximal; (1.29)

isto é, se $x_0 \in K$, intervalo aberto, então $K \subset V_{x_0}$.

Provemos que V_{x_0} coincide com M^1 .

a) $V_{x_0} \neq \emptyset$, pois $x_0 \in V_{x_0}$.

b) V_{x_0} é aberto de M^1 , pois é reunião de abertos de M^1 .

c) V_{x_0} é fechado de M^1 , pois se tomarmos $y \in \bar{V}_{x_0}$, existe um intervalo aberto, V_y , tal que $y \in V_y$ e $V_y \cap V_{x_0} \neq \emptyset$; mas, de 4.1 d) ou 4.2 e) decorre que

$V_y \cup V_{x_0}$ é um intervalo aberto de M^1 ,
que junto com (1.29) implica que

$$y \in V_y \cup V_{x_0} \subset V_{x_0}.$$

Como M^1 é conexa e valem a), b), c), podemos concluir que

$$V_{x_0} = M^1,$$

isto é,

$$\boxed{M^1 \text{ é difeomorfa a um intervalo.}} \quad (1.30)$$

De (1.28) e (1.30) segue-se 5.1.

**

Para finalizar, observamos que, se estivéssemos trabalhando com variedades topológicas, todos os resultados deste capítulo continuariam válidos, se onde se lê difeomorfismos lêssemos homeomorfismos, com simplificação na demonstração de 3.1: acompanhando a notação daquela demonstração, teríamos

$$\tilde{f} \in \text{Dif}^0\left(\left] \frac{1}{3}, 1 \right[, J\right)$$

e

$$\tilde{g} \in \text{Dif}^0\left(\left] 0, \frac{2}{3} \right[, K\right),$$

com

$$\tilde{f}\left(\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[\right) = \tilde{g}\left(\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[\right) = J \cap K,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \tilde{f}(x) = \tilde{g}(\frac{1}{3})$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} \tilde{g}(x) = \tilde{f}(\frac{2}{3});$$

portanto, $h:]0,1[\rightarrow JUK$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ f(x), & \frac{1}{3} < x < 1, \end{cases}$$

satisfaria

$$h \in \text{Dif}^0([0,1[, JUK),$$

como seria necessário para o caso de variedades topológicas.

2 CONJUNTOS FECHADOS DO INTERVALO $[0,1]$.

Com o resultado dado por 5.1, podemos dizer que, a menos de difeomorfismo, as variedades diferenciáveis C^∞ conexas de dimensão um são ou $[0,1]$, ou $]0,1]$, ou $]0,1[$, ou S^1 .

Neste capítulo e no capítulo 3 trabalharemos com o intervalo $I = [0,1]$, munido da topologia habitual, por ser compacto, e no capítulo 4 estudaremos os demais casos.

6 *Fechados Equivalentes.*

Sejam $A, B \subset M^1$ tais que $\bar{A} = A$ e $\bar{B} = B$.

6.1 *DEFINIÇÃO.*

A e B conjugam topologicamente em M^1 se e somente se existe $f \in \text{Dif}^0(M^1)$ tal que $f(A) = B$. Notação: $A \sim B$.

6.2 *PROPOSIÇÃO.*

$\sim$ é uma relação de equivalência.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Propriedade reflexiva.

$A \sim A$, pois $\text{id} \in \text{Dif}^0(M^1)$ e $\text{id}(A) = A$.

Item 2. Propriedade simétrica.

Suponhamos que $A \sim B$ por $f \in \text{Dif}^0(M^1)$; então $B \sim A$ por $f^{-1} \in \text{Dif}^0(M^1)$.

Item 3. Propriedade transitiva.

Suponhamos que $A \sim B$ por $f \in \text{Dif}^0(M^1)$ e que $B \sim C$ por $g \in \text{Dif}^0(M^1)$; então, $f(A) = B$ e $g(B) = C$. Como $g \circ f \in \text{Dif}^0(M^1)$ e $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$, temos que $A \sim C$.

**

7 Exemplos de Fechados Conjugados.

7.1 $A = \{0, a, 1\}$ e $B = \{0, b, 1\}$ com $0 < a, b < 1$.

$A \sim B$ pois $f: I \rightarrow I$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x, & 0 \leq x \leq a, \\ 1 + \frac{b-1}{a-1}(x-1), & a < x \leq 1, \end{cases}$$

é tal que $f \in \text{Dif}^0(I)$ e $f(A) = B$.

7.2 $A = [0, a]$ e $B = [b, 1]$, com $0 < a, b < 1$.

$A \sim B$, pois $f: I \rightarrow I$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{b-1}{a}x, & 0 \leq x < a, \\ \frac{b}{a-1}(x-1), & a < x \leq 1, \end{cases}$$

é tal que $f \in \text{Dif}^0(I)$ e $f(A) = B$.

- 3 Se $A \sim B$ em I e $0 \in A$, então ou $0 \in B$ ou $1 \in B$.

Seja $f \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $f(A) = B$; ou f é crescente ou f é decrescente; portanto, ou $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$, respectivamente.

Como $f(0) \in B$, temos que ou $0 \in B$ ou $1 \in B$.

- 4 Se $A \sim B$ em I e $1 \in A$, então ou $0 \in B$ ou $1 \in B$.

Análogo ao 7.3.

- 5 Se $A \sim B$ em I e $\{0,1\} \subset A$, então $\{0,1\} \subset B$.

Decorre de 7.3 e 7.4.

- 6 $A = \{x_0=0, x_1, \dots, x_n=1\} \subset I$ e $B = \{y_0=0, y_1, \dots, y_m=1\} \subset I$ com $x_i < x_j$, $i < j$ e $y_i < y_j$, $i < j$; $A \sim B$ em I se e somente se $m=n$.

$A \sim B$ se e somente se existe $f \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $f(A) = B$.

Ora, se $A \sim B$ por $f \in \text{Dif}^0(I)$, ou f é crescente ou f é decrescente; portanto, ou $f(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, ou $f(x_i) = y_{m-i}$, $0 \leq i \leq n$, respectivamente; em qualquer dos casos, tem-se que $m=n$.

Reciprocamente, se $m=n$, basta construir $f: I \rightarrow I$ da seguinte forma:

$f: [x_i, x_{i+1}] \rightarrow [y_i, y_{i+1}]$ linear e crescente, $0 \leq i \leq n-1$; f é tal que

$$f \in \text{Dif}^0(I) \text{ e } f(A) = B.$$

$$7.7 \quad A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset I \quad \text{e} \quad B = \{1\} \cup \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset I.$$

$A \sim B$ pois $f: I \rightarrow I$ definida por $f(x) = 1-x$ é tal que $f \in \text{Dif}^0(I)$ e $f(A) = B$.

7.8 Se $A \sim B$ por $f \in \text{Dif}^0(I)$, então, em particular, tem-se que $f(A \setminus A') = B \setminus B'$, pois $f \in \text{Dif}^0(I)$ e $f(A) = B$.

8 O Conjunto de Cantor.

8.1 DEFINIÇÃO.

Seja $A \subset I$; A é chamado conjunto de Cantor de I se e somente se $\bar{A} = A$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ e $A' = A$.

Vamos mostrar que dois conjuntos de Cantor conjugam, se ambos tiverem o 0 e o 1.

Seja A um conjunto de Cantor de I tal que $\{0,1\} \subset A$ e consideremos a decomposição de CA em suas componentes conexas; portanto

$$CA = \bigcup_{n \in J_A \subset \mathbb{N}}]a_n, b_n[.$$

8.2 PROPOSIÇÃO.

Nas condições acima, tem-se que $J_A = \mathbb{N}$.

DEMOSTRAÇÃO.

Ora, é verdade que

$$J_A \subset \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

pois basta tomar um racional em cada componente conexa, que é do tipo $]a_n, b_n[$.

Vamos supor que $\#J_A = m < \infty$;
então, existem $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que

$$n_i < n_j \text{ se } i < j \text{ e } CA = \bigcup_{i=1}^m]a_{n_i}, b_{n_i}[$$

e podemos ordenar os intervalos da seguinte forma

$$]a_{n_i}, b_{n_i}[<]a_{n_j}, b_{n_j}[\text{ se e somente se } a_{n_i} < a_{n_j}. \quad (2.2)$$

Fixado $p \in \{1, \dots, m-1\}$, seja

$$n_q = \min_{2 \leq i \leq m} \{n_i : n_i > n_p\}; \text{ duas coisas podem ocorrer: ou}$$

$$b_{n_p} = a_{n_q} \text{ ou } b_{n_p} < a_{n_q}.$$

Se $b_{n_p} = a_{n_q}$, então a_{n_q} é isolado, contra $A' = A$.

Se $b_{n_p} < a_{n_q}$, então $[b_{n_p}, a_{n_q}] \subset \overset{\circ}{A} = \emptyset$, o que é absurdo.

Portanto,

$$\#J_A > m, \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

De (2.1) e (2.3) concluímos que

$J_A = \mathbb{N}.$

★★

8.3 PROPOSIÇÃO.

Sejam A e B dois conjuntos de Cantor de I , tais que $\{0,1\} \subset A \cap B$; então, $A \sim B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam, de 8.1,

$$CA = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[\quad \text{e} \quad CB = \bigcup_{m \in \mathbb{N}}]c_m, d_m[$$

as decomposições de CA e CB em componentes conexas, e consideremos os conjuntos

$$M_A = \left\{ e_n = \frac{a_n + b_n}{2} :]a_n, b_n[\text{ é componente conexa de } CA \right\},$$

$$M_B = \left\{ g_m = \frac{c_m + d_m}{2} :]c_m, d_m[\text{ é componente conexa de } CB \right\},$$

$$\tilde{CA} = \{]a_n, b_n[:]a_n, b_n[\text{ é componente conexa de } CA \}$$

e

$$\tilde{CB} = \{]c_n, d_n[:]c_n, d_n[\text{ é componente conexa de } CB \}.$$

De 8.1, temos que

$$\#M_A = \#M_B = \omega_0 = \#\mathbb{N}.$$

(a função $\psi_A: \tilde{CA} \rightarrow M_A$ tal que $\psi_A(]a_n, b_n[) = e_n$ é bijetora);

portanto, podemos arranjar M_A e M_B em sequências infinitas,

$$M_A = \{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$$

$$M_B = \{g_0, g_1, \dots, g_m, \dots\}$$

e vamos construir uma função $\psi: M_A \rightarrow M_B$ bijetora e crescente.

Para tanto, pomos $\psi(e_0) = g_0$ e, a partir daí,

$$\psi(e_1) = g_{k_1},$$

onde k_1 é escolhido da seguinte forma:

a) se $e_1 > e_0$, $k_1 = \min_{i \in \mathbb{N}} \{i: g_i > g_0\}$ (que existe, pois

M_B não tem maior elemento),

b) se $e_1 < e_0$, $k_1 = \max_{i \in \mathbb{N}} \{i: g_i < g_0\}$ (que existe, pois

M_B não tem menor elemento).

Suponhamos, agora, construídos $\psi(e_0)$, $\psi(e_1)$, ..., $\psi(e_n)$; portanto,

$$\psi(e_i) = g_{k_i}, \quad i = 0, \dots, n,$$

e consideremos e_{n+1} ; então,

$$\text{ou } \min_{0 \leq i \leq n} \{e_i: e_i > e_{n+1}\} = +\infty \text{ (se } e_i < e_{n+1}, 0 \leq i \leq n \text{)} \quad (2.4)$$

$$\text{ou } \min_{0 \leq i \leq n} \{e_i: e_i > e_{n+1}\} = e_p. \quad (2.5)$$

Analogamente,

$$\text{ou } \max_{0 \leq i \leq n} \{e_i: e_i < e_{n+1}\} = -\infty, \quad (2.6)$$

$$\text{ou } \max_{0 \leq i \leq n} \{e_i: e_i < e_{n+1}\} = e_q. \quad (2.7)$$

É claro que (2.4) e (2.6) não podem ocorrer simultaneamente; então, de (2.5) e (2.7), temos

$$\psi(e_p) = g_{n_p} \quad \text{e} \quad \psi(e_q) = g_{n_q}.$$

Pomos,

$$\text{ou } k_{n+1} = \min_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\}} \{i: g_{n_q} < g_i < g_{n_p}\}, \text{ se } e_p \text{ e}$$

e_q forem finitos,

$$\text{ou } k_{n+1} = \min_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\}} \{i: g_{n_q} < g_i\}, \text{ se } e_p = +\infty,$$

$$\text{ou } k_{n+1} = \min_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\}} \{i: g_i < g_{n_p}\}, \text{ se } e_q = -\infty$$

e definimos

$$\psi(e_{n+1}) = g_{k_{n+1}}.$$

Pela própria definição de ψ podemos concluir que ψ é estritamente crescente.

E vamos mostrar que ψ é sobrejetora. Para tanto, seja $g_m = \min_{i \in \mathbb{N}} \{g_i: g_i \notin \psi(A)\}$; então,

$$\forall i < m, \exists k_{n_i} \in \mathbb{N} \mid \psi(e_{n_i}) = g_{k_{n_i}} = g_i.$$

Ora, $\exists n_r = \max \{n_i: 0 \leq i \leq m-1\}$; portanto,

$$\text{ou } \min_{0 \leq i \leq m-1} \{i: g_i > g_m\} = +\infty, \text{ (se } g_i < g_m, 0 \leq i \leq m-1) \quad (2.8)$$

$$\text{ou } \exists n_p = \min_{0 \leq i \leq m-1} \{i: g_i > g_m\}. \quad (2.9)$$

Analogamente,

$$\text{ou } \max \{i: g_i < g_m\} = -\infty, \quad (2.10)$$

$$\text{ou } \exists n_q = \max \{i: g_i < g_m\}. \quad (2.11)$$

É claro que (2.8) e (2.10) não ocorrem simultaneamente e que

se n_p existe, então $n_p \leq n_r$ e $\exists e_p \in M_A$ tal que $\psi(e_p) = g_{n_p}$ e $p \leq r$;

se n_q existe, então $n_q \leq n_r$ e $\exists e_q \in M_A$ tal que $\psi(e_q) = g_{n_q}$ e $q \leq r$.

Seja

$r+1 = \min_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, r\}} \{i: e_q < e_i < e_p\}$, se e_p e e_q existem,

$r+1 = \min_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, r\}} \{i: e_i < e_p\}$, se $e_q = -\infty$,

$r+1 = \min_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, r\}} \{i: e_i > e_q\}$, se $e_p = +\infty$.

Em qualquer dos casos, pela definição de ψ , devemos ter $g_m = g_{k_{r+1}} = \psi(e_{r+1})$, o que prova que ψ é sobrejetora.

Podemos afirmar, então, que existe uma correspondência $\psi: \tilde{CA} \rightarrow \tilde{CB}$, bijetora e estritamente crescente; e definamos uma função $f: I \rightarrow I$ da seguinte forma:

$\forall]a_n, b_n[$, componente conexa de CA , pomos

$f: [a_n, b_n] \rightarrow [c_{\psi(n)}, d_{\psi(n)}]$ tal que

$$x \longmapsto c_{\psi(n)} + \frac{x-a_n}{b_n-a_n}(d_{\psi(n)} - c_{\psi(n)}),$$

e estendemos f , por continuidade, a $\overline{CA} = I$.

Pela própria definição de f , temos que

f é estritamente crescente e contínua (2.12)

Vamos provar que $f(I) = I$; mas f é contínua e I é intervalo fechado; portanto,

$$f(I) = [a, b] \subset I,$$

e suponhamos $0 < a, b < 1$. Ora,

CB é denso em I ,
 $f(CA) = CB$ (por causa de ψ);

então

$$]0, a[\cap CB \neq \emptyset$$

e

$$]b, 1[\cap CB \neq \emptyset,$$

donde tiramos

$$a = 0 \quad e \quad b = 1,$$

isto é,

$$f(I) = I. \quad (2.13)$$

De (2.12) e (2.13), como I é compacto,
 segue-se que

$$f \in \text{Dif}^0(I). \quad (2.14)$$

E como $f(CA) = CB$, de (2.13) e (2.14) te-
 mos que

$$f(A) = B. \quad (2.15)$$

Finalmente, de (2.14) e (2.15) concluí-
 mos que

$A \sim B.$

**

9.1

$$A = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \cup \left\{ \frac{3}{4} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \frac{1}{3} \right\} \cup \left\{ \frac{3}{4} \right\}.$$

$A \not\sim B$ pois $\overset{\circ}{A}$ tem uma componente conexa e $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ (se $A \sim B$ por $h \in \text{Dif}^0(I)$, então $h(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{B}$).

9.2

$$A = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right] \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right] \quad \text{e}$$

$$B = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right] \cup \left\{ \frac{3}{4} \right\}.$$

Neste caso, CA e CB têm quatro componentes conexas, $\overset{\circ}{A}$ e $\overset{\circ}{B}$ têm duas componentes conexas; mas $A \not\sim B$, pois se existisse $h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $h(A) = B$, deveríamos ter $h(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, pois ambos são os únicos pontos isolados de A e B , respectivamente.

E

$$\text{ou a) } h\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\right) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] \quad \text{e}$$

$$h\left(\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\text{ou b) } h\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \quad \text{e}$$

$$h\left(\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right].$$

a) Temos que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; mas

$$h\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{3} < \frac{3}{4} = h\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{2}{3} = h\left(\frac{2}{3}\right)$$

e h não seria monótona.

b) $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; mas

$$h\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{2}{3} < \frac{3}{4} = h\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{3} \geq h\left(\frac{2}{3}\right)$$

e h não seria monótona. De a) e b) segue-se que

$\nexists h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $h(A) = B$; portanto,

$$A \not\sim B.$$

9.3 Em geral, se o "número" de componentes conexas de CA for diferente do de CB , então $A \not\sim B$.

Idem com relação a $\overset{\circ}{A}$ e $\overset{\circ}{B}$.

10 *As Classes de Equivalência Determinadas por $\sim$ em I .*

Seja $\mathcal{F} = I/\sim$ o espaço quociente de I por $\sim$, isto é, o conjunto das classes de equivalência determinadas por $\sim$.

Para melhor caracterizar os elementos de $\mathcal{F}$, vamos dar uma condição necessária e suficiente para que dois conjuntos fechados de I conjuguem segundo $\sim$.

Para tanto, dado $A \subset I$ tal que $\bar{A} = A$, consideremos a decomposição dos abertos $\overset{\circ}{A}$ e CA em suas componentes conexas; temos

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{n \in K_A \subset \mathbb{N}} V_{2n}, \quad CA = \bigcup_{m \in J_A \subset \mathbb{N}} V_{2m+1},$$

onde cada V_i é uma componente conexa de $\overset{\circ}{A} \cup CA$, portanto $V_i \cap V_j = \emptyset$, $\forall i, j \in K_A \cup J_A$, $i \neq j$.

A partir das V_i , vamos considerar a relação de equivalência $\sim_A$ definida a seguir.

10.1 DEFINIÇÃO.

Dado $A \subset I$, tal que $\bar{A} = A$, e quaisquer que sejam $x, y \in I$ dizemos que x conjuga com y se e somente se [ou $x = y \in A$ ou $\exists i \in K_A \cup J_A$ tal que $x, y \in V_i$]. Notação: $x \sim_A y$.

Se denotarmos por $[x]_A$ a classe de equivalência de x determinada por $\sim_A$, teremos

ou $[x]_A = \{x\}$, se $x \in A$,

ou $[x]_A = V_i$, se $x \in V_i$ para algum $i \in K_A \cup J_A$.

Definamos os seguintes conjuntos:

$$X_A^\circ = \{[x]_A : x \in A\},$$

$$X_{CA} = \{[x]_A : x \in C(A)\}$$

e

$$X_{\delta A} = \{[x]_A : x \in \delta A\}.$$

Então,

$$I/\sim_A = X_A^\circ \cup X_{CA} \cup X_{\delta A} \text{ e temos}$$

$$\boxed{I/\sim_A = X_A.}$$

10.2 DEFINIÇÃO.

Seja $A \subset I$ tal que $\bar{A} = A$ e consideremos a projeção canônica $\pi_A: I \rightarrow X_A$ definida por $\pi_A(x) = [x]_A$; temos em X_A a ordem $\leq$ co-induzida por π_A , isto é,

$$[x]_A = [y]_A \iff x \sim_A y,$$

$$[x]_A < [y]_A \iff x \not\sim_A y \text{ e } x < y$$

e

$$[x]_A \leq [y]_A \iff \text{ou } [x]_A = [y]_A \text{ ou } [x]_A < [y]_A.$$

.3 PROPOSIÇÃO.

$\leq$ é uma relação de ordem em X_A .

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Propriedade reflexiva.

$$[x]_A \leq [x]_A \text{ pois } x \sim_A x \text{ e } [x]_A = [x]_A.$$

Item 2. Propriedade anti-simétrica.

$$[x]_A \leq [y]_A \text{ e } [y]_A \leq [x]_A \implies [x]_A = [y]_A.$$

Ora,

$$1) [x]_A \leq [y]_A \iff \text{ou } [x]_A = [y]_A \text{ ou } [x \not\sim_A y \text{ e } x < y];$$

$$2) [y]_A \leq [x]_A \iff \text{ou } [x]_A = [y]_A \text{ ou } [x \not\sim_A y \text{ e } y < x].$$

Da intersecção de 1) e 2) segue-se que

$$[x]_A = [y]_A.$$

Item 3. Propriedade transitiva.

$$[x]_A \leq [y]_A \text{ e } [y]_A \leq [z]_A \implies [x]_A \leq [z]_A.$$

$$1) [x]_A \leq [y]_A \iff \text{ou } [x]_A = [y]_A \text{ ou } [x < y \text{ e } x \not\sim_A y].$$

$$2) [y]_A \leq [z]_A \iff \text{ou } [y]_A = [z]_A \text{ ou } [y < z \text{ e } y \not\sim_A z].$$

Da intersecção de 1) e 2) temos que

$$\text{ou } [x]_A = [z]_A \text{ ou } [x < y < z \text{ e } x \not\sim_A y \text{ e } y \not\sim_A z]. \quad (2.16)$$

Mas,

se $x < y < z$ e $x \not\sim_A y$, com mais razão $x \not\sim_A z$;
portanto, (2.16) fica

ou $[x]_A = [z]_A$ ou $[x < z \text{ e } x \not\sim_A z]$; donde,

$$[x]_A \leq [z]_A.$$

Vamos, agora mostrar que X_A "representa"
o conjunto A.

4 TEOREMA.

Sejam $A, B \subset I$ tais que $\bar{A} = A$ e $\bar{B} = B$; en-
tão,

$A \sim B$ se e somente se existe uma função $f: X_A \rightarrow X_B$,
estritamente monótona, tal que

$$f(X_A^\circ) = X_B^\circ,$$

$$f(X_{CA}) = X_{CB}$$

e

$$f(X_{\delta A}) = X_{\delta B}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Consideremos as decomposições de $\bar{A}$, CA ,
 $\bar{B}$ e CB em componentes conexas; isto é,

$$\bar{A} = \bigcup_{n \in K_A \subset \mathbb{N}} V_{2n}, \quad CA = \bigcup_{m \in J_A \subset \mathbb{N}} V_{2m+1},$$

$$\bar{B} = \bigcup_{p \in K_B \subset \mathbb{N}} U_{2p}, \quad CB = \bigcup_{q \in J_B \subset \mathbb{N}} U_{2q+1}.$$

Item 1. Condição necessária.

Suponhamos que $A \sim B$ por h , isto é, $h \in \text{Dif}^0(I)$ e $h(A) = B$.

Construído o diagrama abaixo,

vamos mostrar que existe $f: X_A \longrightarrow X_B$ que faz o diagrama comutar e satisfaz às condições do teorema.

Para tanto, pomos:

$$\forall [x]_A \in X_A, f([x]_A) = [h(x)]_B.$$

Precisamos provar que:

- a) f está bem definida;
- b) o diagrama comuta;
- c) f é estritamente monótona;
- d) $f(X_A^\circ) = X_B^\circ$;
- e) $f(X_{CA}) = X_{CB}$;
- f) $f(X_{\delta A}) = X_{\delta B}$.

a) Seja $y \in [x]_A$ e vamos provar que $f([x]_A) = f([y]_A)$, isto é, f independe do representante de $[x]_A$;

ou 1º) $x = y \in \delta A$ e $[x]_A = \{x\} = [y]_A$;

ou 2º) $\exists n \in \mathbb{N}_A$ tal que $x, y \in v_{2n}$;

ou 3º) $\exists m \in J_A$ tal que $x, y \in V_{2m+1}$.

1º) É claro que

$$f([x]_A) = f([y]_A).$$

2º) Como $h \in \text{Dif}^0(I)$ e $h(A) = B$, temos que

$$\forall n \in K_A, \exists! p \in K_B \text{ tal que } h(V_{2n}) = U_{2p}; \quad (2.17)$$

portanto, $h(y) \in [h(x)]_B$ e temos que

$$f([x]_A) = f([y]_A).$$

3º) Como $h \in \text{Dif}^0(I)$ e $h(CA) = CB$, temos que

$$\forall m \in J_A, \exists! q \in J_B \text{ tal que } h(V_{2m+1}) = U_{2q+1}, \quad (2.18)$$

e segue-se que $h(y) \in [h(x)]_B$, isto é

$$f([x]_A) = f([y]_A).$$

De 1º), 2º) e 3º) podemos concluir que

$$f \text{ está bem definida.} \quad (2.19)$$

b) $\forall x \in I$,

$$(f \circ \pi_A)(x) = f([x]_A) = [h(x)]_B$$

e

$$(\pi_B \circ h)(x) = \pi_B(h(x)) = [h(x)]_B;$$

portanto,

$$f \circ \pi_A = \pi_B \circ h. \quad (2.20)$$

c) De 10.2 decorre que

π_A e π_B são estritamente monótonas. (2.21)

Além disso, $h \in \text{Dif}^0(I)$, portanto

h é estritamente monótona. (2.22)

De (2.20), (2.21), (2.22), como π_B é sobrejetora, temos que

f é estritamente monótona. (2.23)

d) $x_A^\circ = \pi_A(\overset{\circ}{A})$ e $x_B^\circ = \pi_B(\overset{\circ}{B})$; daí

$$\begin{aligned} f(x_A^\circ) &= f(\pi_A(\overset{\circ}{A})) = (f \circ \pi_A)(\overset{\circ}{A}) = (\pi_B \circ h)(\overset{\circ}{A}) = \\ &= \pi_B(h(\overset{\circ}{A})) = \pi_B(\overset{\circ}{B}) = x_B^\circ, \end{aligned}$$

isto é,

$$f(x_A^\circ) = x_B^\circ. \quad (2.24)$$

e) $\pi_A(CA) = x_{CA}$ e $\pi_B(CB) = x_{CB}$, portanto

$$\begin{aligned} f(x_{CA}) &= f(\pi_A(CA)) = (f \circ \pi_A)(CA) = (\pi_B \circ h)(CA) = \\ &= \pi_B(h(CA)) = \pi_B(CB) = x_{CB}, \end{aligned}$$

isto é,

$$f(x_{CA}) = x_{CB}. \quad (2.25)$$

f) Análoga às demonstrações de d), e); portanto,

$$f(x_{\delta A}) = x_{\delta B}. \quad (2.26)$$

De (2.19), (2.20), (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26) podemos concluir que

$$f: X_A \longrightarrow X_B \text{ definida por } \forall [x]_A \in X_A, f([x]_A) = [h(x)]_B$$

satisfaz às condições do teorema.

Item 2. Condição suficiente.

Seja $f: X_A \longrightarrow X_B$ estritamente monótona tal que $f(X_A^\circ) = X_B^\circ$, $f(X_{CA}) = X_{CB}$ e $f(X_{\delta A}) = X_{\delta B}$ e consideremos o diagrama abaixo.

Provemos que existe uma função $h: I \longrightarrow I$ tal que o diagrama comuta e h satisfaz às condições do teorema.

Para definir h , seja $x \in I$, qualquer; então,

- ou 1º) $x \in \delta A$;
- ou 2º) $\exists n \in K_A$ tal que $x \in V_{2n}$;
- ou 3º) $\exists m \in J_A$ tal que $x \in V_{2m+1}$.

1º) Como $[x]_A = \{x\}$, então $f(\{x\}) = \{y\}$ e temos

$$h(x) = y.$$

2º) Como $V_{2n} =]a_{2n}, b_{2n}[$ e vale (2.17), temos que

$$f(V_{2n}) = U_{2p} =]\bar{a}_{2p}, \bar{b}_{2p}[.$$

Definimos

$$h: V_{2n} \longrightarrow U_{2p} \text{ linear e de} \quad (2.27)$$

mesma monotonicidade que f .

3º) Como $V_{2m+1} =]a_{2m+1}, b_{2m+1}[$ e vale (2.17), temos que $f(V_{2m+1}) = U_{2q+1}$ e pomos

$$h: V_{2m+1} \longrightarrow U_{2q+1} \text{ linear e de} \quad (2.28)$$

mesma monotonicidade que f .

Como $\overset{\circ}{A} \cup \delta A \cup \overset{\circ}{C} A = I$ e h foi construída em cada uma dessas partes, temos uma função $h: I \longrightarrow I$ e precisamos provar que:

g) h é estritamente monótona;

h) $h(I) = I$;

i) $h \in \text{Dif}^0(I)$;

j) $h(A) = B$.

g) Como

$$V_i \cap V_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in K_A \cup J_A, \quad i \neq j,$$

$$U_i \cap U_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in K_B \cup J_B, \quad i \neq j,$$

$$\delta A \cap (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{C} A) = \emptyset,$$

$$\delta B \cap (\overset{\circ}{B} \cup \overset{\circ}{C} B) = \emptyset,$$

f é estritamente monótona

e

h tem mesma monotonicidade de f em δA e $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{C} A$,

segue-se que

$$h \text{ é estritamente monótona em } I. \quad (2.29)$$

h) Seja $y \in I$; como $I = \overset{\circ}{B} \cup CB \cup \delta B$,

ou 1º) $y \in \delta B$,

ou 2º) $y \in \overset{\circ}{B}$,

ou 3º) $y \in CB$.

1º) $[y]_B = \{y\} \in X_{\delta B}$; portanto,

$\exists [x]_A = \{x\} \in X_{\delta A}$ tal que $f(\{x\}) = \{y\}$ e $h(x) = y$; isto é,

$$h(\delta A) = \delta B. \quad (2.30)$$

2º) De (2.17) e (2.27) segue-se imediatamente que

$$h(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{B}. \quad (2.31)$$

3º) De (2.17) e (2.28) temos que

$$h(CA) = CB. \quad (2.32)$$

De (2.30), (2.31) e (2.32),

$$h(I) = I. \quad (2.33)$$

i) De (2.29) e (2.33), como estamos trabalhando em $I \subset \mathbb{R}$ e I é compacto, podemos afirmar que

$$h \in \text{Dif}^0(I). \quad (2.34)$$

j) De (2.30) e (2.31),

$$h(A) = B,$$

que junto com (2.34) nos dá que

$$A \sim B.$$

**

Seja a decomposição de $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{C}A$ e $\overset{\circ}{B} \cup \overset{\circ}{C}B$ em componentes conexas.

10.5 COROLÁRIO.

Sejam $A, B \subseteq I$ tais que $\overline{A} = A$ e $\overline{B} = B$. Se $A \sim B$, então $\#X_A^\circ = \#X_B^\circ$, $\#X_{CA} = \#X_{CB}$ e $\#X_{\delta A} = \#X_{\delta B}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Decorre da condição necessária de 10.4.

**

11 A Cardinalidade de $\mathcal{F}$.

11.1 TEOREMA.

$$\# \mathcal{F} = \# \mathbb{R} = \mathfrak{c}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. $\# \mathcal{F} \geq \mathfrak{c}$.

Seja $I_n = \left] \frac{1}{2^{n+1} + 1}, \frac{1}{2^{n+1}} \right[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como I_n é aberto em I , $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ é aberto em I ; daí,

$$F = C \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C I_n \text{ é fechado em } I.$$

Como $I_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, porque é aberto,

seja

$$A = \left\{ \alpha_n = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1} + 1}}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Se $\mathbb{P}(A)$ denota o conjunto das partes de A , temos que

$$\#\mathbb{P}(A) = 2^{\#A} = 2^{\omega_0} = \mathfrak{c},$$

portanto

$\exists P: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}(A)$, bijeção, tal que

$$\beta \longmapsto P_\beta \text{ e } \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} P_\beta = \mathbb{P}(A). \quad (2.35)$$

Sejam os conjuntos

$$F_\beta = \bigcup P_\beta, \quad \forall \beta \in \mathbb{R};$$

e provemos que F_β é fechado, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

a) F é fechado por construção.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in I_n$ é isolado e como $0 \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right)'$, temos que [ou $P'_\beta = \emptyset$ ou $P'_\beta = \{0\}$]; daí, respectivamente, [ou P_β é fechado ou $P_\beta \cup \{0\}$ é fechado].

