O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Fabiano Gustavo Braga Brito

Tese apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da

Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Chi Cheng Chen

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FINEP, proc.FINEP 64/75.

Setembro de 1975

São Paulo

A LU

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estabelecer de uma forma acessível o teorema de Gauss-Bonnet para variedades riemannianas compactas e sem bordo de dimensão par.

Nesse processo de generalização passamos por várias etapas na esperança de que a demonstração do teorema nos casos mais gerais fôsse o mais natural possível.

Para tanto, o capítulo 1 é dividido em duas partes. Na primeira encontramos uma demonstração extrínseca do teorema de Gauss-Bonnet na sua forma clássica para variedades compactas de dimensão 2 orientáveis e imersas em $\mathbb{R}^3$, demonstração esta que (pensamos) poderia ter sido feita na época em que Bonnet estabeleceu o teorema, uma vez que só utiliza técnicas de geometria diferencial clássica e da topologia das superfícies compactas do tipo de Euler. Uma segunda parte fornece uma demonstração moderna e intrínseca do teorema de Gauss-Bonnet clássico considerando as variedades riemannianas compactas e orientáveis de dimensão 2. Para tanto usa-se o método do triedro móvel de Elie Cartan.

No capítulo 2 demos o primeiro passo efetivo dentro deste trabalho para a generalização do teorema de Gauss-Bonnet no caso de variedades de dimensões maiores. O que focalizamos ali foi o caso das subvariedades de $\mathbb{R}^n$ de dimensão par. Assim, generalizamos no que diz respeito à dimensão

e particularizamos na medida em que nos detivemos no aspecto extrínseco do teorema.

O capítulo 2 divide-se em duas partes. Uma primeira parte analisa o caso das hipersuperfícies de dimensão par e uma segunda parte dedica-se ao caso geral de subvariedades de $\mathbb{R}^n$ de dimensão par.

Neste ponto, deparamo-nos com duas dificuldades teóricas:

1º) A dificuldade de generalizar diretamente o teorema de Gauss-Bonnet local para dimensão 2 no caso de hipersuperfícies de dimensão maior que 2 devido ao desconhecimento por parte nossa de um teorema do tipo "Umlaufsatze".

2º) A impossibilidade de considerar uma "aplicação normal de Gauss" para o caso mais geral das subvariedades de $\mathbb{R}^n$.

Estas duas dificuldades foram superadas da seguinte maneira:

1º) Para o caso das hipersuperfícies utilizamos dois teoremas globais: o teorema de Poincaré-Hopf e um outro teorema devido a H. Hopf que relaciona o grau da aplicação normal de Gauss com a característica de Euler-Poincaré da hipersuperfície.

2º) Para o caso das subvariedades utilizamos a definição de curvatura devida a Lipschitz-Killing e, empregando vizinhança tubular encontramos uma hipersuperfície que possuía curvatura "semelhante" num certo sentido à curvatura da variedade.

dade inicial. Utilizamos também o teorema de dualidade de Alexander e o fato de que uma vizinhança tubular é localmente um produto. Deste modo recaímos no caso das hipersuperfícies.

As idéias que utilizamos no capítulo 2 podem ser encontradas num trabalho de W.Fenchel publicado em 1939 (*Journal of the London Math. Society*, vol.XV. 1940, pags.15 e 22).

Finalmente, no capítulo 3 obtivemos o máximo de generalização que se podia esperar para dimensões pares e variedades compactas sem bordo. Essencialmente, o que apresentamos aĩ pode ser encontrado em (8).

O que procuramos fazer no último capítulo foi tornar acessível uma demonstração devida a S.S.Chern que, consideramos, demasiadamente resumida para a leitura fácil de um estudante que se inicia no estudo da geometria.

Nesta demonstração vai ser encontrada uma analogia muito forte com a demonstração apresentada no caso de dimensão 2. A chave desta prova resume-se em dois fatos:

1º) A forma Ω da curvatura de Gauss-Kroenecker para variedades riemannianas é exata em toda variedade menos um ponto.

2º) A integral da forma Π tal que $d\Pi = \Omega$ sobre uma esfera geodésica de centro em p (p é uma singularidade de um campo vetorial v fixado na variedade) aproxima-se do índice do campo v em p na medida em que diminuimos o raio da esfera geodésica.

A grande dificuldade de generalização que aparece aí é a complexidade das equações de estrutura para variedades de dimensão maior que 2. Isto vem dificultar sobremaneira a prova da exatidão de Ω que, no caso de dimensão 2, é trivial.

Nossos agradecimentos ao Prof. Dr. Chi Cheng Chen pela paciência e dedicação com que nos orientou e pelas inúmeras sugestões apresentadas no decorrer deste trabalho.

Agradecemos também a Sonia Maria Rossini pelo esforço de datilografia para que este trabalho pudesse ser entregue a tempo.

FABIANO GUSTAVO BRAGA BRITO

ÍNDICE

Capítulo 1 - O teorema de Gauss-Bonnet para variedades compactas orientáveis de dimensão 2

1.1. - O teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas do $\mathbb{R}^3$

1.1.1. - O teorema do índice de rotação pág. 1

1.1.2. - O teorema de Gauss-Bonnet local pág. 2

1.1.3. - Alguns fatos topológicos sobre superfícies do $\mathbb{R}^3$ pág. 4

1.1.4. - O teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas do $\mathbb{R}^3$ pág. 6

1.2. - O teorema de Gauss-Bonnet para variedades riemannianas compactas orientáveis de dimensão 2

1.2.1. - O método do triedro móvel pág. 9

1.2.2. - O índice de um campo vetorial em variedades riemannianas de dimensão 2 pág. 18

1.2.3. - O teorema de Gauss-Bonnet para variedades riemannianas de dimensão 2	pág. 25
---	---------

Capítulo 2 - O teorema de Gauss-Bonnet para subvariedades do $\mathbb{R}^n$ de dimensão par

2.1. - O teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperfícies de dimensão par	
2.1.1. - Definição de grau de uma aplicação	pág. 31
2.1.2. - Definição de índice de um campo vetorial	pág. 37
2.1.3. - O teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperfícies de dimensão par	pág. 42
2.2. - O teorema de Gauss-Bonnet para subvariedades do $\mathbb{R}^n$	
2.2.1. - Definição de Curvatura	pág. 52
2.2.2. - O teorema de Gauss-Bonnet para subvariedades do $\mathbb{R}^n$	pág. 55

Capítulo 3 - O teorema de Gauss-Bonnet para variedades riemannianas de dimensão par

3.1. - Alguns fatos de geometria riemanniana	pág. 64
3.2. - A exatidão de Ω em $\mathbb{R}^n - \{p\}$	pág. 68
3.3. - O teorema de Gauss-Bonnet	pág. 86

CAPÍTULO 1

O TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA VARIEDADES COMPACTAS ORIENTÁVEIS DE DIMENSÃO 2

Este capítulo divide-se em duas partes. A primeira parte é o teorema de Gauss-Bonnet na sua forma clássica para superfícies compactas do $\mathbb{R}^3$. A demonstração que apresentaremos é a mesma que pode ser vista por exemplo em (6). A segunda parte consiste numa formulação intrínseca do teorema ainda no caso de dimensão 2 e nesta parte procuraremos explorar algumas idéias da demonstração que serão úteis numa formulação mais geral do teorema que veremos no capítulo 3.

§1.1. O TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUPERFÍCIES COMPACTAS DO $\mathbb{R}^3$.

1.1.1. TEOREMA DO ÍNDICE DE ROTAÇÃO:

"Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta orientada. Seja $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização positiva de S e seja $g: I \rightarrow f(U)$ uma curva fechada simples, lisa por partes parametrizada positivamente pelo comprimento de arco com relação a orientação de R , onde R é uma região de S limitada por $\text{tr}(g)$.

Sejam ainda:

$g(t_i)$, o i -ésimo vértice de g .

$\phi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, funções diferenciáveis tais que $\phi_i(t)$ é uma determinação do ângulo de f_u com $g'(t)$ α_i , o ângulo externo de $g(t_i)$

$$i = 0, 1, \dots, K$$

Nestas condições:

$$\sum_{i=0}^K (\phi_i(t_{i+1}) - \phi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^K \alpha_i = 2\pi$$

Uma demonstração deste teorema pode ser vista em (6)

1.1.2. TEOREMA DE GAUSS-BONNET LOCAL

"Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada e $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow$ uma parametrização positiva e ortogonal de S ($F \equiv 0$), tal que $f(U)$ é homeomorfo a um disco aberto de $\mathbb{R}^2$. Seja $R \subset f(U)$ um triângulo curvilíneo de S , ou seja, a fronteira de R é o traço de uma curva fechada simples g , regular por partes com vértices $g(s_0), g(s_1), g(s_2)$, $s_0 = a$, $s_3 = b$, $g(s_3) = g(s_0)$ onde:

$g: [a, b] \rightarrow S$ é parametrizada pelo comprimento de arco positivamente em relação a R e g tem ângulos externos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ respectivamente em $g(s_0), g(s_1), g(s_2)$.
Nestas condições vale:

$$\sum_{i=0}^2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} K_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^2 \alpha_i = 2\pi$$

onde

$K_g(s)$ é a curvatura geodésica de g no ponto s .

K é a função curvatura gaussiana de R ."

DEMONSTRAÇÃO

Uma fórmula para a curvatura geodésica em função das coordenadas numa parametrização ortogonal é dada por (ver (5)):

$$K_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\phi_i}{dt},$$

onde E, G são coeficientes da primeira forma fundamental,

$$g(s) = f(u(s), v(s)) \text{ e}$$

ϕ_i é uma função diferenciável que mede uma determinação do ângulo entre f_u e $g'(s)$ em $[s_i, s_{i+1}]$ $i = 0, 1, 2$.

Teremos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} K_g(s) ds = \\ &= \sum_{i=0}^2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds} ds \end{aligned} \quad (1)$$

Mas, pelo teorema de Gauss-Green no plano vem:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds = \\ &= \iint_{f^{-1}(R)} \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right) du dv = - \iint_R K d\sigma \end{aligned} \quad (2)$$

onde, na última igualdade utilizamos a fórmula clássica de Gauss

para a curvatura em função de E, G numa parametrização ortogonal. (ver (4)).

Por outro lado, pelo teorema 1.1.1., temos:

$$\sum_{i=0}^2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^2 (\phi_i(s_{i+1}) - \phi_i(s_i)) = 2\pi - \sum_{i=0}^2 \alpha_i \quad (3)$$

Assim, de (1), (2) e (3) vem:

$$\sum_{i=0}^K \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \iint_R \kappa d\sigma + \sum_{i=0}^2 \alpha_i = 2\pi$$

c.q.d.

1.1.3. ALGUNS FATOS TOPOLÓGICOS SOBRE SUPERFÍCIES DO $\mathbb{R}^3$.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.

1.1.3.1. DEFINIÇÃO

Uma região $R \subset S$ é dita um triângulo de S quando

- i) O interior de R é homeomorfo a um disco aberto do $\mathbb{R}^2$.
- ii) A fronteira de R é o traço de uma curva $g: [a, b] \rightarrow S$ tal que:
 - iiia) $g_i = g|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é uma curva regular simples onde $i = 0, 1, 2$ e $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$.
 - iiib) $g(a) = g(b)$.

1.1.3.2. DEFINIÇÃO

Seja R um triângulo de S .

Então:

- a) Chamaremos os conjuntos $tr(g_i)$, $i = 0, 1, 2$ de arestas de R
 b) Chamaremos os conjuntos $\{g(t_i)\}$, $i = 0, 1, 2$ de vértices de R

1.1.3.3. DEFINIÇÃO:

Uma triangulação de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma família finita $\tau = \{T_1, \dots, T_n\}$, formada por triângulos de S e tal que:

- a) $\bigcup_{i=1}^n T_i = S$
 b) $T_i \cap T_j \neq \emptyset \implies T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou é um vértice comum de T_i e T_j .

1.1.3.4. DEFINIÇÃO

Dada uma triangulação τ de S chamaremos de característica de Euler-Poincaré da triangulação τ ao número inteiro $\chi_\tau(S)$ definido por: $\chi_\tau(S) = V - A + F$, onde:

V = número de vértices da triangulação

A = número de arestas da triangulação

F = número de triângulos da triangulação

1.1.3.5. TEOREMA

"Seja S uma superfície compacta orientada de $\mathbb{R}^3$ e seja A uma família finita de parametrizações compatíveis com a orientação de S e que recobrem S . Então existe um triangulação τ de S tal que todo triângulo $T \in \tau$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família A . Também, orientando positivamente a fronteira de cada triângulo de τ , teremos que dois

triângulos adjacentes induzem na aresta comum orientações opostas."

1.1.3.6. TEOREMA

"A característica de Euler-Poincaré χ_τ , definida para uma triangulação τ de S é, na verdade, independente da triangulação. Precisamente se τ e τ' são duas triangulações de S então $\chi_\tau(S) = \chi_{\tau'}(S)$. Por isso passaremos a denotar $\chi(S)$ a característica de Euler-Poincaré de S . Além disso χ é um invariante topológico de S , isto é, se S é homeomorfa a S' então $\chi(S) = \chi(S')$.

Ainda mais, para superfícies compactas orientáveis do $\mathbb{R}^3$ vale:

$$\chi(S) = \chi(S') \implies S \text{ é homeomorfa a } S', S \text{ conexa}.$$

Uma demonstração dos teoremas 1.1.3.5 e 1.1.3.6 pode ser encontrada em (1).

1.1.4. - TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUPERFÍCIES COMPACTAS DO $\mathbb{R}^3$

"Seja S uma superfície (sem bordo) de $\mathbb{R}^3$ compacta orientada.

Então:

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi \chi(S), \text{ onde}$$

K é a função curvatura gaussiana de S

$d\sigma$ é o elemento de área de S

$\chi(S)$ é a característica de Euler-Poincaré de S ."

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam:

A, uma família finita de parametrizações de S que recobrem S (existe uma tal família devido à compacidade de S).

τ , uma triangulação de S tal que cada triângulo $T \in \tau$ esteja contido em alguma vizinhança coordenada $f_i(U_i)$ da família A. (isto é possível devido ao teorema 3.1.5.).

Suponhamos $\tau = \{T_1, \dots, T_n\}$, $T_i \subset f_i(U_i)$

Teremos:

$$\iint_S K \, d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_{T_i} K \, d\sigma \quad (1)$$

Mas

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \int_{c_{ij}} K_g(s) \, ds + \sum_{i=1}^n \iint_{T_i} K \, d\sigma + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} = 2\pi n = 2\pi F \quad (2)$$

onde

c_{ij} é a j-ésima aresta de T_i

α_{ij} é o j-ésimo ângulo externo de T_i

estando as arestas de T_i orientadas positivamente com relação à orientação de T_i , sendo esta induzida pela orientação de S.

Na soma $\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \int_{c_{ij}} K_g(s) \, ds$, cada aresta c_{ij} apa-

rece duas vezes no somatório com orientação opostas (teorema 1.1.3.5.).

logo:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \int_{c_{ij}} K_g(s) ds = 0 \quad (3)$$

A soma de todos os ângulos internos relativos ao mesmo vértice é 2π , logo,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 (\pi - \beta_{ij}) = 3\pi F - 2\pi V \quad (4)$$

onde: β_{ij} é o ângulo interno j -ésimo do triângulo T_i , correspondente ao ângulo externo α_{ij} .

F é o número total de triângulos de τ

V é o número total de vértices de τ

Ainda mais, como S é uma superfície sem bordo, cada aresta da triangulação é comum a dois triângulos e também, como cada triângulo possui três arestas temos:

$$A = \frac{3F}{2} \quad (5)$$

Sendo A o número total de arestas de τ .

