ANÉIS DE GRUPO COM UNIDADES
DE EXPOENTE LIMITADO
SOBRE SEU CENTRO

Sônia P. Coelho

Tese apresentada ao Instituto
de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de Dou-
tor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hector A. Merklen

São Paulo, Abril de 1982

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio fi-
nanceiro da FINEP.

A meu pai,
que me ensinou o amor pela ciência,
e a minha mãe,
que me ensinou a tolerância,
atributos fundamentais
para a consecução deste trabalho.

*Dios mueve al jugador, y éste, la pieza.
¿Que dios detrás de Dios la trama empieza
de polvo y tiempo y sueño y agonías?*

Jorge Luis Borges

A B S T R A C T

Let KG be the group ring of a solvable or FC-group over a field of characteristic $p > 0$. We give necessary and sufficient conditions for the unit group of KG to be of bounded exponent over its center. This problem is closely related to several properties of the group ring and its unit group, and was proposed as problem 35 in Prof. S.K. Sehgal's book [Marcel Dekker, New York, 1978, Zbl # 411.16004]. An answer to this problem when $\text{char } K = 0$ was given by G.H. Cliff and S.K. Sehgal [Manuscripta Math. 33(1980), 145-148] who also gave partial results when $\text{char } K = p \neq 0$.

When G is torsion, our result holds for the wider class of the locally finite groups.

We also provide a new exposition of the characterization theorem for groups whose group ring units form an FC-group.

In this context, explicit calculations of the Jacobson radical of KG are obtained, as well as some consequences regarding the unit conjecture, the zero divisor problem and the semisimplicity problem.

I N T R O D U Ç Ã O

O anel de grupo KG de um grupo G sobre um anel comutativo com unidade K tem sido objeto de estudo de muitos algebristas, como se pode constatar consultando as publicações especializadas dos últimos dez anos.

Mais recentemente, a investigação das propriedades estruturais do grupo das unidades de KG tem merecido a atenção de diversos matemáticos. Iniciado originariamente como um meio de obter subsídios para o problema do isomorfismo para grupos finitos, este estudo ganhou importância autônoma para anéis de grupo de grupos infinitos e muitos resultados interessantes têm sido obtidos, empregando técnicas de teoria dos grupos, teoria de anéis e teoria dos números.

Este trabalho nasceu da investigação de uma questão surgida neste contexto.

No que segue, sejam K um corpo, U o grupo das unidades de KG e $Z(U)$ o seu centro.

G.H. Cliff e S.K. Sehgal observam em [C-S] que as seguintes condições implicam que $U^n \subset Z(U)$ para algum n :

- (i) G é um grupo finito e normal em U [S., p. 51]
- (ii) U é um grupo FC e G é finitamente gerado. [S., p. 206].

(iii) a característica de K é um primo p , G tem um p -elemento e U é nilpotente ou KG é Lie-nilpotente [S, p.179].

(iv) a característica de K é um primo p e KG é Lie m -Engel [S., p. 151].

É então natural investigar as seguintes questões:

(v) Em que condições $U^n \subseteq Z(U)$, para algum n ?

(vi) Em que condições $U/Z(U)$ é de torção?

A questão (v) aparece como problema 35 em [S, p. 231].

Como afirmam G.H. Cliff e S.K. Sehgal em [C - S], estas questões são muito ambiciosas se não introduzimos algumas hipóteses restritivas sobre o grupo G , uma vez que elas se relacionam com conjecturas abertas há longo tempo, como a chamada *conjectura das unidades*: se G é um grupo sem torção, então as unidades de KG são triviais [S, problema 10, p. 227].

Assim, com a hipótese de que G é solúvel ou FC, G.H. Cliff e S.K. Sehgal obtêm em [C - S] uma resposta completa para a questão (vi), e respostas parciais para (v), com restrições sobre o expoente n .

Observamos que, sob estas hipóteses, pode-se aplicar a estes problemas o Lema 3.22 de [S, p. 194], que dá uma boa descrição das unidades de KG .

Neste trabalho, apresentamos respostas completas a (v) e (vi), no caso em que G é solúvel ou FC. Ainda, se G é

de torção, o teorema de caracterização é obtido para a classe mais ampla dos grupos localmente finitos.

As técnicas empregadas para resolver completamente (v) são fundamentalmente da teoria de anéis, particularmente anéis com identidades polinomiais. De fato, o coração da questão é demonstrar que, nas situações não consideradas em [C - S], o anel KG satisfaz uma identidade polinomial.

Esta abordagem é distinta da de [C - S]. Pudemos portanto apresentar uma nova exposição dos resultados contidos neste artigo.

Uma vez obtidos os teoremas de caracterização para (v) e (vi), é interessante investigar como se pode empregar estes resultados para desenvolver novas provas, eventualmente mais simples, de teoremas relativos ao estudo das propriedades (i) a (iv).

Para ilustrar esta linha de trabalho, apresentamos uma nova exposição da caracterização dos anéis de grupo tais que U é um grupo FC. Este é o conteúdo do capítulo III.

Acreditamos que este procedimento pode também ser empregado com sucesso ao problema de dar condições necessárias e suficientes para que G seja normal em U .

Observamos que esta questão foi estudada por G.H. Cliff e S.K. Sehgal em [C - Seh], que obtiveram a caracteriza-

ção completa quando G é com torção. Neste caso, pode-se demonstrar que G é solúvel ou FC, com $U^n \subset Z(U)$ para algum n , o que generaliza (i). Neste trabalho, provam também que se G é sem torção, então $G \triangleleft U$ se e somente se as unidades de KG são triviais.

Finalmente, cuidamos de relacionar a condição " $U^n \subset Z(U)$, para algum n " com alguns dos grandes problemas da estrutura algébrica dos anéis de grupos. São eles: a *conjetura das unidades*, já mencionada; o *problema dos divisores de zero*: se G é sem torção, KG não contém divisores de zero [S, conjetura 1.4, p. 164, e P, p. 582] (esta conjetura é aparentemente mais fraca que a das unidades [S, proposição 1.4, p. 164]); finalmente, o *problema da semisimplicidade*, talvez o mais difícil: $J(KG)$, o radical de Jacobson de KG , é nil [P, p. 291].

Destas conjeturas, a que se mostrou mais dúctil deste ponto de vista foi o problema da semi-simplicidade: pudemos mostrar que $J(KG)$ é nil, sob a hipótese " $U^n \subset Z(U)$ para algum n " [Proposição I.1.4].

• A conjetura dos divisores de zero obteve resposta afirmativa em característica zero [Proposição I.1.7].

O principal objetivo perseguido sem sucesso nesta linha de trabalho foi chegar a provar a conjetura das unidades em característica zero.

Estes resultados estão na seção 1 do capítulo I, cuja parte final é essencialmente dedicada a obter a resposta à questão (v) no caso em que G é localmente finito.

O capítulo II desenvolve as técnicas necessárias para resolver (v) quando G tem um elemento de ordem infinita. Como parte deste estudo, obtemos um teorema que dá condições necessárias e suficientes para que certos idempotentes de KG sejam centrais [Teorema II.1.1], o que é relevante para o estudo de certas propriedades estruturais de U .

Outra questão importante é obter explicitamente o radical de KG . Pouco progresso tem sido obtido neste problema. Assim, tratamos de calcular $J(KG)$ no contexto de nosso trabalho [Proposições I.3.9 e II.4.2, Corolário III.2.5].

Além de algumas coincidências felizes, foram muitas as pessoas que nos ajudaram a levar a termo este trabalho. Correndo o risco de cometer injustiças, lembramos algumas delas.

Durante sua visita em agosto de 1979, o professor Sudarshan K. Sehgal colocou à minha disposição o pré-print de $[C - S]$, o que me fez avançar na investigação da questão (v). Ao professor César Polcino Milies, agradeço o constante estímulo e a feliz iniciativa de trazer o professor Sehgal a São Paulo. Do professor Bernardo Felzenswalb aprendi, durante o curso de Teoria de Anéis II, em 1980, técnicas da teoria de

anéis com identidades polinomiais que me permitiram resolver a questão. O professor Hector A. Merklen me orientou no programa de doutoramento e na elaboração da tese. O professor Alfredo R. Jones me orientou nos primeiros anos de pós-graduação em matemática. Os colegas Jairo Zacarias Gonçalves, Nair Alexandre Fernandes e Fernando Quadros Gouvêa tiveram a paciência de ouvir e comentar minhas exposições para preparar o exame de qualificação.

As funcionárias da biblioteca sempre me atenderam com solicitude.

Eliete Almeida de O. Maciel foi responsável pela dactilografia.

O pessoal do xerox e da gráfica cuidou dos detalhes finais.

São Paulo, Abril de 1982

Sônia P. Coelho

Í N D I C E

ABSTRACT

INTRODUÇÃO

I. PRIMEIROS RESULTADOS

§1 - Propriedades gerais	1
§2 - O problema, em característica zero	6
§3 - O problema, em característica p	8

II. IDEAIS DE AUMENTO NIL DE EXPOENTE LIMITADO

§1 - Idempotentes	19
§2 - Uma redução	23
§3 - Ideais de aumento	27
§4 - O resultado principal	35

III. ANÉIS DE GRUPO CUJAS UNIDADES FORMAM UM GRUPO FC

• §1 - Unidades de torção sobre o centro	38
• §2 - Grupos de torção	43
• §3 - Grupos com elementos de ordem infinita	49

REFERÊNCIAS	58
-----------------------	----

DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES	60
---------------------------------	----

C A P Í T U L O I

P R I M E I R O S R E S U L T A D O S

§1 PROPRIEDADES GERAIS

Sejam KG o anel de grupo de um grupo G sobre um corpo K e U seu grupo de unidades. Dado um grupo H , denotaremos por $Z(H)$ o centro de H e por $T(H)$ o conjunto dos elementos de torção de H .

Apresentaremos nesta seção algumas propriedades dos anéis de grupo KG tais que U é de expoente limitado sobre seu centro, relativas ao radical de Jacobson, ao problema dos ~~divisores~~ divisores de zero e à conjuntura das unidades, mencionadas na introdução.

Primeiramente, introduzimos alguma notação. Denotaremos $T(G)$ simplesmente por T . A letra p denotará sempre a característica de K , se esta for diferente de zero. Nesta situação, diremos que um elemento de torção t de um grupo é um p -elemento se $o(t)$, a ordem de t , é uma potência de p , e que t é um p' -elemento se $o(t)$ não é divisível por p . Analogamente, um grupo H será chamado um p' -grupo se todo elemento de $T(H)$ for um p' -elemento. No caso em que K for um corpo de característica zero, um p' -elemento de um grupo será simples

mente um elemento de torção.

Lema 1.1: Se $U^n \subset Z(U)$ para algum n e G tem p' -elemento não central, então as ordens dos p' -elementos de G são limitadas por n^2 e K é finito.

Prova: Mostraremos primeiro que as ordens dos p' -elementos de G são limitadas por n^2 .

É suficiente mostrar que, se u é um p' -elemento central de G , então $o(u) \leq n$. Se não for assim, consideremos um p' -elemento central u de G tal que $o(u) > n$. Então, $K\langle u \rangle = \bigoplus_i K_i$, um produto direto de corpos. Para cada i , denotemos por $\pi_i: K\langle u \rangle \rightarrow K_i$ a projeção natural (isto é, se e_i é o elemento unidade de K_i então $\pi_i(u) = ue_i$). Certamente, pelo menos um dos $\pi_i(u)$, digamos $\pi_i(u)$, tem ordem multiplicativa igual a $o(u)$ (Para ver isto, basta considerar o polinômio minimal de $\pi_i(u)$ em $K[x]$ e lembrar de $x^{o(u)} - 1$ divide o produto destes polinômios). Como consequência, K_i tem mais de n elementos.

Agora, se t é um p' -elemento não central de G , consideremos $K\langle u, t \rangle = \bigoplus_i K_i[t]$, em que $K_i[t]$ denota o menor subanel de KG que contém K_i e t .

Afirmamos que $K_i[t]$ não está contido no centro de KG . De fato, suponhamos que $K_i[t]$ é central e seja $e = e_i$, o elemento unidade de K_i . Então et é central. Tomemos agora $x \in G$ tal que $xtx^{-1} \neq t$. Então, $xetx^{-1} = extx^{-1} = et$.

Considerando suportes na última igualdade, obtemos :
 $u^i x t x^{-1} = u^j t$, $0 \leq i, j \leq o(u)$, $i \neq j$. Então, $x t x^{-1} = u^{j-i} t$.

Segue-se daí que $eu^{j-i} t = et$, ou $eu^{j-i} = e$. Logo,
 $(eu)^{j-i} = e$. Mas $eu = \pi_1(u)$, e portanto a ordem multiplicativa de $\pi_1(u)$ divide $|j-i| < o(u)$, uma contradição.

Agora, como t é um p' -elemento, tem-se: $K_1[t] = \bigoplus_i L_i$, um produto direto de corpos que são extensões galoisianas de K_1 . Mas $K_1[t]$ não é central, logo um dos L_i , digamos L_1 , não está contido no centro de KG . Seja $\bar{L}_1$ o subcorpo de L_1 constituído de seus elementos centrais, e seja $\phi \neq 1$ um $\bar{L}_1$ -automorfismo de L_1 .

Como $L_1 = K(\xi)$, com $\xi^{o(t)} = 1$, tem-se que $\phi(\xi) = \xi^i$, para algum i .