Mas $0 \in F$; portanto, em qualquer dos casos, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $F_\beta = \bigcup P_\beta$ é fechado em I .

E de (2.35) podemos escrever que

$$\#\{F_\beta : \beta \in \mathbb{R}\} = \#\mathbb{P}(A) = \mathfrak{c}.$$

Vamos provar que $F_\alpha \not\sim F_\beta$, se $\alpha \neq \beta$. Para tanto, suponhamos que $F_\alpha \sim F_\beta$ para algum par (α, β) com $\alpha \neq \beta$ e seja $h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $h(F_\alpha) = F_\beta$.

Como $F \cap F_\alpha = \emptyset$, $F \cap F_\beta = \emptyset$, os pontos isolados de F_α estão em P_α e os pontos isolados de F_β estão em P_β , temos que

$$h(F) = F \quad \text{e} \quad h(P_\alpha) = P_\beta; \text{ isto é,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists! m \in \mathbb{N} \mid h(I_n) = I_m.$$

Como $P_\alpha \neq P_\beta$ (pois $F_\alpha \neq F_\beta$),

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid P_\alpha \cap I_{n_0} = \emptyset \quad \text{e} \quad P_\beta \cap I_{n_0} = \{\alpha_{n_0}\}$$

o que quer dizer que

$$h(I_{n_0}) = I_{m_0} \quad \text{para} \quad m_0 \neq n_0.$$

Dois casos podem ocorrer.

1) $h(0) = 0$ e $h(1) = 1$ (h é crescente); daí $h(I_0) = I_0$ e se $m_0 = n_0 + r$, $r \in \mathbb{Z}^*$, os intervalos $I_0, I_1, \dots, I_{n_0}$ iriam, respectivamente, em $I_0, \dots, I_{m_0}$, o que significaria $n_0 + 1$ intervalos disjuntos indo em $n_0 + r + 1$ intervalos disjuntos por $h \in \text{Dif}^0(I)$; o que só seria possível se

$$n_0 + 1 = n_0 + r + 1, \text{ com } r \neq 0,$$

o que é absurdo; então, $h(1) \neq 1$ e

$$h \text{ não pode ser crescente.} \quad (2.36)$$

2) $h(0) = 1$ e $h(1) = 0$ (h é decrescente).

Ora,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, 1 \in F_\alpha \text{ e sua componente conexa em } F_\alpha \text{ é } [\frac{1}{2}, 1].$$

Por outro lado,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, 0 \in F_\alpha \text{ e sua componente conexa em } F_\alpha \text{ é } \{0\}.$$

Como $h(F_\alpha) = F_\beta$, $h \in \text{Dif}^0(I)$ e $h(1) = 0$, deveríamos ter $h([\frac{1}{2}, 1]) = \{0\}$, o que é absurdo, pois

$h \in \text{Dif}^0(I)$; então

h não pode ser decrescente. (2.37)

Se $h \in \text{Dif}^0(I)$, ou h é crescente ou h é decrescente; portanto, de (2.36) e (2.37) concluímos que

$\exists h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $h(F_\alpha) = F_\beta$, isto é,

se $\alpha \neq \beta$, $F_\alpha \not\sim F_\beta$. (2.38)

Como

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $[F_\alpha] = \{A \subset I \mid \bar{A} = A \text{ e } A \sim F_\alpha\}$ e, de (2.38) temos que $\# \geq \# \{[F_\alpha] : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathfrak{L}$; portanto,

$$\# \mathcal{F} \geq \mathfrak{L}. \quad (2.39)$$

Item 2. $\# \mathcal{F} \leq \mathfrak{L}$.

Sejam

$F_I = \{\text{conjuntos fechados de } I\}$

e

$A_I = \{\text{conjuntos abertos de } I\},$

e consideremos a função

$$g: F_I \longrightarrow A_I$$

$$B \longmapsto CB.$$

Ora, g é bijetora (pois $CCB = B$); portanto,

$$\# F_I = \# A_I, \quad (2.40)$$

e mostremos que $\# A_I \leq \mathfrak{L}$.

Para tanto, seja B uma base enumerável de abertos de I ($\mathbb{R}$, com a topologia habitual, tem base enumerável de abertos, por exemplo a base constituída de todos os intervalos abertos de extremidades racionais); então, $B = \{O_n : \bar{O}_n = O_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$ e seja $f: A_I \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $f(A) = K_A$, onde $K_A = \{n \in \mathbb{N} : O_n \subset A\}$ e mostremos que f é injetora.

$$\begin{aligned} f(A) = f(B), \forall A, B \in A_I &\iff K_A = K_B \iff \\ &\iff (n \in K_A \iff n \in K_B) \iff (O_n \subset A \iff O_n \subset B). \end{aligned}$$

Ora, $\bigcup_{n \in K_A} O_n = A$, $\bigcup_{n \in K_B} O_n = B$ (porque B é base); como $K_A = K_B$, temos que

$$f(A) = f(B) \iff A = B,$$

isto é, f é injetora; donde,

$$\#A_I \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^\omega = \mathfrak{L}. \quad (2.41)$$

De (2.40) e (2.41) temos que

$$\#F_I \leq \mathfrak{L}. \quad (2.42)$$

E como $\#\mathcal{F} \leq \#F_I$, de (2.42) concluímos que

$$\#\mathcal{F} \leq \mathfrak{L}. \quad (2.43)$$

Finalmente, de (2.39) e (2.43),

$$\#\mathcal{F} = \mathfrak{L}.$$

12 A Caracterização dos Fechados de $I = [0, 1]$ por Seqüências.

Neste parágrafo vamos associar, a cada conjunto fechado A de I , uma seqüência (finita ou não) constituída de zeros e uns que "caracteriza" A de acordo com a ordem em que aparecem as componentes conexas de $\hat{A}$ UCA.

12.1 TEOREMA.

Seja $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais distintos tais que $0 \leq r_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $S = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ for tal que $S \cap S' = \emptyset$, então existe $A \subset I$ tal que:

- a) $\bar{A} = A$;
- b) $0 \in A$;
- c) $1 \in A$;
- d) $r_n \not\sim_A r_m$, se $n \neq m$ (ver 10.1);
- e) $\{[r_n]_A : n \in \mathbb{N}\} = X_A^0 \cup X_{CA}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Dado $r_n \in S$, sejam os conjuntos

$$A_n = \{r_m \in S : r_m < r_n\}$$

e

$$B_n = \{r_m \in S : r_m > r_n\}.$$

Como $S' \cap S = \emptyset$, cada $r_n \in S$ é isolado; portanto,

1) se $A_n \neq \emptyset$, existe $m_n = \sup A_n$, com $m_n < r_n$ e $m_n \in S$;

2) se $B_n \neq \emptyset$, existe $M_n = \inf B_n$, com $M_n > r_n$ e $M_n \in S$.

1) se $A_n \neq \emptyset$, como A_n é limitado superiormente por r_n , existe m_n e $m_n \geq r_n$:

1.i) ou $m_n \in S$: pela definição de A_n , temos que $m_n \in A_n$; portanto

$$m_n < r_n; \quad (2.44)$$

1.ii) ou $m_n \notin S$: pela definição de A_n , temos que

$$m_n < r_n; \quad (2.45)$$

por outro lado,

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{++}$, $]m_n - \epsilon, m_n + \epsilon[\cap A_n \neq \emptyset$; portanto,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{++},]m_n - \epsilon, m_n + \epsilon[\cap S \neq \emptyset. \quad (2.46)$$

Como $m_n \notin S$ por hipótese, de (2.46) decorre que

$$m_n \in S. \quad (2.47)$$

De (2.44), (2.45) e (2.47) temos que

$$m_n < r_n \text{ e } m_n \in S.$$

2) $B_n \neq \emptyset$: demonstração análoga à de 1).

Temos, então, definidos m_n e M_n quando $A_n \neq \emptyset$ e $B_n \neq \emptyset$. Para completar, vamos defini-los em qualquer situação:

se $A_n \neq \emptyset$, então $m_n = \sup A_n$;

se $A_n = \emptyset$, então $m_n = -r_n$;

se $B_n \neq \emptyset$, então $M_n = \inf B_n$;

se $B_n = \emptyset$, então $M_n = 2 - r_n$.

Definamos, agora, uma função $f: S \rightarrow \{0,1\}$

da seguinte forma:

$$1^\circ) [f(r_n) = 0 \text{ e } m_n \in S] \implies f(m_n) = 1;$$

$$2^\circ) [f(r_n) = 0 \text{ e } M_n \in S] \implies f(M_n) = 1;$$

$$3^\circ) 0 \in S \implies f(0) = 0;$$

$$4^\circ) 1 \in S \implies f(1) = 0;$$

e provemos que existe $A \subset I$ que satisfaça às condições do teorema.

Pomos

$$CA = \bigcup_{f(r_n)=1} \left[\frac{r_n + m_n}{2}, \frac{r_n + M_n}{2} \right[.$$

a) $\bar{A} = A$, pois CA é aberto.

b) $0 \notin A$, pois $0 \notin \left[\frac{r_n + m_n}{2}, \frac{r_n + M_n}{2} \right[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) $1 \notin A$ pois $1 \notin \left[\frac{r_n + m_n}{2}, \frac{r_n + M_n}{2} \right[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Para provar que $r_n \not\sim_A r_m$, se $n \neq m$, suponhamos que $r_n < r_m$; então,

$$\begin{aligned} r_n \in A_m \text{ e } r_n &\leq m_m, \\ r_m \in B_m \text{ e } M_n &\leq r_m. \end{aligned} \quad (2.48)$$

De (2.48),

$$\frac{r_n + M_n}{2} \leq \frac{m + r_m}{2},$$

e podemos concluir que

$$\forall r_n, r_m \in S, \text{ se } m \neq n, \left[\frac{r_n + M_n}{2}, \frac{r_n + M_n}{2} \right] \cap \left[\frac{r_m + M_m}{2}, \frac{r_m + M_m}{2} \right] = \emptyset,$$

isto é,

$$[r_n]_A = \left[\frac{r_n + M_n}{2}, \frac{r_n + M_n}{2} \right] \text{ e} \quad (2.49)$$

$$r_n \not\sim_A r_m, \text{ se } n \neq m.$$

e) Decorre da demonstração de d).

De a), b), c), d), e) concluímos que existe $A \subseteq I$ tal que $\bar{A} = A$ e que satisfaça 12.1.

**

Resumindo, podemos dizer que dado o conjunto S de 12.1, para cada função $f: S \rightarrow \{0,1\}$ satisfazendo a), b), c), d), e), existe $A \subseteq I$ tal que

$$\bar{A} = A, 0 \in A, 1 \in A, r_n \not\sim_A r_m \text{ (se } n \neq m)$$

$$\text{e } \{[r_n]_A : n \in K \subseteq N\} = X_A^0 \cup X_{CA}.$$

Vamos mostrar que vale a recíproca (usando a notação anterior).

12.2 TEOREMA.

Seja $A \subseteq I$ tal que $\bar{A} = A$ e $\{0,1\} \subseteq A$; então,

existem $S \subset I$ com $S' \cap S = \emptyset$ e uma função $f: S \rightarrow \{0,1\}$ que satisfaz 1º), 2º), 3º) e 4º) de 12.1 (pág. 63).

DEMONSTRAÇÃO.

Consideremos a decomposição de $\mathring{A} \cup C_A$ em componentes conexas: $\mathring{A} = \bigcup_{n \in K_A \subset \mathbb{N}} V_{2n}$ e $C_A = \bigcup_{m \in J_A \subset \mathbb{N}} V_{2m+1}$;

então, $\forall i \in J_A \cup K_A$, $V_i =]a_i, b_i[$.

Seja

$$S = \left\{ r_i = \frac{a_i + b_i}{2} : i \in J_A \cup K_A \right\},$$

e definamos $f: S \rightarrow \{0,1\}$ por

$$f(r_i) = 0 \iff i \in K_A$$

$$f(r_j) = 1 \iff j \in J_A.$$

Como em 12.1, sejam

$$A_n = \{r_m \in S : r_m < r_n\}$$

e

$$B_n = \{r_m \in S : r_n < r_m\}.$$

Da construção de S , decorre que $S \cap S' = \emptyset$;

portanto,

ou $(A_n \neq \emptyset \text{ e } \exists m_n = \sup A_n)$ ou $(A_n = \emptyset \text{ e } m_n \notin S)$;

ou $(B_n \neq \emptyset \text{ e } \exists M_n = \inf B_n)$ ou $(B_n = \emptyset \text{ e } M_n \notin S)$.

Mostremos que f satisfaz 1º), 2º), 3º) e

4º).

1º) $f(r_n) = 0 \iff n \in K_A$; portanto,

$$r_n \in]a_n, b_n[\subset \mathbb{A} \text{ e ou } [a_n = 0 \text{ e } m_n \notin S]$$

$$\text{ou } [a_n = b_k, \text{ para algum } k \in J_A, \text{ e } m_n = r_k \in CA];$$

no primeiro caso, não há o que demonstrar; no segundo, como $m_n \in CA$,

$$f(m_n) = 1.$$

$$2^\circ) f(r_n) = 0 \iff n \in K_A; \text{ portanto,}$$

$$r_n \in]a_n, b_n[\subset CA \text{ e ou } [b_n = 1 \text{ e } M_n \notin S]$$

$$\text{ou } [b_n = a_k, \text{ para algum } k \in J_A, \text{ e } M_n = r_k \in CA];$$

no primeiro caso, não há o que demonstrar; no segundo, como $M_n \in CA$,

$$f(M_n) = 1.$$

$$3^\circ) 0 \notin S; \text{ portanto, } f \text{ satisfaz } [0 \in S \implies f(0) = 0].$$

$$4^\circ) 1 \notin S; \text{ portanto, } f \text{ satisfaz } [1 \in S \implies f(1) = 0].$$

Construímos o conjunto S e a função f de 12.2.

**

Com os resultados 12.1 e 12.2 provou-se que as seqüências $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais distintos, sem pontos de acumulação, com $0 \leq r_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, caracterizam os conjuntos fechados de I que contêm $\{0,1\}$ e reciprocamente.

3 HOMEOMORFISMOS E DIFEOMORFISMOS DO INTERVALO $[0,1]$.

Neste capítulo definimos a conjugação em $\text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, e mostramos que dois difeomorfismos de $[0,1]$ conjugam se e somente se os conjuntos de seus pontos periódicos conjugam como fechados de $[0,1]$.

No parágrafo 18 mostramos que um homeomorfismo nunca é estruturalmente estável e que o conjunto dos difeomorfismos hiperbólicos de $[0,1]$ é aberto e denso em $\text{Dif}^r([0,1])$, $0 \leq r \leq \infty$, pela construção de um difeomorfismo hiperbólico próximo de qualquer outro.

13 Algumas Definições Básicas.

13.1 DEFINIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$. O conjunto dos pontos periódicos de f , denotado por $\text{per } f$, é definido por

$$\text{per } f = \{x \in M^1 : f^n(x) = x \text{ para algum } n \in \mathbb{N}^*\}.$$

$$\text{O } \min \{n \in \mathbb{N}^* : f^n(x) = x\}$$

é chamado período de x . Denota-se

$$\text{per}_n f = \{x \in \text{per } f : x \text{ tem período } n\}, \text{ se } n \geq 2$$

$$e \text{ fix } f = \{x \in \text{per } f : f(x) = x\}.$$

13.2 DEFINIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$. Dado $x \in M^1$, a órbita de x por f , denotada $O_f(x)$, é definida por

$$O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

13.3 DEFINIÇÃO.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$. Dizemos que f conjuga com g se e somente se existe $h \in \text{Dif}^0(M^1)$ tal que h leva órbitas de f em órbitas de g , isto é,

$$f \approx g \iff \exists h \in \text{Dif}^0(M^1) \text{ tal que } \forall x \in M^1, \\ h(O_f(x)) = O_g(h(x)),$$

$$\text{ou } f \approx g \iff \exists h \in \text{Dif}^0(M^1) \text{ tal que } \forall x \in M^1, \\ \forall n \in \mathbb{Z}, \exists! m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } h(f^n(x)) = g^m(h(x)).$$

13.4 PROPOSIÇÃO.

$\approx$ é uma relação de equivalência em $\text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Propriedade reflexiva.

$f \approx f$, $\forall f \in \text{Dif}^r(M^1)$, pela função identidade, id , que pertence a $\text{Dif}^0(M^1)$.

Item 2. Propriedade simétrica.

Se $f \approx g$ por $h \in \text{Dif}^0(M^1)$, então $g \approx f$, pois $h^{-1} \in \text{Dif}^0(M^1)$ e temos que $g \approx f$ por h^{-1} .

Item 3. Propriedade transitiva.

Se $f \approx g$ por $h_1 \in \text{Dif}^0(M^1)$ e $g \approx h$ por $h_2 \in \text{Dif}^0(M^1)$, é fácil ver que $f \approx h$ por $h_2 \circ h_1 \in \text{Dif}^0(M^1)$.

14 Propriedades de uma Função f de $\text{Dif}^r([0,1])$, $0 \leq r \leq \infty$.

14.1 Seja $f \in \text{Dif}^r(I)$, $0 \leq r \leq \infty$; então,

ou $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e f é estritamente crescente
ou $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e f é estritamente decrescente.

Vale, pois f é homeomorfismo.

No que se segue, estaremos supondo que $f \in \text{Dif}^r(I)$, $0 \leq r \leq \infty$, a menos de alguma observação em contrário.

14.2 $x \in \text{fix } f \iff f(x) = x \iff O_f(x) = \{x\}$.

14.3 Seja f crescente e tal que $f(x) > x$ para algum $x \in I$; então $f^n(x) > f^m(x)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, tais que $n > m$.

f^n é crescente, $\forall n \in \mathbb{Z}$; portanto,

$f(x) > x \implies f^n(x) > f^{(n-1)}(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Indutivamente, temos que

$f(x) > x \implies f^n(x) > f^m(x)$, se $n > m$.

14.4 Seja f crescente e $f(x) < x$ para algum $x \in I$; então $f^n(x) < f^m(x)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $n > m$.

Análoga a 14.3.

14.5 Seja f decrescente e $f^2(x) > x$ para algum $x \in I$; então, $f^{2n}(x) > f^{2m}(x)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $n > m$.

Como f^2 é crescente, decorre de 14.3.

14.6 Seja f decrescente e $f^2(x) < x$ para algum $x \in I$; então, $f^{2n}(x) < f^{2m}(x)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $n > m$.

Como f^2 é crescente, decorre de 14.3.

14.7 Seja f crescente e $f(x) > x$ para algum $x \in I$; então,

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = q$, onde $q = \min(\text{fix } f \cap [x, 1])$;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = p$, onde $p = \max(\text{fix } f \cap [0, x])$.

a) $\text{fix } f \cap [x, 1] \neq \emptyset$, pois $1 \in \text{fix } f \cap [x, 1]$ e $\text{fix } f \cap [x, 1]$ é fechado ($\text{fix } f = (f - \text{id})^{-1}(\{0\})$); então,

$$q = \min(\text{fix } f \cap [x, 1]) \in \text{fix } f \cap [x, 1]. \quad (3.1)$$

Ora, $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente (de 14.3) e limitada ($0 \leq f^n(x) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$), portanto converge; isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = q' \geq x \text{ e } q' \in I. \quad (3.2)$$

Mas f é contínua; por isso,

$$f(q') = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{n+1}(x) = q'; \text{ donde,}$$

$$q' \in \text{fix } f. \quad (3.3)$$

De (3.1), (3.2) e (3.3) podemos concluir que

$$q \leq q'.$$

Suponhamos $q < q'$.

Como $f^n(x) \uparrow \rightarrow q'$,

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } q < f^n(x) < q', \forall n \geq n_0. \quad (3.4)$$

Mas $x < q$; como f é crescente, temos que $f^n(x) < f^n(q) = q, \forall n \in \mathbb{N}$, contra (3.4); então,

$$q' = q.$$

b) Como $\text{fix } f \cap [0, x] \neq \emptyset$, pois $0 \in \text{fix } f \cap [0, x]$, a demonstração é análoga à de a).

14.8 Seja f crescente e $f(x) < x$, para algum $x \in I$; então,

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p$, onde $p = \max(\text{fix } f \cap [0, x])$;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = q$, onde $q = \min(\text{fix } f \cap [x, 1])$.

Análoga à de 14.7.

14.9 Seja f crescente; então, $\text{per } f = \text{fix } f$.

Item 1. $\text{fix } f \subseteq \text{per } f. \quad (3.5)$

Pela definição.

Item 2. $\text{per } f \subseteq \text{fix } f.$

Seja $x \in \text{per } f$ e suponhamos que x tem período n , com $n \geq 2$; então,

$$f^n(x) = x \text{ e } f^m(x) \neq x, \text{ se } 1 \leq m < n; \quad (3.6)$$

portanto, ou $f(x) > x$ ou $f(x) < x$. Em qualquer dos casos, usando respectivamente 14.3 ou 14.4, decorre que

$f^p(x) \neq x, \forall p \in \mathbb{N}$, contra (3.6);
então, $f(x) = x$ e

$$\text{per } f \subseteq \text{fix } f. \quad (3.7)$$

De (3.5) e (3.7),

$$\boxed{\text{per } f = \text{fix } f.}$$

14.10 Seja f crescente e chamemos de V_i uma componente conexa de $I \setminus \text{fix } f$; se $f(x) > x, \forall x \in V_i$, então,

$$a) \forall x_0 \in V_i, \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([x_0, f(x_0)]) = V_i;$$

$$b) \forall y \in V_i, \exists! x \in [x_0, f(x_0)], \exists! m_0 \in \mathbb{Z} \text{ tais que } f^{m_0}(x) = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.

a) De 14.7 decorre que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([x_0, f(x_0)]) \subseteq V_i. \quad (3.8)$$

Mas, $f \in \text{Dif}^0(I)$, $f(0)=0$ e $f(x) > x, \forall x \in V_i$; portanto,

$$f^n([x_0, f(x_0)]) \cap f^{n+1}([x_0, f(x_0)]) = \emptyset$$

e

$$f^n([x_0, f(x_0)]) \cup f^{n+1}([x_0, f(x_0)]) = [f^n(x_0), f^{n+2}(x_0)]$$

e daí

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([x_0, f(x_0)]) \text{ é um conexo de } V_i, \quad (3.9)$$

portanto um intervalo.

Se existisse $y \in V_i$ tal que

$$y \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([x_0, f(x_0)]), \text{ de (3.9) teríamos que}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } a_i < y < f^n(x_0), \forall n \in \mathbb{Z}^- \\ \text{ou } b_i > y > f^n(x_0), \forall n \in \mathbb{Z}^+; \end{aligned} \quad (3.10)$$

mas, de 14.7,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) = b_i \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x_0) = a_i,$$

portanto, não pode valer (3.10); daí,

$$\nexists y \in V_i \text{ tal que } y \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([x_0, f(x_0)]).$$

De (3.8) e (3.10) temos que

$$\forall x_0 \in V_i, V_i = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([x_0, f(x_0)]), \text{ reunião disjunta.}$$

b) Decorre imediatamente do item a) e do fato de f estar em $\text{Dif}^r(I)$, $0 \leq r \leq \infty$.

14.11 Seja f crescente e V_i uma componente conexa de $I \setminus \text{fix } f$ tal que $f(x) < x$, $\forall x \in V_i$; então,

a) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([f(x_0), x_0]) = V_i$;

b) $\forall y \in V_i, \exists ! x \in [f(x_0), x_0], \exists ! m_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $f^{m_0}(x) = y$.

Análoga a 14.10.

14.12 f é decrescente se e somente se $\exists ! x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = x_0$ ($\iff \text{fix } f = \{x_0\} \subset I = [0, 1]$).

Item 1. Condição necessária.

Seja $g(x) = f(x) - x$. Como $f(0) = 1$ e

e $f(1) = 0$, temos que

$$g(0) = 1 \text{ e } g(1) = -1.$$

Ora, g é contínua em I ; portanto,
 $\exists x_0 \in I$ tal que $g(x_0) = 0$, isto é,

$$\exists x_0 \in I \text{ tal que } f(x_0) = x_0. \quad (3.11)$$

Para provar que $\bar{e}$ é único, observamos que f e $-id$ são estritamente decrescentes; portanto, $g = f + (-id)$ é estritamente decrescente, o que quer dizer

$$x \neq x_0 \implies g(x) \neq 0. \quad (3.12)$$

Ora,

$$g(x) = 0 \iff f(x) = x; \quad (3.13)$$

portanto, de (3.11), (3.12) e (3.13) podemos concluir que

$$\exists! x_0 \in I \text{ tal que } f(x_0) = x_0.$$

Item 2. Condição suficiente.

Se f fosse crescente, teríamos $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$; portanto, fix f não seria unitário; donde,

$$f \text{ é decrescente.}$$

14.13 Seja f decrescente e denotemos $\text{fix } f = \{x_f\}$; então,

$$a) f([0, x_f]) = [x_f, 1];$$

b) $f([x_f, 1]) = [0, x_f]$;

c) $f^2([0, x_f]) = [0, x_f]$;

d) $f^2([x_f, 1]) = [x_f, 1]$.

a) e b) decorrem de f pertencer a $\text{Dif}^0(I)$, ser decrescente e $\text{fix } f = \{x_f\}$.

c) e d) decorrem de f^2 pertencer a $\text{Dif}^0(I)$, ser crescente e $\text{fix } f^2 = \{0, x_f, 1\}$.

14.14 Seja f decrescente, $\text{fix } f = \{x_f\}$; então,

a) $f^{-1}([0, x_f]) = [x_f, 1]$;

b) $f^{-1}([x_f, 1]) = [0, x_f]$;

c) $(f^{-2})([0, x_f]) = [0, x_f]$;

d) $(f^{-2})([x_f, 1]) = [x_f, 1]$.

Análoga a de 14.13, aplicada a f^{-1} .

14.15 Seja f decrescente; então, $\text{per } f = \text{fix } f \cup \text{per}_2 f$, com $\text{fix } f = \{x_f\}$ e $\text{per}_2 f$ eventualmente vazio.

De 14.12, temos que $\text{fix } f = \{x_f\}$.

Item 1. $\text{fix } f \cup \text{per}_2 f \subseteq \text{per } f. \quad (3.14)$

Decorre da própria definição de $\text{per } f$.

Item 2. $\text{per } f \subseteq \text{fix } f \cup \text{per}_2 f.$

Seja $x \in \text{per } f \setminus \text{fix } f$. De 14.13 a) ou b)

podemos concluir que x tem período par.

Suponhamos $f^2(x) \neq x$.

Como f^2 é crescente, de 14.3 ou 14.4 teríamos, respectivamente,

$f^{2p}(x) \neq x, \forall p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, contra (3.11);

então, $n=1$ e $x \in \text{per}_2 f$; isto é,

$$\text{per } f \subseteq \text{per}_2 f \cup \text{fix } f. \quad (3.15)$$

De (3.14) e (3.15) decorre que

$$\text{per } f = \text{fix } f \cup \text{per}_2 f.$$

14.16 Seja f decrescente e $\{x_f\} = \text{fix } f$; se $x \in [0, x_f]$, então

a) $0_{f^2}(x) = 0_f(x) \cap [0, x_f]$;

b) $0_{f^2}(f(x)) = 0_f(x) \cap [x_f, 1]$.

De 14.13 c) e d), temos que

$$0_{f^2}(x) \subseteq 0_f(x) \cap [0, x_f] \quad \text{e} \quad 0_{f^2}(f(x)) \subseteq 0_f(x) \cap [x_f, 1].$$

Como

$$0_f(x) = 0_{f^2}(x) \cup 0_{f^2}(f(x)), \text{ com } [0_{f^2}(x) \cap 0_{f^2}(f(x))] = \emptyset$$

ou $[0_{f^2}(x) \cap 0_{f^2}(f(x))] = \{x_f\}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, x_f], \quad 0_{f^2}(x) &= 0_f(x) \cap [0, x_f] \quad \text{e} \\ 0_{f^2}(f(x)) &= 0_f(x) \cap [x_f, 1]. \end{aligned}$$

14.17 Sejam f decrescente, $\{x_f\} = \text{fix } f$ e $x \in [x_f, 1]$; então,

a) $0_{f^2}(x) = 0_f(x) \cap [x_f, 1]$;

b) $0_{f^2}(f(x)) = 0_f(x) \cap [0, x_f]$.

Análoga ã de 14.16, usando-se 14.13.

14.18 Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tais que $f \approx g$ por $h \in \text{Dif}^0(M^1)$; então, $h(\text{per}_n f) = \text{per}_n g$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Item 1. $h(\text{per}_n f) \subset \text{per}_n g$.

Seja $x_0 \in \text{per}_n f$; então,

$$0_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\} \text{ e}$$

$$0_g(h(x_0)) = h(0_f(x_0)) = \{h(x_0), \dots, hf^{n-1}(x_0)\}. \quad (3.16)$$

Ora, como $h \in \text{Dif}^0(M^1)$ e $f^i(x_0) \neq f^j(x_0)$, se $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ e $i \neq j$, temos que

$h(f^i(x_0)) \neq h(f^j(x_0))$, se $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e $i \neq j$,

que junto com (3.16) implica que $h(x_0) \in \text{per}_n g$; isto é,

$$h(\text{per}_n f) \subset \text{per}_n g, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.17)$$

Item 2. $\text{per}_n g \subset h(\text{per}_n f)$.

Como $f \approx g$ por h e vale a propriedade reflexiva de $\approx$, temos que $g \approx f$. Além disso, como

$$h \in \text{Dif}^0(I) \text{ e } h(0_f(x)) = 0_g(h(x)),$$

podemos concluir que $h^{-1}(0_g(y)) = 0_f(h^{-1}(y))$, $\forall y \in M^1$,

que pelo item 1 acarreta que $h^{-1}(\text{per}_n g) \subset \text{per}_n f$; isto é,

$$h(\text{per}_n f) \supset \text{per}_n g, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.18)$$

De (3.17) e (3.18),

$$h(\text{per}_n f) = \text{per}_n g, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

15 *A Relação entre a Conjugação Usual ($\sim$) e a Conjugação Definida em 13.3 ($\approx$).*

Em geral, define-se a conjugação em $\text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, dizendo-se que $f \sim g$ se e somente se existe $h \in \text{Dif}^0(M^1)$ tal que $hof = goh$.

Vamos, portanto, relacionar esta conjugação com a definida em 13.3 ($\approx$).

15.1 PROPOSIÇÃO.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tais que $f \sim g$ por $h \in \text{Dif}^0(M^1)$ (isto é, $hof = goh$); então, $f \approx g$ pelo mesmo h .

DEMONSTRAÇÃO.

Temos que provar que

$$\forall x \in M^1, h(o_f(x)) = o_g(h(x));$$

mas, $\forall x \in M^1$, $o_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$; portanto,

$$h(o_f(x)) = \{h(f^n(x)) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Item 1. $n = 0$.

Neste caso $h(f^0(x)) = h(x) = g^0(h(x))$ e

$$h(x) \in h(0_f(x)). \quad (3.19)$$

Item 2. $n > 0$.

Pela associatividade da composição de funções, temos que

$$hof^n = g^n oh, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{*+}. \quad (3.20)$$

Item 3. $n < 0$.