De (1), (2), (3), (4) e (5) vem:

$$\iint_S K d\sigma + 2\pi A - 2\pi V = 2\pi F \implies$$

$$\implies \iint_S K d\sigma = 2\pi(V - A + F) = 2\pi\chi(S)$$

c.q.d.

§1.2. O TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA VARIEDADES RIEMANNIANAS COMPACTAS ORIENTÁVEIS DE DIMENSÃO 2 (FORMA INTRÍNSECA DO TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUPERFÍCIES).

1.2.1. O MÉTODO DO TRIEDRO MÓVEL

Seja S uma variedade riemanniana compacta orientada de dimensão 2 e seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal local. Estamos interessados em definir localmente 1-formas diferenciais W_1, W_2 (correferencial de $\{e_1, e_2\}$) e $W_{12} = -W_{21}$ (formas de conexão) de tal maneira que satisfaçam as seguintes equações, ditas equações de estrutura:

$$dW_1 = W_{12} \wedge W_2, \quad dW_2 = W_{21} \wedge W_1 \quad (6)$$

1.1.2.1. PROPOSIÇÃO

"Seja S uma variedade riemanniana de dimensão 2 e seja $U \subset S$ um aberto onde está definido um referencial ortonormal $\{e_1, e_2\}$.

Sejam W_1, W_2 , 1-formas diferenciais em U definidas por:

$$W_i(e_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

Então existe uma única 1-forma diferencial $W_{12} = -W_{21}$ definida em U tal que

$$dW_1 = W_{12} \wedge W_2 \quad \text{e} \quad dW_2 = W_{21} \wedge W_1"$$

a) Unicidade:

Suponhamos que $W_{12}, \bar{W}_{12}$ são tais que:

$$d W_1 = W_{12} \wedge W_2 = \bar{W}_{12} \wedge W_2$$

$$d W_2 = W_{21} \wedge W_1 = \bar{W}_{21} \wedge W_1$$

Então:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad (W_{12} - \bar{W}_{12}) \wedge W_2 = 0 &\implies [(W_{12} - \bar{W}_{12}) \wedge W_2](e_1, e_2) = 0 \implies \\ &\implies W_{12}(e_1) - \bar{W}_{12}(e_1) = 0 \implies W_{12}(e_1) = \bar{W}_{12}(e_1) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad (W_{21} - \bar{W}_{21}) \wedge W_1 = 0 &\implies [(W_{21} - \bar{W}_{21}) \wedge W_1](e_1, e_2) = 0 \implies \\ &\implies W_{21}(e_2) - \bar{W}_{21}(e_2) = 0 \implies W_{12}(e_2) = \bar{W}_{12}(e_2) \end{aligned} \quad (8)$$

De (7) e (8) segue que $W_{12} = \bar{W}_{12}$.

b) Existência:

Definamos W_{12} por

$$W_{12}(e_1) = d W_1(e_1, e_2)$$

$$W_{12}(e_2) = d W_2(e_1, e_2)$$

Teremos:

$$(W_{12} \wedge W_2)(e_1, e_2) = W_{12}(e_1) = d W_1(e_1, e_2), \text{ logo } W_{12} \wedge W_2 = d W_1$$

$$(W_{21} \wedge W_1)(e_1, e_2) = -W_{21}(e_1) = d W_2(e_1, e_2), \text{ logo } W_{21} \wedge W_1 = d W_2$$

c.q.d.

Nosso objetivo agora é definir de uma maneira razoável uma função escalar diferenciável definida em toda a variedade S que fará o papel da curvatura gaussiana de S . Definiremos inicialmente esta função em relação a um referencial

ortonormal local e depois provaremos que ela independe dele.
Neste ponto, obteremos uma definição global da função curvatura.

Para tanto sejam $\{e_1, e_2\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ dois referenciais ortonormais em $U \subset S$.

Teremos:

a) se $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ têm a mesma orientação:

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= fe_1 + ge_2 \\ \bar{e}_2 &= -ge_1 + fe_2\end{aligned}, \text{ onde } f^2 + g^2 = 1$$

b) se as orientações forem opostas:

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= fe_1 + ge_2 \\ \bar{e}_2 &= ge_1 - fe_2\end{aligned} \quad \text{e} \quad f^2 + g^2 = 1$$

1.2.1.2. LEMA

"Se $\{e_1, e_2\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ são dois referenciais ortonormais em U e $W_1, W_2, W_{12}, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{W}_{12}$ são os correferenciais e as formas de conexão respectivamente de $\{e_1, e_2\}$ e de $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ então:

$W_{12} = \bar{W}_{12}^{-\tau}$ se os dois referenciais têm a mesma orientação

$W_{12} = -\bar{W}_{12}^{-\tau}$ se os dois referenciais possuem orientações opostas, onde $\tau = f dg - g df$ "

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos inicialmente que $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tenham a mesma orientação:

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned}
 \bar{W}_1 &= f W_1 + g W_2 & W_1 &= f \bar{W}_1 - g \bar{W}_2 \\
 \bar{W}_2 &= -g W_1 + f W_2 & W_2 &= g \bar{W}_1 + f \bar{W}_2
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Provaremos que

$$W_{12}(e_1) = \bar{W}_{12}(e_1) - \tau(e_1) \tag{10}$$

Para isto vamos computar $d W_{12}(e_1, e_2) = W_{12}(e_1)$
(Prop. 1.2.1.1.)

Teremos:

$$d W_1 = df \wedge \bar{W}_1 + f d\bar{W}_1 - dg \wedge \bar{W}_2 - g d\bar{W}_2$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 d W_1(e_1, e_2) &= (df(e_1)\bar{W}_1(e_2) - df(e_2)\bar{W}_1(e_1)) + f d\bar{W}_1(e_1, e_2) - \\
 &- (dg(e_1)\bar{W}_2(e_2) - dg(e_2)\bar{W}_2(e_1)) - g d\bar{W}_2(e_1, e_2)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Mas

$$f^2 + g^2 = 1, \text{ logo}$$

$$2f df(e_2) + 2g dg(e_2) = 0 \implies f df(e_2) + g dg(e_2) = 0 \tag{12}$$

Também

$$\tau(e_1) = f dg(e_1) - g df(e_1) \tag{13}$$

De (11), (12) e (13) obtemos:

$$d W_1(e_1, e_2) = -g d\bar{W}_2(e_1, e_2) + f d\bar{W}_1(e_1, e_2) - \tau(e_1) \tag{14}$$

Agora, aplicando as equações (6) e (9) temos:

$$\begin{aligned} d\bar{w}_1(e_1, e_2) &= \bar{w}_{12}(e_1)\bar{w}_2(e_2) - \bar{w}_{12}(e_2)\bar{w}_2(e_1) = \\ &= f\bar{w}_{12}(e_1) + g\bar{w}_{12}(e_2) \end{aligned} \quad (15)$$

Também

$$d\bar{w}_2(e_1, e_2) = f\bar{w}_{12}(e_2) - g\bar{w}_{12}(e_1) \quad (16)$$

De (14), (15) e (16) e do fato que $f^2 + g^2 = 1$ segue que:

$$dw_1(e_1, e_2) = \bar{w}_{12}(e_1) - \tau(e_1) \implies w_{12}(e_1) = \bar{w}_{12}(e_1) - \tau(e_1),$$

como havíamos proposto.

De maneira análoga pode-se provar que:

$$w_{12}(e_2) = \bar{w}_{12}(e_2) - \tau(e_2) \quad (17)$$

De (10) e (17) segue que

$$w_{12} = \bar{w}_{12} - \tau$$

Para o caso de serem as orientações de $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ opostas, a demonstração é análoga.

c.q.d.

O lema seguinte dá uma interpretação geométrica para a forma τ que nos será útil mais adiante na definição de índice de um campo vetorial.

1.2.1.3. LEMA

"Sejam $p \in U \subset S$ e uma curva $\gamma: I \rightarrow U$ tal que $\gamma(t_0) = p$, $t_0 \in I$. Se ϕ_0 é uma determinação do ângulo formado entre $\bar{e}_1(\gamma(t_0))$ e $e_1(\gamma(t_0))$ então:

$$\phi(t) = \int_{t_0}^t (f \frac{dg}{dx} - g \frac{df}{dx}) dx + \phi_0$$

é uma função diferenciável tal que

$$\cos \phi(t) = f(t), \quad \sin \phi(t) = g(t), \quad \phi(t_0) = \phi_0 \quad \text{e} \quad d\phi = \tau,$$

onde $\frac{dg}{dx} = (g \circ \gamma)'$, $\frac{df}{dx} = (f \circ \gamma)'$ e tendo e_1 , $\bar{e}_1$, U , o mesmo significado do lema anterior".

DEMONSTRAÇÃO:

Vamos provar inicialmente que

$$f \cos \phi + g \sin \phi \equiv 1 \quad (18)$$

Para tanto, provaremos primeiro que:

$$(f \cos \phi + g \sin \phi)' \equiv 0 \quad (19)$$

Teremos:

$$\begin{aligned} & (f \cos \phi + g \sin \phi)' = \\ & = -f \sin \phi (fg' - gf') + f' \cos \phi + g \cos \phi (fg' - gf') + g' \sin \phi \end{aligned} \quad (20)$$

Mas temos também:

$$f^2 + g^2 \equiv 1 \implies ff' = -gg' \quad (21)$$

De (20) e (21) vem que

$$\begin{aligned} (f \cos \phi + g \sin \phi)' &= \\ &= (f g f' - f^2 g' + g') \sin \phi + (g f g' + g^2 f' + f') \cos \phi = \\ &= (f g f' + g' (1 - f^2)) \sin \phi + (g f g' + f' (1 - g^2)) \cos \phi = \\ &= g (f f' + g g') \sin \phi + f (g g' + f f') \cos \phi = 0, \end{aligned}$$

e isto estabelece (19).

Logo,

$$f \cos \phi + g \sin \phi \equiv \text{constante}.$$

Mas

$$\cos \phi_0 = f \quad \text{e} \quad \sin \phi_0 = g, \text{ logo}$$

$$f \cos \phi + g \sin \phi \equiv 1 \equiv f^2 + g^2, \text{ e fica estabelecido (18).}$$

Agora

$$\begin{aligned} (f - \cos \phi)^2 + (g - \sin \phi)^2 &= \\ &= f^2 + g^2 + \sin^2 \phi + \cos^2 \phi - 2(f \cos \phi + g \sin \phi). \end{aligned} \quad (22)$$

De (18) e (22) vem:

$$(f - \cos \phi)^2 + (g - \sin \phi)^2 = 0 \implies \begin{cases} f = \cos \phi \\ g = \sin \phi \end{cases}$$

c.q.d.

OBSERVAÇÃO:

Durante o transcorrer da demonstração acima adotamos as seguintes convenções:

$$f' = (f \circ \gamma)'$$

$$g' = (g \circ \gamma)'$$

1.2.1.4. TEOREMA

"A definição intrínseca da função curvatura gaussiana é boa. Precisamente:

Seja $U \subset S$, U aberto de S , S superfície riemanniana de dimensão 2 e sejam $\{e_1, e_2\}$, W_1 , W_2 , W_{12} um referencial ortonormal em U , seu correferencial e forma de conexão respectivamente.

Seja $K: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d W_{12}_p = -K(p) W_{1_p} \wedge W_{2_p}, \quad p \in U.$$

Então K é diferenciável e se $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$, $\bar{W}_{12}$ representam referencial ortonormal em U , correferencial e forma de conexão respectivos e se $\bar{K}: U \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$d \bar{W}_{12}_p = -\bar{K}(p) \bar{W}_{1_p} \wedge \bar{W}_{2_p},$$

então teremos:

$$K \equiv \bar{K} \text{ em } U."$$

DEMONSTRAÇÃO:

A diferenciabilidade é evidente a partir da diferenciabilidade das formas W_{12} , W_1 e W_2 .

Teremos também, devido ao lema 1.2.1.2:

$$d\bar{W}_{12_P}(e_1, e_2) = dW_{12_P}(e_1, e_2) + d\tau_P(e_1, e_2) \quad (23),$$

no caso de $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ter a mesma orientação de $\{e_1, e_2\}$.

Mas

$$d\tau_P(e_1, e_2) = 2df \wedge dg(e_1, e_2) \quad (24),$$

em virtude da fórmula que define τ . Também:

$$(df \wedge dg)(e_1, e_2) = df(e_1)dg(e_2) - dg(e_1)df(e_2) \quad (25)$$

Mas como $f^2 + g^2 = 1$ temos, se $g \neq 0$:

$$f df(e_1) = -g dg(e_1) \quad \text{e} \quad dg(e_1) = -\frac{f df(e_1)}{g} \quad (26)$$

$$f df(e_2) = -g dg(e_2) \quad \text{e} \quad dg(e_2) = -\frac{f df(e_2)}{g} \quad (27)$$

De (25), (26) e (27) segue que

$$(df \wedge dg)(e_1, e_2) = 0 \quad (28)$$

Caso $g = 0$ então $f = 1$ e teremos, como em (25)

e (26):

$$df(e_1) = -\frac{g dg(e_1)}{f} \quad (29)$$

$$df(e_2) = -\frac{g \, dg(e_2)}{f} \quad (30)$$

De (25), (29) e (30) chegaremos novamente a (28).

De (28), (23) e (24) segue que

$$d\bar{w}_{12_p}(e_1, e_2) = dw_{12_p}(e_1, e_2) \text{ e portanto } dw_{12} = d\bar{w}_{12},$$

logo

$$d\bar{w}_{12_p} = -K(p) \bar{w}_{1_p} \wedge \bar{w}_{2_p} \text{ pois } w_1 \wedge w_2 = \bar{w}_1 \wedge \bar{w}_2$$

logo $K = \bar{K}$.

No caso de ser a orientação de $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ oposta a orientação de $\{e_1, e_2\}$ a demonstração é análoga se utilizarmos agora:

$$w_{12} = -\bar{w}_{12}^{-\tau} \text{ e } w_1 \wedge w_2 = -\bar{w}_1 \wedge \bar{w}_2.$$

c.q.d.

Antes de passarmos a seção seguinte gostaríamos de lembrar que a função $K: S \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida coincide com a curvatura gaussiana se considerarmos o caso em que S é uma superfície de $\mathbb{R}^3$ com a métrica riemanniana induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}^3$. Uma demonstração deste fato pode ser vista em (7).

1.2.2. O ÍNDICE DE UM CAMPO VETORIAL EM VARIEDADES RIEMANNIANAS DE DIMENSÃO 2.

Seja S uma variedade riemanniana orientada de dimensão 2 e seja v um campo vetorial em S .

1.2.2.1. DEFINIÇÃO.

"Um ponto $p \in S$ diz-se um "ponto singular" de v quando $v(p) = 0$. Um ponto singular $p \in S$ é dito isolado quando existe um aberto $U \subset S$, $U \ni p$, tal que:

$$q \in U, q \neq p \implies v(q) \neq 0."$$

Definamos agora um referencial ortonormal positivo $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ em $U - \{p\}$ onde U é uma vizinhança de p , da seguinte maneira:

$$\bar{e}_1 = \frac{v}{|v|}, \quad \bar{e}_2 \perp \bar{e}_1, \text{ sendo que } U \text{ satisfaz:}$$

$$q \in U, q \neq p \implies v(q) \neq 0.$$

Seja agora $\{e_1, e_2\}$ um outro referencial ortonormal positivo definido em U .

Seja c uma curva fechada simples em S que contenha p em seu interior sendo c orientada positivamente em relação a seu interior.