Tomemos agora um elemento arbitrário $k \in \bar{L}_1$. Como $U^n \subset Z(U)$, tem-se que $(\xi+k)^n \in \bar{L}_1$. Então, $(\phi(\xi+k))^n = \phi((\xi+k)^n) = (\xi+k)^n$, e $\phi(\xi+k)$ é uma raiz de $X^n - (\xi+k)^n$. Daí conclui-se que $\phi(\xi+k) = \alpha(\xi+k)$, com $\alpha^n = 1$, $\alpha \neq 1$.

Por outro lado, $\phi(\xi+k) = \xi^{i+k}$, e assim $\xi^{i+k} = \alpha(\xi+k)$.

Resolvendo esta equação para k , obtém-se que $k = \frac{\xi^{i-\alpha\xi}}{\alpha-1}$. Aqui, apenas α depende de k . Como α pode assumir no máximo $n-1$ valores, vemos que $|\bar{L}_1|$, o número de elementos de $\bar{L}_1$, é no máximo $n-1$. Mas $\bar{L}_1$ contém uma cópia de K_1 , e $|K_1| > n$, uma contradição.

Resta ainda demonstrar que K é finito. Se não for assim, substituindo-se K_1 por K na prova acima, tem-se ainda que $K_1[t] = K[t]$ não é central, e pode-se repetir o argumento para se obter uma contradição. ∇

Corolário 1.2: Se $\text{car } K = 0$ e $U^n \subset Z(U)$ para algum n , então T é central.

Prova: Segue do lema anterior e do fato de K ser infinito. ∇

A proposição abaixo aponta na direção de uma resposta afirmativa à conjectura das unidades.

Proposição 1.3: Seja G um grupo sem torção. Se $U^n \subset Z(U)$ para algum n e $|K| > n$, então toda p' -unidade de U pertence a K . Em particular, se $\text{car } K = 0$, toda unidade de torção pertence a K .

Prova: Suponhamos, por absurdo, que t seja uma p' -unidade não central de U . Tomando $K_1 = K$ na prova do Lema 1.1, pode-se repetir o argumento para obter que $|K| \leq n-1$, uma contradição. Assim, t deve ser uma unidade central de torção. Em particular, o suporte de t está contido no FC-subgrupo de G , que é abeliano (pois G é sem torção). Como a conjectura das unidades é verdadeira para grupos abelianos [S, Corolário 1.7, p. 166], segue-se a tese.

Vejamos agora o que se pode afirmar sobre $J(KG)$, o radical de Jacobson de KG .

Proposição 1.4: Se $U^n \subset Z(U)$ para algum n , então $J(KG)$ é nil. Em particular, se $\text{car } K=0$ ou $\text{car } K=p$ e G é um p' -grupo, $J(KG)=0$.

Prova: Seja $x \in J(KG)$. Da hipótese, $(1+x)^n \in Z(KG)$. Assim, $(1+x)^n - 1 \in J(KG) \cap Z(KG) \subset J(Z(KG))$. Por [P, Lema 1.11, p. 119], vem que $J(Z(KG))$ é nil. Logo, existe um natural r tal que $((1+x)^n - 1)^r = 0$.

Assim, x é algébrico sobre K e portanto a K -álgebra $K[x]$ é artiniana. Se x não fosse nilpotente, então o ideal gerado por x em $K[x]$ conteria um idempotente. Como este ideal está contido em $J(KG)$, teríamos um idempotente no radical, um absurdo. Ainda, se $\text{car } K=0$ ou $\text{car } K=p$ e G é um p' -grupo, $J(KG)=0$ por [P, Teorema 3.4, p. 47]. ∇

Proposição 1.5: Suponhamos que $\text{car } K=p$, $U^n \subset Z(U)$ para algum n , e seja m a p -parte de n . Então, para todo elemento nilpotente x em KG , tem-se que x^m é central.

Prova: Sejam $x \in KG$ um elemento nilpotente e r tal que $x^{p^r} = 0$. Então, $1+x$ é um p -elemento de U e, por hipótese, $(1+x)^n \in Z(U)$. Daí, é fácil ver que $(1+x)^m \in Z(U)$ e, portanto x^m é central. ∇

Proposição 1.6: Suponhamos que $\text{car } K=0$ e $U^n \subset Z(U)$ para algum n . Então, KG não contém elementos nilpotentes não nulos.

Prova: Seja $x \in KG$ um elemento nilpotente tal que $x^2=0$. Então, $(1+x)(1-x)=1$, e portanto $1+x \in U$. Da hipótese, $(1+x)^n = 1+nx$ é central, logo x é um elemento nilpotente central. Então, $x=0$ pela Proposição 1.4. ∇

Como consequência, pode-se concluir o seguinte fato relacionado à conjectura das unidades (ver [S, conjectura 1.3, p. 164]).

Proposição 1.7: Suponhamos que $\text{car } K=0$, G é sem torção e que $U^n \subset Z(U)$ para algum n . Então, KG não contém divisores de zero.

Prova: Decorre imediatamente da Proposição 1.6 e de [S, Proposição 1.4, p. 164]. ∇

Voltaremos a estes resultados em I.3 e II.4 para apresentarmos algumas famílias de grupos G tais que $J(KG)$ é nil, em característica p .

§ 2 O PROBLEMA, EM CARACTERÍSTICA ZERO

Esta seção é dedicada a caracterizar os grupos G , solúveis ou FC, tais que $U^n \subset Z(U)$ para algum n , quando o corpo de coeficientes tem característica zero (na realidade, o teo

rema é válido para uma classe mais ampla de grupos, como se verá).

Precisaremos do seguinte:

Lema 2.1: Seja G um grupo solúvel ou FC, tal que $G/Z(G)$ é de torção. Se H é um subgrupo finitamente gerado de G , então $T(H)$ e H' , o subgrupo comutador de H , são finitos.

Prova: ver [P, Lema 1.5, p. 116, e S, Teorema 4.2, p. 39]. ∇

O teorema abaixo foi demonstrado por G.H. Cliff e S. K. Sehgal em [C-S, Teorema 2, p. 147]. Apresentamos aqui outra demonstração deste resultado.

Teorema 2.2: Sejam K um corpo de característica zero e G um grupo solúvel ou FC. Então, $U^n \subset Z(U)$ para algum n se e somente se $G^m \subset Z(G)$ para algum m e T é central.

Prova: Suponhamos que $U^n \subset Z(U)$. Então, $G^n \subset Z(G)$ e, pelo Corolário 1.2, T é central.

Para a recíproca, seja $u \in U$. Considerando o subgrupo gerado pelo suporte de u , podemos assumir que G é finitamente gerado e portanto, pelo Lema 2.1, T e G' são finitos.

Seja $KT = \bigoplus_i K_i$, um produto direto de corpos. Por [S, Lema 3.22, p. 194], podemos escrever u na forma:

$$u = \sum f_i g_i, f_i \in K_i, g_i \in G.$$

Elevando à potência m esta igualdade e lembrando que $G^m \subset Z(G)$, vem: $u^m = \sum f_i^m g_i^m \in Z(U)$. ∇

Observamos que a demonstração do teorema é válida para a família dos grupos G tais que para todo subgrupo finitamente gerado H de G , tem-se que $T(H)$ e H' são finitos.

§3 O PROBLEMA, EM CARACTERÍSTICA p .

Nesta seção, caracterizaremos o fato de que $U/Z(U)$ é de expoente limitado quando K é um corpo de característica p e G é um grupo localmente finito.

• O caso em que G não é de torção requer outra técnica e será tratado no Capítulo II.

Em seguida, calcularemos $J(KG)$ quando $U/Z(U)$ é de expoente limitado e G é localmente finito.

Lema 3.1: Suponhamos que $\text{car } K = p$, e seja $G = T$, um grupo localmente finito. Se $U^n \subset Z(U)$ para algum n , então KT satisfaz uma identidade polinomial.

Prova: Seja m a p -parte de n . Mostraremos que KT satisfaz uma identidade polinomial em $2m+1$ variáveis. Consideremos $2m$ elementos arbitrários de KT , digamos $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$. Considerando o subgrupo gerado pelos suportes destes

elementos, podemos supor que T é finito.

Tem-se: $KT/J(KT) = \bigoplus_i M_{n_i}(D_i)$, um produto direto de anéis de matrizes sobre anéis com divisão D_i .

Notemos por x^- a imagem de um elemento $x \in KT$ pelo epimorfismo natural $KT \rightarrow KT/J(KT)$. Para um dado índice i , seja x_i um elemento nilpotente arbitrário de $M_{n_i}(D_i)$, e tomemos um elemento $y_i \in KT$ tal que $(y_i)^- = x_i$. Então y_i é nilpotente, já que $J(KT)$ é nilpotente (pois T é finito). Pela Proposição 1.5, y_i^m é central em KT . Então $x_i^m = (y_i^m)^-$ é um elemento nilpotente central de $KT/J(KT)$, logo deve ser nulo.

Daí é fácil ver que o tamanho das matrizes é limitado por m , isto é, $n_i \leq m$, para todo i .

Por outro lado, dados i e $d_i \neq 0$ em D_i , podemos escolher $u \in U$ tal que $u^- = d_i$ (ver [S, Lema 3.3, p. 179]). Como $u^n \in Z(U)$, d_i^n é central em D_i , e portanto D_i é um corpo, por [H, Teorema 3.22, p. 79].

Portanto, $KT/J(KT)$ satisfaz $S_{2m}(X_1, \dots, X_{2m})$ a identidade padrão de grau $2m$ nas variáveis não comutativas $X_1, \dots, X_{2m}$ (ver [P, Teorema 1.9, p. 175]). De novo, como $J(KT)$ é nilpotente, podemos aplicar a Proposição 1.5 para obter, para todo $z \in KT$:

$$(S_{2m}(x_1, \dots, x_{2m}))^m z = z (S_{2m}(x_1, \dots, x_{2m}))^m. \quad \forall$$

Lema 3.2: Suponhamos que $\text{car } K = p$, $U^n \in Z(U)$ para algum n , e seja m a p -parte de n . Se G tem um p -elemento de ordem maior que $2m^3$, então $G^m \in Z(G)$.

Prova: Da Proposição 1.5, vemos que x^m é central em KG , para todo elemento nilpotente $x \in KG$. Tomemos um p -elemento $h \in G$ tal que $o(h) > 2m^3$. Como $h-1$ é nilpotente, temos que $(h-1)^m = h^m - 1$ é central, logo h^m é central.

Seja $h' = h^m$, tomemos $x, y \in G$, e consideremos o elemento nilpotente $y(h'-1)$. De novo pela Proposição 1.5, tem-se que $(y(h'-1))^m = y^m(h'^m - 1)$ é central. Então:

$$xy^m(h'^m - 1) = y^m(h'^m - 1)x,$$

$$xy^m h'^m - xy^m = y^m h'^m x - y^m x.$$

Como $o(h') > 2m^2$, tem-se $h'^m - 1 \neq 0$ e portanto nós temos dois elementos de G no suporte do elemento acima. Se $p \neq 2$, vemos imediatamente que $xy^m = y^m x$, logo $y^m \in Z(G)$. Se $p = 2$, pode acontecer que:

$$xy^m = y^m h'^m x,$$

$$xy^m h'^m = y^m x.$$

Lembrando que h'^m é central e substituindo $y^m x$ na primeira equação por seu valor na segunda, tem-se que $xy^m = xy^m h'^m h'^m$, ou $(h')^{2m} = 1$, uma contradição, pois $o(h') > 2m^2$. ▽

No Lema abaixo, fazemos uso da noção de produto cruzado de um grupo sobre um anel. A definição e as notações em-

pregadas são as usais e podem ser encontradas em [S, p. 165].

Lema 3.3: Sejam S um anel comutativo com unidade, I um ideal nil de S , de expoente limitado, e Q um grupo finito. Seja $S(Q, \rho, \sigma)$ um produto cruzado de Q sobre S , com um sistema de fatores ρ arbitrário e σ tal que $\sigma_t(I) \subset I$, para todo $t \in Q$. Então IQ é um ideal nil de $S(Q, \rho, \sigma)$, de expoente limitado.

Prova: É imediato verificar que IQ é um ideal de $S(Q, \rho, \sigma)$.

Seja $Q = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ e tomemos um natural m tal que $s^m = 0$, para todo $s \in I$.

Sejam $r > m(n+1)^2$ e $x = s_1 \bar{t}_1 + \dots + s_n \bar{t}_n$ um elemento arbitrário de IQ , $s_i \in I$, $1 \leq i \leq n$.

Queremos provar que $x^r = 0$. É suficiente mostrar que qualquer produto de r elementos tomados no conjunto $\{s_1 \bar{t}_1, \dots, s_n \bar{t}_n\}$ é zero. Seja então $y = s_{i_1} \bar{t}_{i_1} \dots s_{i_r} \bar{t}_{i_r}$ um tal produto.

É fácil ver que existe um índice j tal que $s_{i_j} \bar{t}_{i_j}$ ocorre em y k vezes, com $k > m(n+1)$, e podemos supor sem perda de generalidade que $s_{i_j} \bar{t}_{i_j} = s_1 \bar{t}_1$.