Como $hof = goh$ e tanto f como g estão em $\text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, obtemos $g^{-1}oh = hof^{-1}$; lembrando que $-n > 0$ e aplicando o item 2, concluímos que

$$(g^{-1})^{-n}oh = ho(f^{-1})^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{*-}; \text{ isto é,}$$

$$g^n oh = hof^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{*-}. \quad (3.21)$$

De (3.19), (3.20) e (3.21), podemos escrever que $\forall x \in M^1$, $h(0_f(x)) = 0_g(h(x))$; donde,

$f \approx g \text{ pelo mesmo } h.$

**

15.2 CONTRA-EXEMPLO DA RECÍPROCA.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^0(I)$ tais que:

$$19) \text{ fix } f = \text{fix } g = \{0, \frac{1}{2}, 1\};$$

$$29) f(x) > x, \quad \forall x \in I \setminus \text{fix } f;$$

$$39) g \Big|_{[0, \frac{1}{2}]} = f^{-1} \Big|_{[0, \frac{1}{2}]};$$

$$49) \quad g|_{[\frac{1}{2}, 1]} = f|_{[\frac{1}{2}, 1]};$$

então, $\exists h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $(hof) = (goh)$ ou $(hof) = (g^{-1}oh)$, embora $f \approx g$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Provemos que $f \approx g$ pela identidade.

a) Seja $x \in]0, \frac{1}{2}[$; de 14.7, temos que $f^n(x) \in]0, \frac{1}{2}[$, $\forall n \in \mathbb{Z}$; portanto, $O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = \{(g^{-1})^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = \{g^{-n}(x) : n \in \mathbb{Z}\} = \{g^m(x) : -m \in \mathbb{Z}\} = \{g^m(x) : m \in \mathbb{Z}\} = O_g(x)$; isto é,

$$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[, O_f(x) = O_g(x). \quad (3.22)$$

b) Seja $x \in]\frac{1}{2}, 1[$; de 14.7, $f^n(x) \in]\frac{1}{2}, 1[$, $\forall n \in \mathbb{Z}$; portanto, $O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = \{g^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = O_g(x)$; isto é,

$$\forall x \in]\frac{1}{2}, 1[, O_f(x) = O_g(x). \quad (3.23)$$

c) Seja $x \in \text{fix } f = \{0, \frac{1}{2}, 1\} = \text{fix } g$; então,

$$\forall x \in \text{fix } f, 0_f(x) = 0_g(x). \quad (3.24)$$

De (3.22), (3.23) e (3.24),

$\forall x \in I, 0_f(x) = 0_g(x)$; ou $f \approx g$ pela identidade.

Item 2. Não existe $h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $h \circ f = g \circ h$ ou $h \circ f = g^{-1} \circ h$.

Suponhamos que $h \circ f = g \circ h$ para algum $h \in \text{Dif}^0(I)$.

d) Seja h crescente e $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$; como $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, teríamos:

$$1^\circ) h(x_0) < \frac{1}{2};$$

$$2^\circ) (h \circ f)(x_0) = (g \circ h)(x_0);$$

$$3^\circ) f(x_0) > x_0 \text{ e } g(x_0) < x_0;$$

$$4^\circ) (h \circ f)(x_0) > h(x_0).$$

De $1^\circ)$, $(g \circ h)(x_0) < h(x_0)$, que junto com $4^\circ)$ dá $(h \circ f)(x_0) > g \circ h(x_0)$, contra $2^\circ)$; portanto,

h não pode ser crescente. (3.25)

e) Seja h decrescente e $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$; neste caso, teríamos:

$$5^\circ) h(x_0) > h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2};$$

$$6^\circ) (h \circ f)(x_0) = (g \circ h)(x_0);$$

$$7^\circ) f(x_0) > x_0 \text{ e } g(x_0) < x_0;$$

$$8^\circ) (h \circ f)(x_0) < h(x_0).$$

De 5º), $(goh)(x_0) > h(x_0)$ que, junto com 8º), dá $(goh)(x_0) > (hof)(x_0)$, contra 6º); isto é,

h não pode ser decrescente. (3.26)

De (3.25) e (3.26), concluímos que

$\exists h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $hof = goh$. (3.27)

Analogamente, tomando-se x_0 em $] \frac{1}{2}, 1[$, teríamos que

$\exists h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $hof = g^{-1}oh$. (3.28)

De (3.27) e (3.28), $f \not\sim g$, apesar de $f \approx g$ pela identidade.

16 Um Teorema Importante.

Vamos relacionar a conjugação em $\text{Dif}^r(I)$, $0 \leq r \leq \infty$, (ver 13.3) e a conjugação entre conjuntos fechados (ver 6.1).

16.1 TEOREMA.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(I)$, $0 \leq r \leq \infty$.
 $f \approx g \iff fog$ é crescente e $\text{per}_n f \sim \text{per}_n g$, $\forall n \in \{1, 2\}$,
 pelo mesmo $h \in \text{Dif}^0(I)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição necessária.

Observemos, em primeiro lugar, que se f for crescente e g decrescente, então $f \not\sim g$, pois

$$0 \in \text{fix } f,$$

$$1 \in \text{fix } f,$$

$$0 \in \text{per}_2 g,$$

$$1 \in \text{per}_2 g,$$

o que quer dizer que $\forall h \in \text{Dif}^0(I)$, $h(\text{fix } f) \neq \text{fix } g$, contra 14.18; então,

$$f \sim g \implies f \circ g \text{ crescente.}$$

Seja, então, $h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $\forall x \in I$, $h(0_f(x)) = 0_g(h(x))$.

De 14.18 decorre que

$$h(\text{per}_n f) = \text{per}_n g, \quad n = 1, 2.$$

Item 2. Condição suficiente.

a) f e g crescentes.

Neste caso, $\text{per } f = \text{fix } f$ e $\text{per } g = \text{fix } g$ (ver 14.9). Consideremos as decomposições de $I \setminus \text{fix } f$ e $I \setminus \text{fix } g$ em componentes conexas:

$$I \setminus \text{fix } f = \bigcup_{i \in K_f \subset \mathbb{N}}]a_i, b_i[$$

e

$$I \setminus \text{fix } g = \bigcup_{j \in K_g \subset \mathbb{N}}]c_j, d_j[.$$

Como $h(\text{fix } f) = \text{fix } g$ e $h \in \text{Dif}^0(I)$, temos que

$$\forall i \in K_f, \exists! j \in K_g \text{ tal que } h([a_i, b_i]) = [c_j, d_j], \quad (3.29)$$

onde

$$\text{ou } h(a_i) = c_j \text{ e } h(b_i) = d_j \text{ (h crescente),}$$

$$\text{ou } h(a_i) = d_j \text{ e } h(b_i) = c_j \text{ (h decrescente).}$$

Vamos construir uma função $k: I \rightarrow I$ da seguinte forma:

$$1^\circ) k|_{\text{fix } f} = h|_{\text{fix } f};$$

2º) seja $V_i =]a_i, b_i[$ componente conexa de $I \setminus \text{fix } f$ e escolhemos $x_i \in V_i$ qualquer; por causa de 14.10, chamemos de "fundamental" o intervalo J_i^0 que pode ser $[x_i, f(x_i)[$ ou $]f(x_i), x_i]$, conforme $f(x) > x$ ou $f(x) < x$ em V_i ; então, $V_i = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(J_i^0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_i^n$, reunião disjunta, e

$$\forall x \in V_i, \exists! \bar{x} \in J_i^0, \exists! n_0 \in \mathbb{Z} \text{ tais que } f^{n_0}(\bar{x}) = x. \quad (3.30)$$

De (3.29), seja $j \in K_g$ tal que $h(V_i) = U_j =]c_j, d_j[$; temos

$$k(x_i) = h(x_i)$$

e

$$k(f(x_i)) = g^\epsilon(h(x_i)),$$

onde ou $\epsilon = +1$ ou $\epsilon = -1$ é escolhido de forma que k seja crescente.

De 14.10 decorre que o intervalo K_j^0 de extremidades $h(x_i)$ (inclusive) e $g^\epsilon(h(x_i))$ (exclusive)

é "fundamental"; portanto, $U_j = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(K_j^0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K_j^n$,
reunião disjunta, e

$$\forall y \in U_j, \exists! z \in K_j^0, \exists! m_0 \in \mathbb{Z} \text{ tais que } g^{m_0}(z) = y. \quad (3.31)$$

E definimos $k: V_i \rightarrow U_j$ da seguinte forma:

$k|_{J_i^0}: J_i^0 \rightarrow K_j^0$ linear e tal que $k(x_i) = h(x_i)$ e
 $k(f^\epsilon(x_i)) = g^\epsilon(h(x_i))$ ($\epsilon = +1$ ou $\epsilon = -1$, de forma que $k \circ h$
seja crescente) e $\forall x \in V_i$, de (3.30) temos que $x = f^{n_0}(\bar{x})$,
para um único $n_0 \in \mathbb{Z}$ e um único $\bar{x} \in J_i^0$; portanto, temos

$$k(x) = k(f^{n_0}(\bar{x})) = g^{n_0 \epsilon}(k(\bar{x})).$$

Construída a função $k: I \rightarrow -I$, precisamos
provar que $k \in \text{Dif}^0(I)$ e $k(0_f(x)) = 0_g(k(x))$, $\forall x \in I$.

a.1) k é sobrejetora.

Seja $y \in I$;

se $y \in \text{per } g$, como $h(\text{per } f) = k(\text{per } f) = \text{per } g$,

$$k(\text{per } f) = \text{per } g; \quad (3.32)$$

se $y \in I \setminus \text{per } g$, $\exists j \in K_g$ tal que $y \in U_j =]c_j, d_j[$; e de (3.29)
temos que $\exists! i \in K_f$ tal que $h(V_i) = U_j$.

Pela definição de k e de (3.31),

$$y = g^{m_0 \epsilon}(\bar{y}) = g^{m_0 \epsilon}(h(\bar{x})) = k(f^{m_0}(\bar{x})),$$

onde $\bar{x}$ pertence ao intervalo "fundamental" J_i^0 de V_i
e $\bar{y} \in K_j^0$, intervalo "fundamental" de U_j ; portanto,
 $y = k(x)$ e

$$k(I \setminus \text{per } f) = I \setminus \text{per } g. \quad (3.33)$$

De (3.32) e (3.33) decorre que

$$k \text{ é sobrejetora.} \quad (3.34)$$

a.2) $k \in \text{Dif}^0(I)$.

De 14.3 e da definição de k , temos que

$$k \text{ tem mesma monotonicidade que } h. \quad (3.35)$$

Como I é um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e valem (3.34) e (3.35), podemos concluir que

$$k \in \text{Dif}^0(I). \quad (3.36)$$

a.3) $\forall x \in I, k(0_f(x)) = 0_g(k(x))$.

I) Se $x \in \text{fix } f$, então $k(x) \in \text{fix } g$ e

$$\forall x \in \text{fix } f, k(0_f(x)) = 0_g(k(x)). \quad (3.37)$$

II) Se $x \in I \setminus \text{fix } f$, então $\exists i \in \mathbb{K}_f$ tal que $x \in V_i$ e $\exists!$ z no intervalo "fundamental" escolhido em V_i e $\exists!$ $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{n_0}(z) = x$;

$$\begin{aligned} k(0_f(x)) &= k(\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}) = k(\{f^n(f^{n_0}(z)) : n \in \mathbb{Z}\}) = \\ &= k(\{f^{n+n_0}(z) : n \in \mathbb{Z}\}) = \{k(f^{n+n_0}(z)) : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{g^{(n+n_0)\epsilon}(k(z)) : n \in \mathbb{Z}\} = \{g^{n\epsilon}(g^{n_0\epsilon}(k(z))) : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{g^{n\epsilon}(k(f^{n_0}(z))) : n \in \mathbb{Z}\} = \{g^{n\epsilon}(k(x)) : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= 0_g(k(x)), \text{ pois } \epsilon = +1 \text{ ou } \epsilon = -1; \text{ portanto,} \end{aligned}$$

$$\forall x \in I \setminus \text{fix } f, k(0_f(x)) = 0_g(k(x)). \quad (3.38)$$

De (3.37) e (3.38) podemos concluir que

$$\forall x \in I, k(0_f(x)) = 0_g(k(x)). \quad (3.39)$$

Finalmente, de (3.36) e (3.39) temos que

$$f \approx g.$$

b) f e g decrescentes.

Como $\text{per } f = \text{fix } f^2$ e $\text{per } g = \text{fix } g^2$ com f^2 e g^2 crescentes, de a) decorre que $f^2 \approx g^2$.

Seja $h \in \text{Dif}^0(I)$ tal que

$$\forall x \in I, h(0_{f^2}(x)) = 0_{g^2}(h(x)).$$

Em particular,

$$\forall x \in I, h(0_{f^2}(f(x))) = 0_{g^2}(hf(x)).$$

Como $\forall x \in I, 0_f(x) = 0_{f^2}(x) \cup 0_{f^2}(f(x))$ e $0_g(h(x)) = 0_{g^2}(h(x)) \cup 0_{g^2}(gh(x))$, e essas reuniões são disjuntas se $x \notin \text{per } f$, definimos $k: I \rightarrow I$ da seguinte forma:

1º) se $\{x_f\} = \text{fix } f$, então

$$\forall x \in [0, x_f], k(x) = h(x);$$

2º) se $x \in [x_f, 1] = f([0, x_f])$ (ver 14.13), existe um único $y \in [0, x_f]$ tal que $x = f(y)$; então pomos

$$\forall x \in [x_f, 1], k(x) = (g \circ h \circ f^{-1})(x),$$

onde $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ está bem determinado pela definição de k em $[0, x_f]$.

b.1) k está bem definida.

O problema que poderia surgir é no ponto x_f ; ora,

$$\lim_{x \rightarrow x_f^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow x_f^-} h(x) = h(x_f) = x_g \quad e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_f^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow x_f^+} (g^\varepsilon \circ h \circ f^{-1})(x) = g^\varepsilon(x_g) = x_g; \text{ portanto,}$$

$$k(x_f) = x_g. \quad (3.40)$$

b.2) k é injetora.

$$k([0, x_f]) = h([0, x_f]) \quad e \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} k([x_f, 1]) &= (g^\varepsilon \circ h \circ f^{-1})([x_f, 1]) = \\ &= I \setminus h([0, x_f]) \quad (g \text{ é decrescente}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Como $h([0, x_f]) \cap I \setminus h([0, x_f]) = \emptyset$, h , g^ε , f^{-1} são injetoras, podemos concluir que

$$k \text{ é injetora.} \quad (3.43)$$

$$b.3) \quad k \text{ é sobrejetora.} \quad (3.44)$$

Decorre imediatamente de (3.41) e (3.42).

b.4) k é contínua.

$$h|_{[0, x_f]} \quad e \quad (g^\varepsilon \circ h \circ f^{-1})|_{[x_f, 1]} \quad \text{são contínuas e vale}$$

(3.40); portanto,

$$k \text{ é contínua.} \quad (3.45)$$

$$b.5) \quad k \in \text{Dif}^0(I). \quad (3.46)$$

Como I é compacto de (3.43), (3.44) e (3.45) podemos concluir (3.46).

b.6) k leva órbitas de f sobre órbitas de g .

Seja $x \in I$;

$$\text{se } x = x_f, \text{ vale, pois } k(x_f) = x_g; \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \text{se } x \in \text{per}_2 f \cap [0, x_f[, \quad 0_f(x) &= \{x, f(x)\} \text{ e } k(0_f(x)) = \\ &= \{k(x), k(f(x))\} = \{h(x), (g^\epsilon \circ h \circ f^{-1})(f(x))\} = \\ &= \{h(x), g^\epsilon(h(x))\} = 0_g(h(x)), \text{ pois } h(\text{per}_2 f) = \text{per}_2 g; \\ \text{isto é,} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \text{per}_2 f \cap [0, x_f[, k(0_f(x)) = 0_g(k(x)); \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \text{se } x \in [0, x_f] \setminus \text{per } f, \quad k(0_f(x)) &= k(0_{f2}(x) \cup 0_{f2}(f(x))) = \\ &= h(0_{f2}(x)) \cup (g^\epsilon \circ h \circ f^{-1})(0_{f2}(f(x))) = \\ &= 0_{g2}(h(x)) \cup (g^\epsilon \circ h)(0_{f2}(x)) = 0_{g2}(h(x)) \cup g^\epsilon(0_{g2}(h(x))) = \\ &= 0_{g2}(h(x)) \cup 0_{g2}((gh)(x)) = 0_g(h(x)) \text{ e temos que} \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, x_f] \setminus \text{per } f, \quad k(0_f(x)) = 0_g(k(x)). \quad (3.49)$$

Finalmente, observando que toda órbita

de f tem representante em $[0, x_f]$, de (3.47), (3.48) e (3.49) podemos concluir que $\forall x \in I, k(0_f(x)) = 0_g(k(x))$, que junto com (3.46) nos dá que

$$f \approx g.$$

**

17 A Construção de um Difeomorfismo Sobre um Conjunto Fechado.

Antes de enunciar o teorema, precisamos da definição de difeomorfismo hiperbólico.

17.1 DEFINIÇÃO.

Sejam $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $1 \leq r \leq \infty$ e $x \in \text{fix } f$. x é chamado ponto fixo hiperbólico de f se e somente se $|f'(x)| \neq 1$.

17.2 DEFINIÇÃO.

Sejam $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $1 \leq r \leq \infty$ e $x \in \text{per}_n f$, para $n \geq 2$. x é chamado ponto periódico hiperbólico de f se somente se x é ponto fixo hiperbólico de f^n .

17.3 DEFINIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $1 \leq r \leq \infty$. Dizemos que f é hiperbólico se e somente se todo ponto periódico de f for hiperbólico. Denotaremos por $\mathcal{H}^r(M^1)$ o conjunto das $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $1 \leq r \leq \infty$, que forem hiperbólicas; isto é,

$$1 \leq r \leq \infty, \mathcal{H}^r(M^1) = \{f \in \text{Dif}^r(M^1) \mid f \text{ é hiperbólica}\}.$$

17.4 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$. Todo ponto periódico hiperbólico de f é isolado.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $x_0 \in \text{per } f$ tal que x_0 é ponto periódico hiperbólico de f e vamos dividir a demonstração em dois itens.

Item 1. f crescente.

Neste caso, $f'(x_0) \neq 1$ e como $f \in \text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$, temos que f' é contínua, portanto,

$\exists \delta > 0$ tal que $x \in B(x_0, \delta) \implies f'(x) \neq 1$.

Consideremos a função $g = f - \text{id}: I \rightarrow \mathbb{R}$; então, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in B(x_0, \delta)$; ora, g' é contínua, portanto g é estritamente monótona em $B(x_0, \delta)$. Como $g(x_0) = 0$, temos que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$; isto é, x_0 é ponto fixo isolado de f .

Item 2. f decrescente.

Como $x_0 \in \text{fix } f^2 = \text{per } f$ e f^2 é crescente, do item 1 decorre que

x_0 é ponto periódico isolado de f .

**

17.5 COROLÁRIO.

Seja $f \in \mathcal{H}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$; então, $\text{per } f$ é finito.

DEMONSTRAÇÃO.

Decorre de 17.4 e de f ser fechado.

**

17.6 TEOREMA.

Seja $A \subset I$ tal que $\bar{A} = A$; então, $\exists f \in \text{Dif}^\infty(I)$, crescente, tal que $\text{fix } f = A$. Em particular, se A for finito, então $f \in \mathcal{C}(I)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. A infinito.

Vamos considerar o seguinte resultado:

Teorema F.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{A} = A$; então, existe $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , tal que $A = h^{-1}(\{0\})$ e $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(Ver [2], pp 15 a 18.)

No nosso caso, $A \subset I \subset \mathbb{R}$, com A fechado em $\mathbb{R}$; podemos, portanto, aplicar o teorema F para $n=1$ e considerar as funções $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f_\alpha(x) = x + \alpha h(x).$$

E vamos determinar um α_0 tal que

$$f_{\alpha_0}|_I \in \text{Dif}^\infty(I).$$

a) $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

É verdade, pois id e h são de classe C^∞ .

b) $\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f_{\alpha_0}|_I \in \text{Dif}^\infty(I)$.

Como I é compacto e h não é constante,
 $\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |\alpha_0| < \frac{1}{\max_{x \in I} |h'(x)|}$ e $\forall x \in I$,

$$|f'_{\alpha_0}(x)| > 0, \forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid 0 < |\alpha_0| < \frac{1}{\max_{x \in I} |h'(x)|}.$$

Como $f_{\alpha_0} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f'_{\alpha_0} \neq 0$ em I , $f_{\alpha_0}(0) = 0$
 e $f_{\alpha_0}(1) = 1$, temos que $f_{\alpha_0}|_I : I \rightarrow I$ é bijetora, C^∞
 e crescente.

Ora, I é compacto; portanto,

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \mid 0 < |\alpha| < \frac{1}{\max_{x \in I} |h'(x)|}$, $f_\alpha|_I \in \text{Dif}^\infty(I)$ e
 é crescente.

c) fix $f_\alpha = A$.

Como $h^{-1}(\{0\}) = A$ e $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
 temos que $[f_\alpha(x) = x$ se e somente se $x \in A]$; isto é,

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \mid 0 < |\alpha| < \frac{1}{\max_{x \in I} |h'(x)|}$, fix $f_\alpha = A$.

Item 2. A finito.

Seja $A = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = 1\}$ e

consideremos a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$; então

$$h \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ e } [h(x) = 0 \iff x \in A]; \quad (3.50)$$

além disso, como $h'(x) = \sum_{j=0}^n \left(\prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq i \leq n}} (x-x_i) \right)$, resulta

$$\text{que } h'(x_j) = \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq i \leq n}} (x-x_i), \quad \forall x_j \in A; \text{ isto é,}$$

$$h'(x_j) \neq 0, \quad \forall x_j \in A. \quad (3.51)$$

A partir de h , definimos $f_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, por $f_\alpha(x) = x + \alpha h(x)$.

De (3.50),

$$f_\alpha \in C^\infty \text{ e } [f_\alpha(x) = x \iff x \in A], \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.52)$$

Seja $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |\alpha_0| < \frac{1}{\max_{x \in I} |h'(x)|}$,

que existe, pois I é compacto e $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, não constante; então,

$$|f'_{\alpha_0}(x)| = |1 + \alpha_0 h'(x)| > 0, \quad \forall x \in I. \quad (3.53)$$

Além disso,

$$f_{\alpha_0}(0) = 0 \text{ e } f_{\alpha_0}(1) = 1. \quad (3.54)$$

De (3.52), (3.53), (3.54) e do fato de I ser compacto, concluímos que

$$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid 0 < |\alpha_0| < \frac{1}{\max_{x \in I} |h'(x)|}, \quad f_{\alpha_0}|_I \in \text{Dif}^\infty(I) \text{ e}$$

fix $f_{\alpha_0} = A$.

Falta verificar que $f'_{\alpha_0}(x_j) \neq 1$, $\forall x_j \in A$,
o que decorre de (3.51); e podemos escrever que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \mid 0 < |\alpha| < \frac{1}{\max_{x \in I} |h'(x)|}, f_{\alpha} \in \mathcal{C}^{\infty}(I).$$

**

18 Estabilidade Estrutural.

Seja $\sim$ a conjugação em $\text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$,
definida em 13.3.

18.1 DEFINIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$. Dizemos que
 $f \in \sim - C^r$ - estruturalmente estável se e somente se
 $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall g \in B_r(f, \varepsilon)$, $g \sim f$. Dizemos também
que $f \in C^r$ - estruturalmente estável.

18.2 PROPOSIÇÃO.

$\forall f \in \text{Dif}^r(I)$, f não é C^0 -estruturalmen-
te estável.

DEMONSTRAÇÃO.

O enunciado equivale a mostrar que $\forall \varepsilon > 0$,
 $\exists g \in B_0(f, \varepsilon)$ tal que $g \not\sim f$ ($\iff \text{per}_n f \neq \text{per}_n g$, para
algum $n \in \mathbb{N}^*$, conforme 16.1).

Vamos considerar quatro itens.

- Item 1. f crescente e 0 ponto fixo não isolado.
 Item 2. f crescente e 0 ponto fixo isolado.
 Item 3. f decrescente e $\exists b > 0$ tal que $[0, b] \subset \text{per}_2 f$.
 Item 4. f decrescente e $\nexists b > 0$ tal que $[0, b] \subset \text{per}_2 f$.

Como 0 é não isolado,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \delta_1 < \frac{\varepsilon}{4}$, tal que $f(\delta_1) = \delta_1$.

Da continuidade de $f - \text{id}$ no zero,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in [0, \delta_2[$.

Seja $\delta_1 < \delta_2$ e chamemos δ_1 de δ ; consideremos $g: I \rightarrow I$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \delta \leq x \leq 1; \\ \delta^{-1}x^2, & 0 \leq x < \delta. \end{cases}$$

É imediato que

g é contínua em I . (3.55)

Como

$$g([0, \delta[) = [0, \delta[, \quad g([\delta, 1]) = f([\delta, 1]) = [\delta, 1],$$

$f|_{[\delta, 1]}$ é injetora e $\delta^{-1}x^2|_{[0, \delta[}$ é injetora, temos que

g é bijetora, que junto com (3.55) e o fato de I ser compacto, acarreta:

$$g \in \text{Dif}^0(I). \quad (3.56)$$

a) 0 é ponto fixo isolado de g , pois $\forall x \in [0, \delta[$,
 $g(x) = x \iff \delta^{-1}x^2 = x \iff$ ou $x = 0$ ou $\delta^{-1}x = 1 \iff$ ou
 $x = 0$ ou $x = \delta$.

b) $g \in B_0(f, \epsilon)$.

$$|g(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & \delta \leq x \leq 1; \\ |f(x) - \delta^{-1}x^2|, & 0 \leq x < \delta. \end{cases}$$

Ora, $|f(x) - \delta^{-1}x^2| \leq |f(x) - x| + |x - \delta^{-1}x^2| =$
 $= |f(x) - x| + |x| \left| \frac{\delta - x}{\delta} \right| = |f(x) - x| + \frac{|x|}{\delta} |\delta - x| < |f(x) - x| +$
 $+ |\delta| + |x| < \frac{\epsilon}{2} + 2\delta < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$; então, $|f(x) - g(x)| < \epsilon$,
 $\forall x \in I$; isto é,

$$g \in B_0(f, \epsilon). \quad (3.57)$$

c) $g \not\approx f$.

Suponhamos que $g \approx f$ por h . Como 0 é ponto fixo isolado de g e não o é de f ,

$$h \text{ não pode ser crescente.} \quad (3.58)$$

Por outro lado, como $g|_{[\delta, 1]} = f|_{[\delta, 1]}$,

1 é ponto fixo de mesma espécie para f e para g ; teríamos

para f :

i) 0 não isolado e 1 isolado;

ou

ii) 0 não isolado e 1 não isolado;

para g :

i) 0 isolado e 1 isolado;

ou

ii) 0 isolado e 1 não isolado.

Em i), $h(0)$ não pode ser 1 e em ii), $h(1)$ não pode ser 0; portanto,

h não pode ser decrescente. (3.59)

De (3.58) e (3.59),

$f \approx g$. (3.60)

Finalmente, de (3.56), (3.57) e (3.60) como $\epsilon > 0$ é qualquer, concluímos que f não é C^0 -estruturalmente estável.

Item 2.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que $f(x) - x \neq 0, \forall x \in]0, \delta_1[$.

Da continuidade de f no zero,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - x| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall x \in [0, \delta_2]$. (3.61)

E da continuidade de f no zero,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_3 > 0$ tal que $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall x \in [0, \delta_3]$.

Seja

$$\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \frac{\varepsilon}{4} \} \quad (3.62)$$

e escolhamos x_0 em $]0, \delta[$ tal que $x_0 < f(\delta)$ (se $f(x) > x$ em $]0, \delta[$, qualquer x satisfaz; se $f(x) < x$, como $0 < f(\delta) < \delta$, basta tomar x_0 em $]0, f(\delta)[\subset]0, \delta[$).

Definimos $g: I \rightarrow I$ por

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq x_0; \\ L(x) = f(\delta) + \frac{f(\delta) - x_0}{\delta - x_0}(x - \delta), & x_0 < x \leq \delta; \\ f(x), & \delta < x \leq 1. \end{cases}$$

É imediato que

$$g \in \text{Dif}^0(I).$$

(3.63)

a) 0 não é ponto fixo isolado de g , pois $g(x) = x$,
 $\forall x \in [0, x_0]$.

b) $g \in B_0(f, \epsilon)$.

$$|g(x) - f(x)| = \begin{cases} |f(x) - x|, & 0 \leq x \leq x_0; \\ |f(x) - L(x)|, & x_0 < x \leq \delta; \\ 0, & \delta < x \leq 1. \end{cases}$$

De (3.61) e (3.62),

$$\forall x \in [0, x_0], |f(x) - x| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.64)$$

$$\forall x \in]x_0, \delta], |f(x) - L(x)| = \left| f(x) - f(\delta) - \frac{f(\delta) - x_0}{\delta - x_0}(x - \delta) \right| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(\delta)| + |f(\delta) - x_0| \left| \frac{x - \delta}{\delta - x_0} \right| < |f(x) - f(\delta)| +$$

$$+ |f(\delta) - x_0| \leq |f(x) - f(\delta)| + |f(\delta) - \delta| + |\delta - x_0| <$$

$$< |f(x_0) - f(\delta)| + |f(\delta) - \delta| + |\delta - x_0| < 2f(\delta) +$$

$$+ |f(\delta) - \delta| + |\delta - x_0| < 2\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon; \text{ isto é,}$$

$$\forall x \in]x_0, \delta], |g(x) - f(x)| < \epsilon; \quad (3.65)$$

$$\forall x \in]\delta, 1], |g(x) - f(x)| = 0 < \epsilon. \quad (3.66)$$

De (3.64), (3.65) e (3.66),

$$g \in B_0(f, \epsilon). \quad (3.67)$$

c) $g \not\approx f$.

Como 0 não é isolado para g e 1 é de

mesma espécie para f e para g $\left\{g|_{] \delta, 1]} = f|_{] \delta, 1]}\right\}$,
por raciocínio análogo ao feito no item 1.c), decorre
que

$$g \not\approx f. \quad (3.68)$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, de (3.63), (3.67)
e (3.68),

f não é C^0 -estruturalmente estável.

Item 3.

Da continuidade de f no zero, $\forall \epsilon > 0$,
 $\exists \delta > 0$, $\delta \leq b$, tal que $|f(x) - 1| < \frac{\epsilon}{5}$, $\forall x \in [0, \delta]$.

Além disso, seja $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid n > \epsilon\}$
(que existe, pois $\epsilon > 0$).

Definimos a função $g: I \rightarrow I$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \delta \leq x \leq 1; \\ L_1(x) = \left(1 - \frac{\epsilon}{n_0}\right)f(x) + \frac{\epsilon}{n_0}, & 0 \leq x \leq \frac{\delta}{2}; \\ L_2(x) = f(\delta) + \frac{f(\delta) - \left(1 - \frac{\epsilon}{n_0}\right)f\left(\frac{\delta}{2}\right) - \frac{\epsilon}{n_0}}{\frac{\delta}{2}}(x - \delta), & \frac{\delta}{2} < x < \delta. \end{cases}$$

Temos que

$$g \in \text{Dif}^0(I). \quad (3.69)$$

a) 0 é ponto periódico isolado de g.