1.2.2.2. DEFINIÇÃO

"O índice de v num ponto singular isolado $p \in S$ é o número inteiro I definido por:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_c \tau, \text{ onde } \tau = \bar{W}_{12}^{-1} W_{12} \text{ e onde}$$

$\bar{W}_{12}$ é a forma de conexão associada ao referencial $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$

W_{12} é a forma de conexão associada ao referencial $\{e_1, e_2\}$ "

1.2.2.3. TEOREMA:

"O índice de um campo é realmente um número inteiro"

DEMONSTRAÇÃO

$$\text{Se } \begin{cases} \bar{e}_1 = fe_1 + ge_2 \\ \bar{e}_2 = -ge_1 + fe_2 \end{cases}, \text{ então, sabemos pelo lema}$$

1.2.1.2. que $\tau = f dg - g df$. Utilizando-se agora o lema

1.2.1.3., teremos:

$$\int_c \tau = \int_c f dg - g df = \int_0^1 \left(f \frac{dg}{dx} - g \frac{df}{dx} \right) dx = \phi(1) - \phi(0) \quad (31)$$

sendo c uma curva fechada simples envolvendo p , ponto singular de v .

Mas ϕ é tal que: $\cos \phi = f$ $\sin \phi = g$,
 $\phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Teremos então:

$$\cos(\phi(0)) = f(c(0)) = f(c(1)) = \cos(\phi(1)) \quad (32)$$

$$\sin(\phi(0)) = g(c(0)) = g(c(1)) = \sin(\phi(1)) \quad (33)$$

De (32) e (33) segue que

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_c \tau = \frac{1}{2\pi} (\phi(1) - \phi(0)) = \frac{1}{2\pi} 2K\pi = K \in \mathbb{Z}$$

c.q.d.

Na definição de índice de um campo vetorial num ponto singular isolado usamos um referencial positivo $\{e_1, e_2\}$, uma métrica riemanniana em S e uma curva c em S .

Assim para termos estabelecido uma boa definição para índice de um campo numa variedade orientada devemos provar a independência da definição quanto à escolha do referencial $\{e_1, e_2\}$, à curva fechada simples c e quanto à escolha da métrica.

1.2.2.4. TEOREMA

"O índice de um campo vetorial v numa variedade riemanniana orientada de dimensão 2 como foi definido é independente da particular curva fechada simples c usada na sua definição."

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam S , $\{e_1, e_2\}$, v e p como na definição de índice e sejam c_1 , c_2 , duas curvas fechadas simples contendo p em seu interior e orientadas positivamente em relação a seus interiores.

Podemos supor sem perda de generalidade que c_1 envolve c_2 (se isto não acontecer tomamos uma curva c_3 que envolve c_1 e c_2).

Seja Δ a região anular limitada por c_1 e c_2 .

Teremos, aplicando o teorema de Stokes:

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{c_1} \tau - \int_{c_2} \tau \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Delta} d\tau \right) = 0$$

logo $I_1 = I_2$.

c.q.d.

1.2.2.5. TEOREMA:

"O índice I de um campo vetorial v numa variedade riemanniana S orientada de dimensão 2 é independente da escolha do particular referencial ortonormal positivo $\{e_1, e_2\}$ utilizado na sua definição."

DEMONSTRAÇÃO:

Basta mostrar que

$$\exists \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{r_f}} \bar{w}_{12} = I \quad (35)$$

onde S_{r_f} é a esfera de centro em p e raio r coordenada, ou seja, se $f: V \rightarrow S$ é uma parametrização positiva de S em p tal que $V \supset \bar{B}(0, r) \subset \mathbb{R}^2$, então $S_{r_f} = \partial(f(\bar{B}(0, r)))$, considerando-se que $f(0) = p$ e $\bar{B}(0, r)$ é o disco fechado de $\mathbb{R}^2$ de centro em $(0, 0)$ e raio r e $f(V) \subset U$, sendo U uma vizinhança isolante do ponto singular p , onde está definido o referencial $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. S_{r_f} é orientada positivamente em relação a $f(\bar{B}(0, r))$.

Primeiramente vamos mostrar a existência do limite

em (35). Para isto seja $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$ e $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é decrescente.

Temos que mostrar que $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{r_k} f} \bar{w}_{12} = L \in \mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ é completo, basta mostrar que a sequência $\{\int_{S_{r_k} f} \bar{w}_{12}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Seja $\varepsilon > 0$ e seja Δ_{mn} a região anular de S limitada por $S_{r_m} f$ e $S_{r_n} f$. Teremos, se $m, n > \lambda$, aplicando Stokes:

$$\left| \int_{S_{r_m} f} \bar{w}_{12} - \int_{S_{r_n} f} \bar{w}_{12} \right| = \left| \int_{\Delta_{m,n}} d\bar{w}_{12} \right| = \left| \int_{D_{mn}} f^* d\bar{w}_{12} \right| = (36),$$

onde D_{mn} é a coroa de $\mathbb{R}^2$ limitada por $S(0, r_m)$ e $S(0, r_n)$. Assim:

$$(36) = \left| \int_{D_{mn}} f^* K W_1 \wedge W_2 \right| \leq \left| \int_{D_M} f^* K W_1 \wedge W_2 \right| = \left| \int_{D_M} g \, dx \, dy \right| = (37)$$

onde $D_M = \bar{B}(0, \max(r_m, r_n))$ e g é uma função contínua.

$$(37) \leq \pi r_{\lambda}^2 M_1, \text{ sendo } M_1 = \sup\{g(x), g \in V\}.$$

Assim para λ suficientemente grande $r_{\lambda}^2 < \frac{\varepsilon}{\pi M_1}$, pois $r_n \downarrow 0$. Assim

$$m, n > \lambda \implies (36) < \varepsilon, \text{ logo}$$

$$\exists \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{rf}} \bar{W}_{12} = L$$

Vamos mostrar agora que $L = I$.

Seja $\{e_1, e_2\}$ qualquer referencial ortonormal positivo definido em $U \ni p$. Teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{rf}} \bar{W}_{12} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{rf}} (W_{12} + \tau) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{rf}} W_{12} + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{rf}} \tau = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{B_{rf}} dW_{12} + I = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{B_{rf}} KW_1 \wedge W_2 + I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{D_r} g \, dx \, dy + I = 0 + I = I, \end{aligned}$$

onde:

$D_r = \bar{B}(0, r) \subset \mathbb{R}^2$, pois, como já foi observado antes, g é uma função contínua.

c.q.d.

1.2.2.6. TEOREMA

"O índice I de um campo vetorial v numa variedade riemanniana S de dimensão 2 orientada, não depende da métrica riemanniana de S ".

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam $\langle \rangle_0$ e $\langle \rangle_1$ duas métricas riemannianas em S . Seja $f: U \rightarrow S$ uma parametrização de S contendo p .

Sejam $E_0, F_0, G_0, E_1, F_1, G_1$ funções reais defi-

nidas em U por:

$$E_0(x) = \langle f_u(x), f_u(x) \rangle_0, \quad F_0(x) = \langle f_u(x), f_v(x) \rangle_0$$

$$G_0(x) = \langle f_v(x), f_v(x) \rangle_0,$$

$$E_1(x) = \langle f_u(x), f_u(x) \rangle_1, \quad F_1(x) = \langle f_u(x), f_v(x) \rangle_1,$$

$$G_1(x) = \langle f_v(x), f_v(x) \rangle_1$$

Seja $\langle \rangle_t$ a métrica riemanniana em S definida por E_t, F_t, G_t onde

$$E_t = (1-t)E_0 + tE_1, \quad F_t = (1-t)F_0 + tF_1, \quad G_t = (1-t)G_0 + tG_1.$$

É fácil ver que $E_t, G_t > 0$ em $U, \forall t$.

É evidente também que o índice I_t do campo v em relação à métrica $\langle \rangle_t$ depende continuamente de t e temos $I_t \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in [0,1]$.

Seja agora $\psi: I \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$\psi(t) = I_t$$

ψ é contínua como já observamos e, sendo $\mathbb{Z}$ um espaço topológico discreto, a conexidade de $[0,1]$ implica que ψ é constante.

$$\text{Assim, } \psi(0) = \psi(1) \implies I_0 = I_1$$

c.q.d.

1.2.3. O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

1.2.3.1. TEOREMA

"Seja S uma variedade riemanniana de dimensão 2 compacta orientada e seja v um campo vetorial em S com um número finito de pontos singulares. Teremos então:

$$\int_S K\sigma = 2\pi \left(\sum_{i=1}^n I_i \right), \text{ onde:}$$

K é a função curvatura gaussiana de S

σ é o elemento de área de S , $\sigma = W_1 \wedge W_2$ em termos de um referencial ortonormal local.

$\{p_1, \dots, p_n\}$ é o conjunto dos pontos singulares de v .

I_i é o índice do campo em p_i .

DEMONSTRAÇÃO:

Dado $\varepsilon > 0$, sejam $B_1, \dots, B_n$ bolas coordenadas abertas contendo $p_1, \dots, p_n$ respectivamente e tais que:

$$q \in B_i, q \neq p_i \implies v(q) \neq 0 \quad (38)$$

$$\overline{B}_i \cap \overline{B}_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \quad (39)$$

$$\left| \int_{S - \bigcup_{i=1}^n B_i} K\sigma - \int_S K\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (40)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{S_i} \overline{W}_{12} - I_i \right| < \frac{\varepsilon}{4n\pi} \quad (41)$$

onde $S_i = \partial \overline{B}_i$ é orientada positivamente em relação a $\overline{B}_i$.

Teremos, aplicando o teorema de Stokes:

$$\int_{\substack{n \\ S \cup B_i \\ i=1}} K\sigma = \int_{\substack{n \\ S \cup B_i \\ i=1}} -d\bar{W}_{12} = \int_{\substack{n \\ S_i \\ i=1}} \bar{W}_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \bar{W}_{12} \quad (42),$$

pois sendo S_i orientada positivamente em relação a B_i , S_i fica orientada negativamente em relação a $\substack{n \\ S \cup B_i \\ i=1}$ e daí,

$$\int_{\substack{n \\ S \cup B_i \\ i=1}} -d\bar{W}_{12} = \int_{\substack{n \\ S_i \\ i=1}} W_{12} \quad \text{Também,}$$

$$\int_{\substack{n \\ S_i \\ i=1}} \bar{W}_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \bar{W}_{12} \quad \text{devido a (39).}$$

Agora, de (41) vem:

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \bar{W}_{12} - 2\pi \sum_{i=1}^n I_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (43)$$

De (42) e (43) vem:

$$\left| \int_{\substack{n \\ S \cup B_i \\ i=1}} K\sigma - 2\pi \sum_{i=1}^n I_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (44)$$

De (40) e (44) temos:

$$\left| \int_S K\sigma - 2\pi \sum_{i=1}^n I_i \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos: $\int_S K\sigma = 2\pi \left(\sum_{i=1}^n I_i \right)$

c.q.d.

1.2.3.2. TEOREMA DE GAUSS-BONNET

"Seja S uma variedade riemanniana de dimensão 2 compacta orientada. Então:

$$\int_S K\sigma = 2\pi \chi(S),$$

onde $\chi(S)$ é a característica de Euler-Poincaré de S ".

DEMONSTRAÇÃO:

Dada uma triangulação τ de S é possível construir um campo vetorial v em S possuindo $(V-A+F)$ pontos singulares onde:

V = número de vértices de τ

A = número de arestas de τ

F = número de triângulos de τ

Sejam:

$B = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_V\}$ o conjunto de vértices de τ

$C = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_A\}$ o conjunto de arestas de τ

$D = \{\tau_1, \dots, \tau_F\}$ o conjunto de triângulos de τ

Seja $E = B \cup C \cup D$.

O nosso campo v além da condição acima pode ser

construído de tal maneira que exista uma bijeção $\psi: E \rightarrow P$ tal que: $\phi \circ \psi|_B \equiv 1$, $\phi \circ \psi|_C \equiv -1$, $\phi \circ \psi|_D \equiv 1$, onde:

$P = \{p_1, \dots, p_n\}$ é o conjunto dos pontos singulares de v e

$\phi: P \rightarrow \{-1, 1\}$ é tal que $\phi(p_i) = \text{índice de } v \text{ em } p_i$,

ou seja, o nosso campo é tal que associa univocamente a cada vértice um ponto singular de índice 1, a cada aresta um ponto singular de índice -1 e a cada triângulo um ponto singular de índice 1.

Assim sendo, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n I_i &= \sum_{i=1}^n \phi(p_i) = \\ &= \sum_{i=1}^V (\phi \circ \psi)(\gamma_i) + \sum_{i=1}^A (\phi \circ \psi)(\alpha_i) + \sum_{i=1}^F (\phi \circ \psi)(\tau_i) = V - A + F = \chi(S) \end{aligned}$$

e assim, utilizando o teorema 1.2.3.1., temos:

$$\int_S K\sigma = 2\pi \chi(S)$$

c.q.d.

Uma indicação de como seria construído o campo v mencionado no teorema que acabamos de demonstrar é dada a seguir através do seguinte gráfico:

"O TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUB-
VARIEDADES DE $\mathbb{R}^n$ DE DIMENSÃO PAR"

O nosso objetivo neste capítulo é estabelecer um teorema do tipo GAUSS-BONNET, como o conhecemos na sua forma clássica para dimensão 2, no caso de subvariedades de $\mathbb{R}^n$ compactas orientáveis e de dimensão par. Para atingi-lo começaremos por estudar o caso das hipersuperfícies.

§2.1. - "O TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA HIPERSUPERFÍCIES DE DIMENSÃO PAR"

A parte central da demonstração do teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperfícies é um teorema devido a H.Hopf que afirma que o grau da aplicação normal de Gauss é igual à metade da característica de Euler-Poincaré da hipersuperfície. Começaremos portanto o parágrafo definindo grau de uma aplicação.

2.1.1. - DEFINIÇÃO DE GRAU DE UMA APLICAÇÃO

Sejam M, N variedades de mesma dimensão compactas, conexas, orientadas, $M, N \subset \mathbb{R}^n$. Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável.

Chamaremos de "grau de f " e denotaremos $gr(f)$ o número inteiro obtido da seguinte maneira:

Seja $c \in \mathbb{N}$ um valor regular de f e seja

$$f^{-1}(\{c\}) = \{x_1, \dots, x_p\}$$

Seja $B_{x_i} = \{e_{x_{i1}}, \dots, e_{x_{im}}\}$ uma base positiva de $T_{x_i}(M)$

e seja $\beta_{x_i} = \{df_{x_i}(e_{x_{i1}}), \dots, df_{x_i}(e_{x_{im}})\} \subset T_c(N)$

Sabemos que β_{x_i} é base de $T_c(N)$ devido a regularidade de c .

Definimos agora o número inteiro $\text{sgn}(x_i)$ por:

$$\text{sgn}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta_{x_i} \text{ é base positiva de } T_c(N) \\ -1 & \text{se } \beta_{x_i} \text{ é base negativa de } T_c(N) \end{cases}$$

Finalmente, "grau de f " será definido por

$$\text{gr}(f) = \sum_{i=1}^p \text{sgn}(x_i)$$

Cumpra-nos agora observar os seguintes fatos concernentes a definição de $\text{gr}(f)$:

1º) Existe sempre um valor regular $c \in \mathbb{N}$ devido ao Teorema de Sard (ver:16).

2º) O número inteiro $\text{sgn}(x_i)$ é obviamente independente da particular base positiva B_{x_i} que se escolha para $T_{x_i}(M)$. Na verdade o jacobiano, $\det(df_{x_i})$, não depende das particulares bases positivas escolhidas para $T_{x_i}(M)$ e $T_c(N)$. O sinal de $\det(df_{x_i})$ determinará $\text{sgn}(x_i)$.