Como os produtos $s_i \bar{t}_i s_j \bar{t}_j$ ainda têm a forma $s \bar{t}$, com $s \in I$, $T \in Q$ e $\bar{t}s_1 = \sigma_t(s_1)\bar{t}$, $\forall t \in Q$, podemos escrever y na forma $y = \left(\prod_{i=1}^k z_i \right) \delta$, com $z_i \in \{\sigma_t(s_1) \mid t \in Q\} \cup \{s_1\}$, $\delta \in IQ$. Como o conjunto acima tem no máximo $n+1$ elementos, e $k > m(n+1)$, deve existir um índice

j tal que z_j ocorre em y mais de m vezes. Agora, $z_j \in I$, e S é comutativo, portanto $z_j^m = 0$ e tem-se $y = 0$. ∇

Lembramos que um anel R diz-se Lie m -Engel se, para todos $x, y \in R$, tem-se: $[x, \underbrace{y, y, \dots, y}_{m \text{ vezes}}] = 0$, em que $[x, y]$ denota o produto de Lie de x, y e $[x, \underbrace{y, \dots, y}_m] = [\underbrace{[x, y, \dots, y]_{m-1}}_{m-1}, y]$ (ver [S, p. 142]).

Se R é um anel de característica prima p , tem-se :
 $[x, \underbrace{y, \dots, y}_{p^n \text{ vezes}}] = [x, y^{p^n}]$ (ver [S, Lema 4.3, p. 151]). Neste caso, R é Lie m -Engel para algum m se e somente se existe n tal que x^{p^n} é central R , para todo $x \in R$.

Ainda, se p é um primo, dizemos que um grupo H é p -abeliano se H' é um p -grupo finito.

Consideraremos no Teorema 3.7 anéis de grupo que são Lie m -Engel. Estes anéis estão caracterizados:

Teorema 3.4 (Sehgal, [S, Teorema 6.1, p. 155]) : Seja K um corpo de característica p . Então, KG é Lie m -Engel para algum m se e somente se G é nilpotente e contém um subgrupo normal p -abeliano A , tal que G/A é um p -grupo finito.

A demonstração do Lema abaixo está sugerida em [S, p. 157] .

Lema 3.5: Seja m uma potência de p . Se $G^m \leq Z(G)$ e G contém um subgrupo normal p -abeliano ϕ tal que G/ϕ é um p -grupo finito, então G é nilpotente.

Prova: Observamos primeiro que G age por conjugação em ϕ' como um p -grupo finito de automorfismos (pois ϕ' é finito).

Aplicando [S, Lema 4.1, p. 149] a G/ϕ com $A = \phi/\phi''$ obtemos:

$$(\phi, \underbrace{G, G, \dots, G}_{r \text{ vezes}}) \subset \phi'', \text{ para um certo } r.$$

Como ϕ' é um p -grupo finito, repetindo este processo, obtemos, para um certo s :

$$(\phi', \underbrace{G, G, \dots, G}_{s \text{ vezes}}) = 1.$$

Assim, para provar que G é nilpotente, podemos assumir que $\phi' = 1$. Ou seja, temos um subgrupo normal abeliano ϕ tal que G/ϕ é um p -grupo finito e $G^m \subset Z(G)$, em que m é uma potência de p . Lembrando que ϕ^m é um subgrupo central, podemos novamente considerar o quociente G/ϕ^m e assumir $\phi^m = 1$.

Agora, G age por conjugação em ϕ como um p -grupo finito (porque G/ϕ é um p -grupo finito e ϕ é abeliano). Aplicando novamente [S, Lema 4.1, p. 149], vem que existe um ℓ tal que $(\phi, \underbrace{G, G, \dots, G}_{\ell \text{ vezes}}) = 1$. Mas então $\phi \subset \zeta_\ell(G)$, o ℓ -ésimo termo da série central ascendente de G . Logo G é nilpotente. ∇

Também necessitaremos do seguinte:

Teorema 3.6 (Passman, [P, Corolário 3,10, p. 197]):

Seja K um corpo de característica p . Então, KG satisfaz uma identidade polinomial se e somente se G contém um subgrupo característico p -abeliano de índice finito.

Podemos agora obter o resultado central desta seção.

Teorema 3.7: Suponhamos que $\text{car } K = p$, e seja $G = T$, um grupo localmente finito. Então, $U^n \subset Z(U)$ para algum n se e somente se as seguintes condições estão verificadas:

- (i) $T^\ell \subset Z(T)$, para algum ℓ .
- (ii) T contém um subgrupo normal p -abeliano de índice finito.
- (iii) ou todo p' -elemento de T é central ou T é de expoente limitado e K é finito.

Prova: *Necessidade*: Suponhamos que $U^n \subset Z(U)$ para algum n . Então, (i) é trivial e (ii) segue do Lema 3.1 e do Teorema 3.6.

Para provar (iii), assumimos que nem todo p' -elemento de T é central. Pelo Lema 1.1, K é finito e para todo p' -elemento $t \in T$, $t^r = 1$ para um certo r independente de t . Agora, se m é a p -parte de n , e T tem um p -elemento de ordem maior que $2m^3$, então $T^m \subset Z(T)$, pelo Lema 3.2, e portanto todo p' -elemento é central, uma contradição.

Assim, para todo p -elemento $t \in T$, $t^s = 1$, para um certo s .

Sejam agora $x \in T$ e T_0 um subgrupo normal p -abeliano de T , de índice u , como em (ii). Então, $x^u \in T_0$, e podemos escrever: $x^u = yz$, em que $y, z \in T_0$, y é um p -elemento e z é um p' -elemento. Como T_0/T_0' é abeliano, elevando à potência rs , vem:

$$x^{urs} \equiv y^{rs} z^{rs} \pmod{T_0'} \equiv 1 \pmod{T_0'}.$$

Mas T_0' é finito, portanto tem-se $x^{urs|T_0'|}=1$, e (iii) está provado.

Suficiência: Assumimos agora que as condições (i), (ii) e (iii) estão verificadas, e sejam T_0 um subgrupo normal p -abeliano de índice finito em T , e A o conjunto: $A = \{t \in T \mid t \text{ é um } p'\text{-elemento}\}$.

Suponhamos primeiro que A é um subgrupo central de T . Então, como T é localmente finito, é fácil ver que $T = P \times A$, em que $P = \{t \in T \mid t \text{ é um } p\text{-elemento}\}$ é um subgrupo de T .

Considerando o subgrupo $\phi = T_0 \cdot A$, é fácil ver que T satisfaz as condições do Lema 3.5 e portanto é nilpotente. Além disso, T contém um subgrupo normal p -abeliano ϕ tal que T/ϕ é um p -grupo finito, e portanto KT é Lie m -Engel, para algum m , pelo Teorema 3.4. Logo, $U^n \subset Z(U)$ para algum n , por [S, Lema 4.3, p. 151].

Suponhamos agora que A não é um subconjunto central. Por (iii), $T^s = 1$, para algum s , e K é finito. Como T_0' é um

p -grupo finito, é fácil ver que $P_0 = \{t \in T_0 \mid t \text{ é um } p\text{-elemento}\}$ é um subgrupo normal de T .

Afirmamos que $\Delta(T, P_0)$, o núcleo do epimorfismo natural $KT \rightarrow KT/P_0$, é nil de expoente limitado. De fato, $\Delta(T_0/T_0', P_0/T_0')$ é nil de expoente limitado porque T_0/T_0' é abeliano e P_0/T_0' é de expoente limitado. Chamando $S = KT_0/T_0'$, $Q = (T/T_0')/(T_0/T_0') \cong T/T_0$, vemos que KT/T_0' é o produto cruzado $S(Q, \rho, \sigma)$, com ρ e σ usuais. Se $I = \Delta(T_0/T_0', P_0/T_0')$, pelo Lema 3.3 podemos concluir que $IQ = \Delta(T/T_0', P_0/T_0')$ é nil de expoente limitado. Como T_0' é um p -grupo finito, tem-se que $\Delta(T_0, T_0')$ é nilpotente e daí é fácil ver que $\Delta(T, P_0)$ é nil de expoente limitado, considerando o epimorfismo natural $KT \rightarrow KT/T_0'$.

Agora, T_0/P_0 é um subgrupo normal de T/P_0 , de índice finito, digamos, r . Por [P, Lema 1.10, p. 176], tem-se que $KT/P_0 \subset M_r(K T_0/P_0)$.

Tomemos agora u e U . Considerando o subgrupo gerado pelo suporte de u , podemos supor que T é finito. Logo, T_0/P_0 é um p' -grupo abeliano finito, tal que $(T_0/P_0)^S = 1$.

Portanto, $KT_0/P_0 = \bigoplus_i K_i$, um produto direto de corpos, todos contidos em $K(\xi)$, com $\xi^S = 1$. Então,

$$M_r(K T_0/P_0) = M_r(\bigoplus_i K_i) \cong \bigoplus_i M_r(K_i),$$

e temos que $KT/P_0 \subset \bigoplus_i M_r(F_i)$, com $F_i = K(\xi)$, para todo i .

Denotemos por S o anel $\bigoplus_i M_r(F_i)$ e por u' a imagem de u pela composição do epimorfismo natural $KT \rightarrow KT/P_0$ seguido

pela inclusão $K \rightarrow T/P_0 \rightarrow S$. Como K é finito, o grupo das matrizes inversíveis de $M_r(K(\xi))$ é finito, digamos de ordem q , dependendo apenas de r , s e K . Portanto, $(u^{-1})^q = 1$, e obtemos: $u^q = 1 + \delta$, com $\delta \in \Delta(T, P_0)$.

Como $\Delta(T, P_0)$ é nil de expoente limitado, podemos tomar um inteiro m , potência de p , tal que $x^m = 0$, para todo $x \in \Delta(T, P_0)$. Podemos então concluir que $u^{qm} = 1 + \delta^m = 1 \in Z(U)$. ∇

Corolário 3.8: Sejam K em corpo de característica p e $G = T$, um grupo localmente finito. Suponhamos que o conjunto dos p -elementos de T não é de expoente limitado. Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $U^n \subset Z(U)$ para algum n .
- (ii) KT é Lie m -Engel para algum m .

Prova: Suponhamos primeiro que $U^n \subset Z(U)$ para algum n . Então, as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema acima estão verificadas. Além disso, todo p' -elemento de T é central pelo Lema 3.2. Basta agora seguir a demonstração do Teorema, quando (i), (ii) e (iii) estão verificadas, para concluir que KT é Lie m -Engel, para algum m .

Por [S, Lema 4.3, p. 151], a recíproca é óbvia. ∇

A maioria dos cálculos explícitos do radical de Jacobson de anéis de grupos se refere ao caso em que o anel é semi-simples, isto é, o radical é trivial. Abaixo, calculamos $J(KT)$ nas condições do Teorema 3.7.

Proposição 3.9: Sejam K um corpo de característica p e T um grupo localmente finito, tal que $U^n \subset Z(U)$. Então, com as notações da prova de 3.7, se $p \nmid |T/T_0|$; $J(KT) = \Delta(T, P)$, em que $P = \{t \in T \mid t \text{ é um } p\text{-elemento}\}$.

Prova: Se A é um subgrupo central, então, como já observamos, P é um subgrupo normal de T . Suponhamos então que T contém um p' -elemento não central. Como na prova de 3.7, $P_0 = \{t \in T_0 \mid t \text{ é um } p\text{-elemento}\}$ é um subgrupo normal de T . Ademais, como T/T_0 não tem p -elementos, tem-se $P_0 = P$.

Portanto, P é sempre um subgrupo normal de T .

Mostraremos agora que $\Delta(T, P)$ é um ideal nil. De fato, dado $x \in \Delta(T, P)$, considerando o subgrupo gerado pelo suporte de x , podemos supor T finito. Logo, P é um p -subgrupo normal finito de T , e portanto $\Delta(T, P)$ é nilpotente. Em particular, x é nilpotente. Assim, $\Delta(T, P) \subset J(KT)$.

Como $K T/P$ não tem p -elementos, também não contém ideais bilaterais nil (ver [P, Teorema 3.4, p. 47]). Pela Proposição 1.4, $J(KT)$ é nil, logo sua imagem pelo epimorfismo natural $KT \rightarrow K T/P$ deve ser nula. Isto é, $J(KT) \subset \Delta(T, P)$. $\quad \square$

CAPÍTULO II

IDEAIS DE AUMENTO NIL DE EXPOENTE LIMITADO

§1 IDEMPOTENTES

Para anéis de grupos, acontece frequentemente que certas condições sobre o grupo das unidades U acarretam o fato de que todo idempotente do anel é central; isto ocorre, por exemplo, em algumas situações em que U é FC (ver Lema III.2.6), em que $U/Z(U)$ é de torção (ver Lema II. 2.1), em que U é nilpotente (ver [S, Corolário 3.13, p. 186]).

Vamos determinar condições necessárias e suficientes para que certos idempotentes de KG sejam centrais.

Neste capítulo, A denotará o conjunto dos p' -elementos de G e P o conjunto dos p -elementos de G .

Teorema 1.1: Sejam K um corpo de característica p e G um grupo tal que a torção T de G é um subgrupo localmente finito. Então, todo idempotente de KT é central em KG se e somente se:

- (i) A é um subgrupo abeliano de G .
- (ii) Se A não é central, então o fecho algébrico Ω de $P(K)$ em K é finito e para todo $x \in G$ e

todo $t \in A$, existe um natural r tal que $xtx^{-1} = t^{p^r}$, com $(\Omega: P(K)) \mid r$.

(iii) P é um subgrupo de G .

(iv) $T = P \times A$.

Prova; Necessidade: Para provar (i), seja $t \in G$ um p' -elemento. Então, $e = o(t)^{-1} (1+t+\dots+t^{o(t)-1})$ é um idempotente central. Dado $x \in G$, tem-se que x e $x^{-1} = e$. Considerando suportes, vem que $xtx^{-1} = t^i$, para algum i , e portanto $\langle t \rangle \triangleleft G$.