Vamos provar que $[0, \frac{\delta}{2}] \cap \text{per } g = \{0\}$; para tanto, seja $x \in]0, \frac{\delta}{2}]$:

$$\begin{aligned} g(x) &= L_1(x) = (1 - \frac{\epsilon}{n_0})f(x) + \frac{\epsilon}{n_0} = f(x) - \frac{\epsilon}{n_0}f(x) + \frac{\epsilon}{n_0} > \\ &> f(x) - \frac{\epsilon}{n_0} + \frac{\epsilon}{n_0} = f(x), \text{ pois } f(x) < 1, \quad \forall x \in]0, \frac{\delta}{2}]; \end{aligned}$$

ora, $\forall x \in]0, \frac{\delta}{2}[$, $g(x) \in [\delta, 1[$; então,

$$g(g(x)) = f(g(x));$$

como f é decrescente e $g(x) > f(x)$,

$$g^2(x) > g(f(x)). \quad (3.70)$$

Por outro lado,

$$0 < x \leq \frac{\delta}{2} < \delta < x_f \iff 1 > f(x) \geq f(\frac{\delta}{2}) > f(\delta) > x_f;$$

portanto, $f(x) > \delta$ e, neste caso,

$$g(f(x)) = f^2(x). \quad (3.71)$$

De (3.70) e (3.71) concluímos que

$$\forall x \in]0, \frac{\delta}{2}], \quad g^2(x) < f^2(x) = x; \text{ donde,}$$

$$\text{per } g \cap [0, \frac{\delta}{2}] = \{0\}.$$

b) $g \in B_0(f, \epsilon)$.

$$|g(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & \delta \leq x \leq 1; \\ |f(x) - L_1(x)|, & 0 \leq x \leq \frac{\delta}{2}; \\ |f(x) - L_2(x)|, & \frac{\delta}{2} < x < \delta. \end{cases}$$

$$|f(x) - L_1(x)| = \left| \frac{\epsilon}{n_0} - \frac{\epsilon}{n_0} f(x) \right| = \frac{\epsilon}{n_0} |1 - f(x)| < |1 - f(x)| < \frac{\epsilon}{5}; \text{ daí,}$$

$$\forall x \in [0, \frac{\delta}{2}], |f(x) - g(x)| < \epsilon. \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} |f(x) - L_2(x)| &= \left| f(x) - f(\delta) - \frac{f(\delta) - (1 - \frac{\epsilon}{n_0})f(\frac{\delta}{2}) - \frac{\epsilon}{n_0}}{\frac{\delta}{2}}(x - \delta) \right| \leq \\ &\leq |f(x) - f(\delta)| + \frac{|x - \delta|}{\frac{\delta}{2}} \left| f(\delta) - f(\frac{\delta}{2}) + \frac{\epsilon}{n_0} f(\frac{\delta}{2}) - \frac{\epsilon}{n_0} \right| \leq \\ &\leq |f(x) - f(\delta)| + \left| f(\delta) - f(\frac{\delta}{2}) \right| + \frac{\epsilon}{n_0} \left| f(\frac{\delta}{2}) - 1 \right| \leq \\ &\leq 2 \left| f(\delta) - f(\frac{\delta}{2}) \right| + \left| f(\frac{\delta}{2}) - 1 \right| \leq 2 |f(\delta) - 1| + \\ &+ 2 \left| 1 - f(\frac{\delta}{2}) \right| + \left| f(\frac{\delta}{2}) - 1 \right| < 2 \frac{\epsilon}{5} + 3 \frac{\epsilon}{5} = \epsilon; \text{ isto é,} \end{aligned}$$

$$\forall x \in]\frac{\delta}{2}, \delta[, |g(x) - f(x)| < \epsilon. \quad (3.73)$$

Além disso,

$$\forall x \in [\delta, 1], |g(x) - f(x)| = 0 < \epsilon. \quad (3.74)$$

De (3.72), (3.73) e (3.74) concluímos que

$$g \in B_0(f, \epsilon). \quad (3.75)$$

c) $g \not\approx f$.

Ora, 0 é ponto periódico isolado de g ,
 $[0, b] \subset \text{per}_2 f$ e $g|_{[\delta, 1]} = f|_{[\delta, 1]}$; por raciocínio análogo ao feito no item 1.c), podemos concluir que

$$g \not\approx f. \quad (3.76)$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, de (3.69), (3.75) e (3.76),

f não é C^0 -estruturalmente estável.

Item 4.

Da continuidade de f no zero, $\forall \epsilon > 0$,
 $\exists \delta_1 > 0$, $\delta_1 < x_f$, tal que $|f(x) - 1| < \frac{\epsilon}{4}$, $\forall x \in [0, \delta_1]$.

Da continuidade de f^{-1} no zero, $\forall \epsilon > 0$,
 $\exists \delta_2 > 0$ tal que $|f^{-1}(x) - 1| < \frac{\epsilon}{4}$, $\forall x \in [0, \delta_2]$.

Da continuidade de $f - f^{-1}$ no zero,

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_3 > 0$ tal que

$$|f(x) - f^{-1}(x)| < \frac{\epsilon}{4}, \quad \forall x \in [0, \delta_3]. \quad (3.77)$$

Seja $\delta \leq \min \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3 \}$, tal que

$\delta \notin \text{per}_2 f$; e escolhemos $x_0 \in]0, \delta[$ tal que $f^{-1}(x_0) > f(\delta)$ (se $\exists x \in]0, \delta[$ tal que $f(x) < f^{-1}(x)$, tudo bem; se $f(x) \geq f^{-1}(x)$, $\forall x \in]0, \delta[$, existe $y_0 \in]0, \delta[$ tal que $f^{-1}(y_0) = f(\delta)$, pois $f(\delta) \in]0, f^{-1}(\delta)[$; escolhemos $x_0 \in]0, y_0[\subset]0, \delta[$ e é claro que $f^{-1}(x_0) > f^{-1}(y_0) = f(\delta)$).

Definimos $g: I \rightarrow I$ por

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & 0 \leq x \leq x_0; \\ L(x) = f(\delta) + \frac{f(\delta) - f^{-1}(x_0)}{\delta - x_0}(x - \delta), & x_0 < x < \delta; \\ f(x), & \delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Como I é compacto, é fácil mostrar que

$$g \in \text{Dif}^0(I). \quad (3.78)$$

a) $[0, x_0] \subset \text{per}_2 g$.

Seja $x \in [0, x_0]$; então, $g(x) = f^{-1}(x)$; por outro lado, como $0 < x < x_0 < \delta < x_f$,

$1 > f^{-1}(x) > f^{-1}(x_0) > f^{-1}(\delta) > x_f > \delta$; donde, $f^{-1}(x) > x_f > \delta$ e $g(g(x)) = g(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$; isto é, $x \in \text{per}_2 g$ e

$$[0, x_0] \subset \text{per}_2 g.$$

b) $g \in B_0(f, \epsilon)$.

$$|g(x) - f(x)| = \begin{cases} |f(x) - f^{-1}(x)|, & 0 \leq x \leq x_0; \\ |f(x) - L(x)|, & x_0 < x < \delta; \\ 0, & \delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

De (3.77),

$$\forall x \in [0, x_0], |f(x) - f^{-1}(x)| < \frac{\epsilon}{4} < \epsilon. \quad (3.79)$$

$$\forall x \in [\delta, 1], |f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x)| = 0 < \epsilon. \quad (3.80)$$

$$|f(x) - L(x)| = \left| f(x) - f(\delta) - \frac{f(\delta) - f^{-1}(x_0)}{\delta - x_0} (x - \delta) \right| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(\delta)| + \frac{|x - \delta|}{|\delta - x_0|} |f(\delta) - f^{-1}(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(\delta)| + |f(\delta) - f^{-1}(x_0)| \leq |f(x) - 1| +$$

$$+ |1 - f(\delta)| + |f(\delta) - 1| + |1 - f^{-1}(x_0)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} +$$

$$+ \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon; e$$

$$\forall x \in]x_0, \delta[, |f(x) - g(x)| < \epsilon. \quad (3.81)$$

De (3.79), (3.80) e (3.81) concluimos que

$$g \in B_0(f, \epsilon). \quad (3.82)$$

c) $g \not\sim f$.

Ora, $[0, x_0] \subset \text{per}_2 g$, $\exists b > 0$ tal que $[0, b] \subset \text{per}_2 f$, $g|_{[\delta, 1]} = f|_{[\delta, 1]}$; por raciocínio análogo ao feito no item 1.c), decorre que

$$f \not\sim g. \quad (3.83)$$

Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, e valem (3.78), (3.82) e (3.83),

f não é C^0 -estruturalmente estável.

Finalmente, como os itens 1, 2, 3 e 4 cobrem todas as possibilidades para f , podemos concluir que

$\forall f \in \text{Dif}^r(I)$, $0 \leq r \leq \infty$, f não é C^0 -estruturalmente estável.

**

Nosso próximo objetivo é mostrar que $\mathcal{H}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$, é aberto e denso em $\text{Dif}^r(I)$, pela construção de difeomorfismos hiperbólicos.

18.3 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$; então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in B_r(f, \varepsilon)$ tal que 0 e 1 são pontos periódicos hiperbólicos de g .

DEMONSTRAÇÃO.

Notemos, em primeiro lugar, que se 0 e 1 forem hiperbólicos; basta tomar $g = f$ no enunciado.

Podemos, portanto, supor que ou 0 ou 1 não é ponto periódico hiperbólico.

Item 1. f crescente.

Consideremos a função $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = -x^2 + x$, que é de classe C^∞ , $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\psi'(0) = 1$ e $\psi'(1) = -1$. A partir dela, seja $f_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_\alpha(x) = f(x) + \alpha\psi(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

e vamos escolher $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f_{\alpha_0} \in B_r(f, \epsilon)$ e 0 e 1 sejam pontos fixos hiperbólicos de f_{α_0} .

a) f_α é de classe C^r , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. (3.84)

Claro, pois f é de classe C^r e ψ é de classe C^∞ .

b) $\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f_{\alpha_0}: I \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora.

Vamos calcular α_0 tal que $f'_{\alpha_0} \neq 0$.

$$|\psi'(x)| = |-2x + 1| = |1 - 2x| \leq 1 = \max_{x \in I} |\psi'(x)|.$$

Além disso, $\min_{x \in I} |f'(x)| > 0$, pois $f \in \text{Dif}^r(I)$;

$$\text{como } |f'_{\alpha}(x)| = |f'(x) + \alpha \psi'(x)| \geq \left| |f'(x)| - |\alpha| |\psi'(x)| \right|,$$

se tomarmos $\alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min_{x \in I} |f'(x)|$, teremos

$$|f'_{\alpha_0}(x)| \geq \max_{x \in I} |f'(x)| - \min_{x \in I} |f'(x)| > 0; \text{ isto é,}$$

$$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min_{x \in I} |f'(x)|, f'_{\alpha_0}(x) \neq 0, \forall x \in I; \text{ ou,}$$

como f'_{α_0} é contínua,

$$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min_{x \in I} |f'(x)|, f_{\alpha_0} \text{ é injetora.} \quad (3.85)$$

c) $f_{\alpha_0}: I \rightarrow I$ é sobrejetora.

Ora, $f_{\alpha_0}(0) = 0$, $f_{\alpha_0}(1) = 1$, f_{α_0} é contínua e vale (3.85); portanto,

$$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min_{x \in I} |f'(x)|, f_{\alpha_0}(I) = I. \quad (3.86)$$

d) $f_{\alpha_0} \in \text{Dif}^r(I)$.

De (3.84), (3.85) e (3.86), como I é compacto, decorre que

$$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min_{x \in I} |f'(x)|, f_{\alpha_0} \in \text{Dif}^r(I), 1 \leq r \leq \infty.$$

e) $f_{\alpha_0} \in B_r(f, \varepsilon)$, $1 \leq r \leq \infty$.

1º) $r < \infty$.

$$\|f_{\alpha_0} - f\|_r = \sum_{i=0}^r \sup_{x \in I} |f_{\alpha_0}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)|.$$

$$\text{Mas, } \forall i \in \{0, \dots, r\}, \left| f_{\alpha_0}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right| = \\ = |\alpha_0| |\psi^{(i)}(x)|; \text{ então,}$$

$$\left| f_{\alpha_0}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right| = 0, \forall x \in I, \text{ se } i \in \{3, \dots, r\};$$

$$|f_{\alpha_0}(x) - f(x)| = |\alpha_0| |\psi(x)| \leq |\alpha_0| \max_{x \in I} |\psi(x)| = |\alpha_0| \frac{1}{4},$$

$$|f_{\alpha_0}'(x) - f'(x)| = |\alpha_0| |\psi'(x)| \leq |\alpha_0| \text{ e}$$

$$|f_{\alpha_0}''(x) - f''(x)| = |\alpha_0| |\psi''(x)| = 2 |\alpha_0|;$$

portanto, se tomarmos

$$|\alpha_0| < \min \left\{ \frac{4\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{6}, \frac{\varepsilon}{3} \right\} = \frac{\varepsilon}{6},$$

teremos que

$$\| f_{\alpha_0} - f \|_r = \sum_{i=0}^r \sup_{x \in I} \left| f_{\alpha_0}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right| = \\ = \sum_{i=0}^2 \sup_{x \in I} \left| f_{\alpha_0}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right| < 3 \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon; \text{ isto é,}$$

$$\text{se } r < \infty, \forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6}, \min_{x \in I} |f'(x)| \right\},$$

(3.87)

$$f_{\alpha_0} \in B_r(f, \varepsilon).$$

29) $r = +\infty$.

$$\| f_{\alpha_0} - f \|_{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sup_{x \in I} \left| f_{\alpha_0}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right|}{2^i}.$$

Como $f_{\alpha_0}^{(i)}(x) = f^{(i)}(x)$, $\forall x \in I$, para $r \geq 3$, a mesma limitação dada em (3.87) satisfaz; isto é, (3.87) pode ser escrito:

$$\forall r, 1 \leq r \leq \infty, \forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6}, \min_{x \in I} |f'(x)| \right\},$$

$$f_{\alpha_0} \in B_r(f, \varepsilon). \quad (3.88)$$

f) 0 e 1 são pontos fixos hiperbólicos.

$$f_{\alpha_0}(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'_{\alpha_0}(0) = f'(0) + \alpha_0;$$

$$f_{\alpha_0}(1) = 1 \quad \text{e} \quad f'_{\alpha_0}(1) = f'(1) + \alpha_0;$$

portanto,

$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid f'(0) + \alpha_0 \neq 1$ e $f'(1) + \alpha_0 \neq 1$, 0 e 1 são pontos fixos hiperbólicos de f_{α_0} , que junto com (3.88) resulta:

$$\forall r, 1 \leq r \leq \infty, \forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6}, \min_{x \in I} |f'(x)| \right\},$$

$\alpha_0 \neq 1 - f'(0)$, $\alpha_0 \neq 1 - f'(1)$, $f_{\alpha_0} \in B_r(f, \varepsilon)$ e 0 e 1 são pontos fixos hiperbólicos.

Item 2. f decrescente.

Neste caso, 0 é hiperbólico se e somente se 1 é hiperbólico ($(f^2)'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0) = f'(1) \cdot f'(0) = (f^2)'(1)$); portanto, basta modificar um deles.

Seja fix $f = \{x_f\}$; consideremos a mesma função $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = x - x^2$ e as funções $f_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_\alpha(x) = f(x) + \alpha\psi(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por cálculos análogos aos feitos no item 1, demonstra-se que

$$\forall r, 1 \leq r \leq \infty, \forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6}, \min_{x \in I} |f'(x)| \right\}, \quad (3.89)$$

$$f_{\alpha_0} \in B_r(f, \varepsilon).$$

Por outro lado, queremos que

$$(f_{\alpha_0}^2)'(0) \neq 1 \quad \text{e} \quad (f_{\alpha_0}^2)'(1) \neq 1; \text{ portanto,}$$

$$(f_{\alpha_0}')'(0) \cdot (f_{\alpha_0}')'(1) \neq 1; \text{ isto é,}$$

$$f_{\alpha_0}'(0) \cdot f_{\alpha_0}'(1) = (f'(0) + \alpha_0)(f'(1) - \alpha_0) \neq 1.$$

Para tanto, basta tomarmos

$$\alpha_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_0 \neq f'(1) - f'(0),$$

que reunido com (3.89) nos dá que

$$\forall r, 1 \leq r \leq \infty, \forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6}, \min_{x \in I} |f'(x)| \right\},$$

$$\alpha_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_0 \neq f'(1) - f'(0), \quad f_{\alpha_0} \in B_r(f, \varepsilon) \quad \text{e} \quad 0 \quad \text{e} \quad 1$$

são pontos periódicos hiperbólicos de f_{α_0} .

18.4 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq +\infty$, f decrescente e tal que $\text{fix } f = \{x_f\}$;
 $\forall \epsilon > 0$, $\exists g \in B_r(f, \epsilon)$, decrescente, tal que $\text{fix } g = \{x_f\}$,
 $0, 1$ e x_f são pontos periódicos hiperbólicos de g .

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por
 $\psi(x) = x(x-1)(x-x_f)$.

E consideremos as funções $f_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_\alpha(x) = f(x) + \alpha\psi(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, f_α é de classe C^r . (3.90)

Claro, pois f é de classe C^r e ψ é de classe C^∞ .

b) $\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que f_{α_0} é injetora.

$$\psi'(x) = (x-1)(x-x_f) + x(x-x_f) + x(x-1);$$

portanto, $\psi'(0) = x_f$, $\psi'(1) = 1-x_f$ e $\psi'(x_f) = x_f(x_f-1)$,

donde $\max_{x \in I} |\psi'(x)| = \max \{x_f, 1-x_f, x_f(1-x_f)\}.$

Como $\psi^{(i)}(x) = 0, \forall x \in I, \forall i \geq 4$ e

$$|f'_\alpha(x)| = |f'(x) + \alpha\psi'(x)| \geq \left| |f'(x)| - |\alpha||\psi'(x)| \right|,$$

se tomarmos $\alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \frac{\min_{x \in I} |f'(x)|}{\max_{x \in I} |\psi'(x)|} = K$, teremos

$$f'_{\alpha_0}(x) \neq 0, \forall x \in I, \forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < K,$$

que junto com o fato de f'_{α_0} ser contínua, resulta:

$$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < K, f_{\alpha_0} \text{ é injetora.} \quad (3.91)$$

$$c) \quad \forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < K, f_{\alpha_0} \in \text{Dif}^r(I). \quad (3.92)$$

Decorre de (3.90), (3.91) e de $f_{\alpha_0}(0) = 1$, $f_{\alpha_0}(1) = 0$.

$$d) \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid f_\alpha \in B_r(f, \varepsilon).$$

$$f_\alpha^{(i)}(x) = f^{(i)}(x) + \alpha\psi^{(i)}(x), \forall i \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{portanto, } \left| f_\alpha^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right| = |\alpha| |\psi^{(i)}(x)|, \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Ora, } \left| \psi^{(i)}(x) \right| = 0, \forall i \geq 4, \quad (3.93)$$

e como I é compacto,

$$\exists M = \max_{x \in I} \{ |\psi(x)|, |\psi'(x)|, |\psi''(x)|, |\psi'''(x)| \};$$

se tomarmos $|\alpha_0| < \frac{\epsilon}{4M}$, teremos

$$\sup_{x \in I} |f_{\alpha_0}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)| < \frac{\epsilon}{4}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,$$

que junto com (3.92) e (3.93) nos dão

$$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} \mid |\alpha_0| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{4M}, K \right\}, f_{\alpha_0} \in B_r(f, \epsilon).$$

$$e) \text{ fix } f_{\alpha_0} = \{x_f\}, f'_{\alpha_0}(x_f) \neq -1, (f_{\alpha_0}^2)'(0) \neq 1.$$

$$f_{\alpha_0}(x_f) = f(x_f) + \alpha_0 \psi(x_f) = f(x_f) = x_f,$$

$$f'_{\alpha_0}(x_f) = f'(x_f) + \alpha_0 \psi'(x_f) \neq -1 \iff \alpha_0 \neq \frac{-1 - f'(x_f)}{\psi'(x_f)},$$

$$(f_{\alpha_0}^2)'(0) = (f'_{\alpha_0})(0) \cdot (f'_{\alpha_0})(1) = (f'(0) + \alpha_0 \psi'(0)) \cdot$$

$$(f'(1) + \alpha_0 \psi'(1)) =$$

$$= 1 + \alpha_0 \psi'(0) \cdot f'(1) + \alpha_0 \psi'(1) f'(0) + \alpha_0^2 \psi'(0) \psi'(1) \neq 1;$$

portanto,

$$\text{se } \alpha_0 \neq \frac{-1 - f'(x_f)}{\psi'(x_f)}, |\alpha_0| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{4M}, K \right\}, \text{ então}$$

$f_{\alpha_0} \in B_r(f, \epsilon)$, $\text{fix } f_{\alpha_0} = \{x_f\}$, 0, 1 e x_f são pontos periódicos hiperbólicos de f .

18.5 TEOREMA.

$\mathcal{H}^r(I)$ é denso em $\text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$.

DEMONSTRAÇÃO.

É equivalente demonstrar que

$\forall f \in \text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists g \in B_r(f, \epsilon) \cap \mathcal{H}^r(I)$.

Item 1. f crescente.

De 18.3 podemos supor que 0 e 1 são pontos fixos hiperbólicos de f . Se $f \in \mathcal{H}^r(I)$, não há o que demonstrar; suponhamos, então, que $\exists x \in \text{fix } f \setminus \{0, 1\}$ tal que $f'(x) = 1$.

Como 0 e 1 são isolados (ver 17.4) e $\text{fix } f$ é um conjunto fechado, existem

$$x_0 = \min(\text{fix } f \setminus \{0, 1\}) > 0, \quad x_0 < 1, \text{ e}$$

$$y_0 = \max(\text{fix } f \setminus \{0, 1\}) < 1, \quad y_0 > 0.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \delta < \frac{1}{3} \min\{x_0, 1 - y_0\}$ e definamos os seguintes números reais:

$$a = \delta, \quad b = x_0 - \delta, \quad c = y_0 + \delta, \quad d = 1 - \delta,$$

$$e = \min_{x \in [a,b] \cup [c,d]} |f(x) - x| > 0.$$

Como $[0,a] \cup [d,1]$ é fechado e disjunto do fechado $[b,c]$, pelo Lema de Urysohn Diferenciável existe uma função $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $\psi^{-1}(1) = [b,c]$, $\psi^{-1}(0) = [0,a] \cup [d,1]$, ψ é estritamente crescente em $[a,b]$ e estritamente decrescente em $[c,d]$.

Além disso, $\psi^{(i)}(a) = \psi^{(i)}(b) = \psi^{(i)}(c) = \psi^{(i)}(d) = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

Como a função f -id é de classe C^r , com $r \geq 1$, podemos aplicar-lhe o Teorema de Sard que afirma que $A = \{f(x) - x : f'(x) - 1 = 0\}$, conjunto dos valores críticos de f -id, é um conjunto de medida nula; isto é,

$$\forall \epsilon > 0, \exists (-\epsilon) \in (f\text{-id})(I) \setminus A \text{ tal que } |\alpha| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon = e$, no nosso caso, e consideremos as funções $g_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g_\alpha = f + \alpha\psi, \text{ para } |\alpha| < e.$$

E vamos determinar $-\alpha_0$, valor regular

de $f-id$, tal que $|\alpha_0| < \epsilon$ e $g_{\alpha_0} \in B_r(f, \epsilon) \cap \mathcal{H}_B^r(I)$.

Chamemos de B o conjunto dos valores regulares de $f-id$; isto é, $B = (f-id)(I) \setminus A$.

a) $\forall (-\alpha) \in B$ tal que $|\alpha| < \epsilon$, $g_\alpha(x) - x \neq 0$,
 $\forall x \in]0, b] \cup [c, 1[$.

Ora,

$$x \in]0, b] \cup [c, 1[\iff x \in]0, a] \cup [d, 1[\cup]a, b] \cup [c, d[.$$

Se $x \in]0, a] \cup [d, 1[$, temos que

$$g_\alpha(x) - x = f(x) - x \neq 0.$$

Se $x \in]a, b] \cup [c, d[$, então

$$|f(x) + \alpha\psi(x) - x| \geq \left| |f(x) - x| - |\alpha||\psi(x)| \right| > 0,$$

pois $|f(x) - x| \geq \epsilon$ e $|\alpha||\psi(x)| \leq |\alpha| < \epsilon$; portanto,
 $g_\alpha(x) - x \neq 0$; ou

$\forall (-\alpha) \in B$ tal que $|\alpha| < \epsilon$, $g_\alpha(x) - x \neq 0$,

(3.94)

$$\forall x \in]0, b] \cup [c, 1[.$$

b) $\forall (-\alpha) \in B$ tal que $|\alpha| < \epsilon$, $g_\alpha(x) - x = 0 \implies g'_\alpha(x) - 1 \neq 0$.

De (3.94), concluímos que

$$\text{fix } g_\alpha \setminus \{0, 1\} \subset]b, c[.$$

Mas, $g'_\alpha(0) = f'(0) \neq 1$, $g'_\alpha(1) = f'(1) \neq 1$ e

$\forall x \in]b, c[$ tal que $g_\alpha(x) - x = 0$, temos que

$$0 = g_\alpha(x) - x = f(x) + \alpha\psi(x) - x = f(x) - x + \alpha,$$

isto é, $f_\alpha(x) - x = -\alpha$; e como $-\alpha \in B$,

$$g'_\alpha(x) - 1 = f'(x) - 1 \neq 0.$$

E concluímos que

$$\begin{aligned} \forall (-\alpha) \in B \text{ tal que } |\alpha| < \epsilon, \\ g_\alpha(x) - x = 0 \implies g'_\alpha(x) - 1 \neq 0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

c) $\exists (-\alpha) \in B$ tal que $|\alpha| < \epsilon$ e $g_\alpha \in B_r(f, \epsilon) \cap \mathcal{H}^r(I)$.

Como $M = \min_{x \in I} |f'(x)| > 0$ e

$K = \max_{x \in I} |\psi'(x)| > 0$, seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |\alpha| < \frac{M}{K}; \quad (3.96)$$

neste caso, $g'_\alpha(x) > 0$, $\forall x \in I$; e de

$$g_\alpha^{(i)}(x) = f^{(i)}(x) + \alpha \psi^{(i)}(x),$$

concluímos que

$$\text{se } r < \infty \text{ e } |\alpha| < \frac{\epsilon}{(r+1) \max_{x \in I} |\psi^{(i)}(x)|}, \quad 0 \leq i \leq r, \quad (3.97)$$

$$\text{então } \|g_\alpha - f\|_r < \epsilon;$$

$$\text{se } r = \infty \text{ e } |\alpha| < \frac{\epsilon}{2^{i+1} \max_{x \in I} |\psi^{(i)}(x)|}, \quad \forall i \geq 0, \quad (3.98)$$

$$\text{então } \|g_\alpha - f\|_\infty < \epsilon.$$

(Observamos que, da demonstração do Lema de Urysohn diferenciável, quando o fechado é compacto, a função ψ tem todas as derivadas limitadas e $\max_{x \in I} |\psi^{(i)}(x)| > 0$, $\forall i \geq 1$.)

De (3.95), (3.96), (3.97) e (3.98) concluímos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g_\alpha \in B_r(f, \varepsilon) \cap \mathcal{H}^r(I); \text{ donde,}$$

$$\mathcal{H}^r(I) \text{ é denso em } \text{Dif}^r(I), 0 \leq r \leq \infty.$$

Observamos, ainda, que o conjunto dos α tais que g_α não está em $B_r(f, \varepsilon) \cap \mathcal{H}^r(I)$ tem medida nula.

Item 2. f decrescente.

Se fix $f = \{x_f\}$, de 18.3 e 18.4 podemos supor que 0, 1 e x_f são pontos periódicos hiperbólicos. Se $f \in \mathcal{H}^r(I)$, não há o que demonstrar, pois $g=f$ satisfaz. Suponhamos, então, que $\exists x \in]0, x_f[\cap \text{per}_2 f$ tal que $(f^2)'(x) = 1$.

Como $(f^2)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$, se $x \in \text{per}_2 f$, então $(f^2)'(x) = (f^2)'(f(x))$ e basta modificar os pontos periódicos de $[0, x_f]$.

Orá, $\text{per}_2 f$ é fechado, $[0, x_f]$ ídem, 0 e x_f são isolados; portanto,

$$\exists x_0 = \min (\text{per}_2 f \cap]0, x_f[) > 0, x_0 < x_f \text{ e}$$

$$\exists y_0 = \max (\text{per}_2 f \cap]0, x_f[) < x_f, y_0 > 0.$$

$$\text{Seja } \delta \in \mathbb{R} \mid 0 < \delta < \frac{1}{4} \min \{x_0, x_f - y_0\}$$

e definamos os números reais

$$a = \delta, b = x_0 - \delta, c = y_0 + \delta, d = x_f - \delta,$$

Seja B o conjunto dos valores regulares de $f - f^{-1}$; pelo teorema de Sard, a medida de $A = \{f(x) - f^{-1}(x) : f'(x) - (f^{-1})'(x) = 0\}$ é zero; portanto,

$$\exists (-\alpha) \in B \text{ tal que } |\alpha| < e.$$

Como no ítem 1, seja $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada pelo Lema Diferenciável de Urysohn tal que $\psi \in C^\infty$, $\psi^{-1}(1) = [b, c]$, $\psi^{-1}(0) = [0, a] \cup [d, l]$, ψ é estritamente crescente em $[a, b]$, estritamente decrescente em $[c, d]$,

$$\psi^{(i)}(a) = \psi^{(i)}(b) = \psi^{(i)}(c) = \psi^{(i)}(d) = 0, \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

E consideremos as funções $g_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_\alpha(x) = f(x) + \alpha\psi(x)$, $\forall (-\alpha) \in B$.

a) $\exists (-\alpha) \in B$ tal que $0 < |\alpha| < \epsilon$ e $g_\alpha \in B_r(f, \epsilon)$.

Com raciocínio análogo ao feito no ítem 1.c), seja $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfazendo (3.96) e (3.97) (ou (3.98)); nestas condições,

$$g_\alpha \in B_r(f, \epsilon). \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & g_\alpha^2(x) - x \neq 0, \forall x \in]0, b[\cup]c, x_f[, \\ & \forall (-\alpha) \in B \text{ tal que } 0 < |\alpha| < \epsilon. \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\forall x \in]0, a] \cup [d, x_f[, \quad g_\alpha^2(x) - x = f^2(x) - x \neq 0. \quad (3.101)$$

Se $x \in]a, b[\cup]c, d[$, então

$$g_\alpha(x) \in]g_\alpha(b), g_\alpha(a)[\cup]g_\alpha(d), g_\alpha(c)[\subset]x_f, 1[\text{ e}$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha}^2(x) - x = 0 &\iff f(g_{\alpha}(x)) - x = 0 \iff f(f(x) + \alpha\psi(x)) = \\ &= x \iff f(x) + \alpha\psi(x) = f^{-1}(x) \iff f(x) - f^{-1}(x) = -\alpha\psi(x). \end{aligned}$$

Mas,

$$|f(x) - f^{-1}(x) + \alpha\psi(x)| \geq \left| |f(x) - f^{-1}(x)| - |\alpha||\psi(x)| \right| > 0,$$

pois $|f(x) - f^{-1}(x)| > |\alpha|$, $\forall x \in [a, b] \cup [c, d]$ e
 $-|\alpha||\psi(x)| \geq -|\alpha|$, $\forall x \in I$; portanto,

$$g_{\alpha}^2(x) - x \neq 0, \forall x \in]a, b[\cup]c, d[,$$

que junto com (3.101) resulta (3.100).

c) $\forall (-\alpha) \in B$ tal que $0 < |\alpha| < e$, se $g_{\alpha}^2(x) - x = 0$,
 então $(g_{\alpha}^2)'(x) - 1 \neq 0$.

De (3.100) decorre que

$$\text{per}_2 g_{\alpha} \setminus \{0, 1\} \subset [b, c] \cup [g_{\alpha}(c), g_{\alpha}(b)].$$

Como $g_{\alpha}(x) = f(x)$, $\forall x \in [0, a] \cup [d, 1]$,

0, 1 e x_f são hiperbólicos. (3.102)

Seja $x \in [b, c]$ (x é hiperbólico se e somente se $g_{\alpha}(x)$ é hiperbólico; portanto, basta verificar o que acontece em $[b, c]$).

$$x \in [b, c] \iff g_{\alpha}(x) \in [g_{\alpha}(c), g_{\alpha}(b)] \subset]x_f, 1]$$

$$g_{\alpha}^2(x) - x = g_{\alpha}(g_{\alpha}(x)) - x = g_{\alpha}(f(x) + \alpha\psi(x)) - x =$$

$$= f(f(x) + \alpha\psi(x)) - x = 0 \iff f(x) - f^{-1}(x) = -\alpha\psi(x) = -\alpha$$

$$(\psi|_{[b,c]} \equiv 1).$$

Ora, $-\alpha$ é valor regular de $f - f^{-1}$; portanto,

$$f'(x) - (f^{-1})'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [b, c]. \quad (3.103)$$

$$(g_\alpha^2)'(x) = 1 \iff g_\alpha'(f(x) + \alpha) \cdot g_\alpha'(x) = 1 \iff f'(f(x) + \alpha) \cdot f'(x) = 1;$$

e

$$(g_\alpha^2)'(x) = 1 \iff f'(f(x) + \alpha) \cdot f'(x) = 1.$$

$$\text{Mas, } \forall x \in [b, c] \cap \text{per}_2 g_\alpha, \quad f^{-1}(x) = f(x) + \alpha;$$

donde,

$$(g_\alpha^2)'(x) = 1 \iff f'(f^{-1}(x)) \cdot f'(x) = 1 \iff f'(f^{-1}(x)) =$$

$$= (f'(x))^{-1} \iff f'(x) = (f'(f^{-1}(x)))^{-1} \iff f'(x) -$$

$$- (f^{-1})'(x) = 0;$$

e de (3.103) concluímos que $\forall x \in \text{per}_2 g_\alpha \cap [b, c]$,

$$(g_\alpha^2)'(x) - 1 \neq 0;$$

e vale que

$$\forall (-\alpha) \in B \text{ tal que } 0 < |\alpha| < e, \text{ se } g_\alpha^2(x) - x = 0,$$

$$\text{então } (g_\alpha^2)'(x) - 1 \neq 0. \quad (3.104)$$

Reunindo (3.99), (3.100), (3.102) e (3.104),

$$\forall \epsilon > 0, \exists g_\alpha \in B_r(f, \epsilon) \cap \mathcal{H}^r(I), 1 \leq r \leq \infty.$$

E da demonstração segue-se ainda que

$$\{-\alpha \in \text{Im}(f - f^{-1}) : g_\alpha \notin B_r(f, \epsilon) \cap \mathcal{H}^r(I)\}$$

tem medida nula.