3º) O conjunto $f^{-1}(\{c\})$ é realmente um conjunto finito por causa da compacidade de M e da regularidade de c .

4º) O número inteiro $gr(f)$ é independente da escolha do valor regular c .

Para provarmos a 4ª. afirmação necessitaremos de três lemas e do teorema da transversalidade homotópica.

2.1.1.1. - TEOREMA DA TRANSVERSALIDADE HOMOTÓPICA

"Para qualquer aplicação diferenciável $f: X \longrightarrow Y$ onde X, Y são variedades diferenciáveis e para qualquer subvariedade $Z \subset Y$, existe uma aplicação diferenciável $g: X \longrightarrow Y$ tal que:

- a) g é transversal a Z
- b) g é homotópica a f "

Para uma demonstração de 2.1.1.1. numa forma um pouco mais geral (ver 10).

2.1.1.2. - L E M A

"Sejam f, M, N como na definição de $gr(f)$. Então dado $c \in N$, $\exists g: M \longrightarrow N$ tal que:

- a) c é valor regular de g
- b) g é homotópica a f ".

DEMONSTRAÇÃO -

No teorema 2.1.1.1, façamos:

$M = X$, $N = Y$, $Z = \{c\}$ e lembremos que, devido a definição de transversalidade (ver 9), teremos:

g é transversal a $\{c\} \iff c$ é valor regular de g

c. q. d.

2.1.1.3. - L E M A

"Sejam f, M, N como no lema anterior e $g : M \longrightarrow N$ aplicação diferenciável homotópica a f . Seja $c \in N$ um valor regular de f e de g , com $f^{-1}(\{c\}) = \{x_1, \dots, x_p\}$ e $g^{-1}(\{c\}) = \{y_1, \dots, y_k\}$

$$\text{Então } \sum_{i=1}^p \text{sgn}(x_i) = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(y_i) "$$

Para uma demonstração do Lema acima ver (11).

2.1.1.4. - L E M A

"Sejam f, M, N como em 2.1.1.3 e seja $c \in N$ um valor regular de f . Então existem $v \in N$ e $U_1, \dots, U_k \subset M$ abertos tais que f aplica difeomorficamente U_i em $v \ominus c, v_i$. Aqui, o número inteiro $k = \# f^{-1}(\{c\})$, $f^{-1}(\{c\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$

Também $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$ "

DEMONSTRAÇÃO -

Para cada i , $1 \leq i \leq k$, temos, pela regularidade de c : $\det(df_{x_i}) \neq 0$. Logo, pelo teorema da função inversa, $\exists V_1, \dots, V_k \subset M$ tais que $V_i \ni x_i$ e $W_1, \dots, W_k \subset N$, $W_i \ni c \ominus v_i$, abertos em M e em N respectivamente e de tal maneira que $f : V_i \longrightarrow W_i$ é um difeomorfismo. Podemos supor ainda sem perda de generalidade que $V_i \cap V_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Sejam

$$V \subset N, V = \bigcup_{i=1}^k W_i$$

$$U_i \subset N, U_i = f^{-1}(V) \cap V_i, i=1,2,\dots,k$$

$V, U_1, \dots, U_k$ são obviamente os abertos requeridos pelo lema

c. q. d.

2.1.1.5. - TEOREMA

"Sejam f, M, N como na definição de "grau de f " e sejam c_1, c_2 dois valores regulares de f tais que $f^{-1}(\{c_1\}) = \{x_{11}, \dots, x_{1k}\}$, $f^{-1}(\{c_2\}) = \{x_{21}, \dots, x_{2p}\}$. Então $\sum_{i=1}^k \text{sgn}(x_{1i}) = \sum_{i=1}^p \text{sgn}(x_{2i})$ "

DEMONSTRAÇÃO -

Seja $\phi: N \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida da seguinte maneira:

$$\phi(c) = \sum_{i=1}^r \text{sgn}(y_i) \text{ onde } \text{sgn}(y_i) \text{ refere-se a uma apli-}$$

cação $g: M \longrightarrow N$ homotópica a f e tal que $g^{-1}(\{c\}) = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ sendo c um valor regular de g .

A aplicação ϕ está bem definida devido aos lemas 2.1.1.2 e 2.1.1.3.

Dado $c \in N$, seja g homotópica a f e tal que c seja um valor regular de g . Seja $V \ni c, U_1, U_2, \dots, U_r$, abertos nas variedades N e M respectivamente com $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e tais que $g: U_i \longrightarrow V$ seja um difeomorfismo V_i . Tal escolha é sempre possível em virtude do lema 2.1.1.4. Temos também $y_i \in U_i \cap V_i$.

Seja $\bar{V} \subset V$ um aberto de N contendo c tal que
 $g(M - \bigcup_{i=1}^r U_i) \cap \bar{V} = \emptyset$. A existência de uma vizinhança $\bar{V}$ de c
 $i=1$

nestas condições é garantida pelo seguinte:

Suponhamos por absurdo que para todo aberto $\bar{V}$ de N ,
 $\bar{V} \ni c$, $\bar{V} \subset V$, existe $\bar{x} \in (M - \bigcup_{i=1}^r U_i)$ tal que $g(\bar{x}) \in \bar{V}$. Teremos
 $i=1$
então uma sequência $(\bar{x}_n)$ em $(M - \bigcup_{i=1}^r U_i)$ tal que $|g(\bar{x}_n) - c| \rightarrow 0$
 $i=1$
quando $n \rightarrow \infty$.

Como $(M - \bigcup_{i=1}^r U_i)$ é compacto e g é contínua segue que

$\exists \bar{x} \in (M - \bigcup_{i=1}^r U_i)$ tal que $g(\bar{x}) = c$. Isto é absurdo pois

$$g^{-1}(\{c\}) = \{y_1, \dots, y_r\}, \quad y_i \in U_i.$$

Seja agora $\bar{U}_i = g^{-1}(\bar{V}) \cap U_i$

Teremos:

1) $g : \bar{U}_i \rightarrow \bar{V}$ é um difeomorfismo $\forall i$

2) Se $d \in \bar{V}$ então $f^{-1}(\{d\}) = \{z_1, \dots, z_r\}$ onde $z_i \in \bar{U}_i$

Sendo assim, teremos evidentemente:

$$\phi(d) = \phi(c) \quad \forall d \in \bar{V}$$

Isto significa que ϕ é localmente constante. Como N é co
nexo, teremos $\phi(d) = \phi(c_1) = \phi(c_2)$, $\forall d \in N$, ou seja ϕ é cons
tante em N .

Mas agora:

$$\phi(c_1) = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}(x_{1i}) \quad \text{devido ao lema 2.1.1.3.}$$

$$\phi(c_2) = \sum_{i=1}^p \operatorname{sgn}(x_{2i})$$

c. q. d.

Com o teorema 2.1.1.5. fica estabelecido que a definição de grau de uma aplicação é boa no sentido em que só depende da aplicação em questão e das superfícies orientadas com as quais a aplicação está envolvida.

2.1.2. - DEFINIÇÃO DE ÍNDICE DE UM CAMPO VETORIAL

Seja S uma variedade de dim n , $S \subset \mathbb{R}^n$, e seja v um campo vetorial em S .

Diremos que um ponto $p \in S$ é uma "singularidade" de v quando $v(p) = 0$.

Seja agora v um campo vetorial em $\mathbb{R}^k$ e p uma singularidade isolada de v , isto é, p é tal que $\exists$ vizinhança $V \ni p$ de $\mathbb{R}^k$ tal que $q \in V, q \neq p \implies v(q) \neq 0$.

Seja $B(p, r)$ uma bola fechada de centro em p e raio $r > 0$ tal que $q \in B(p, r), q \neq p \implies v(q) \neq 0$.

Seja $\sigma : S(p, r) \longrightarrow S^{k-1}$ dada por $\sigma(q) = \frac{v(q)}{|v(q)|}$ onde

$S(p, r) = \partial B(p, r)$, S^{k-1} é a esfera unitária $(k-1)$ dimensional de $\mathbb{R}^k$. Definimos então um número inteiro denominado "índice de v em p " e denotado " $\operatorname{Ind}_p v$ " por:

$\text{Ind}_p v = \text{gr}(\sigma)$, onde $S(p,r)$ e S^{k-1} tem a orientação usual dada pelo vetor normal exterior.

O índice de um campo vetorial em $\mathbb{R}^k$ com relação a uma singularidade p está bem definida uma vez que independe das particulares bolas $B(p,r)$ escolhidas para sua definição.

Para ver isto nós precisaremos do lema 2.1.1.3 (que na verdade estabelece que duas aplicações homotópicas possuem o mesmo grau) e de um outro lema que enunciaremos e provaremos a seguir.

2.1.2.1. - LEMA

"Seja $f : W \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades conexas e orientadas sendo W uma variedade com bordo ' difeomorfa a $S^{k-1} \times [0,1]$ e onde $\partial W = W_1 \sqcup W_2$

sendo $\begin{cases} W_1 \text{ difeomorfa a } S^{k-1} \\ W_2 \text{ difeomorfa a } S^{k-1} \end{cases}$

Sejam $f_1 = f|_{W_1}$, $f_2 = f|_{W_2}$. Suponhamos que:

- 1) $\dim N = k - 1$
- 2) N é variedade sem bordo
- 3) W_1 tem a orientação induzida por W e W_2 tem a orientação contrária àquela induzida por W .

Nestas condições vale:

$$\text{gr}(f_1) = \text{gr}(f_2) "$$

DEMONSTRAÇÃO

Sendo $\psi : W \longrightarrow S^{k-1} \times I$ um difeomorfismo que preserva as orientações ($S^{k-1} \times I$ está orientada da maneira usual) .
 $I = [0,1]$.

Suponhamos:

$$\psi(W_1) = S^{k-1} \times \{0\}$$

$$\psi(W_2) = S^{k-1} \times \{1\}$$

Seja $\phi : W_1 \longrightarrow W_2$ um difeomorfismo definido por

$$\phi(x) = (\psi^{-1} \circ \eta \circ \psi)(x) , \text{ onde :}$$

$$\eta : S^{k-1} \times \{0\} \longrightarrow S^{k-1} \times \{1\} \text{ e é tal que } \eta(x,0)=(x,1)$$

Se considerarmos $S^{k-1} \times \{0\}$ e $S^{k-1} \times \{1\}$ com as orientações induzidas pela orientação de $S^{k-1} \times I$, teremos:

- a) ψ preserva as orientações de W_1 e $S^{k-1} \times \{0\}$
- b) η inverte as orientações de $S^{k-1} \times \{0\}$ e $S^{k-1} \times \{1\}$
- c) ψ^{-1} inverte as orientações de $S^{k-1} \times \{1\}$ e W_2 pois

W_2 tem a orientação contrária àquela induzida por W .

Logo ϕ preserva as orientações.

$$\text{Assim é evidente que } \text{gr}(f_2 \circ \phi) = \text{gr}(f_2) \quad (1)$$

$$\text{Mas } f_2 \circ \phi \text{ é homotópica a } f_1 \quad (2)$$

Para vermos isto seja:

$$H : W_1 \times I \longrightarrow N \text{ dada por}$$

$$H(x,t) = f(\psi^{-1}(\pi_1 \circ \psi)(x),t) , \text{ onde } \pi_1 : S^{k-1} \times I \longrightarrow S^{k-1},$$

$$, \pi_1(x,t) = x.$$

H é obviamente diferenciável e

$$H(x,0) = f(\psi^{-1}(\pi_1 \circ \psi)(x),0) = f_1(x)$$

$$H(x,1) = f(\psi^{-1} \circ \eta \circ \psi)(x) = (f_2 \circ \phi)(x)$$

Fica assim estabelecido (2). Agora, devido ao lema 2.1.1.3. temos:

$$\text{gr}(f_2 \circ \phi) = \text{gr}(f_1) \text{ e de (1) segue que } \text{gr}(f_1) = \text{gr}(f_2)$$

c. q. d.

Como resultado do lema 2.1.2.1. vemos que o índice de um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ independe das particulares bolas $B(p,r)$ escolhidas na sua definição.

Realmente, se p é uma singularidade de um campo v em $\mathbb{R}^k$ e $S(p,r)$, $S(p,r')$ são duas esferas que estejam nas condições impostas na definição do índice de v em p então teremos:

$$1) B(p,r) \overset{0}{=} B(p,r') \text{ é homeomorfa a } S^{k-1} \times I$$

$$2) \partial(B(p,r) \overset{0}{=} B(p,r')) = S(p,r) \sqcup S(p,r')$$

$$3) f : (B(p,r) \overset{0}{=} B(p,r')) \longrightarrow S^{k-1} \text{ dada por}$$

$$f(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|} \text{ é uma aplicação diferenciável tal que}$$

$$f \Big|_{B(p,r)} = f_1 = \sigma_1, \quad f \Big|_{B(p,r')} = f_2 = \sigma_2$$

$$4) \dim S^{k-1} = k - 1$$

$$5) S^{k-1} \text{ é variedade sem bordo}$$

6) $S(p, r)$ como esfera de $\mathbb{R}^k$ com a orientação usual dada pelo vetor normal exterior tem a mesma orientação daquela dada pela orientação da coroa $(B(p, r) - \overset{0}{B}(p, r'))$

7) $S(p, r')$ com a orientação usual do vetor normal exterior tem a orientação contrária àquela dada pela orientação de $B(p, r) - \overset{0}{B}(p, r')$.

Assim:

$\text{gr}(\sigma_1) = \text{gr}(\sigma_2)$ que é o que desejávamos.

Seja agora S uma subvariedade orientada de $\mathbb{R}^{n+p}$ e dimensão n . Seja $p \in S$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow S$ uma parametrização contendo p e tal que $0 \in U$, $f(0) = p$.

Definimos o aberto $B_{p,f}^\varepsilon$ de S por

$B_{p,f}^\varepsilon = f(\overset{0}{B}(0, \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$ e denotamos $\partial B_{p,f}^\varepsilon$ por $S_{p,f}^\varepsilon$.

Assim $S_{p,f}^\varepsilon = f(S(0, \varepsilon))$.

Seja v um campo vetorial em S e p uma singularidade de v .

Seja $B_{p,f}^\varepsilon$ uma bola coordenada de raio $\varepsilon > 0$ e tal que se

$q \in B_{p,f}^\varepsilon$, $q \neq p$ então $v(q) \neq 0$.

Definimos então o "índice de v em p " e denotamos $\text{Ind}_p v$ por:

$\text{Ind}_p v = \text{gr}(\sigma)$ onde

$\sigma : S_{p,f}^\varepsilon \longrightarrow S^{n-1}$ e é dada por

$\sigma(q) = \frac{v(q)}{|v(q)|}$ e onde $S_{p,f}^\varepsilon$ tem a orientação induzida

pela orientação da subvariedade com bordo $\bar{B}_{p,f}^\epsilon$ de S .

Vamos mostrar agora que esta definição de índice não depende nem do raio $\epsilon > 0$ nem da parametrização f .

1º) $\text{Ind}_p v$ não depende de $\epsilon > 0$:

Dados $\epsilon' > \epsilon > 0$, aplicando o lema 2.1.2.1. à região $(\bar{B}_{p,f}^\epsilon - \bar{B}_{p,f}^{\epsilon'})$ que é difeomorfa a $S^{n-1} \times I$, teremos o resultado desejado.