Logo, A é um grupo abeliano ou Hamiltoniano, por [Z, p. 160]. Mas, se $A \supset K_8$, o grupo quaternário de ordem 8, então $p > 2$ e $P(K)K_8$ contém um anel de matrizes, logo um idempotente não central, uma contradição.

Para (ii), seja L um subcorpo finito de K e seja $t \in A$. Tem-se: $L \langle t \rangle = \bigoplus K_i$, um produto direto de corpos tais que pelo menos um deles, digamos K_1 , é da forma $K_1 = K(\xi)$, em que ξ é uma raiz da unidade da mesma ordem que t , e a projeção natural $L \langle t \rangle \rightarrow K_1$ leva t em ξ .

Dado $x \in G$, devemos ter $xtx^{-1} = t^i$, para algum i , conforme a demonstração de (i). Então, a conjugação por x define um automorfismo ϕ de K_1 . Pelo acima, deve ser $\phi(\xi) = \xi^i$.

Por outro lado, como K_1 é finito, ϕ é uma potência do automorfismo de Frobenius de K_1 , F , dado por: $F(k) = k^p$, para todo $k \in K_1$. Se $\phi = F^r$, temos que $\phi(\xi) = \xi^{p^r}$, donde concluímos que $o(\xi) = o(t)$ divide $p^r - i$, logo $p^r \equiv i \pmod{o(t)}$ e $xtx^{-1} = t^{p^r}$.

Além, disso, como todo elemento da cópia de L contida em K_1 é fixo por ϕ , temos que $k^{p^r} = k$, para todo $k \in L$. Então, L está contido num corpo com p^r elementos, isto é, $(L:P(K)) | r$.

Daí, é fácil concluir que $(\Omega:P(K)) | r$.

Para (iii) e (iv), observamos que todo p -elemento comuta com todo p' -elemento. Se não for assim, sejam $\pi \in P$ e $t \in A$ tais que $\pi t \pi^{-1} = t^{p^r} \neq t$. Tem-se: $P(K) \langle t \rangle = \bigoplus K_i$, um produto direto de corpos finitos, tais que em pelo menos um deles, digamos K_1 , a conjugação por π não é a identidade. Mas, como todo idempotente é central, esta conjugação define um automorfismo de K_1 .

Consideremos o subanel $K_1[\pi]$ de KG e seja $\langle \pi^m \rangle$ o centralizador de K_1 em $\langle \pi \rangle$. O grupo $H = \langle \pi \rangle / \langle \pi^m \rangle$ é então um grupo de automorfismos de K_1 , e chamemos $\bar{K}_1$ o seu corpo fixo. K_1 é uma extensão galoisiana de $\bar{K}_1$, com grupo de Galois H .

Seja $K_1(H, \rho, \sigma)$ o produto cruzado de H sobre K_1 , com $\rho_{g,h} = 1$, para todos $g, h \in H$, e σ_g o automorfismo de K_1 definido por g , para todo $g \in H$. Podemos definir um epimorfismo $\phi: K_1[\pi] \rightarrow K(H, \rho, \sigma)$, pondo $\phi(\pi) = \bar{\pi}$ e estendendo por linearidade. É fácil ver que o núcleo de ϕ é o ideal nilpotente gerado por $\pi^m - 1$.

Agora, por [R, Corolário 29.8, p. 244], $K_1(H, \rho, \sigma) = M_s(K_1)$, em que $s = (K_1 : \bar{K}_1) > 1$. Assim, $K_1(H, \rho, \sigma)$ contém um idempotente não central, portanto $K_1[\pi]$ também, já que o núcleo de ϕ é nilpotente.

Como T é localmente finito, é fácil ver que P é subgrupo de G e $T = P \times A$.

Suficiência: Suponhamos agora que valem as condições (i), (ii), (iii) e (iv), e seja e um idempotente de KT . Escrevendo e na forma: $e = \sum_{i,j} \alpha_{ij} g_i h_j$, com $\alpha_{ij} \in K$, $g_i \in P$, $h_j \in A$, vem que $f = \sum_j (\sum_i \alpha_{ij}) h_j$ é um idempotente de KA , e $e - f = \delta \in \Delta(T, P)$.

Considerando o subgrupo gerado pelos g_i e os h_j , podemos supor que T é finito e portanto δ é nilpotente. Ainda, é fácil ver que δ comuta com f .

Se $\delta^{p^n} = 0$, tem-se que $e^{p^n} = f^{p^n} + \delta^{p^n}$, ou $e = e^{p^n} = f^{p^n} = f$. Podemos então supor que $e \in KA$, e que A é finito.

Seja agora $x \in G$. Se $A = \langle t_1 \rangle x \dots x \langle t_s \rangle$, um produto direto de grupos cíclicos, podemos escolher um inteiro r tal que $xt_i x^{-1} = t_i^{p^r}$, para todo i . De fato, se $xt_i x^{-1} = t_i^{p^{r_i}}$, $1 \leq i \leq s$, e $xt_1 \dots t_s x^{-1} = (t_1 \dots t_s)^{p^r}$, tem-se: $t_1^{p^r} t_2^{p^r} \dots t_s^{p^r} = t_1^{p^{r_1}} \dots t_s^{p^{r_s}}$. Logo, $xt_i x^{-1} = t_i^{p^r}$, $1 \leq i \leq s$.

Temos que $e = f(t_1, \dots, t_s)$, em que $f(X_1, \dots, X_s)$ é um polinômio nas variáveis comutativas $X_1, \dots, X_s$, com coeficientes no fecho algébrico Ω de $P(K)$ em K . Isto pode ser visto da seguinte forma: e é um idempotente de um grupo abeliano A . Logo, e é a soma de idempotentes primitivos de ΩA (ver [I, Teorema 2.12, p. 19]).

Conjugando e por x , temos: $x e x^{-1} = f(t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r})$. Mas, por hipótese, todo elemento $k \in \Omega$ satisfaz $k^{p^r} = k$, logo

isto é verdade para os coeficientes de f . Então, $f(t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}) = (f(t_1, \dots, t_s))^{p^r} = e^{p^r} = e$, como queríamos demonstrar. ∇

§2 UMA REDUÇÃO

Nesta seção, G será solúvel ou FC, e K será em um corpo de característica p .

Dedicar-nos-emos agora a reduzir o problema de caracterizar o fato de que $U^n \subset Z(U)$, para algum n (quando G não é de torção), ao de dar condições para que um certo ideal de KG seja nil de expoente limitado.

A demonstração do Lema abaixo é uma adaptação de [C-S, Lema 2.4, p. 148].

Lema 2.1: Suponhamos que $U/Z(U)$ é de torção. Se K é infinito ou G tem um elemento de ordem infinita, então todo idem potente de KG é central.

Prova: Suponhamos primeiro que G tem um elemento de ordem infinita. Como $G/Z(G)$ é de torção, G contém um elemento central x de ordem infinita. Seja $e \in KG$ um idempotente e consideremos a unidade $u = xe + (1-e)$, com inverso $u^{-1} = x^{-1}e + (1-e)$.

Por hipótese, existe um natural n tal que $u^n = x^n e + (1-e) \in Z(U)$.

Seja agora $y \in G$. Conjugando u^n por y , vem:

$$u^n = x^n y e y^{-1} + (1 - y e y^{-1}) = 1 + (x^n - 1) y e y^{-1},$$

ou seja: $1 + (x^n - 1) y e y^{-1} = 1 + (x^n - 1) e$, donde se conclui que $(x^n - 1)(y e y^{-1} - e) = 0$. Por [P, Lema 1.2, p. 68], $y e y^{-1} = e$.

No caso em que K é infinito, basta tomar $x \in K^0$ com $x^n \neq 1$ e repetir o argumento acima. ∇

Teorema 2.2: Suponhamos que $\text{car } K = p$ e que G é um grupo solúvel ou FC com um elemento de ordem infinita. Então, $U^n \subset Z(U)$ para algum n se e somente se as seguintes condições estão verificadas:

- (i) $G^\ell \subset Z(G)$, para algum ℓ .
- (ii) A é um subgrupo abeliano de G e, se A não é central, então K é finito, A é de expoente limitado e para todo $t \in A$ e todo $x \in G$ existe um inteiro r tal que $xtx^{-1} = t^{p^r}$, em que $(K:P(K)) \mid r$.
- (iii) P é um subgrupo de G contido no centralizador de A .
- (iv) Se m é a p -parte de n , então x^m é central em KG , para todo $x \in \Delta(G, P)$.

Prova: *Necessidade:* Suponhamos primeiro que $U^n \subset Z(U)$ para algum n . (i) é trivial, (ii) e (iii) seguem dos Lemas I.1.1 e 2.1 e do Teorema 1.1. Observemos que T é localmente finito porque $G/Z(G)$ é de torção (ver Lema I.2.1).

Para provar (iv), seja $x \in \Delta(G, P)$. Considerando o subgrupo gerado pelo suporte de x , podemos supor G finitamente gerado e portanto P é um subgrupo normal finito de G . Logo, x é nilpotente e podemos aplicar a proposição I.1.5 para obter (iv).

Suficiência: Suponhamos agora que as condições (i) a (iv) estão verificadas e seja $u \in U$. De novo podemos supor que G é finitamente gerado e portanto T é finito.

Observamos que, se $KA = \bigoplus_i K_i$, um produto direto de corpos, então $K(A \times P) = \bigoplus_i K_i P$.

Consideremos agora o epimorfismo natural $KG \rightarrow KG/P$, com núcleo $\Delta(G, P)$. Colocando S^- para a imagem de um subconjunto S de KG por este epimorfismo, temos: $(K(A \times P))^- = \bigoplus_i K_i^-$, em que cada K_i^- é um corpo. Ademais, $T(G/P) = (A \times P)/P$, e portanto $KT(G/P) = \bigoplus_i K_i^-$.

Como, pelas condições (ii) e (iii) e o Teorema 1.1, todo idempotente de KA é central em KG , e $G' \subseteq T$, podemos aplicar [S, Lema 3.22, p. 194], e u pode ser escrito na forma:

$$(*) \quad u = \sum_i f_i g_i + \delta, \quad f_i \in K_i, \quad g_i \in G, \quad \delta \in \Delta(G, P).$$

Suponhamos primeiro que A é central. Elevando (*) à potência ℓ , temos: $u^\ell = \sum f_i^\ell g_i^\ell + \delta'$, $\delta' \in \Delta(G, P)$. Agora, $\sum f_i^\ell g_i^\ell$ é central, e é suficiente aplicar a condição (iv).

Suponhamos agora que K é finito e A é de expoente limitado s .

Então, $K_i \subset K(\xi)$, com $\xi^s = 1$, para todo i .

Tomando a potência ℓ de (*), obtemos:

$$u^\ell = \sum f_i' g_i^\ell + \delta', \quad f_i' \in K_i, \quad g_i^\ell \in Z(G), \quad \delta' \in \Delta(G, P).$$

Como $K_i \subset K(\xi)$, para todo i , temos que $(f_i')^r = 1$, para todo f_i , para um certo r que depende só de K e s .

Tomando a potência r na equação acima, temos: $u^{\ell r} = \sum g_i^{\ell r} + \delta'', \quad \delta'' \in \Delta(G, P).$

Agora, $\sum g_i^{\ell r}$ é central e é suficiente aplicar a condição (iv). ▽

Corolário 2.3: Suponhamos que o conjunto dos p -elementos de G não é de expoente limitado. Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $U^n \subset Z(U)$ para algum n .
- (ii) KG é Lie ℓ -Engel para algum ℓ .

Prova: Suponhamos primeiro que $U^n \subset Z(U)$ para algum n . Pelo corolário I.3.8, KT é Lie m -Engel para algum m e portanto T é nilpotente.

Como $G' \subset T$, podemos concluir que G é solúvel (mesmo se G for um grupo FC).

Pelo Lema I.3.2, $G^m \subset Z(G)$, em que m denota a p -parte de n , e por [S, Corolário 4.3, p. 39], G' é um p -grupo. Então, como já observamos antes, $\Delta(G, G')$ é um ideal nil.

Dados $x, y \in KG$, tem-se que $xy - yx \in \Delta(G, G')$. Por (iv)

do Teorema 2.1, para todo $z \in KG$, temos que $(xy-yx)^m z = z(xy-yx)^m$.

Então, KG satisfaz uma identidade polinomial. Pelo Teorema I.3.6, G contém um subgrupo normal p -abeliano H , de índice finito. Chamando ϕ o FC-subgrupo de G , é fácil ver que $H \subset \phi$. Como $Z(G) \subset \phi$, vem que G/ϕ é um p -grupo finito. Além disso, como $|\phi/H| < \infty$ e ϕ é um grupo FC, é fácil mostrar que $|\phi'| < \infty$. Mas G' é um p -grupo, logo ϕ' é um p -grupo finito. Pelo Lema I.3.5, G é nilpotente. Do Teorema I.3.4, KG é Lie ℓ -Engel, para algum ℓ .

Como já observamos antes, a recíproca é imediata por [S, Lema 4.3, p. 151]. ∇

§3 IDEAIS DE AUMENTO

Vamos agora discutir a condição (iv) do Teorema 2.2, isto é, encontrar condições necessárias e suficientes para que $\Delta(G, P)$ seja nil de expoente limitado.

Quando este trabalho já estava terminado, recebemos o pre-print de Passman [Pa], que estabelece uma condição necessária e suficiente para que KG contenha um ideal nil de expoente limitado. A condição é, no essencial, a mesma que obtivemos.