**

18.6 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$, f crescente, não hiperbólico, e tal que $\text{fix } f$ é finito; então,

$$\forall \epsilon > 0, \exists g \in B_r(f, \epsilon) \text{ tal que } \# \text{fix } g > \# \text{fix } f.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que $\exists x_0 \in \text{fix } f$, $x_0 \neq 0$ e $x_0 \neq 1$, tal que $f'(x_0) = 1$.

Vamos considerar dois itens.

Item 1. $\exists \delta > 0$ tal que $f - \text{id}$ mantém o sinal em $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$.

Item 2. $\exists \delta > 0$ tal que $(f - \text{id})|_{]x_0 - \delta, x_0[}$ e

$(f - \text{id})|_{]x_0, x_0 + \delta[}$ têm sinais contrários.

Item 1. Seja $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-x_0+\delta)(x-x_0-\delta)} & , x_0-\delta < x < x_0+\delta; \\ 0, & 0 \leq x \leq x_0-\delta, x_0+\delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\psi \in C^\infty, \psi^{(i)}(x_0 - \delta) = \psi^{(i)}(x_0 + \delta) = 0,$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \text{ e } \max_{x \in I} |\psi^{(i)}(x)| > 0, \forall i \in \mathbb{N}^* ([2]).$$

Consideremos as funções $g_\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_\lambda(x) = f(x) + \lambda\psi(x)$.

Se λ satisfizer desigualdades análogas a (3.96) e (3.97) (ou (3.98)), então,

$$g_\lambda \in B_r(f, \varepsilon), \quad 1 \leq r \leq \infty.$$

Para que $\# \text{ fix } g \geq \# \text{ fix } f+1$, seja

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lambda(f(x) - x) < 0, \\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \text{Ora, } (g_\lambda(x_0) - x_0)(g_\lambda(x_0 - \delta) - (x_0 - \delta)) = \\ = (f(x_0) + \lambda\psi(x_0) - x_0). \end{aligned}$$

$$(f(x_0 - \delta) - (x_0 - \delta)) = \lambda\psi(x_0)(f(x_0 - \delta) - (x_0 - \delta)) < 0,$$

pois $\psi(x_0) > 0$ e vale (3.105); portanto,

$$\exists x_1 \in]x_0 - \delta, x_0[\text{ tal que } g_\lambda(x_1) = x_1. \quad (3.106)$$

Analogamente se prova que

$$\exists x_2 \in]x_0, x_0 + \delta[\text{ tal que } g_\lambda(x_2) = x_2. \quad (3.107)$$

Como $\text{fix } f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[= \{x_0\}$ e $g_\lambda(x) = f(x)$, $\forall x \in [0, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, 1]$, concluímos, de (3.106) e (3.107) que

$$\# \text{ fix } g_\lambda > \# \text{ fix } f.$$

Item 2. Neste caso, tomamos a função $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ que é dada por $\xi(x) = \psi'(x)$, onde $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida no Item 1.

Para λ satisfazendo (3.96), (3.97) (ou (3.98)) e ainda

$$\lambda(f(x) - x) < 0, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[,$$

prova-se que $g_\lambda \in B_r(f, \varepsilon)$ e que g_λ tem pelo menos 3

pontos fixos em $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (um deles o próprio x_0); portanto,

$$\# \text{ fix } g_\lambda > \# \text{ fix } f.$$

Em qualquer dos casos, provou-se que se $\text{per } f$ é finito e f não é hiperbólico,

$$\forall \epsilon > 0, \exists g_\alpha \in B_r(f, \epsilon) \text{ tal que } \# \text{ fix } f < \# \text{ fix } g_\alpha.$$

Finalmente, observamos que, se $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$, a demonstração é análoga, pois f é diferenciável se e somente se existem um aberto $V \subset \mathbb{R}$ e uma função $\tilde{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $V \supset I$ e $\tilde{f}|_I = f$ (ver 2.1).

**

18.7 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$, decrescente, não hiperbólico, tal que $\text{per } f$ é finito; então,

$$\forall \epsilon > 0, \exists g \in B_r(f, \epsilon) \text{ tal que } \# \text{ per } g > \# \text{ per } f.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $x_0 \in \text{per } f$, não hiperbólico, e suponhamos $x_0 \neq 0$ e $x_0 \neq 1$.

Como $\text{per } f$ é finito, x_0 é isolado e $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$, $x \notin \text{per } f$.

Seja $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ a função derivada da

função ψ de 18.6, item 1, e consideremos as funções $g_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g_\alpha(x) = f(x) + \alpha \xi(x).$$

Se α satisfizer (3.96), (3.97) (ou (3.98)) e

$$\alpha(f(x) - f^{-1}(x)) < 0, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0], \quad (3.108)$$

temos que $g_\alpha \in B_r(f, \epsilon)$ e, além disso, $\# \text{ per } g_\alpha > \# \text{ per } f$. Verifiquemos este último fato.

Ora, $g_\alpha(x_0) = f(x_0) + \alpha \psi(x_0) = f(x_0)$; e como $f(x_0) \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, temos que $g_\alpha^2(x_0) =$

$$= g_{\alpha}(f(x_0)) = f^2(x_0) = x_0; \text{ donde,}$$

$$x_0 \in \text{per } g_{\alpha}; \quad (3.109)$$

$$(g_{\alpha}^2)'(x_0) = g_{\alpha}'(g_{\alpha}(x_0)) \cdot g_{\alpha}'(x_0);$$

como $g_{\alpha}'(g_{\alpha}(x_0)) = f'(g_{\alpha}(x_0)) = f'(f(x_0))$ e $g_{\alpha}'(x_0) \neq f'(x_0)$ ($g_{\alpha}'(x_0) < 0$), decorre que

$$(g_{\alpha}^2)'(x_0) \neq (f^2)'(x_0) = 1; \text{ portanto,}$$

x_0 é hiperbólico para g_{α} ,

o que significa que $g_{\alpha} - g_{\alpha}^{-1}$ muda de sinal num intervalo contendo x_0 , por exemplo $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$.

E de $g_{\alpha}(x) = f(x)$, $\forall x \in I \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, podemos concluir que

$$g_{\alpha}^{-1}(x) = f(x), \forall x \in I \setminus [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\begin{aligned} \text{e } g_{\alpha}'(x_0) - (g_{\alpha}^{-1})'(x_0) &= f'(x_0) + \alpha \psi'(x_0) - (f^{-1})'(x_0) = \\ &= \alpha \psi'(x_0) \neq 0; \text{ daí,} \end{aligned}$$

$$\alpha(g_{\alpha}'(x_0) - (g_{\alpha}^{-1})'(x_0)) < 0, \forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]. \quad (3.110)$$

Aplicando o teorema do valor médio à função $g_{\alpha} - g_{\alpha}^{-1}$ no intervalo $[x_0 - \delta_1, x_0]$:

$$\begin{aligned} \alpha[g_{\alpha}(x_0 - \delta_1) - g_{\alpha}^{-1}(x_0 - \delta_1) - g_{\alpha}(x_0) + g_{\alpha}^{-1}(x_0)] &= \\ = \alpha[g_{\alpha}(x_0 - \delta_1) - g_{\alpha}^{-1}(x_0 - \delta_1)] &= \alpha(g_{\alpha}'(\bar{x}) - (g_{\alpha}^{-1})'(\bar{x})). \end{aligned}$$

$(x_0 - \delta_1 - x_0) = \alpha(g'_\alpha(\bar{x}) - (g_\alpha^{-1})'(\bar{x}))(-\delta_1) > 0$, pois $\bar{x} \in]x_0 - \delta_1, x_0[$, $\delta_1 > 0$ e vale (3.110).

De (3.108) temos que

$$\left[g_\alpha(x_0 - \delta_1) - g_\alpha^{-1}(x_0 - \delta_1) \right] \left[f(x_0 - \delta) - f^{-1}(x_0 - \delta) \right] < 0.$$

Ora, $f(x_0 - \delta) - f^{-1}(x_0 - \delta) = g_\alpha(x_0 - \delta) - g_\alpha^{-1}(x_0 - \delta)$; portanto,

$$\left[g_\alpha(x_0 - \delta_1) - g_\alpha^{-1}(x_0 - \delta_1) \right] \left[g_\alpha(x_0 - \delta) - g_\alpha^{-1}(x_0 - \delta) \right] < 0,$$

o que significa que

$$\exists x_1 \in]x_0 - \delta, x_0 - \delta_1[\text{ tal que } x_1 \in \text{per } g_\alpha. \quad (3.111)$$

Como $g_\alpha(x) = f(x)$, $\forall x \in I \setminus]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$, de (3.109) e (3.111) resulta que

$\# \text{ per } g_\alpha > \# \text{ per } f.$

Finalmente, observamos que se $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$, a demonstração é análoga, em virtude de 2.1, tomando-se o seguinte cuidado no caso $x_0 = 0$:

α deve ser tal que $\alpha(f(x) - f^{-1}(x)) > 0$, $\forall x \in [0, \delta]$.

**

18.8 PROPOSIÇÃO.

Seja $\xi: \text{Dif}^r(I) \rightarrow \text{Dif}^r(I)$ a função

definida por $\xi(g) = g \circ g = g^2$; então, ξ é contínua na norma C^1 , $1 \leq r \leq \infty$.

DEMONSTRAÇÃO.

A função ξ é contínua na norma C^1 , $\forall r \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, se e somente se dada $f \in \text{Dif}^r(I)$ e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $g \in B_1(f, \delta)$, então $g^2 \in B_1(f^2, \varepsilon)$.

Seja $f \in \text{Dif}^r(I)$. Como $\|f^2 - g^2\|_1 = \sup_{x \in I} |f^2(x) - g^2(x)| + \sup_{x \in I} |(f^2)'(x) - (g^2)'(x)|$, precisamos majorar cada uma das duas parcelas.

$$\begin{aligned} |(f^2)(x) - (g^2)(x)| &= |f^2(x) - (f \circ g)(x) + (f \circ g)(x) - g^2(x)| = \\ &= |f(f(x)) - f(g(x)) + f(g(x)) - g(g(x))| \leq \\ &\leq |f(f(x)) - f(g(x))| + |f(g(x)) - g(g(x))|. \end{aligned}$$

Da continuidade uniforme de f ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid |x_1 - x_2| < \delta_1 \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Se tomarmos $\delta \leq \delta_1$, teremos

$$|f(f(x)) - f(g(x))| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.112)$$

Por outro lado, para $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$,

$$|f(g(x)) - g(g(x))| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.113)$$

Portanto, se

$$\delta \leq \min \left\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{4} \right\}, \quad (3.114)$$

levando-se em conta (3.112) e (3.113):

$$\forall x \in I, |f^2(x) - g^2(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.115)$$

Vamos, agora, majorar $|(f^2)'(x) - (g^2)'(x)|$.

$$\begin{aligned} |(f^2)'(x) - (g^2)'(x)| &= |f'(f(x)) \cdot f'(x) - f'(g(x)) \cdot f'(x) + \\ &+ f'(g(x)) \cdot f'(x) - f'(g(x)) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'(x) - \\ &- g'(g(x)) \cdot g'(x)| \leq |f'(f(x)) - f'(g(x))| |f'(x)| + \\ &+ |f'(g(x))| |f'(x) - g'(x)| + |f'(g(x)) - g'(g(x))| |g'(x)|. \end{aligned}$$

Da continuidade uniforme de f' , decorre que $\exists M = \max_{x \in I} |f'(x)| > 0$ e $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid |x_1 - x_2| <$

$$< \delta_2 \implies |f'(x_1) - f'(x_2)| < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

Se tomarmos

$$\delta \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6M}, \delta_2 \right\},$$

teremos

$$|f'(f(x)) - f'(g(x))| |f'(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\text{e } |f'(g(x))| |f'(x) - g'(x)| < M \cdot \delta \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Se, além disso, $\delta \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6(M+2)}, 2 \right\},$

$$|g'(x)| = |g'(x) - f'(x) + f'(x)| \leq$$

$$\leq |f'(x)| + |g'(x) - f'(x)| \leq M+2$$

$$e \quad |f'(g(x)) - g'(g(x))| |g'(x)| < \delta \cdot (M+2) \leq \frac{\epsilon}{6}.$$

Portanto, se

$$\delta \leq \min \left\{ \delta_2, \frac{\epsilon}{6M}, 2, \frac{\epsilon}{6(M+2)} \right\}, \quad (3.116)$$

resulta que

$$\forall x \in I, |(f^2)'(x) - (g^2)'(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.117)$$

Reunindo (3.115) e (3.117):

$$\|f^2 - g^2\| < \epsilon, \text{ se } \|f - g\| < \delta,$$

onde δ satisfaz (3.114) e (3.116).

E a função ξ é C^1 contínua em qualquer $f \in \text{Dif}^r(I)$; portanto,

ξ é contínua em $\text{Dif}^r(I)$ com a topologia C^1 .

**

18.9 TEOREMA.

Seja $f \in \mathcal{H}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$; então, $\exists \epsilon > 0$ tal que $g \in B_1(f, \epsilon) \implies g \in \mathcal{H}^r(I)$ e $\# \text{ per } g = \# \text{ per } f$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. f crescente. Como $f \in \mathcal{H}^r(I)$, $\text{fix } f$ é finito e formado de pontos isolados; então, $\text{fix } f = \{x_0=0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n=1\}$ e

$$\exists \min_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}| = a > 0;$$

além disso, como $f'(x_i) \neq 1$, $0 \leq i \leq n$, existe uma vizinhança V_i de x_i tal que $f'(x) \neq 1$, $\forall x \in V_i$; seja, portanto,

$$0 < \delta < \frac{a}{2}$$

tal que

$$|f'(x) - 1| \geq b > 0, \forall x \in J = \bigcup_{i=0}^n]x_i - \delta, x_i + \delta[. \quad (3.118)$$

(Observamos que, para $i=0$ ou $i=n$, só nos interessa o que acontece, respectivamente, em $[0, \delta]$ e em $[1-\delta, 1]$.)

Como $f(x) - x \neq 0$, $\forall x \in I \setminus J$ e este conjunto é compacto,

$$\exists m = \min_{x \in I \setminus J} |f(x) - x| > 0. \quad (3.119)$$

Seja

$$0 < \epsilon < \min \{b, m\} \quad (3.120)$$

e provemos que $B_1(f, \epsilon)$ satisfaz às condições do teorema, nos passos seguintes.

- a) Se $g \in B_1(f, \epsilon)$, então $g(x) - x \neq 0$, $\forall x \in I \setminus J$.
- b) Se $g \in B_1(f, \epsilon)$, então $g'(x) - 1 \neq 0$, $\forall x \in J$.
- c) Se $g \in B_1(f, \epsilon)$, então, para cada i entre 1 e $n-1$, $\exists! y_i \in [x_i - \delta, x_i + \delta]$ tal que $g(y_i) = y_i$; além disso,

$$g(x) - x \neq 0, \forall x \in]0, \delta] \cup [1 - \delta, 1[.$$

a) Seja $x \in I \setminus J$;

$$|g(x) - x| = |g(x) - f(x) + f(x) - x| \geq \left| |f(x) - x| - |g(x) - f(x)| \right|.$$

Ora, de (3.119) e (3.120) resulta

$$|f(x) - x| \geq m > \epsilon, \forall x \in I \setminus J; \quad (3.121)$$

e do fato de g estar em $B_1(f, \epsilon)$ temos

$$-|g(x) - f(x)| > -\epsilon, \forall x \in I. \quad (3.122)$$

Somando (3.121) e (3.122) temos que

$$|g(x) - x| > \epsilon - \epsilon = 0, \forall x \in I \setminus J. \quad (3.123)$$

b) Seja $x \in J$:

$$\begin{aligned} |g'(x) - 1| &= |g'(x) - f'(x) + f'(x) - 1| \geq \\ &\geq \left| |f'(x) - 1| - |g'(x) - f'(x)| \right|. \end{aligned}$$

De (3.118) e (3.119),

$$|f'(x) - 1| \geq b > \epsilon, \forall x \in J; \quad (3.124)$$

e do fato de g estar em $B_1(f, \epsilon)$ (com $r \geq 1$):

$$-|g'(x) - f'(x)| > -\epsilon, \forall x \in I. \quad (3.125)$$

Somando (3.124) e (3.125) podemos concluir que

$$g'(x) - 1 \neq 0, \forall x \in J. \quad (3.126)$$

c) Como g' é contínua, de b) resulta que, para cada i

entre 0 e n , $g'(x)-1$ mantém o sinal em $[x_i-\delta, x_i+\delta]$; isto quer dizer que

$g-id$ é estritamente monótona em cada intervalo do tipo $[x_i-\delta, x_i+\delta]$, com $0 \leq i \leq n$. (3.127)

Provemos que $g-id$ tem uma raiz em cada intervalo $[x_i-\delta, x_i+\delta]$, com $0 \leq i \leq n$.

Como $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$, de (3.127) resulta que

$$g(x) - x \neq 0, \forall x \in]0, \delta] \cup [1-\delta, 1[. \quad (3.128)$$

Seja, então, $1 \leq i \leq n-1$ e provemos que $g-id$ muda de sinal em $[x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]$. Para tanto, mostremos que se $x \in [x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]$, então $g(x)-x$ tem o sinal de $f(x)-x$; suponhamos

$$f(x) - x > 0, \forall x \in [x_{i-1}+\delta, x_i-\delta];$$

de (3.119) e (3.120),

$$f(x) - x \geq m > \epsilon, \forall x \in [x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]. \quad (3.129)$$

Como $g(x) - x = g(x) - f(x) + f(x) - x$, podemos escrever $f(x) - x - \epsilon < g(x) - x < f(x) - x + \epsilon$, $\forall x \in [x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]$, que junto com (3.129) nos dá que $0 < g(x) - x < f(x) - x + \epsilon$, $\forall x \in [x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]$.

Se $f(x) - x < 0$, $\forall x \in [x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]$, teríamos, por demonstração análoga, que $g(x) - x < 0$,

$$\forall x \in [x_{i-1} + \delta, x_i - \delta].$$

E podemos concluir que

$$(g(x) - x)(f(x) - x) > 0, \forall x \in [x_{i-1} + \delta, x_i - \delta]. \quad (3.130)$$

Ora, f -id muda de sinal em $[x_{i-1} + \delta, x_i + \delta]$, porque se anula uma única vez e é estritamente monótona; portanto, de (3.130),

$$\begin{aligned} g\text{-id muda de sinal em } [x_{i-1} + \delta, x_i + \delta], \\ \text{para } 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned} \quad (3.131)$$

De (3.127), (3.128) e (3.131) concluímos que

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \exists! y_i \in]x_{i-1} - \delta, x_i + \delta[\text{ tal que} \\ g(y_i) = y_i \text{ e } g(x) - x \neq 0, \forall x \in]0, \delta[\cup]1 - \delta, 1[. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Finalmente, reunindo (3.123), (3.126) e (3.132):

$$\boxed{\forall g \in B_1(f, \epsilon), g \in \mathcal{C}^r(I) \text{ e } \# \text{ fix } g = \# \text{ fix } f.}$$

Item 2. f decrescente.

Como

f decrescente $\implies f^2$ crescente e $f \in \mathcal{C}^r(I) \iff f^2 \in \mathcal{C}^r(I)$,
aplicando o item 1 a f^2 ,

$$\exists \epsilon > 0 \mid g \in B_1(f^2, \epsilon) \implies g \in \mathcal{C}^r(I) \text{ e } \# \text{ fix } g =$$

$$= \# \text{ fix } f^2 = \# \text{ per } f.$$

De 18.8, $\xi^{-1}(B_1(f^2, \epsilon)) \supset B_1(f, \delta)$ para algum $\delta > 0$.

Ora, $\forall g \in B_1(f, \delta)$, $g^2 \in \mathcal{H}^r(I)$ e $\# \text{ per } g = \# \text{ fix } g^2 = \# \text{ fix } f^2 = \# \text{ per } f$; portanto,

$\exists \delta > 0$ tal que $g \in B_1(f, \delta) \implies g \in \mathcal{H}^r(I)$ e

$$\# \text{ per } g = \# \text{ per } f.$$

**

18.10 COROLÁRIO.

Seja $f \in \mathcal{H}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$; então, $\exists \epsilon > 0$ tal que $g \in B_r(f, \epsilon) \implies g \in \mathcal{H}^r(I)$ e $\# \text{ per } g = \# \text{ per } f$.

DEMONSTRAÇÃO.

$$\text{Como } \|f-g\|_r = \sum_{i=0}^r \sup_{x \in I} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)|,$$

temos que

$$\forall \epsilon > 0, B_r(f, \epsilon) \supset B_1(f, \epsilon).$$

Portanto, de 18.9 decorre 18.10.

**

18.11 COROLÁRIO.

$\mathcal{H}^r(I)$ é aberto em $\text{Dif}^r(I)$ na topologia C^r , $1 \leq r \leq \infty$.

DEMONSTRAÇÃO.

Decorre imediatamente de 18.10, pois

$$\forall f \in \mathcal{H}^r(I), \exists \epsilon > 0 \mid g \in B_r(f, \epsilon) \implies g \in \mathcal{H}^r(I).$$

**

Finalmente, vamos relacionar a estabilidade estrutural com os difeomorfismos hiperbólicos.

18.12 TEOREMA.

Seja $f \in \text{Dif}^r(I)$, $1 \leq r \leq \infty$; então, f é C^r estruturalmente estável se e somente se $f \in \mathcal{H}^r(I)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição suficiente.

Decorre imediatamente de 18.10.

Item 2. Condição necessária.

Suponhamos, por absurdo, que $f \notin \mathcal{H}^r(I)$. Temos dois casos a considerar.

a) per f infinito.

b) per f finito.

a) Decorre de $\mathcal{H}^r(I)$ ser denso em $\text{Dif}^r(I)$ (ver 18.5) que f não seria estruturalmente estável.

b) Decorre de 18.6 ou 18.7, conforme f seja crescente ou decrescente, respectivamente, que f não seria estruturalmente estável.

Portanto, de a) e b),

$$f e_{\theta}^r(I).$$

**

Dada uma variedade diferenciável C^∞ de dimensão um, M^1 , qualquer, suas componentes conexas são podem ser, a menos de difeomorfismo, dos seguintes tipos: $[0,1]$, $]0,1[$, $[0,1[$ ou S^1 (ver 5.1). Como: a intersecção de um conjunto fechado de M^1 com cada componente conexa é um conjunto fechado nesta componente; dado um elemento f de $\text{Dif}^r(M^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, f leva componente conexa de M^1 sobre componente conexa de M^1 ; e, além disso, a imagem de uma componente conexa é uma componente conexa do mesmo tipo, podemos restringir nosso estudo às M^1 conexas, sem perda de generalidade.

Restam-nos, então, as seguintes possibilidades para M^1 conexa:

- i) o intervalo $]0,1[$;
- ii) o intervalo $[0,1[$;
- iii) o círculo S^1 .

19 O Intervalo $]0,1[$.

Vamos provar que:

1º) dados $f, g \in \text{Dif}^r(]0, 1[)$, $0 \leq r \leq \infty$, existem, respectivamente, $\tilde{f}, \tilde{g} \in \text{Dif}^0(I)$ tais que

$$f \approx g \text{ em }]0, 1[\iff \tilde{f} \approx \tilde{g} \text{ em } I;$$

2º) dados dois conjuntos fechados, A e B , de $]0, 1[$, existem, respectivamente, dois conjuntos fechados, $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$, de I , tais que

$$A \sim B \text{ em }]0, 1[\iff \tilde{A} \sim \tilde{B} \text{ em } I.$$

19.1 DEFINIÇÃO.

Dada $f \in \text{Dif}^r(]0, 1[)$, $0 \leq r \leq \infty$, seja $\tilde{f}: I \rightarrow I$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , 0 < x < 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) & , x = 0; \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) & , x = 1. \end{cases}$$

19.2 PROPOSIÇÃO.

A função $\tilde{f}: I \rightarrow I$ definida em 19.1 é tal que $\tilde{f} \in \text{Dif}^0(I)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Vamos dividir a demonstração em dois itens.

Item 1. $\tilde{f}$ está bem definida.

Item 2. $\tilde{f} \in \text{Dif}^0(I)$.

Item 1.

Como f é estritamente monótona e $0 < f(x) < 1$, $\forall x \in]0,1[$, qualquer que seja a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightarrow 0$ ou $x_n \rightarrow 1$, com $x_n \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona limitada, portanto converge. E do fato de $f(]0,1[) =]0,1[$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

e, respectivamente,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0,$$

conforme f seja crescente ou decrescente, donde concluímos que $\tilde{f}$ está bem definida e

$$\tilde{f}(I) = I. \quad (4.0)$$

Item 2.

Como f é bijetora em $]0,1[$ e vale (4.0), temos que

$$\tilde{f}: I \rightarrow I \text{ é bijetora.} \quad (4.1)$$

Por outro lado, f é contínua em $]0,1[$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in]0,1[$; portanto,

$$\tilde{f} \text{ é contínua em }]0,1[. \quad (4.2)$$

E da definição de $\tilde{f}$ nos pontos zero e um, podemos, junto com (4.2), afirmar que

$$\tilde{f} \text{ é contínua em } I. \quad (4.3)$$

De (4.1) e (4.3) temos que $\tilde{f}$ é bijetora e contínua em I , compacto; portanto,

$$\tilde{f} \in \text{Dif}^0(I),$$

como queríamos demonstrar em 18.2.

**

Seja, agora, A um conjunto fechado de $]0,1[$ e vamos definir $\tilde{A}$, conjunto fechado de I .

19.3 DEFINIÇÃO.

Dado A , subconjunto fechado de $]0,1[$, definimos o subconjunto $\tilde{A}$ de I por

$$\tilde{A} = A \cup \{0,1\}.$$

19.4 PROPOSIÇÃO.

O conjunto $\tilde{A}$ definido em 19.3 é um subconjunto fechado de I .

DEMONSTRAÇÃO.

Consideremos o conjunto A contido em I : ou 0 é isolado ou $0 \in \bar{A}$ em I ; idem com o 1 ; portanto,

$$\tilde{A} \text{ é fechado em } I.$$

**

Lembrando que já definimos $\approx$ em M^1 (ver 13.3), podemos demonstrar a relação entre a conju

gação em $]0,1[$ e em I .

19.5 TEOREMA.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(]0,1[)$, $0 \leq r \leq \infty$, e as correspondentes $\tilde{f}, \tilde{g} \in \text{Dif}^0(I)$.

$$f \approx g \text{ em }]0,1[\iff \tilde{f} \approx \tilde{g} \text{ em } I.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição necessária.

Seja $h \in \text{Dif}^0(]0,1[)$ tal que
 $\forall x \in]0,1[, h(0_f(x)) = 0_g(h(x))$
 e consideremos $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$ (ver 19.1)

Como $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in]0,1[$ e, além disso,

$$0 \notin 0_{\tilde{f}}(x), \quad \forall x \in]0,1[,$$

$$1 \notin 0_{\tilde{f}}(x), \quad \forall x \in]0,1[,$$

temos que

$$0 < x < 1 \implies 0_{\tilde{f}}(x) = 0_f(x). \quad (4.4)$$

Analogamente para g ,

$$0 < y < 1 \implies 0_{\tilde{g}}(y) = 0_g(y). \quad (4.5)$$

Ora, $\tilde{h}(]0,1[) =]0,1[$, pois $\tilde{h}(x) = h(x)$,
 $0 < x < 1$; portanto,

$$0 < x < 1 \implies \tilde{h}(0_{\tilde{f}}(x)) = 0_{\tilde{g}}(\tilde{h}(x)). \quad (4.6)$$

Como $\tilde{h}(0) \cup \tilde{h}(1) = \{0,1\}$ e $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ é crescente, podemos afirmar que

$$\tilde{h}(0_{\tilde{f}}(0)) = 0_{\tilde{g}}(\tilde{h}(0)) \text{ e } \tilde{h}(0_{\tilde{f}}(1)) = 0_{\tilde{g}}(\tilde{h}(1)). \quad (4.7)$$

De (4.6) e (4.7)

$$\tilde{f} \approx \tilde{g} \text{ em } I \text{ por } \tilde{h}.$$

Item 2. Condição suficiente.

Seja $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $\forall x \in I, \tilde{h}(0_{\tilde{f}}(x)) = 0_{\tilde{g}}(\tilde{h}(x))$ e consideremos a função $h \in \text{Dif}^0(]0,1[)$ definida por

$$h = \tilde{h}|_{]0,1[}.$$

Como valem (4.4) e (4.5), temos que

$$0 < x < 1 \implies h(0_f(x)) = 0_g(h(x)).$$

E podemos concluir

$$f \approx g \text{ em }]0,1[.$$

**

19.6 TEOREMA.

Sejam A e B subconjuntos fechados de $]0,1[$.

$$A \sim B \text{ em }]0,1[\iff \tilde{A} \sim \tilde{B} \text{ em } I.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição necessária.

Seja $h \in \text{Dif}^0(]0,1[)$ tal que $h(A) = B$ e consideremos $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$ (ver 19.1).

Como $h(A) = B$ e $\tilde{h}(x) = h(x)$, $\forall x \in]0,1[$, temos imediatamente que

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\tilde{A}) &= \tilde{h}(A \cup \{0,1\}) = \tilde{h}(A) \cup \tilde{h}(\{0,1\}) = h(A) \cup \{0,1\} = \\ &= B \cup \{0,1\} = \tilde{B}; \text{ donde,}\end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{A} \sim \tilde{B} \text{ em } I.}$$

Item 2. Condição suficiente.

Seja $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $\tilde{h}(\tilde{A}) = \tilde{B}$ e consideremos a função $h \in \text{Dif}^0(]0,1[)$ definida por

$$h = \tilde{h}|_{]0,1[}.$$

É claro que $h \in \text{Dif}^0(]0,1[)$; além disso, $h(A) = \tilde{h}(A) = B$; portanto,

$$\boxed{A \sim B \text{ em }]0,1[.}$$

**

20 0 Intervalo $[0,1[$.

Podemos ter $f \in \text{Dif}^r([0,1[)$, $0 \leq r \leq \infty$, ou $f \in \text{Dif}^r([0,1[,]0,1])$, $0 \leq r \leq \infty$. Vamos definir $\tilde{f} \in \text{Dif}^0(I)$ da mesma forma.

20.1 DEFINIÇÃO.

Dada $f \in \text{Dif}^r([0, 1[), 0 \leq r \leq \infty$, ou $f \in \text{Dif}^r([0, 1[,]0, 1])$, $0 \leq r \leq \infty$, seja $\tilde{f}: I \rightarrow I$ de finida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) , & 0 \leq x < 1; \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) , & x = 1. \end{cases}$$

20.2 PROPOSIÇÃO.

A função $\tilde{f}: I \rightarrow I$ definida em 20.1 é tal que $\tilde{f} \in \text{Dif}^0(I)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Análoga $\tilde{a}$ de 19.2.

**

Com relação aos fechados, para efeito de conjugação, podemos ter um subconjunto fechado de $[0, 1[$ ou de $]0, 1]$. Vamos definir $\tilde{A}$.

20.3 DEFINIÇÃO.

Dado A , subconjunto fechado de $[0, 1[$ (ou de $]0, 1]$), definamos o subconjunto $\tilde{A}$ de I por

$$\tilde{A} = A \cup \{0, 1\}.$$

20.4 PROPOSIÇÃO.

O conjunto $\tilde{A}$ definido em 20.3 é um sub conjunto fechado de I .