2º) $\text{Ind}_p v$ não depende de f , parametrização de S :

Dadas duas parametrizações f, g satisfazendo as condições da definição de $\text{Ind}_p v$, tomemos $\epsilon, \epsilon' > 0$ tais que

$\bar{B}_{p,f}^\epsilon \not\supset \bar{B}_{p,g}^{\epsilon'}$. Agora apliquemos o lema 2.1.2.1 à região $(\bar{B}_{p,f}^\epsilon - \bar{B}_{p,g}^{\epsilon'})$ que é difeomorfa a $S^{n-1} \times I$ e com 1º) teremos o desejado.

Isto encerra esta seção estabelecendo uma boa definição para $\text{Ind}_p v$.

2.1.3. - O TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA HIPERSUPERFÍCIES DE DIMENSÃO PAR.

Para a demonstração do Teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperfícies de dimensão par necessitaremos de 3 lemas e alguns teoremas clássicos. O ponto crucial da demonstração consiste em aplicar o teorema de H. Hopf a que nos referimos no início do capítulo, depois de utilizarmos a formula integral do

grau para a forma diferencial $K\sigma$ em S . A maior parte dos teoremas serão apenas enunciados e quase todos servirão apenas para estabelecer o teorema do grau da aplicação normal.

Começaremos por enunciar e provar 2 lemas.

2.1.3.1. - L E M A

"Seja S uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^n$ e v um campo vetorial em S . Suponhamos que $x_0 \in S$, $v(x_0) = 0$.

Então $dv_{x_0} : T_{x_0}(S) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é tal que $dv_{x_0}(T_{x_0}(S)) \subset T_{x_0}(S)$ "

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S$ tal que

$\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) \neq 0$, $\gamma'(0) \in T_{x_0}(S)$. Seja $\alpha(t) = v(\gamma(t))$

Sabemos que:

$$dv_{x_0}(\gamma'(0)) = \alpha'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t}$$

logo, existe o $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t}$. O que temos que provar é que

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t} \in T_{x_0}(S)$. Para tanto seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow S$ uma para-

metrização de S tal que $f(U) \ni x_0$.

Seja $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(t), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(t) \right\}$ uma base coordenada de

$T_{\gamma(t)}(S)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Teremos:

$$\frac{\alpha(t)}{t} = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t) \quad \forall t \neq 0$$

também,

$$\alpha_i(t) = \left\langle \frac{\alpha(t)}{t}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(t) \right\rangle \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t) \right|} \quad \forall t \neq 0$$

logo, como existe $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t}$, existe $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t)$ e existe

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t) \right|} \quad \text{teremos:}$$

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_i(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right\rangle \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right|}$$

Assim :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^m \alpha_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t) = \sum_{i=0}^m \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_i(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \in$$

$\in T_{x_0}(S)$

c. q. d.

2.1.3.2. - L E M A :

"Seja $f_t : X \longrightarrow X$ uma aplicação diferenciável entre subvariedades de $\mathbb{R}^n$ sendo X compacta e sem bordo definida por:

$$f_t(x) = \pi(x + t v(x)) \quad \text{onde } v \text{ é um campo vetorial em } X \text{ e}$$

π é a projeção ortogonal da vizinhança ε de X (ver (9)), $t \geq 0$.

Nestas condições, numa singularidade x_0 de v temos:

$$d(f_t)_{x_0} = I + t dv_{x_0} \quad \text{onde } I \text{ é a identidade em } T_{x_0}(X) "$$

DEMONSTRAÇÃO :

$$d(f_t)_x = d\pi_{(x+tv(x))} \circ d\phi_x \text{ onde}$$

$$\phi(x) = x + t v(x)$$

Mas

$$x_0 + t v(x_0) = x_0 \text{ pois } v(x_0) = 0$$

$$\text{logo } d(f_t)_{x_0} = d\pi_{x_0} \circ d\phi_{x_0}$$

Mas

$$d\phi_x = I + v(x) + t dv_x, \text{ portanto } d\phi_{x_0} = I + t dv_{x_0}$$

logo

$$d(f_t)_{x_0} = d\pi_{x_0} \circ (I + t dv_{x_0})$$

Mas

$$d\pi_{x_0} \Big|_{T_{x_0}(X)} = I \text{ pois } \pi|_X = I \text{ e } dv_{x_0} : T_{x_0}(X) \longrightarrow T_{x_0}(X)$$

(lema 2.1.3.1.)

logo

$$d(f_t)_{x_0} = I + t dv_{x_0}$$

c. q. d.

2.1.3.3. - LEMA

"Seja v um campo vetorial em X , subvariedade de R^n compacta

e orientada. Uma singularidade x_0 de v diz-se não degenerada se $dv_{x_0} : T_{x_0}(X) \longrightarrow T_{x_0}(X)$ (lema 2.1.3.1) é um isomorfismo.

Nestas condições temos:

- 1) Singularidades não degeneradas são isoladas
- 2) Numa singularidade não degenerada x_0 temos:

$\text{ind}_{x_0} v = 1$ se dv_{x_0} preserva a orientação em $T_{x_0}(X)$

$\text{ind}_{x_0} v = -1$ se dv_{x_0} inverte a orientação de $T_{x_0}(X)$

DEMONSTRAÇÃO

Quanto a isolabilidade das singularidades não degeneradas, basta considerar v como aplicação de X em $\mathbb{R}^n$ e lembrar que em pontos x de X tais que dv_x é monomorfismo, v é localmente injetora em x .

A compacidade de X junto com a isolabilidade das singularidades não degeneradas acarreta que o conjunto das singularidades não degeneradas de X é finito.

Passemos agora à demonstração da parte 2) do teorema:

Se x_0 é singularidade não degenerada de v então:

$$d(f_t)_x - I = I + t dv_x - I = t dv_x \quad (\text{lema 2.1.3.2})$$

Também

$$\det(d(f_t)_{x_0} - I) = \det t dv_{x_0} \neq 0 \quad \forall t \neq 0$$

Assim, x_0 é ponto fixo de Lefschetz para f_t (ver(12))

Reciprocamente se x é ponto fixo de Lefschetz de f_t então para $t \neq 0$, $\det(d(f_t)_x - I) \neq 0$, $v(x) = 0$ e portanto, x é singularidade não degenerada de v .

Agora, sabemos que (ver(14))

$$\text{Ind}_{x_0} v = L_{x_0}(f_t) \text{ onde}$$

$L_{x_0}(f_t)$ é o número de Lefschetz para x_0

Assim:

$$dv_{x_0} \text{ preserva orientação} \xRightarrow{t>0} \det t \, dv_{x_0} > 0 \xRightarrow{t>0}$$

$$\det d(f_t)_{x_0} - I > 0 \xRightarrow{} L_{x_0}(f_t) = 1 \xRightarrow{} \text{Ind}_{x_0} v = 1$$

Analogamente,

se dv_{x_0} inverte a orientação então $\text{Ind}_x v = -1$

c. q. d.

2.1.3.4. - FÓRMULA DO GRAU

"Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação diferenciável onde X e Y são subvariedades de $\mathbb{R}^n$ compactas orientadas sem bordo e de dimensão k e seja w uma k -forma diferencial em Y .

Então

$$\int_X f^* w = \text{gr}(f) \cdot \int_Y w \quad "$$

Para uma demonstração de 2.1.3.4. (ver (15)).

2.1.3.5. - TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

"Se v é um campo vetorial numa variedade compacta orientável com um número finito de singularidades então a soma dos índices de v é igual à característica de Euler-Poincaré de S ".

Para uma demonstração do teorema que acabamos de enunciar ver (13).

2.1.3.6. - TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS DE DIMENSÃO PAR.

"Seja X uma hipersuperfície compacta orientada de dimensão par. Suponhamos $\dim X = 2p = n$. Então

$$\int_X K = \frac{1}{2} \omega_n \chi(X) \quad \text{onde:}$$

- 1) K é a curvatura de Gauss-Kroenecker de X
- 2) ω_n é o volume da esfera unitária n -dimensional
- 3) $\chi(X)$ é a característica de Euler-Poincaré de X "

DEMONSTRAÇÃO

$$\int_X K = \int_X J_g v_X = \int_X g^* v_{S^n} = \text{gr}(g) \int_{S^n} v_{S^n} = \text{gr}(g) \omega_n$$

onde g é a aplicação normal de Gauss para X ; v_X , v_{S^n} são os elementos de volume de X e S^n respectivamente e J_g é o jacobiano de g .

Resta-nos provar então:

$\text{gr}(g) = \frac{1}{2} \chi(X)$ que é o teorema devido a H. Hopf já mencionado.

Para tanto, sejam $a, -a \in S^n$ dois valores regulares de g . A escolha desses dois valores regulares antípodas é possível por dois motivos:

- 1º) O conjunto dos valores regulares " R " de g é aberto
- 2º) O conjunto dos valores não regulares de g tem medida nula (Teorema de Sard), e portanto R é denso em S^n .

Daí, como a aplicação antípoda A em S^n é aberta, $A(R)$ é

aberto, logo $A(R) \cap R \neq \emptyset$ pois R é denso em S^n .

Seja então $v : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ o campo vetorial em X definido por

$$v(x) = \langle a, g(x) \rangle g(x) - a$$

Teremos:

$$v(x) = 0 \iff g(x) = \pm a$$

Além disso:

$$v = T \circ (\langle a, g \rangle g)$$

onde $T : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por:

$$T(x) = x - a$$

Seja $\langle a, g \rangle g = w$, Teremos:

$$dv_x = d(T \circ w)_x = dT_{w(x)} \circ dw_x = I \circ dw_x = dw_x$$

Se $g(x) = a$ e $\gamma = \gamma(t)$ é uma curva diferenciável em X tal que: $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = T_x(X)$ então

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} \Big|_0 &= \frac{dw}{dt} \Big|_0 = \left\langle a, \frac{dg}{dt} \right\rangle \Big|_0 \cdot g(0) + \langle a, g(0) \rangle \frac{dg}{dt} \Big|_0 = \\ &= \langle a, g(0) \rangle \frac{dg}{dt} \Big|_0 = \frac{dg}{dt} \Big|_0, \text{ pois } \langle a, g(0) \rangle = 1 \end{aligned}$$

logo $dv_x = dg_x$.

Se $g(x) = -a$ então, teremos de forma análoga:

$$\frac{dv}{dt} \Big|_0 = - \frac{dg}{dt} \Big|_0 \text{ e portanto } dv_x = - dg_x$$

Resumindo:

$$g(x) = a \implies dg_x = dv_x$$

$$g(x) = -a \implies dg_x = -dv_x$$

Sabemos também que dv_x é um isomorfismo se $g(x) = \pm a$ por causa da regularidade de $\pm a$.

Então, pelo Lema 2.1.3.1 e pelo fato de $v(x) = 0$ temos:

$dv_x : T_x(X) \longrightarrow T_x(X)$ é um isomorfismo se $g(x) = \pm a$.

Sabemos também

$\text{Ind}_x v = \pm 1$ conforme dv_x preserve ou inverta a orientação (lema 2.1.3.3.).

Suponhamos

$$g^{-1}(\{a\}) = \{x_1, \dots, x_k\} \quad g^{-1}(\{-a\}) = \{y_1, \dots, y_p\}$$

Teremos:

$$\text{Ind } v = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{x_i} v + \sum_{i=1}^p \text{Ind}_{y_i} v$$

Também:

$$\text{gr}(g) = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(x_i) = \sum_{i=1}^p \text{sgn}(y_i), \text{ onde "sgn", refere-se}$$

à apl. g

Mas,

se $g(x) = a$ então $dg_x = dv_x$, logo

$$\det dg_x = \det dv_x.$$

Assim, para $g(x) = a$ temos:

dv_x preserva a orientação $\iff dg_x$ preserva a orientação

$$dv_x \quad dg_x : T_x(X) \longrightarrow T_x(X)$$

logo

$$\text{Ind}_{x_i} v = \text{sgn}(x_i) \quad \forall i \implies \sum_{i=1}^k \text{ind}_{x_i} v = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(x_i) = \text{gr}(g)$$

Também:

$$\text{se } g(x) = -a \text{ então } dg_x = -dv_x, \text{ logo } \det dg_x = \det dv_x,$$

pois $\dim T_x(X) = n = 2p(\text{par})$.

Portanto, para $g(x) = -a$, teremos de forma análoga:

$$\text{Ind}_{y_i} v = \text{sgn}(y_i) \quad \forall i \quad \text{e portanto} \quad \sum_{i=1}^p \text{Ind}_{y_i} v = \text{gr}(g)$$

Assim:

$$\text{Ind } v = 2 \text{ gr}(g) \text{ e } \text{gr}(g) = \frac{1}{2} \text{ Ind } v = \frac{1}{2} \chi(X) \text{ devido}$$

ao teorema de Poincaré- Hopf.

c. q. d.

§ 2.2. - O TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA SUBVARIEDADES DE $\mathbb{R}^n$

2.2.1. - DEFINIÇÃO DE CURVATURA

Seja V_n uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+\rho}$ compacta, orientada de dimensão $n = 2\eta$, $\eta \in \mathbb{N}$. Podemos supor sem perda da generalidade que ρ é ímpar, pois : ρ par $\implies \rho + 1$ ímpar, $V_n \subset \mathbb{R}^{n+\rho} \implies \implies V_n \subset \mathbb{R}^{n+\rho+1}$.

Vamos definir uma função escalar K , denominada função de curvatura, na variedade V_n da seguinte maneira:

Seja v um vetor unitário normal a V_n em $p \in V_n$ e seja $N^V = N^V(q)$ um campo vetorial unitário e normal a V_n definido numa vizinhança de V_n contendo p e tal que $N^V(p) = v$.

Definamos inicialmente o escalar $K_p(v)$ por

$K_p(v) = \det(\pi_p \circ dN_p^V)$, onde π_p é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^{n+\rho}$ em $T_p(V_n)$.

Podemos agora definir $K : V_n \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$K(p) = \frac{\omega_n}{2 \omega_{n+\rho-1}} \int_{\Omega_{\rho-1}} K_p(v) d\omega_{\rho-1}, \text{ onde :}$$

$\Omega_{\rho-1}$ é a esfera unitária de dimensão $\rho - 1$ de $\mathbb{R}^{n+\rho}$ normal a

$T_p(V_n)$

ω_n é o volume da esfera unitária de dimensão n .

$\omega_{n+\rho-1}$ é o volume da esfera unitária de dimensão $n + \rho - 1$

$d\omega_{\rho-1}$ é o elemento de volume de $\Omega_{\rho-1}$

A definição de K é boa no sentido de que não depende dos particulares campos locais N_p^V tomados para sua construção. Na verdade, os escalares $K_p(v)$ só dependem de p e de v .

Para ver tal fato seja $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ($i=1, \dots, n$) curvas em V_n parametrizadas pelo comprimento de arco e tais que:

$\alpha_i(0) = p$, $\alpha'_i(0) = e_i$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortogonal normal de $T_p(V_n)$.

Para $u \in T_p(V_n)$, $u = \sum_{i=1}^n a_i \alpha'_i(0)$, teremos:

$$\begin{aligned} (\pi_p \circ dN_p^V)(u) &= (\pi_p \circ dN_p^V) \left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha'_i(0) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \pi_p(dN_p^V(\alpha'_i(0))) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \langle dN_p^V(\alpha'_i(0)), \alpha'_j(0) \rangle \alpha'_j(0) \end{aligned}$$

$$\text{pois } \pi_p(w) = \sum_{j=1}^n \langle w, e_j \rangle e_j, \quad w \in \mathbb{R}^{n+\rho}$$

Mas

$$dN_p^V(\alpha'_i(0)) = \frac{d(N_p^V \circ \alpha_i)}{dt} \Big|_0 \quad \text{e sabemos que}$$

$$\langle (N_p^V \circ \alpha_i)'(t), \alpha_j''(t) \rangle = 0 \quad \forall i, j, \quad \forall t,$$

$$\text{logo } \langle (N_p^V \circ \alpha_i)'(t), \alpha_j''(t) \rangle = - \langle (N_p^V \circ \alpha_i)(t), \alpha_j'''(t) \rangle$$

e, em particular

$$\begin{aligned} \langle d N_p^V (\alpha_i'(0)), \alpha_j''(0) \rangle &= - \langle (N_p^V \circ \alpha_i)(0), \alpha_j'''(0) \rangle = \\ &= - \langle v, \alpha_j'''(0) \rangle \end{aligned}$$

Como, $\alpha_j'(0) = e_i$, teremos:

$$(\pi_p \circ d N_p^V)(u) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \langle v, \alpha_j'''(0) \rangle e_j$$

Agora, como a escolha das curvas α_i não depende de N_p^V , temos que $(\pi_p \circ d N_p^V)$ não depende de N_p^V .