Nesta seção, K será um corpo de característica p e G será um grupo solúvel ou FC, tal que T é um subgrupo localmente finito de G , e $G' \subset T$ (isto acontece, por exemplo, se $G/Z(G)$ é de torção).

Além disso, assumiremos que T tem a forma $T = P \times A$, em que A é um subgrupo abeliano de G e P é um subgrupo de G , de expoente limitado.

Introduzimos ainda alguma notação. Dado um grupo H , $\phi(H)$ denotará o FC-subgrupo de H . O grupo $\phi(G)$ será denotado simplesmente por ϕ .

Lema 3.1: Suponhamos que existe um natural m , potência de p , tal que x^m é central em KG , para todo $x \in \Delta(G, P)$. Então G contém um subgrupo normal H , de índice finito, contendo ϕ , tal que $H' \cap P$ é finito.

Prova: Pelo Teorema I.3.6, se KG satisfaz uma identidade polinomial, então $|G/\phi| < \infty$, $|\phi'| < \infty$. Como $G' \subset P \times A$, e $(\phi A)/A \subset \phi(G/A)$, é suficiente provar que $K(G/A)$ satisfaz uma identidade polinomial. De fato, nestas condições, se $\phi(G/A) = H/A$, então $|G/H| < \infty$ e $H' \cap P$ é finito.

No anel de grupo $K(G/A)$, o ideal $\Delta(G/A, (P \times A)/A)$ é a imagem de $\Delta(G, P)$ pelo epimorfismo natural $KG \rightarrow K(G/A)$, e portanto também satisfaz a hipótese.

Como $(G/A)' \subset (P \times A)/A$, temos que $\Delta(G/A, (G/A)') \subset \Delta(G/A, (P \times A)/A)$, e daí segue facilmente, como na prova do Co

rolário 2.3, que $K(G/A)$ satisfaz o polinômio $(XY-YX)^m Z - Z(XY-YX)^m$. ∇

Nos lemas seguintes, H será um subgrupo normal de G , de índice finito, contendo ϕ , tal que $P_0 = H' \cap P$ é finito, e P_1 será $H \cap P$.

Lema 3.2: Suponhamos que existe um natural m , potência de p , tal que x^m é central em KG , para todo $x \in \Delta(G, P)$. Então, $\Delta(G, P)$ é nil de expoente limitado.

Prova: Observamos primeiro que é suficiente provar que $\Delta(H, P_1)$ é nil de expoente limitado. De fato, suponhamos que esta afirmação esteja demonstrada. Dado $x \in \Delta(G, P)$, então x^m é um elemento central. Mas todo elemento central de $\Delta(G, P)$ está contido em $\Delta(G, P) \cap K\phi$, que por sua vez está contido em $\Delta(H, P_1)$. Então, $\Delta(G, P)$ é nil de expoente limitado.

Provemos então que $\Delta(H, P_1)$ é nil de expoente limitado. Como P_0 é finito, $\Delta(H, P_0)$ é nilpotente e portanto é suficiente provar que $\Delta(H/P_0, P_1/P_0)$ é nil expoente limitado.

Temos que $(H/P_0)'$ é um p' -grupo, P_1/P_0 é um subgrupo central de H/P_0 , e para todo $x \in \Delta(H/P_0, P_1/P_0)$, x^m é central em $K(H/P_0)$. Além disso, todas as hipóteses sobre G passam a H/P_0 . Portanto, para provar que $\Delta(H/P_0, P_1/P_0)$ é nil de expoente limitado, podemos substituir H/P_0 por H e P_1/P_0 por P_1 e supor ademais que H' é um p' -grupo e P_1 é central.

Queremos agora examinar que forma tem um elemento central de KH que pertence a $\Delta(H, P_1)$.

Seja S' um transversal de $T(H)$ em H . Lembrando que $T(H) = P_1 \times A_1$, em que $A_1 = \{t \in H \mid t \text{ é um } p'\text{-elemento}\}$, é fácil ver que $S = \{a.b \mid a \in A_1, b \in S'\}$ é um transversal de P_1 em H .

Sejam agora $x \in \phi(H)$, $x = hab$, $h \in P_1$, $ab \in S$, e $y \in H$. Como $y(ab) y^{-1} (ab)^{-1} \in H' \subset A_1$ e P_1 é central, $yx y^{-1}$ tem a forma: $yx y^{-1} = ha'b$, $a' \in A_1$. Assim, chamando $\sigma(x)$ a soma dos elementos da classe de conjugação de x , temos que $\sigma(hab) = h(a_1 + \dots + a_r) b$, $a_j \in A_1$, $1 \leq j \leq r$. Portanto, podemos escrever todo elemento central $z \in KH$ na forma:

$$(1) \quad z = \sum \alpha_i b_i,$$

em que $\alpha_i \in KT(H)$, $\alpha_i b_i$ é central em KH , para todo i , e os b_i são elementos distintos de S' .

Afirmamos que $\alpha_i b_i = b_i \alpha_i$, para todo i . De fato, como $\alpha_i b_i$ é central, temos que $\alpha_i b_i = b_i (\alpha_i b_i) b_i^{-1} = b_i \alpha_i$.

Se ainda $z \in \Delta(H, P_1)$, então $\alpha_i \in \Delta(T(H), P_1)$, para todo i . De fato, denotemos por x' a imagem de um elemento $x \in KH$ pelo epimorfismo natural $KH \rightarrow KH/P_1$. Como $z \in \Delta(H, P_1)$, $z' = \sum \alpha_i' b_i' = 0$. Mas os b_i são elementos distintos de uma base do $K(T(H)/P_1)$ - módulo KH/P_1 . Então, $\alpha_i' = 0$, para todo i , o que significa que $\alpha_i \in \Delta(H, P_1) \cap KT(H) = \Delta(T(H), P_1)$.

Portanto, todo elemento central z de $\Delta(H, P_1)$ tem a

forma (1), e além disso $\alpha_i \in \Delta(T(H), P_1)$, $\alpha_i b_i = b_i \alpha_i$, para todo i .

Seja s o expoente de P_1 . Como $T(H)$ é abeliano, tomando a potência s de (1), temos que :

$$z^s = \sum (\alpha_i b_i)^s = \sum \alpha_i^s b_i^s = 0.$$

Provamos que $z^s = 0$, para um inteiro s fixo e todo elemento central $z \in \Delta(H, P_1)$.

Como todo $x \in \Delta(H, P_1)$ é tal que x^m é central, podemos concluir que $\Delta(H, P_1)$ é nil de expoente limitado. ∇

Lema 3.3: Se $\Delta(H, P_1)$ é nil de expoente limitado, então ou P_1 é finito ou H contém um subgrupo característico p -abeliano de índice finito.

Prova: Suponhamos que P_1 é infinito. Pelo Teorema I. 3.6, é suficiente provar que KH satisfaz uma identidade polinomial. Como $\Delta(H, P_0)$ é nilpotente, é suficiente provar que KH/P_0 satisfaz uma identidade polinomial, pois nestas condições KH satisfaz uma potência desta identidade.

Observamos primeiro que todas as hipóteses do Lema passam a H/P_0 . De fato, $\Delta(H/P_0, P_1/P_0)$ é nil de expoente limitado e P_1/P_0 é infinito (porque P_0 é finito). Além disso, $(H/P_0)'$ é um p' -grupo e P_1/P_0 é central em H/P_0 .

Portanto, para provar que $K(H/P_0)$ satisfaz uma identidade polinomial, podemos substituir H/P_0 por H e assumir, além disso, que H' é um p' -grupo e P_1 é um subgrupo central de H .

Agora, seja $n > 0$ tal que $x^n = 0$, para todo $x \in \Delta(H, P_1)$. Queremos mostrar que existem elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\Delta(P_1, P_1)$ tais que $x_i^2 = 0$, para todo i , mas $x_1 x_2 \dots x_n \neq 0$. De fato, como P_1 é abeliano de expoente limitado, é um produto direto de grupos cíclicos [F, Teorema 11.2, p. 44]. P_1 é infinito e portanto o número de fatores cíclicos é infinito. Escolhemos $h_1, h_2, \dots, h_n$ geradores em diferentes fatores cíclicos, e chamamos $m_i = o(h_i) - 1$. É fácil então verificar que os elementos $x_i = (h_i - 1)^{m_i}$ satisfazem as condições desejadas.

Sejam agora $S = \{g_i\}_{i \in I}$ um transversal de P_1 em H , e $g_1, \dots, g_n \in S$. Então, o elemento $\alpha = g_1 x_1 + \dots + g_n x_n$ pertence a $\Delta(H, P_1)$, logo $\alpha^n = 0$.

Como os x_i são centrais e $x_i^2 = 0$, computando α^n , obtemos:

$$\alpha^n = F(g_1, \dots, g_n) x_1 x_2 \dots x_n,$$

em que $F(X_1, \dots, X_n)$ é um polinômio nas variáveis não comutativas $X_1, \dots, X_n$, a saber: $F(X_1, \dots, X_n) = \sum X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)}$, em que a soma se estende a todos os $\sigma \in S_n$, o grupo simétrico de grau n .

Queremos mostrar que $F(g_1, \dots, g_n) = 0$.

Fazemos primeiro algumas observações. Se $g_{\sigma(1)} \dots g_{\sigma(n)} \equiv g_{\delta(1)} \dots g_{\delta(n)} \pmod{P_1}$, para $\sigma, \delta \in S_n$, então $g_{\sigma(1)} \dots g_{\sigma(n)} = a g_{\delta(1)} \dots g_{\delta(n)}$, para algum $a \in P_1$.

Por outro lado, como $g_i g_j = \alpha(i, j) g_j g_i$, em que $\alpha(i, j) \in H'$, podemos escrever o produto $g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)}$ na forma $b g_{\delta(1)} \cdots g_{\delta(n)}$, para algum $b \in H'$.

Portanto, obtemos: $a = b$, com $a \in P_1$ e $b \in H'$, que é um p' -grupo. Assim $a = b = 1$.

Acabamos de mostrar que $g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} \equiv g_{\delta(1)} \cdots g_{\delta(n)} \pmod{P_1}$ se e somente se $g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} = g_{\delta(1)} \cdots g_{\delta(n)}$.

Definimos agora uma relação de equivalência $\sim$ em S_n , colocando: para $\sigma, \delta \in S_n$, $\sigma \sim \delta$ se e somente se $g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} = g_{\delta(1)} \cdots g_{\delta(n)}$. Denotemos por $S_1, S_2, \dots, S_t$ as classes de equivalência desta relação. Escolhendo, para cada i , um elemento $\sigma_i \in S_i$, segue do que está acima que podemos escrever:

$$F(g_1, \dots, g_n) = |S_1| g_{\sigma_1(1)} \cdots g_{\sigma_1(n)} + \dots + |S_t| g_{\sigma_t(1)} \cdots g_{\sigma_t(n)}.$$

Agora, como $g_{\sigma_i(1)} \cdots g_{\sigma_i(n)} \not\equiv g_{\sigma_j(1)} \cdots g_{\sigma_j(n)} \pmod{P_1}$ se $i \neq j$, de $F(g_1, \dots, g_n) x_1 \cdots x_n = 0$, obtemos:

$$|S_i| g_{\sigma_i(1)} \cdots g_{\sigma_i(n)} x_1 \cdots x_n = 0, \text{ para todo } i.$$

Mas $g_{\sigma_i(1)} \cdots g_{\sigma_i(n)}$ é inversível, e $x_1 \cdots x_n \neq 0$; logo isto só pode acontecer se $|S_i| = 0$, para todo i (isto é, $p \mid |S_i|$, para todo i).

Portanto, $F(g_1, \dots, g_n) = 0$, para elementos arbitrários $g_1, \dots, g_n \in S$.

Agora, KH é um módulo à esquerda sobre a subálgebra central KP_1 tendo S como uma base, e $F(X_1, \dots, X_n)$ é um polinômio multilinear. Por [P, Lema 1.2, p. 171], F é uma identidade polinomial para KH . ∇

Teorema 3.4: $\Delta(G, P)$ é nil de expoente limitado se e somente se uma das seguintes condições se verifica: ou P é finito ou G contém em subgrupo normal p -abeliano de índice finito.

Prova: *Necessidade:* Suponhamos que P é infinito, e seja H como no Lema 3.1. Como $|G/H| < \infty$, temos que $|PH/H| < \infty$, e portanto $|P/P_1| < \infty$. Logo, P_1 deve ser infinito. Pelo Lema 3.3, H contém um subgrupo característico p -abeliano de índice finito, e daí segue a tese.

Suficiência: Se P é finito, $\Delta(G, P)$ é nilpotente. Podemos portanto assumir que G contém um subgrupo normal p -abeliano L de índice finito. Temos que L/L' é abeliano, logo $\Delta(L/L', (P \cap L)/L')$ é nil de expoente limitado.

Chamando $S = K(L/L')$, $Q = (G/L')/(L/L') \cong G/L$, vemos que $K(G/L')$ é o produto cruzado $S(Q, \rho, \sigma)$, com ρ e σ usais.

Se $I = \Delta(L/L', (P \cap L)/L')$, aplicando o Lema 1.3.3, podemos concluir que $IQ = \Delta(G/L', (P \cap L)/L')$ é nil de expoente limitado.

Como L' é um p -grupo finito, $\Delta(G, L')$ é nilpotente e portanto $\Delta(G, P \cap L)$ é nil de expoente limitado.