DEMONSTRAÇÃO.

Consideremos o conjunto A contido em I :
ou 0 é isolado ou $0 \in \bar{A}$; ídem com o 1 ; portanto,

$\bar{A}$ é fechado em I .

**

Com a definição de $\approx$ em M^1 (ver 13.3),
provemos um teorema análogo ao 19.5.

20.5 TEOREMA.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r([0, 1[)$, $0 \leq r \leq \infty$, e as
correspondentes $\tilde{f}, \tilde{g} \in \text{Dif}^0(I)$.

$f \approx g$ em $[0, 1[\iff \tilde{f} \approx \tilde{g}$ em I por um homeomorfis-
mo crescente.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição necessária.

Análoga à do Item 1 de 19.5, lembrando
que $f \approx g$ por h , homeomorfismo crescente.

Item 2. Condição suficiente.

Seja $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$, crescente, tal que
 $\forall x \in I, \tilde{h}(0_{\tilde{f}}(x)) = 0_{\tilde{g}}(\tilde{h}(x))$ e consideremos a função
 $h \in \text{Dif}^0([0, 1[)$ definida por

$$h = \tilde{h}|_{[0, 1[}.$$

Como

$$0 \notin 0_f(x) \quad , \quad \forall x \in]0,1[,$$

$$0 \notin 0_g(y) \quad , \quad \forall y \in]0,1[,$$

temos

$$0 < x < 1 \implies h(0_f(x)) = 0_g(h(x)). \quad (4.8)$$

Por outro lado, $0_f(0) = \{0\} = 0_g(0)$ e $h(0) = 0$; então,

$$h(0_f(0)) = h(\{0\}) = \{0\} = 0_g(h(0)). \quad (4.9)$$

De (4.8) e (4.9) resulta

$$0 \leq x < 1 \implies h(0_f(x)) = 0_g(h(x));$$

portanto,

$$f \approx g \text{ em } [0,1[.$$

**

20.6 TEOREMA.

Seja A subconjunto fechado de $[0,1[$ e B subconjunto fechado de $[0,1[$ ou de $]0,1]$, tais que $0 \notin A$ e $\{0,1\} \cap B = \emptyset$.

$$A \sim B \iff \tilde{A} \sim \tilde{B} \text{ em } I.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição necessária.

Seja

$$h \in \text{Dif}^0([0,1[) \text{ ou } h \in \text{Dif}^0([0,1[,]0,1])$$

tal que $h(A) = B$ e consideremos $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$ (ver 20.1).

Como $h(A) = B$ e $\tilde{h}|_{[0,1[} = h$, temos imediatamente que

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\tilde{A}) &= \tilde{h}(A \cup \{0,1\}) = \tilde{h}(A) \cup \tilde{h}(\{0,1\}) = h(A) \cup \{0,1\} = \\ &= B \cup \{0,1\} = \tilde{B}; \text{ donde,} \end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{A} \sim \tilde{B} \text{ em } I.}$$

Item 2. Condição suficiente.

Seja $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $\tilde{h}(\tilde{A}) = \tilde{B}$ e consideremos a função

$$h \in \text{Dif}^0([0,1[) \text{ ou } h \in \text{Dif}^0([0,1[,]0,1])$$

definida por

$$h = \tilde{h}|_{[0,1[}.$$

Como $A \subset]0,1[$ e $B \subset]0,1[$, concluímos que

$$h(A) = \tilde{h}(A) = \tilde{h}(\tilde{A} \setminus \{0,1\}) = \tilde{h}(\tilde{A}) \setminus \{0,1\} = \tilde{B} \setminus \{0,1\} = B;$$

donde,

$$\boxed{A \sim B \text{ em } I.}$$

20.7 TEOREMA.

Seja A subconjunto fechado de $[0,1[$ tal que $0 \in A$; seja B subconjunto fechado de $[0,1[$

ou de $]0,1]$ tal que $0 \in B$ ou $1 \in B$, respectivamente.
 $A \sim B \iff \tilde{A} \sim \tilde{B}$ em I por um homeomorfismo $\tilde{h}$ tal que $\tilde{h}(0) \in B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição necessária.

Análoga $\tilde{a}$ do Item 1 de 20.6.

Item 2. Condição suficiente.

Temos que $\tilde{h}(\tilde{A}) = \tilde{B}$ e $\tilde{h}(0) \in B$; seja $h \in \text{Dif}^0([0,1[)$ ou $h \in \text{Dif}^0([0,1[,]0,1])$ tal que

$$h = \tilde{h}|_{[0,1[};$$

então,

$$h(A) = \tilde{h}(\tilde{A} \setminus \{1\}) = \tilde{h}(\tilde{A}) \setminus \{\tilde{h}(1)\} = \tilde{B} \setminus \{\tilde{h}(1)\}. \quad (4.10)$$

Como $\tilde{h}(0) \in B$ e $B \subset [0,1[$ ou $B \subset]0,1]$,

$$\tilde{h}(1) \notin B. \quad (4.11)$$

Levando em conta (4.10) e (4.11) e lembrando que $\tilde{B} = B \cup \{\tilde{h}(1)\}$, temos que $h(A) = B$; isto é,

$A \sim B.$

★★

Fica, até aqui, demonstrada a extensão dos resultados obtidos para I aos intervalos $]0,1[$ e $[0,1[$ (ou $]0,1]$).

21 O Círculo S^1 .

Dada f em $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, ou f preserva a orientação (ver 2.11) ou f inverte a orientação (ver 2.12).

Para estudar a função f de $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, vamos construir uma função $\tilde{f}$ de $\text{Dif}^0(\mathbb{R})$, que corresponde, imprecisamente falando, a "desenrolar" o S^1 e olhar para a representação de f na reta.

21.1 PROPOSIÇÃO.

Seja $z_0 \in S^1$, qualquer, fixado. A função $j_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por $j_0(x) = z_0 e^{2\pi i x}$ é tal que $j_0|_{[0,1[} : [0,1[\rightarrow S^1$ é bijetora.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. j_0 é injetora.

Sejam $x_1, x_2 \in [0,1[$ tais que $j_0(x_1) = j_0(x_2)$.

$$j_0(x_1) = j_0(x_2) \iff z_0 e^{2\pi i x_1} = z_0 e^{2\pi i x_2} \iff 2\pi i(x_1 - x_2) = 2k\pi i, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \iff x_1 - x_2 = k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Mas, $0 \leq x_1, x_2 < 1$; donde

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \iff x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2;$$

portanto,

$$j_0|_{[0,1[} \text{ é injetora.} \quad (4.12)$$

Item 2. j_0 é sobrejetora, isto é, $j_0([0,1[) = S^1$.

Seja $z \in S^1$ e provemos que

$$x = \frac{(\text{Arg } z - \text{Arg } z_0)}{2\pi}$$

(onde $\text{Arg } z \in [0, 2\pi[$, $\forall z \in S^1$) é tal que $x \in [0, 1[$
e $j_0(x) = z$.

Ora,

$$\begin{aligned} j_0(x) &= z_0 e^{2\pi i \left(\frac{\text{Arg } z - \text{Arg } z_0}{2\pi} \right)} = z_0 e^{i \text{Arg } z} e^{-i \text{Arg } z_0} = \\ &= z_0 \frac{z}{z_0} = z, \end{aligned}$$

e como $0 \leq \text{Arg } z < 2\pi$, $\forall z \in S^1$, é imediato que

$$\frac{\text{Arg } z - \text{Arg } z_0}{2\pi} \in [0, 1[; \text{ portanto,}$$

$$j_0|_{[0,1[} \text{ é sobrejetora.} \quad (4.13)$$

De (4.12) e (4.13) decorre que

$$j_0|_{[0,1[} : [0,1[\rightarrow S^1 \text{ é bijetora.}$$

21.2 COROLÁRIO.

Seja $z_0 \in S^1$, qualquer, fixado. A função $k_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $k_0(x) = z_0 e^{-2\pi i x}$ é tal que $k_0|_{[0,1[} : [0,1[\rightarrow S^1$ é bijetora.

DEMONSTRAÇÃO.

Análoga à de 21.1.

**

Consideremos $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, que preserva a orientação, $z_0 \in S^1$, qualquer, e as funções $j_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ e $j_1: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definidas, respectivamente, por $j_0(x) = z_0 e^{2\pi i x}$ e $j_1(x) = f(z_0) e^{2\pi i x}$.

21.3 DEFINIÇÃO.

Seja $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$a) \tilde{f}|_{[0,1[} = \left((j_1|_{[0,1[})^{-1} \circ f \circ j_0 \right)|_{[0,1[};$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0,1[, \tilde{f}(x) = \left(\tilde{f}|_{[0,1[} \right)(x - [x]) + x.$$

21.4 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, que preserve a orientação. A função $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida em 21.3 é tal que $\tilde{f} \in \text{Dif}^0(\mathbb{R})$ e é crescente.

DEMONSTRAÇÃO.

Vamos verificar que $\tilde{f}$ é contínua no um.

Ora, se $x \rightarrow 1^-$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\left(j_1|_{[0,1[} \right)^{-1} \circ f \circ j_0 \right]_{[0,1[}(x) = 1,$$

e se $x \rightarrow 1^+$, pela definição de $\tilde{f}$ em $\mathbb{R} \setminus [0,1[$ decorre que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \tilde{f}(x) = 1$; portanto, $\tilde{f}(1) = 1$ e $\tilde{f}$ é contínua no um.

Como a definição de $\tilde{f}$ é equivalente a estender $(\tilde{f}-id)|_{[0,1[}$ por periodicidade, concluímos que

$\tilde{f}-id$ é periódica de período um; ou

$$\tilde{f} \in \text{Dif}^0(\mathbb{R}) \text{ e } \tilde{f}(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sejam, agora, $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, que inverte a orientação, $z_0 \in S^1$ e as funções $j_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ e $k_1: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, definidas respectivamente por

$$j_0(x) = z_0 e^{2\pi i x} \text{ e } k_1(x) = f(z_0) e^{-2\pi i x}.$$

21.5 DEFINIÇÃO.

Seja $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$a) \tilde{f}|_{[0,1[} = \left(\left(k_1|_{[0,1[} \right)^{-1} \circ f \circ j_0 \right)|_{[0,1[} ;$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0,1[, \tilde{f}(x) = \left(\tilde{f}|_{[0,1[} \right)(x - [x]) + x.$$

21.6 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, que inverte a orientação. A função $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida em 21.5 é tal que $\tilde{f} \in \text{Dif}^0(\mathbb{R})$ e é crescente.

DEMONSTRAÇÃO.

Análoga à de 21.4.

**

21.7 DEFINIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$. A função $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em 21.3 ou em 21.5 será chamada um levantamento de f .

Seja $A \subset S^1$ tal que $\bar{A} = A$ e construamos, a partir de A , um subconjunto fechado $\tilde{A}$ de $\mathbb{I}$, "associado" a A , num sentido que vamos precisar em 21.10.

21.8 DEFINIÇÃO.

Seja $A \subset S^1$ tal que $\bar{A} = A \neq \emptyset$ e $z_0 \in A$, qualquer. Se $j_0: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é a função definida por $j_0(x) = z_0 e^{2\pi i x}$, temos

$$\tilde{A} = j_0^{-1}(A) \cap \mathbb{I}.$$

21.9 PROPOSIÇÃO.

O conjunto $\tilde{A}$, definido em 21.8, é um subconjunto fechado de I .

DEMONSTRAÇÃO.

Decorre de j_0 ser contínua e A ser fechado de S^1 .

**

21.10 TEOREMA.

Sejam A e B dois subconjuntos fechados não vazios de S^1 e $z_0 \in A$.

$A \sim B$ em $S^1 \iff \exists z_1 \in S^1$ tal que $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ em I , onde $\tilde{B} = j_1^{-1}(B) \cap I$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição necessária.

Seja $h \in \text{Dif}^0(S^1)$ tal que $h(A) = B$; então, $h(z_0) \in B$ e basta tomarmos $z_1 = h(z_0)$ (neste caso, $j_1(x) = h(z_0)e^{2\pi i x}$) e $\tilde{h}$ o levantamento de h que satisfaz $j_1 \circ \tilde{h} = h \circ j_0$.

$$j_1 \circ \tilde{h}(\tilde{A}) = (h \circ j_0)(\tilde{A}) = h(A) = B;$$

e como $\tilde{h}(I) = I$, temos que

$$\tilde{h}(\tilde{A}) = j_1^{-1}(B) \cap I = \tilde{B}; \text{ portanto,}$$

$$\tilde{A} \sim \tilde{B} \text{ em } I.$$

Item 2. Condição suficiente.

Seja $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$ tal que $\tilde{h}(\tilde{A}) = \tilde{B}$ e consideremos a função $h: S^1 \rightarrow S^1$ definida por

$$j_1 \circ \tilde{h} = h \circ j_0,$$

que está em $\text{Dif}^0(S^1)$ (decorre de j_0 , $\tilde{h}$ e j_1 serem contínuas, com j_0 e j_1 periódicas de período um).

$$h(A) = h(j_0(\tilde{A})) = (j_1 \circ \tilde{h})(\tilde{A}) = j_1(\tilde{B}) = B; \text{ donde,}$$

$$A \sim B \text{ em } S^1.$$

**

21.11 PROPOSIÇÃO.

Seja $A \subset I$ tal que $\bar{A} = A$; então, $\forall z_0 \in S^1$, $j_0(A)$ é um subconjunto fechado de S^1 .

DEMONSTRAÇÃO.

Decorre de j_0 ser difeomorfismo local e A ser fechado em I .

**

Podemos, através de 21.10 e 21.11, estender os resultados obtidos no capítulo 2, para os conjuntos fechados de S^1 .

Vamos estudar o que acontece em $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$. Para tanto, vamos considerar os campos de vetores de T^2 (toro bi-dimensional) ou de K^2 (garrafa de Klein).

22 $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$.

Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$ (M é uma variedade diferenciável C^∞), $0 \leq r \leq \infty$, e consideremos a variedade $\tilde{M}$, obtida pelo quociente de $M \times [0,1]$ pela relação $(x,1) \sim (f(x),0)$ ($\tilde{M}$, então, é uma variedade diferenciável com bordo, de dimensão um a mais que M).

Se, em $M \times [0,1]$, considerarmos o campo unitário, paralelo a $[0,1]$, obteremos, em $\tilde{M}$, um campo X de classe C^r ; além disso, fixado $0 \in [0,1]$ se considerarmos a transformação de Poincaré da restrição do fluxo de X a $M \times \{0\}$, obteremos a f inicial (a transformação de Poincaré g de uma secção S é definida por: $\forall x \in S$, $g(x) = \psi_{t_0}(x)$, onde ψ_{t_0} é o fluxo de X no tempo t_0 e

$$t_0 = \min \{t \in \mathbb{R}^{*+} : \psi_t(x) \in S\}.$$

No caso em que $M = S^1$, ou $\tilde{M}$ é T^2 ou $\tilde{M}$ é a garrafa de Klein, dependendo se f preserva ou inverte a orientação.

Suporemos, no que segue, que f preserve a orientação. Como $\tilde{M} = T^2$ e este se identifica com $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ (isto é, o quociente de $\mathbb{R}^2$ pela relação de equivalência que identifica pontos de $\mathbb{R}^2$ (x,y) e (x',y') tais que $x-x' \in \mathbb{Z}$ e $y-y' \in \mathbb{Z}$, podemos considerar o campo X estendido ao $\mathbb{R}^2$, se impusermos

$$X(x,y) = X(x',y') \text{ se } x-x' \in \mathbb{Z} \text{ e } y-y' \in \mathbb{Z}. \quad (4.14)$$

Vamos definir número de rotação do campo X . Como vale (4.14) e $X \in C^r$, $0 \leq r \leq \infty$, estão satisfeitas as condições de existência e unicidade de soluções; portanto, $\forall P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\exists$! curva integral $x(t, t_0, x_0)$ tal que $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ e $\frac{dx}{dt} = X \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} = 1 \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{X}, \text{ com } X \neq 0 \text{ em todos os pontos de } \mathbb{R}^2 \right)$.

Consideremos, portanto, as curvas integrais $x(t, 0, x_0) = x(t, x_0)$, $0 \leq x_0 < 1$, que nos dão todas as curvas integrais de X .

Fixada a curva $x(t, x_0)$, $0 \leq x_0 < 1$, definamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$A_{x_0} = \{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} : m > 0 \text{ e } x(t, m, x_0 + n) \text{ está acima de } x(t, x_0) \}$ e

$B_{x_0} = \{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} : m > 0 \text{ e } x(t, m, x_0 + n) \text{ está abaixo de } x(t, x_0) \}$.

a) $A_{x_0} \neq \emptyset$ e $B_{x_0} \neq \emptyset$.

$a_0 = [x(1, x_0)] = \text{maior inteiro contido em } x(1, x_0)$ é finito; portanto,

$$a_0 + 1 \in A_{x_0} \neq \emptyset \text{ e}$$

$$a_0 - 1 \in B_{x_0} \neq \emptyset.$$

b) Sejam (m_0, n_0) e (m_1, n_1) tais que $m_0 > 0$, $m_1 > 0$

e $\frac{n_0}{m_0} = \frac{n_1}{m_1}$; então, $\frac{n_0}{m_0}$ e $\frac{n_1}{m_1}$ pertencem ambos a A_{x_0} ou ambos a B_{x_0} ou ambos estão em $x(t, x_0)$.

Suponhamos que $\frac{n_0}{m_0} \in A_{x_0}$; então

$x(t, m_0, n_0 + x_0)$ está acima de $x(t, x_0)$.

Como

$$\frac{n_0}{m_0} = \frac{n_1}{m_1} = \frac{n_1 m_0}{m_1 m_0} \text{ e } n_0 m_1 = n_1 m_0,$$

temos que

$$x(t, m_1 m_0, n_1 m_0 + x_0) = x(t, m_1 m_0, m_1 n_0 + x_0), \text{ com } m_1 > 0;$$

portanto,

$x(t, m_1 m_0, m_1 n_0 + x_0)$ está acima de $x(t, m_0, n_0 + x_0)$ e resulta que

$$\frac{n_1 m_0}{m_0 m_1} = \frac{n_1}{m_1} \in A_{x_0}.$$

Se $\frac{n_0}{m_0} \in B_{x_0}$, então $x(t, m_0, n_0 + x_0)$ está abaixo de $x(t, x_0)$ e como $-n_0 m_1 = -n_1 m_0$ com $\frac{n_1}{m_1} =$

$$= \frac{-n_1 m_0}{-m_1 m_0} \text{ e } -m_0 < 0, \text{ por raciocínio análogo ao ante-}$$

rior, resulta que

$$\frac{n_1}{m_1} \in B_{x_0}.$$

E se $\frac{n_0}{m_0}$ é tal que $x(t, m_0, n_0 + x_0) =$

$= x(t, x_0)$, por comparação com o raciocínio anterior, temos que $\frac{n_1}{m_1}$ é tal que $x(t, x_0) = x(t, m_1, n_1 + x_0)$.

E concluímos que

A_{x_0} e B_{x_0} estão bem definidos.

c) $A_{x_0} > B_{x_0}$, isto é, se $\frac{n_0}{m_0} \notin B_{x_0}$ e $\frac{n_1}{m_1} > \frac{n_0}{m_0}$, então

$\frac{n_1}{m_1} \in A_{x_0}$ e se $\frac{n_0}{m_0} \notin A_{x_0}$ e $\frac{n_1}{m_1} < \frac{n_0}{m_0}$, então $\frac{n_1}{m_1} \in B_{x_0}$.

Suponhamos que $\frac{n_0}{m_0} \notin B_{x_0}$; então, ou

$x(t, m_0, n_0 + x_0) = x(t, x_0)$ ou $x(t, m_0, n_0 + x_0)$ está acima de $x(t, x_0)$.

De $\frac{n_1}{m_1} > \frac{n_0}{m_0}$ temos que $\frac{n_1 m_0}{m_1 m_0} > \frac{n_0}{m_0} =$

$= \frac{m_1 n_0}{m_1 m_0}$ e $n_1 m_0 > n_0 m_1$; portanto, $x(t, m_1 m_0, m_1 n_0 + x_0)$

está acima de $x(t, m_0, n_0 + x_0)$ ($m_1 > 0$) e

$x(t, m_1 m_0, n_1 m_0 + x_0)$ está acima de $x(t, m_1 m_0, m_1 n_0 + x_0)$,

pois $n_1 m_0 > n_0 m_1$, e concluímos que

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_1 m_0}{m_1 m_0} \in A_{x_0}.$$

Analogamente se prova a outra alternativa; portanto,

$$A_{x_0} > B_{x_0}.$$

De a), b), c) decorre que (A_{x_0}, B_{x_0}) constitui um corte dos números racionais; portanto, define um número real, R_{x_0} , que pode ser racional ou irracional, e é racional se e somente se $R_{x_0} = \frac{n_0}{m_0}$ com $x(m_0, x_0) = n_0$; portanto, podemos ainda concluir que

$$R_{x_0} \in \mathbb{Q} \text{ se e somente se } X \text{ tem órbita fechada.} \quad (4.15)$$

Provemos que R_{x_0} independe da curva integral fixada, isto é,

$$\forall x_0 \in [0, 1[, R_{x_0} = R_0.$$

Para tanto, basta mostrar que $A_{x_0} = A_0$ e $B_{x_0} = B_0$, $\forall x_0 \in [0, 1[$.

$$1^\circ) A_{x_0} \subset A_0.$$

Se $\frac{n_0}{m_0} \in A_{x_0}$, então o ponto $(m_0, x_0 + n_0)$ está acima de $x(t, x_0)$ e, como $0 < x_0 < 1$, $x(t, x_0)$ está acima de $x(t, 0)$; portanto

$$A_{x_0} \subset A_0. \quad (4.16)$$

$$2^\circ) A_0 \subset A_{x_0}.$$

Seja $\frac{n_0}{m_0} \in A_0$; então, (m_0, n_0) está acima de $x(t, 0)$; portanto, $(m_0, n_0 + x_0)$ está acima de $x(t, x_0)$ e

$$A_0 \subset A_{x_0}. \quad (4.17)$$

$$3^\circ) \quad B_{x_0} \subset B_0. \quad (4.18)$$

Análogo ao 2º).

$$4^\circ) \quad B_0 \subset B_{x_0}. \quad (4.19)$$

Análogo ao 1º).

De (4.16), (4.17), (4.18) e (4.19) decorre que $A_0 = A_{x_0}$ e $B_0 = B_{x_0}$, $\forall x_0 \in [0,1[$; portanto,

$$R_{x_0} = R_0, \quad \forall x_0 \in [0,1[. \quad (4.20)$$

22.1 DEFINIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, que preserve a orientação, e consideremos o campo X em T^2 , suspensão de f ; o número de rotação de f , $R(f)$, é R_0 , chamado número de rotação de X .

$R(f)$ está bem definido, por causa de (4.20).

22.2 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, que preserve a orientação; então, $R(f) \in \mathbb{Q}$ se e somente se $\text{per } f \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO.

Decorre de (4.15).

**

Vamos, agora, demonstrar alguns resultados importantes sobre $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$.

22.3 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tal que f preserva a orientação. Se $\text{per } f \neq \emptyset$, então $\exists n_f \in \mathbb{N}$ tal que $\text{per } f = \text{per}_{n_f} f$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. $\text{per } f = \text{fix } f = S^1$.

Neste caso, $n_f = 1$.

Item 2. $\text{fix } f \neq S^1$.

Seja $z_0 \in \text{per}_n f$, e suponhamos que $\exists \bar{z} \in \text{per}_m f$, $\bar{z} \neq z_0$.

Pomos $z_i = f^i(z_0)$, $i = 0, \dots, n-1$.

Como $O_f(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$, os pontos z_i , $i = 0, \dots, n-1$, dividem S^1 em n arcos tais que se $\overrightarrow{z_0 z_i}$ é o arco de origem z_0 e extremidade z_i na orientação anti-horária e $\overrightarrow{z_0 z_i} \cap O_f(z_0) = \emptyset$, então

$$\bigcup_{j=0}^{n-1} f^j(\overrightarrow{z_0 z_i}) = S^1.$$

Ora, $\bar{z}$ está num desses arcos e tem sucessivas imagens nos demais arcos; portanto,

$$m \geq n. \quad (4.21)$$

Trocando os papéis de z_0 e $\bar{z}$, decorre que

$$n \geq m. \quad (4.22)$$

De (4.21) e (4.22) concluímos que $n = m$; isto é,

$$\text{per } f = \text{per}_n f \text{ e } n_f = n.$$

22.4 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, que inverte a orientação; então, $\text{fix } f = \{z_1, z_2\}$, com $z_1 \neq z_2$, e $\text{per } f \setminus \text{fix } f = \text{per}_2 f$, eventualmente vazio.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $z_0 \in S^1$.

a) Se $f(z_0) = z_0$, basta considerarmos o levantamento $\tilde{f}$ de f que satisfaz $j_0 \circ \tilde{f} = f \circ j_0$ e $\tilde{f}(0) \in]0, 1]$, onde $j_0(x) = z_0 e^{2\pi i x}$; como f inverte a orientação,

$$\tilde{f}|_I \in \text{Dif}^0(I) \text{ e } \tilde{f}(0) = 1. \quad (4.23)$$

De (4.23), concluímos que $\exists! x_2 \in I$ tal que $\tilde{f}(x_2) = x_2$.

É fácil ver que

$$\{j_0(0), j_0(x_2)\} = \text{fix } f. \quad (4.24)$$

b) Suponhamos, agora, que $f(z_0) \neq z_0$ e escolhamos o arco de S^1 , determinado por z_0 e $f(z_0)$, ao qual $f^2(z_0)$ pertence; por exemplo, $f^2(z_0) \in \overline{z_0 f(z_0)}$; e sejam $x_0, x_1 \in [0, 1[$ tais que $e^{2\pi i x_0} = z_0$ e $e^{2\pi i x_1} = z_1$.

Consideremos a função $k_0: I \rightarrow S^1$ tal que $k_0(x) = z_0 e^{2\pi i (x_1 - x_0)x}$.

Então, $k_0(I) = \overrightarrow{z_0 f(z_0)}$ e $k_0: I \rightarrow k_0(I)$ é bijetora e contínua; portanto, a função $\tilde{f}: I \rightarrow I$ definida por

$$\begin{aligned} k_0 \circ \tilde{f} &= f \circ k_0 \quad \tilde{f} \text{ é contínua e} \\ \tilde{f}: I &\rightarrow \overrightarrow{f^2(z_0) f(z_0)} \quad \tilde{f} \text{ é bijetora.} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como $\tilde{f}(0) = 1$, de (4.25) decorre que

$$\tilde{f} \text{ é decrescente.} \quad (4.26)$$

De (4.25) e (4.26), concluímos que

$$\exists! \bar{x} \in I \text{ tal que } \tilde{f}(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Ora, $f(k_0(\bar{x})) = (f \circ k_0)(\bar{x}) = (k_0 \circ \tilde{f})(\bar{x}) = k_0(\bar{x})$; portanto,

$$\exists \bar{z} = k_0(\bar{x}) \in \overrightarrow{z_0 f(z_0)} \text{ tal que } f(\bar{z}) = \bar{z}.$$

Aplicando raciocínio análogo ao feito no item a), substituindo-se z_0 por $\bar{z}$, tem-se que

$$\text{fix } f = \{z_1, z_2\}, \text{ com } z_1 \neq z_2. \quad (4.27)$$

Vamos considerar o conjunto per f . Como f^2 preserva a orientação e $\text{fix } f \subset \text{fix } f^2$, de 22.3 de corre que $n_{f^2} = 1$; isto é,

$$\text{per } f^2 = \text{fix } f^2. \quad (4.28)$$

De (4.24), (4.27) e (4.28) podemos concluir que

per $f = \text{fix } f \cup \text{per}_2 f$, com $\text{fix } f = \{z_1, z_2\}$,
 $z_1 \neq z_2$ e $\text{per}_2 f$ eventualmente vazio.

★★

Para as proposições 22.5, 22.6, 22.7 e 22.8 precisamos das noções de ω -limite de $z \in S^1$ por f (ver 2.14), α -limite de $z \in S^1$ por f (ver 2.15), conjunto minimal de f (ver 2.13) e ponto não errante (ver 2.16).

22.5 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tal que $R(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; então,

$$\omega_f(z_1) = \omega_f(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in S^1.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Antes, provemos que
 $\forall z \in S^1, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, \exists k \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\bigcup_{i=0}^k f^{(n-m)i}(\overrightarrow{f^m(z) f^n(z)}) = S^1.$$

Ora, se $J_i = f^{(n-m)i}(\overrightarrow{f^m(z)f^n(z)})$, como f preserva a orientação ($R(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \iff \text{per } f = \emptyset$), temos que

$$f^{n-m}(J_i) = J_{i+1} \quad \text{e}$$

$$J_i \cap J_{i+1} = \{f^{(n-m)i+n}(z)\}.$$

Como S^1 é compacta,

ou 1º) $f^{(n-m)i+m}(z) \rightarrow f^{(n-m)i+n}(z)$ quando $i \rightarrow +\infty$,

ou 2º) $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\bigcup_{i=0}^k J_i = S^1$.

Pela primeira alternativa, teríamos

$$f^{(n-m)i+m}(z) \rightarrow z_0 \quad \text{e}$$

$$f^{(n-m)i+n}(z) \rightarrow f^{n-m}(z_0),$$

isto é, $f^{n-m}(z_0) = z_0$ e per $f \neq \emptyset$, contra a hipótese; então,

$$\forall z \in S^1, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n,$$

$$\exists k \in \mathbb{N} \mid \bigcup_{i=0}^k f^{(n-m)i}(\overrightarrow{f^m(z)f^n(z)}) = S^1. \quad (4.29)$$

Vamos provar que

$$\omega_f(z_1) = \omega_f(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in S^1.$$

Ora,

$$z_0 \in \omega_f(z_1) \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{a_n}(z_1) = z_0,$$

e de (4.29),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists b_n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^{b_n}(z_2) \in \overbrace{f^{a_n}(z_1) f^{a_{n+1}}(z_1)};$$

donde, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{b_n}(z_2) = z_0$ e $z_0 \in \omega_f(z_2)$; isto é,

$$\omega_f(z_1) \subset \omega_f(z_2). \quad (4.30)$$

Trocando-se os papéis de z_1 e z_2 , prova-se que

$$\omega_f(z_2) \subset \omega_f(z_1). \quad (4.31)$$

De (4.30) e (4.31) concluímos que

$$\omega_f(z_1) = \omega_f(z_2), \forall z_1, z_2 \in S^1.$$

**

22.6 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tal que $R(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; então,

$\omega_f(z)$ é o único conjunto minimal de S^1 para f .

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. $\omega_f(z)$ é fechado em S^1 .

Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_n \in \omega_f(z)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

e suponhamos que $z_n \rightarrow z_0$.

Vamos provar que $z_0 \in \omega_f(z)$.

Ora,

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (n_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $z_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} f^{n_m}(z)$; portanto,

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_p \in (n_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $|z_n - f^{n_p}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Consideremos a sequência $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ e provemos que $f^{n_p}(z) \rightarrow z_0$, quando $p \rightarrow +\infty$.

Ora,

$$|z_0 - f^{n_p}(z)| \leq |z_0 - z_n| + |z_n - f^{n_p}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

portanto $f^{n_p}(z) \rightarrow z_0$ quando $p \rightarrow +\infty$ e daí,

$\omega_f(z)$ é fechado.

Item 2. $f(\omega_f(z)) \subset \omega_f(z)$.

Calculemos $f(\omega_f(z))$.

$f(\omega_f(z)) = f((0_f^+(z))') = (f(0_f^+(z)))'$, pois $f \in \text{Dif}^r(S^1)$; então,

$$f(\omega_f(z)) = (0_f^+(z))' = \omega_f(z),$$

donde $\omega_f(z)$ é invariante.

Item 3. $\omega_f(z)$ é minimal.

Para tanto, seja $A \subset S^1$, fechado e invariante, e provemos que $\omega_f(z) \subset A$, $\forall z \in A$.

Como $f(A) \subset A$, por indução tem-se que

$f^n(A) \subset A, \forall n \in \mathbb{N}$; portanto, $\forall z \in A, O_f^+(z) \subset A$.