Portanto, $\det(\pi_p \circ d N_p^V)$ só depende de p e de v , como queríamos.

Antes de passarmos ao enunciado e à prova do Teorema de Gauss-Bonnet para subvariedades de $\mathbb{R}^n$ gostaríamos de observar que para o caso de V_n ser uma hipersuperfície, a definição de curvatura dada acima coincide com a da curvatura de Gauss-Kronecker de V_n .

Realmente, no caso de hipersuperfícies só existe uma única extensão local N possível para o vetor $v \in T_p(V_n)$. Além disso, se $z_i = z_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, é um sistema de coordenadas locais para V_n em p temos:

$$\det(\pi_p \circ dN_p) = \det(dN_p) = \frac{\det(v, \frac{\partial N}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial N}{\partial x_n})}{\det(v, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n})} \Bigg|_p \quad (1)$$

Como existem precisamente dois vetores unitários normais a V_n em $p \in V_n$, obtemos, colocando v e $-v$ como os dois vetores unitários normais a V_n em p .

$$K(p) = \frac{\omega_n}{\partial \omega_n} \int_{\Omega_0} K_p(v) d\omega_0 = \frac{1}{2} (K_p(v) + K_p(-v))$$

Mas pela expressão (1) e pelo fato de n ser par concluímos que $K_p(v) = K_p(-v)$. Logo:

$$K(p) = K_p(v) = \det(dN_p), \text{ como queríamos.}$$

2.2.2. - TEOREMA DE GAUSS-BONNET

"Seja V_n uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+p}$ compacta orientada e de dimensão $n = 2\eta$, $\eta \in \mathbb{N}$. Então

$$\int_{V_n} K d\sigma = \frac{1}{2} \omega_n \chi(V_n), \text{ onde } p \text{ é suposto ímpar e}$$

K é a curvatura de V_n como foi definida acima,

$d\sigma$ é o elemento de volume de V_n ,

ω_n é o volume da esfera unitária de dimensão n ,

$\chi(V_n)$ é a característica de Euler-Poincaré de V_n .

DEMONSTRAÇÃO

Seja $V_{n+\rho-1}^*$ o bordo (compacto) de uma vizinhança tubular de V_n de raio admissível $r > 0$ (ver(20)).

O teorema de dualidade de Alexander(ver(2)) fornece :

$$p^r(V_{n+\rho-1}^*) = p^{n+\rho-r-1}(\mathbb{R}^{n+\rho} - V_{n+\rho-1}^*) \text{ se } r \neq n+\rho-1$$

$$p^{n+\rho-1}(V_{n+\rho-1}^*) = p^0(\mathbb{R}^{n+\rho} - V_{n+\rho-1}^*) - 1$$

onde $p^0, p^1, \dots, p^{n+\rho-1}$, são os números de Betti da variedade entre parênteses.

$$\text{Como } \chi(s) = \sum_{i=0}^n (-1)^i p^i(s) \text{ temos que}$$

$$\chi(V_{n+\rho-1}^*) = \chi(\mathbb{R}^{n+\rho} - V_{n+\rho-1}^*) - 1$$

Mas, $\mathbb{R}^{n+\rho} - V_{n+\rho-1}^*$ tem duas componentes conexas : uma delas é uma vizinhança de V_n , a outra tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^{n+\rho} - V_n$.

Assim,

$$\chi(\mathbb{R}^{n+\rho} - V_{n+\rho-1}^*) = \chi(V_n) + \chi(\mathbb{R}^{n+\rho} - V_n)$$

Novamente, o teorema de dualidade de Alexander fornece:

$$\chi(\mathbb{R}^{n+\rho} - V_n) = \chi(V_n) + 1$$

Assim:

$$\chi(V_{n+\rho-1}^*) = \chi(V_n) + \chi(V_n) + 1 - 1 = 2 \chi(V_n)$$

Por outro lado, como $V_{n+\rho-1}^*$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+\rho}$, temos:

$$\int_{V_{n+\rho-1}^*} K^* d\sigma^* = \frac{1}{2} \omega_{n+\rho-1} \chi(V_{n+\rho-1}^*)$$
 devido ao teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperfícies provado no parágrafo

2.1. Assim, resta-nos provar que:

$$\int_{V_{n+\rho-1}^*} K^* d\sigma^* = \frac{2 \omega_{n+\rho-1}}{\omega_n} \int_{V_n} K d\sigma,$$

onde K^* é a curvatura de Gauss-Kroenecker de $V_{n+\rho-1}^*$ e $d\sigma^*$ seu elemento de volume.

Para tanto, seja $U = V \times W \subset \mathbb{R}^{\rho-1} \times \mathbb{R}^n$ e seja

$g : U \longrightarrow V_{n+\rho-1}^* \subset \mathbb{R}^{n+\rho}$ uma parametrização local para $V_{n+\rho-1}^*$ tal que:

$$g(t_1, \dots, t_{\rho-1}, x_1, \dots, x_n) = y(x_1, \dots, x_n) + r v(t_1, \dots, t_{\rho-1}, x_1, \dots, x_n)$$

onde $y : W \longrightarrow V_n$ é uma parametrização local para V_n e

$v : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+\rho}$ é tal que:

- 1) $v(t_1, \dots, t_{\rho-1}, x_1, \dots, x_n) \perp V_n$ em $y(x_1, \dots, x_n)$
- 2) $|v(t_1, \dots, t_{\rho-1}, x_1, \dots, x_n)| = 1 \quad \forall (t_1, \dots, t_{\rho-1}, x_1, \dots, x_n) \in U$
- 3) $\det \left(v, \frac{\partial g}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial g}{\partial x_\mu} \right)_{\substack{\alpha=1, \dots, \rho-1 \\ \mu=1, \dots, n}} > 0$

A existência de uma parametrização g nestas condições, satisfazendo 1) e 2) é garantida pelo fato de $V_{n+\rho-1}^*$ ser o bordo de uma vizinhança tubular de raio r .

É possível também obter $\det(v, \frac{\partial g}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial g}{\partial x_\mu})_{\substack{\alpha=1, \dots, \rho-1 \\ \mu=1, \dots, n}} > 0$

Para ver isto coloquemos:

$$\det(v, \frac{\partial g}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial g}{\partial x_\mu})_{\substack{\alpha=1, \dots, \rho-1 \\ \mu=1, \dots, n}} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} v_1, r \frac{\partial v_1}{\partial t_1}, \dots, r \frac{\partial v_1}{\partial t_{\rho-1}}, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + r \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + r \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ v_{n+\rho}, r \frac{\partial v_{n+\rho}}{\partial t_1}, \dots, r \frac{\partial v_{n+\rho}}{\partial t_{\rho-1}}, \frac{\partial y_{n+\rho}}{\partial x_1} + r \frac{\partial v_{n+\rho}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_{n+\rho}}{\partial x_n} + r \frac{\partial v_{n+\rho}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Por outro lado, podemos escolher uma parametrização

$y : W \longrightarrow V_n$ tal que

$$\det(v, \frac{\partial v}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial y}{\partial x_\mu})_{\substack{\alpha=1, \dots, \rho-1 \\ \mu=1, \dots, n}} > 0, \text{ possivelmente}$$

permutando as coordenadas x_μ para y .

Agora, levando-se em conta a expressão (3) e tomando-se r suficientemente pequeno, teremos:

$$\det\left(v, \frac{\partial g}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial g}{\partial x_\mu}\right)_{\substack{\alpha=1, \dots, \rho-1 \\ \mu=1, \dots, n}} \text{ que é o que queríamos}$$

mostrar.

Podemos ainda supor que $V_{n+\rho-1}^*$ está dividida em um número finito de regiões fechadas do tipo $\overline{g(U)}$, que admitem parametrizações do tipo acima e tais que se $V_{n+\rho-1}^* = \bigcup_{i=1}^m V_i^*$ é a decomposição a que nos referimos, então:

$$V_i \cap V_j \text{ tem medida nula se } i \neq j$$

Para fixar notação coloquemos $g_\lambda : U_\lambda \longrightarrow V_\lambda^*$ para indicar as parametrizações em que $V_{n+\rho-1}^*$ está decomposta.

Tal divisão de $V_{n+\rho-1}^*$ é possível graças à orientabilidade e compacidade de V_n e $V_{n+\rho-1}^*$.

Agora, levando-se em conta o item 3) referente à parametrização g e (1), temos:

$$K^* = \frac{\det\left(v, \frac{\partial v}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial v}{\partial x_\mu}\right)}{\det\left(v, \frac{\partial g}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial g}{\partial x_\mu}\right)} \text{ e } d\sigma^* = \det\left(v, \frac{\partial g}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial g}{\partial x_\mu}\right)_{\substack{\alpha=1, \dots, \rho-1 \\ \mu=1, \dots, n}}$$

Por isso,

$$\int_{V_{n+\rho-1}^*} K^* d\sigma^* = \sum_{\lambda=1}^m \int_{U_\lambda} \det\left(v_\lambda, \frac{\partial v_\lambda}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu}\right)_{\substack{\alpha=1, \dots, \rho-1 \\ \mu=1, \dots, n}} dt_1 \dots dt_\rho$$

$$dx_1 \dots dx_n \quad (3).$$

Analiseemos agora cada uma das parcelas de (3) e deixemos cair o índice λ .

Teremos:

$$A = \left(v, \frac{\partial v}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial v}{\partial x_\mu} \right)_{\substack{\alpha = 1, \dots, \rho-1 \\ \mu = 1, \dots, n}} =$$

$= (v, v_{t_1}, \dots, v_{t_{\rho-1}}, v_{x_1}, \dots, v_{x_n})$ usando-se a representação da

matriz pelos vetores coluna e convencionando-se :

$$\frac{\partial v}{\partial t_i} = v_{t_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = v_{x_i}$$

Consideremos a matriz A como representação da transformação linear $B : \mathbb{R}^{n+\rho} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+\rho}$ na base canônica, onde :

$$\begin{aligned} B(e_1) &= v, \quad B(e_2) = \frac{\partial v}{\partial t_1}, \dots, \quad B(e_\rho) = \frac{\partial v}{\partial t_{\rho-1}}, \\ B(e_{\rho+1}) &= \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \quad B(e_{\rho+n}) = \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{aligned}$$

$$\text{Seja } \beta = \left\{ v, v_{t_1}, \dots, v_{t_{\rho-1}}, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\}$$

β é claramente uma base de $\mathbb{R}^{n+\rho}$, pois:

1) $\{v, v_{t_1}, \dots, v_{t_{\rho-1}}\}$ é linearmente independente

2) $[\{v, v_{t_1}, \dots, v_{t_{\rho-1}}\}] \perp [\{\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\}]$

3) $\{\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\}$ é linearmente independente

Sejam:

$$f_1 = v_1, f_2 = v_{t_1}, \dots, f_\rho = v_{t_{\rho-1}}, f_{\rho+1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, f_{\rho+n} = \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

Teremos:

$$B(e_1) = f_1, B(e_2) = f_2, \dots, B(e_\rho) = f_\rho, \\ B(e_{\rho+1}) = \sum_{j=1}^{n+\rho} a_{1j} f_j, \dots, B(e_{\rho+n}) = \sum_{j=1}^{n+\rho} a_{nj} f_j$$

$$\text{onde } v_{x_i} = \sum_{j=1}^{n+\rho} a_{ij} f_j$$

Teremos também:

$$B(f_i) = \sum_{j=1}^{n+\rho} b_{ij} B(e_j) = \sum_{j=1}^{n+\rho} b_{ij} \sum_{\ell=1}^{n+\rho} c_{j\ell} f_\ell, \text{ onde}$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{n+\rho} b_{ij} e_j, B(e_i) = \sum_{j=1}^{n+\rho} c_{ij} f_j$$

Assim, a representação matricial de B na base

$\{f_1, \dots, f_{n+\rho}\}$ será: $(b_{ij}) \cdot (c_{ij})$.

logo

$$\det A = \det(b_{ij}) \cdot \det(c_{ij})$$

Mas

$$\det(c_{ij}) = \left| \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}^p \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}}^n \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1, \rho+1} & \dots & a_{1, \rho+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n, \rho+1} & \dots & a_{n, \rho+n} \end{pmatrix}}_n \end{array} \right| =$$

$$= \det(a_{ij})_{i=1, \dots, n} \quad = \det(\pi_p \circ dN_p^V) \quad \text{onde}$$

$$j = \rho+1, \dots, \rho+n$$

$$N_p^V(x_1, \dots, x_n) = v(t_1, \dots, t_{\rho-1}, x_1, \dots, x_n)$$

Observação : $(a_{ij})_{i=1, \dots, n}$ dá a representação matricial de

$$j = \rho+1, \dots, \rho+n$$

$$\pi_p \circ dN_p^V \text{ na base } \left\{ \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right\}$$

Também

$$\det(b_{ij}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & \frac{\partial v_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial t_{\rho-1}} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n+\rho} & \frac{\partial v_{n+\rho}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial v_{n+\rho}}{\partial t_{\rho-1}} & \frac{\partial y_{n+\rho}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{n+\rho}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Como

$$|f_1| = |(v_1, \dots, v_{n+\rho})| = 1 \quad \text{e} \quad \langle f_1, f_j \rangle = 0 \quad \text{se} \quad j \neq 1, \text{ temos:}$$

$$\det(b_{ij}) = \sqrt{\det(\langle f_i, f_j \rangle)_{i,j=1, \dots, n+\rho}}, \quad \text{e como} \quad \langle f_i, f_j \rangle = 0$$

$$\text{se } 2 \leq i \leq \rho$$

$$\rho+1 \leq j \leq \rho+n, \text{ segue que } \det(\langle f_i, f_j \rangle)_{i,j=1, \dots, n+\rho} =$$

$$= \det(\langle f_i, f_j \rangle)_{i,j=2, \dots, \rho} \cdot \det(\langle f_i, f_j \rangle)_{i,j=\rho+1, \dots, \rho+n}$$

Assim, retomando o índice λ para as parametrizações locais, temos, utilizando-se (3) :

$$\begin{aligned}
\int K^* d\sigma^* &= \sum_{\lambda=1}^m \int_{U_\lambda} \det A_\lambda dt_1 \dots dt_{\rho-1} dx_1 \dots dx_n = \\
&= \sum_{\lambda=1}^m \int_{U_\lambda} \sqrt{\det \left(\left\langle \frac{\partial v_\lambda}{\partial t_i}, \frac{\partial v_\lambda}{\partial t_j} \right\rangle \right)_{i,j=1,\dots,\rho-1}} \sqrt{\det \left(\left\langle \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}, \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_j} \right\rangle \right)_{i,j=1,\dots,n}} \\
&\quad \cdot \det(\pi_p \circ dN_p^V) dt_1 \dots dt_{\rho-1} dx_1 \dots dx_n = \\
&= \int_{V_n} \int_{\Omega_{\rho-1}} \det(\pi_p \circ dN_p^V) d\omega_{\rho-1} d\sigma = \\
&= \int_{V_n} \frac{2\omega_{n+\rho-1}}{\omega_n} K d\sigma = \frac{2\omega_{n+\rho-1}}{\omega_n} \int_{V_n} K d\sigma
\end{aligned}$$

c.q.d.