Agora, consideremos o epimorfismo natural $\phi: KG \rightarrow K(G/(P \cap L))$. Temos que $\phi(\Delta(G, P)) = \Delta(G/(P \cap L), P/(P \cap L))$. Mas $P/(P \cap L) \cong PL/L$, e PL/L é um p-grupo finito, pois está contido em G/L . Portanto, existe um natural n tal que $(\Delta(G, P))^n \subset \Delta(G, P \cap L)$. Como já mostramos que este ideal é nil de expoente limitado, o Teorema está provado. $\square$

§4 O RESULTADO PRINCIPAL

Podemos agora dar uma caracterização completa para o fato de que $U/Z(U)$ é de expoente limitado.

Teorema 4.1: Suponhamos que $\text{car } K = p$ e G é solúvel ou FC, com um elemento de ordem infinita. Então, $U^n \subset Z(U)$ para algum n se e somente se: ou KG é Lie m -Engel para algum m , ou as seguintes condições estão verificadas:

- (i) $G^\ell \subset Z(G)$, para algum ℓ .
- (ii) A é um subgrupo abeliano de G e se A não é central, então K é finito, A é de expoente limitado e para todo $x \in G$ e todo $t \in A$ existe um inteiro r tal que $xtx^{-1} = t^{p^r}$, em que $(K: P(K)) \mid r$.
- (iii) P é um subgrupo de G , de expoente limitado, contido no centralizador de A e, se P não é finito, G contém um subgrupo normal p -abeliano de índice finito.

Prova: Pelo Teorema 2.2, as condições (i) e (ii) estão verificadas, e por (iii) do mesmo Teorema, P é um subgrupo de G con

tido no centralizador de A . Se P não é de expoente limitado, pelo Corolário 2.3, KG é Lie m -Engel, para algum m , uma contradição. Portanto podemos assumir que P é de expoente limitado.

Também, como a condição (iv) do Teorema 2.2 está verificada, tem-se que $\Delta(G, P)$ é nil de expoente limitado, pelo Lema 3.2. Pelo Teorema 3.4, o restante da condição (iii) está verificado.

Suponhamos agora que KG é Lie m -Engel para algum m . Então, como já observamos antes, $U^n \subset Z(U)$ para um certo n , por [S, Lema 4.3, p. 151].

Finalmente, suponhamos que as condições (i), (ii) e (iii) estão verificadas. Se P é finito, então $\Delta(G, P)$ é nilpotente e a condição (iv) do Teorema 2.2 está verificada. Se G contém um subgrupo normal p -abeliano de índice finito, então, pelo Teorema 3.4, novamente a condição (iv) do Teorema 2.2 está verificada. Como as condições (i), (ii) e (iii) deste Teorema são válidas, existe um inteiro n tal que $U^n \subset Z(U)$. ∇

Proposição 4.2 : Suponhamos que $\text{car } K = p$, e seja G um grupo solúvel ou FC, com um elemento de ordem infinita, tal que $U^n \subset Z(U)$. Então, $J(KG) = \Delta(G, P)$.

Prova: a demonstração é imediata, pois $\Delta(G, P)$ é um ideal nil, logo $\Delta(G, P) \subset J(KG)$. Ainda, $J(KG)$ é nil, pela Proposição I.1.4. Como $K(G/P)$ não contém ideais nil [P, Teorema 3.4, p. 47], a imagem de $J(KG)$ pelo epimorfismo natural $KG \rightarrow K(G/P)$ deve ser nula. Logo, $J(KG) \subset \Delta(G, P)$. ∇

Para finalizar, examinamos em que condições a propriedade $U^n \subset Z(U)$ implica que KG satisfaz uma identidade polinomial.

Proposição 4.3: Suponhamos que K é um corpo de característica p .

(i) Seja $G = T$, um grupo de torção localmente finito. Se $U^n \subset Z(U)$ para algum n , então KT satisfaz uma identidade polinomial.

(ii) Seja G um grupo solúvel ou FC, com um elemento de ordem infinita. Então, se $U^n \subset Z(U)$ para algum n e P é infinito, KG satisfaz uma identidade polinomial.

Prova: (i) é imediato pelo Lema I.3.1.

Para (ii), observamos que, se P não é de expoente limitado, então KG é Lie m -Engel para algum m , pelo Corolário 2.3, logo satisfaz uma identidade polinomial. Se P é de expoente limitado, então (iii) do Teorema 4.1 e o Teorema I.3.6 implicam o resultado. ∇

CAPÍTULO III

ANÉIS DE GRUPO CUJAS UNIDADES FORMAM UM GRUPO FC

§1 UNIDADES DE TORÇÃO SOBRE O CENTRO

Caracterizaremos aqui os grupos solúveis ou FC tais que $U/Z(U)$ é de torção.

Esta caracterização foi obtida pela primeira vez por G. H. Cliff e S. K. Sehgal:

Teorema [C-S, Teorema 1, p. 146] : Sejam G um grupo solúvel e K um corpo de característica $p \geq 0$. Então $U/Z(U)$ é de torção se e somente se $G/Z(G)$ é de torção e vale uma das seguintes condições:

- (i) U é de torção,
- (ii) todo p' -elemento de G é central.
- (iii) Se $p > 0$, K é algébrico sobre $P(K)$ e todo idempotente de KG é central.

Obteremos este resultado empregando a técnica desenvolvida nos capítulos anteriores, o que nos permitirá uma formulação mais descritiva, expressando as condições (i) e (iii) em termos de K e G .

Lema 1.1: Se $U/Z(U)$ é de torção e G tem um p' -elemento não central, então $\text{car } K > 0$ e K é algébrico sobre $P(K)$.

Prova: O argumento é semelhante ao do Lema I.1.1.

Sejam $x, t \in G$, em que t é um p' -elemento não central e $xtx^{-1} \neq t$.

Tem-se: $K \langle t \rangle = \bigoplus_i L_i$, um produto direto de corpos em que pelo menos um dos L_i , digamos L_1 , não é central. Seja $\bar{L}_1$ o subcorpo de L_1 consistindo dos elementos centrais. É fácil ver que $\bar{L}_1$ contém uma cópia de K .

Da hipótese, todo elemento $\alpha \in L_1$ é tal que $\alpha^n \in \bar{L}_1$, para algum n . Por [H, Lema 3.2.1, p. 77], vem que $\text{car}(L_1) > 0$ e L_1 é algébrico sobre seu corpo primo, portanto o mesmo vale para K . ∇

Teorema 1.2: Suponhamos que $\text{car } K = 0$ e que G é solúvel ou FC. Então, $U/Z(U)$ é de torção se e somente se $G/Z(G)$ é de torção e T é central.

Prova: Suponhamos primeiro que $U/Z(U)$ é de torção. Então, é imediato que $G/Z(G)$ é de torção e, pelo Lema 1.1, T é central.

Para a recíproca, seja $u \in U$. Considerando o subgrupo gerado pelo suporte de u , podemos assumir que G é finitamente gerado e portanto, pelo Lema I.2.1, T e G' são finitos.

Se $KT = \bigoplus_i K_i$, um produto direto de corpos, por [S, Lema 3.22, p. 194], podemos escrever u na forma: $u = \sum f_i g_i$, $f_i \in K_i$, $g_i \in G$.

Como $G/Z(G)$ é de torção, existe m tal que $g_i^m \in Z(G)$, para todo i , e portanto $u^m = \sum f_i^m g_i^m \in Z(U)$. ∇

No restante deste capítulo, P denota o conjunto dos p -elementos de G e A denota o conjunto dos p' -elementos de G .

Teorema 1.3: Suponhamos que $\text{car } K = p$, e seja $G = T$, um grupo localmente finito. Então, $U/Z(U)$ é de torção se e somente se ou todo p' -elemento de T é central ou K é algébrico sobre $P(K)$.

Prova: *Necessidade:* Suponhamos que $U/Z(U)$ é de torção. Então, pelo Lema 1.1, vem a tese.

Suficiência: Para a recíproca, seja $u \in U$. Considerando o subgrupo gerado pelo suporte de u , podemos supor que T é finito.

Suponhamos primeiro que todo p' -elemento de T é central. Como T é finito, vem que $T = P \times A$. Ainda, $\Delta(T, P)$ é nilpotente e é fácil ver que $u = v + \delta$, em que v é uma unidade de KA e $\delta \in \Delta(T, P)$. Como v é central, tomando um natural r tal que $\delta^{p^r} = 0$, vem: $u^{p^r} = v^{p^r} + \delta^{p^r} = v^{p^r} \in Z(U)$.

Suponhamos agora que nem todo p' -elemento de T é central. Considerando o subcorpo K_1 de K gerado pelos coeficientes de u , é fácil ver que K_1 é finito, já que K é algébrico so

bre $P(K)$. Então, $u \in K_1 T$, um anel finito, logo u é de torção. ∇

Teorema 1.4: Suponhamos que $\text{car } K = p$, e seja G um grupo solúvel ou FC, com um elemento de ordem infinita. Então, $U/Z(U)$ é de torção se e somente se as seguintes condições estão verificadas:

- (i) $G/Z(G)$ é de torção.
- (ii) A é um subgrupo abeliano de G e, se A não é central, então K é finito e para todo $x \in G$ e todo $t \in A$, existe um natural r tal que $xtx^{-1} = t^{p^r}$, com $(K:P(K)) \mid r$.
- (iii) P é um subgrupo de G , contido no centralizador de A .

Prova: *Necessidade*: Suponhamos que $U/Z(U)$ é de torção. (i) é trivial, (ii) e (iii) seguem dos Lemas II.2.1, 1.1 e do Teorema II.1.1. Observamos que, como G é solúvel ou FC, com $G/Z(G)$ de torção, T é localmente finito pelo Lema I.2.1.

Suficiência: Suponhamos agora que são válidas as condições (i), (ii) e (iii), e seja $u \in U$. Considerando o subgrupo gerado pelo suporte de u , podemos supor G finitamente gerado e portanto T é finito. Além disso, de (ii) e (iii) vem que $T = P \times A$.

Seja $KA = \bigoplus_i K_i$, um produto direto de corpos. Por (ii) e pelo Teorema II.1.1, todo idempotente de KA é central em KG . Então,

(*) $u = \sum_i f_i g_i + \delta$, com $f_i \in K_i$, $g_i \in G$, $\delta \in \Delta(G, P)$,
por [S, Lema 3.22, p. 194]

Suponhamos primeiro que A é central, e seja n tal que $g_i^n \in Z(G)$, para todo i . Elevando (*) à potência n , tem-se:

$$u^n = \sum f_i^n g_i^n + \delta', \text{ com } \delta' \in \Delta(G, P).$$

Agora, como P é finito, $\Delta(G, P)$ é nilpotente. Seja então r um natural tal que $\delta'^{p^r} = 0$, e elevemos a equação acima à potência p^r . Como $\sum f_i^n g_i^n$ é central, tem-se:

$$u^{np^r} = (\sum f_i^n g_i^n)^{p^r} \in Z(U).$$

Suponhamos agora que A não é central, e seja n como acima. Elevando (*) à potência n , tem-se:

$$u^n = \sum f_i' g_i^n + \delta'', \text{ com } f_i' \in K_i, \delta'' \in \Delta(G, P).$$

Como, por (ii), K é finito, cada K_i é finito e portanto existe s tal que $(f_i')^s = 1$, para todo i . Tomando a potência s na equação acima, vem:

$$u^{ns} = \sum g_i^{ns} + \delta''', \text{ com } \delta''' \in \Delta(G, P).$$

Agora, lembrando que $\Delta(G, P)$ é nilpotente e que $\sum g_i^{ns}$ é central, vem a tese. v

Encerramos esta seção com uma observação sobre $J(KG)$ no caso em que $U/Z(U)$ é de torção.

Proposição 1.5: Se $U/Z(U)$ é de torção, então $J(KG)$ é

nil. Em particular, se $\text{car } K = 0$ ou $\text{car } K = p$ e G é um p' -grupo, $J(KG) = 0$.

Prova: Basta adaptar a demonstração da Proposição I.1.4. ∇

§2 GRUPOS DE TORÇÃO

É conhecido que, se H é um grupo FC, então $H/Z(H)$ é de torção [Ro, Teorema 4.32, p. 121]. Assim, se U é FC, $U/Z(U)$ é de torção e podemos aplicar as técnicas anteriores para obter informações sobre K e G .

Os anéis de grupo tais que U é FC foram estudados por S. K. Sehgal e H. J. Zassenhaus [S - Z], Polcino Milies [M] e G. H. Cliff e S. K. Sehgal [C - Se], que obtiveram a caracterização global.

Nas seções 2 e 3, apresentaremos uma nova exposição destes resultados, no caso em que um K é um corpo de característica p . Omitimos a exposição dos resultados em que U é FC em característica zero, pois nesta situação a contribuição das novas técnicas não é significativa. O teorema em característica zero pode ser encontrado em [S, Teorema 5.4, p. 209].

Os Lemas abaixo têm por finalidade mostrar que a única situação não trivial em que U é FC (isto é, quando KG é infinito e G é não abeliano) e G contém p -elementos acontece quando $p = 2$ (ver Lema 2.4).

Lema 2.1: Suponhamos que KG é infinito e U é FC. Se $x \in KG$ é tal que $x^2 = 0$ ou $x^3 = 0$, então x é central.

Prova: Suponhamos primeiro que $x^2 = 0$ e seja $y \in KG$, com $yx y^{-1} = c$.

Como KG é infinito, existem infinitos elementos $\alpha \in K^0 \cup G$ tais que α comuta com x , y e c , e para todo α nestas condições, $1 + \alpha x$ é uma unidade de ordem p .