Mas A é fechado e $\forall z \in A, (O_f^+(z))' \subset A' \subset A$;
donde,

$$\forall z \in A, \omega_f(z) \subset A.$$

E do fato de $R(f)$ ser irracional, de 22.5 podemos concluir que

$\omega_f(z)$ é o único conjunto minimal de S^1 para f .

**

22.7 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tal que $R(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; então, $\omega_f(z)$ é perfeito e [ou $\omega_f(z) = S^1$ ou $\omega_f(z)$ é um conjunto de Cantor de S^1].

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. $\omega_f(z)$ é perfeito.

Para tanto, notemos que se $z \in \omega_f(\bar{z})$, então $z \in \omega_f(z) = \omega_f(\bar{z})$, pois $R(f)$ é irracional; então, $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{a_n}(z) \rightarrow z$ com $f^{a_n}(z) \neq f^{a_m}(z)$, se $n \neq m$, uma vez que $\text{per } f = \emptyset$.

Daí, $\omega_f(z) = (\omega_f(z))'$ e $\omega_f(z)$ é perfeito.

Item 2. $\omega_f(z) = S^1$ ou $\omega_f(z)$ é um conjunto de Cantor de S^1 .

Ora, $\delta \omega_f(z)$ é um conjunto fechado e invariante, pois $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$:

$$f(\delta \omega_f(z)) = \delta(f(\omega_f(z))) \subset \delta(\omega_f(z)).$$

De 22.6, temos que

$$\delta \omega_f(z) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \delta \omega_f(z) = \omega_f(z).$$

Mas,

$$\delta \omega_f(z) = \emptyset \iff \omega_f(z) = S^1 \quad \text{e}$$

$\delta \omega_f(z) = \omega_f(z) \iff \omega_f(z)$ é um conjunto de Cantor de S^1 ; portanto,

ou $\omega_f(z) = S^1$ ou $\omega_f(z)$ é um conjunto de Cantor de S^1 .

22.8 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tal que $R(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; então, $\alpha_f(z) = \omega_f(z)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. $\alpha_f(z)$ é invariante por f .

$$\alpha_f(z) = (O_f^-(z))'; \text{ portanto,}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha_f(z)) &= f((O_f^-(z))') = (f(O_f^-(z)))' = (O_f^-(z) \cup \{f(z)\})' = \\ &= (O_f^-(z))', \text{ pois } \{f(z)\} \text{ é unitário. E} \end{aligned}$$

$$f(\alpha_f(z)) = \alpha_f(z). \quad (4.32)$$

Item 2. $\alpha_f(z)$ é um conjunto fechado de S^1 . (4.33)

Demonstração análoga à do item 1 de 22.6.

Item 3. $\omega_f(z) \subset \alpha_f(z)$. (4.34)

Decorre de (4.32), (4.33) e 22.6.

Item 4. $f^{-1}(\alpha_f(z)) = \alpha_f(z)$.

Análogo ao item 1.

Item 5. $\alpha_f(z_1) = \alpha_f(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in S^1$. (4.35)

Análogo a 22.5.

Item 6. $\alpha_f(z)$ é minimal para f^{-1} . (4.36)

Análogo ao item 3 de 22.6, usando-se f^{-1} .

Item 7. $\alpha_f(z) \subset \omega_f(z)$. (4.37)

Decorre de $f^{-1}(\omega_f(z)) = \omega_f(z)$, (4.35) e (4.36).

De (4.34) e (4.37) concluímos que

$$\alpha_f(z) = \omega_f(z).$$

22.9 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tal que $R(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. O conjunto dos pontos não errantes de f , $\Omega(f)$, coincide com $\omega_f(z)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Como $\omega_f(z)$ independe de z (ver 22.5), seja $E = \omega_f(z)$.

Ora, $E = (O_f(z))'$; portanto, $\forall$ vizinhança V de z , $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\exists n \in \mathbb{Z}^*$ tal que $|n| > n_0$ e $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$; isto é,

$$E \subset \Omega(f). \quad (4.38)$$

Para provar a recíproca, seja $z_0 \in \Omega(f)$ e suponhamos que $z_0 \notin E$; então, $\exists V_0$, vizinhança aberta de z_0 , tal que $V_0 \cap O_f(z_0) = \{z_0\}$.

Na verdade, vamos tomar $V_0 = \overline{ab}$, onde $a, b \in O_f(z_0) \setminus \{z_0\}$.

ou

Como $z_0 \in \Omega(f)$, dado V_0 , $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*$,
 $\exists n_1 \in \mathbb{Z}^*$ tal que $|n_1| > n_0$ e $f^{n_1}(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset$; mas
 $V_0 \cap O_f(z_0) = \{z_0\}$; portanto, $f^{n_1}(V_0) \cap O_f(z_0) = \{f^{n_1}(z_0)\}$
 e

$$\begin{aligned} z_0 \in V_0 \setminus f^{n_1}(V_0), \quad f^{n_1}(z_0) \in f^{n_1}(V_0) \setminus V_0, \\ (V_0 \cup f^{n_1}(V_0)) \cap O_f(z_0) = \{z_0, f^{n_1}(z_0)\}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde concluímos que

$f^{n_1}(z_0) = a$ (se $a \in f^{n_1}(V_0)$), ou $f^{n_1}(z_0) = b$ (se $b \in f^{n_1}(V_0)$).

Suponhamos que $a = f^{n_1}(z_0)$; então, $f^{n_1}(z_0)$
 é isolado e $f^{n_1}(a) \notin V_0$; mas

$$f^{n_1}(V_0) = \overbrace{f^{n_1}(a) \quad f^{n_1}(b)} \quad \text{e} \quad f^{n_1}(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset;$$

donde,

$$f^{n_1}(b) \in V_0 = \overset{\circ}{V}_0. \quad (4.40)$$

Como $b \in \overline{O_f(z_0) \setminus \{z_0\}}$, de (4.40) concluimos que

$\exists m \in \mathbb{Z}^*$ tal que $f^m(z_0) \in V_0 \cap f^{n_1}(V_0)$,
 contra (4.39).

Podemos escrever, então, que $z_0 \in E$; isto é,

$$\Omega(f) \subset E,$$

que junto com (4.38) nos dá que

$$E = \Omega(f).$$

**

Com os resultados obtidos no parágrafo 22, vamos estudar a conjugação em $\text{Dif}^r(S^1)$.

23 A Conjugação em $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$.

Com a definição de conjugação em $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, dada em 13.3, podemos estudar em que condições f e g conjugam.

23.1 PROPOSIÇÃO.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$. Se f preserva a orientação e g inverte, então $g \not\sim f$.

DEMONSTRAÇÃO.

De 22.4, temos que

$$\text{fix } g = \{z_1, z_2\}, \quad z_1 \neq z_2; \quad (4.41)$$

como g inverte a orientação,

$$\forall z \in S^1 \setminus \text{fix } g, \quad 0_f(z) \cap \widehat{z_1 z_2} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad 0_f(z) \cap \widehat{z_2 z_1} \neq \emptyset. \quad (4.42)$$

Suponhamos que $g \sim f$ por $h \in \text{Dif}^0(S^1)$; então, de (4.41),

$$\text{fix } f = \{h(z_1), h(z_2)\}, \quad h(z_1) \neq h(z_2).$$

Aplicando 22.3 a f , temos que

$$n_f = 1 \quad \text{e} \quad \text{per } f = \text{fix } f.$$

Como $h(\text{per}_n g) = \text{per}_n f$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, podemos concluir que

$$\text{per } g = \text{fix } g = \{z_1, z_2\}.$$

Como f preserva a orientação,

$$\begin{aligned} \forall z \in S^1 \setminus \text{fix } f, \text{ ou } 0_f(z) < \overbrace{f(z_1)f(z_2)} \quad \text{ou} \\ 0_f(z) < \overbrace{f(z_2)f(z_1)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ora, $h \in \text{Dif}^0(S^1)$; portanto,

$$\begin{aligned} \left[\overbrace{h(z_1 z_2)} = \overbrace{f(z_1)f(z_2)} \quad \text{e} \quad \overbrace{h(z_2 z_1)} = \overbrace{f(z_2)f(z_1)} \right] \text{ ou} \\ \left[\overbrace{h(z_1 z_2)} = \overbrace{f(z_2)f(z_1)} \quad \text{e} \quad \overbrace{h(z_2 z_1)} = \overbrace{f(z_1)f(z_2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

De (4.42), (4.43) e (4.44) concluímos que

$f \not\sim g.$

**

23.2 PROPOSIÇÃO.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tais que f e g preservam a orientação e $n_f = n_g = n$. Se existe

$h \in \text{Dif}^0(S^1)$ tal que $h(\text{per}_n f) = \text{per}_n g$, então,
 $\forall z \in \text{per}_n f$, $h(o_f(z)) = o_g(h(z))$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $z_0 \in \text{per}_n f$ e $h(z_0) = \bar{z}_0 \in \text{per}_n g$.

Como $o_f(z_0)$ é finita, seja $z_i \in o_f(z_0)$

tal que $\overset{o}{z_0 z_i} \cap o_f(z_0) = \emptyset$.

Analogamente para $o_g(\bar{z}_0)$, sejam $\bar{z}_j \in o_g(\bar{z}_0)$

tal que $\overset{o}{\bar{z}_0 \bar{z}_j} \cap o_g(\bar{z}_0) = \emptyset$ e $\bar{z}_k \in o_g(\bar{z}_0)$ tal que
 $\overset{o}{\bar{z}_k \bar{z}_0} \cap o_g(\bar{z}_0) = \emptyset$.

Se $J_q = f^q(\overset{o}{z_0 z_i})$, então, $\bigcup_{q=0}^{n-1} J_q = S^1$,
 $f(J_q) = J_{q+1}$ e $J_q \cap J_{q+1} = \{f^q(z_i)\}$; portanto,

$$\forall z \in \text{per}_n f \setminus o_f(z_0), \quad \forall q \in \{0, \dots, n-1\} \quad (4.45)$$

$\exists i_z \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $f^{i_z}(z) \in J_q$.

Analogamente para $\bar{z}_0$, se $K_m = g^m(\overset{o}{\bar{z}_0 \bar{z}_j})$,

temos que

$$\begin{aligned} \forall z \in \text{per}_n g \setminus 0_g(\bar{z}_0), \forall m \in \{0, \dots, n-1\}, \\ \exists j_z \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tal que } g^{j_z}(z) \in K_m. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Vamos considerar dois itens.

Item 1. $\text{per}_n f < \infty$.

Neste caso, como $h(\text{per}_n f) = \text{per}_n g$, de (4.45) e (4.46) decorre imediatamente que:

- 1) se h preserva a orientação, então $h(z_i) = \bar{z}_j$;
- 2) se h inverte a orientação, então $h(z_i) = \bar{z}_k$.

Item 2. $\# \text{per}_n f = \omega_0$.

Neste caso, como

$$\#(\text{per}_n f \cap J) = \frac{1}{n} \omega_0 = \omega_0, \forall q \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e}$$

$$h(\text{per}_n f) = \text{per}_n g,$$

decorre que

$$\#(\text{per}_n g \cap K_m) = \frac{1}{n} \omega_0 = \omega_0, \forall m \in \{0, \dots, n-1\};$$

e de (4.45) e (4.46) temos que:

- 1) se h preserva a orientação, $h(z_i) = \bar{z}_j$;
- 2) se h inverte a orientação, $h(z_i) = \bar{z}_k$.

Dos itens 1 e 2 podemos concluir que

$$h(0_f(z_0)) = 0_g(\bar{z}_0).$$

Repetindo o mesmo raciocínio com $z \in \text{per}_n f$,
concluimos que

$$\forall z \in \text{per}_n f, h(O_f(z)) = O_g(h(z)).$$

**

23.3 PROPOSIÇÃO.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tais que
 $\text{per } f \neq \emptyset$ e $\text{per } g \neq \emptyset$.
 $f \sim g$ se e somente se $g \circ f$ preserva a orientação e
 $\exists h \in \text{Dif}^0(S^1)$ tal que $h(\text{per}_n f) = \text{per}_n g$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. Condição necessária.

De 23.1 decorre que

$f \circ g$ preserva a orientação. (4.47)

Seja $h \in \text{Dif}^0(S^1)$ tal que $\forall z \in S^1$,
 $h(O_f(z)) = O_g(h(z))$.

Como

$O_f(z_0) = \{z_0, f(z_0), \dots, f^{n-1}(z_0)\}$ com $f^i(z_0) \neq f^j(z_0)$
para $i \neq j$ se e somente se $z_0 \in \text{per}_n f$
e $h(O_f(z_0)) = O_g(h(z_0))$ com $h \in \text{Dif}^0(S^1)$, temos que
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_0 \in \text{per}_n f \iff h(z_0) \in \text{per}_n g$; então,

$$\text{per}_n f \sim \text{per}_n g \text{ por } h, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.48)$$

De (4.47) e (4.48):

$f \sim g \implies fog$ preserva a orientação e

$$\text{per}_n f \sim \text{per}_n g, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Item 2. Condição suficiente.

Vamos separar a demonstração em duas partes.

a) f e g preservam a orientação.

b) f e g invertem a orientação.

a) De 22.3 decorre que

$$\exists n_f \in \mathbb{N}^* \mid \text{per } f = \text{per}_{n_f} f,$$

$$\exists n_g \in \mathbb{N}^* \mid \text{per } g = \text{per}_{n_g} g.$$

Como, por hipótese, $\text{per}_n f \sim \text{per}_n g$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, devemos ter $n_f = n_g = n \in \mathbb{N}^*$, e podemos escrever:

$$\text{fix } f^n = \text{per}_n f \sim \text{per}_n g = \text{fix } g^n$$

$$\text{e } h(\text{fix } f^n) = \text{fix } g^n.$$

Seja $z_0 \in \text{fix } f^n$ e consideremos $\tilde{f} \in \text{Dif}^0(I)$ e $\tilde{g} \in \text{Dif}^0(I)$ os levantamentos de f^n e g^n por z_0 e $h(z_0)$, respectivamente, tais que $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 0$.

De 21.1 podemos escrever:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} j_f^{-1} \circ f^n \circ j_f(x), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

$$e \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} j_g^{-1} \circ g^n \circ j_g(x), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{aligned} z_1 \in \text{fix } f^n \setminus \{z_0\} &\iff f^n(z_1) = z_1 \iff (j_f \circ \tilde{f} \circ j_f^{-1})(z_1) = \\ &= z_1 \iff \tilde{f}(j_f^{-1}(z_1)) = j_f^{-1}(z_1) \iff j_f^{-1}(z_1) \in \text{fix } \tilde{f} \setminus \{0, 1\} \\ &e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 \in \text{fix } g^n \setminus \{h(z_0)\} &\iff g^n(z_2) = z_2 \iff (j_g \circ \tilde{g} \circ j_g^{-1})(z_2) = \\ &= z_2 \iff \tilde{g}(j_g^{-1}(z_2)) = j_g^{-1}(z_2) \iff j_g^{-1}(z_2) \in \text{fix } \tilde{g} \setminus \{0, 1\}; \end{aligned}$$

além disso, $\{0, 1\} \subset \text{fix } \tilde{f}$ e $\{0, 1\} \subset \text{fix } \tilde{g}$; portanto,

$$j_f(\text{fix } \tilde{f}) = \text{fix } f^n \quad e$$

$$j_g(\text{fix } \tilde{g}) = \text{fix } g^n.$$

Consideremos o levantamento $\tilde{h}$ de h definido por

$$\begin{cases} j_g \circ \tilde{h} = h \circ j_f; \\ \tilde{h}(0) \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

De 21.4 podemos concluir que $\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I)$; e de 21.1 escrevemos

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} j_g^{-1} \circ h \circ j_f(x), & 0 \leq x < 1; \\ 1 - \tilde{h}(0), & x = 1. \end{cases}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\text{fix } \tilde{f}) &= (j_g^{-1} \circ h \circ j_f)(\text{fix } \tilde{f} \setminus \{0,1\}) \cup \{0,1\} = \\ &= (j_g^{-1} \circ h)(\text{fix } f^n \setminus \{z_0\}) \cup \{0,1\} = \\ &= j_g^{-1}(\text{fix } g^n \setminus \{h(z_0)\}) \cup \{0,1\} = \text{fix } \tilde{g} \setminus \{0,1\} \cup \{0,1\} = \\ &= \text{fix } \tilde{g}; \text{ portanto,} \end{aligned}$$

$$\text{fix } \tilde{f} \sim \text{fix } \tilde{g},$$

com $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ crescentes (pois f e g preservam a orientação).

De 16.1 resulta que

$$\tilde{f} \approx \tilde{g} \text{ por } \bar{h} \in \text{Dif}^0(I),$$

com $\bar{h}$ satisfazendo

$$\bar{h}(x) = \tilde{h}(x), \forall x \in \text{fix } \tilde{f}.$$

Sejam

$$z_i = f^i(z_0), \quad 0 \leq i \leq n-1;$$

$$\bar{z}_j = g^j(h(z_0)), \quad 0 \leq j \leq n-1;$$

$$\{x_i\} = j_f^{-1}(z_i) \cap [0,1[;$$

$$\{y_j\} = j_g^{-1}(\bar{z}_j) \cap [0,1[;$$

$$x_p = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{x_i : x_i > 0\};$$

$$y_q = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{y_j : y_j > 0\};$$

$$y_r = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{y_j : y_j < 1\}.$$

De 23.2 decorre que existe uma aplicação $\psi: \{i : 0 \leq i \leq n\} \rightarrow \{j : 0 \leq j \leq n\}$ biunívoca e de mesma monotonicidade que $\bar{h}$.

Vamos provar que

$$\begin{aligned} f^n &\approx g^n, \text{ por } h_1 \in \text{Dif}^0(S^1) \text{ tal que } h_1 \circ j_f = j_g \circ \bar{h}. \\ \forall z \in S^1, \exists! x \in [0,1[\text{ tal que } j_f(x) = z; \text{ então,} \\ h_1 \circ f^n(z) &= h_1 \circ f^n(j_f(x)) = h_1 \circ \{(f^n)^m(j_f(x)) : m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= h_1 \circ \{j_f \circ \tilde{f}^m(x) : m \in \mathbb{Z}\} = (h_1 \circ j_f) \circ \{\tilde{f}^m(x) : m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= j_g \circ \bar{h} \circ \{f^m(x) : m \in \mathbb{Z}\} = j_g \circ \{g^m(\bar{h}(x)) : m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{(j_g \circ \bar{g}^m)(\bar{h}(x)) : m \in \mathbb{Z}\} = \{(g^n)^m \circ j_g(\bar{h}(x)) : m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{(g^n)^m(h_1 \circ j_f(x)) : m \in \mathbb{Z}\} = \{(g^n)^m(h_1(z)) : m \in \mathbb{Z}\} = \end{aligned}$$

$= 0_{g^n}(h_1(z))$ e podemos concluir que

$$f^n \approx g^n \text{ por } h_1 \in \text{Dif}^0(S^1).$$

O que não quer dizer que $f \approx g$ por h_1 , pois $\forall z \in S^1 \quad \exists q, r \in \{0, \dots, n\}$ tais que

$$0_{f^n}(z) \subset \overrightarrow{z_q z_r} \text{ e } \overrightarrow{z_q z_r} \cap \{z_i : 0 \leq i \leq n\} = \emptyset \text{ e}$$

$$\forall q, r \in \{0, \dots, n\} \text{ tais que } \overrightarrow{z_q z_r} \cap \{z_i : 0 \leq i \leq n\} = \emptyset, 0_f(z) \cap \overrightarrow{z_q z_r} \neq \emptyset.$$

Vamos, pois, construir $k \in \text{Dif}^0(S^1)$ tal que $f \approx g$ por h . Pomos:

$$k(z_i) = \bar{z}_{\psi(i)}, \forall i \in \{0, \dots, n\},$$

$$k(z) = h_1(z), \forall z \in \overrightarrow{z_0 z_i} \text{ (onde } \overrightarrow{z_0 z_i} \cap \{z_j : 0 \leq j \leq n\} = \emptyset).$$

Seja, agora, $z \in S^1$; então,

$$\exists q, r \in \{0, \dots, n\} \text{ tais que } z \in \overrightarrow{z_q z_r} \text{ e}$$

$$\overrightarrow{z_q z_r} \cap \{z_i : 0 \leq i \leq n\} = \emptyset.$$

$$\text{Além disso, } \overrightarrow{z_q z_r} = f^q(\overrightarrow{z_0 z_i}), \forall q \in \{0, \dots, n\};$$

portanto,

$$\exists! z' \in \widehat{z_0 z_i} \text{ tal que } z = f^q(z'). \quad (4.49)$$

Por outro lado,

$$k(z_q) = \bar{z}_{\psi(q)}, \quad k(z_r) = \bar{z}_{\psi(r)}, \quad \overset{0}{\bar{z}_{\psi(q)} \bar{z}_{\psi(r)}} \cap \{\bar{z}_j : 0 \leq j \leq n\} = \emptyset; \text{ donde,}$$

$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowright}{\bar{z}_{\psi(q)} \bar{z}_{\psi(r)}} &= g^{\psi(q)}(\overset{\curvearrowright}{h(z_0) \bar{z}_j}); \text{ e} \\ \forall \bar{z}' \in \overset{\curvearrowright}{h(z_0) \bar{z}_j}, \exists! \bar{z} \in \overset{\curvearrowright}{\bar{z}_{\psi(q)} \bar{z}_{\psi(r)}} \text{ tal que} \\ \bar{z} &= g^{\psi(q)}(\bar{z}'). \end{aligned} \quad (4.50)$$

De (4.49) e (4.50), basta definirmos:

$$\forall z \in S^1, \quad k(z) = k(f^q(z')) = g^{\psi(q)}(k(z')) = g^{\psi(q)}(\bar{z}') = \bar{z}, \quad q \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Precisamos provar que:

- a1) $\forall z \in S^1, \quad k(0_f(z)) = 0_g(k(z));$
- a2) $k \in \text{Dif}^0(S^1).$

a1) Basta mostrar que é verdade em $\widehat{z_0 z_i}$, pois toda órbita de f tem representante em $\widehat{z_0 z_i}$.

Seja, então, $z \in \widehat{z_0 z_i}$.

$$\begin{aligned} k(0_f(z)) &= k\{f^m(z) : m \in \mathbb{Z}\} = k\{f^{pn+q}(z) : p \in \mathbb{Z} \text{ e} \\ 0 \leq q \leq n-1\} &= k\{(f^q)(f^n)^p(z) : p \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq q \leq n-1\} = \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{q=0}^{n-1} (k \circ f^q)(0_{f^n}(z)).$$

Ora, $(f^n)^p(z) \in \widehat{z_0 z_i}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$; portanto,

$$(k \circ f^q)(f^n)^p(z) = g^{\psi(q)}(k \circ (f^n)^p(z)), \forall p \in \mathbb{Z},$$

$$(k \circ f^q)(0_{f^n}(z)) = (g^{\psi(q)} \circ k)(0_{f^n}(z)) = g^{\psi(q)}(0_{g^n(k(z))})$$

$$\begin{aligned} \text{e } k(0_f(z)) &= \bigcup_{q=0}^{n-1} g^{\psi(q)}(0_{g^n(k(z))}) = \\ &= \bigcup_{\psi(q)=0}^{n-1} g^{\psi(q)}(0_{g^n(k(z))}) = \bigcup_{\psi(q)=0}^{n-1} 0_{g^{n+\psi(q)}(k(z))} = \\ &= 0_g(k(z)). \end{aligned}$$

$$0_g(k(z)).$$

Finalmente, podemos escrever:

$$\forall z \in S^1, k(0_f(z)) = 0_g(k(z)). \quad (4.51)$$

$$a2) \quad S^1 = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n}} \widehat{z_i z_j}.$$

$$\text{Ora, } \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad k|_{\widehat{z_i z_j}} =$$

$$= g^{\psi(i)}|_{\widehat{h(z_0) z_j}}; \text{ portanto,}$$

$$k|_{\widehat{z_i z_j}} \text{ é contínua, se } \widehat{z_i z_j} \cap 0_f(z_0) = \emptyset; \quad (4.52)$$

falta verificar em cada z_i , $0 \leq i \leq n-1$; mas, pela definição de g , temos que

$$g(z_i) = g^{\psi(i)}(h(z_0)), \text{ se } z_i \in \widehat{z_i z_j}, \text{ com } \widehat{z_i z_j} \cap 0_f(z_0) = \emptyset$$

$$\text{e } g(z_i) = g^{\psi(i-k)}(h(z_0)), \text{ se } z_i \in \widehat{z_r z_i}, \text{ com}$$

$$\overset{\circ}{z_r} z_i \cap 0_f(z_0) = \emptyset \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{z_0} z_k \cap 0_f(z_0) = \emptyset;$$

ora, nessas condições, $\psi(i) = \psi(i-k)$ e

k é contínua em z_i , $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$,
que junto com (4.52) nos dá que

$$k \text{ é contínua em } S^1. \quad (4.53)$$

É claro que

$$k \text{ é bijetora.} \quad (4.54)$$

Como S^1 é compacta e valem (4.53) e (4.54), podemos concluir que

$$k \in \text{Dif}^0(S^1). \quad (4.55)$$

Finalmente, de (4.51) e (4.55),

$f \approx g.$

b) Neste caso, f e g invertem a orientação. De 22.4 temos que

$$\text{fix } f = \{z_1, z_2\}, \quad z_1 \neq z_2,$$

$\text{per } f = \text{fix } f \cup \text{per}_2 f$, com $\text{per}_2 f$ eventualmente vazio,

$$\text{fix } g = \{\bar{z}_1, \bar{z}_2\}$$

e $\text{per } g = \text{fix } g \cup \text{per}_2 g$, com $\text{per}_2 g$ eventualmente vazio.

Por raciocínio análogo ao empregado na parte a) com f^n , demonstra-se que

$f^2 \approx g^2$ por $\bar{h} \in \text{Dif}^0(S^1)$ tal que $\bar{h}(z_i) = \bar{z}_i$, $i = 1, 2$.

Além disso,

$$\forall z \in \text{per}_2 f, \bar{h}(O_{f^2}(z)) = O_{g^2}(\bar{h}(z)).$$

Vamos construir uma função $k \in \text{Dif}^0(S^1)$ que faça f e g conjugarem.

Como f e g invertem a orientação, temos que

$$f(\widehat{z_1 z_2}) = \widehat{z_2 z_1} \quad \text{e} \quad g(\widehat{\bar{z}_1 \bar{z}_2}) = \widehat{\bar{z}_2 \bar{z}_1}.$$

$$\text{E como } \bar{h}(z_i) = \bar{z}_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\text{ou } \bar{h}(\widehat{z_1 z_2}) = \widehat{\bar{z}_1 \bar{z}_2} \quad (4.56)$$

$$\text{ou } \bar{h}(\widehat{z_1 z_2}) = \widehat{\bar{z}_2 \bar{z}_1}. \quad (4.57)$$

Suponhamos que vale (4.56) (o caso (4.57) é análogo).

Como $f \in \text{Dif}^0(S^1)$,

$$\forall z \in \widehat{\bar{z}_2 \bar{z}_1}, \exists! \bar{z} \in \widehat{z_1 z_2} \mid z = f(\bar{z}).$$

E construíamos $k: S^1 \rightarrow S^1$ da seguinte forma:

$$k|_{\widehat{z_1 z_2}} = \bar{h}|_{\widehat{z_1 z_2}}$$

$$\text{e } \forall z \in \widehat{z_2 z_1}, k(z) = k(f(\bar{z})) = g(k(\bar{z})).$$

Provemos que:

$$b1) \quad \forall z \in S^1, k(0_f(z)) = 0_g(k(z));$$

$$b2) \quad k \in \text{Dif}^0(S^1).$$

b1) Como toda órbita de f tem representante em $\widehat{z_1 z_2}$, basta considerarmos $z \in \widehat{z_1 z_2}$.

$$\begin{aligned} \forall z \in \widehat{z_1 z_2}, k(0_f(z)) &= k(0_{f^2}(z) \cup 0_{f^2}(f(z))) = \\ &= \bar{h}(0_{f^2}(z)) \cup k(0_{f^2}(f(z))) = \\ &= 0_{g^2}(\bar{h}(z)) \cup k\{f(f^{2n}(z)) : n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Mas, se $z \in \widehat{z_1 z_2}$, então $f^{2n}(z) \in \widehat{z_1 z_2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$; daí,

$$\begin{aligned} k\{f(f^{2n}(z)) : n \in \mathbb{Z}\} &= \{g(k(f^{2n}(z))) : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= g \circ k(0_{f^2}(z)) = g(0_{g^2}(k(z))) = 0_{g^2}(g \circ k(z)). \end{aligned}$$

Então,

$$\forall z \in S^1, k(0_f(z)) = 0_{g^2}(k(z)) \cup 0_{g^2}(g \circ k(z)) =$$

$$= 0_g(k(z)).$$

(4.58)

b2) Ora,

$$k \Big|_{\overbrace{z_1 z_2}^o} = \bar{h} \Big|_{\overbrace{z_1 z_2}^o} ;$$

$$k \Big|_{\overbrace{z_2 z_1}^o} = (g \circ \bar{h}) \Big|_{\overbrace{z_1 z_2}^o} ;$$

portanto,

$$\begin{aligned} k \Big|_{\overbrace{z_1 z_2}^o} &\in \text{Dif}^0(\overbrace{z_1 z_2}^o) \\ \text{e } k \Big|_{\overbrace{z_2 z_1}^o} &\in \text{Dif}^0(\overbrace{z_2 z_1}^o). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Além disso,

$$i = 1, 2, \lim_{z \rightarrow z_i} k(z) = k(z_i) = \bar{h}(z_i) = \bar{z}_i, \quad (4.60)$$

$$k(\overbrace{z_1 z_2}^o) = \overbrace{z_1 z_2}^o, \quad (4.61)$$

$$k(\overbrace{z_2 z_1}^o) = \overbrace{z_2 z_1}^o.$$

De (4.59) e (4.61),

$$k: S^1 \longrightarrow S^1 \text{ é bijetora.} \quad (4.62)$$

De (4.59) e (4.60),

$$k \text{ é contínua em } S^1. \quad (4.63)$$

Como S^1 é compacta e valem (4.62) e (4.63), podemos concluir que

$$k \in \text{Dif}^0(S^1). \quad (4.64)$$

Finalmente, de (4.58) e (4.64) temos que

$$f \approx g.$$

**

Com 23.3 estão classificados os difeomorfismos de S^1 que invertem a orientação e os que preservam a orientação e têm pontos periódicos.

Vamos estudar o caso em que $R(f)$ é irracional, isto é, $\text{per } f = \emptyset$.

23.4 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tal que $R(f) = \frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\omega_f(z) = S^1$; então, f conjuga com a rotação de ângulo α .

DEMONSTRAÇÃO.

Seja g a rotação de ângulo α ; o levantamento $\tilde{g}$ de g por $1 \in S^1$ e tal que $\tilde{g}(0) \in [0, 1[$ é dado por

$$\tilde{g}(x) = x + \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, seja $\tilde{f}$ o levantamento de f por $1 \in S^1$ e tal que $\tilde{f}(0) \in [0, 1[$.

Como $O_f(1)$ e $O_g(1)$ são densas em S^1 , temos que

$$\{x_n = \tilde{g}^n(0) - [\tilde{g}^n(0)] : n \in \mathbb{Z}\} = I. \quad (4.65)$$

$$\text{e } \{y_n = \tilde{f}^n(0) - [\tilde{f}^n(0)] : n \in \mathbb{Z}\} = I. \quad (4.66)$$

Provemos que $x_m < x_n \iff y_m < y_n$,
 $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$.