CAPÍTULO 3

"O TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA VARIEDADES RIEMANNIANAS DE DIMENSÃO PAR."

§3.1. ALGUNS FATOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA.

Seja R^n uma variedade riemanniana compacta orientável de dimensão para $n = 2p$. Podemos definir localmente em R^n referenciais ortonormais e formas de conexão de maneira análoga àquela que fizemos no capítulo 2.

Seja D a conexão riemanniana de R^n (ver (18)) e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ referencial ortonormal local de R^n .

Teremos:

$$\omega_i(e_j) = \delta_{ij} \quad (1)$$

$$De_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} e_j \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (2)$$

Valem ainda as equações de estrutura:

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_j \wedge \omega_{ji} \quad (3)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij} ; \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \quad (4)$$

onde Ω_{ij} , assim definido é a forma "i,j" de curvatura

(ver (17)).

Temos ainda as identidades de Bianchi (ver (19)).

$$\sum_{j=1}^n \omega_j \wedge \Omega_{ji} = 0 \quad (5)$$

$$d\Omega_{ij} = \sum_{K=1}^n \omega_{jK} \wedge \Omega_{iK} + \sum_{K=1}^n \omega_{iK} \wedge \Omega_{jK} = 0 \quad (6)$$

Seja agora um outro referencial ortonormal local de R^n com o mesmo domínio de $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Teremos:

$$e_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \quad e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j^* \quad (7)$$

$$\det(a_{ij}) = \pm 1 \quad (8)$$

Também pode-se verificar que

$$\Omega_{ij}^* = \sum_{K, \ell=1}^n a_{iK} a_{j\ell} \Omega_{K\ell} \quad (9)$$

onde Ω_{ij}^* é construído em relação ao referencial $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ da mesma maneira que Ω_{ij} em relação a $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Definiremos agora uma n -forma Ω em R^n que será o análogo da forma de curvatura de Gauss-Kroenecker para variedades Riemannianas.

$$\Omega = (-1)^{p-1} \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)} \quad (10)$$

A definição de Ω , apesar de ser local, pode ser globalizada bastando para isto que se fixe uma orientação. Precisamente:

3.1.1. PROPOSIÇÃO:

"Suponhamos $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal positivo local para $\mathbb{R}^n$ e Ω definido como em (10) em relação a tal referencial. Seja agora $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ um outro referencial ortonormal positivo como o mesmo domínio de $\{e_1, \dots, e_n\}$ e seja Ω^* definido em relação a $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ como Ω em relação a $\{e_1, \dots, e_n\}$. Nestas condições vale: $\Omega = \Omega^*$."

DEMONSTRAÇÃO:

De (9) temos:

$$\Omega_{ij}^* = \sum_{K, \ell=1}^n a_{iK} a_{j\ell} \Omega_{K\ell}, \text{ onde } e_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \det(a_{ij}) = 1$$

Assim, teremos:

$$\Omega^* = (-1)^{p-1} \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{K, \ell=1}^n a_{\sigma(1)K} a_{\sigma(2)\ell} \Omega_{K\ell} \right) \wedge \left(\sum_{K, \ell=1}^n a_{\sigma(3)K} a_{\sigma(4)\ell} \Omega_{K\ell} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{K, \ell=1}^n a_{\sigma(n-1)K} a_{\sigma(n)\ell} \Omega_{K\ell} \right) \quad (11)$$

Mas se $i, K \in \mathbb{N}^*$ são tais que

$$i \leq i, K \leq n, i \neq K, j_i = j_K \quad \text{então}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (a_{\sigma(1)j_1} a_{\sigma(2)j_2} \dots a_{\sigma(n-1)j_{n-1}} a_{\sigma(n)j_n}) \Omega_{j_1 j_2} \wedge \dots \\
& \dots \wedge (a_{\sigma(n-1)j_{n-1}} a_{\sigma(n)j_n} \Omega_{j_{n-1} j_n}) = \\
& = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)j_1} a_{\sigma(2)j_2} \dots a_{\sigma(n-1)j_{n-1}} a_{\sigma(n)j_n} \right) \Omega_{j_1 j_2} \wedge \\
& \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{n-1} j_n} = \det \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & a_{nj_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1j_n} & \dots & a_{nj_n} \end{pmatrix} \Omega_{j_1 j_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{n-1} j_n} = 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

Sendo assim, de (12) vem que:

$$\Omega^* = (-1)^{p-1} \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sum_{\eta \in S_n} (a_{\sigma(1)\eta(1)} a_{\sigma(2)\eta(2)} \dots a_{\sigma(n)\eta(n)}) \Omega_{\eta(1)\eta(2)} \wedge$$

$$\wedge (a_{\sigma(3)\eta(3)} a_{\sigma(4)\eta(4)} \dots a_{\sigma(n)\eta(n)}) \Omega_{\eta(3)\eta(4)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge (a_{\sigma(n-1)\eta(n-1)} a_{\sigma(n)\eta(n)} \Omega_{\eta(n-1)\eta(n)}) =$$

$$= (-1)^{p-1} \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \circ$$

$$\circ \sum_{\eta \in S_n} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\eta(1)} a_{\sigma(2)\eta(2)} \dots a_{\sigma(n)\eta(n)} \right) \Omega_{\eta(1)\eta(2)} \wedge$$

$$\begin{aligned} & \Lambda \dots \Lambda \Omega_{\eta(n-1)\eta(n)} = \\ & = (-1)^{p-1} \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \sum_{\eta \in S_n} \operatorname{sgn}(\eta) \det(a_{ij}) \Omega_{\eta(1)\eta(2)} \Lambda \end{aligned}$$

$$\Lambda \Omega_{\eta(3)\eta(4)} \Lambda \dots \Lambda \Omega_{\eta(n-1)\eta(n)} = \Omega, \text{ pois } \det(a_{ij}) = 1$$

c.q.d.

O nosso objetivo neste capítulo é demonstrar a seguinte fórmula:

$$\int_{R_n} \Omega = \chi$$

que é o teorema de Gauss-Bonnet na sua forma intrínseca.

Para tanto usaremos um processo de generalização daquilo que foi feito no capítulo 2 para superfícies Riemannianas de dimensão 2.

Sendo assim começamos por explicitar a exatidão de Ω em $R^n - \{p\}$ onde p é um ponto fixado de R^n .

O fato crucial da demonstração que veremos a seguir é a existência de uma forma Π em $R^n - \{p\}$ que é construída a partir de um campo vetorial cuja única singularidade é o ponto p e tal que $d\Pi = \Omega$, ou seja, $d\Pi$ não depende do campo vetorial escolhido para a definição de Π .

§3.2. A EXATIDÃO DE Ω EM $R^n - \{p\}$

Seja $p \in R^n$.

Seja v um campo vetorial unitário em $R^n - \{p\}$. A existência de um tal campo pode ser vista em (3).

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em p , positivo.

Teremos

$$v = \sum_{i=1}^n u_i e_i \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i u_i = 1 \quad (14)$$

Definamos n 1-formas $\theta_1, \dots, \theta_n$ em $R^n - \{p\}$, por

$$Dv = \sum_{i=1}^n \theta_i e_i, \text{ ou seja } \theta_i(e_j) = \langle Dv e_j, e_i \rangle \quad (15)$$

Teremos:

$$\theta_i = du_i + \sum_{j=1}^n u_j \omega_{ji} \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \theta_i = 0 \quad (17)$$

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^n (\theta_j \wedge \omega_{ji} + u_j \Omega_{ji}) \quad (18)$$

Para estabelecer as fórmulas (15), (16), (17) e (18) basta usar as propriedades da conexão riemanniana D e

o fato de que $|v| = 1$.

Para outro referencial ortonormal positivo $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, teremos:

$$u_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \quad \theta_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} \theta_j \quad (19)$$

Definimos agora formas ψ_K e ϕ_K em $R^{n-\{p\}}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \phi_K = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K)} \wedge \\ \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \psi_K = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \\ \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$K = 0, 1, \dots, p-1 \quad \text{e} \quad n = 2p.$$

ϕ_K é uma $(n-1)$ -forma e ψ_K é uma n -forma definidas em $R^{n-\{p\}}$. Além disso ψ_K e ϕ_K são intrínsecas em $R^{n-\{p\}}$ na medida em que não dependem do referencial ortonormal escolhido. Para ver isto basta utilizar as fórmulas (9) e (19) e proceder de uma maneira parecida com aquela como procedemos no lema 3.1.1. Sendo assim, ϕ_K e ψ_K estão realmente definidas em todo $R^{n-\{p\}}$.

A fórmula II mencionada no parágrafo anterior será construída a partir de Φ_K e ψ_K e para chegarmos a ela precisaremos de alguns lemas de caráter puramente técnico.

3.2.1. LEMA:

$$\begin{aligned} & "d\left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)}\right) = \\ & = (2p-2K-1) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) d\theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} " \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\begin{aligned} & d\left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)}\right) = \\ & = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) d\theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} - \\ & - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(2)} \wedge d\theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} + \dots + \\ & + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge d\theta_{\sigma(2p-2K)} = \\ & = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) d\theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} - \\ & - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (d\theta_{\sigma(3)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(4)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (-d\theta_{\sigma(4)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(5)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2k)}) - \\
& - \dots + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (-d\theta_{\sigma(2p-2k)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2k-1)} \wedge \theta_{\sigma(2)}) = \\
& = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) d\theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2k)} + \\
& + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha_{3^0\sigma}) (d\theta_{(\alpha_{3^0\sigma})(2)} \wedge \theta_{(\alpha_{3^0\sigma})(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{(\alpha_{3^0\sigma})(2p-2k)}) + \\
& + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha_{4^0\sigma}) (d\theta_{(\alpha_{4^0\sigma})(2)} \wedge \theta_{(\alpha_{4^0\sigma})(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{(\alpha_{4^0\sigma})(2p-2k)}) + \\
& + \dots + \\
& + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha_{2p-2k^0\sigma}) d\theta_{(\alpha_{2p-2k^0\sigma})(2)} \wedge \theta_{(\alpha_{2p-2k^0\sigma})(3)} \wedge \dots \wedge \\
& \wedge \theta_{(\alpha_{2p-2k^0\sigma})(2p-2k)} = \\
& = (2p-2k-1) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) d\theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2k)}
\end{aligned}$$

$$\text{onde } \alpha_i = (2, i) \in S_n \quad i = 3, \dots, 2p-2k$$

sendo que

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega \quad \text{e} \quad d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$$

ω - r-forma, η - s-forma.

c.q.d.

3.2.2. LEMA:

$$\begin{aligned} & "d \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} \right) = \\ & = k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) d\Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+3)\sigma(2p-2k+4)} \wedge \\ & \quad \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} " \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\begin{aligned} & d \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} \right) = \\ & = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) d\Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+3)\sigma(2p-2k+4)} \wedge \\ & \quad \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \\ & \quad \wedge d\Omega_{\sigma(2p-2k+3)\sigma(2p-2k+4)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+5)\sigma(2p-2k+6)} \wedge \dots \wedge \\ & \quad \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \dots + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \\ & \quad \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-3)\sigma(2p-2)} \wedge d\Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) d\Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+3)\sigma(2p-2K+4)} \wedge \\
&\quad \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\beta_2 \circ \sigma) d\Omega_{(\beta_2 \circ \sigma)(2p-2K+1)(\beta_2 \circ \sigma)(2p-2K+2)} \wedge \\
&\quad \wedge \Omega_{(\beta_2 \circ \sigma)(2p-2K+3)(\beta_2 \circ \sigma)(2p-2K+4)} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \wedge \Omega_{(\beta_2 \circ \sigma)(2p-1)(\beta_2 \circ \sigma)(2p)} + \dots + \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\beta_K \circ \sigma) d\Omega_{(\beta_K \circ \sigma)(2p-2K+1)(\beta_K \circ \sigma)(2p-2K+2)} \wedge \\
&\quad \wedge \Omega_{(\beta_K \circ \sigma)(2p-2K+3)(\beta_K \circ \sigma)(2p-2K+4)} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \wedge \Omega_{(\beta_K \circ \sigma)(2p-1)(\beta_K \circ \sigma)(2p)} = \\
&= K \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) d\Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+3)\sigma(2p-2K+4)} \\
&\quad \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}
\end{aligned}$$

onde $\beta_i = (2p-2K+1, 2p-2K+2i-1)(2p-2K+2, 2p-2K+2i) \in S_n$

$$i = 2, \dots, K$$

e $\text{sgn}(\beta_i \sigma) = \text{sgn}(\sigma)$, pois $\text{sgn}(\beta_i) = 1$.

c.q.d.

3.2.3. LEMA

$$\begin{aligned} "d\phi_K = \psi_{K-1} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \left(\sum_{j=1}^n u_j \Omega_{j\sigma(2)} \right) \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \\ \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} " \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\begin{aligned} d\phi_K &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) du_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \\ &\wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} d(\theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \\ &\wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) du_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \\ &\wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (2p-2K-1) u_{\sigma(1)} d\theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} - \\
& - k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2k)} \wedge \\
& \wedge d\Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+3)\sigma(2p-2k+4)} \wedge \\
& \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = (22)
\end{aligned}$$

O que foi feito até agora justifica-se pelos lemas 3.2.1 e 3.2.2 e pelo fato de que se ω, η, μ são formas diferenciais tais que ω e μ são de grau par e η é de grau ímpar então:

$$d(\omega \wedge \eta \wedge \mu) = d\omega \wedge \eta \wedge \mu + \omega \wedge d\eta \wedge \mu - \omega \wedge \eta \wedge d\mu.$$

Utilizando-se agora as fórmulas (6), (16) e (18) temos:

$$\begin{aligned}
(20) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (\theta_{\sigma(1)} - \sum_{j=1}^n u_j \omega_{j\sigma(1)}) \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \\
&\wedge \theta_{\sigma(2p-2k)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (2p-2k+1) u_{\sigma(1)} \left(\sum_{j=1}^n (\theta_j \wedge \omega_{j\sigma(2)} + u_j \Omega_{j\sigma(2)}) \right) \wedge \\
&\wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2k)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \dots \wedge
\end{aligned}$$

$$\wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} - \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} u_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge$$

$$\wedge \left(\sum_{j=1}^n ((\omega_{\sigma(2p-2K+1)j} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+2)j}) - (\omega_{\sigma(2p-2K+2)j} \wedge$$

$$\wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)j})) \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+3)\sigma(2p-2K+4)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}.$$

Porém, dado um ponto $q \in (\mathbb{R}^n - \{p\})$ arbitrário podemos tomar um referencial (coordenadas geodésicas) tais que $\omega_{ij}(q) = 0 \quad \forall ij$.