Temos:

$$(1 + \alpha x) y (1 + \alpha x)^{p-1} = (y + \alpha xy) (1 - \alpha x) = (1 + \alpha x - \alpha c - \alpha^2 cx) y.$$

Da hipótese, esta expressão assume um número finito de valores. Assim, existem infinitos valores de α tais que $(1 + \alpha x - \alpha c + \alpha^2 xc) y = k \in U$, ou:

$$(*) \quad 1 + \alpha x - \alpha c - \alpha^2 xc = ky^{-1}$$

Multiplicando à esquerda por x , vem:

$$\begin{aligned} x - \alpha xc &= x ky^{-1}, \text{ ou} \\ \alpha xc &= x - x ky^{-1} \end{aligned}$$

Lembrando que α assume infinitos valores em $K^0 \cup G$, é fácil ver que esta igualdade só é possível se $x ky^{-1} = x$, $xc = 0$.

Voltando à igualdade (*), vem:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha x - \alpha c &= ky^{-1}, \\ \alpha(x-c) &= ky^{-1} - 1. \end{aligned}$$

Novamente, isto só é possível se $x - c = 0$. Logo, y comuta com x .

Suponhamos agora que $x^3 = 0$. Usando o resultado que acabamos de demonstrar e tomando o cuidado de estudar separadamente os casos $p = 2$ e $p > 2$, segue que x é central, com cálculos similares aos acima. ∇

Lema 2.2: Suponhamos que KG é infinito, U é FC e G é não abeliano. Se G contém p -elementos, então G' é o único subgrupo de G de ordem p .

Prova: Seja $g \in G$ um elemento de ordem p . Então, $x = \sum_{i=0}^{p-1} g^i$ é tal que $x^2 = 0$, portanto x é central, pela Lema 2.1.

Sejam agora $y, z \in G$ tais que $z^{-1}y^{-1}zy = h \neq 1$. Como KG é infinito, existem infinitos elementos $\alpha \in K^0 \cup G$ tais que α comuta com z e y e, para todo α nestas condições, $1 + \alpha zx$ é uma unidade de ordem p .

Calculemos agora o conjugado de y por $1 + \alpha zx$:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha zx) y (1 + \alpha zx)^{p-1} &= (1 + \alpha zx) y (1 - \alpha zx) = (y + \alpha zyx) (1 - \alpha zx) = \\ &= y + \alpha zyx - \alpha yzx = y + \alpha (zy - yz)x = y + \alpha (yzh - yz)x = \\ &= y + \alpha yz(h - 1)x. \end{aligned}$$

Como y tem um número finito de conjugados, é fácil ver que devemos ter $(h - 1)x = 0$. Portanto, $h = g^i$, para algum i .

Ainda, dado um outro elemento $g' \in G$ de ordem p , repetindo o raciocínio acima para g' no lugar de g , vem que $h = (g')^j$, para algum j , $1 \leq j \leq p - 1$. Logo, $G' = \langle g \rangle = \langle g' \rangle$ ∇

Lema 2.3: Suponhamos que KG é infinito, U é FC e G é não abeliano com p -elementos. Se $x \in KG$ é tal que $x^3 = 0$, então $x^2 = 0$.

Prova: Pelo Lema 2.2, G' é um grupo de ordem p . Sejam então $y, h \in G$ tais que $yhy^{-1}h^{-1}=g$, com $o(g)=p$.

Como KG é infinito, existem infinitos elementos $\alpha \in K^0UG$ tais que α comuta com x , y e h . Suponhamos primeiro que $p > 2$. Para cada tal α , $1 + \alpha hx$ é uma unidade de ordem p .

Calculemos o conjugado de y por $1 + \alpha hx$:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha hx) y (1 + \alpha hx)^{p-1} &= (y + \alpha hxy) (1 - \alpha hx + \alpha^2 x^2 h) = \\ &= y + \alpha hxy - \alpha x y h - \alpha^2 x^2 h y h + \alpha^2 x^2 y h^2, \end{aligned}$$

pois x^2 é central pelo Lema 2.1.

Ainda,

$$\begin{aligned} (1 + \alpha hx) y (1 + \alpha hx)^{p-1} &= y + \alpha xhy - \alpha xghy - \alpha^2 x^2 hghy + \alpha^2 x^2 (gh)^2 y = \\ &= 1 + \alpha xh - \alpha xgh - \alpha^2 x^2 hgh + \alpha^2 x^2 (gh)^2 y. \end{aligned}$$

Então, existem infinitos valores de α tais que

$$(*) \quad \alpha xh - \alpha xgh - \alpha^2 x^2 hgh + \alpha^2 x^2 (gh)^2 = ky^{-1} - 1, \text{ com } k \in U.$$

Multiplicando $(*)$ por x , vem :

$$\begin{aligned} \alpha x^2(1-g)h &= (ky^{-1} - 1)x, \text{ ou} \\ \alpha x^2(1-g) &= (ky^{-1} - 1)xh^{-1}. \end{aligned}$$

Como nos outros Lemas, deve-se ter $x^2(1-g) = 0$, ou $x^2 = x^2g$.

Substituindo em $(*)$, vem:

$$\begin{aligned} \alpha xh - \alpha xgh &= ky^{-1} - 1, \text{ ou:} \\ \alpha x(1-g)h &= ky^{-1} - 1, \\ \alpha x(1-g) &= (ky^{-1} - 1)h^{-1}. \end{aligned}$$

De novo, deve ser $x(1-g) = 0$. Por [P, Lema 1.2, p. 68], vem:

$$x = \beta(1 + g + \dots + g^{p-1}), \text{ com } \beta \in KG.$$

Como $1 + g + \dots + g^{p-1}$ é central, vem:

$$x^2 = \beta^2(1 + g + \dots + g^{p-1})^2 = 0$$

Suponhamos agora que $p = 2$. Então, $1 + \alpha hx$ é uma unidade de ordem 2 ou 4. Calculando o conjugado de y por $1 + \alpha hx$ e fazendo um raciocínio análogo ao acima, vem que $x^2 = 0$. ∇

Lema 2.4: Suponhamos que KG é infinito, U é FC e G é um grupo não abeliano com p -elementos. Então, $p = 2$, $G' = \langle g \rangle$ em que g é o único 2-elemento de G .

Prova: Seja $h \in G$ tal que $o(h) = p$, e suponhamos por ab surdo que $p > 3$. Então, $((h-1)^{a+1})^3 = 0$, em que a denota o maior inteiro contido em $p/3$. Pelo Lema anterior, $(h-1)^{2(a+1)} = 0$, um absurdo, já que $2(a+1) < p$. Da mesma forma, se $p = 3$, $(h-1)^3 = 0$, logo $(h-1)^2 = 0$, um absurdo.

Logo, $p = 2$, e $G' = \langle g \rangle$, com $o(g) = 2$, e g é o único elemento de ordem 2 de G , pelo Lema 2.2.

Suponhamos agora, por absurdo, que G contém um elemento t de ordem 4, com $t^2 = g$, e sejam $y, h \in G$ tais que $yhy^{-1}h^{-1} = g$.

Como KG é infinito, existem infinitos elementos $\alpha \in K^0 \cup G$ tais que α comuta com t, y e h , e para cada tal α , $1 + \alpha h(t+1)$ é uma unidade de ordem 4.

Calculando o conjugado de y por $1 + \alpha h(t+1)$, é fácil obter uma contradição com o fato de que U é FC. ∇

Corolário 2.5: Suponhamos que KG é infinito, G é não abeliano e U é FC. Então, $J(KG) = 0$ ou $\text{car}(K) = 2$ e $J(KG) = \Delta(G, \langle g \rangle)$, em que $o(g) = 2$ e g é o único 2-elemento de G .

Prova: Pela Proposição 1.5, $J(KG)$ é nil. Se G não contém p -elementos, $J(KG) = 0$ por [P, Teorema 3.4, p. 47]. Se G contém p -elementos, pelo Lema 2.4, $p = 2$ e G contém um único 2-elemento g , com $o(g) = 2$ e $G' = \langle g \rangle$. Logo, $\Delta(G, \langle g \rangle)$ é um ideal nil, portanto contido em $J(KG)$. Ainda, $J(KG/\langle g \rangle) = 0$, pois $G/\langle g \rangle$ é abeliano e não contém 2-elementos (ver [P, Corolário 3.2, p. 283]). Daí, segue-se que $J(KG) \subset \Delta(G, \langle g \rangle)$. ∇

Lema 2.6: Suponhamos que KG é infinito e U é FC. Então, todo idempotente de KG é central.

Prova: Se K é infinito, o resultado segue do fato de que $U/Z(U)$ é de torção e do Lema II.2.1.

Podemos então supor que G é infinito. Sejam $e \in KG$ um idempotente e $g \in G$, e consideremos as unidades $u_g = 1 + (e-1)ge$, $u_g^{-1} = 1 - (e-1)ge$, $v_g = 1 + eg(e-1)$, $v_g^{-1} = 1 - eg(e-1)$.

Conjugando e por estas unidades, tem-se:

$$u_g e u_g^{-1} = e - (e-1)ge,$$

$$v_g e v_g^{-1} = e - eg(e-1).$$

Se $(e - 1)ge = eg(e - 1) = 0$, vem facilmente que $ege = ge = eg$. Podemos portanto supor, por absurdo, que $(e - 1)ge$, digamos, é não nulo. Mas esta expressão deve assumir um número finito de valores, e g assume infinitos valores em G . Daí, é fácil obter uma contradição. ∇

Podemos agora caracterizar os anéis de grupo tais que U é FC, quando G é um grupo de torção.

Teorema 2.7. Suponhamos que $\text{car } K = p$ e seja $G = T$, um grupo de torção. Então, U é FC se e somente se T é abeliano ou KT é finito.

Prova: Suponhamos que U é FC e vamos assumir, por absurdo, que KT é infinito e T é não abeliano. Pelo Lema 2.6, todo idempotente de KT é central. Logo, pelo Teorema II.1.1, $T = P \times A$, e A é central.

Como T é não abeliano, P é não abeliano. Mas, pelo Lema 2.4, deve ser $p = 2$ e $P = \langle g \rangle$, com $o(g) = 2$, uma contradição.

Sendo a recíproca trivial, o teorema está demonstrado. ∇

§3 GRUPOS COM ELEMENTOS DE ORDEM INFINITA

Completaremos aqui o estudo dos anéis de grupos tais que U é FC, supondo que G contém um elemento de ordem infinita e K é um corpo de característica p .

Lema 3.1: Seja $q \neq p$ um primo, e suponhamos que K contém as raízes q^i -ésimas da unidade, para todo i . Seja ainda $z \in Z(q^\infty)$, com $o(z) = q$. Então, existem idempotentes $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $KZ(q^\infty)$ tais que $(z-1)e_i \neq (z-1)e_j$ se $i \neq j$.

Prova: Para cada $n \geq 1$, definimos o idempotente $e_n = (q^{-n}) \sum_{0 \leq i \leq q^n - 1} (\xi y_n)^i$, em que ξ é uma raiz da unidade de ordem q^n e y_n é um elemento de $Z(q^\infty)$ tal que $y_n^{q^{n-1}} = z$.

Para demonstrar que $(z-1)e_i \neq (z-1)e_j$ se $i \neq j$, é suficiente demonstrar que y_n está no suporte de $(z-1)e_n$, para todo $n \geq 1$.

Computemos então o coeficiente θ de y_n em $(z-1)e_n$:

$$\theta = \xi q^{n-1} (q-1) + 1 - \xi,$$

que é obviamente não nulo. \(\nabla\)

Lema 3.2: Suponhamos que G é um grupo FC, não abeliano, com um elemento de ordem infinita, e T é um p' -grupo infinito. Então, U é FC se e somente se estão verificadas as seguintes condições:

- (a) T é central e tem a forma: $T = Z(q^\infty) \times B$, com q primo, $q \neq p$, $G' \subset Z(q^\infty)$, $|B| < \infty$.
- (b) Existe um natural k tal que K não contém raízes da unidade de ordem q^k .

Prova: *Necessidade* : Pelo Lema 2.6 e pelo Teorema II.1.1, T é um p' -subgrupo abeliano de G e, se T não é central, para todo $x \in G$ e todo $t \in A$, tem-se que $xtx^{-1} = t^{p^r}$, para algum r .

Sejam agora x, g elementos de G que não comutam, com $g^{-1} x^{-1} gx = t \in T$.

Afirmamos que G' está contido em todo subgrupo infinito H de T . De fato, se $t \notin H$, existe uma cadeia infinita $H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \dots \subsetneq H_n \subsetneq \dots$ de subgrupos de H tais que $t \notin H_i$, para todo i .

$$\text{Seja } e_i = |H_i|^{-1} \sum_{x \in H_i} x.$$

Considerando suportes, é fácil ver que $(1-t)e_i = (1-t)e_j$ se e somente se $e_i = e_j$.

Tomando então as unidades $u_i = e_i x + (1 - e_i)$, $u_i^{-1} = e_i x^{-1} + (1 - e_i)$, vem que g tem infinitos conjugados $u_i g u_i^{-1} = (e_i t + 1 - e_i)g$.

Agora, T não é um grupo reduzido, pois neste caso T conteria uma soma direta infinita de subgrupos finitos [F, Corolário 27.2, p. 117]. Logo, T contém um subgrupo divisível e, como G' está contido em todo subgrupo infinito de T , deve ser $T = Z(q^\infty) \times B$, com $|B| < \infty$, $G' \subset Z(q^\infty)$, em que q é um primo diferente de p .