Para tanto, olhemos para os campos X e Y em $\mathbb{R}^2$, suspensões de g e f , respectivamente, e escolhamos as curvas integrais $x(t,0)$ e $y(t,0)$; então,

$$x(t,0) = \frac{\alpha}{2\pi} t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da nossa definição de número de rotação (ver 22.1), como $R(f) = R(g)$, concluímos que

$$\begin{aligned} B_g &= \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 : x(m,0) > n\} = \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 : y(m,0) > n\} = B_f. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Ora,

$$x_m = \tilde{g}^m(0) - [\tilde{g}^m(0)] = x(m,0) - [x(m,0)]$$

$$\text{e } y_m = \tilde{f}^m(0) - [\tilde{f}^m(0)] = y(m,0) - [y(m,0)],$$

onde $[x(m,0)] = \max \{n \in \mathbb{Z} : (m,n) \in B_g\}$ e $[y(m,0)] = \max \{n \in \mathbb{Z} : (m,n) \in B_f\}$; portanto, de (4.67) decorre que

$$[x(m,0)] = [y(m,0)].$$

Então,

$$\begin{aligned} x_m < x_n &\iff x(m,0) - [x(m,0)] < x(n,0) - \\ &- [x(n,0)] \iff x(m,0) - x(n,0) < [x(m,0)] - \\ &- [x(n,0)] \iff x(m-n,0) < [y(m,0)] - \\ &- [y(n,0)] \iff y(m-n,0) < [y(m,0)] - \\ &- [y(n,0)] \iff y(m,0) - y(n,0) < [y(m,0)] - \\ &- [y(n,0)] \iff y_m < y_n; \text{ isto é,} \end{aligned}$$

$$x_n < x_m \iff y_n < y_m, \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (4.68)$$

De (4.68), temos que

$$h_1: 0_{\tilde{f}}(0) \longrightarrow 0_{\tilde{g}}(0) \text{ tal que } h_1(y_n) = x_n$$

é estritamente crescente; e de (4.65) e (4.66) decorre que

$\exists! \tilde{h}: I \longrightarrow I$, contínua e crescente, tal que

$$\tilde{h}|_{0_{\tilde{f}}(0)} = h_1,$$

que junto com o fato de I ser compacto acarreta:

$$\tilde{h} \in \text{Dif}^0(I) \text{ e } \tilde{h}(0) = 0. \quad (4.69)$$

E por raciocínio análogo ao feito com $0_{\tilde{f}}(0)$, temos que

$$\tilde{f}^n(x) < \tilde{f}^m(x) \iff \tilde{g}^n(\tilde{h}(x)) < \tilde{g}^m(\tilde{h}(x)),$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall x \in I$; portanto,

$$\forall x \in I, \tilde{h}(0_{\tilde{f}}(x)) = 0_{\tilde{g}}(\tilde{h}(x)). \quad (4.70)$$

De (4.69) e (4.70),

$$\tilde{f} \approx \tilde{g}.$$

Seja, agora, a função $h \in \text{Dif}^0(S^1)$ tal que $jo\tilde{h} = hoj$, onde $j(x) = e^{2\pi i x}$; então,

$$\begin{aligned} \forall z_0 \in S^1, h(0_f(z_0)) &= h(\{f^n(e^{2\pi i x_0}) : n \in \mathbb{Z}\}) = \\ &= h(\{f^n(j(x_0)) : n \in \mathbb{Z}\}) = h(\{(jo\tilde{f}^n)(x_0) : n \in \mathbb{Z}\}) = \\ &= (jo\tilde{h})(0_{\tilde{f}}(x_0)) = j(0_{\tilde{g}}(\tilde{h}(x_0))) = \{(jo\tilde{g}^n)(\tilde{h}(x_0)) : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{(g^n o j)(\tilde{h}(x_0)) : n \in \mathbb{Z}\} = \{g^n(ho j)(x_0) : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{g^n(h(z_0)) : n \in \mathbb{Z}\}; \text{ donde,} \end{aligned}$$

$$\forall z_0 \in S^1, h(0_f(z_0)) = 0_g(h(z_0)). \quad (4.71)$$

Como $h \in \text{Dif}^0(S^1)$ e vale (4.71), concluímos que

$f \approx g.$

23.5 PROPOSIÇÃO.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, as rotações de ângulo α e β , respectivamente, tais que $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\frac{\beta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; então, $f \approx g$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $j: [0,1[\rightarrow S^1$ a função definida por $j(x) = e^{2\pi i x}$; então,

$\forall z_0 \in S^1, \exists! x_0 \in [0,1[$ tal que $j(x_0) = z_0$.

(Ver 21.1.)

Consideremos a função $h \in \text{Dif}^0(S^1)$, definida por $h(z) = z^{\frac{\beta}{\alpha}}$ e mostremos que $h(O_f(z_0)) = O_g(h(z_0))$.

$$h(O_f(z_0)) = h(\{f^n(z_0) : n \in \mathbb{Z}\}) = h(\{f^n(e^{2\pi i x_0}) : n \in \mathbb{Z}\}) =$$

$$= h\left(\left\{e^{2\pi i x_0 + \frac{n\alpha}{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\right\}\right) = \left\{e^{2\pi i x_0 \frac{\beta}{\alpha} + \frac{n\beta}{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{g^n\left(e^{2\pi i x_0 \frac{\beta}{\alpha}}\right) : n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{g^n(z_0^{\frac{\beta}{\alpha}}) : n \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= O_g(h(z_0)); \text{ isto é,}$$

$$\forall z_0 \in S^1, h(O_f(z_0)) = O_g(h(z_0));$$

como $h \in \text{Dif}^0(S^1)$, temos que

$f \approx g.$

23.6 COROLÁRIO.

Sejam $f, g \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, tais que $\omega_f(z) = \omega_g(z) = S^1$; então, $f \approx g$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $R(f) = \frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $R(g) = \frac{\beta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; chamemos de r_α e r_β as rotações de ângulo α e β , respectivamente.

De 23.4 decorre que

$$f \approx r_\alpha \text{ e } g \approx r_\beta.$$

De 23.5,

$$r_\alpha \approx r_\beta.$$

Como $\approx$ é uma relação de equivalência, concluímos que

$f \approx g.$

**

Com 23.6 ficam classificados os difeomorfismos C^r de S^1 que são ergódicos (isto é, o conjunto dos pontos não errantes é todo o S^1). Resta, portanto, verificar o que acontece com os difeomorfismos C^r de S^1 , sem pontos periódicos, cujas órbitas tendem para um conjunto de Cantor, e que são chamados não ergódicos.

23.7 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq 1$, não ergódico; $\forall z_0 \in S^1 \setminus \Omega(f)$, a órbita de z_0 por f intercepta no máximo uma vez cada componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Observemos, em primeiro lugar, que do fato de $\Omega(f)$ ser invariante por f , tem-se que

$$\forall z \in \Omega(f), O_f(z) \subset \Omega(f).$$

Sejam, então, $]a_n, b_n[$ componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$ ($a_n, b_n \in \Omega(f)$) e $z_0 \in]a_n, b_n[$ tais que $f^{m_0}(z_0) \in]a_n, b_n[$, para algum $m_0 \in \mathbb{Z}^*$.

Como $f^{m_0}(]a_n, b_n[) =]f^{m_0}(a_n), f^{m_0}(b_n)[$, $f^{m_0} \in \text{Dif}^r(S^1)$ e $f^{m_0}(\Omega(f)) = \Omega(f)$, temos que

$$]f^{m_0}(a_n), f^{m_0}(b_n)[=]a_n, b_n[,$$

donde ou $f^{m_0}(a_n) = a_n$ ou $f^{m_0}(a_n) = b_n$, com $m_0 \in \mathbb{Z}^*$.

Em qualquer dos casos, teríamos que $a_n \in \text{per } f = \emptyset$, o que é absurdo; então,

$$\forall z_0 \in]a_n, b_n[, O_f(z_0) \cap]a_n, b_n[= \{z_0\}.$$

**

E coloca-se a pergunta: $O_f(z_0)$ intercepta toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$? Vamos mostrar

que não necessariamente.

Antes de enunciar a proposição, observamos que: se existe $z_0 \in S^1$ tal que $O_f(z_0)$ intercepta toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$, então toda órbita de $S^1 \setminus \Omega(f)$ também o faz (ver Item 2 de 23.8).

23.8 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq 1$, não ergódico; se existe $z_0 \in S^1$ tal que $O_f(z_0)$ intercepta toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$, então, $\forall z \in S^1$, $O_{f^2}(z)$ não intercepta toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Item 1. $\Omega(f) = \Omega(f^2)$.

a) $\Omega(f^2) \subset \Omega(f)$.

Como $\Omega(f) = \omega_f(z)$, $\forall z \in S^1$ (ver 22.9; observamos que $\text{per } f^2 = \emptyset$),

$\forall z_0 \in \Omega(f^2)$, $\exists (n_z)_{n_z \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n_z \rightarrow +\infty} (f^2)^{n_z}(z_0) = z_0$;

então, $\lim_{n_z \rightarrow +\infty} f^{2n_z}(z_0) = z_0$; isto é, $z_0 \in \omega_f(z) = \Omega(f)$; ou

$$\Omega(f^2) \subset \Omega(f). \quad (4.72)$$

b) $\Omega(f) \subset \Omega(f^2)$.

Como $\Omega(f) = \omega_f(z)$ (ver 22.9),

$\forall z_0 \in \Omega(f), \exists (n_z)_{n_z \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n_z \rightarrow +\infty} f^{n_z}(z_0) = z_0$.

Se existir subsequência par de n_z , é claro que $z_0 \in \Omega(f^2)$; suponhamos, então, que toda subsequência é ímpar e consideremos uma delas (n_z^0) ; então,

$$\lim_{n_z^0 \rightarrow +\infty} f^{n_z^0}(z_0) = z_0.$$

$$\text{Mas, } \lim_{n_z^0 \rightarrow +\infty} f^{n_z^0}(z_0) = \lim_{n_z^0 \rightarrow +\infty} f^{n_z^0-1}(f(z_0)) =$$

$= z_0$; donde,

$$z_0 \in \omega_{f^2}(f(z_0)) = \Omega(f^2), \text{ pois}$$

ω_{f^2} independe de z ; isto é,

$$\Omega(f) \subset \Omega(f^2). \quad (4.73)$$

De (4.72) e (4.73) decorre que

$$\boxed{\Omega(f) = \Omega(f^2)}.$$

Item 2.

Sejam $]a_0, b_0[$ componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$ e $z_0 \in]a_0, b_0[$ tais que $0_f(z_0)$ intercepta toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$; então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(]a_0, b_0[) = S^1 \setminus \Omega(f).$$

$$1^\circ) \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(]a_0, b_0[) \subset S^1 \setminus \Omega(f). \quad (4.74)$$

Vale, porque $f^n(\Omega(f)) = \Omega(f)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$
e $f^n \in \text{Dif}^r(S^1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

29) Seja $z \in S^1 \setminus \Omega(f)$; então, z pertence a uma componente conexa $]a_n, b_n[$ de $S^1 \setminus \Omega(f)$; como

$\exists: n_0 \in \mathbb{Z} \mid 0_f(z_0) \cap]a_n, b_n[= \{f^{n_0}(z_0)\}$, $f^{n_0} \in \text{Dif}^r(S^1)$,

$f^{n_0}(\Omega(f)) = \Omega(f)$ e $[a_0, b_0] \cap \Omega(f) = \{a_0, b_0\}$, temos que

$]a_n, b_n[= f^{n_0}([a_0, b_0]) =]f^{n_0}(a_0), f^{n_0}(b_0)[$; isto é,

$$S^1 \setminus \Omega(f) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([a_0, b_0]). \quad (4.75)$$

De (4.74) e (4.75) decorre que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([a_0, b_0]) = S^1 \setminus \Omega(f), \quad (4.76)$$

reunião esta disjunta.

Item 3. $0_{f^2}(z_0)$ não encontra toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$.

Notamos que

$0_f(z_0) = 0_{f^2}(z_0) \cup 0_{f^2}(f(z_0))$, com $0_{f^2}(z_0) \cap 0_{f^2}(f(z_0)) = \emptyset$ (pois per $f = \emptyset$), $0_{f^2}(z_0) \neq \emptyset$ e $0_{f^2}(f(z_0)) \neq \emptyset$; portanto,

se $z_0 \in]a_0, b_0[$, componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$, então, $O_{f^2}(z_0) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{2n}(]a_0, b_0[)$ (4.77)

$$\text{e } O_{f^2}(f(z_0)) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{2n+1}(]a_0, b_0[).$$

De (4.76), (4.77) e do fato de $O_f(z_0)$ interceptar uma única vez cada componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$, concluímos que $O_{f^2}(z_0)$ não encontra toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$ e ficam determinadas, sobre o conjunto dessas componentes, duas classes de equivalência pela relação "estar na mesma órbita".

23.9 COROLÁRIO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq 1$, não ergódico, tal que $O_f(z_0)$ encontra toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$; então, $\forall n \in \mathbb{Z}^{++}$, f^n determina, sobre o conjunto dessas componentes, n classes de equivalência segundo a relação "estar na mesma órbita".

DEMONSTRAÇÃO.

O teorema vale para $n = 1$ e $n = 2$. Se $n > 3$, lembrando que

$$O_f(z_0) = \bigcup_{i=0}^{n-1} O_{f^n}(f^i(z_0)),$$

reunião disjunta (pois $\text{per } f = \emptyset$), com raciocínio análogo ao de 23.8, mostra-se que

$$S^1 \setminus \Omega(f) = \bigcup_{i=0}^n O_f(f^i([a_0, b_0])),$$

onde $[a_0, b_0]$ é a componente conexa à qual z_0 pertence e

$$O_f([a, b]) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^m([a, b]).$$

**

23.10 PROPOSIÇÃO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq 1$, não ergódico, tal que: $\forall z_0 \in S^1 \setminus \Omega(f)$, $O_f(z_0)$ intercepta toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$; então, $f \not\sim f^2$.

DEMONSTRAÇÃO.

$$\Omega(f) = \Omega(f^2) \quad (\text{ver item 1 de 23.8}).$$

Suponhamos que $\exists h \in \text{Dif}^0(S^1)$ tal que $\forall z \in S^1$, $h(O_f(z)) = O_{f^2}(h(z))$.

Ora, $h(\Omega(f)) = \Omega(f)$, pois $\forall z \in \Omega(f)$, $O_f(z) \subset \Omega(f)$; portanto, h deve levar componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$ em componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$; mas $\forall z_0 \in S^1 \setminus \Omega(f)$, $O_f(z_0)$ encontra toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$, enquanto $O_{f^2}(h(z_0))$ não; portanto, $h(O_f(z_0)) \neq O_{f^2}(h(z_0))$; isto é,

$$f \not\sim f^2.$$

**

23.11 COROLÁRIO.

Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq 1$, não ergódico, tal que toda órbita de f encontra toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$; então, $f \not\sim f^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

DEMONSTRAÇÃO.

Decorre de 23.9, com raciocínio análogo ao de 23.10.

**

Vamos construir $f \in \text{Dif}^0(S^1)$, não ergódico, tal que toda órbita de f encontra toda componente conexa de $S^1 \setminus \Omega(f)$ (ver exemplo de Denjoy em [1], [7], [9]).

24 Exemplo de $f \in \text{Dif}^0(S^1)$, não ergódico.

Sejam $x_0 \in \mathbb{I} \cap \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$; então,
 $A = \{x_n = x_0 + n\alpha - [x_0 + n\alpha] : n \in \mathbb{Z}\}$ é tal que $\bar{A} = \mathbb{I}$.

Consideremos a série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ tal que
 $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = a < \infty$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{5}{6}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

(por exemplo, $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{6}{7} a_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^{*+}$ e $a_n = \frac{1}{a_{-n}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^{*-}$) e construíamos o intervalo $[0, 1+a]$ da seguinte forma:

enxertamos em x_0 , à direita, o intervalo de comprimento a_0 ; a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ fica assim substituída pela sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$z_n = x_n, \forall x_n \leq x_0;$$

$$z_n = x_n + a_0, \forall x_n > x_0;$$

repete-se o processo em cada x_n ; então

$$x \longmapsto x + \sum_{x_p < x} a_p,$$

isto é, cada x_n é substituído por

$$\left[x_n + \sum_{x_p < x_n} a_p, x_n + \sum_{x_p < x_n} a_p + a_n \right]$$

e cada x de $[0, 1] \setminus \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ por $y = x + \sum_{x_m < x} a_m$ de $[0, 1+a]$.

Sejam $y_n = x_n + \sum_{x_p < x_n} a_p$ e $I_n =]y_n, y_n + a_n[$,

$\forall n \in \mathbb{Z}$; para provar que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n} = [0, 1+a]$, consideremos a função $h: I \rightarrow [0, 1+a]$ tal que $h(x) = x + \sum_{x_p < x} a_p$;

1º) h é estritamente crescente.

$$x < y \implies \{x_p : x_p < x\} \subsetneq \{x_p : x_p < y\},$$

pois $]x, y[\cap A \neq \emptyset$; donde $h(x) < h(y)$.

2º) h não é sobrejetora.

Verdade, pois $]y_n, y_n + a_n]$ não está na imagem de h , $\forall n \in \mathbb{Z}$; vale que

$$h(I) = [0, 1+a] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]y_n, y_n + a_n].$$

3º) $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n} = [0, 1+a]$.

Suponhamos que $\exists y \in \overbrace{[0, 1+a] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n}^{\circ}$, isto é, existem $b, c \in [0, 1+a]$ tais que

$$y \in [b, c] \text{ e } [b, c] \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \right) = \emptyset.$$

Ora, $[b, c] = h([b', c'])$, com $h(b') = b$, $h(c') = c$ e $[b', c'] \cap A = \emptyset$, o que é absurdo, pois $\bar{A} = I$; portanto,

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n} = [0, 1+a]. \quad (4.78)$$

$$4^\circ) \quad B = [0, 1+a] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \text{ é fechado.} \quad (4.79)$$

Vale, pois $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ é aberto.

$$5^\circ) \quad B' = B.$$

Suponhamos que $y \in B$ é isolado; isto é, $\exists \epsilon > 0$ tal que $[y-\epsilon, y+\epsilon] \cap B = \{y\}$. Isto quer dizer que existem $m, n \in \mathbb{Z}$, distintos, tais que

$$y = y_n = y_m + a_m,$$

o que é absurdo, pois $x_n \neq x_m$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$; então,

$$B' = B. \quad (4.80)$$

De (4.78), (4.79) e (4.80),

$$B \text{ é um conjunto de Cantor de } [0, 1+a]. \quad (4.81)$$

Vamos, agora, construir

$$g: [0, 1+a] \rightarrow [0, 1+a]$$

da seguinte forma:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\xi_n: I_n \rightarrow I_{n+1}$ é tal que

$$\xi'_n(y) = k_n(y - y_n)(y - y_n - a_n) \quad (k_n \text{ constante});$$

$$\xi_n(y_n) = y_{n+1} - y_n = \Delta y_n;$$

$$\xi_n(y_n + a_n) = (y_{n+1} + a_{n+1}) - (y_n + a_n).$$

Se $a_{n+1} - a_n = \Delta a_n$, com alguns cálculos conclui-se que

$$\begin{aligned} \xi_n(y) = & \left(\frac{-6\Delta a_n}{a_n^3} \right) \frac{y^3}{3} + \frac{6\Delta a_n}{a_n^3} \left(y_n + \frac{a_n}{2} \right) y^2 - \\ & - \frac{6\Delta a_n}{a_n^3} (y_n^2 + y_n a_n) y + \Delta y_n + \frac{2\Delta a_n}{a_n^3} y_n^3 + \frac{3\Delta a_n}{a_n^2} y_n^2. \end{aligned}$$

b) A partir de ξ_n , seja $\theta_n: I_n \longrightarrow I_{n+1}$ a função definida por $\theta_n(y) = \xi_n(y) + y$.

c) $\left[\theta'_n(y) > 0, \forall y \in I_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{5}{6} \right], \forall n \in \mathbb{Z}$, donde a restrição no início do parágrafo 24.

d) $\theta_n(y_n) = y_{n+1}$ e $\theta_n(y_n + a_n) = y_{n+1} + a_{n+1}$.

Decorre da definição de ξ_n e de θ_n .

e) $\theta'_n(y_n) = \theta'_n(y_n + a_n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Vale, pois $\theta'_n(y) = \xi'_n(y) + 1$.

f) $\theta_n \in C^\infty$, pois ξ_n e id o são.

g) $\theta_n \in \text{Dif}^\infty(\bar{I}_n, \bar{I}_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Decorre de c), d), f) e de $\bar{I}_n$ ser compacto.

h) Seja $\tilde{g}: \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \longrightarrow [h(\alpha), h(\alpha) + 1 + a]$ a função definida por:

se $0 < y_n < h(1-\alpha)$, então $\tilde{g}|_{I_n} = \theta_n$;

se $h(1-\alpha) < y_n < 1+a$, então $\tilde{g}|_{I_n} = \theta_n + 1 + a$.

Para provar que $\tilde{g}$ é estritamente crescente, precisamos dos resultados i) e j), abaixo.

$$i) \quad 0 < y_n < h(1-\alpha) \implies y_n < y_{n+1} < 1+a.$$

Vale, pois

$$\begin{aligned} 0 < h(x_n) < h(1-\alpha) &\iff 0 < x_n < 1-\alpha \iff x_n < x_n + \alpha < \\ < 1 &\iff x_n < x_{n+1} < 1 \iff y_n < y_{n+1} < 1+a. \end{aligned}$$

$$j) \quad h(1-\alpha) < y_n < 1+a \implies 0 < y_{n+1} < y_n < 1+a.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} h(1-\alpha) < y_n < 1+a &\iff 1-\alpha < x_n < 1 \iff 1 < x_n + \alpha < \\ < 1+\alpha < 2 &\iff 0 < x_n + \alpha - 1 < \alpha < 1 \iff 0 < x_{n+1} < \\ < \alpha &\iff 0 < x_{n+1} < x_n < 1 \text{ (pois } \alpha < 1) \iff 0 < y_{n+1} < \\ < y_n &< 1+a. \end{aligned}$$

$$k) \quad \tilde{g} \text{ é estritamente crescente.}$$

Para provar isso, seja $y_n < y_m$;

se $0 < y_n < y_m < h(1-\alpha)$, então $y_{n+1} < y_{m+1} < 1+a$ e $\tilde{g}(y_n) < \tilde{g}(y_m)$;

se $0 < y_n < h(1-\alpha) < y_m < 1+a$, então $0 < y_{n+1} < 1+a$ e $0 < y_{m+1} < y_m < 1+a$; donde, $y_{m+1} + 1 + a > 1+a > y_{n+1}$ e $\tilde{g}(y_n) < \tilde{g}(y_m)$;

se $h(1-\alpha) < y_n < y_m < 1+a$, então $y_{n+1} < y_{m+1} < 1+a$ (pois $x_n + \alpha < x_m + \alpha$) e $\tilde{g}(y_n) < \tilde{g}(y_m)$.

E temos que

$\tilde{g}$ é estritamente crescente em $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$.

1) $\tilde{g}|_{I_n}$ é contínua, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Decorre de f) e da definição de $\tilde{g}$.

Como $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n} = [0, 1+a]$, de k) e l) podemos garantir que

$\exists! g: [0, 1+a] \rightarrow g([0, 1+a])$, contínua
e crescente, tal que $g|_{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n} = \tilde{g}$. (4.82)

m) $g(0) = h(\alpha)$ e $g(1+a) = h(\alpha) + 1 + a$.

Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{J} \subset \mathbb{Z}}$ uma sequência decrescente, tal que $0 < y_n < h(1-\alpha)$, $\forall n \in \mathbb{J}$ e $y_n \rightarrow 0$; então,

$$\begin{aligned}
 g(0) &= \lim_{y_n \rightarrow 0} g(y_n) = \lim_{y_n \rightarrow 0} \tilde{g}(y_n) = \lim_{y_n \rightarrow 0} y_{n+1} = \\
 &= \lim_{y_n \rightarrow 0} (x_{n+1} + \sum_{x_p < x_{n+1}} a_p) = \lim_{y_n \rightarrow 0} (x_n + \alpha + \sum_{x_p < x_{n+1}} a_p) = \\
 &= \lim_{y_n \rightarrow 0} (y_n + \alpha + \sum_{x_n \leq x_p < x_{n+1}} a_p) = \alpha + \sum_{x_p < \alpha} a_p = h(\alpha);
 \end{aligned}$$

isto é,

$$g(0) = h(\alpha). \quad (4.83)$$

Analogamente, se tomarmos $y_n \uparrow \rightarrow 1+a$, com $h(1-\alpha) < y_n < 1+a$, teremos que

$$g(1+a) = h(\alpha) + 1 + a. \quad (4.84)$$

De (4.82), (4.83) e (4.84) podemos concluir que

$$g \in \text{Dif}^0([0, 1+a], [h(\alpha), h(\alpha)+1+a]).$$

Basta, agora, considerarmos a extensão

periódica, de período $1+a$, de $g-h(\alpha)-id$ a toda a reta. Se chamarmos de $\tilde{f}$ a função $g-h(\alpha)$ estendida a $\mathbb{R}$, teremos que $\tilde{f} \in \text{Dif}^0(\mathbb{R})$, $\tilde{f}(0) = 0$ e $\tilde{f}-id$ é periódica de período $1+a$.

Donde $f: S^1 \rightarrow S^1$ definida por $j \circ \tilde{f} =$
 $= f \circ j$, com $j(x) = e^{\frac{2\pi i}{1+a} x}$, está em $\text{Dif}^0(S^1)$.

Precisamos mostrar que $\text{per } f = 0$ e

$$\Omega(f) = j(B) \subsetneq S^1.$$

1º) Suponhamos que $\text{per } f \neq \emptyset$ e tomemos $z_0 \in S^1$ tal que $f^n(z_0) = z_0$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$; então,

$$\exists! x_0 \in [0, 1+a[\text{ tal que } j(x_0) = z_0; \text{ e}$$

$$f(z_0) = f(j(x_0)) = (j \circ \tilde{f})(x_0) = j(\tilde{f}(x_0)) = z_0 = j(x_0);$$

donde $\tilde{f}(x_0) - x_0 = 0$, o que é absurdo, pois $\text{per } \tilde{f} = \emptyset$; e vale

$$\text{per } f = \emptyset. \quad (4.85)$$

2º) Seja $x \in B$; então, $\exists (n_x)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\tilde{f}^{n_x}(x) \rightarrow x \text{ e } (j \circ \tilde{f}^{n_x})(x) \rightarrow j(x) \text{ ou}$$

$$f^{n_x}(j(x)) \rightarrow j(x) \text{ e vale}$$

$$j(B) \subset \Omega(f). \quad (4.86)$$

3º) Seja $z_0 \in \Omega(f)$ e $x_0 \in [0, 1+a[$ tal que $j(x_0) = z_0$; então, $\exists (n_z)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{n_z}(z_0) \rightarrow z_0$; isto é, $f^{n_z}(j(x_0)) \rightarrow j(x_0)$ e $j(\tilde{f}^{n_z}(x_0)) \rightarrow j(x_0)$; como j é difeomorfismo local, temos que $\tilde{f}^{n_z}(x_0) \rightarrow x_0$ e

$$\Omega(f) \subset j(B). \quad (4.87)$$

De (4.85), (4.86) e (4.87) podemos concluir que

f é não ergódico.

E está construído um homeomorfismo de S^1 , não ergódico.

APÊNDICE A.

Dados os intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$ e os pontos $p \in]a,b[$ e $q \in]c,d[$, vamos construir uma função $f: [a,b] \rightarrow [c,d]$ tal que

$$f \in \text{Dif}^\infty([a,b], [c,d]),$$

é crescente e $f(p) = q$.

Seja $L_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação linear definida por $L_1(x) = c + \frac{q-c}{p-a}(x-a)$.

E $L_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L_2(x) = q + \frac{d-q}{b-p}(x-p).$$

Item 1. $L_1(b) = d$.

Neste caso, $L_1(x) = L_2(x)$ e L_1 satisfaz:

$$L_1 \in \text{Dif}^\infty([a,b], [c,d]), \quad L_1(a) = c, \quad L_1(p) = q \quad \text{e} \quad L_1(b) = d.$$

Item 2. $L_1(x) < L_2(x)$, $\forall x \in]-\infty, p[$.

Seja $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{(x-a)(x-p)}} & , a < x < p; \\ 0, & x \leq a \text{ e } x \geq p; \end{cases}$$

a partir de h , consideremos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \frac{\int_{-\infty}^x h(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt}.$$

Nestas condições, $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $f(x) = g(x)L_2(x) + (1 - g(x))L_1(x)$ satisfaz:

$$f \in C^\infty, f(a) = c, f(p) = q, f(b) = d.$$

Falta verificar que $f'(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$;

ora,

$$f'(x) = g'(x)L_2(x) + g(x)L_2'(x) - g'(x)L_1(x) + \\ + (1 - g(x))L_1'(x) = g'(x)(L_2(x) - L_1(x)) + g(x)L_2'(x) + \\ + (1 - g(x))L_1'(x); \text{ portanto,}$$

se $a < x < p$, então $f'(x) > 0$;

se $x = a$, então $f'(a) = L_1'(a) > 0$;

se $x = p$, então $f'(p) = L_2'(p) > 0$.

E temos que

$f \in \text{Dif}^\infty([a, b], [c, d])$, é crescente e $f(p) = q$.

Item 3. $L_1(x) < L_2(x)$, $\forall x \in]p, +\infty[$.

Neste caso, consideremos a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-p)(x-b)} & , p < x < b; \\ 0, & x \leq p \text{ e } x \geq b. \end{cases}$$

O restante é idêntico, trocando-se a por p e p por b no cálculo de f' .

BIBLIOGRAFIA.

1. DENJOY, Arnaud. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Paris, 97: 333-335, 1932.
2. GOLUBITSKY, Martin & GUILLEMIN, Victor. *Stable mappings and their singularities*. New York, Springer, 1973 (Graduate Texts in Mathematics, 14), p.15-18.
3. KELLEY, John L. *General topology*. New York, Van Nostrand, 1961 (International Student Editions).
4. KNESER, Hellmuth. Sur les variétés connexes de dimension 1. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, Bruxelles, 10 (1):19-25, 1958.
5. LIMA, Elon Lages. *Variedades diferenciáveis*. Rio de Janeiro, IMPA, 1972.
6. MILNOR, John W. *Topology from the differentiable viewpoint*. Charlottesville, University Press of Virginia, 1965.
7. NEMYTSKII, V.V. & STEPANOV, V.V. *Qualitative theory of differential equations*. Princeton, Princeton University Press, 1960 (Princeton Mathematical Series, 22), cap.2, p.55-70.
8. NITECKI, Zbigniew. *Differentiable dynamics: an introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*. Cambridge, MIT Press, 1971, cap.1 p.32-67.

9. SCHWEITZER, Paul A. Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. *Annals of Mathematics*, Princeton, 100 (2):386-400, 1974.
10. SIERPINSKI, Wacław. *Leçons sur les nombres transfinis*. Paris, Gauthier-Villars, 1950. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions.)

INDICE.

Cap.	Pág.
ABSTRACT	I
PREFÁCIO	III
0. NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES.	
1. Notações	1
2. Definições	3
1. CLASSIFICAÇÃO DAS VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS C^∞ CONEXAS DE DIMENSÃO UM.	
3. Dois Lemas Importantes	7
4. Um Teorema Importante.	17
5. O Teorema da Classificação	31
2. CONJUNTOS FECHADOS DO INTERVALO $[0,1]$.	
6. Fechados Equivalentes.	35
7. Exemplos de Fechados Conjugados.	36
8. O Conjunto de Cantor	38
9. Contra-exemplos de Conjugação.	44
10. As Classes de Equivalência Determinadas por $\sim$ em I	46
11. A Cardinalidade de $\mathcal{F}$	56
12. A Caracterização dos Fechados de $I =$ $= [0,1]$ por Seqüências.	61

3. HOMEOMORFISMOS E DIFEOMORFISMOS DO INTERVALO $[0,1]$.	
13. Algumas Definições Básicas	67
14. Propriedades de uma Função f de $\text{Dif}^r([0,1])$, $0 \leq r \leq \infty$	69
15. A Relação entre a Conjugação Usual ($\sim$) e a Conjugação Definida em 13.3 ($\hat{\sim}$).	78
16. Um Teorema Importante.	82
17. A Construção de um Difeomorfismo sobre um Conjunto Fechado.	90
18. Estabilidade Estrutural.	95
4. AS DEMAIS VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS C^∞ DE DIMENSÃO UM.	
19. O Intervalo $]0,1[$	142
20. O Intervalo $[0,1[$	148
21. O Círculo S^1	154
22. $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$	161
23. A Conjugação em $\text{Dif}^r(S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$	181
24. Exemplo de $f \in \text{Dif}^0(S^1)$, não ergódico.	209
APÊNDICE A.	220
BIBLIOGRAFIA	223