Assim, para um ponto qualquer f , teremos, em relação a um referencial especial:

$$d\phi_K = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge$$

$$\wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} +$$

$$+ (2p-2K-1) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \left(\sum_{j=1}^n u_j \Omega_{j\sigma(2)} \right) \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\alpha\sigma) \Omega_{(\alpha\sigma)(1)(\alpha\sigma)(2)} \wedge \theta_{(\alpha\sigma)(3)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \theta_{(\alpha\sigma)(2p-2K+2)} \wedge \Omega_{(\alpha\sigma)(2p-2K+3)(\alpha\sigma)(2p-2K+4)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \Omega_{(\alpha \circ \sigma)(2p-1)(\alpha \circ \sigma)(2p)} + (2p-2K-1) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \left(\sum_{j=1}^n u_j \Omega_{j\sigma(2)} \right)$$

$$\wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = (23)$$

onde $\alpha = (1, 3, 5, \dots, 2p-2K+1)(2, 4, 6, \dots, 2p-2K+2) \in S_n$ e, obviamente $\text{sgn}(\alpha) = 1$. Daí, decorre que:

$$(23) = \psi_{K-1} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \left(\sum_{j=1}^n u_j \Omega_{j\sigma(2)} \right) \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}$$

Mas a expressão do 2º membro da última igualdade é intrínseca devido às fórmulas (8), (9) e (19).

Logo, a igualdade vale em $R^n - \{p\}$.

c.q.d.

3.2.4. LEMA

"Sejam:

$$P_K = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}$$

$$T_K = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(3)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}$$

$$K = 0, 1, \dots, p-1$$

Então

$$\psi_K = 2(K+1)P_K + 2(p-K-1)T_K$$

DEMONSTRAÇÃO:

Temos:

$$P_K = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (1 - u_{\sigma(2)}^2 - u_{\sigma(3)}^2 - \dots - u_{\sigma(2p)}^2) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = \psi_K - \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (u_{\sigma(2)}^2 + \dots + u_{\sigma(2p)}^2) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = \psi_K - \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(2)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \right.$$

$$\begin{aligned}
& \Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \sum_{j=3}^{2p-2K} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(j)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \Lambda \theta_{\sigma(3)} \Lambda \\
& \Lambda \dots \Lambda \theta_{\sigma(2p-2K)} \Lambda \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \Lambda \dots \Lambda \\
& \Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \sum_{j=2p-2K+1}^{2p} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(j)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \Lambda \theta_{\sigma(3)} \Lambda \\
& \Lambda \dots \Lambda \theta_{\sigma(2p-2K)} \Lambda \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \Lambda \dots \Lambda \\
& \Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} \quad (24)
\end{aligned}$$

Usando-se um processo análogo ao utilizado na demonstração dos lemas 3.2.1. e 3.2.2., obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=3}^{2p-2K} \sum_{\sigma \in S_n} u_{\sigma(j)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \Lambda \theta_{\sigma(3)} \Lambda \dots \Lambda \theta_{\sigma(2p-2K)} \Lambda \\
& \Lambda \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \Lambda \dots \Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = \sum_{j=3}^{2p-2K} T_K = \\
& = (2p-2K-2)T_K = 2(p-K-1)T_K \quad (25)
\end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(2)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \Lambda \theta_{\sigma(3)} \Lambda \dots \Lambda \theta_{\sigma(2p-2K)} \Lambda \\
& \Lambda \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \Lambda \dots \Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = P_K \quad (26)
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando-se o mesmo processo:

$$\sum_{j=2p-2K+1}^{2p} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(j)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge$$

$$\wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = \sum_{j=2p-2K+1}^{2p} P_K =$$

$$= 2K P_K \quad (27)$$

De (24), (25), (26) e (27), segue que:

$$P_K = \psi_K - P_K - 2(p-K-1)T_K - 2K P_K, \text{ logo}$$

$$\psi_K = 2(K+1)P_K + 2(p-K-1)T_K$$

c.q.d.

3.2.5. LEMA:

$$\text{"Seja } L_K = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} u_{\sigma(3)} \Omega_{\sigma(3)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge$$

$$\wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}$$

$$K = 0, 1, \dots, p-1$$

$$\text{Então } T_K = 2(K+1)L_K"$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\text{Como } \sum_{i=1}^n u_i \theta_i = 0, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned}
L_K = & \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \Omega_{\sigma(3)\sigma(2)} \wedge (-u_{\sigma(1)} \theta_{\sigma(1)} - u_{\sigma(2)} \theta_{\sigma(2)} - \\
& - u_{\sigma(4)} \theta_{\sigma(4)} - u_{\sigma(5)} \theta_{\sigma(5)} - \dots - u_{\sigma(2p)} \theta_{\sigma(2p)}) \wedge \theta_{\sigma(4)} \wedge \theta_{\sigma(5)} \wedge \\
& \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \\
& \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} = \sum_{\sigma \in S_n} - \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)}^2 \Omega_{\sigma(3)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(1)} \wedge \\
& \wedge \theta_{\sigma(4)} \wedge \theta_{\sigma(5)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \\
& \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \sum_{\sigma \in S_n} - \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} u_{\sigma(2)} \Omega_{\sigma(3)\sigma(2)} \wedge \\
& \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(4)} \wedge \theta_{\sigma(5)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \\
& \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \\
& + \sum_{j=4}^{2p-2K} \sum_{\sigma \in S_n} - \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \cdot u_{\sigma(j)} \Omega_{\sigma(3)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(j)} \wedge \theta_{\sigma(4)} \wedge \\
& \wedge \theta_{\sigma(5)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(j-1)} \wedge \theta_{\sigma(j)} \wedge \theta_{\sigma(j+1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2K)} \wedge \\
& \wedge \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \\
& + \sum_{j=2p-2K+1}^{2p} \sum_{\sigma \in S_n} - \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} u_{\sigma(j)} \Omega_{\sigma(3)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(j)} \wedge \theta_{\sigma(4)}
\end{aligned}$$

$$\wedge \theta_{\sigma(5)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2k)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \dots \wedge \wedge \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} \quad (28)$$

Levando-se em conta que $\theta_i \wedge \theta_i = 0$, e utilizando-se argumentos semelhantes aos empregados nos lemas 3.2.1. e 3.2.2., a igualdade (28) resultará:

$$L_K = T_K - L_K + 0 - 2K L_K$$

logo

$$L_K = T_K - 2(K+1)L_K, \text{ e daí,}$$

$$T_K = 2(K+1)L_K$$

c.q.d.

3.2.6. LEMA

" $d\phi_K = \psi_{K-1} + \frac{2p-2K-1}{2(K+1)} \psi_K$, $K = 0, 1, \dots, p-1$, conven
cionando-se $\psi_{-1} = 0$ "

DEMONSTRAÇÃO:

Pelo lema 3.2.3. temos:

$$d\phi_K = \psi_{K-1} + (2p-2K-1) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \left(\sum_{j=1}^{2p} u_j \Omega_{j\sigma(2)} \right) \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge$$

$$\wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p-2k)} \wedge \Omega_{\sigma(2p-2k+1)\sigma(2p-2k+2)} \wedge \dots \wedge$$

$$\begin{aligned}
\Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} &= \psi_{K-1} + (2p-2K-1) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)}^2 \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \Lambda \\
&\quad \Lambda \theta_{\sigma(3)} \Lambda \dots \Lambda \theta_{\sigma(2p-2K)} \Lambda \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \Lambda \dots \Lambda \\
&\quad \Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + (2p-2K-1) \sum_{j=2}^{2p-2K} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} u_{\sigma(j)} \circ \\
&\quad \circ \sigma(j)\sigma(2) \Lambda \theta_{\sigma(3)} \Lambda \dots \Lambda \theta_{\sigma(2p-2K)} \Lambda \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \Lambda \\
&\quad \Lambda \dots \dots \Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} + \\
&\quad + (2p-2K-1) \sum_{j=2p-2K+1}^{2p} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} u_{\sigma(j)} \Omega_{\sigma(j)\sigma(2)} \Lambda \theta_{\sigma(3)} \Lambda \\
&\quad \Lambda \dots \Lambda \theta_{\sigma(2p-2K)} \Lambda \Omega_{\sigma(2p-2K+1)\sigma(2p-2K+2)} \Lambda \dots \Lambda \\
\Lambda \Omega_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)} &= \psi_{K-1} + (2p-2K-1) (P_K + (2p-2K-2)L_K + 0) = \\
&= \psi_{K-1} + (2p-2K-1) (P_K + 2(p-K-1)L_K) \quad (29)
\end{aligned}$$

Utilizando-se os lemas 3.2.4. e 3.2.5., obtemos

$$\frac{\psi_K}{2(K+1)} = \frac{2(K+1)P_K + 2(p-K-1)2(K+1)L_K}{2(K+1)} = P_K + 2(p-K-1)L_K \quad (30)$$

logo, de (29) e (30) resulta:

$$d\phi_K = \psi_{K-1} + \frac{2p-2K-1}{2(K+1)} \psi_K$$

c.q.d.

3.2.7. LEMA

$$\psi_K = \sum_{m=0}^K (-1)^m \frac{2^{m+1} (K+1) \cdot K (K-1) \dots (K-m+1)}{(2p-2K-1) (2p-2K+1) (2p-2K+3) \dots (2p-2K+2m-1)} d\phi_{K-m}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Demonstra-se por indução em K utilizando-se o lema

3.2.6.

3.2.8. TEOREMA

"A forma Ω , definida em (10) é exata em $R^n - \{p\}$ "

DEMONSTRAÇÃO:

Basta observar que

$$\Omega = (-1)^{p-1} \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \psi_{p-1}$$

e utilizar o lema 3.2.7.

Explicitamente teremos:

$$\Pi = \frac{1}{\pi^p} \sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-2m-1) m!} 2^{p+m} \phi_m$$

e $d\Pi = \Omega$.

c.q.d.

3.3. TEOREMA DE GAUSS-BONNET

"Com as notações utilizadas neste capítulo vale:

$$\int_{R^n} \Omega = \chi(R^n)$$

onde χ é a característica de Euler-Poincaré de R^n .

DEMONSTRAÇÃO:

Seja v um campo vetorial unitário em R^n e tal que v possua em R^n uma única singularidade p , como o que consideramos no início da seção 3.2.

Seja $\{e_1^p, \dots, e_n^p\}$ uma base ortonormal do espaço tangente a R^n em p .

Um ponto $q \in R^n$ suficientemente próximo de p pode ser representado pelos cossenos diretores λ_i (com relação a $\{e_1^p, \dots, e_n^p\}$ da tangente à geodésica unindo p a q e pela distância geodésica de p a q).

Assim, para uma vizinhança de p , teremos coordenadas normais locais dadas por:

$$x_i = s\lambda_i \quad \text{onde} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1$$

Como componentes do vetor $v(q)$ nós tomaremos as componentes do vetor $\overline{v(q)}$ em $T_p(R^n)$ com relação a $\{e_1^p, \dots, e_n^p\}$ obtido pelo transporte paralelo de $v(q)$ através da geodésica unindo p a q .

Agora, com as notações da seção 3.2. teremos:

1) Se $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ é um referencial ortonormal em $R^n - \{p\}$ tal que $\bar{e}_1(q) = v(q)$, então, pela definição dos θ_i 's vem que $\theta_i = \bar{\omega}_{1i}$

2) Se v é considerado localmente em p como aplicação na esfera S^{n-1} de centro em 0 e contida em $T_p(R^n)$ com raio 1 , da maneira como foi explicado no início desta seção, então:

$\bar{\omega}_{1i} = v^*(\omega_i)$ onde $\omega_2, \dots, \omega_n$ é um correferencial ortonormal local em S^{n-1} .

$$3) \phi_0 = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \mu_{\sigma(1)} \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2p)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \mu_{\sigma(1)} \bar{\omega}_{1\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_{1\sigma(2p)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \mu_{\sigma(1)} v^*(\omega_{\sigma(2)}) \wedge \dots \wedge v^*(\omega_{\sigma(2p)}) =$$

$$= (2p-1)! v^*(\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n) = (2p-1)! v^*(\eta), \text{ onde}$$

η é o elemento de volume de S^{n-1} .

Seja agora B_r uma bola geodésica aberta de centro em p e raio r suficientemente pequeno de tal maneira que os pontos desta bola estejam representados em coordenadas normais. Teremos:

$$4) \int_{R^n} \Omega = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{R^n - B_r} \Omega$$

Agora, aplicando Stokes, teremos:

$$5) \int_{\mathbb{R}^n - B_r} \Omega = \int_{B_r} \Pi$$

Mas temos também (ver (8))

$$6) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} \Phi_K = 0 \quad \text{para } K \geq 1$$

Assim, de 4), 5), 6) e da fórmula para Π vem:

$$7) \int_{\mathbb{R}^n} \Omega = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} \frac{1}{\pi^p} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1) 2^p} \Phi_0$$

Agora, de 3) e 7) vem:

$$8) \int_{\mathbb{R}^n} \Omega = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} \frac{1}{\pi^p} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1) 2^p} (2p-1)! v^*(\eta)$$

Agora de 8) e da fórmula do grau para integrais

vem:

$$9) \int_{\mathbb{R}^n} \Omega = \text{gr}(v) \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1) 2^p \pi^p} (2p-1)! \int_{S^{n-1}} \eta =$$

$= \text{gr}(v)$

Agora, o teorema de Poincaré-Hopf e o fato de que o campo v tem uma única singularidade fornece:

$$10) \int_{\mathbb{R}^n} \Omega = \text{gr}(v) = \text{Ind}(v) = \chi(\mathbb{R}^n)$$

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Ahlfors-Sario-Riemann - Surfaces - Princeton University Press, 1960, cap.I.
- 2 - Alexandroff-Hopf - Topologie I, Berlim 1935, pag.440.
- 3 - Alexandroff-Hopf - Topologie I, Berlim 1935, pag.550.
- 4 - Carmo, M.P. - Elementos de Geometria Diferencial - I.M.P.A. 1971, pag.121.
- 5 - Carmo, M.P. - Elementos de Geometria Diferencial - I.M.P.A. 1971, pag.143.
- 6 - Carmo, M.P. - Elementos de Geometria Diferencial - I.M.P.A. 1971, pag.166 a 177.
- 7 - Carmo, M.P. - Formas Diferenciais e Aplicações - Notas do 8º Colóquio Brasileiro de Matemática - Poços de Caldas 1971, pag.127.
- 8 - Chern, S.S. - On the curvatura integra in a riemannian manifold - Annals of Math., vol.46, 1945, pag.674 e seguintes.
- 9 - Guillemin-Pollack - Differentiel Topology - Prentice-Hall Inc. - New Jersey - 1974, pag.69.
- 10 - Guillemin-Pollack - Differentiel Topology - Prentice-Hall Inc. - New Jersey - 1974, pag.70.
- 11 - Guillemin-Pollack - Differentiel Topology - Prentice-Hall Inc. - New Jersey - 1974, pags.108, 109.
- 12 - Guillemin-Pollack - Differentiel Topology - Prentice-Hall Inc. - New Jersey - 1974, pag.121.

- 13 - Guillemin-Pollack - Differentiel Topology - Prentice-Hall Inc. - New Jersey - 1974, pags.132 a 137.
- 14 - Guillemin-Pollack - Differentiel Topology - Prentice-Hall Inc. - New Jersey - 1974, pag.135.
- 15 - Guillemin-Pollack - Differentiel Topology - Prentice-Hall Inc. - New Jersey - 1974, pags.188 a 191.
- 16 - Guillemin-Pollack - Differentiel Topology - Prentice-Hall Inc. - New Jersey - 1974, pags.205 e seguintes.
- 17 - Hicks, N.H. - Notes on Differentiel Geometry - Van Nostrand Math. Studies - 1965 - pag.63.
- 18 - Hicks, N.H. - Notes on Differentiel Geometry - Van Nostrand Math. Studies - 1965 - pag.71.
- 19 - Hicks, N.H. - Notes on Differentiel Geometry - Van Nostrand Math. Studies - 1965 - pag.72.
- 20 - Lima, E.L. - Variedades Diferenciáveis - I.M.P.A. - 1972.
- 21 - Stoker, J. - Notas mimeografadas da N.Y.U., 1956, cap.V.