Como, para todos $g \in G$, $b \in B$, $g b g^{-1} = b^{p^r}$, vem que $g b g^{-1} b^{-1} \in B \cap Z(q^\infty) = \{1\}$, e portanto B é central. Também, $Z(q^\infty)$ é central, já que G é um grupo FC. Isto termina a demonstração de (a).

Para (b), suponhamos, por absurdo, que K contém as raízes q^i -ésimas da unidade, para todo i . Como T é central, é fácil ver que existem $x, y \in G$ tais que $xyx^{-1}y^{-1} = z$, com $o(z) = q$. Dados os idempotentes e_n do Lema 3.1, construímos as unidades $u_n = e_n x + (1 - e_n)$, com $u_n^{-1} = e_n x^{-1} + (1 - e_n)$.

Tem-se: $u_n y u_n^{-1} = y(e_n z + 1 - e_n)$.

Como, pelo Lema 3.1, $e_n z + 1 - e_n \neq e_m z + 1 - e_m$ se $n \neq m$, ter-se-ia um número infinito de conjugados para y , uma contradição.

Suficiência: Seja $u \in U$. Se S é um transversal de T em G , podemos escrever u na forma: $u = \sum \alpha_i g_i$, $\alpha_i \in K$, $g_i \in S$.

Dado $v \in U$, tem-se: $v u v^{-1} = \sum \alpha_i v g_i v^{-1}$, pois T é central. É então suficiente mostrar que as classes de conjugação em U de elementos de G são finitas, ou seja, que os conjuntos $\{(v, g) \mid v \in U\}$, com g fixo, são finitos.

Sejam então $g \in G$, $v \in U$. Como G é um grupo FC, o conjunto dos comutadores (h, g) , com $h \in G$, é um subconjunto finito de $Z(q^\infty)$, contido, digamos, em $\langle t \rangle$, com $t \in Z(q^\infty)$.

Se $KB = \bigoplus_i F_i$, um produto direto de corpos, então $K(B \times Z(q^\infty)) = \bigoplus_i F_i Z(q^\infty)$. Ainda, é fácil ver que cada F_i não pode conter todas as raízes q^i -ésimas da unidade.

Consideremos agora o idempotente $e = o(t)^{-1}(1 + t + \dots + t^{o(t)-1})$. Chamando f_i a componente de e em $F_i Z(q^\infty)$ e 1_i sua unidade vem, por [P, Lema 4.3, p. 690], que $1_i = f_i =$

$= \sum_{j=1}^{s_i} e_{ij}$, em que os e_{ij} são idempotentes ortogonais primitivos de $F_i Z(q^\infty)$.

Logo, $1 - e = \sum_i (1 - f_i) = \sum_{i,j} e_{ij}$, em que os e_{ij} são idempotentes ortogonais primitivos de $K(B \times Z(q^\infty))$.

Seja então H o subgrupo de G gerado pelos suportes de v e dos e_{ij} . Como H é FC, $T(H)$ é finito; logo existe $t_1 \in Z(q^\infty)$ tal que $T(H) \subset \langle t_1 \rangle \times B$.

Tem-se: $K(\langle t_1 \rangle \times B) = (\bigoplus_{i,j} K_{ij}) \oplus K(\langle t_1 \rangle \times B)e$, em que cada K_{ij} é um corpo com elemento unidade e_{ij} .

Portanto, podemos indexar os idempotentes ortogonais primitivos $\{\ell_k\}$ de $K(\langle t_1 \rangle \times B)$ na forma:

$$e \ell_k = 0, \quad 1 \leq k \leq s,$$

$$e \ell_k = \ell_k, \quad s < k \leq n(v),$$

em que s não depende de v .

Por [S, Lema 3.22, p. 194], v é da forma:

$$v = \sum_k \alpha_k h_k, \quad \alpha_k \in K(\langle t_1 \rangle \times B) \ell_k, \quad h_k \in G.$$

$$\text{Logo, } (v, g) = \sum_{1 \leq k \leq s} (h_k, g) \ell_k + \sum_{s < k \leq n(v)} (h_k, g) e \ell_k =$$

$$\sum_{1 \leq k \leq s} (h_k, g) \ell_k + \sum_{s < k \leq n(v)} e \ell_k =$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq s} (h_k, g) \ell_k + e.$$

Portanto, o conjunto $\{(v, g) \mid v \in U\}$ é finito. $\square$

Teorema 3.3: Suponhamos que $\text{car}(K) = p$, e seja G um grupo que contém um elemento de ordem infinita. Então, U é FC se e somente se uma das seguintes condições está verificada:

- (i) G é abeliano.
- (ii) $p = 2$, $T = G' \times A$, em que G' tem ordem 2 e A é um 2'-subgrupo central finito.
- (iii) G é um grupo FC não abeliano, T é um p' -grupo abeliano tal que:
 - ou KT é finito e $\forall t \in T, \forall x \in G$, existe um natural r tal que $xtx^{-1} = t^{p^r}$, com $(K:P(K)) \mid r$;
 - ou T é central finito;
 - ou T é central e tem a forma: $T = Z(q^\infty) \times B$, com q primo, $q \neq p$, $G' \subset Z(q^\infty)$, $|B| < \infty$. Neste caso, existe um natural k tal que K não contém raízes da unidade de ordem q^k .

Prova: Necessidade: Suponhamos que U é FC e G é não abeliano.

Se G contém p -elementos, então $p = 2$, G' tem ordem 2 e G contém um único 2-elemento, pelo Lema 2.4.

Além disso, pelo Lema 2.6 e pelo Teorema II.1.1, A é um subgrupo abeliano de G e $T = G' \times A$.

Para terminar (ii), resta apenas provar que A é central e finito. Mas, pelo Teorema II.1.1, se A não é central, então para todo $x \in G$ e todo $t \in A$ tem-se que $xtx^{-1} = t^{2^r}$, para algum r . Logo, $xtx^{-1}t^{-1} = t^{2^r-1}$. Como G' é um 2-grupo, deve ser

$t^{2^r-1} = 1$, ou $t^{2^r} = t$. Logo, A é central.

Suponhamos agora, por absurdo, que A é infinito. Então, KA contém infinitos idempotentes e_n , $n \in \mathbb{N}$. Se $x, y \in G$ não comutam, então y tem infinitos conjugados:

$(xe_n + 1 - e_n)$ y $(x^{-1}e_n + 1 - e_n)$, uma contradição.

Suponhamos agora que G não contém p -elementos. Pelo Lema 2.6 e pelo Teorema II.1.1, T é um p' -subgrupo abeliano de G e, se T não é central, pelo Lema 1.1, K é algébrico sobre $P(K)$; logo, de novo pelo Teorema II.1.1, K é finito e para todo $x \in G$ e todo $t \in A$, tem-se que $xtx^{-1} = t^{p^r}$, com $(K:P(K)) \mid r$.

Para terminar esta parte da prova, resta apenas mostrar que se T é infinito, então T é central e vale a última parte da condição (iii), o que decorre imediatamente do Lema 3.2.

Suficiência: Se vale a condição (i), não há nada a demonstrar.

Suponhamos então que a condição (ii) está verificada. Ou seja, $p = 2$, $T = G' \times A$, em que G' tem ordem 2 e A é um $2'$ -subgrupo central finito de ordem n .

Seja então $u \in U$, e vamos mostrar que u tem um número finito de conjugados.

Observamos primeiro que o ideal nilpotente $\Delta(G, G')$ é central. De fato, sejam $G' = \langle g \rangle$ e $\delta \in \Delta(G, G')$, $\delta = \sigma(1 + g)$, $\sigma \in KG$.

Dado $x \in G$, tem-se: $x \sigma x^{-1} = \sigma + \sigma'(1+g)$, $\sigma' \in KG$, já que G/G' é abeliano. Conjugando agora δ por x , vem:

$$x \delta x^{-1} = x \sigma x^{-1} (1+g) = (\sigma + \sigma'(1+g)) (1+g) = \sigma(1+g) + \sigma' (1+g)^2 = \sigma(1+g) = \delta.$$

O epimorfismo natural $KG \rightarrow K(G/G')$ tem por núcleo ideal $\Delta(G, G')$. Ainda, $K(T(G/G')) \cong KA = \bigoplus_i K_i$, um produto direto de r corpos. Por [S, Lema 3.22, p. 194], u pode ser escrito na forma:

$$u = \sum_i f_i g_i + \delta, \quad f_i \in K_i, \quad g_i \in G, \quad \delta \in \Delta(G, G').$$

Dada agora $v \in U$, $v = \sum_i \ell_i h_i + \sigma$, $\ell_i \in K_i$, $h_i \in G$, $\sigma \in \Delta(G, G')$, tem-se: $v^{-1} = \sum_i \ell_i^{-1} h_i^{-1} + \sum_i \ell_i^{-2} h_i^{-2} \sigma$.

$$\text{Ainda, } v u v^{-1} = \sum_i f_i v g_i v^{-1} + \delta.$$

Portanto, é suficiente demonstrar que, para cada $h \in G$, fixo, o conjunto $\{v h v^{-1} \mid v \in U\}$ é finito.

$$\text{Ora, } v h v^{-1} = \sum_i h_i h h_i^{-1} + \sum_i \ell_i^{-1} h_i h h_i^{-2} \sigma + h \sigma \sum_i \ell_i^{-1} h_i^{-1}.$$

Indexando os h_i de forma que

$$h_i h h_i^{-1} = h, \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$h_i h h_i^{-1} = gh, \quad s < i \leq r, \text{ vem:}$$

$$\begin{aligned} v h v^{-1} &= sh + (r-s)gh + \sum_{1 \leq i \leq s} \ell_i h h_i^{-1} \sigma + \sum_{s < i \leq r} \ell_i^{-1} g h h_i^{-1} \sigma + h \sigma \sum_i \ell_i^{-1} h_i^{-1} = \\ &= sh + (r-s)gh + h \sigma (2 \sum_{1 \leq i \leq s} \ell_i^{-1} h_i^{-1}) + h \sigma \sum_{s < i \leq r} \ell_i^{-1} h_i^{-1} (1+g) = \\ &= sh + (r-s)gh, \text{ pois } \sigma(1+g) = 0. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que a condição (iii) está verificada.

Se KT é finito e $\forall t \in T, \forall x \in G$ tem-se que $xtx^{-1} = t^{p^r}$, com $(K: P(K)) \mid r$, então, pelo Teorema II.1.1, todo idempotente de KT é central em KG . Seja $KT = \bigoplus_i K_i$, um produto direto de corpos que são extensões finitas de K . Por [S, Lema 3.22, p. 194], que se aplica nesta situação, todo $u \in U$ é da forma :

$$u = \sum k_i g_i, \quad k_i \in K_i, \quad g_i \in G.$$

Então, um conjugado de u por $v = \sum \ell_i h_i, \ell_i \in K_i, h_i \in G$, é da forma:

$$v u v^{-1} = \sum \ell_i k_i h_i g_i \ell_i^{-1} h_i^{-1}.$$

Ainda, chamando $\phi_i : K_i \rightarrow K_i$ o automorfismo de K_i definido pela conjugação por $h_i g_i$, vem:

$$v u v^{-1} = \sum \ell_i k_i \phi_i(\ell_i^{-1}) h_i g_i h_i^{-1}$$

Como os K_i são finitos e G é FC, é fácil ver que u tem um número finito de conjugados.

Ainda, se T é central e finito, um raciocínio mais simples do que o acima mostra que U é FC.

Finalmente, se se verifica o restante da condição (iii), U é FC pelo Lema 3.2. ∇

R E F E R Ê N C I A S

- [C - S] G.H. Cliff and S.K. Sehgal, Group rings with torsion units over the center, *Manuscripta Mathematica*, 33 (1980), 145-158.
- [C - Se] G.H. Cliff and S.K. Sehgal, Group rings whose units form an FC-group, *Mathematische Zeitschrift*, 161 (1978), 163-168.
- [C - Seh] G.H. Cliff and S.K. Sehgal, Groups which are normal in the unit groups of their group rings, *Arch. Math.* 33 (1980), 529-537.
- [F] L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, volumes 1 e 2, Academic Press, 1970.
- [H] I.N. Herstein, *Non commutative rings*, Carus Mathematical Monographs, No. 15, Math. Assoc. Amer., 1968.
- [I] I.M. Isaacs, *Character group theory of finite groups*, Academic Press, 1976.
- [M] C. Polcino Milies, Group rings whose units form an FC-group, *Archiv der Mathematik*, 30 (1978), 380-384.
- [P] D.S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Interscience, New York, 1977.
- [Pa] D.S. Passman, Nil ideals of bounded degree in group rings, pré-print.

- [R] I. Reiner, Maximal orders, Academic Press, 1975.
- [Ro] D.J.S. Robinson, Springer Verlag, 1972.
- [S] S.K. Sehgal, Topics in group rings, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [S - Z] S.K. Sehgal and H.J. Zassenhaus, Group rings whose units form an FC-group, Mathematische Zeitschrift, 153 (1977), 29-35.
- [Z] H.J. Zassenhaus, The theory of groups, Chelsea Publishing Company, New York, 1949.

DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

Definição: Um grupo G diz-se FC (finite class) se as classes de conjugação dos elementos de G são finitas.

Definição: Sejam n em natural, p um primo, com $n = p^a \cdot m$, $\text{mdc}(p, m) = 1$. O inteiro p^a diz-se a p -parte de n .

$P(K)$ corpo primo de K

K° grupo dos elementos inversíveis de K

$\text{car } K$ característica de K

$\langle S \rangle$ grupo gerado por S

$Z(q^\infty)$ o q -subgrupo de Sylow do grupo aditivo Q/Z .

$(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$